INSTITUT
DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT
DES MATHEMATIQUES

41
SEPTEMBRE 2002

DEUX EXPERIENCES REALISEES EN FORMATION CONTINUE AUTOUR D'ENONCES DE PROBLEMES DE MATHEMATIQUES EN CLASSES SCIENTIFIQUES

Groupe de recherche-formation de l'académie de Toulouse

Stage PAF de l'académie de Versailles

DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

UNIVERSITE PARIS 7-DENIS DIDEROT

DEUX EXPERIENCES REALISEES EN FORMATION CONTINUE AUTOUR D'ENONCES DE PROBLEMES DE MATHEMATIQUES EN CLASSES SCIENTIFIQUES

Groupe de recherche-formation de l'académie de Toulouse

Stage PAF de l'académie de Versailles

« Dis moi et j'oublierai,

montre moi et je me souviendrai,

implique moi et je comprendrai »

<u>Confucius</u> (551-479 av JC)

Sommaire

Une introduction commune au travail des groupes de Toulouse et Versailles : les analyses d'énoncés mathématiques, une entrée dans des formations continues d'enseignants.

Dans cette introduction commune aux deux expériences relatées dans cette brochure[1], nous présentons successivement des généralités sur la formation continue, puis des éléments sur notre conception des pratiques d'enseignants et enfin des éléments d'analyses d'énoncés, justifiés par nos hypothèses sur les apprentissages (toutes les considérations un peu théoriques sont empruntées à la didactique des mathématiques). Nous concluons sur les expériences elles-mêmes.

La brochure comporte deux parties distinctes correspondant aux deux expériences (numérotées indépendamment). Les présentations ne sont pas analogues, les conditions de travail ont été différentes, cependant une communication a été établie entre les deux groupes, autour de leur problématique commune.

La bibliographie est commune aux deux parties et figure à la fin de la première partie.

1) Un questionnement sur certains objectifs de la formation continue

Nous nous intéressons essentiellement ici aux stages qui n'ont pas (ou pas seulement) pour objectif une transmission directe de connaissances mathématiques (formations aux concours internes par exemple, ou aux statistiques, à l'arithmétique, etc.). Ce sont notamment des stages autour de questions liées aux pratiques en classe.

Ces actions de formation continue ne font pas encore l'objet de travaux de recherche très nombreux, même si des évaluations, souvent « à chaud », sous forme d'appréciations des enseignants sur le stage suivi, sont régulièrement effectuées et donnent certaines idées.

Par delà une certaine satisfaction des stagiaires, où on peut lire éventuellement le respect de l'investissement du formateur, on peut constater que sont rarement évoqués des questionnements qui prolongeraient le stage, ou des retombées prévues sur les pratiques en classe.

[1] Rédigée par Aline Robert

On peut aussi noter globalement une certaine dispersion des formations, un certain manque de mémoire, lié à une absence de productions faites pendant les stages, souvent très courts d'ailleurs.

Nos questions portent sur les objectifs de cet énorme dispositif : s'agit-il d'apporter, (directement ou) indirectement, des éléments de savoirs mathématique ou informatique, ou épistémologique... qui manqueraient, ou seraient en partie oubliés ? S'agit-il d'apporter aux enseignants qui suivent la formation un souffle « du dehors » pour les aider à tenir dans leur longue route ? S'agit-il d'avoir un certain impact sur les pratiques en classe, en contribuant à des adaptations professionnelles liées à la conjoncture ? Sans doute les trois composantes co-existent, et pourraient même être liées : une bonne conférence d'un mathématicien prestigieux peut contribuer à la fois à donner certaines idées mathématiques, qui auront une répercussion en classe, et à valoriser celui qui l'écoute. Cependant, il nous semble que les modalités actuelles de formation continue sont moins satisfaisantes en termes de retombée effective sur les pratiques, par delà les stricts contenus.

Mais nous pensons que ce sont les modalités des stages qui sont essentiellement en cause : par exemple, les seuils de travail nécessaires à un certain enrichissement des pratiques ne sont pas respectés (le nombre de demi-journées, leur espacement dans l'année sont souvent dérisoires par rapport à ce qui serait nécessaire pour dépasser ces seuils).

Nous allons donc développer maintenant quelques résultats sur les pratiques en classe des enseignants de mathématiques, qui justifient en partie ces affirmations sur des évolutions éventuelles de pratiques. Mais avant, nous précisons notre position dans un préambule « théorique ».

2) Un préambule : comment apprécier les apports des didacticiens ?

Ou encore à quelle légitimité pouvons-nous prétendre ?

Nous voulons insister sur le fait que nos analyses, les inférences que nous en tirons, sont étroitement liées à nos hypothèses préalables, admises, ainsi qu'aux expériences qui ont été faites pour les établir.

En effet toute analyse, et par suite tout résultat en didactique des mathématiques, qui porte sur l'enseignement en classe d'un contenu mathématique et aux apprentissages qui en résultent, correspondent nécessairement à des choix, à un certain point de vue, à un certain découpage de la réalité : pour réaliser cette analyse, pour établir ce résultat on a fait des expériences qu'on a déterminées à l'avance, on a recueilli des données (donc il y a des données que l'on n'a pas recueillies), on a retenu des variables pour analyser ces données et on en a ignoré d'autres, qu'on n'avait pas renseignées. Ce sont précisément nos hypothèses préalables, admises[2], qui nous amènent à ces choix. Par exemple nous n'analysons pas les phénomènes affectifs ou psychiques présents dans une classe qui, pourtant, ont certainement une influence sur les apprentissages individuels. En revanche nous essayons de retenir tout ce qui dépend directement de l'enseignant, consciemment (même si cela résulte d'un choix implicite), et qui peut être mis en relation avec les activités potentielles des élèves, d'un point de vue cognitif. C'est l'intermédiaire que nous choisissons pour nous renseigner sur les apprentissages, et nous adoptons l'hypothèse que cette approche des apprentissages, même partielle, est tout de même consistante, même si des facteurs importants échappent obligatoirement.

Par exemple lorsqu'on analyse des énoncés d'exercices ou de problèmes, on va essayer de reconstituer le travail mathématique que les élèves auront à faire, dans leur tête puis sur le papier. On retient le cours qu'ils ont reçu, on cherche les transformations de ce cours qu'ils ont à mettre en œuvre pour résoudre l'exercice, on tient compte des autres exercices proposés et aussi, bien entendu, des accompagnements du professeur pendant la séance, qui peuvent modifier le travail sur l'énoncé initial. C'est ce qui nous amène à étudier a priori dans un énoncé les adaptations d'une notion à utiliser (en cours d'acquisition) - définition, théorème, propriété, formule, méthodes - qu'on caractérise par un certain niveau de mise en fonctionnement (cf. ci-dessous). On complète ensuite ces analyses par ce qui s'est passé en classe, et qui a pu influencer directement les activités des élèves provoquées par l'exercice. On ignore en revanche non seulement les facteurs affectifs mais encore beaucoup d'éléments conjoncturels liés à la classe (ce qui se passe dans les autres disciplines, l'actualité politique et sociale etc.), qui sont considérés comme des « bruits ».

De plus les analyses et les résultats de recherche transportent avec eux une certaine portée et une certaine limite, liées à leurs conditions de production. Par exemple les recherches actuelles sur les pratiques en classe (ordinaires) auxquelles je vais faire allusion sont la plupart du temps « cliniques » - menées sur 4, 5, 10 professeurs, rarement plus : cela donne des renseignements qualitatifs, pas quantitatifs, néanmoins indispensables. Il est important de pondérer les déclarations des chercheurs par ce type de renseignement, qu'ils ne pensent pas toujours repréciser...

[2] Même si des évolutions peuvent intervenir au fur et à mesure des recherches.

3) Pratiques des enseignants en classe : quelles alternatives ? Quelles modalités de formation ?

Pour fixer des objectifs liés aux pratiques des enseignant à des actions de formation continue, deux préalables doivent être évoqués : ce qui peut changer pour un enseignant donné (les alternatives), et de quelle manière on peut espérer installer un tel changement (les modalités de formation). Nous n'avons pas bien sûr les réponses à ces deux questions (cela se saurait !), mais des éléments tirés de nos travaux, présentés ci-dessous, peuvent contribuer à éclairer la réflexion.

a) Des alternatives dans les pratiques enseignantes

Un certain nombre de travaux de recherche qui sont menés en didactique des mathématiques sur les pratiques en classe des enseignants de mathématiques amènent aux inférences suivantes, en termes d'alternatives dans les pratiques, par delà les variabilités individuelles :

I

- **En termes de choix de « savoirs » enseignés : il y a peu d'alternatives globales**

On trouve des alternatives locales, c'est à dire des petites adaptations des contenus à enseigner, au sein d'une « enveloppe » assez stable, très liée aux programmes, et, de ce fait, très contraignante. Le carcan du temps et diverses attentes des parents, de l'institution, des collègues, voire des élèves renforcent encore ces contraintes (des thèses de didactique des mathématiques[3] illustrent avec force ce propos).

Les différences peuvent porter sur l'ordre de la présentation des notions, leur répartition respective dans le temps, et leur développement. Les choix portent ainsi sur les contenus « locaux », à l'intérieur d'un chapitre, (et les scénarios), les exercices à retenir, l'ordre des présentations et leur teneur.

L'utilisation des manuels permet de renforcer tel ou tel choix[4].

- **En termes de travail des élèves : il y a des alternatives importantes**, évidemment non indépendantes entre elles, ni des précédentes.

[3] Notamment celles de Roditi, et Coulange.

[4] Comme le montre la thèse de Ben Salah.

Des recherches sur les pratiques en classe montrent que chaque enseignant installe divers lieux dans sa classe, avec des choix récurrents. L'utilisation du tableau renvoie bien à certains de ces choix[5]. Les discours tenus par les enseignants sont aussi une composante importante de cette diversité, certains enseignants parlent plus que d'autres, d'aucuns questionnent plus que d'autres, mais la portée des questions est aussi variable, des enseignants structurent beaucoup leurs interventions, d'autres moins, certains ont volontiers recours à des explications « méta » (sur les mathématiques), d'autres non.

Les questions suivantes renseignent sur cette diversité, elles traduisent des hypothèses que font les didacticiens sur les liens entre enseignement et apprentissage[6] qui permettent de préciser ce qui sera étudié prioritairement : dans quelle mesure, avec quelles alternances la classe est-elle lieu de savoir (les élèves écoutent l'enseignant) ? Alors quel savoir est exposé aux élèves ? Mathématique, méta ? Avant ou après les activités correspondantes des élèves? Quand la classe est-elle lieu de travail (plus de la moitié des élèves travaillent, sur une durée d'au moins quelques minutes) ou lieu d'interactions immédiates (les élèves participent à un dialogue avec le professeur) ? Quel travail mathématique est alors proposé aux élèves (quelle « distance » entre savoir exposé et travail, quelles tâches prescrites ? Avec quelles formes de travail ? Quelles aides (méta ou non, avant ou après les activités) ? Quels encouragements ?)

Nous ne pensons pas que ces alternatives soient directement reliées à des effets différents pour (tous) les élèves ; nous supposons cependant qu'à force, compte tenu de la répétition quotidienne de certaines pratiques, ce qui est installé peut ne pas être analogue d'un enseignant à l'autre. La diversité des élèves et le fait que chaque élève soit confronté à plusieurs types de fréquentations des mathématiques dans sa scolarité minimisent encore les «risques ». Reste des questions sur les divers effets sur les élèves des différentes pratiques, sur ce qui a été construit par delà les réussites strictes et sur ce qui concerne les élèves les plus fragiles.

b) *Les pratiques enseignantes se caractérisent par une stabilité certaine, une grande complexité et une grande cohérence[7]. Alors quelle formation ?*

Ce qui rend les analyses de pratiques délicates, et le travail de formation très compliqué, tient en particulier à notre avis à ces trois caractéristiques, inspirées de recherches

---

[5] Cf. Robert et Vandebrouck.

[6] On reconnaît les dimensions liées au savoir (passages du général aux applications particulières) et à la gestion de la classe (accompagnements et formes de travail des élèves).

[7] cf. Robert, Rogalski 2001

ergonomiques et didactiques : les pratiques d'un enseignant sont stables[8], c'est-à-dire que des choix analogues président aux décisions du même ordre – donc elles ne changent pas facilement ; elles sont complexes, aucune composante ne peut être isolée, et il y a toujours une recomposition qui dépasse les descriptions en composantes – donc un changement ne peut concerner une seule dimension ; de plus, à différents niveaux, ces pratiques sont cohérentes, et cela renforce la complexité : un changement (sur un scénario, sur un mode gestion...) en implique toujours d'autres, pour que l'enseignant s'y retrouve et réorganise avec sa cohérence[9] l'ensemble de ses interventions en classe. L'expérience enseignante fait partie de ce tableau, s'inscrivant comme un élément déterminant de la cohérence. La répétition du quotidien et son rôle dans les acquisitions, l'inscription des apprentissages dans le temps long renforcent l'importance de la cohérence.

Des recherches récentes ont ajouté une cause de stabilité : en réponse aux contraintes qui pèsent sur eux, tout se passe comme si les enseignants, à différents niveaux, établissements, types d'établissements, disciplines, avaient élaboré collectivement un certain nombre de conduites, particulièrement adaptées, économiques, et difficiles à modifier (cf. travail ergonomique de Y. Clot). Ces conduites, partagées, transmises, perdureraient même aux contraintes qui leur ont donné naissance, le cas échéant... Les difficultés d'adaptation aux TICE, aux TPE, à toutes les formes de soutien individualisé pourraient en partie relever de ce phénomène.

La formation des pratiques est encore plus « terra incognita » que les pratiques elles-mêmes, avec sans doute des différences entre formation initiale et formation continue, où les habitudes individuelles sont prises. Disons qu'entre reproduction des pratiques rencontrées dans le passé, imitation de pratiques montrées en formation, adaptation d'éléments théoriques ou pratiques pour les faire rentrer dans une cohérence en germe, nous trouvons vraisemblablement beaucoup d'ingrédients à prendre en compte.

Dans ces conditions, pourquoi, comment agir sur des pratiques aussi cohérentes, et compliquées ?

D'abord les études entre pratiques et effets sur les élèves sont peu nombreuses, quelquefois assez opaques, et nul ne semble détenir à ce jour d'élément déterminant et universel à ce sujet.

[8] Au moins après quelques années d'enseignement

[9] Ainsi, après l'étude de quelques séances en classe d'un enseignant, on peut reconnaître une transcription non signée du même enseignant dans la même classe.

Il n'y aura donc pas d'argument définitif à apporter à telle ou telle alternative, même si certains choix ont des conséquences probables.

Si on admet cependant que certains scénarios peuvent favoriser un certain type apprentissage, plus basé sur le sens que sur des automatismes par exemple, reste le problème de la manière d'amener des enseignants à pouvoir utiliser ces scénarios.

La prise en compte de la cohérence de chaque système particulier de pratiques appelle une grande prudence : il faut que les propositions puissent être insérées dans ce système, tout en étant suffisantes pour conduire à des modifications s'il y a lieu.

Autrement dit, il s'agit de ne pas proposer des trop gros changements, mais il faut que ces propositions soient perçues comme des modifications, pas trop radicales, et quand même suffisants pour qu'ils ne puissent pas être intégrés dans les pratiques trop aisément ; tout en respectant les singularités de chacun, en travaillant sur des aménagements individuels, des adaptations ne dénaturant pas le projet et respectant les cohérences de chacun.

4) Les analyses d'énoncés d'exercices : des tâches prescrites aux activités potentielles des élèves

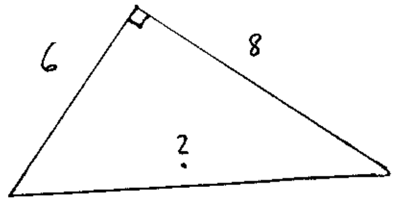
Nous allons développer une entrée dans un travail sur les pratiques enseignantes à partir des analyses d'énoncés d'exercices à proposer aux élèves.

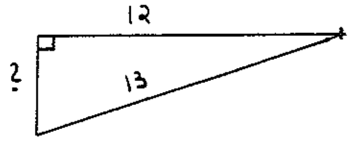
Nous allons donc décrire ces analyses, en expliquant l'enjeu que nous y mettons et nous reviendrons pour conclure sur l'exploitation en formation continue qui est l'objet de cette brochure.

a) Des analyses précises, relatives à chaque niveau et à chaque classe, mettant en jeu le niveau de mise en fonctionnement des connaissances.

Nous allons partir d'un petit exemple.

Voici deux énoncés d'un même exercice proposé juste après le cours sur le théorème de Pythagore en quatrième (tiré des évaluations EVAPM). Les résultats des élèves sont indiqués, ils permettent de supposer que le deuxième énoncé est un peu plus difficile que le premier, et laissent voir que 30% des élèves ne réussissent pas le premier, et 42% le second.





Il s'agit de calculer la longueur du troisième côté, notée par un point d'interrogation.

En quoi ces énoncés peuvent-ils présenter une difficulté, en quoi ces exercices diffèrent ?

On peut citer quelques caractéristiques de ces énoncés, en réfléchissant à l'activité d'un élève de quatrième pour résoudre les exercices en sachant qu'il lui faut appliquer le théorème de Pythagore : la position du triangle n'est pas la même que celle du « cours », le caractère rectangle est indiqué par un symbole et non par un texte explicite, les sommets ne sont pas nommés (alors qu'ils le sont dans le « cours »), il faut reconnaître que le calcul demandé porte sur l'hypoténuse puis sur un côté de l'angle droit... Autrement dit les élèves ont à adapter légèrement l'énoncé dont ils disposent d'après leur cours.

Donnons un autre exemple : si on demande de construire un triangle équilatéral (resp. un cercle) d'aire égal à la somme des aires de deux triangles équilatéraux (resp. carrés, cercles) donnés, il faut reconnaître que le côté (le rayon) de la figure cherchée s'obtient comme somme des carrés des côtés (rayons) donnés, et que c'est donc le théorème de Pythagore qui permet de le construire. Cette reconnaissance de l'outil correspond à une disponibilité du théorème, et exige une certaine prise de sens : il faut retrouver ce qui permet de résoudre un problème donné. Chercher des exercices où une connaissance doit être disponible enclenche une activité qui peut donner du sens à ce théorème, et même en améliorer l'application technique ultérieure.

Nous faisons l'hypothèse que ces adaptations d'énoncés, qui correspondent aux tâches prescrites aux élèves, sont (potentiellement) associées à des activités des élèves plus ou moins immédiates, ayant des conséquences différentes sur les apprentissages : appliquer un théorème de manière simple (en remplaçant des données littérales par des données numériques par exemple), isolée (il n'y a rien d'autre à faire), n'implique pas la même activité qu'appliquer ce même théorème en introduisant un changement de notation, ou un changement de position, ou en isolant une partie de la figure pour pouvoir appliquer le théorème, etc. Ces activités amènent des variations dans l'application du théorème, une mise à distance qui permet ces adaptations (reconnaissance de ce qui est « pareil »), des mises en relation si l'application n'est pas isolée, un passage par un autre domaine de travail, ici le calcul algébrique, ou trigonométrique, voire à une réflexion sur le sens du théorème. Ce sont justement ces différentes activités qui, pour nous, tout à la fois impliquent et sont impliquées par l'apprentissage du théorème[10].

Nous caractérisons le degré d'adaptation d'une connaissance à mettre en fonctionnement dans un énoncé par la notion de niveau de mise en fonctionnement : nous distinguons le niveau du simple et isolé (technique), le niveau du mobilisable (mise en fonctionnement indiquée ou presque, mais non simple ou non isolée, nécessitant des adaptations), le niveau du disponible (mise en fonctionnement non indiquée, à reconnaître). Citons quelques adaptations :

* reconnaître un théorème ou une définition ou une formule ou une méthode, qui ne sont pas indiqués directement dans l'énoncé,
* les adapter à la situation rencontrée (applications multiples ou répétées, indépendantes ou non, introduction d'un intermédiaire, changement de cadre, ou de registre, ou de point de vue, utilisation d'une question précédente, ou interprétation d'une donnée etc.),
* mélanger plusieurs connaissances à la fois.

D'autres paramètres permettent de varier les tâches et donc les activités proposées : le fait d'indiquer ce qui est à montrer (degré d'ouverture de la question posée), le fait d'indiquer une méthode à suivre (existence et nature des indications), le fait de découper plus ou moins une question et de laisser ou non des étapes ou des intermédiaires ou des changements de cadres à la charge des élèves. En somme on peut jouer sur la nature et l'importance des initiatives laissées aux élèves, y compris en terme de contrôle interne.

Enfin, les analyses des énoncés sont évidemment relatives à un niveau scolaire donné, voire à une classe donnée, puisqu'elles mettent en jeu des connaissances acquises ou à acquérir. Ce qui peut poser problème en quatrième (changer le nom des sommets pour appliquer le théorème de Pythagore) n'est même plus remarqué plus tard.

b) Des enjeux, en terme de contrôle de la suite des activités potentielles des élèves, avec des conditions en termes de gestion (variété, fréquence, déroulement effectif).

On peut d'abord noter que ces analyses préalables permettent de mieux reconnaître les adaptations demandées, qui peuvent passer inaperçues, et permettent aussi d'éviter de passer trop vite aux activités trop compliquées.

[10] Nous adoptons ici une théorie de l'apprentissage faisant une part importante à l'activité des élèves.

Ceci dit, nous faisons l'hypothèse qu'il y a un enjeu dans la suite des tâches proposées aux élèves. Si on se cantonne à des tâches techniques, applications simples et isolées d'éléments du cours, nous pensons que l'apprentissage qui en résulte, même si les élèves réussissent, peut rester trop limité, car les activités correspondantes sont d'un seul type, du décontextualisé explicite (général, abstrait, conceptuel) au contextualisé (concret), et ne conduisent pas aux adaptations, mises en relation, et finalement prises de sens indispensables.

Cela revient à dire que, pour nous, apprendre c'est à la fois conceptualiser et organiser des connaissances, pour pouvoir mettre en fonctionnement plusieurs aspects de ces connaissances, généraux ou particuliers. Seulement pour arriver à un tel apprentissage, nous faisons l'hypothèse complémentaire suivante : pour arriver à installer cet apprentissage, il est efficace, entre autres, de proposer (assez souvent) aux élèves de résoudre des questions où les mises en fonctionnement ne sont pas simples et isolées. Pour résumer, ces résolutions sont "source et critère" du savoir des élèves, pour reprendre une formule de G. Vergnaud.
Il s'agit de respecter le besoin de gammes, de mises en fonctionnement simples et isolées, mais aussi de proposer d'autres tâches, à adapter à la classe.

Seulement cette prévision d'énoncés ne suffit encore pas : en effet n'importe quel énoncé un peu ouvert peut être complètement fermé suite à des interventions de l'enseignant, une activité d'adaptation peut ne pas avoir lieu si le temps de recherche suffisant à l'enclencher, si ce n'est la mener à terme n'est pas laissé, les mises en relation jouent souvent sur plusieurs séances qu'il faut alors « disposer » bien.

Ainsi une prévision et un contrôle des conditions de travail sur les énoncés sont indispensables et peuvent demander un très gros effort aux enseignants. Laisser chercher les élèves est un slogan bien vite dit, mais bien difficile à réaliser avec certains élèves. D'abord il faut savoir relancer et non pas répondre aux questions, et ceci demande de faire confiance aux élèves et à la situation, il faut savoir attendre et ce peut être très long, même si on écoute les élèves qui cheminent très lentement, il faut savoir résumer et intervenir à temps, pas trop longtemps pour ne pas perdre les élèves, souvent trop tôt pour les uns et trop tard pour les autres...

c) Le travail en formation continue

Nous allons présenter deux expériences conjointes de formations continues à la fois <u>liées à la recherche</u>, qui se déroulent <u>sur un temps long</u>, et qui prévoient un <u>aller retour avec la classe réelle.</u>

Ces deux formations (Versailles, Toulouse) ont pris comme point de départ les analyses d'énoncés.

Cette entrée permet à la fois des analyses liées aux mathématiques et aux apprentissages, elle amène à aborder les liens entre les tâches prescrites, les activités des élèves et la gestion de l'enseignant. Comme ces liens sont au cœur de la cohérence enseignante, cette entrée conduit à des questionnements sur cette cohérence, notamment au moment du retour de classe. Le groupe de Toulouse a réuni les mêmes enseignants sur trois ans, celui de Versailles a vu ses participants se renouveler partiellement (deux ans).

Le schéma de ces expériences est le même à l'origine : sur des notions du programme où nous nous plaçons (première S pour l'une, première S et terminale S pour l'autre) pour lesquelles nous pensons qu'il faut un apprentissage un peu poussé, des objectifs un peu ambitieux, qui sont à choisir (travail préliminaire), il s'agit ensuite, avec des durées différentes pour les deux groupes,

- D'analyses des exercices sur ces notions, trouvés dans diverses sources
- D'élaborer à partir de là des énoncés d'exercices, en précisant les adaptations prévues, c'est à dire les adaptations que les élèves auront à faire, du moins a priori,
- De mettre au point des conditions de passage en classe (modalités de travail des élèves, temps de recherche, interventions prévues de l'enseignant),
- Et d'expérimenter ce passage en classe : est-ce jouable pour les élèves ? pour les enseignants ? quelles modifications envisager ?

Si cela n'est pas jouable, est -ce que à cause de la trop grande difficulté de l'exercice (il faudra alors être moins gourmand sur les adaptations) ou à cause des habitudes de travail de la classe et du professeur ? Ou encore, est-ce que le choix de la notion ou de la propriété comme devant devenir mobilisable est à revoir ?

Dans chaque cas des séances de formation ont été menées après le passage en classe, et des constats ont pu être tirés, même si une exploitation précise de ce passage est très difficile. Le rôle de l'enseignant pour respecter ou non les modalités prévues a toujours été parfaitement montré.

L'expérience de l'un des groupes a duré une année de plus ; la dernière année a consisté à creuser le dernier point, en s'intéressant aux différentes gestions possibles dans une séquence planifiée comme les précédentes, où les élèves travaillent en petits groupes. Le moment et la nature des interventions de l'enseignant ont été particulièrement interrogés, en relation avec les activités actuelles et ultérieures des élèves.

L'expérience de l'académie de Toulouse : plusieurs énoncés pour un même problème

Nous tenons à remercier Monsieur Jean AYMES, IPR de Mathématiques dans l'Académie de Toulouse, à l'origine de ce groupe recherche-formation, pour ses nombreuses suggestions, sa disponibilité, ses encouragements.

Nous voulons exprimer notre reconnaissance à Madame Aline ROBERT, professeur à l'IUFM de Versailles, chercheuse en didactique des mathématiques, dont les travaux ont nourri et conduit notre recherche-formation tout au long de ces trois années. Sa disponibilité, son dynamisme et son écoute nous ont apporté le précieux soutien qui nous était nécessaire, sans lequel ce travail n'aurait pas été possible.

Nous remercions l'ensemble des membres de l'IUFM de Toulouse qui ont permis ce travail.

Plusieurs énoncés pour un même problème

Participants :

CASES Roseline	*Lycée Bellevue*	*31 – TOULOUSE.*
DESQ Josiane	*Lycée Lapérouse*	*81 – ALBI.*
FAGE Didier	*Lycée Pierre Mendés-France*	*65 – VIC EN BIGORRE.*
JOYEUX Bernard	*Lycée Raymond Naves*	*31 – TOULOUSE.*
TEICHTEIL Jacqueline	*Lycée Bellevue*	*31 – TOULOUSE.*
TERREE Nicole	*Lycée Raymond Naves*	*31 – TOULOUSE.*

Résumé du thème choisi :

La forme des épreuves du baccalauréat induit des activités uniformisées.

Nous nous proposons d'analyser ce phénomène et de rechercher quel peut être l'impact d'une transformation des énoncés sur l'apprentissage des élèves.

Cette transformation est-elle possible ?

Peut-elle produire une diversification des travaux des élèves ?

Peut-elle enrichir chez eux la signification de l'activité mathématique ?

Quelles transformations peut-on opérer ? Avec quelles justifications ?

Les problèmes construits en utilisant des outils de didactique des mathématiques ont-ils un effet sur l'apprentissage des élèves ?

Pour un énoncé donné, quelle gestion mettre en place ?

SOMMAIRE

Les annexes

Annexes de l'année scolaire 1999-2000 :

Annexes de l'année scolaire 2000-2001 :

Annexe de l'année scolaire 2001-2002 :

Introduction.

La recherche que nous avons menée, s'est déroulée sur trois ans dans le cadre d'un **groupe de recherche-formation** proposé en juin 1999 au Plan Académique de Formation de l'Académie de Toulouse, à l'initiative de Monsieur Jean Aymès, IPR de Mathématiques dans l'Académie de Toulouse.

Le groupe est composé de six enseignants de lycée ayant en responsabilité des classes scientifiques (première S ou Terminale S).

Objectifs : *La forme des épreuves au baccalauréat induit des activités uniformisées. Nous nous proposons d'analyser ce phénomène et de rechercher quel peut être l'impact d'une transformation des énoncés sur l'apprentissage des élèves.*
Cette transformation est-elle possible ?
Peut-elle produire une diversification des travaux des élèves ?
Peut-elle enrichir chez eux la signification de l'activité mathématique ?
Quelles transformations peut-on opérer ? Avec quelles justifications ?

Durée :

- Six demi-journées en 1999-2000,
- Dix demi-journées en 2000-2001,
- Dix demi-journées en 2001-2002.

La première année a débouché rapidement sur la prise de conscience que ce travail ne pouvait se concevoir sans l'apport d'outils didactiques. Notre objectif, cette année là, a donc consisté à s'approprier du vocabulaire en didactique des mathématiques. A l'objectif initial s'est alors ajouté la thématique suivante : *Les problèmes construits en utilisant des outils didactiques des mathématiques, ont-ils des effets sur l'apprentissage des élèves ?*

Nous avons sollicité l'aide d'un professeur à l'IUFM de Versailles, chercheuse en didactique des mathématiques, Madame Aline Robert, qui nous a accompagnés, conseillés et aidés dans la suite de notre travail.

Beaucoup de contacts réguliers ont eu lieu, ainsi que, plus tard, trois rencontres, deux avec la venue d'Aline Robert à Toulouse (une en février 2001 et l'autre en juin 2002) et une à Paris (en juin 2001) où les deux groupes de recherche (celui de Versailles et celui de Toulouse) ont pu se rencontrer.

La deuxième année a été utilisée à mettre en fonctionnement ce vocabulaire didactique, à analyser des énoncés de problèmes pour éventuellement les reformuler.
L'année s'est terminée sur une mise en pratique de ce travail par une expérimentation en classe de première S. Cette expérimentation a été faite sur trois classes simultanément, sous forme d'un travail de groupes, où, après un temps de recherche fixé à l'avance, l'enseignant responsable de la classe, ainsi que deux observateurs, intervenaient, à la demande, dans chaque groupe.

Suite à cette expérience, il nous est apparu qu'on ne pouvait se contenter de :

- Proposer un énoncé sur lequel on aurait analysé les tâches des élèves et les adaptations possibles
- Regarder ensuite les effets induits par cet énoncé sur les élèves.

En effet, il nous a semblé difficile de bien analyser les effets induits par les énoncés sur les élèves sans comparer de façon précise les déroulements des séquences en classe. Il nous a semblé donc nécessaire d'élargir notre travail à une étude des pratiques d'enseignants. En effet, à partir du moment où, dans un travail de recherche proposé à la classe, il y a quelque chose qui n'est pas immédiat (non simple, et non isolé), il y a une **GESTION** à mettre en place. Dans ce contexte, c'est <u>la gestion</u> qui permet d'optimiser ce type d'énoncés (ou de l'anéantir !).
Il nous est donc apparu qu'on ne peut pas travailler sur un énoncé sans parler de la gestion de cet énoncé en classe. Cette nouvelle orientation a conduit le travail de la troisième année de notre groupe.
A l'objectif premier, « *plusieurs énoncés pour un même problème* », s'est donc ajouté l'objectif suivant « *pour un énoncé, quelle gestion ?* »

Notre travail de **troisième année** s'est donc organisé autour d'une expérimentation en classe de terminale S sur le thème « **tangentes communes à deux courbes** », avec un double objectif :

- Quels éléments vont déterminer le moment et la forme choisis par le professeur pour ses interventions ?
- Quels effets ces interventions ont-elles sur les élèves ?

Il a été finalisé par une évaluation en fin d'année sur le même thème.
Nous exposerons, de façon linéaire, ces trois années de recherche en essayant d'insister sur le travail fait durant la troisième année.

Partie A :

Compte rendu de notre travail durant l'année scolaire 1999-2000.

I) Exposé des motifs.

Jean-Pierre Demailly, Professeur à l'Université de Grenoble I ,membre correspondant de l'Académie des Sciences a écrit récemment ceci :

« L'enseignement mathématique de DEUG est supposé apporter aux étudiants les outils conceptuels les plus basiques et affiner les méthodes de calcul (algébriques, analytiques, géométriques) nécessaires pour la pratique scientifique au sens large .Or, les bacheliers qui entrent à l'Université paraissent très mal préparés à cette épreuve ; Bien souvent, leur vision des mathématiques au sortir du Lycée se réduit à la pratique aveugle de techniques stéréotypées et une vision figée des mathématiques, comme si jamais ils n'avaient eu l'occasion de se rendre compte que les mathématiques sont avant tout la science du raisonnement plutôt qu'une technologie des recettes de calcul »

Le souci et la nécessité de donner aux élèves en fin de classe de Terminale un diplôme de fin de second cycle, influent sur la forme donnée aux épreuves du baccalauréat.

[redacted]

- ***Formuler un problème***
- ***Conjecturer un résultat***
- ***Expérimenter sur des exemples***
- ***Bâtir une démonstration***
- ***Mettre en œuvre des outils théoriques***
- ***Mettre en forme une solution***
- ***Contrôler les résultats obtenus***
- ***Evaluer leur pertinence en fonction du problème posé***

et développer ainsi les capacités d'expérimentation, de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique?

C'est dans ce cadre que s'inscrit notre Recherche Formation. Nous souhaitons analyser les énoncés d'exercices ou de problèmes, les reformuler afin de mieux prendre en compte les divers aspects de l'activité mathématique et les expérimenter dans des classes .

II) <u>Historique de notre travail.</u>

Nous avons commencé par chercher des travaux déjà existants sur le thème de notre recherche. Cela nous a conduit à contacter :

- **Régis Gras**, professeur de l'Université de Nantes ,animateur du groupe « Problématique second cycle » de l'APMEP.
- **François Pluvinage**, professeur de l'Université Louis Pasteur de Strasbourg.
- **Gilbert Arsac**, professeur de l'IREM de Lyon.
- **Aline Robert**, professeur à l'IUFM de Versailles.

Après avoir pris connaissance de leurs travaux respectifs (cf bibliographie), nous avons choisi de retenir plus particulièrement l'approche d'Aline Robert dont la démarche nous semble articuler au mieux théorie et expérimentation.

Le livre « L'enseignement des mathématiques au lycée », d'Aline Robert ,Marie Lattuati et Jacqueline Penninckx, ainsi que l'article d'Aline Robert « réflexions sur l'analyse des textes d'exercices des manuels» du Bulletin APMEP n° 367 (cf bibliographie et annexes) nous ont fourni des outils théoriques qui devraient nous permettre d'analyser les énoncés de problèmes.

III) Méthodologie

En utilisant notamment les documents précédemment cités, nous avons établi une grille d'analyse des énoncés de problèmes à partir des questions suivantes :

1) Quels sont les niveaux de mise en fonctionnement des connaissances ?

(i) Niveau de connaissances techniques

(ii) Niveau du mobilisable

(iii) Niveau du disponible

2) Quel est le degré d'ouverture de l'énoncé ?

(i) Enoncés fermés

(ii) Enoncés quasi fermés

(iii) Enoncés ouverts ou quasi ouverts

3) Quels sont les cadres en jeu et y a-t-il des changements de cadres ?

4) Quels sont les registres utilisés et y a-t-il des changements de registres ?

5) Y a-t-il des changements de points de vue à mettre en œuvre ?

6) Quel est le degré de généralité ?

7) Quel est le degré d'implicite ?

A l'aide de cette grille, nous nous proposons :

- *dans un premier temps*, d'analyser des énoncés
- *dans un deuxième temps*, de reformuler les énoncés en fonction d'objectifs ciblés.

Un même exercice peut avoir, en effet, plusieurs finalités selon le moment où il est posé dans l'apprentissage de l'élève :
- activité d'introduction à un problème,
- utilisation d'une technique,
- réinvestissement d'une notion.

Nous prévoyons d'expérimenter ces énoncés dans des classes et souhaitons aussi étudier dans quelle mesure certains types d'énoncés facilitent plus que d'autres l'apprentissage des élèves.

Partie B :

Compte rendu de notre travail durant l'année scolaire 2000-2001

Nous avons consacré le début de l'année à analyser des énoncés (cf annexes 1, 2 et 3) en utilisant les outils théoriques que notre première année de Recherche-Formation nous a permis de dégager. Ce travail nous a permis de préciser le sens que nous accordions les uns et les autres au vocabulaire employé, d'harmoniser nos points de vue. Il pourra aussi servir de support à de futures expérimentations.

Mais nous avons vite senti la nécessité d'un regard extérieur sur ce travail et Madame Aline Robert, professeur à l'IUFM de Versailles, a accepté de venir à Toulouse pour nous aider à donner plus de sens à notre recherche .Cette réunion a eu lieu le 1er février 2001 avec la participation de Monsieur Jean Aymès, IPR de mathématiques.

Voici ***une brève synthèse de l'intervention de Madame Robert*** sur la partie concernant la méthodologie à mettre en oeuvre :

1) Quel est le but recherché ?

Comment faire pour que nos élèves réussissent à résoudre, sans notre aide, des problèmes où les mises en fonctionnement des connaissances ne soient pas seulement simples et isolées?

2) Quels moyens se donner pour atteindre ce but ?

Constituer une petite banque d'exercices (une dizaine), ni trop faciles, ni trop difficiles, avec comme critère les niveaux de mise en fonctionnement. On cherche à ce que dans l'exercice, il y ait **un** moment où intervienne **une** connaissance bien précise qui ne soit pas simple et isolée, le but étant d'avoir la maîtrise de ce qui se passe dans la tête d'un élève. Ce n'est pas la « perfection » d'un énoncé que l'on recherche : on cherche à être un peu plus maître de ce qu'on provoque chez l'élève.

3) Comment procéder ?

a) *__Première étape__* :

Tout d'abord analyser finement les exercices pour caractériser ce que l'élève a à faire : entre le simple et l'isolé, et le complexe, il y a tout un tas **d'adaptations possibles**, qui correspondent à de nombreux niveaux de fonctionnement (degré d'ouverture, sous-entendu...).

Ces adaptations possibles peuvent être :

- **Reconnaître** (une définition, un théorème, une formule à adapter)
- **Introduire un intermédiaire** (par exemple une notation)
- **Perdre de l'information** (l'adaptation est alors un choix parmi les informations de l'énoncé)
- **Forcer à des interprétations**
- **Mélanger deux choses** (ce que les élèves détestent !!)

Il faut pouvoir aller bien au delà de ce qui est parfois fait dans les manuels où les étoiles présentes pour caractériser la difficulté d'un exercice ne sont qu'une forme très grossière d'analyse (on se contente simplement d'enlever des étapes...). Ce travail d'analyse aboutit à la constitution de **fiches techniques.**

Ces fiches techniques s'appuient sur quatre points :

- **la forme de la question posée :**

soit du type « montrer que », soit avec un point d'interrogation. Quand il y a un point d'interrogation, on a envie que l'élève conjecture, expérimente. Si on veut forcer à l'expérimentation, on ouvre la question. Si on ferme la question, on le met tout de suite à pied d'œuvre pour démontrer.

Remarque à propos des conjectures : les logiciels (de géométrie par exemple) tuent les conjectures . On voit la solution (par exemple les lieux géométriques sont dessinés) et il reste à démontrer. Avec les ordinateurs et les calculatrices, l'activité mathématique a changé de nature : il faut alors insister sur les moyens de contrôle.

- **la méthode est elle indiquée ou pas ?**

Il se peut que la méthode soit donnée, mais néanmoins difficile, parce qu'il faut adapter ses connaissances , d'où **l'importance que l'on doit accorder à l'organisation des connaissances**.

- **Y a t il des étapes ou des intermédiaires ?** (qui peuvent être simplement des notations.)

La phase d'organisation des connaissances est aidée par des problèmes transversaux où l'on n'indique pas les étapes, les méthodes, les intermédiaires.

- **Le niveau de mise en fonctionnement d'une ou plusieurs connaissances visées.**

S'il y a un changement de cadre par exemple, il y a une certaine adaptation. Les changements de cadre, permettent de donner du sens, l'idée étant qu'on s'appuie sur un cadre où les élèves ont des idées et on essaie de les entraîner sur un autre où ils en ont moins. Cet aller-retour là contribue à donner du sens.

A quoi sert ce travail ?

Ces fiches techniques peuvent avoir trois utilisations dont la troisième doit être testée en classe.

1) Evaluer. Par exemple, l'exercice (cf annexe 3) sur la composée de 2 rotations peut servir à évaluer comment font les élèves pour montrer qu'un triangle est équilatéral.

2) Prévoir des difficultés, donc des accompagnements. Lorsqu'on a analysé un texte, on est plus à même d'interpréter, d'aider sans trop en dire, d'être attentif.

3) Créer des apprentissages. C'est l'utilisation la plus intéressante.

Que doit on faire pour rendre mobilisable ?

Pour rendre mobilisable ,il faut proposer du mobilisable mais en s'étant préparé par l'analyse a priori. Sinon, si l'on pose toujours des applications simples et isolées ou si l'on donne toujours trop d'indications en classe devant les difficultés rencontrées, un certain nombre d'élèves ne dépasseront pas l'application simple et isolée.

b) ***Deuxième étape :***

Cependant, il ne suffit pas d'analyser des exercices. Il faut regarder en vrai et en détail comment cela se passe en classe **. Il faut prévoir un scénario précis, mettre au point les conditions de passage en classe**, car il est très facile de ne pas faire ce qu'on avait prévu.

Le temps de l'expérimentation est alors arrivé.

En pratique, comment s'organise cette expérimentation ?

Avant la séance :

Dans la préparation du passage en classe, on note :

- **La place de l'exercice dans la progression** (les exercices donnés avant, après ,..) .
- **Les difficultés prévues.**
- **Les mises en gardes prévues.**
- **Les interventions prévues** (ni trop tôt, ni trop tard....).
- **La constitution des groupes**, pas complètement homogènes ni hétérogènes . Le travail en groupe est une façon de gérer l'hétérogénéité. C'est aussi une méthode qui permet de faire varier le rythme. Noter aussi que ce que disent les élèves faibles sur un exercice est souvent intéressant, car on ne s'y attend pas. On ne sait pas tout sur ces élèves, et il est important de les entendre.
- **Le temps de recherche.**
- **L'utilisation du tableau** : il n'y a pas de solution unique, cette utilisation est très variée. Mais attention on croit y voir des transparences qui n'y sont pas et ce ne peut pas être un modèle pour l'écrit personnel.

Attention aussi au lien entre l'écrit et l'oral :

Dans un échange entre le professeur et un élève, il y a :

1) ce que dit l'élève.
2) la façon dont le professeur traduit oralement ce qu'a dit l'élève. Attention très souvent on « traduit » l'élève en faisant un changement de point de vue.
3) ce que le professeur transcrit au tableau.

Il est important d'en être conscient et donc de **décider des différents rôles que le tableau peut avoir**. On peut aussi envisager de filmer le tableau.

Après la séance :

On examine :

- **La gestion du temps.**
- **Les questions posées par les élèves** et on s'interroge sur les modifications éventuelles des énoncés que l'on pourrait apporter.
- **Ce qui les a bloqués.**
- **On peut aussi analyser les utilisations que l'on a eues du tableau .**
- **Il est important de noter ce que l'on a dit**, le **moment** où l'on a apporté une information, **le moment** de la correction :

Même si certains élèves n'ont pas trouvé, **c'est à ce moment là qu'ils apprennent** et l'on peut espérer que quelque chose s'est passé. Ce que l'on dit **après** leur recherche les aide à apprendre beaucoup plus que ce que l'on dit **avant**, même si leur recherche n'a pas abouti.
L'idée est de trouver un temps assez long pour que **tous** les élèves rentrent dans la question et pour que **quelques** groupes trouvent sans qu'on ne dise rien. **On essaye donc d'optimiser le moment où l'on intervient.**

Un mois après, un petit contrôle peut aider à voir ce qui s'est réellement passé, **si une certaine organisation des connaissances s'est opérée.**

En conclusion, le fait d'analyser nos pratiques nous fait progresser.

Il faut chercher à être maître de ce que l'on provoque comme mises en fonctionnement : ce n'est pas l'originalité qui compte, mais la maîtrise de ce que l'on fait faire, le travail qui est déclenché. C'est donc dans cette voie d'expérimentation que nous nous engageons désormais.

Nous avons essayé de mettre en pratique cette organisation sur une expérimentation concernant deux classes de 1ère S.

Expérimentation concernant deux classes de 1ère S.

I) Conditions générales de cette expérimentation

Avant l'expérimentation :

Les élèves sont prévenus à l'avance de cette expérimentation et savent que notre intérêt ,va porter sur leur degré d'autonomie durant la séance. Ils savent aussi qu'il n'y a pas un enjeu d'évaluation notée.
Ils sont de plus informés de la présence de deux « observateurs » extérieurs à la classe, avec une éventualité d'être filmés.

Pendant l'expérimentation :

Les conditions de travail des élèves sont les suivantes :

- Pour une classe ayant une habitude régulière du travail de groupe, l'expérimentation se fera en conservant les groupes habituels et les traces écrites des élèves seront celles qu'ils ont l'habitude de réaliser.
- Pour l'autre classe concernée, ayant déjà eu une expérience de travail de groupe, l'expérimentation se refera sur ce même modèle, avec choix par le professeur, de la constitution des groupes.

Deux observateurs, en plus du professeur habituel, seront présents dans la classe, l'un d'entre eux aidera à répondre à la demande des élèves, l'autre ne sera qu'un observateur. Aucune aide ne sera apportée aux élèves durant les 20 premières minutes. Chaque groupe d'élève se verra attribuer un numéro de groupe.

De façon à ce que aucune indication d'organisation ne soit donnée pour la mobilisation de la notion de suite dans la partie A, la partie B sera distribuée à chaque groupe au fur et à mesure qu'ils auront terminé la partie A. Pour cette partie B, deux énoncés sont prévus suivant l'initialisation de chaque élève.

II) Enoncé de l'exercice posé en expérimentation.

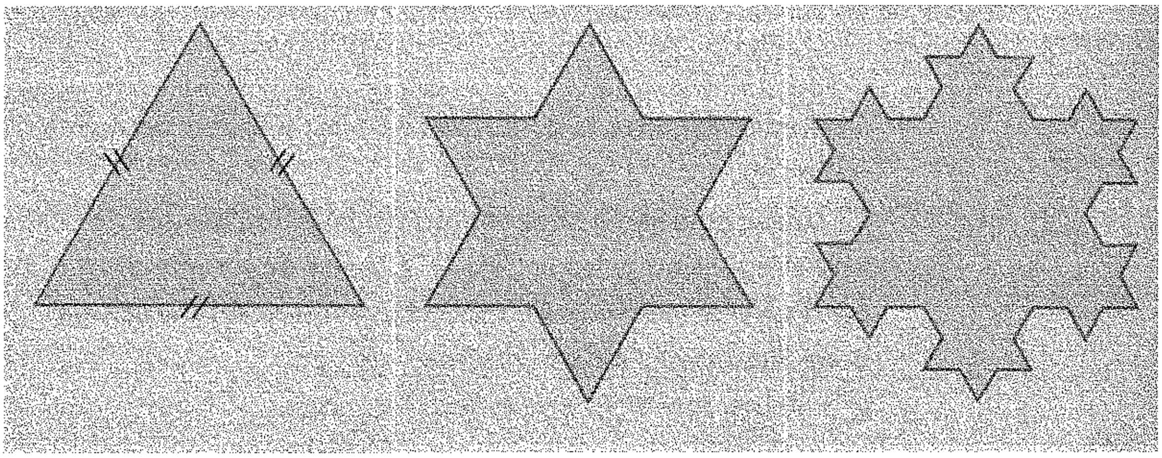
PARTIE A

Une unité de longueur a été choisie dans le plan.

La figure initiale est un triangle équilatéral dont la longueur du côté est 1.

Un procédé de construction, permettant de passer d'une figure à la suivante, est défini ainsi :

- On partage chaque côté de la figure en trois segments de même longueur : sur chaque côté, on obtient donc trois segments.
- Puis, sur le segment central, on construit vers l'extérieur un triangle équilatéral, et on supprime le segment central.



1) On a donné ci-dessus les premières figures. Quel est le nombre de côtés de la suivante ?

2) a) En appliquant 100 fois ce procédé de construction à partir de la figure initiale, quel est le nombre de côtés du polygone obtenu ?

b) Quel est son périmètre ?

c) Combien de fois au minimum doit on appliquer ce procédé pour que le périmètre de la figure obtenue dépasse 100000 fois le périmètre de la figure initiale.

PARTIE B (version 1)

Notons A_0 l' aire de la figure initiale, et pour tout $n \geq 1$, A_n, l'aire de la figure obtenue, après avoir appliqué n fois le procédé :

Montrer que pour tout n de N, $A_{n+1} = A_n + \frac{\sqrt{3}}{12} (\frac{4}{9})^n$.

En déduire que pour tout $n \geq 1$, $A_n = A_0 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \dots\dots\dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)$.

Montrer que pour tout n de N, $A_n < 1$.

PARTIE B (version 2)

Notons S_1 l' aire de la figure initiale, et pour tout $n \geq 1$, S_{n+1}, l'aire de la figure obtenue, après avoir appliqué n fois le procédé):

Montrer que pour tout $n \geq 1$, $S_{n+1} = S_n + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$

En déduire que pour tout $n \geq 2$, $S_n = S_1 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \dots\dots\dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}\right)$

Montrer que pour tout $n \geq 1, S_n < 1$

l'annexe 4 contient les grilles des résultats de cette expérimentation.

III) *Analyse de l'exercice.*

Nous avons choisi pour thème le fait de rendre mobilisable la notion de suite et les techniques qui lui sont associées.

L'objectif de la partie A) est de faire prendre conscience aux élèves de toute l'économie de pensée qu'ils peuvent réaliser pour résoudre des questions où **la notion de suite**, bien que sous-jacente, **n'intervient pas explicitement : la notion de suite va faciliter la résolution d'un problème de dénombrement** (le nombre de côtés) **et un problème de mesure de longueur**

Nous avons volontairement supprimé toute référence à la notation indicielle dans le texte de la partie A) et l'énoncé correspondant à la partie B) ne sera distribué aux élèves qu'après résolution de la partie A) afin de ne pas dévoiler aux élèves qu'il s'agit en fait d'un problème sur les suites.

L'objectif de la partie B) est plus complexe :

1) On voudrait d'abord rendre les élèves aptes à effectuer des **changements de cadres** : passer d'une suite de figures géométriques à la suite de leurs aires (donc un **passage du cadre géométrique au cadre algébrique**)

2) On voudrait ensuite leur faire maîtriser **la notation indicielle** .

3) On voudrait enfin leur faire comprendre qu'une relation de récurrence peut dans certains cas permettre le calcul explicite du terme général de la suite :situation qu'ils ont rencontrée en cours avec les suites géométriques et arithmétiques.

A cette occasion on voudrait **rendre mobilisable** à l'avenir chez les élèves une technique classique de détermination de la formule explicite du terme général d'une suite récurrente du type $A_{n+1} = A_n + v_n$ dans le cas où l'on peut calculer la somme des v_n.

Partie A)

1) Que va faire un élève devant une telle question ?

Va-t-il compter le nombres de côtés sur les figures qui lui sont fournies, puis ayant constaté que l'on trouve 3,12,48, va-t-il extrapoler et dire qu'il y 192 côtés pour la figure suivante sans chercher à comprendre la raison de cette multiplication par 4 ? ou bien va-t-il faire un raisonnement géométrique expliquant que chaque côté d'une figure donne naissance à quatre côtés pour la figure suivante ? Ceci est notre première interrogation.

L'introduction d'une suite n'est pas absolument indispensable pour résoudre la première question mais nous voudrions savoir si la notion de suite va émerger.

2) Ici la nécessité d'introduire des suites devrait être plus pressante mais rien ne prouve qu'elle va émerger car on peut très bien faire une récurrence intuitive pour trouver le nombre de côtés de la $101^{\text{ième}}$ figure ainsi que pour trouver la longueur d'un côté. Le nombre minimal d'applications du procédé de construction pour obtenir la figure voulue est facilité par l'écriture d'une formule explicite : va-t-elle émerger enfin ? Le sens de variation de la suite va-t-il émerger pour une justification du nombre minimal ?

Partie B)

Dans cette partie la notion de suite est explicitement dévoilée et nous voulons tester la maîtrise des calculs sur des relations de récurrence et la maîtrise de la notation indicielle.

IV) Analyse du travail observé dans les classes.

1) Compte rendu de l'expérimentation faite dans la classe de $1^{ère}$ S de Y

L'observation porte sur 11 groupes.

Aucun groupe ne semble lire l'énoncé dans son intégralité, et cela est confirmé par la réponse négative que donnent les élèves des quelques groupes directement interrogés. Tous les élèves de la classe, sauf un, répondent correctement à la $1^{ère}$ question : un peu plus de la moitié d'entre eux introduisent très rapidement une suite. Les autres comptent le nombre de côtés des trois premières figures pour en déduire, généralement sans justification, le nombre de côtés de la figure suivante.

Dans tous les groupes, l'introduction des suites est faite de façon peu rigoureuse. On lit ainsi :

- (u_n) est la suite qui permet de donner le nombre de côtés de la figure.
- soit u le nombre de côtés.
- On peut conjecturer cette transformation géométrique comme une suite géométrique de raison 4 et de premier terme $u_0 = 3$
- $u_0 = 3$ u_0 nombre de côtés de figure 1
  $u_n = u_{n-1} \times 4$

Il est clair que *la notion de suite définie comme fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas assimilée* et les élèves ne définissent donc pas u_n *en fonction de n.*

Pour la majorité des groupes, la relation de récurrence $u_{n+1} = 4u_n$ n'est pas démontrée. On peut lire tout de même « pour passer à la figure suivante, on multiplie par 4 » ou « on peut remarquer que chaque côté se divise en 4 » ou bien : « Fig 1 3 ; Fig 2 3 × 4 car à chaque fois on remplace un côté par quatre côtés ». Mais le problème du passage de la figure de rang n à celle de la figure de rang(n + 1) n'est jamais abordé.

Plus surprenant, certains groupes, ayant parlé de suite géométrique de raison 4, démontrent par récurrence la formule donnant le terme général de la suite en fonction de n D'autres essayent même de démontrer cette formule sans avoir parlé de suite géométrique de raison 4 !!!

Tous les groupes ont initialisé le procédé à n = 0. Par contre, aucun ne justifie que le nombre de côtés du polygone obtenu en appliquant 100 fois le procédé de construction à partir de la figure initiale, est donné par u_{100}.

Il est enfin à noter qu'ayant calculé à la calculatrice 3×4^{100}, un seul groupe indique que la calculatrice ne permet pas de déterminer la valeur exacte de u_{100} ; La majorité ne parle pas de valeur approchée du résultat, quelques copies utilisent tout de même le symbole $u_{100} \approx \ldots$.

Les mêmes observations sont faites lors du calcul du périmètre.

Un groupe pose, sans justification, que $p_{n+1} = q \times p_n$ et détermine q en calculant $\frac{p_1}{p_0}$.

Un autre écrit : « soit la suite l_n qui définit la longueur des côtés. Alors $l_{n+1} = l_n \times q$ car c'est une suite géométrique ».

Un autre écrit « le côté du triangle égale 1. on considère v_n une face de la figure. Donc $v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n$. Donc v_n est une suite géométrique »

Pour le résultat, certains utilisent une valeur approchée du nombre de côtés et une valeur approchée de la longueur d'un côté pour calculer le périmètre.

La détermination du nombre minimal d'applications du procédé de construction pour obtenir la formule voulue a soulevé quelques questions. L'utilisation de la calculatrice n'est pas immédiate. Le plus souvent, les élèves écrivent $(\frac{4}{3})^{40} < 100\,000 < (\frac{4}{3})^{41}$ et concluent que le nombre minimal est 41. Il faut que le professeur les interroge sur le sens du terme « minimal » pour que certains pensent à utiliser le sens de variation de la suite de terme général $(\frac{4}{3})^n$ pour conclure. A noter aussi qu'un groupe parle du sens de variation de la fonction $x \mapsto (\frac{4}{3})^x$ qui n'a pas été introduite en 1ère.

Les élèves n'ont pas eu le temps au cours de cette séquence de 1h 50 d'aborder véritablement la partie B. De plus une lassitude certaine en fin de séance a nui à l'efficacité du travail. Les groupes qui ont abordé un peu sérieusement la 1ère question de la partie B ont essayé de vérifier que la formule donnée était vraie pour n = 0, puis pour n = 1 sans s'apercevoir qu'on leur demandait ici de faire directement un raisonnement dans le cas général. Il aurait alors été intéressant de comparer les approches du 1) de la partie A et du 1) de la partie B. Nous n'avons pas eu le temps de le faire.

<u>Quels enseignements tirer de cette expérimentation ?</u>

- les élèves ont du mal à lire un énoncé dans son intégralité avant d'aborder les différentes questions : ils se privent ainsi des indications données tout au long de l'énoncé.
- La notion de suite est vite mobilisée dans le cas d'un problème de dénombrement. Par contre, les élèves ne savent pas mettre correctement en place la (les) suite(s) qui leur permettront de répondre aux questions posées. Il faudra donc ne pas se limiter à faire étudier des suites récurrentes mais les inciter à définir par eux-mêmes des suites récurrentes qu'ils utiliseront pour résoudre les problème posés.
- L'intérêt de la notion de sens de variation d'une suite peut être mis en valeur à travers la détermination de l'indice minimal tel que…….

2) *<u>Compte rendu de l'expérimentation faite dans la classe de $1^{ère}$ S de X</u>*

L'observation porte sur 9 groupes.

<u>En ce qui concerne la première question :</u>

I) La mise en place de la notion de suite se fait très rapidement. Seul un groupe ne la met en place qu'à la deuxième question. Ce qui donne : « pour la première figure 3 cotés, pour la deuxième 12, pour la troisième $48 = 12 \times 4$, et donc pour la quatrième $4 \times 48 = 192$. »

II) Pour l'introduction de cette notion de suite :

- Deux groupes précisent clairement « appelons u_n le nombre de cotés de la figure n »
- Sinon u_n n'est pas définie clairement : « u_n est le nombre de côtés <u>d'une</u> figure » ou encore sans autres précisions « $u_1 = 3, u_2 = 12$, donc $u_{n+1} = 4\,u_n$ » sans avoir précisé la signification de u_n.
- Pour l'initialisation, deux groupes utilisent u_0, les autres u_1, mais pas d'erreur de comptage (u_{100} pour les uns, u_{101} pour les autres) pour l'application 100 fois du procédé.

III) Pour l'obtention de la réponse à la question 1), il y a :

- ceux qui s'appuient sur les valeurs des premiers termes et généralisent sans autre justification :
2 groupes ce qui donne « $u_1 = 3, u_2 = 12$, donc $u_{n+1} = 4\,u_n$ ».
- ceux qui font la traduction du procédé en terme d'opérations à effectuer (pour en arriver à la fin à la multiplication par 4) ceci sur la première étape uniquement , puis, « plus généralement » (sans autre justification) $u_{n+1} = 4u_n$
- ceux qui font la traduction du procédé par une rédaction en français : « .au départ la figure initiale a 3 cotés, chaque coté est divisé en trois segments égaux, le segment central sert de base à un triangle équilatéral, chaque coté de la figure comporte alors 5 segments. Le segment servant de base au triangle équilatéral construit est supprimé : $5 - 1 = 4$. Conclusion : chaque coté initial comporte alors 4 segments. On a donc $u_{n+1} = 4u_n$ ».
- ceux qui font la traduction du procédé par des « calculs » sans utilisation de la notation u «1face = × 3 = 3 cotés - 1 = 2 cotés + 2 = 4 faces» ou bien «3 + 2 – 1 = 4 »

- ceux qui font la traduction du procédé avec utilisation de la suite mais au rang 1
$u_1 = 3$; $u_2 = 3\,u_1 + 2\,u_1 - u_1 = (3 + 2 - 1)\,u_1 = 4\,u_1$, et plus généralement on a donc $u_{n+1} = 4u_n$.
- ceux qui font une traduction pas à pas du procédé **directement à l'ordre n** et mettent en place une formule qui évolue au cours du procédé (groupe 2 et 3) :
« .on partage chaque coté en 3 : $u_{n+1} = 3\,u_n + \ldots\ldots$
On construit un triangle équilatéral sur le segment central : on ajoute donc deux cotés à chaque coté , on a donc : $u_{n+1} = 3\,u_n + 2\,u_n + \ldots\ldots$ on supprime le segment central sur chaque coté divisé en trois, donc $u_{n+1} = 3\,u_n + 2\,u_n - u_n = 4\,u_n$ »

3) *Bilan général des résultats de l'expérimentation.*

En annexe 4 figurent pour les deux classes.

A l'issue de cette expérimentation, nous allons essayer d'apporter des éléments de réponse aux questions formulées lors de l'analyse a priori de l'exercice sur le flocon de Von Koch. Ces éléments de réponse s'appuient sur les grilles des résultats (cf annexe 4) des deux classes de 1ère S observées. Seule la partie A) est analysée car très peu d'élèves ont eu le temps d'aborder la partie B).

1) Nous voulions savoir si la notion de suite serait disponible immédiatement : la réponse est différente selon les classes. Dans la classe de X, 88% des élèves introduisent une suite dès la première question alors qu'ils ne sont que 55% dans la classe de Y . Le calcul du périmètre, plus délicat, conduit aussi 91% des élèves de X à faire apparaître la suite des longueurs des côtés alors qu'ils ne sont que 52% dans la classe de Y.
La notion de suite est donc manifestement plus disponible dans la classe de X que dans celle de Y.

2) Le résultat de la première question est juste dans la plupart des cas mais les élèves de X ayant introduit les suites dés le départ, omettent parfois de répondre à la 1ère question pour donner directement le bon résultat pour le nombre de côtés après cent applications du procédé . Tous les élèves utilisent un indice qui est en accord avec l'initialisation retenue.

La grande majorité des élèves a donc assimilé le principe élémentaire de base de l'indexation dans une situation où ce n'était pas explicitement demandé : ce savoir-faire est donc correctement mobilisable

3) En revanche, les résultats diffèrent selon les classes en ce qui concerne le degré de formalisation et la justification des formules : si 91% des élèves de la classe de X écrivent formellement la relation de récurrence sur la longueur des côtés, ils ne sont que 42% dans la classe de Y de sorte que 100% des élèves de X donnent le périmètre en fonction de n alors qu'ils ne sont que 67% dans la classe de Y.
Il y a donc là aussi un élément de variabilité entre les deux classes

***En conclusion,* le fait d'avoir supprimé toute référence à la notation indicielle n'a pas empêché les élèves de faire émerger le concept de suite. Le concept de suite géométrique a été mobilisé de façon satisfaisante mais c'est dans la classe où ce concept est le plus rapidement mobilisé que les résultats sont les meilleurs.**
Nous avons observé des degrés divers de formalisation correspondant à des attitudes différentes devant des situations mathématiques dont nous parlerons plus tard (cf page 45) sous les termes : « maths sales », « maths propres ».
En majorité, les élèves ont été capables de se placer dans le bon domaine de travail et d'y mobiliser leurs connaissances.

Partie C :

Compte rendu de notre travail durant l'année scolaire 2001-2002

L'analyse des résultats de l'expérience faite l'année précédente en classe de première a mis en évidence un élément qui nous avait gêné dans l'interprétation des résultats. En effet, après avoir laissé un temps de recherche aux élèves sans aucune intervention du professeur, la gestion de la classe s'était déroulée sous forme d'interventions dans chaque groupe, à la demande des élèves, du professeur responsable de la classe et des observateurs. La forme des interventions échappait à l'analyse, parce que

- Ces interventions étaient nombreuses dans chaque groupe,
- Ces interventions étaient faites par des professeurs différents,
- Bien qu'ayant filmé la séance, les intervenants dans les groupes n'étant pas équipés de micro-cravate, leurs interventions ne pouvaient être enregistrées.

L'analyse de l'effet de ces interventions sur les élèves posait donc problème.
Pourtant, il nous semblait intéressant de pouvoir analyser **comment un élève ou un groupe d'élèves va s'approprier l'intervention du professeur ?**

Deux questions peuvent se poser par rapport à ce type de gestion de la classe :

1) Sur quels critères un professeur va décider qu'à un certain moment, il ne peut pas faire autrement que d'intervenir, même si en gros ce n'est satisfaisant pour personne (sauf peut-être pour un ou deux groupes) ? En effet souvent l'enseignant prend la parole un peu trop tôt pour les uns, un peu trop tard pour les autres.

Les didacticiens nous disent que grosso modo il y a deux façons d'apprendre :

- la théorie de Vygotski, soutient que lorsque l'élève est dans une zone de connaissance assez proche (« la zone proximale de développement »), même si la solution ne vient pas de lui, il tire un bénéfice de ce qu'on lui dit, et peut alors apprendre en imitant.

- On peut aussi apprendre, selon Piaget, en frottant ses connaissances à des conditions nouvelles (construction autonome des connaissances, accommodation, ou même situations de rupture). On apprend alors parce qu'on fait quelque chose, juste ou faux, que l'on corrige : quand c'est juste, cela nous renforce, quand c'est faux, cela nous permet d'accommoder nos connaissances après coup, après qu'on ait fait.

En fait, dans un apprentissage, il y a vraisemblablement toujours des moments où interviennent ces deux façons d'apprendre, peut-être pas en même temps pour tous les élèves.

Cela pourrait expliquer que des interventions qui, pour certains élèves viennent avant qu'ils aient trouvé, pour d'autres après, soient intéressantes pour tous. Il est en tous cas nécessaire que le professeur ait attendu le temps suffisant pour que tous soient entrés suffisamment dans la recherche du problème posé.
Cette attente est utile à la fois :

- **pour avoir une chance d'être dans la zone proximale de développement des plus lents**
- **pour laisser le temps nécessaire au dépassement de la rupture ou au moins à une élaboration suffisante de résultats.**

2) Quelle sera la forme de l'intervention du professeur ?

En effet, un énoncé tout seul n'a pas de sens ; il n'a de sens que si on sait comment l'enseignant gère cet énoncé en classe. On peut proposer un énoncé où il y a des adaptations à faire, mais si on ne laisse pas à l'élève le temps de repérer ce qui, pour lui est une adaptation, il n'y aura plus d'adaptation à faire.
Si on lui propose une tâche ouverte, et si on la ferme la minute d'après, il n'y a plus de tâche ouverte.
C'est ce qui se passe souvent lorsque le professeur découpe en sous tâches car il ne reste alors seulement que des applications simples et isolées. Et on retrouve là le point de départ de notre travail.
Comment donc le professeur va-t-il choisir de modifier la tâche de l'élève par son intervention ?

Nous avons décidé durant cette troisième année d'organiser une expérimentation dans trois classes de terminale S, sur un scénario bien précis, avec un certain nombre d'interventions, prévues à l'avance, les mêmes pour les trois classes.

Le moment et la forme de l'intervention sont laissés à l'initiative de chaque professeur, avec le double objectif :

- Quels indices vont déterminer le moment et la forme choisis par le professeur, pour ses interventions ?
- Quel effet cette intervention a t elle sur les élèves ?

Dans une première partie, nous exposerons le scénario précis de l'expérimentation telle qu'elle a été faite.

Dans une deuxième partie, nous ferons une analyse de l'exercice après coup, et donc enrichie des observations que nous avons faites au cours de l'expérimentation.

Dans une troisième partie, nous ferons une mise en relation systématique entre l'analyse de l'exercice et les différents constats, nous attachant en particulier à faire tous les bilans possibles.
Nous essaierons aussi de mener cette étude comparative de la gestion de classes, **en termes de régularités et de diversités** : quels sont les résultats réguliers, stables que l'on retrouve dans les trois classes, indépendamment des acteurs en présence, et y a t il des variabilités ?

Dans une quatrième partie, nous rendrons compte d'une évaluation, faite en fin d'année, sur le même thème et qui avait pour but d'essayer de voir l'impact de l'expérimentation faite en cours d'année, et de quantifier un peu les résultats.

Dans une cinquième partie, nous tenterons de répondre aux questions posées a priori avant l'expérimentation correspondant au double objectif du scénario, notamment du point de vue des élèves.

Dans une sixième partie, nous ferons un bilan de l'expérimentation, du point de vue des pratiques des enseignants et du point de vue de la méthode utilisée. Par exemple est-ce que tout ce qui a été noté a servi ? Si c'était à refaire ?

Nous conclurons cette brochure par une liste de questions sur la formation des enseignants de mathématiques, soulevées par notre travail de recherche-formation.

Première Partie

SCENARIO DE L'EXPERIMENTATION

- L'expérimentation se déroule sur trois classes de Terminales S, ayant une partie ou la totalité des élèves en spécialité Mathématiques.
- Sa durée est de deux heures
- L'objectif est double :

a) Observation des élèves :

L'objectif est d'observer l'effet d'une intervention du professeur sur le travail et l'apprentissage des élèves. Pour certains élèves cette intervention viendra avant, pour d'autres, après qu'ils aient trouvé.

Par conséquent, on aimerait apporter des éléments de réponse aux questions suivantes :

1) En quoi l'intervention modifie-t-elle le travail de ces deux catégories d'élèves ?
2) Est-elle utile pour les deux catégories d'élèves et si oui à qui profite-elle le plus ?
3) Quelle est la qualité d'écoute des élèves lors de l'intervention du professeur, en fonction du groupe auxquels ils appartiennent ?
4) Comment les élèves s'approprient-ils ce qui a été dit ?
5) Est–ce que ce sont toujours les mêmes élèves pour lesquels l'intervention vient avant qu'ils aient trouvé et les mêmes pour lesquels cette intervention vient après qu'ils aient trouvé ?

b) Observation du professeur qui est responsable de la classe :

1) Quel est le comportement du professeur pendant la phase initiale de recherche des élèves ?
2) Quels sont les indices qui déclenchent l'intervention du professeur, peut-être trop tôt pour les uns, trop tard pour les autres ?
3) Sous quelle forme se fait cette intervention ?
4) Quel est le comportement du professeur après cette intervention ? Est-ce le même comportement que dans la phase initiale ?

- Pour chaque classe, l'expérimentation se fait :

a. en présence du professeur responsable de la classe qui est seul juge du moment des interventions collectives.

b. en présence de trois observateurs, avec une contrainte : ces observateurs, ne doivent pas être responsables d'une expérimentation postérieure à celle ci, de façon qu'il n'y ait aucune interaction possible entre les trois expérimentations (en particulier sur le moment de l'intervention choisi par le professeur responsable de la classe)

Un observateur se charge plus spécialement de noter le temps et les événements correspondants

Un autre observe plus le professeur : ses allers-retours, le moment où il regarde sa montre, ce qu'il fait avec chaque groupe, éventuellement ce qu'il note au tableau et comment ; il observe aussi comment le professeur reprend ou non ce qu'il a vu dans les groupes : fait-il un résumé de ce qu'il a vu, signale-t-il les erreurs rencontrées ?
Il note aussi s'il y a des différences dans le comportement du professeur entre le début et la fin de la séance.
Le troisième observateur observe plutôt les élèves : leurs itinéraires de recherche, leurs réactions aux interventions du professeur, et les échanges au sein de chaque groupe.

Un échange a été fait entre les professeurs de ces trois classes, pour bien préciser dans quelle progression, cette expérimentation s'insère (échange de devoirs, modules etc.)

<u>Texte de l'exercice</u> : Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Etudier si les courbes respectives des fonctions ln et exp admettent des tangentes communes et si oui lesquelles.

Le problème posé se résout en trois étapes :

1. introduction des coordonnées d'un point A sur la courbe représentative de la fonction exponentielle et un point B sur la courbe représentative de la fonction ln et obtention d'un système aux inconnues a et b.
2. élimination d'une inconnue pour obtenir une équation à une seule inconnue.
3. introduction d'une fonction pour rechercher les solutions : ensuite ce sera l'application du théorème de la bijection…

Ces trois étapes nécessiteront une intervention **collective** du professeur suivie éventuellement d'interventions ponctuelles dans les groupes où l'intervention collective n'aurait pas atteint son but.

Grille des observations et des interventions prévues.

<u>Première étape</u>

1) Un dessin s'impose : les élèves le font-ils ? Dessin machine : oui - non

Dessin papier : oui - non

2) Différentes pistes pour la mise en place du système :

- **piste P_0** : les élèves s'orientent vers la recherche de tangentes communes en un même point.
- **piste P_1** les élèves calculent une des deux tangentes et recherchent un point d'intersection avec l'autre courbe : Dans ce cas, les arrêter dans leur recherche. Pour ces deux pistes, le professeur arrête les groupes dans leur recherche.
- **piste P_2** : les élèves introduisent un point A sur la courbe d'exp et un point B sur la courbe de ln, ils cherchent une équation de la droite (AB) et écrivent que cette droite est tangente en A à la courbe d'exp et tangente en B à la courbe de ln.
- **piste P_3** : les élèves cherchent les équations des deux tangentes et identifient coefficient directeur et ordonnée à l'origine.
- **piste P_4** : les élèves cherchent l'équation de l'une des deux tangentes (par exemple T_b : $y - \ln b = \frac{1}{b}(x-b)$) puis expriment l'égalité des coefficients directeurs et l'appartenance de $A(a, e^a)$ à T_b pour avoir $\begin{cases} e^a = \frac{1}{b} \\ e^a - \ln b = \frac{1}{b}(a-b) \end{cases}$.

3) <u>Scénario de la première étape.</u>

Nous décidons de laisser dans les trois classes une durée initiale minimale de 15 mn de recherche sans intervention (sauf pour stopper les pistes P_0 et P_1). Chaque professeur est ensuite libre de choisir le moment de sa première intervention en ne dépassant pas 15 minutes supplémentaires. Cette intervention consistera, en substance, à évoquer les pistes qui auront émergé dans la classe et à dire d'une façon ou d'une autre qu'il faut aboutir à un système. Mais chaque professeur reste libre de la forme choisie pour cette intervention.

Dès que le professeur aura fait cette intervention collective, une durée minimale de 10 mn supplémentaires de recherche devra être laissée aux élèves pour pouvoir observer l'effet sur les élèves de cette intervention. Ensuite le professeur choisira le moment qu'il juge opportun pour distribuer à **tous** les élèves la fiche de méthodes suivante, en laissant les élèves libres de l'utiliser ou pas. Cette façon de faire correspond en fait à une deuxième intervention collective dont on veut essayer d'évaluer l'impact.

Fiche de méthodes :

- A étant un point de la courbe de la fonction exponentielle et B un point de la courbe de ln comment traduire que (AB) est tangente en A à la courbe d'exp et tangente en B à la courbe de ln ?
- comment traduire que deux droites dont on connaît une équation sont égales ?
- comment traduire qu'une droite dont on connaît une équation est tangente en un point donné à une courbe représentative d'une fonction ?

On observe ensuite ce que vont faire les élèves de cette fiche. A priori, il y a trois cas :

1) Ceux qui n'ont toujours pas trouvé une piste (même après la première intervention du professeur) : vont-ils mieux comprendre ce qu'il y a à faire.

2) Ceux qui ont déjà une piste mais qui n'ont pas abouti au système : vont-ils savoir répondre correctement à la question qui les concerne ?

3) Ceux qui ont déjà abouti au système : vont –ils prêter attention à cette fiche ? Si c'est le cas, vont-ils changer de méthode pour avoir un autre système ?

Le professeur attend le temps qu'il juge bon avant de faire la troisième intervention collective qui consistera à donner la réponse aux questions de la fiche méthodes. C'est la dernière intervention collective de la phase 1.

Ensuite le professeur peut passer aux interventions ciblées dans les groupes pour les aider à aboutir au système. Les observateurs observent les échanges professeur-élèves et élèves entre eux durant cette fin de première étape. Après le départ du professeur, l'observateur reste pour noter l'impact de l'intervention du professeur dans le groupe

On peut estimer a priori que le temps écoulé variera entre 45 mn et 1h.

Deuxième étape

Il s'agit d'éliminer une inconnue. A cette étape de l'expérimentation le professeur gère maintenant le temps comme il le souhaite. L'intervention collective unique de cette étape consistera à dire qu'il faut éliminer une inconnue. On observera l'effet de cette intervention et ensuite seulement, on passera aux interventions ciblées pour aider ceux qui n'arrivent pas à obtenir une équation à une inconnue.

Troisième étape :

Il s'agit d'introduire une fonction pour résoudre cette équation. On observe ce qui se passe, c'est à dire si les fonctions qui émergent aboutissent à des calculs compliqués. Si ce n'est pas trop compliqué, le professeur les laisse faire ou les aide sur la fonction sur laquelle ils travaillent par des interventions locales. Il nous semble qu'il ne faut pas imposer à tous les groupes de travailler sur la même fonction : un des avantages du travail de groupe est justement de permettre une approche non uniforme d'un même problème.

Mais il est probable que le professeur sera amené à faire une intervention collective qui consistera à dire que, pour avoir des calculs simples, on pourra travailler sur l'équation $e^x = \frac{x+1}{x-1}$ ou sur l'équation $\ln x = \frac{x+1}{x-1}$, après avoir vérifié que leur équation est équivalente à l'une ou l'autre. Quoi qu'il en soit, cette intervention ne devra avoir lieu qu'après que les élèves aient constaté la lourdeur des calculs dans lesquels ils sont engagés. On observe ce qui se passe et on leur fait grâce de la deuxième application du théorème de la bijection.

Quatrième étape :

On prévoit de leur distribuer les courbes toutes faites pour leur faire tracer les tangentes ,en demandant les solutions à un dixième près.

Cinquième étape (éventuellement) :

Certains groupes arriveront sûrement aux solutions avant la fin de la séance. On peut alors leur demander d'expliquer pourquoi les deux abscisses trouvées sont soit opposées soit inverses. On peut aussi leur demander de montrer que si μ désigne l'abscisse d'un point de contact cherché sur la courbe de exp (et donc $-\mu$ l'abscisse de l'autre point) l'aire du domaine délimité par la courbe d'exp et le segment qui joint les deux points est égale à 2μ.

Il nous semble peu judicieux de prévoir une grille d'observation a priori car cette grille risque de nous enfermer dans un cadre dont nous aurons du mal à sortir. Par contre, bien sûr, lors de l'analyse de l'expérimentation, nous dégagerons les points importants en utilisant une grille.

Deuxième partie :

ANALYSE DE L'EXERCICE DE L'EXPERIMENTATION

1) Degré d'ouverture :

C'est un énoncé ouvert, car la réponse n'est pas donnée, et il n'y a pas d'indication de méthode. De plus, les élèves n'avaient pas rencontré de problème de ce type.

2) Le problème posé se résout en 4 étapes :

a) Introduction de a et b

b) Egalisation des tangentes

c) Elimination d'une inconnue

d) Introduction d'une fonction

3) Remarques :

Le problème serait dans sa totalité de l'ordre de mises en fonctionnement de connaissances supposées disponibles, si l'on ne tenait pas compte des interventions du professeur. Mais, ces interventions collectives se substituant à des questions intermédiaires, ferment un peu le problème. Les interventions modifient les activités des élèves en train de résoudre le problème.

a) Pour l'introduction de a et b, il faut mettre en œuvre les adaptations suivantes :

- L'élève doit passer de la recherche d'une tangente à la recherche du point de tangence à la courbe (le cadre est géométrique), puis à l'abscisse de ce point (cadre analytique).

L'inconnue n'est plus le point de tangence, mais son abscisse.

Et donc, la reconnaissance précise de ce qui est l'inconnue exige une adaptation.

- Ce procédé doit être répété deux fois : il y a donc une autre adaptation qui consiste à créer deux points donc distinguer deux abscisses.
- Donner l'équation de la tangente en un point est de l'ordre du **mobilisable** et non du technique, car il y a des paramètres.

b) L'égalisation des tangentes :

- De même l'égalisation des tangentes demande de passer d'une vision géométrique (deux droites confondues) à une vision analytique (deux équations de droites analogues) : ce qui est un nouveau problème, on peut presque oublier le problème initial.

Il y a là un changement de cadre.

- L'égalisation des tangentes en tant que telles pourrait être de l'ordre du technique, mais comme il y a des paramètres et compte tenu aussi de l'intervention prévue, cela relève d'une mise en fonctionnement demandant des connaissances **mobilisables.**

c) L'élimination d'une inconnue :

- Avant l'intervention : il faut savoir qu'il faut éliminer une inconnue.
- Après l'intervention : la tâche ne devient pas néanmoins de l'ordre du technique.

En effet, ce qui est plus « habituel », et donc d'ordre technique pour les élèves sur la notion de système, c'est résoudre

un système linéaire.

Il y a là une adaptation : les élèves doivent extraire la méthode de substitution qu'ils ont l'habitude d'utiliser dans les systèmes linéaires, pour l'appliquer à un autre système (non linéaire) ; c'est donc de l'ordre du **mobilisable.**

Mais la mise en fonctionnement de la méthode de la résolution d'un système non linéaire par substitution, est de l'ordre du **disponible**.

d) L'introduction d'une fonction

- D'une part le texte ne donne aucune explication.
- Les élèves vont d'abord chercher à résoudre l'équation, ce qui est normal, et c'est l'échec de cette technique qui rend l'introduction de la fonction nécessaire.

Il y a donc un **changement de cadre**, car il y a un passage du cadre algébrique au cadre fonctionnel

- Il y a un **changement de point de vue**, quand a devient x.
- Il y a aussi un **changement de point de vue**, quand il faut passer de $f(x) = g(x)$ à $f(x) - g(x) = 0$ pour avoir à résoudre $h(x) = 0$).
- Ensuite, l'application du théorème de la bijection devient **technique.**

Ici, c'est la manière d'envisager la résolution de l'équation obtenue, par l'introduction d'une fonction qui est de l'ordre du **disponible**.

Troisième partie :

TABLEAU DE MISE EN RELATION SYSTEMATIQUE ENTRE CETTE ANALYSE ET LES DIFFERENTS CONSTATS

Ce tableau, permet de mettre en regard, pour chaque tâche prévue dans le scénario de l'expérimentation, le travail de la classe, celui des groupes (distingués entre eux), celui du professeur. Un bilan est fait si nécessaire dans la dernière colonne.

On mettra en évidence plus particulièrement les phénomènes stables d'une classe à l'autre, et les variabilités.

*Les classes et leurs professeurs sont désignés par les lettres A, B et C. On note * les stabilités observées dans les classes et par ◆ les variabilités.*

Début de la séance. Mise en route.		
Travail classe et groupes	Travail du professeur	Bilan
* Dans les 3 classes, les élèves se mettent au travail rapidement et le silence s'instaure. Les élèves prennent majoritairement la calculatrice. ◆ Le travail s'amorce collectivement dans deux classes (A et C) et plus individuellement dans l'autre (B) ◆ Certains groupes dessinent des courbes sur la feuille. On note : • A : 18 élèves sur 32 n'ont pas fait de dessin. 6 élèves sur 32 ont tracé seulement les deux courbes. 4 élèves sur 32 ont tracé les deux courbes et les deux tangentes communes. • B : 24 élèves sur 27 n'ont pas fait de dessin. aucun élève n'a tracé seulement les deux courbes. 3 élèves sur 27 ont tracé les deux courbes et les deux tangentes communes. • C : 12 élèves sur 29 n'ont pas fait de dessin. 3 élèves sur 29 ont tracé seulement les deux courbes. 14 élèves sur 29 ont tracé les deux courbes et les deux tangentes communes. ◆ 11 élèves de A ont étudié les fonctions ln et exp. 1 élève de B a étudié les fonctions ln et exp. 2 élèves de C ont étudié les fonctions ln et exp.	• A a envie, juste avant la séance, de changer le texte. Il a prévu deux textes écrits à la main, à distribuer aux élèves, l'un avec « admettent des tangentes communes» conformément au scénario, l'autre avec « possèdent des tangentes communes». A demande l'avis aux observateurs avant la séance et finalement se rallie à ce qui était prévu. • B écrit l'énoncé au tableau et les élèves recopient le texte. • C distribue le texte tapé à l'ordinateur.	◆ Dès le début de la séance, on note une appropriation différente du scénario. * Pour pouvoir observer l'effet d'une intervention sur le travail des élèves, il nous paraissait impératif que les élèves tirent un trait horizontal sur la feuille pour repérer sur les copies le moment de l'intervention et qu'ils ne reviennent pas en arrière. Cette consigne n'apparaît pourtant pas dans le script du scénario. **A posteriori, il nous apparaît qu'il aurait fallu y préparer les élèves à l'avance.**

Introduction de a et b.		
Travail classe et groupes	Travail du professeur	Bilan
* Au départ, la majorité des élèves n'introduisent qu'une inconnue. ◆ On ne note pas de variabilité d'une classe à l'autre. On note la piste P_0 : • A : 6 groupes sur 9. • B : 5 groupes sur 7. • C : 6 groupes sur 8 ◆ Pour les notations, • A : 26 élèves sur 32 ont utilisé la notation a et b. 6 élèves sur 32 ont utilisé la notation x_1 et x_2. • B : 14 élèves sur 27 ont utilisé la notation a et b. 6 élèves sur 27 ont utilisé la notation x_0 et x_1. 4 élèves sur 27 ont utilisé la notation x_A et x_B. 3 élèves sur 27 ont utilisé la notation a_1 et a_2. • C : 28 élèves sur 29 ont utilisé la notation a et b. 1 seul élève sur 29 a utilisé la notation a et a'.	◆ On note une ***divergence*** des trois interprétations sur **« arrêter la piste P0 »** • A : laisse faire : il n'arrête pas la piste P0, car il pense que pour les élèves, il y a bien deux points distincts mais qu'ils oublient de le traduire car ils sont victimes des notations du cours. • B : intervient pour arrêter la piste P0 dans les groupes concernés et guide donc les élèves pour leur faire prendre deux inconnues, en disant en particulier « est ce que les courbes se coupent ? ». • C : laisse faire durant 15', puis attire l'attention des élèves sur « tangente commune ». **Il n'y a pas d'intervention** des professeurs pour souligner le passage de la tangente au point de tangence, puis du point de tangence à son abscisse. *L'analyse **a posteriori** a révélé ce problème, qui n'avait pas été décelé au moment de la mise en place du scénario initial. Les professeurs avaient essentiellement le souci de faire émerger deux inconnues et c'était cela la finalité de leur intervention. L'adaptation pour eux était que les élèves « voient » deux points.* ◆ ***L'intervention*** : 1. **Le moment** : • A : une intervention à 25' où il fait émerger a et b. • B : une intervention à 18' • C : la $1^{ère}$ intervention à 15' où il insiste sur le terme « commune ». Il ne fait pas de dessin. la $2^{ème}$, à 20', consiste à faire un dessin de tangentes communes à un cercle la $3^{ème}$, à 30', fait émerger la question des deux inconnues. 2. **Le dessin :** • A ne fait pas de dessin. • B dessine les deux courbes au tableau et des tangentes aux deux courbes, distinctes (mais qui apparaissent parallèles aux observateurs comme à certains élèves). • C dessine au tableau une tangente commune à deux cercles, puis dessinera plus tard les deux courbes et une tangente commune aux deux courbes. 3. **Son contenu :** • A insiste sur les deux points, ainsi que sur la notation . Il fait une intervention, qui est plutôt une **synthèse,** quand à peu près la moitié des groupes a déjà introduit a et b et que, de toute façon, tous sont dans le bon cadre (analytique), en ayant tous au moins une équation de tangente. • B fait une **synthèse « après coup »** qui là correspond à une cohérence habituelle (le fait d'arrêter d'emblée au départ la piste P0 n'étant qu'une cohérence interne liée au scénario). • C insiste sur le terme « commune » (dans « tangente commune ») : quand les élèves ont des difficultés, il a tendance à essayer de **« transposer »** le problème sur un registre plus familier. C'est ainsi qu'il fait référence aux tangentes communes à un cercle, ce qui ici laisse les élèves dans le cadre géométrique (et ne les fait pas passer dans le cadre analytique) , mais qui veut mettre l'accent sur les deux points de tangence.	Dans les problèmes de tangentes, il y a de manière implicite un perpétuel changement de cadre entre - le cadre géométrique (peut être faudrait il dire graphique) avec les notions de courbe et de tangente - le cadre analytique avec les équations correspondantes. Seulement, les connaissances dans les deux cadres ne sont pas analogues, et de plus, on n'y travaille pas de la même façon. • *en géométrie*, on (les élèves) ne connaît rien sur la notion de tangente, sauf le dessin. Une courbe est un ensemble de points dont les coordonnées sont liées par une relation, qui donne son équation, alors que la fonction correspondante utilisée en analytique ne fait plus intervenir que l'abscisse comme inconnue. • *en analytique*, les tangentes en un point donné d'une courbe (définition géométrique !) sont traitées comme des droites dont on connaît une équation, c'est à dire dont on connaît le coefficient directeur et dont on sait qu'elles passent par un point (encore de la géométrie) **A posteriori, il nous semble qu'il aurait été plus judicieux d'aider les élèves un peu mieux à faire ce changement de cadre (géométrique-analytique)**

<table>
<tr><th colspan="3">Egalité des tangentes</th></tr>
<tr><th>Travail classe et groupes</th><th>Travail du professeur</th><th>Bilan</th></tr>
<tr>
<td>* Sur les deux classes qui ont la fiche méthode, la grande majorité est déçue.

◆ Un groupe et un élève dans la classe de B ont été déstabilisés : ils ont déjà le système et pourtant changent de méthode pour prendre la droite (AB)</td>
<td>◆ <u>La (ou les) intervention(s)</u> :

• A : Intervention à 35'

1) donne la fiche méthode en précisant aux élèves « cela va peut être vous aider ». Il donne cette fiche pour deux raisons :
• pour rester fidèle au scénario prévu pour la séance.

• parce que cette fiche reformule clairement le problème que les élèves doivent se poser : « comment traduire que deux droites dont on connaît une équation sont égales ? »

2) fait des interventions individuelles dans deux groupes pour leur faire égaler « même coefficient directeur, même ordonnée à l'origine » et laisse faire les autres.

• B : Intervention à 28' pour distribuer la fiche méthode, en disant : « vous pouvez l'utiliser si vous voulez »

Intervention collective à 34' : « comment traduit-on que deux droites sont égales ? » puis pose le problème : $\begin{cases} T_a : y = \alpha x + \beta \\ T_b : y = \alpha' x + \beta' \end{cases}$ et interroge les élèves de façon à leur faire dire $\begin{cases} \alpha = \alpha' \\ \beta = \beta' \end{cases}$ système qu'il écrit au tableau.</td>
<td>Sur la fiche méthode :
1) Au départ, nous avions prévu cette fiche parce que nous pensions que trois pistes pouvaient émerger.

2) Cette fiche méthode était prévue pour
• Structurer la démarche des élèves qui en avaient besoin.
• Reformuler clairement le problème pour d'autres.

3) A posteriori, on peut se demander quel est l'intérêt de présenter en classe les diverses méthodes qui peuvent être utilisées pour résoudre le problème posé, et s'interroger sur le moment où on expose ces méthodes ?

Sur la rigueur :
• Certains professeurs sont plus vigilants que d'autres pour que les élèves écrivent ce qu'ils cherchent.

Les enseignants estiment devoir rendre « propre » le travail de l'élève plus ou moins vite. Certains pensent que la rigueur correspondante aide à comprendre, d'autres que c'est une fois que l'on a à peu près compris qu'on peut formaliser.

On peut se demander si vouloir rendre « propre » d'entrée n'oblige pas l'enseignant à isoler les concepts et donc à couper les élèves de leurs dynamiques de recherche. En effet, ce travail est souvent associé à des tâtonnements qui peuvent induire des « maths sales ».

• Devant une copie où il y a $ax+b=cx+d$ et , et si les élèves n'ont rien explicité précisément, ceux là même qui étaient les plus vigilants interprètent que les élèves cherchent x, alors que les autres pas forcément (et attendent donc la suite des réactions des élèves).</td>
</tr>
</table>

Egalité des tangentes (suite)		
Travail classe et groupes	Travail du professeur	Bilan
	• C : 1) ne distribue pas la fiche méthode (et en parlera plus tard). 2) fait 3 interventions collectives : La 1ère à 30' : fait émerger les inconnues : « les inconnues sont les abscisses de deux points ». La 2ème, 10' après : C donne les notations $A(a, \ln a)$ où $a \in]0, +\infty[$ et $B(b, e^b)$ où $b \in R$, écrit les deux équations et veut faire traduire l'égalité des droites. On est à la 60ième minute : 7 groupes sont sur la piste $T_a = T_b$, mais un groupe (sans qu'il y ait eu intervention du prof) est sur la piste de la droite (AB) tangente en A et tangente en B. Deux groupes ayant égalé les y, C questionne : « quelles sont les inconnues ?, que signifie « égaler les y ». Constatant qu'un 3ème groupe a les mêmes difficultés, C fait, 20' après, une 3ème intervention collective pour aboutir à l'égalité des coefficients directeurs et des ordonnées à l'origine. C s'aperçoit alors qu'il n'a pas distribué la fiche évoquant d'autres méthodes et décide donc de les détailler au tableau. Cet exposé dure 13'.	***Dans le détail :*** • A : est moins pointilleux sur la forme, car il pense qu'au final, les élèves ont le sens, même s'ils ne l'ont pas écrit (il est dans une logique de respect du travail des élèves avec d'emblée un a priori favorable). Par exemple, au sujet d'une intervention individuelle de A dans un groupe d'élèves faibles, nous nous sommes posés la question de l'efficacité des interventions : il avait fait le choix, pour ne pas les décourager, de partir de leur idée (pourtant erronée), de ne pas être directif : en fait cela les encourage trop à ne pas abandonner leur piste . Dans ce cas, l'apport psychologique, positif à un premier niveau, n'a pas aidé à la rupture nécessaire pour qu'ils veuillent abandonner cette piste. • B : préfère qu'ils perdent un peu le sens en espérant qu 'ils vont trouver la solution quand même, mais intervient **après coup** pour redonner du sens (sous forme de synthèse • C : cherche à donner du sens **« avant »**, dès que le problème se pose : « quelles sont les inconnues ? » **Finalement, une intervention est efficace quand les élèves sont dans une dynamique où ils ont une attente. S'ils sont sur une bonne voie, cela les conforte, mais si tel n'est pas le cas, il faut les dissuader suffisamment tôt, quitte à être directif (de façon à ce qu'ils ne s'enferment pas dans leur erreur).**

Elimination d'une inconnue			
Travail classe et groupes		Travail du professeur	Bilan
* De façon générale, se posent des problèmes à la fois de calculs et de méthode (certains élèves substituent deux fois).	• Classe A L'écart se creuse entre les groupes Un groupe n'arrive pas à éliminer	A intervient de façon individuelle en fonction de chaque groupe A fait une intervention collective (67'), au milieu de la classe : « vous avez un système, le principe est d'éliminer une inconnue ».	
	• Classe B Tous les groupes, sauf un, ont obtenu le système Un groupe cherche toujours Les autres sont confrontés à des problèmes de calcul.	B fait donc une intervention collective à 41'qui est une synthèse : « Maintenant que vous avez écrit un système, il faut éliminer une inconnue » B va aider le groupe qui n'a pas le système B traite les problèmes de calcul que rencontrent les différents groupes	
	• Classe C Les élèves ont des problèmes de calcul pour l'élimination de l'inconnue.	C laisse faire 17' puis, à la 90$^{\text{ième}}$ minute, B fait une correction au tableau, écrit l'équivalence : $\begin{cases} e^a = \frac{1}{b} \\ e^a - a e^a = \ln b - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = e^{-a} \\ e^a (1 - a) = -a - 1 \end{cases}$ puis ***reste au tableau jusqu'à la fin de la séance*** en sollicitant les élèves	

Introduction d'une fonction			
Travail classe et groupes		Travail du professeur	Bilan
* En règle générale, les élèves essaient de résoudre et de trouver x « en tournant dans tous les sens ». ◆ Seules deux classes sont en situation de recherche autonome. ◆ Certains élèves regardent l'intersection des deux courbes à la calculatrice et disent : on « voit » 2 solutions.	• Classe de A Tous les groupes, sauf un, ont obtenu le système. Un groupe cherche toujours. Les autres sont confrontés à des problèmes de calcul. ◆ Sur 9 groupes, pour 4 groupes, $f(x)=\ln\left(\frac{-1-x}{1-x}\right)-x$ pour 2 groupes, $f(x)=e^{x}-\frac{x+1}{x-1}$ pour 2 groupes, $f(x)=1+x-(x-1)\ln x$ Pour un groupe, $f(x)=\ln x-\frac{x+1}{x-1}$	A, en fonction de ce qu'il observe, fait des interventions collectives du milieu de la classe : • à 67' : « quand vous avez éliminé une inconnue, vous avez une équation à une inconnue. Problème : Est-ce que cette équation a des solutions ? » • à 73' : « l'équation que vous avez, vous ne pouvez pas la résoudre » et insiste sur l'existence des solutions avec « la méthode employée x fois », et les guide donc, sans le dire, vers le théorème de la bijection. • à 75' : la même que la précédente, formulée plus rapidement. • à 77' : « tout le monde commence à voir apparaître une fonction ? » • à 82' : « vous devez tous avoir f(x) = 0 ; abandonnez f(x) = g(x) » Intervention efficace A est directif sur f(x) = 0, mais pas sur la fonction f choisie. Son but est de ne pas imposer aux élèves quelque chose qu'ils n'ont pas trouvés eux mêmes. Il apparaît quatre fonctions différentes dans l'ensemble des groupes.	La difficulté est de passer du cadre algébrique (résolution d'équation) au cadre fonctionnel (théorème de la bijection). Pour certains d'entre nous, cette tâche est rendue plus difficile du fait de la notation par a (au lieu de x)
	• Classe de B Les élèves ont des problèmes de calcul, notamment pour l'élimination de l'inconnue.	B ne veut pas leur dire f(x) = 0, mais voudrait qu'ils aboutissent à une équation correcte mais simple, pour qu'ils puissent arriver plus vite au résultat. A la 60', après être passé dans tous les groupes pour les aider à trouver une équation, il dissuade ceux qui s'acheminent vers des choses plus complexes de continuer et donne, en les écrivant au tableau, les deux équations conformément au scénario.	Intervention efficace pour les uns car cela les conforte quand ils ont trouvé l'une des deux équations mais qui en perturbe d'autres qui avaient le fil du problème, mais étaient partis avec une autre équation.

Introduction d'une fonction (suite)

Travail classe et groupes		Travail du professeur	Bilan
	• Classe de C.	C'est toujours dans la même intervention, à la 90[ième] minute « on doit résoudre l'équation $e^x (1 - x) = -x - 1$ - Comment résout on en TS ? Réponse d'un élève : graphiquement. - Puis C fait trouver le théorème de la bijection (5 minutes) - Quelle fonction utiliser ? 1[ère] idée : $f(x) = e^x (1 - x) + x$ et chercher $f(x) = -1$ 2[ième] idée : $e^x - \frac{x+1}{x-1} = 0$ 3[ième] idée : $\frac{x+1}{x-1} e^{-x} = 1$ » et fin de séance	**Ce qui motive souvent les interventions de fin de séance : c'est le <u>temps</u>. Il faut aboutir avant la fin de la séance, et parfois donc cela crée une accélération** Cette dernière équation, qui n'avait pas été évoquée dans le scénario, était celle proposée au sujet du bac TS juin 95. Ce sujet est à l'origine du travail proposé aux élèves.

Fin de séance

Travail classe et groupes	Travail du professeur	Bilans
Dans les classes de A et B, 2 groupes ont trouvé les solutions	Dernière intervention de A et B pour distribuer les feuilles où sont tracées les deux courbes, afin que les élèves qui ont trouvé les solutions puissent tracer les tangentes communes aux deux courbes.	

Quelques remarques sur ce tableau.

A) *Remarques générales sur le comportement des élèves et de leurs professeurs.*

1) On peut d'abord noter que les élèves se « ressemblent » plutôt globalement :

- même réaction positive vis-à-vis du travail proposé
- mêmes pistes initiales
- mêmes erreurs, mêmes maladresses

2) Certaines de leurs habitudes semblent toutefois différentes, pour la mise au travail ou le dessin, ceci pouvant résulter de différences de contrat depuis le début de l'année.

3) Si on reprend chaque tâche l'une après l'autre, on peut noter qu'à chaque fois qu'une adaptation est nécessaire, le professeur doit intervenir. Plus précisément,

- **Arrêt de la piste Po et introduction des deux points puis des deux abscisses,**
  L'introduction des deux inconnues n'allait pas de soi :

➢ A a attendu 25 minutes pour faire émerger a et b

➢ B est intervenu dans tous les groupes qui n'avaient fait apparaître qu'une seule inconnue puis a encore signalé cela lors de sa première intervention collective en faisant remarquer dès le départ que la difficulté du problème était liée au fait qu'il y a deux inconnues.

➢ C a fait trois interventions collectives qui se sont échelonnées sur 30 minutes

- **Egalité des tangentes**. Les élèves ont éprouvé des difficultés pour traduire l'égalité de deux droites : l'égalité des coefficients directeurs et l'égalité des ordonnées à l'origine n'a pas émergé immédiatement et a provoqué des « maths sales ». Certains écrivent tout de suite l'égalité des coefficients directeurs , remplacent dans une équation et éliminent les termes en x pour obtenir l'égalité des ordonnées à l'origine. D'autres égalent les y et on peut penser qu'alors ils cherchent l'abscisse du point d'intersection des deux droites.

- A et B laissent faire. A fait des interventions individuelles dans les groupes après avoir distribué la fiche méthode. B fait une intervention collective après avoir distribué la fiche méthode
- C, voulant guider les élèves vers des « maths propres », ayant vu des groupes égaler les y, fait une intervention collective pour aboutir à l'égalité des coefficients directeurs et des ordonnées à l'origine.

- **Résolution d'un système non linéaire**. A et B sont amenés à aider les groupes qui ont des problèmes de calcul et de méthode. B traite directement la question au tableau.

- **Introduction d'une fonction.**

A et B privilégient chacun un aspect de la difficulté et C continue sa correction au tableau :

- A guide fortement sur le théorème de la bijection (« la méthode employée x fois ») et sur l'écriture de l'équation sous la forme f(x)=0. En revanche il laisse une liberté totale sur la fonction à utiliser ;il va donc aider les groupes pour l'étude de la fonction.
- B voudrait que les élèves trouvent seuls qu'il va falloir utiliser le théorème de la bijection pour conclure mais il veut éviter que les élèves passent trop de temps sur l'étude des fonctions et donne donc les équations envisagées dans le scénario (qui sont écrites sous la forme f(x)=g(x)) ; il va aider les groupes à réfléchir sur la méthode de résolution.

4) En ce qui concerne les enseignants, c'est plutôt la diversité d'interprétation du scénario qui a attiré notre attention ; nous y reviendrons plus loin.

B) Les différents bilans que l'on peut tirer.

a) *Pour la mise en route de la séance,*

On note :

- Dès le début, une appropriation différente du scénario par les professeurs,
- Un manque de vigilance dans les consignes données aux élèves : pour pouvoir observer l'effet d'une intervention sur le travail des élèves, il nous paraissait impératif que les élèves tirent un trait horizontal sur la feuille pour repérer, sur les copies, le moment de l'intervention et qu'ils ne reviennent pas en arrière. Cette consigne n'apparaît pourtant pas dans le script du scénario.

A posteriori, il nous apparaît qu'il aurait fallu y préparer les élèves à l'avance.

b) *Pour l'introduction de a et b,*

Dans les problèmes de tangentes, il y a de manière implicite un perpétuel changement de cadre entre :

- le cadre géométrique (peut être faudrait il dire graphique) avec les notions de courbe et de tangente
- le cadre analytique avec les équations correspondantes.

Mais, les connaissances dans les deux cadres ne sont pas analogues, et de plus, on n'y travaille pas de la même façon :

- *en géométrie*, on (les élèves) ne connaît rien sur la notion de tangente, sauf le dessin. Une courbe est un ensemble de points dont les coordonnées sont liées par une relation, qui donne son équation, alors que la fonction correspondante utilisée en analytique ne fait plus intervenir que l'abscisse comme inconnue.
- *en analytique*, les tangentes en un point donné d'une courbe (définition géométrique !) sont traitées comme des droites dont on connaît une équation, c'est à dire dont on connaît le coefficient directeur et dont on sait qu'elles passent par un point (encore de la géométrie)

A posteriori, il nous semble qu'il aurait été plus judicieux d'aider les élèves un peu mieux à faire ce changement de cadre (géométrique-analytique).

c) ***Pour l'égalité des tangentes,***

Sur la fiche méthode :

1) Au départ, nous avions prévu cette fiche parce que nous pensions que trois pistes pouvaient émerger.

2) Cette fiche méthode était prévue pour

- Structurer la démarche des élèves qui en avaient besoin.
- Reformuler clairement le problème pour d'autres.

3) A posteriori, on peut se demander quel est l'intérêt de présenter en classe les diverses méthodes qui peuvent être utilisées pour résoudre le problème posé, et s'interroger sur le **moment** où on expose ces méthodes ?

Sur la rigueur :

- Certains professeurs sont plus vigilants que d'autres pour que les élèves écrivent ce qu'ils cherchent.

Les enseignants estiment devoir rendre « propre » le travail de l'élève plus ou moins vite. Certains pensent que la rigueur correspondante aide à comprendre, d'autres que c'est une fois que l'on a à peu près compris qu'on peut formaliser.

On peut se demander si, vouloir rendre « propre » d'emblée, n'oblige pas l'enseignant à isoler les concepts et donc à couper les élèves de leur dynamique de recherche. En effet, ce travail est souvent associé à des tâtonnements qui peuvent induire des « maths sales ».

Par exemple, devant une copie où il y a $ax + b = cx + d$ et si les élèves n'ont rien explicité précisément, ceux là même qui étaient les plus vigilants interprètent que les élèves cherchent x, alors que les autres pas forcément (et attendent donc la suite des réactions des élèves).

Dans le détail :

- A : est moins pointilleux sur la forme, car il pense qu'au final, les élèves ont le sens, même s'ils ne l'ont pas écrit (il est dans une logique de respect du travail des élèves avec d'emblée un à priori favorable.). Par exemple, au sujet d'une intervention individuelle de A dans un groupe d'élèves faibles, nous nous sommes posés la question de l'efficacité des interventions : il avait fait le choix, pour ne pas les décourager, de partir de leur idée (pourtant erronée), de ne pas être directif : en fait cela les encourage trop à ne pas abandonner leur piste . Dans ce cas, l'apport psychologique, positif à un premier niveau, n'a pas aidé à la rupture nécessaire pour qu'ils veuillent abandonner cette piste.

- B : préfère qu'ils perdent un peu le sens en espérant qu 'ils vont trouver la solution quand même, mais intervient **après coup** pour redonner du sens (sous forme de synthèse)
- C : cherche à donner du sens « **avant** », dès que le problème se pose : « quelles sont les inconnues ? »

Finalement, une intervention est efficace quand les élèves sont dans une dynamique où ils ont une attente. S'ils sont sur une bonne voie, cela les conforte, mais si tel n'est pas le cas, il faut les dissuader suffisamment tôt, quitte à être directif (de façon à ce qu'ils ne s'enferment pas dans leur erreur)

d) ***Pour l'introduction d'une fonction.***

La difficulté est de passer du cadre algébrique (résolution d'équation) au cadre fonctionnel (théorème de la bijection). Pour certains d'entre nous, cette tâche est rendue plus difficile du fait de la notation par a (au lieu de x).

Nous avons aussi remarqué que **ce qui motive souvent les interventions de fin de séance, c'est le temps. Il faut aboutir avant la fin de la séance, et parfois donc cela crée une accélération.**

C) *En conclusion,*

Nous constatons que le travail d'analyse fait au préalable était, en fait, insuffisant et c'est l'observation de l'expérimentation qui nous a permis de l'affiner (on peut penser que les ultimes adaptations repérées ici ne l'auraient pas été sans tout ce qui a précédé).

Nous constatons aussi que l'expérimentation nous a permis de faire apparaître des éléments inattendus :

- la diversité des interprétations du scénario par les trois professeurs
- la diversité de la réaction des professeurs confrontés à des « maths sales »
- certaines adaptations liées à des changements de cadre, par exemple, pour l'introduction de a et b, l'élève doit passer de la recherche d'une tangente à la recherche du point de tangence à la courbe (le cadre est géométrique), puis à l'abscisse de ce point (cadre analytique). L'inconnue n'est plus le point de tangence, mais son abscisse.

Quatrième partie :

BILAN DE L'EXPERIMENTATION POUR LES ELEVES

Au delà de l'intérêt des élèves pour le problème posé, il nous a semblé intéressant d'essayer de quantifier l'effet de ce travail a eu sur les élèves. Une évaluation a donc été prévue, en fin d'année, sur le même thème, avec les mêmes objectifs.

Compte-rendu du test fait en fin d'année dans les trois classes de A, B et C.

Quatre mois après l'expérimentation, nous avons fait, fin mai, un test dans les trois classes de Terminale de A, B et C sous forme d'une interrogation écrite d'une heure dont le sujet était le suivant :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. **Etudier si les courbes respectives des fonctions ln et carré admettent des tangentes communes et si oui lesquelles.**

Les résultats de ces tests sont donnés en annexe. Figure aussi un tableau récapitulatif pour les trois classes.

Signalons les résultats stables (notés *) et ceux plus variables (notés ♦) :

♦ On peut noter des divergences sur le tracé des courbes entre les classes de A et B (où environ le tiers de la classe tracent les courbes de ln et carré) et celle de C (où les ¾ des élèves font le tracé des courbes).

* Les résultats sont plus homogènes quant à l'écriture correcte d'une équation d'une tangente

♦ Pour l'introduction des deux inconnues correspondant aux abscisses des deux points, on peut noter que c'est dans la classe de A que le taux de réussite est le plus élevé (82 %), que c'est dans celle de B qu'il est le plus faible (42 %), le taux de réussite dans la classe de C se situant « à la moyenne » des deux (67%).

Il faut rapprocher ces résultats au fait que A, comme C, n'avait pas arrêté la piste Po alors que B était intervenu, conformément au scénario, dès le début de la séance pour l'interrompre.

◆ Plus précisément,

A : sur les 27 élèves qui ont introduit deux inconnues, 11 arrivent à trouver l'équation dont les solutions sont les abscisses des points cherchés, 10 pensent au théorème de la bijection (il est à noter presque tous les élèves ont su passer du cadre algébrique au cadre fonctionnel).

B : sur les 10 élèves qui ont introduit deux inconnues, 2 arrivent à trouver l'équation dont les solutions sont les abscisses des points cherchés, 4 pensent au théorème de la bijection (deux élèves se sont trompés dans les calculs donnant l'équation)

C : sur les 20 élèves qui ont introduit deux inconnues, 11 arrivent à trouver l'équation dont les solution sont les abscisses des points cherchés, 4 pensent au théorème de la bijection (le passage du cadre algébrique au cadre fonctionnel est ici moins réussi).

A noter qu'un élève de la classe de C a traité (fort mal !!) le problème des tangentes communes aux courbes de ln et de exp (sujet de notre expérimentation !!!).

Conclusions :

Donnons des informations « plus objectives » sur le niveau des trois classes de A, B et C , indépendamment de notre expérimentation :

- Classe de A : 33 élèves : 10 spécialité math, 23 spécialité physique
- Classe de B : 28 élèves : 17 spécialité math, 3 spécialité physique, 8 spécialité SVT
- Classe de C : 31 élèves ne faisant que la spécialité math.

D'autre part , les résultats au 1^er^ groupe d'épreuves du baccalauréat ont été les suivants :

- Classe de A : 3 Bien, 8 Assez Bien, 11 Passable, 8 oral et 3 collés
- Classe de B : 2 Très Bien, 2 Bien, 11 Assez Bien, 7 Passable, 2 oral et 4 collés
- Classe de C : 1 Très Bien, 2 Bien, 9 Assez Bien, 11 Passable, 4 oral et 4 collés

Si un enseignement peut être tiré à partir de notre travail, c'est le suivant : il semble que ce soit dans la classe où les élèves ont travaillé de la façon la plus autonome que les notions utilisées ont été le mieux assimilées (le test de fin d'année montre que ces notions ont été rendues plus mobilisables).

Cinquième partie :

REPONSES AUX QUESTIONS POSEES DANS LE SCENARIO

Nous allons maintenant, à l'issue de notre expérimentation, essayer de voir si nous pouvons apporter des éléments de réponses aux questions posées au départ.

Notre objectif initial était d'observer l'effet d'une intervention du professeur sur le travail et l'apprentissage des élèves, sachant que pour certains élèves cette intervention viendra avant qu'ils aient trouvé, pour d'autres après.

1) Questions concernant l'observation des élèves :

a) En quoi l'intervention modifie-t-elle le travail de ces deux catégories d'élèves ? Est-elle utile pour les deux catégories d'élèves et si oui à qui profite-t-elle le plus ?

Ayant donné comme consigne aux élèves de tracer un trait dans leur copie après chaque intervention collective du professeur, nous espérions observer plus facilement l'effet sur le travail des élèves. Mais, faute d'avoir suffisamment insisté sur l'importance de cette consigne, les élèves sont souvent revenus en arrière ou ont effacé, ce qui a anéanti l'efficacité de notre consigne. **Dans ce type d'expérimentation, il nous semble donc important que tout ce qui est en relation avec la trace écrite des élèves soit mis au point avec beaucoup de précision.**

Pour ce qui concerne l'effet sur le travail des élèves, nous n'avons donc pas de réponse à apporter mais nous avons constaté que :

- lorsque l'intervention vient après, certains élèves sont confortés dans ce qu'ils ont fait surtout quand la forme de leur résultat est la même que celle proposée par le professeur. Cependant, lorsqu'une certaine adaptation est nécessaire pour faire coïncider le résultat de l'élève et celui proposé par le professeur, cela peut créer une inquiétude chez certains élèves.

- lorsque l'intervention vient avant, il peut arriver qu'elle n'ait aucun effet chez certains élèves. Il ne nous a pas été possible de discerner si ces élèves fonctionnaient par rapport à une situation de rupture ou en recherche d'une « zone proximale de développement ». **Peut-être qu'une autre organisation dans laquelle l'observateur reste dans le même groupe, du début jusqu'à la fin de la séance, aurait permis de repérer les modes de fonctionnement de ces élèves.**

b) Quelle est la qualité d'écoute des élèves lors de l'intervention du professeur, en fonction du groupe auquel ils appartiennent ?

Pour des élèves déjà lancés sur une piste, écouter une intervention collective demande l'effort d'arrêter leur recherche personnelle et certains mettent un peu de temps à accepter l'idée de cette interruption. Les élèves qui tirent le plus de profit d'une telle intervention sont ceux qui sont à l'origine de la décision d'intervenir du professeur.

c) Comment les élèves s'approprient-ils ce qui a été dit ? Est-ce que ce sont toujours les mêmes élèves pour lesquels l'intervention vient avant qu'ils aient trouvé et les mêmes pour lesquels cette intervention vient après ?

Nous ne sommes pas en mesure de répondre à ces questions : c'est la même difficulté que celle signalée pour les questions du début.

2) <u>Questions concernant l'observation du professeur.</u>

a) ***Quel est le comportement du professeur pendant la phase initiale de recherche des élèves ?***

Les professeurs circulent entre les groupes et observent le travail des élèves.

- C a parfois des mimiques expressives.
- B joue plus sur le registre expérimentateur neutre.
- A a une attitude plus décontractée.

b) Quels sont les indices qui déclenchent l'intervention du professeur ?

Nous avons vu précédemment que ces interventions ont été déclenchées dès qu'il y avait une adaptation à mettre en œuvre par les élèves. Sur la nature des interventions, nous allons distinguer les interventions collectives et les interventions dans les groupes .

- <u>Interventions collectives</u>

Nous avons observé deux types d'interventions collectives : d'une part des interventions pour aider, d'autre part des interventions pour faire une synthèse.

a) Une même erreur vue à plusieurs reprises (en fait dans deux ou trois groupes seulement) va déclencher une intervention du professeur pour aider l'ensemble des élèves ou pour faire une mise au point.

b) Pour faire une synthèse, les indices pris en compte ont été plus variés dans la décision des professeurs :

- A attend que **tous** les groupes, sans exception, aient abouti.
- B attend que **presque tous** les groupes aient abouti.
- C a le souci de ne pas perdre de vue le projet global de la séance et, pour lui, le facteur temps joue un rôle important.

➢ Interventions dans les groupes.

C a habitué ses élèves à ne pas l'appeler. Il visite systématiquement tous les groupes mais va voir prioritairement les groupes qui lui paraissent en difficulté.
A et B répondent à la demande, en priorité, et sinon passent voir tous les groupes.

c) Sous quelle forme se font les interventions ?

➢ Pour une courte intervention destinée au groupe qui a posé une question susceptible d'intéresser d'autres groupes, A intervient oralement au milieu de la classe sans attendre une écoute de tous. Dans les autres cas, A fait des interventions au tableau destinées à tous.

➢ C, après une phase introductive pour capter l'attention, interroge nommément un élève et le pilote par des questions pour lui faire exposer la solution.

➢ B essaie d'avoir une attitude plus solennelle pour créer les conditions nécessaires à une écoute attentive de tous. Cela est dû au fait que ses interventions ont été plutôt des synthèses partielles ou des résumés d'une phase de recherche. Il essaie de faire réagir le groupe classe mais n'interroge pas un élève pris isolément.

d) Quel est le comportement du professeur après une intervention ?

En général les trois professeurs essaient d'avoir une idée de l'impact de leurs interventions tout en continuant d'aider les élèves dans les groupes. Ils sont en général beaucoup plus pris pour aider les élèves que pour les observer (et il y a donc une différence par rapport à la phase initiale de recherche).

Sixième partie :

BILAN DE L'EXPERIMENTATION POUR LES PROFESSEURS

I Les constats immédiats

1) La diversité par rapport au scénario

a) C'était la première fois que ces trois professeurs étaient confrontés à une séance avec un scénario élaboré en commun. Cette situation nécessitait donc de leur part, une adaptation à ce scénario.

b) Nous avons constaté que chacun des trois professeurs, s'est approprié de façon différente ce scénario , qui avait été, nous l'avons dit, élaboré en commun, et , nous semblait il, dans des termes précis.

Pour ne prendre qu'un exemple sur la difficulté à être précis : *lorsque l'on dit « le professeur n'intervient pas », cela peut en fait se traduire par diverses attitudes possibles :*

- *ne pas observer*
- *observer avec un visage neutre*
- *manifester par des signes, des gestes, des hochements de tête....*

c) Les divergences qui étaient apparues entre les professeurs, lors de la préparation du scénario, et que l'on croyait résorbées, ont resurgi au cours de l'expérimentation et se sont traduites par des diversités de comportement.

Ceci a permis, de mettre en évidence que chaque enseignant prend des décisions non aléatoires, qui révèlent des conceptions cohérentes, profondes, stables. Ces cohérences internes servent à l'enseignant à prendre des décisions « locales » pour adapter, à lui et à la classe, le scénario. Il apparaît donc qu'il y a une même logique, pour chaque enseignant, dans les choix qu'il fait.

Par exemple :

- A semble respecter beaucoup le travail des élèves, en lui même, presque indépendamment de ce qui est fait. Il semble intervenir quand il pense que cela ne « sortira pas »

- B semble attaché à faire passer le scénario, tel qu'il a été prévu, s'effaçant en quelque sorte, et relançant à minima. Mais ceci était lié à l'expérimentation.
- Pour A et B, les interventions collectives apparaissent la plupart du temps, « après coup », sous la forme de synthèse.
- C veut avant tout aider les élèves à donner du sens à ce qu'ils font. Et donc, il voudrait que par exemple, avant de se lancer dans des calculs, les élèves aient clairement explicité leur démarche. Ceci l'amène à poser des questions très tôt sur le but et le sens de leur recherche. Ces questions, certes ouvertes, ferment en même temps le problème, car elles privent les élèves de se poser ces questions-là (il ne leur reste qu'à y répondre).

d) La diversité de ces comportements s'est traduite dans la forme des interventions, mais aussi sur leur durée. Nous avons essayé de mettre ceci en évidence dans le tableau

En conséquence, il nous semble que le fait qu'un même scénario, bien que mis au point avec précision, ait été interprété différemment par les trois professeurs, est un résultat important.

2) Intérêt, faisabilité, et difficultés du scénario.

a) Ce problème a intéressé les élèves des trois classes : ils ont cherché, sans se démotiver, durant deux heures. Le texte s'inspirait d'un sujet de baccalauréat (sujet national 1995), mais son énoncé se présentait sous la forme d'une question ouverte.

b) Le scénario était faisable puisqu'un certain nombre d'élèves ont finalement abouti (quatre groupes sur l'ensemble des trois classes). Mais on peut remarquer que seulement quatre groupes sur un total de vingt quatre ont fini le travail demandé....

c) La gestion de la classe est toujours fonction du temps. Des choix ont été faits, (arrêter la piste P0 par exemple) parce que l'objectif final était d'arriver à la solution complète du problème. On peut regretter que, pour des problèmes de temps, nous ayons privé les élèves d'une certaine réflexion. En cela, le sujet retenu était peut être trop riche, les adaptations trop nombreuses (tangentes communes, points distincts, passage à la fonction, etc..). Nous aurions pu limiter l'objectif à l'apparition du cadre fonctionnel pour résoudre le problème, et laisser le soin aux élèves de terminer en temps libre la fin de l'exercice.

d) Pour observer au mieux le comportement des élèves et des professeurs, nous avons filmé les séances et le professeur a été enregistré grâce à un micro-cravate.

Nous n'avons pas le sentiment que cela a influencé le déroulement de l'expérimentation : nous avions averti les élèves auparavant et ceux-ci ont vite oublié ces aspects techniques. Ceci dit, nous n'avons sans doute pas su utiliser au mieux les vidéos pour analyser les séances : la difficulté provenait du fait que le caméra est restée immobile, donnant seulement une vue globale de la salle de classe sans qu'il soit possible de suivre et d'entendre un groupe particulier. Il aurait peut-être été plus utile de filmer en continu un seul groupe d'élèves afin de mieux observer leurs réactions après une intervention du professeur.

Pour faciliter l'observation des interventions individuelles, un observateur assistait à l'intervention du professeur dans le groupe et restait observer son impact sur ce même groupe, alors qu'un autre observateur prenait en charge l'intervention du professeur dans le groupe suivant. Cette organisation n'avait pas été prévue dans le scénario et a été mise en place au cours de l'observation de l'expérimentation .

En revanche, le micro-cravate nous a davantage aidés à analyser chacune des séances : lorsqu'il a fallu confirmer une chronologie ou contrôler le discours réellement tenu par un professeur, nous y avons fait appel avec profit.

II) ***Les effets à plus long terme***

Tout le travail d'analyse de la séance, nous a permis de prendre conscience de nos différences et cohérences propres, pas seulement sur cette séance, mais sur la durée. Cela nous a aidés à analyser nos propres pratiques et à mettre en regard d'autres pratiques possibles. Au delà de l'échange d'idées, le fait d'avoir VU l'autre en situation de gestion de la classe nous a permis de nous influencer les uns les autres dans l'année. Ceci nous a aussi permis d'avoir un autre regard sur nos pratiques propres, moins « intuitif » et beaucoup plus lucide. Nous avons ainsi découvert les diversités de notre approche de l'enseignement des mathématiques.

Une liste de questions soulevées par notre travail de recherche-formation.

Un certain nombre de situations, considérées comme importantes pour les apprentissages, sont proposées aux élèves en classe de mathématiques et relèvent du schéma suivant : un énoncé de problème (ou d'exercice) est donné, il est cherché en classe (individuellement ou en petits groupes), puis au bout d'un moment l'enseignant fait synthétiser ou synthétise les différentes productions, ou résume ce qui a été fait, et suivant les cas corrige et/ou expose de nouvelles connaissances en s'appuyant sur ce qui a été produit par les élèves. Et ainsi de suite.

Ces énoncés sont conçus pour que les élèves utilisent leurs connaissances pour résoudre (ou commencer à résoudre) l'exercice ; mais cette mise en fonctionnement n'est pas une suite d'applications immédiates, isolées, de propriétés déjà connues, il y a des adaptations nouvelles, il y a des mélanges de connaissances, il peut y avoir des étapes à introduire, il peut y avoir nécessité d'utiliser des connaissances anciennes supposées disponibles.

L'enseignant est amené, selon les cas, à formaliser une question, à généraliser une méthode ou à dégager une propriété utilisée dans ce cas particulier, ou même à présenter une nouvelle notion.

Dans ces conditions, plusieurs questions se posent :

1) Comment aider les enseignants à gérer le moment où il faut arrêter le travail des élèves, faire (faire) une synthèse, généraliser ?

Des recherches actuelles ont déjà révélé que cette phase est une des plus difficiles à réaliser pour les débutants, voire pour tous les enseignants.

En effet d'une part les élèves ont du mal à passer d'une posture active à la simple écoute de quelqu'un d'autre, même si c'est l'enseignant ; d'autre part ils n'en sont pas tous au même point – certains ont fini, d'autres non ; de plus la synthèse est délicate ; l'exposé ne peut être qu'improvisé, et des choix sont à faire dans l'instant sur ce qu'il faut dire et ne pas dire.

2) Comment apprendre aux enseignants à ne pas trop réduire, pendant la phase de recherche, les tâches proposées initialement, sous la pression des questions des élèves et sous la pression du temps ? Comment leur apprendre à laisser les élèves chercher seuls un

maximum de temps, tout en suivant leurs cheminements ? Comment leur apprendre à calibrer selon les classes les indications qu'ils donnent lorsqu'ils ne peuvent plus simplement relancer les élèves ?

Des travaux montrent que souvent les enseignants sont amenés à isoler très vite des sous-tâches à partir de la tâche initiale, pour que les élèves aient au moins mis en fonctionnement quelques propriétés mathématiques visées dans la séance. Mais cet isolement modifie les activités des élèves et peut engendrer, si le phénomène se répète, des connaissances (trop) peu organisées.

3) Comment faire acquérir aux enseignants l'habitude de repérer, lorsque les élèves travaillent, des indices de malentendus entre la tâche demandée et l'activité effectivement déployée par les élèves ? Il a été montré en effet que certains élèves se cantonnent dans l'action, d'autres adoptent d'emblée une posture d'apprentissage pendant les phases de recherche.

4) Comment apprendre à élaborer des situations de ce type, non seulement idéales sur le plan didactique mais aussi abordables effectivement dans une classe ordinaire précise, pour un enseignant précis ? Pourrait-on introduire le terme de « didactiquement correct », entre l'idéal et le possible ?

Les programmes et les horaires contraignants, les habitudes (nationales, par niveaux, par établissement scolaire) des enseignants, peuvent engendrer des impossibilités qu'il n'est pas possible d'ignorer.

De plus chaque enseignant doit gérer, en fonction de sa propre cohérence, bien mise en évidence dans des travaux actuels, des tensions ou même des contradictions, plus ou moins explicites, entre les nécessités du métier et les représentations des apprentissages qu'il met en oeuvre.

Des recherches actuelles ont par exemple montré que l'entretien des anciennes connaissances, pourtant prévu dans beaucoup des énoncés cités ici, est souvent minoré dans les classes. En effet le choix entre faire fonctionner de l'ancien et appliquer du nouveau n'est pas vécu comme une alternative qui se rejoue chaque fois mais il est toujours tranché dans le même sens.

5) Nous avons regretté que des heures de décharge effectives (notre travail a été rémunéré sous forme de HSE) ne nous aient pas été attribuées : parfois le temps nous a manqué pour approfondir notre travail, et notamment lors de la 3ème année où le scénario

de notre expérimentation n'a pas eu la précision nécessaire parce que, certes, c'était la première fois que nous fonctionnons de la sorte, mais aussi parce que le temps nous a manqué.

Sur les modalités de notre travail, nous avons trouvé stimulant le va et vient entre la pratique dans nos classes et l'éclairage de ces pratiques par des éléments théoriques que nous a enseignés Madame Aline Robert. Cela nous a ouvert des horizons variés et souvent insoupçonnés pour nous. Cette forme originale de formation nous semble particulièrement bien correspondre aux besoins de professeurs qui souhaitent approfondir leur pratiques pour mieux les faire évoluer et donc les rendre plus performantes.

Annexes de l'année scolaire 1999-2000

Annexe 1

Cette annexe résume ce qui nous a plus particulièrement intéressé dans le livre « L'enseignement des mathématiques au lycée. Un point de vue didactique » par Aline Robert, Marie Lattuati, Jacqueline Penninckx . Editions Ellipses .

I) Quelles sont les caractéristiques des pratiques des mathématiciens experts ?

1) La disponibilité des connaissances

Cela signifie qu'une personne experte en mathématiques a la capacité à pouvoir chercher la solution d'un problème en dehors du cadre strict où il a été posé et à essayer de mettre le problème en relation avec d'autres questions lorsque la solution n'est pas immédiate .La disponibilité des connaissances se traduit donc par la capacité à pouvoir chercher d'autres savoirs que ceux qui étaient a priori en cause.

2) La capacité à développer des questionnements

Devant un problème, l'expert est capable de se poser des questions de structure, d'homogénéité, de cohérence ,d'existence, d'unicité ,d'exhaustivité ; mais aussi des questions sur le caractère local ou global ,fini ou infini d'une propriété ou d'un résultat. Grâce à ces repères ,l'expert met ainsi en œuvre un contrôle interne de ce qu'il fait.

3) L'existence d'un stock de connaissances et de compétences techniques

L'expert dispose d'un stock de situations de référence qui lui sont suffisamment familières et jouent le rôle de terrain d'expériences pour repérer une anomalie, tester une hypothèse ou un calcul, et pour conjecturer des résultats.
D'autre part l'expert a besoin de calculer, parfois longtemps et il possède des compétences techniques certaines.

4) La capacité à bouger autour d'un problème.

Devant un problème, l'expert est capable de mettre en place des correspondances, des généralisations , des représentations originales, des schémas .Il est capable aussi de faire varier les paramètres, les hypothèses, le domaine d'application, le cadre, le registre. Il sait aussi changer de stratégie et revenir en arrière.

5) L'exigence de rigueur lors du passage à l'écrit.

Le passage à l'écrit engendre chez l'expert une dynamique de questionnements plus précis et une exigence de rigueur supplémentaire.

II) Comment analyser les notions mathématiques ?

1) On peut se demander si la notion intervient comme outil ou comme objet.

Une notion mathématique peut être utilisée dans un problème ou un exercice, et c'est ce que l'on appelle l'utilisation outil de la notion, ou alors, elle peut être présentée de façon générale dans une définition, un théorème ou une propriété, et elle constitue alors un objet d'étude.

2) On peut se demander dans quel cadre intervient la notion.

Il s'agit de se demander dans quel domaine de travail la notion concernée intervient

Exemple 1 : la notion de milieu d'un segment peut intervenir dans le cadre ponctuel ,dans le cadre analytique, dans le cadre vectoriel, ou dans le cadre des barycentres mais aussi dans le cadre des transformations (symétrie centrale)

Exemple 2 : l'orthocentre d'un triangle ABC peut être vu dans le cadre ponctuel (point d'intersection des hauteurs)ou dans le cadre vectoriel ($\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, O étant le centre du cercle circonscrit)

On a vu que l'expert pratique souvent des changements de cadres et il faut donc poser aux élèves des exercices qui provoquent des changements de cadres.

3) On peut essayer d'analyser dans quel registre intervient la notion.

Un registre correspond à un mode d'écriture mathématique.

Exemple 1 : un vecteur peut être représenté à l'aide d'une seule lettre surmontée d'une flèche, par le dessin d'un segment orienté, par le couple (a,b) de ses coordonnées dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$ou encore par l'expression $a\vec{i} + b\vec{j}$.

Exemple 2 : en trigonométrie, le cercle trigonométrique et les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus sont deux registres différents des notions de sinus et cosinus.

<u>Il est utile de faire travailler les élèves sur chaque registre mais aussi sur les changements de registres.</u>

4) On peut essayer de déterminer quels sont les points de vue utilisés et s'il y a des changements de points de vue.

Cette dimension est très présente chez l'expert : il s'agit de petits changements dans la lecture ou l'écriture d'énoncés qui peuvent déclencher des stratégies nouvelles.

Exemples : Passer de « MA=MB=MC » à « M est le centre du cercle circonscrit à ABC », passer de « $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires » à « $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$ », passer de « A = B » à « B = A »ou à « A = C = B » sont des changements de points de vue

De même en analyse, pour calculer certaines limites ,on peut les interpréter à l'aide de la définition du nombre dérivé.

Il est utile d'apprendre aux élèves à repérer des changements de points de vue.

5) On peut se demander à quels types de problèmes appartiennent les notions qui sont en jeu.

Le classement des connaissances mathématiques en fonction des types de problèmes est utile pour structurer les connaissances des élèves.

Par exemple, en géométrie, on distingue les problèmes d'incidence (parallélisme, concours, cocyclicité, alignement, orthogonalité),de lieux, de constructions, de recherches de mesures optimales, etc…

III) Quels sont les niveaux de mise en fonctionnement des connaissances ?

1) Le niveau des connaissances techniques.

Il s'agit simplement pour l'élève d'appliquer une définition, une propriété ou une formule d'une façon qui peut devenir automatique , sans prise de conscience particulière.

Exemples : le calcul des racines d'un polynôme du second degré avec le discriminant, la recherche des racines d'un polynôme, le calcul d'une dérivée, la construction de l'image d'une figure par une transformation donnée.

2) Le niveau du mobilisable.

Un savoir est « mobilisable » par un élève s'il sait l'identifier dans un exercice et l'appliquer. par exemple, utiliser une inconnue auxiliaire pour se ramener à une équation du second degré. A ce niveau de fonctionnement , les connaissances en jeu sont encore explicites et annoncées.

3) <u>Le niveau du disponible.</u>

A ce niveau de mise en fonctionnement, l'élève sait résoudre le problème posé sans indications. Il sait aussi donner des contre-exemples, changer de cadres et appliquer des méthodes originales. A ce niveau de fonctionnement, l'élève est familier de situations de références variées qui lui servent de terrain d'expérimentation ; il dispose de repères, de questionnements et d'une organisation de ses connaissances.

Exemples : faire intervenir à bon escient les nombres complexes dans un exercice de géométrie, savoir résoudre le problème de l'existence d'un rectangle d'aire et de périmètre donné en reconnaissant qu'il se ramène à la discussion de l'existence des racines d'une équation du second degré dont on connaît la somme et le produit.

Cette distinction entre ces niveaux permet d'interpréter partiellement des contradictions entre deux logiques d'élèves :

- la logique de la réussite immédiate
- la logique de l'apprentissage

D'où la question suivante : <u>Comment, à travers les énoncés de problèmes, faciliter l'accès des élèves au niveau du disponible ?</u>

IV) <u>Le travail de construction de problèmes</u>

1) <u>Introduire des changements de cadres ou de registres</u>

Cela sous-entend que ce changement de cadre est intéressant pour résoudre le problème. Il peut être indiqué ou non, ou bien provoqué par l'énoncé , en déclenchant par exemple un changement de cadres entre les hypothèses et ce qui est demandé ensuite.

2) <u>Introduire des modalités dans l'application de théorèmes ou de propriétés</u>

Ces modalités peuvent être des applications simples ou répétées, des reconnaissances avant application, des adaptations (par exemple, changement de lettres par rapport aux lettres usuelles), des transformations des données pour retrouver une situation d'application, un tri des informations données dans l'énoncé.

3) <u>Introduire des modes de raisonnements variés et des degrés de généralité différents</u>

On peut faire travailler les élèves sur tel ou tel type de raisonnement (raisonnement par l'absurde, par analyse et synthèse, par disjonction des cas, par épuisement des cas, par récurrence), faire travailler les élèves sur un cas particulier (la fonction ln) ou sur un cas générique (la fonction f).

4) Veiller à la rigueur des énoncés

Il faut se poser systématiquement les questions, peut-être implicites, d'existence, d'unicité, d'exhaustivité des éléments introduits dans les problèmes. En particulier, il faut veiller à l'usage correct des mots « le »ou « un », « tous »ou « les » dont peuvent dépendre les réponses aux questions posées.

5) Introduire des possibilités de contrôles internes au problème

Il ne s'agit pas de faire en sorte (comme dans les sujets d'examens) que les questions posées fournissent les réponses (montrer que...) mais d'introduire des moyens de contrôles internes d'une autre nature par exemple en jouant sur les changements de cadres (les calculatrices peuvent être un moyen de vérification).

6) Jouer sur le niveau de fonctionnement des outils à utiliser

Une simple application peut suffire. Parfois un changement de cadre est nécessaire et quelque fois encore une adaptation est indispensable.

Le travail sur les énoncés est d'autant plus important qu'il se crée des habitudes chez les élèves. Si dans tous les énoncés proposés aux élèves, chaque activité est provoquée par une question explicite, les élèves ne prendront pas l'habitude de se poser eux-mêmes les questions. Si dans certaines questions, l'enseignant laisse aux élèves l'initiative de trouver une étape, alors il les oblige à se poser des questions.

L'objectif est d'amener les élèves à un questionnement sur les moyens à utiliser AVANT de procéder à la résolution technique du problème posé.

Annexe 2

Cette annexe reprend en particulier trois notions développées dans l'article d'Aline Robert « *réflexions sur l'analyse des textes d'exercices des manuels* » du bulletin APMEP n° 367 (Cf bibliographie) : le degré d'ouverture, le degré de généralité, le degré d'implicite d'un énoncé.

- **Le degré d'ouverture** :

Une question peut être :

- **fermée** : du type « Montrer que ....en utilisant...... ». La méthode de résolution est ici donnée et laisse peu d'initiative à l'élève.

- **quasi fermée** : du type « Montrer que ...... ». La méthode n'est plus donnée, mais suivant la place de l'exercice dans l'apprentissage (s'il est en particulier déclaré ou non comme exercice d'application de telle notion), l'élève aura plus ou moins d'adaptations à faire par rapport aux notions de cours ce qui fera varier son degré d'ouverture.

- **ouverte ou quasi ouverte** : du type « Que peut-on dire de... ». Ni ce qu'il faut démontrer, ni la méthode à utiliser ne sont plus détaillés avec précision ; là encore une question peut être plus ou moins ouverte en fonction du contexte.

- **Le degré de généralité** :

Exemple : si l'on étudie la convergence d'une suite, ou bien cette convergence n'est liée qu'à la particularité de cette suite et ce résultat ne contient pas de degrés de généralisation, ou bien ce résultat contient un degré de généralisation (par exemple les résultats sur la convergence d'une suite géométrique) :
S'il a été déjà établi dans le cours, l'élève doit repérer ce degré de généralisation et l'utiliser. Sinon, le but de l'exercice peut être d'établir ce résultat.

- **Le degré d'implicite** :

Exemple (problème de Fagnano) : la formulation : « trouver le triangle de périmètre minimum inscrit dans un triangle donné » suppose implicitement l'existence d'un tel triangle qu'il faut caractériser , contrairement à la formulation « existe-t-il un triangle (et si oui le caractériser) de périmètre minimum inscrit dans un triangle donné ?».

Annexes de l'année scolaire 2000-2001

Annexe 1

Remarques d'ordre général au sujet de l'analyse des textes de problèmes.

Au cours de l'analyse des textes de problèmes , suivant la grille que nous nous sommes fixée, nous avons fait un certain nombre de remarques sur les notions utilisées :

1) Ce n'est pas parce qu'un énoncé est fermé ou quasi-fermé , qu'il est facile (par exemple : le théorème de Fermat), mais le travail ne porte pas sur la même chose : un énoncé fermé déclenche **un autre** travail qu'un énoncé ouvert.

L'analyse des énoncés est utile car elle permet de réfléchir à l'activité qui est déclenchée. Avoir la maîtrise d'un énoncé, c'est savoir le travail qu'il va déclencher

Un autre exemple : l'activité provoquée par un énoncé commençant par « montrer que.. » n'est pas la même que celle provoquée par un énoncé commençant par « est-ce que.. ». On ouvre ou on ferme la question selon ce que l'on veut provoquer.

2) Les changements de registre (d'écriture) sont très souvent liés aux changements de cadre :
Quand on change de cadre , on change souvent de registre. Ce n'est néanmoins pas systématique : par exemple, le passage de l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale d'un nombre rationnel est un changement de registre qui ne s'accompagne pas ici de changement de cadre.
Le changement de registre (en didactique) est plus réservé aux écritures symboliques.
En étant conscient de ces changements de registre, on sait mieux interpréter les réponses des élèves et peut être éventuellement attirer leur attention sur les difficultés (interventions « méta ») . Cela nous permet aussi de prendre la décision de faire une intervention ou pas.

3) Les changements de point de vue sont très importants ; le tableau est une immense réserve de changements de point de vue. Très souvent, **on traduit ce que dit l'élève** en

faisant un changement de point de vue. Il est important de savoir comment nous « fonctionnons ».

La maîtrise de nos pratiques nous permet d'agir et de trouver les moyens pour que les élèves soient plus autonomes.

4) Les exercices de technique pure ne sont pas à éliminer. Ce sont les « gammes ».

5) **Plus on note dans un problème de changement de cadre, plus le niveau des connaissances est de l'ordre du mobilisable, voire même du disponible.**

L'effort d'adaptation qui doit être fait par l'élève, face à un changement de cadre ne lui permet plus de fonctionner au niveau des connaissances techniques(sa démarche va au delà de la restitution d'un formule, d'un théorème, etc...). Il faut tester ces adaptations et repérer celles qui sont raisonnables.

Par ailleurs, pour pouvoir parler de changements de cadre, nous avons vu la nécessité d'essayer de <u>lister les différents cadres possibles</u>. Nous avons ainsi repéré :

- Le cadre géométrique qui peut lui-même regrouper

    Le cadre numérique
    Le cadre ponctuel
    Le cadre analytique
    Le cadre vectoriel (et barycentrique)
    Le cadre des transformations.

- Le cadre trigonométrique
- Le cadre fonctionnel
- Le cadre graphique qui lui-même interfère sur plusieurs cadres :

    Le cercle trigonométrique (pour le cadre trigonométrique)
    Courbes représentatives de fonctions
    Histogrammes, boites à moustache,...

- Le cadre numérique
- Le cadre complexe
- Le cadre algébrique
- Le cadre probabiliste
- Le cadre statistique

Annexe 2

Exemples sur la diversité des énoncés

Voici un problème très simple de recherche d'asymptote oblique que l'on peut formuler de plusieurs façons :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$-{1} par f(x)= $\dfrac{2x^2 - x + 2}{x - 1}$

Enoncé 1 :

La courbe de f a-t-elle une asymptote oblique ?

Enoncé 2 :

Montrer que la droite d'équation y = 2x+1 est une asymptote oblique à la courbe de f.

Enoncé 3 :

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (2x+1)$. En déduire que la courbe de f admet une asymptote oblique.

Enoncé 4 :

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - 2x$. En déduire que la courbe de f admet une asymptote oblique.

Enoncé 5 :

Trouver des réels a,b,c tels que pour tout réel x différent de 1,on ait : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.

En déduire que la courbe de f admet une asymptote oblique.

Enoncé 6 :

Montrer que la fonction $g: x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ a une limite finie ,a , en $+\infty$.Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ax$.

En déduire que la courbe de f admet une asymptote oblique.

Enoncé 7 :

Déterminer les nombres a et b pour que la fonction $g: x \mapsto f(x) - (ax+b)$ admette comme limite zéro en $+\infty$. En déduire que la courbe de f admet une asymptote oblique.

Ces différents énoncés ne vont pas déclencher tout à fait la même activité mathématique chez les élèves :par exemple ils vont se centrer sur une démonstration dans le second énoncé alors que le premier les conduit plutôt d'abord à observer ce qui se passe (par exemple avec la calculatrice). Le niveau de fonctionnement des connaissances ne sera pas non plus tout à fait identique.

Parmi les niveaux de mise en fonctionnement des connaissances, on distingue les niveaux technique, mobilisable et disponible :du technique au mobilisable, le degré d'autonomie et la complexité sont de plus en plus grands.

L'énoncé 2 correspond à une mise en fonctionnement technique des connaissances : il s'agit d'une application directe et isolée d'une définition.

L'énoncé 4, en revanche demande de faire une interprétation de la limite calculée : c'est le niveau des connaissances mobilisables.

L'énoncé 1 correspond au niveau du disponible : l'élève doit résoudre l'exercice sans indication et inventer une méthode originale.

Bien entendu ces distinctions sont complètement relatives à un niveau scolaire donné :ici, pour un élève de Première qui viendrait juste d'apprendre la définition d'une asymptote oblique.

Or ce qui est intéressant du point de vue de l'apprentissage, ce sont justement ces activités qui sont déclenchées par les diverses formulations possibles d'un énoncé.

Annexe 3

Exemples d'analyse d'exercices.

Exercice 1

Soit ABC un triangle, D le point défini par $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, E le barycentre du système (A, 1) et (B, 2). Les droites (BD) et (EC) se coupent en F. Déterminer trois réels a,b,c tels que F soit le barycentre du système (A, a), (B, b) et (C, c).

1) Degré d'ouverture

Il s'agit d'un exercice quasi-fermé car l'élève sait précisément ce qu'il doit obtenir mais il n'y a aucune indication de méthode.

2) Niveau de fonctionnement des connaissances

Avoir l'idée d'exprimer le point D comme un barycentre est du niveau du mobilisable mais il faut ensuite faire apparaître de bons coefficients qui , grâce à l'utilisation du théorème du barycentre partiel ,permettront de justifier que le point que l'on propose appartient à la fois à (BD) et à (EC) et à partir de là on atteint le niveau du disponible .La rédaction de la solution nécessite de *créer* un point et de vérifier qu'il satisfait les conditions définissant F ;elle est donc le signe d'une prise d'initiative caractéristique d'un niveau de fonctionnement des connaissances élaboré.

3) Quels sont les cadres et registres en jeu et y a-t-il des changements de cadres et de registres ?

L'énoncé met en jeu trois cadres géométriques: le cadre vectoriel, le cadre des barycentres, le cadre ponctuel. Les hypothèses utilisent les trois cadres et le résultat à obtenir se place dans le cadre des barycentres. De par sa formulation cet exercice provoque donc des changements de cadres et c'est ce qui le rend intéressant. Comme on est amené à changer d'écriture mathématique pour le point D, il y a un changement de registre et de cadre.

4) Y a-t-il des changements de points de vue ?

L'application du théorème du barycentre partiel provoque des changements de points de vue puisqu'il faut faire deux regroupements différents de points pondérés.

5) Quel est le degré de généralité ?

Cet exercice est aisément généralisable puisqu'il est possible de faire varier la position du point E sur (AB) et du point D sur (AC).

6) Quel est le degré d'implicite ?

Cet exercice présente un degré d'implicite puisqu'un élève n'est pas censé savoir que tout point du plan peut s'exprimer comme barycentre de trois points non alignés. Si l'on sait a priori que ces coefficients existent, la rédaction de la solution sera différente.

Exercice 2 : **EVAPM (évaluation 99–terminale des lycées) Epreuve T 26 question Q15**

> **Deux vecteurs non nuls $\vec{a}$ et $\vec{b}$ vérifient $\|\vec{a}+\vec{b}\| = \|\vec{a} \quad \vec{b}\|$.**
>
> **Quelle est la mesure de l'angle formé par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$?**

1) **Degré d'ouverture de l'énoncé :** la question posée est **ouverte.**

2) **Le niveau de mise en fonctionnement** des connaissances sur le produit scalaire est de l'ordre du **disponible**.

3) **Le cadre** est un **cadre vectoriel** , si on utilise le produit scalaire de deux vecteurs.

$\|\vec{a}+\vec{b}\| = \|\vec{a} \quad \vec{b}\|$ équivaut à $\|\vec{a}\|^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + \|\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \quad 2\vec{a}.\vec{b} + \|\vec{b}\|^2$ équivaut à $\vec{a}.\vec{b} = 0$

On peut noter :

- un **changement de point de vue** lors du passage de $\|\vec{a}+\vec{b}\|$ à $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2$
- un **changement de registre** lors du passage de $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2$ à $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b})$.

4) **Changement de registre ou changement de point de vue** ?

On peut s'interroger sur le produit scalaire au niveau du lycée :

- pour le passage de la norme à la distance, il y a un vrai changement de cadre ou de registre car cela ne se traite pas mathématiquement de la même manière (norme dans un espace euclidien, distance dans un espace affine). Au niveau du lycée, on « triche » : on ne dit pas qu'on est dans un espace euclidien, il n'y a pas de filtre théorique, on ne donne pas la donnée théorique qui est ici cachée.
- Pour le passage du carré de la norme au carré scalaire, il n'y a pas, en math, de changement d'écriture, ce qui pourrait se traduire par un changement de point de vue. Mais pour des élèves de lycée, l'écriture carré scalaire permet des calculs (relation de Chasles) que le carré de la norme ne permet pas. Les deux écritures ne menant pas aux mêmes calculs, il y a donc changement de registre.

Remarque : On peut pratiquer un changement de cadre en résolvant l'exercice dans le **cadre géométrique**. Si $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ et si $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, soit C le point tel que le quadrilatère OACB soit un parallélogramme. Alors :

$\|\vec{a} + \vec{b}\| = \|\vec{a} \quad \vec{b}\|$ équivaut à OC = AB équivaut à OACB est un rectangle

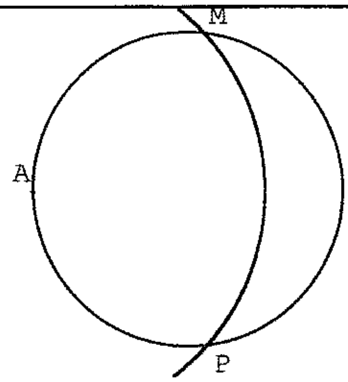
équivaut à (OA) et (OB) perpendiculaires.

On peut noter encore ici un **changement de registre** lors du passage de $\|\vec{a} + \vec{b}\|$ à OC

5) Il y a **un degré d'implicite** dans la formulation de l'énoncé puisque l'on suppose que l'angle formé par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ a une mesure. On peut d'ailleurs noter que l'énoncé est mal posé puisque l'on parle de la mesure de l'angle formé par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Exercice 3 : **EVAPM (évaluation 1999-Terminale des lycées) épreuve T05 exercice E**

La figure ci contre représente un cercle C de rayon R.
Un arc de cercle, qui a pour centre un point A du cercle C et pour rayon $1,5\times R$, coupe le cercle C en deux points P et M.
On note θ la mesure de l'angle $\widehat{MAP}$.
1) Calculer la valeur exacte de $\cos\frac{\theta}{2}$.
2) Déterminer la valeur exacte de $\sin\theta$, ainsi que celle de $\cos\theta$.



1) <u>**Le degré d'ouverture :**</u>

Les questions posées sont **<u>quasi fermées</u>** : la méthode n'est pas donnée, ce n'est donc pas une question fermée mais la question « Calculer la valeur exacte de $\cos\frac{\theta}{2}$ » reste directive et ne présente pas de caractère ouvert.

2) **<u>Le niveau de mise en fonctionnement de la démarche</u>** est de l'ordre du **<u>mobilisable</u>** du moins pour <u>la première question</u> : en effet, **il faut ici reconnaître quelque chose** (où placer $\frac{\theta}{2}$ sur la figure ?) , mais on sait ce que l'on a à reconnaître : c'est donc de l'ordre du mobilisable.
La démarche consiste à :

- **Introduire le centre O du cercle C**
- **Repérer (AO) bissectrice de l'angle $\widehat{MAP}$**
- **S'engager dans l'une des deux démarches détaillées ci dessous.**

Quant à la <u>deuxième question</u>, son niveau de mise en fonctionnement est le <u>niveau des connaissances techniques</u> par la mise en œuvre des formules de trigonométrie

<u>Pour la résolution de la première question :</u>
Soit on met en oeuvre le théorème d'Al Kashi en se situant dans un triangle dont les côtés sont donnés, et dont un angle a pour mesure $\frac{\theta}{2}$, le triangle OAM, où O est le centre de C.

On a alors $OM^2 = OA^2 + AM^2 - 2OA \times AM\cos\frac{\theta}{2}$, soit $R^2 = \frac{9}{4}R^2 + R^2 - 2\times\frac{3}{2}R^2\cos\frac{\theta}{2}$

d'où $\cos\frac{\theta}{2} = \ldots$

- Soit on exploite les axes de symétries du cercles en traçant le diamètre [AA'] . En se situant dans le triangle AMA' rectangle en M, on utilise alors les relations trigonométriques dans un triangle rectangle. On a alors $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{AM}{AA'}$, soit $\cos\frac{\theta}{2} = \ldots$

3) <u>Quels sont les cadres et registres mis en jeu ? Y a t il des changements de cadre et de registre ?</u>

Le cadre est - un **cadre géométrique** en ce qui concerne la question 1)
- un **cadre trigonométrique** en ce qui concerne la question 2)

On note un **changement de registre** dans le statut de $\cos\frac{\theta}{2}$:

- Dans le théorème d'Al Kashi, il est considéré comme un nombre,
- Dans le triangle rectangle, comme un rapport de longueur ($\frac{AM}{AA'}$).

4) <u>Y a t il un changement de point de vue ?</u>

On peut noter **un changement de point de vue** puisque dans les deux démarches, l'élève doit faire apparaître un triangle dont un des angles est $\frac{\theta}{2}$, mais dans la deuxième méthode, le tracé du diamètre permet de se situer dans un triangle rectangle et d'utiliser les relations trigonométriques du triangle rectangle.

5) <u>Quel est le degré de généralité ?</u>

Cet exercice est généralisable, car on peut remplacer le coefficient 1,5 par un coefficient k tel que $0 < k < 2$.

6) <u>Le degré d'implicite</u>

On ne note pas ici de degré d'implicite.

<u>Remarque :</u> Le mot « valeur exacte » peut poser problème : les élèves peuvent se polariser là dessus, et donc détourner le but que l'on s'était fixé. (Ne le préciser que si le problème se pose)

Exercice 4 :

ABCD est un carré. E est un point du segment [AB], F un point du segment [BC] tels que AE = BF. Les droites (AF) et (EC) se coupent en M. Montrer que (DM) est orthogonale à (EF) .
(indication: penser au quart de tour de centre O (centre du carré) et à un orthocentre

AMORCE DE RESOLUTION :

Avec l'indication :

Le quart de tour transforme E en F et D en A : donc les droites(DF) et (EC) d'une part et (AF) et (ED) d'autre part, sont orthogonales. Donc M est l'orthocentre du triangle EDF.

Sans l'indication :

Equation des droites (DM) et (EF) dans le repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$

1) **Degré d'ouverture.**

Avec l'indication, l'exercice est **fermé.** Sans l'indication , il devient **quasi-fermé.**

2) **Niveau de mise en fonctionnement.**

- Avec l'indication, l'exercice est du niveau **mobilisable** (utilisation des propriétés des rotations et de la définition de l'orthocentre)
- Sans l'indication , l'exercice devient du niveau du **disponible** (on peut avoir l'idée d'introduire le quart de tour mais l'introduction de l'orthocentre est plus délicat. Par contre la méthode analytique parait plus « naturelle » car le carré permet d'introduire un repère orthonormé.).

3) **Changements de cadres, de registres .**

Avec l'indication : Passage du cadre affine au cadre des transformations

Sans l'indication : Passage du cadre affine au cadre analytique

4) **Changement de points de vue.**

En traçant [DE] et [DF], les droites (EC) et (AF) sont vues comme hauteurs de DEF.
(remarque : on regarde alors plutôt la droite (FA) que la droite (AF))

5) **Degré de généralité** :

Exercice général car la position du point E peut être quelconque sur [AB].

Exercice 5 :

Soient A,B,C trois points distincts non alignés d'un plan et x un réel. On définit M et N par $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + (1-x)\ \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = (1-x)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Les affirmations a), b), c) et d) sont–elles vraies ou fausses? Justifier votre réponse.

a) pour x=3, M est le barycentre de (B, $\frac{1}{2}$) et de (C, -2).

b) pour x=$\frac{1}{2}$, il existe deux réels b et c tels que M soit le barycentre de (B, b) et de (C, c).

c) pour toute valeur de x, le point N appartient à la droite (BC).

d) il existe une valeur de x pour laquelle BCNM est un parallélogramme.

1. Degré d'ouverture :

Les questions a) et b) sont quasi fermées (on ne sait pas quelle est la réponse juste).

Les questions c) et d) sont des questions ouvertes (on ne donne ni la réponse ni la méthode)

2. Niveau de mise en fonctionnement des connaissances:

Ce qu'on apprend aux élèves dans cet exercice, c'est **l'écriture d'un vecteur dans une base**, c'est à dire savoir décomposer sur une base. C'est cette connaissance (savoir décomposer sur deux vecteurs fixés) qui est ici de l'ordre du **disponible.**

De plus : Dans les questions a) et b), les théorèmes sur barycentre sont du niveau des connaissances techniques. La question c) permet de trouver un contre-exemple. La question d) mobilise de plus la définition vectorielle du parallélogramme.

3. Cadre, registre, changements de points de vue :

Les hypothèses appartiennent au **cadre vectoriel.**

On note **deux changements de cadres** :

- on passe dans le cadre barycentres dans les questions a) et b,
- puis dans le cadre ponctuel avec les questions c) et d).

On ne note pas de changement de registre

4. Degré de généralisation :

L'exercice peut être généralisé en remplaçant $\frac{1}{2}$ par un réel α.

Exercice 6 : **expérimentation d'évaluation en 1ère S mai 1999 : Sujet n° 10 exercice 1**

On donne un carré ABCD et I, J et K les points définis par

$\vec{AI} = \frac{1}{4}\vec{AB}$, $\vec{BJ} = \frac{1}{4}\vec{BC}$, $\vec{CK} = \frac{1}{4}\vec{CD}$.

1) Indiquer avec précision trois méthodes permettant de démontrer que les droites (IJ) et (JK) sont perpendiculaires.

2) Proposer une démonstration utilisant une de ces méthodes, au choix.

1. **Le degré d'ouverture de l'énoncé** : les questions posées sont quasi-fermées : la méthode n'est pas donnée mais la question " indiquer avec précision trois méthodes ", en fonction du contexte, ne présente pas de caractère ouvert.

2. **Le niveau de mise en fonctionnement du choix des méthodes** est de l'ordre du **disponible**, du moins pour la 1ère question. Si cet exercice est posé en milieu d'année, il est alors utilisé à **rendre disponible** ce niveau de mise en fonctionnement, c'est **un installateur de disponible.** Alors que s'il est posé en fin d'année, il est fait pour **tester** si ce niveau est disponible : c'est **un révélateur de disponible.** Seul peut-être le moment où est placé l'exercice dans la progression peut ramener le niveau à l'ordre du mobilisable pour la 2ème question.

3. **Le cadre** de l'énoncé est d'abord **ponctuel (affine) puis vectoriel.** Il y a donc là, déjà, **changement de cadre**. De plus, la 1ère question, par l'exigence de trois méthodes, impose **un changement de cadre : analytique, vectoriel, transformations**.

4. Il y a **changement de registre,** comme souvent lorsqu'il y a changement de cadre, dans le mode d'écriture d'un vecteur ($\vec{IJ}$, couple (x,y) de ses coordonnées dans une base).

5. Ce sont des **changements de point de vue** qui peuvent déclencher ici des stratégies différentes : en effet, le fait que ABCD soit un carré, induit : soit le choix des transformations, soit celui d'un repère orthonormé du plan.

6. **Degré de généralité** : on peut généraliser cet énoncé en remplaçant 1/4 par k réel non nul.

7. Il n'y a pas de **degré d'implicite** dans la formulation de l'énoncé.

<u>Exercice 7</u> : livre Transmath TS spécialité programme 1998 page 52 n° 39

ABC est un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{3}$.

I est le centre de ABC. D est un point de [BC] distinct de B et C. On construit les triangles équilatéraux BED et DFC tels que $(\overrightarrow{EB},\overrightarrow{ED})=-\frac{\pi}{3}, (\overrightarrow{FC},\overrightarrow{FD})=\frac{\pi}{3}$.

On note J et K les centres respectifs de BED et de DFC.
Le but de l'exercice est de démontrer que IJK est équilatéral. Pour cela, on utilise la rotation r_1 de centre K et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et la rotation r_2 de centre J et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

1) Montrer que $r_2 \circ r_1$ est la rotation de centre I, d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

2) Déduisez-en que IJK est équilatéral.

1) **<u>Degré d'ouverture</u> :**

Il s'agit d'un exercice **quasi-fermé** car on sait précisément ce qu'il faut démontrer, mais, si le cadre de résolution est indiqué, le détail de la méthode n'est pas précisé pour la question 2.

2) **<u>Niveau de fonctionnement des connaissances</u> :** c'est l'utilisation des rotations qui est ici mise en jeu comme outil pour démontrer.

<u>La première question</u> met en jeu <u>deux niveaux de fonctionnement des connaissances</u> :

- d'une part un niveau purement **technique** pour affirmer que la composée est une rotation d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ par application directe d'un théorème du cours de spécialité.

- d'autre part le niveau des connaissances est **mobilisables** puisqu'il faut penser à chercher l'image du point C par la composée et ayant trouvé B , penser aussi à caractériser le centre Ω de la rotation par les conditions $(\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega B})=-\frac{2\pi}{3}, et\ \Omega C=\Omega B$,conditions qui sont vérifiées par I.

<u>La deuxième question</u>, plus difficile, est du niveau des connaissances **disponibles** ; il y a en effet au moins deux types de résolution possibles :

- soit on détermine la composée en décomposant chaque rotation en produit de deux symétries axiales (en prenant pour l'une d'entre elles la réflexion d'axe (JK)), la détermination des deux autres axes faisant apparaître un triangle équilatéral qui sera ensuite reconnu comme étant le triangle IJK.

- soit, l'on cherche l'image du point K par la composée, le faisant ainsi apparaître comme l'image de K par la rotation de centre J et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et aussi par la rotation de centre I et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$,ce qui fournira des renseignements sur la configuration obtenue.

Dans les deux cas ,il y a un niveau de fonctionnement des connaissances élaboré .

3) **<u>Quels sont les cadres et registres en jeu et y a-t-il des changements de cadres et de registres ?</u>**

Cet exercice se place **dans le cadre géométrique** ; il est posé **dans le cadre ponctuel** (même si des vecteurs interviennent, ils ne sont là que pour définir des angles orientés) mais la résolution fait intervenir **le cadre des transformations** .
Un changement de cadre est donc provoqué par l'énoncé (à l'intérieur du cadre géométrique) ; ce changement de cadre apparaît comme **l'outil principal de la résolution mais il est donné a priori** , il n'est donc pas à la responsabilité de l'élève.

La deuxième question met en jeu simultanément **le cadre des transformations et le cadre des configurations** que ce soit dans l'une ou l'autre des méthodes évoquées ci-dessus.

4) **<u>Y a-t-il des changements de points de vue ?</u>**

- <u>Dans la première question,</u> le centre de la rotation doit être vu non pas comme point invariant mais comme l'unique point satisfaisant à des conditions sur des distances et des angles . **Un changement de point de vue** est donc indispensable pour résoudre cette question.
- <u>La deuxième question</u> met en jeu aussi des changements de point de vue :

- <u>dans la première méthode,</u> la composée des deux rotations est vue comme composée de deux réflexions.
- <u>dans la deuxième méthode,</u> un point de la figure, est vu comme l'image de K par deux rotations différentes.

Et cela met en évidence la richesse de cet exercice.

5) Quel est le degré de généralité ?

Cet exercice présente un degré de généralité grâce au point D qui peut varier sur le segment [BC], tout en étant distinct de B et C.

Peut on utiliser ceci ? Par exemple, en prenant D au milieu, une autre méthode apparaît : on peut donc essayer d'exploiter le degré de généralité en donnant des exemples particuliers intéressants.

6) Quel est le degré d'implicite ?

Il n'y a aucun degré d'implicite. D'ailleurs, l'énoncé précise même que le triangle ABC est de sens direct alors que l'exercice pourrait être formulé sans cela avec quelques modifications.

Conclusion :

Cet exercice intéressant aurait pu être formulé d'une façon plus ouverte (ou moins ouverte !)

Ici, la question paraît fermée, mais la méthode est très ouverte.

On a vu en introduction que la forme de la question posée , du type « Montrer que » ou avec un point d'interrogation induit des comportements différents.

Si l'on avait posé la question sous la forme : « Que peut-on dire du triangle IJK ? », on aurait obligé l'élève à réfléchir sur la méthode à utiliser pour résoudre l'exercice. Un autre changement de cadre aurait alors pu émerger(par exemple la résolution par les complexes) mais en contrepartie le côté esthétique de la résolution par les transformations ne serait pas apparu.

Exercice 8 : **Analyse et reformulation d'un texte d'exercice de géométrie : Terracher enseignement obligatoire Terminale S(édition Hachette 98) p 79 n°70.**

> **Soit D la droite d'équation y = x+1.**
> **A tout réel x, on associe le point M de D d'abscisse x et on note f(x) la distance OM.**
> **1) Déterminer géométriquement les variations de f et les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.**
> **2) Expliciter f(x).**
> **3) Montrer que C_f admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = \sqrt{2}(x + \frac{1}{2})$.**
> **4) Montrer géométriquement que C_f admet la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ comme axe de symétrie.**
> **En déduire l'asymptote en $-\infty$.**

La formulation de l'énoncé impose **des changements de cadre :** cadre géométrique pour le 1), cadre numérique pour le 2), cadre fonctionnel au 3), puis retour au cadre géométrique dans le 4) et enfin retour au cadre fonctionnel .
Ces changements de cadre peuvent déstabiliser un élève qui ne perçoit pas clairement ce qu'on lui demande de démontrer et ce qu'on lui demande de constater géométriquement.

Il est donc important, pour clarifier le travail demandé à l'élève et donc attendu par le professeur, de bien expliciter :

- ce qui est de l'ordre de la conjecture(à travers une approche géométrique par exemple)
- ce qui relève d'une véritable démonstration.

Il nous apparaît donc que l'énoncé pourrait être reformulé comme suit :

> Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la droite D d'équation $y = x + 1$. A tout réel x, on associe le point M de la droite D d'abscisse x et on note f(x) la distance OM. On note H le point de $(O, \vec{i})$ d'abscisse x et *C* la courbe de la fonction f dans le repère donné. L'objectif du problème est d'étudier une même fonction d'un point de vue géométrique et d'un point de vue algébrique.

Partie A : ***étude géométrique de f.***

1) En quel point I de la droite D la distance OM est-elle minimum ? Quelles sont les coordonnées de I ?
2) Que peut-on conjecturer géométriquement : a) sur le sens de variation de f ?
   b) sur les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$?
3) Montrer, à l'aide de considérations géométriques, que pour tout réel x, $f(x) \geq |x|$ et démontrer alors la conjecture émise au 2) b).
4) Au point M de la droite D, on associe le point M' de D symétrique de M par rapport à I. Démontrer, à l'aide de considérations géométriques, que OM' = OM. Déterminer l'abscisse de M' en fonction de l'abscisse de M et traduire alors l'égalité OM' = OM en utilisant la fonction f. Que peut-on en conclure pour la courbe C ?

Partie B : ***étude de f par le calcul.***

1) Montrez que pour tout réel x, $f(x) = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$.
2) Vérifiez que C admet un axe de symétrie.
3) Etudiez le sens de variation de f.
4) Montrez que C admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = \sqrt{2}(x + \frac{1}{2})$.
5) Tracer la courbe C.

- En ce qui concerne **le niveau de mise en fonctionnement des connaissances,** cet exercice peut donner du sens, soit à la géométrie, soit aux fonctions, soit au lien entre les deux. **Un objectif pourrait être de faire progresser les élèves sur la vision mixte,** sur le lien entre axe de symétrie de la courbe de la fonction et axe de symétrie en géométrie.

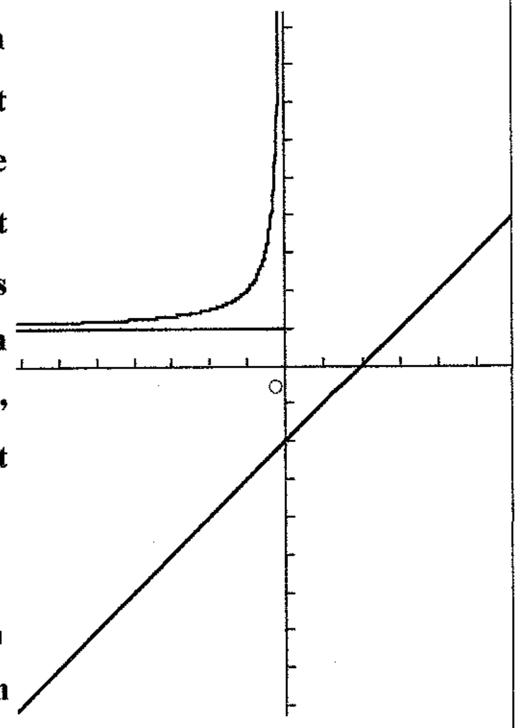
- Si on souhaite que le niveau de mise en fonctionnement des connaissances soit de l'ordre du disponible, nous formulerions la partie A de l'énoncé ainsi :

Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la droite D d'équation $y = x + 1$. A tout réel x, on associe le point M de la droite D d'abscisse x et on note f(x) la distance OM. On note H le point de $(O, \vec{i})$ d'abscisse x et C la courbe de la fonction f dans le repère donné. Utiliser vos connaissances de géométrie pour étudier la fonction f (variations, symétrie, limites ...)

Exercice 9 : **Analyse d'un texte d'exercice sur l'étude d'une fonction somme.**

1) Dans un plan muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, on donne les courbes représentatives D et C_g respectivement d'une fonction affine $f: x \mapsto x-2$ et d'une fonction g dont on ne connaît pas l'expression. En utilisant les renseignements donnés par ces graphiques, étudier la fonction h=f+g (ensemble de définition, sens de variation, limites, asymptotes éventuelles, point d'intersection avec les axes).

2) Reprendre la question 1) dans le cas où C_g désigne la courbe représentative de la restriction à $]-\infty\,;0[$ d'une fonction g paire.



Cet exercice se place dans le cadre graphique mais il demande parfois de changer de cadre en passant dans un cadre fonctionnel . La résolution d'équations nécessite aussi des changements de cadre (passage du numérique au graphique). La manipulation de la dérivée nécessite des changements de points de vue (nombre dérivé considéré comme un réel ou comme le coefficient directeur de la tangente).

Pour la 1ère question :

Certains résultats demandés relèvent du niveau de connaissances techniques (somme de deux fonctions strictement croissantes sur un même intervalle , détermination des limites en 0 et en $-\infty$). Par contre, la question de l'existence d'une asymptote oblique en $-\infty$ nécessite un changement de cadre (passage du cadre graphique au cadre fonctionnel afin d'écrire $g(x)=1+\varepsilon(x)$ avec $\lim_{-\infty}\varepsilon=0$ pour conclure à l'existence en $-\infty$ d'une droite asymptote d'équation $y = x - 1$). Pour déterminer l'abscisse du point d'intersection de C_h avec l'axe des abscisses, il faut penser à transformer l'équation $f + g = 0$ en $g = - f$ (c'est un changement de point de vue) car on sait tracer la droite d'équation $y = - f(x) = - x +2$.

Pour la 2ème question :

La nouveauté par rapport à la 1ère question réside dans l'étude du sens de variation de h sur] 0, +∞). La situation est plus compliquée sur] 0, +∞) car f et g n'ont plus le même sens de variation sur] 0, +∞) . Comme g est dérivable sur (−∞ , 0[(car sur (−∞ , 0[, C_g admet en chacun de ses points une tangente non verticale), g est dérivable sur] 0 , +∞) et il faut donc résoudre, sur] 0 , +∞), l'équation $f'+g'=0$ soit $g'=-1$. Comme on sait que g étant paire, g' est impaire (changement de cadre : on passe d'un cadre graphique à un cadre fonctionnel), on a donc à résoudre graphiquement sur (−∞ , 0[l'équation $g'=1$ ce qui revient à déterminer graphiquement l'abscisse du point de C_g où la tangente est parallèle à la droite D pour en déduire par symétrie par rapport à 0 la solution sur] 0 , +∞) de $g'=-1$.

Le signe de la dérivée est étudié en utilisant la même remarque.

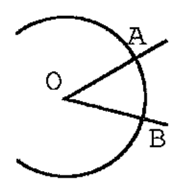
Remarque : ce type d'exercice permet de se poser la question :

Quand a-t-on le droit d'utiliser le dessin en analyse ?

Exercice 10 **:exercice n° 90 page 377 Terracher seconde (édition Hachette 1990).**

Le problème est le suivant : « parmi les secteurs circulaires de périmètre L donné, déterminer celui dont l'aire est maximale »

1) Avec les données de la figure ci contre, montrer que l'aire du secteur OAB est $\frac{1}{2}x(L-2x)$ $(0 < x < \frac{L}{2})$



2) Soit f la fonction définie sur $]0, \frac{L}{2}[$ **par** $f(x) = \frac{1}{2}x(L-2x)$.

Montrer que f est croissante sur $]0, \frac{L}{4}[$**, décroissante sur** $]\frac{L}{4}, \frac{L}{2}[$.

En déduire le maximum de f et la valeur de α **correspondante.**

Remarque : La figure de l'exercice 1 donne les notations : x pour la longueur du rayon et α pour la mesure de l'angle mais ne précise pas l'unité choisie. De plus, le maximum de la fonction f ne peut se déduire du sens de variation de f que si f est croissante sur $]0, \frac{L}{4}]$, décroissante sur $[\frac{L}{4}, \frac{L}{2}[$.

1) **Le degré d'ouverture**

Les questions sont quasi fermées : Elles commencent par « Montrer que » sans indication de méthode . Mais la question 2) peut devenir fermée, suivant le moment où elle est placée dans la progression : en fin de seconde, en application du sens de variation, ou en début de première, en application du second degré.

2) **Le niveau de fonctionnement des connaissances est sur le radian et la proportionnalité.**

- La question 1) peut être de l'ordre du mobilisable :

Le fait qu'il ne soit pas fait allusion au radian pose problème , mais la place de l'exercice dans le manuel est en application d'un chapitre de trigonométrie introduisant le radian, ce qui rend ce renseignement implicite. Mais posé dans un contexte plus « neutre », les changements de cadre qui interviennent rendent ce niveau de fonctionnement au niveau du disponible

- La question 2 utilise, elle, un niveau technique.

3) **Les changements de cadres et de registres.**

- Au départ le cadre est géométrique : le problème est un calcul d'aire.
- Mais le calcul d'aire d'un secteur circulaire le place dans un cadre trigonométrique.
- La question posée est dans un cadre fonctionnel puisqu'il faut résoudre un problème d'extrémum.

Ces changements de cadre ne s'accompagnent pas de changements de registre.

4) **Le degré de généralité.**

Cet exercice a effectivement un degré de généralité :

- On travaille à périmètre constant , sans donner de valeur à L
- La valeur de α correspondant à l'extrémum demandé ne dépend pas de L

5) **Le degré d'implicite**

L'existence de l'extrêmum demandé est implicite.

Dans ce texte , le choix a été fait de laisser implicite l'existence de l'extrémum ; on peut éventuellement modifier le texte et demander la justification de l'existence.

Exercice 11 :**Expérimentation d'évaluation en 1ère S mai 1999 : Sujet 4 exercice 3**

Dans un pays imaginaire, pour la culture des potirons, les terrains doivent tous avoir la forme de secteurs circulaires mais sans pour autant avoir la forme d'un disque. **1) L'un des habitants vient d'obtenir le droit de cultiver des potirons à condition qu'il le fasse sur un terrain de périmètre égal à 100 mètres. Son intérêt étant de le prendre d'aire maximum, comment doit il choisir le rayon R (en mètres) et la mesure a (en radians) de l'angle de son terrain ?** **2) Et si on lui impose l'aire de son terrain, par exemple 10000 m^2, comment doit il choisir le rayon (en mètres) et l'angle (en radians) de son terrain pour avoir le minimum de frais de clôture ?** **3) Quelle conjecture peut on émettre sur a , suite à la résolution des deux questions précédentes ?**

La figure de l'exercice 2 donne les notations R pour la longueur du rayon et a pour la mesure de l'angle

1) <u>Le degré d'ouverture :</u>

Les questions sont ouvertes : Seul le problème est posé, sans questions intermédiaires, sans méthodes proposées.

2) <u>Le niveau de fonctionnement des connaissances :</u>

Contrairement à l'exercice 1, le niveau de fonctionnement des connaissances est de l'ordre du disponible, puisque quelque soit la question, l'initiative pour résoudre ces problèmes d'extrêmums est entière, et comme à l'exercice 1, les changements de cadre favorisent encore ce niveau de fonctionnement.

3) <u>Les changements de cadres :</u>

Ils sont du même ordre qu'à l'exercice 1 : Passage d'un cadre géométrique, à un cadre trigonométrique, puis à un cadre fonctionnel.
S'ajoute ici une « enveloppe concrète au problème posé » ce qui n'ajoute pas vraiment au niveau de fonctionnement déjà mis en place.

S'ajoute ici une « enveloppe concrète au problème posé » ce qui n'ajoute pas vraiment au niveau de fonctionnement déjà mis en place.

4) Le degré de généralité :

C'est à la troisième question que l'élève réfléchit sur ce degré de généralité, mais on aurait pu, en plus de la conjecture à émettre sur ce degré de généralité, lui demander de démontrer l'hypothèse émise.

Ce niveau de généralité est double :

- Le secteur circulaire de plus grande aire parmi tous les secteurs circulaires de périmètre p donné (exception faite du disque) est celui d'angle deux radians.
- Le secteur circulaire de plus petit périmètre parmi tous les secteurs circulaires de même aire donnée (exception faite du disque) est celui d'angle deux radians.

La valeur de l'angle est la même dans les deux situations.

Mais, la conjecture demandée peut être une utilisation de ce degré de généralité.

5) Le degré d'implicite :

C'est le même que dans l'exercice 1 : implicitement, les extremums demandés existent.

__Reformulations des exercices 10 et11:__

Deux reformulations sont possibles, suivant la place de l'exercice dans la progression suivant que l'exercice vient en application du second degré ou qu'il vient en application de la dérivation.

Pour les deux formulations proposées :

__On rappelle les deux résultats suivants :__

A et B étant deux points d'un cercle de centre le point O et de rayon r,

- **La longueur de l'arc de cercle AB est proportionnelle à la mesure de l'angle au centre $\widehat{AOB}$ associé à cet arc.**
- **L'aire du secteur circulaire OAB est proportionnelle à la mesure de l'angle au centre $\widehat{AOB}$ associé à l'arc AB.**

__Reformulation 1 :__

Peut on, parmi tous les secteurs circulaires (n'ayant pas la forme d'un disque) et de périmètre donné L, déterminer le rayon x et la mesure α (en radian) de l'angle pour lesquels l'aire est maximale ? Pour cela :

1) **Exprimer l'aire de ces secteurs circulaires, en fonction de x et de L, en précisant à quel intervalle I x doit appartenir.**
2) **En déduire la valeur de x pour laquelle cette aire est maximum. Trouver la valeur de α correspondante. Que constate t on ?**

__Reformulation 2 :__

On considère les secteurs circulaires (n'ayant pas la forme d'un disque) de rayon x et d'angle α.

1) **Leur périmètre L étant __fixé__, montrer que la valeur α.de l'angle pour laquelle l'aire est maximale est indépendante de cette valeur fixée L**
2) **Leur aire A étant __fixée__, montrer que la valeur α de l'angle pour laquelle le périmètre est minimum est indépendante de cette valeur fixée A.**
3) **Que constate-t-on ?**

Annexe 4

Evaluation exercice flocon de Koch classe X												
Elèves	nbre cotés de figure suivante	justification	Introduction suite	un+1=4un	justification	nbre cotés après 100 procédés	cohérence indice % initialisation	Introduction suite longueur coté	ln+1=1/3 ln	résultat en ftn de n	périmètre	nombre minimum de procédés
1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
2	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
3	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
4	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	3
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
17	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
18	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
19	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
20	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
21	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
22	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
23	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
24	1	1	1	1	1	1	1	3	3	1	1	1
25	1	1	1	1	1	1	1	3	3	1	1	1
26	1	1	1	1	1	1	1	3	3	1	1	1
27	1	1	1	1	0	1	1	3	3	1	1	1
28	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	2	1
29	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	2	1
30	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	2	1
31	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	2	1
32	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	2	1
33	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	2	1
34	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	2	1
35	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	2	1
code 0	4	10	0	0	16	0	0	0	0	0	0	1
code 1	31	25	35	35	19	35	35	31	31	35	25	31
code 9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
code 2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	1
code 3	0	0	0	0	0	0	0	4	4	0	0	2
Fréq.0	11%	29%	0%	0%	46%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	3%
Fréq.1	89%	71%	100%	100%	54%	100%	100%	89%	89%	100%	71%	89%
Fréq.9	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Fréq.2	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	29%	3%
Fréq.3	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	11%	11%	0%	0%	6%

Code de la grille .

Code 1 : Exact,
Code 2 : Autre réponse,
formulation moins attendue,
Code 3 : Réponse insuffisante
Code 9 : Faux,
Code 0 : Absence de réponse.

Evaluation exercice flocon de Koch classe Y												
Elèves	nbre cotés de figure suivante	justification	Introduction suite	un+1=4un	justification	nbre cotés après 100 procédés	cohérence indice %initialisation	Introduction suite longueur coté	ln+1=1/3 ln	résultat en ftn de n	périmètre	nombre minimum de procédés
1	1	0	1	1	0	1	1	9	9	1	1	1
2	1	0	1	1	0	1	1	9	9	1	1	1
3	1	0	1	1	0	1	1	9	9	1	1	1
4	1	0	1	1	0	1	1	9	9	1	1	1
5	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
8	1	0	1	1	0	1	1	1	3	1	1	1
9	1	0	1	1	0	1	1	1	3	3	1	1
10	1	0	1	1	0	1	1	1	3	3	1	1
11	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
12	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
13	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
14	1	0	1	1	0	1	1	3	3	2	2	1
15	1	0	1	1	0	1	1	3	3	2	2	1
16	1	0	1	1	0	1	1	3	3	2	2	1
17	1	0	1	1	0	1	1	9	9	9	9	9
18	1	1	1	1	1	1	1	9	9	9	9	9
19	1	0	1	1	0	1	1	9	9	9	9	9
20	0	0	1	1	0	2	1	1	1	1	1	1
21	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1
22	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
23	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
24	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
25	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
26	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1
27	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1
28	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1
29	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
30	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
31	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
32	1	0	1	1	0	1	1	3	3	1	1	1
33	1	0	1	1	0	1	1	3	3	1	1	1
code 0	1	23	2	6	25	0	0	4	4	3	0	0
code 1	32	10	31	27	8	32	33	17	14	22	27	30
code 9	0	0	0	0	0	0	0	7	7	3	3	3
code 2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	3	3	0
code 3	0	0	0	0	0	0	0	5	8	2	0	0
Fréq.0	3%	70%	6%	18%	76%	0%	0%	12%	12%	9%	0%	0%
Fréq.1	97%	30%	94%	82%	24%	97%	100%	52%	42%	67%	82%	91%
Fréq.9	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	21%	21%	9%	9%	9%
Fréq.2	0%	0%	0%	0%	0%	3%	0%	0%	0%	9%	9%	0%
Fréq.3	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	15%	24%	6%	0%	0%

Code de la grille .

Code 1 : Exact,
Code 2 : Autre réponse, formulation moins attendue,
Code 3 : Réponse insuffisante.
Code 9 : Faux,
Code 0 : Absence de réponse.

Annexe de l'année scolaire 2001-2002

Résultats de l'évaluation faite en fin d'année sur le thème « tangentes communes »

Questions traitées	dessin	etude des fonctions	tracé des tangentes	équation correcte d'une tgte	différencier les 2 inconnues	méthode égalité des dtes	élimination d'une inconnue	bonne équation	introduction d'une fonction	théorème de la bijection
Codes	0 / 1	0 / 1	0 / 1	0 / 1	0 / 1	1 / 0 / 2 / 3	0 / 1	0 / 1	1 / 0 / 2	0 / 1
classe de A										
code 0	23	11	26	7	6	7	17	22	23	27
code 1	10	22	7	26	27	9	16	11	10	6
code 2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
code 3	0	0	0	0	0	16	0	0	0	0
effectif	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33
freq code 0	70%	33%	79%	21%	18%	21%	52%	67%	70%	82%
freq code1	30%	67%	21%	79%	82%	27%	48%	33%	30%	18%
freq code 2	0%	0%	0%	0%	0%	3%	0%	0%	0%	0%
freq code 3	0%	0%	0%	0%	0%	48%	0%	0%	0%	0%
classe de B										
code 0	15	4	21	3	14	4	21	22	14	21
code 1	9	20	3	21	10	8	3	2	4	3
code 2	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0
code 3	0	0	0	0	0	12	0	0	0	0
effectif	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
freq code 0	63%	17%	88%	13%	58%	17%	88%	92%	58%	88%
freq code1	38%	83%	13%	88%	42%	33%	13%	8%	17%	13%
freq code 2	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	25%	0%
freq code 3	0%	0%	0%	0%	0%	50%	0%	0%	0%	0%
classe deC										
code 0	8	1	12	6	10	8	18	19	26	27
code 1	22	29	18	24	20	12	12	11	4	3
code 2	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0
code 3	0	0	0	0	0	8	0	0	0	0
effectif	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
freq code 0	27%	3%	40%	20%	33%	27%	60%	63%	87%	90%
freq code1	73%	97%	60%	80%	67%	40%	40%	37%	13%	10%
freq code 2	0%	0%	0%	0%	0%	7%	0%	0%	0%	0%
freq code 3	0%	0%	0%	0%	0%	27%	0%	0%	0%	0%

Codes de cette grille :

Code 0 : non ou faux

Code 1 : oui ou exact

Code 2 : égalité des coefficients directeurs et remplacement dans les équations des tangentes.

Code 3 : égalité des y.

BIBLIOGRAPHIE :

ARSAC, Gilbert ; GERMAIN, Gilles ; MANTE, Michel. 1991 *Problèmes ouverts et situation problème*. IREM de LYON, 1991. p. 117. ISBN 2-90-6943-08-8

GRAS, Régis. 1999. Métamorphose d'exercices, *Bulletin de l'APMEP* ; 1999 ; n° 422 , p 335-346

DOUADY, Régine.1992.Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement *Repères IREM* n° 6 ; *p 132-158*

DOUADY, Régine. Rapport enseignement apprentissage ; Dialectique outil-objet ; jeux de cadres, *Cahier de didactique des mathématiques* n°3 *IREM Paris VII*

Groupe APMEP « Problématique second cycle ». 1996.; Une approche des contenus d'enseignement par des problématiques pour le second cycle. *Supplément au bulletin APMEP*. 1996. n° 401.

Groupe de travail de l' APMEP « Prospective Bac ». 1998. Bac Mathématiques horizon 2000 ; *Supplément au bulletin APMEP*. 1998. n° 414.

Groupe « évaluation au lycée ». 1995. *Evaluation au lycée et / ou QCM*. IREM de Rennes. 1995. p. 105. ISBN 2-85728-017-3

KUNTZ, Gérard. 1998 Point de vue sur l'enseignement des Maths. *Bulletin APMEP*. 1998, n°415, p. 193-200.

ROBERT, Aline et ROBINET, Jacqueline. 1993. *Prise en compte du Méta en didactique des Mathématiques*. IREM Université Paris VII. p. 63. Cahier de didactique des mathématiques n° 21

ROBERT, Aline. 1989. Réflexion sur l'analyse des textes d'exercices des manuels *Bulletin APMEP* . 1989,n° 367, p. 55- 62.

ROBERT, Aline. 1988. Réflexion sur l'analyse des textes d'exercices des manuels; *IREM Université Paris VII.. Cahier de didactique des mathématiques n° 51.*

ROBERT, Aline.1988. *Une introduction à la didactique des mathématiques*. IREM Université Paris VII. 1988. p. 63. Cahier de didactique des mathématiques n° 50

ROBERT, Aline et TENAUD, Isabelle. 1994. Résolution de problèmes de géométrie et utilisation de méthodes en terminale C ; *Repères IREM* 1994, n° 16, p 29-40.

LATTUATI, Marie ; ROBERT, Aline ; PENNINCKX, Jacqueline. 1999. *L'enseignement des mathématiques au lycée- Un point de vue didactique* ; Ellipse, 1999. p. 152. ISBN 2-7298-4916-5.

ROBERT A et PIAN J. 1999. *Comment élaborer des énoncés en Mathématiques ? L'exemple d'un enseignement de licence de Mathématiques sur ce thème*, IREM Université Paris VII Diderot, 1999. p 123. ISBN 2-86612-180-5.

TAYLOR, Peter. IN PROCESS ; *Department of Math and stats ; Queen's University Kingston* ON K7L 3N6 (613)545-2434.

L’expérience de l’académie de Versailles : l’action de formation « Conception de problèmes en 1ère S »

L'expérience de l'académie de Versailles : l'action de formation « Conception de problèmes en 1ère S »

Nous n'indiquons que les noms des rédacteurs de la version actuelle du travail, dans la mesure où il s'agit d'un stage de formation continue : les participants n'avaient pas à rédiger quoi que ce soit.

Rédacteurs
Christiane PERDON
Aline ROBERT

Avec la collaboration de Nicole HOUIS, Antona BOURDIN et Brigitte DEMULIERE

<u>**SOMMAIRE**</u>

L'expérience de l'académie de Versailles : l'action de formation « Conception de problèmes en 1ère S » (sur 2 années)

Les formations que nous allons présenter ici se sont déroulées dans le cadre de l'action de formation proposée au Plan Académique de Formation de l'académie de Versailles en 1999-2000, puis en 2000-2001. La présentation en était la suivante :

Objectifs : Comment construire des problèmes qui répondent à un objectif d'apprentissage en fonction d'un contenu mathématique et des caractéristiques des différentes classes ?
Il s'agit de s'intégrer au travail de recherche d'un enseignant chercheur en didactique des mathématiques sur la question suivante : des problèmes construits en utilisant des outils de didactique des mathématiques ont-ils un effet sur l'apprentissage des élèves ?

Contenu : Elaboration d'énoncés de problèmes répondant à des objectifs précis, étude et mise au point des conditions de présentation aux élèves. Apports en didactique des mathématiques.

Modalités :
Collaboration constante entre les enseignants de lycée participant à la formation, les formateurs et un universitaire didacticien des mathématiques autour de la fabrication d'énoncés. Expérimentation en classe, observation et évaluation des effets sur les élèves.

Durée : 7 demi journées.

Les deux années se sont déroulées de manière assez analogue : après une présentation des analyses d'énoncés par le didacticien, les enseignants ont élaboré quelques exercices correspondant à un « cahier des charges » défini à l'avance : **rendre mobilisable le lien entre le nombre dérivé et le coefficient directeur de la tangente en un point**. Le travail de la première année a alimenté celui de la deuxième année, qui a été plus riche en termes de déroulement effectif en classe et de leur analyse ultérieure (au retour des expériences).

Après avoir décrit le travail effectué pendant les séances collectives, en comparant les deux années (partie A), nous présentons globalement les analyses précises des énoncés d'exercices qui ont été retenus et proposés en classe, puis nous revenons sur les déroulements effectifs et leurs analyses par les « stagiaires » (partie B), ainsi que sur un bilan qualitatif des stages.

Partie A : ***déroulement des deux années - les chronologies des séances, une comparaison du travail effectué.***

Nous présentons successivement la première année de formation continue et son bilan (établissement du cahier des charges, conception des énoncés, préparation de l'expérience en classe, préparation du retour d'expérimentation, retour, bilan), puis nous indiquons les modifications ayant eu lieu la deuxième année.

1) Le stage de 1999-2000

Ce stage regroupe huit professeurs ayant ou non certaines connaissances didactiques.
Les sept demi-journées de stage sont espacées de quatre semaines environ.

a) Les premières séances : l'établissement du « cahier des charges »

Les apports théoriques concernant les « niveaux de mises en fonctionnement » de connaissances, théorèmes, propriétés, méthodes..., les variables liées aux formulations des énoncés, les leviers pour fabriquer des énoncés (cf. introduction) sont présentés progressivement au cours des premières séances.

Parmi les notions figurant au programme de première S, nous avons, après discussion, choisi de travailler la notion de dérivée ; notre objectif étant de rendre «mobilisable » la propriété « le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est f'(a) »

Remarquons pour justifier ce choix que, dans le programme actuel, la tangente à une courbe qui n'est pas un cercle est définie uniquement à l'aide du nombre dérivé et non comme position limite de sécante. Même si cela réduit en partie les difficultés liées au choix de cadre[1], notre expérience nous fait penser que le lien nombre dérivé / coefficient directeur tangente en un point (noté D/T dans la suite) reste délicat. Nous avons donc considéré qu'il y a lieu d'introduire un apprentissage un peu poussé et conscient pour rendre ce lien mobilisable puis disponible à la fin de l'année scolaire. Notre but a donc été de concevoir des énoncés adéquats, qui ne soient pas une simple application de la formule du cours donnant l'équation de la tangente en un point d'une courbe représentative d'une fonction (faisant intervenir la dérivée de la fonction) : pour familiariser les élèves avec un usage non automatique du lien, on a repris l'idée de faire varier le mode de détermination de la tangente (on la définit à partir d'un point qui n'est pas sur la courbe par exemple). Autrement dit, nous faisons travailler dans le cadre géométrique. Nous essayons que les élèves pensent seuls au nombre dérivé lorsqu'ils sont en présence d'un problème portant sur les tangentes, et réciproquement qu'ils associent au nombre dérivée l'interprétation « tangente », dans plusieurs situations.

Il s'agit donc de concevoir des énoncés d'exercices mettant en jeu différents niveaux de fonctionnement de la notion, puis d'expérimenter ces exercices dans nos classes, de comparer les déroulement à nos prévisions, puis de comparer les déroulements dans des classes différentes.

Nous avions aussi élaboré une activité introductive à la notion de suite réelle, qui n'a pas été exploitée, même si les enseignants l'ont proposée à leurs élèves.

b) La conception des énoncés (sur D / T).

Notre travail consiste donc à fabriquer des énoncés d'exercices à proposer effectivement aux élèves en classe, en choisissant les adaptations prévues c'est à dire les adaptations que les élèves auront à faire, du moins à priori.

Nous avons élaboré ainsi un exercice et un problème à chercher en classe en cours d'apprentissage, un devoir à la maison, un test de fin d'année dans lesquels le niveau de fonctionnement du lien D/T ne soit pas seulement technique, c'est à dire simple et isolé. L'énoncé de chaque exercice a été construit à partir de situations proposées dans les manuels. La rédaction définitive des énoncés a été fixée après l'analyse a priori des difficultés que peuvent rencontrer les élèves, de la production attendue et de nos objectifs concernant le lien D/T.

c) La préparation de l'expérience en classe

Nous avons ensuite mis au point les conditions de passage en classe de nos exercices, en fixant les modalités de travail pour les élèves (individuel puis en petits groupes non officiels[2]) et le temps à leur laisser pour la recherche à chaque question

Nous prévoyons autant que faire se peut les interventions possibles de l'enseignant : ne pas intervenir trop vite, relancer les questions sans répondre aux élèves directement, sauf en cas de blocage total, où nous devions faire préciser les définitions (par exemple), institutionnalisation à la fin des exercices.

Enfin nous prédéterminons le type de production attendue et à recueillir.

Ceci dit, chacun prépare le scénario de recherche précis pour sa classe, le moment où est proposé l'exercice dans la progression suivie en classe pouvant évidemment modifier le niveau de fonctionnement de l'exercice proposé (de mobilisable à technique) et les interventions de l'enseignant.

---

[1] Les élèves ne connaissent que le recours aux nombres dérivées pour définir une tangente.

d) La préparation du retour d'expérimentation (observation du déroulement des séances en classe).

Nous préparons le « retour » c'est à dire les informations à recueillir pendant le déroulement de la séance. Chacun situera exactement le moment où l'exercice est proposé dans sa progression et décrira les conditions précises de déroulement.

De plus, nous listons un certain nombre d'indicateurs à renseigner systématiquement : ce qui facilite ou perturbe les prévisions faites en stage, les initiatives des élèves, les méthodes mathématiques utilisées, les questions posées par les élèves et les réponses de l'enseignant, notamment les interventions non prévues.
Des enregistrements audio ou video sont envisagés.

Il reste à expérimenter effectivement en classe et à analyser les « retours » à l'aide du matériel recueilli

e) Le retour

La dernière journée du stage a été consacrée à la restitution de cette expérimentation. Nous exposerons les résultats dans la deuxième partie de ce texte (exercice par exercice).

f) Un premier bilan de la première année, fait en stage, et les modifications pour la deuxième année

A l'issue de cette première année (dernière séance du stage) il est apparu que les objectifs que nous avions fixés n'avaient pas été tous atteints et que le matériel recueilli n'avait pas été assez exploité.

Nous avons pensé que nous avions été peut-être trop ambitieux quand au nombre de situations à tester. Compte tenu de la progression de chacun dans le programme et du rythme des classes, certains exercices par exemple n'ont pas pu être présentés aux élèves ou pas au moment prévu (le devoir à la maison, le test de fin d'année, l'activité sur les suites) ou encore l'enseignant ne pouvait pas respecter le scénario prévu.

De plus, nous n'avons pas eu assez de temps pour analyser les « retours » et exploiter le matériel recueilli (en particulier des enregistrements audio).

---

[2] Les élèves ne constituent pas réellement des groupes mais peuvent communiquer entre voisins.

Nous avons passé beaucoup de temps à produire des énoncés, ceci a pu enlever du temps pour la réflexion sur l'apprentissage et l'appropriation des apports didactiques.

Enfin, les réunions ont été trop espacées dans le temps limitant l'investissement de chacun dans l'expérience.

2) Le stage 2000-2001

En 2000-2001, trois enseignants seulement ont pu poursuivre le stage, deux nouveaux inscrits ont régulièrement participé au travail.

Le même déroulement global a eu lieu, mais nous nous sommes limités à des expérimentations sur le lien D/T en retravaillant deux sujets de la première année. Nous avons aussi modifié le calendrier des séances : nous nous sommes rencontrés régulièrement tous les quinze jours pour les cinq premières séances d'analyse, d'élaboration des sujets et de préparation de l'expérimentation et du retour de stage, que nous avons organisée plus précisément. Nous avons de fait consacré plus de séances (deux) aux retours de classe et à l'exploitation des matériaux recueillis.

Partie B : *analyses et expérimentations - morceaux choisis.*

Nous avons fait un choix dans ce que nous décrivons ici, en ne gardant que les textes ayant fait l'objet des analyses les plus complètes. Cependant les autres énoncés en sont très proches.

Nous présentons ainsi l'exercice et le problème qui ont été donnés dans nos classes en 2000-2001 ainsi que le test de fin d'année donné en juin 2000. Pour chaque énoncé, nous indiquons l'analyse a priori[3] qui a été faite par les stagiaires, le protocole de passation (prévu et réel), la préparation du retour d'expérience, et des comptes rendus d'expérimentation. Ces comptes rendus nous permettent d'évaluer globalement les productions des élèves mais surtout de mettre en évidence la qualité de nos analyses de tâches et les difficultés de déroulement. Nous commençons à décrire les adaptations que les enseignants ont dû mettre en place, voire ont dû improviser, pour concilier nos objectifs d'activités mathématiques et des contraintes des déroulements réels en classe.

1) Le premier exercice

Enoncé :

Soit la courbe d'équation : $y = x^3 + x + 1$

1) La courbe admet-elle une ou des tangentes ayant pour coefficient directeur 4 ?

2) Soit A le point de la courbe d'abscisse 1 et B le point de la courbe d'abscisse -1.

La courbe admet-elle une ou des tangentes parallèles à (AB) ?

a) Analyse des questions

Les deux questions sont **ouvertes** et **sans indication explicite de méthodes**, ce qui peut garantir une certaine recherche des élèves, si toutefois ce type d'exercice est proposé pour la première fois après le cours correspondant et si, bien entendu, la gestion de la classe permet la recherche.

Niveau de mise en fonctionnement de la notion visée

Le lien tangente / coefficient directeur intervient de façon non isolée et non simple : l'application de la formule « équation de la tangente » ne permet pas de résoudre entièrement la question, on n'a besoin que du nombre dérivé, ce qui n'est pas habituel, et on doit introduire une inconnue de manière inhabituelle.

De plus, on ne donne pas explicitement la fonction à dériver : une adaptation est donc nécessaire pour comprendre qu'on utilisera le nombre dérivé d'une fonction qui n'est pas donnée en tant que telle.

Ensuite, et cela renforce le caractère non isolé de la tâche, il faut traduire la recherche de l'existence d'une tangente de coefficient directeur 4 en l'existence de points de la courbe admettant une tangente de coefficient directeur 4, ces points étant en fait caractérisés par leur abscisse x qui interviendra dans la formule $f'(x) = 4$ (deux changements de point de vue successifs).

Enfin les données sur la tangente mélangent deux registres (cadres) : le registre géométrique (droite tangente) et le registre analytique (coefficient directeur de la droite - 4). Si on part du premier registre (géométrique), on serait amené à traduire le 4 dans ce registre – on ne sait pas le faire géométriquement. La tangente géométrique n'existe pas en classe, seul le dessin de la tangente est connu... Il faut donc absolument pour faire la démonstration se ramener au registre analytique, et introduire la tangente à partir de la fonction et des dérivées. Mais on peut se donner une idée des solutions (expérimentalement) avec la calculatrice, sans que cette expérience fasse autre chose qu'assurer de l'existence de deux tangentes solutions : simplement le travail mathématique de démonstration, nécessairement analytique ici, non seulement reste entier mais encore ici ne découle pas de cette démarche expérimentale.

Dans la deuxième question, le lien T/D intervient encore de manière non isolée et non simple, avec le même changement partiel de registre : en effet, on ne parle pas de coefficient directeur, il faut penser parallélisme en terme de coefficient directeur, il faut penser que le coefficient directeur de (AB) est connu. Il y a donc un lien avec la question précédente.

Ces questions, apparemment faciles, remplissent toutefois l'objectif annoncé, mettre en fonctionnement la connaissance du lien T/D de manière non technique (non simple et/ou non isolée).

Degré de généralité (extension possible)

Cet exercice peut être généralisé pour une courbe quelconque, un coefficient directeur quelconque, une droite (AB) quelconque non parallèle à l'axe des ordonnées. Cela peut être l'objet d'une intervention de l'enseignant.

b) Protocole de passation prévu

L'exercice doit être proposé soit en classe entière soit en module mais en recherche individuelle. On laisse 30 mn maximum aux élèves. Ils rendent leur travail par écrit.

c) Préparation du retour

[3] Cette analyse ne renseigne pas toutes les « rubriques » indiquées dans l'introduction, vu le cahier des charges.

- **Documents « Retour de classe »**

Nous avons distribué trois feuilles à remplir, pour aider les enseignants du stage à ne rien oublier au moment de la restitution des conditions expérimentales et pour les guider dans leurs récits de la séance. L'important n'est pas de remplir précisément ces documents mais de renseigner toutes les informations, cela permet aussi de ne pas oublier ce qui s'est passé.

La feuille 1 précise les conditions dans lesquelles se passe la séance. Il s'agit de situer exactement le moment où est proposé l'exercice dans la progression, et la « distance » au cours sur le thème (dérivée).

La feuille 2 sert à guider les observations du déroulement. Les questions suivantes y figurent :

* quelles sont les difficultés prévues ?

* quelles mises en garde prévoit-on de faire, a-t-on faites ?

* quel discours méta est-il prévu de faire (a-t-on fait) ?

* quel est le type de correction prévu (pendant la séance, après, individuellement...) ?

* quel temps de recherche sans intervention du professeur prévoit-on (a-t-on donné aux élèves) ?

La feuille 3 sert à donner les impressions à chaud après la séance (tout ce qu'on a envie de dire). On indique d'essayer d'exprimer ce qui s'est passé par rapport aux prévisions, et notamment de noter les temps de silence de l'enseignant (c'est-à-dire les temps de recherches autonomes des élèves).

On demande aussi de préciser

* quelles questions ont été posées par les élèves ? Sur quoi ont-ils buté ?

* quels compléments a-t-il fallu donner, quelles modifications des questions ?

- **Prévisions des travaux écrits des élèves à ramasser en fin de séance et autres traces**

Il a été prévu de récolter les productions des élèves, d'enregistrer la séance (si possible) et de photographier le tableau (ce qui n'a pas été fait).

d) Expérimentation et retour effectif

Nous avons plusieurs documents sur cette séance, nous avons choisi de présenter d'une part une chronique détaillée dans une classe faible (reconnue comme telle), et d'autre part la comparaison des passations dans deux demi-classes de niveau plus élevé.

Il s'avère dans tous les cas que le plus difficile est de respecter les temps et d'arriver « au bout » à la fin de la séance.

- **La classe faible**

Conditions de l'expérience

L'exercice est proposé en modules (17 élèves dans chaque groupe). Les élèves devaient apporter leur cours et exercices sur « dérivée ». Le travail a duré respectivement 47mn et 48 mn.

Précisons la place dans la progression de la classe. La définition de la tangente a été donnée, cela a été déjà suivi des quelques applications immédiates suivantes :

-trouver les points d'une courbe, représentation graphique d'une fonction explicite simple, où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses, équations de tangentes en un point donné de la courbe, détermination graphique de nombres dérivés à partir des tangentes tracées.

A ce moment-là, les élèves ne savent déterminer le nombre dérivé qu'en étudiant la limite du taux d'accroissement.

Cette première étape a été suivie de la définition des fonctions dérivées et de la pratique des calculs de dérivées

Ainsi au moment de la séance étudiée, les élèves apprennent à dériver, ils n'ont pas reparlé de tangente depuis un certain temps.

Venons-en au ***déroulement*** (reconstitué à partir de notes prises pendant les séances par l'enseignante).

L'énoncé est distribué, avec les consignes suivantes : la recherche sera individuelle, si nécessaire on pourra utiliser le cahier, la calculatrice, le manuel... Il faudra rendre une rédaction à la fin de l'heure, qui indiquera les pistes de recherche, les questions qui se sont posées aux élèves, tout ce qui a pu les aider.

Notons tout de suite que cette dernière consigne a été peu suivie : les élèves ont beaucoup de mal à restituer leurs démarche. Quand ils « savent ce qu'il faut faire » ils n'expliquent pas comment ils ont trouvé, même s'ils ont mis beaucoup de temps à trouver. Ils changent par exemple de notation mais sans s'en apercevoir alors que cela a été déterminant dans leur succès (écrire f'(x) à la place du f'(a) du cours est une étape nécessaire).

Revenons à la description du déroulement des séances (à peu près analogues dans les deux modules).

Question 1

Au début, les élèves ne savent pas du tout comment prendre la question (cf. changements de point de vue et changement de registre nécessaires) : ils disent par exemple « on calcule un taux d'accroissement » ?

Ils se précipitent ensuite pour tracer la courbe avec la calculatrice mais qu'est-ce qu'on peut en faire ?

Premier coup de pouce (improvisé) : l'enseignant suggère alors qu'on peut tracer une droite de coefficient directeur 4. Mais après ?

Un élève finit par trouver ainsi par tâtonnement les bonnes droites mais il refusera la nécessité de le retrouver par le calcul[4] (il écrit dans son compte rendu : « je le fais parce que le professeur m'y oblige mais c'est inutile »).

Les autres n'arrivent pas à tracer une droite de coefficient directeur 4 avec leur calculatrice.

Cette indication de l'enseignant aurait pu aider les élèves à passer du cadre géométrique (graphique) à l'analytique – sans aborder encore le cœur du problème (tangente). Mais ce changement de registre, même simplifié, est encore trop difficile.

Deuxième coup de pouce : l'enseignant va mettre sur la voie de l'analytique, renonçant à laisser aux élèves l'initiative du changement de registre. Elle suggère de chercher dans les cahiers à quel moment on a parlé de tangente. Il faut un certain temps (5 à 10mn). Trois élèves trouvent la définition du coefficient directeur de la tangente comme nombre dérivé et cherchent la limite du m(h) en a. Ils obtiennent assez vite le résultat : a = 1, a = -1. Ils doivent « vérifier » que c'est plausible à la calculatrice (c'est donc l'enseignant encore qui fait revenir au cadre géométrique).

Ces élèves ont eu à résoudre une partie substantielle de la tâche initiale, seul le changement de registre (géométrique -> analytique) leur a été suggéré.

Beaucoup d'élèves en revanche se polarisent alors sur « équation de la tangente ». Ils écrivent l'équation d'une tangente en général et remplacent le coefficient directeur par 4 : $y = 4x + b$. Et après?

Troisième coup de pouce (relance) : l'enseignant redemande ce qu'ils cherchent, dans l'espoir de laisser l'initiative du lien « tangente » - droite de coefficient directeur 4.

Les réponses indiquent que ces élèves n'arrivent pas cependant à mélanger les deux informations (droite de pente 4 et tangente). C'est donc le caractère non isolé de la tâche qui est en cause, et cette difficulté peut être renforcée par certaines habitudes[5].

Ainsi, dans l'équation $y = 4x + b$, ces élèves cherchent à déterminer b, certains écrivent $f(4) = b$, d'autres que la tangente passe par un point de la courbe et égalisent les y : $x^3+x+1 = 4x+b$...

Derniers coups de pouce : l'enseignante est obligée de mettre sur la voie de la traduction analytique de la tangence.

Elle fait remarquer qu'une droite qui passe par un point de la courbe et qui a pour coefficient directeur 4 n'est pas nécessairement tangente à la courbe et que les élèves n'ont pas traduit le fait que c'est une

---

[4] L'enseignant qui s'est rendue compte de sa réticence à justifier par le calcul lui demande de traiter la question avec un coefficient 7 : il ne voit pas la différence (la différence valeur exacte / valeur approchée reste complètement floue pour lui)

[5] La formulation de certains manuels (« déclic » par exemple) « Trouver les coordonnées des points de C où la tangente a pour coefficient directeur m »), formulation unique pour tous les exercices de ce type, est sans doute une aide pour les élèves mais contribue à court-circuiter la difficulté. En effet cela élimine le travail sur des droites caractérisées autrement (par deux points par exemple).

tangente dont le coefficient directeur doit être 4. Certains découvrent alors que 4 = f'(a) mais alors qui est a ? Quel est le rapport avec leur x (de 4x + b) ?
Des élèves trouvent la fonction f (non donnée dans l'énoncé), mais il faut poser la question
Malheureusement les échanges de proximité empêchent de creuser et tous les élèves finissent par écrire, plus ou moins convaincus, que f'(x)=4

Correction
L'enseignant fait exposer la méthode par un élève mais elle est encore obligée d'intervenir pour faire préciser comment on pourra caractériser les tangentes cherchées (l'abscisse du point de tangence à la courbe).
Pour justifier le fait que c'est une classe faible, ajoutons que même la résolution de $x^2=1$ pose problème dans cette classe. On trouve parfois une seule solution (alors qu'à la calculatrice il y en a deux), on a souvent : $X = \sqrt{1}$ c'est à dire x = +1 ou x = -1...

Il nous semble a posteriori que c'est le caractère non isolé de la mise en fonctionnement demandée, le mélange tangente / droite de coefficient directeur donné, qui a été le plus difficile.

Question 2
Dans le deuxième groupe l'enseignante a été amenée à poser au groupe les questions suivantes, proposées plus individuellement dans le premier groupe. En fait le temps manquait pour que les élèves fassent le lien entre les deux questions.
Questions : est-ce qu'on peut se ramener à ce qu'on sait faire ?
Comment caractériser toutes les droites parallèles à (AB) ?
Comment utiliser le même coefficient directeur, est-ce qu'on le connaît ?
On constate que les élèves savent calculer, de manière quasi-automatique, f'(x)=2.

Validation
Au contrôle suivant l'enseignant pose une question de ce type. 10 élèves sur 32 ont correctement « posé »f'(x)=m...

- **La comparaison des deux demi-classes « fortes »**

Nous ne disposons pour cette comparaison que de transcriptions de ces séances. Il s'avère que leur lecture ne nous permet pas de reconstituer ce qui nous intéresse, c'est-à-dire l'évolution des indications de l'enseignant à partir de l'énoncé en fonction du travail réel des élèves.

- **Une autre classe, où le travail des élèves est individuel**

La chronique de la séance est très succincte, on peut noter que le déroulement est différent – trente minutes, un travail individuel, avec documents et calculatrices. On peut déduire du résumé proposé que les élèves commencent après consultation de leurs notes un travail autonome, suggéré d'ailleurs par l'enseignant, mais que les interventions orales de cette dernière à l'issue de chaque question sont collectives ; l'enseignante, qui a réussi à laisser travailler les élèves un certain temps, a pu repérer différents types d'erreurs déjà signalés dans les autres comptes rendus.

2) Le problème

Enoncé

Soit (P) la parabole d'équation $y= px^2$ dans un repère orthonormal (O, i, j).

On appelle « foyer » de (P) le point F (0, 1/4p) et « directrice » de (P) la droite (d) d'équation y= - 1/4p

Dans tout le problème on prendra p = 1/3

I] Soit M_0 un point d'abscisse x_0 de (P) ,x_0 étant un réel donné.

1) Déterminer une équation de la tangente (T) en M_0 à (P).

2) Soit H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur (d).

a) Démontrer que (T) est la médiatrice du segment [FH_0].

b) Quelles sont les coordonnées du projeté orthogonal du foyer F sur (T) ?

En déduire une propriété du projeté orthogonal du foyer F sur (T).

II] 1) Soit A(-3, 3), B(3,1) et C(2, 3).

Combien existe-t-il de tangentes à (P) passant par A ?

Combien existe-t-il de tangentes à (P) passant par B ?

Combien existe-t-il de tangentes à (P) passant par C ?

2) Quelle condition doivent vérifier les coordonnées (a,b) d'un point N pour qu'il existe deux tangentes à (P) passant par N ?

3) Quel est l'ensemble des points d'où l'on peut mener à (P) deux tangentes perpendiculaires ?

a) *Analyse de l'énoncé.*

De manière générale cet énoncé amène à travailler dans deux cadres où les connaissances sont différentes (géométrique-graphique et analytique) et à jongler entre un point de vue local (points) et un point de vue plus global (droite ou courbe).

I]1) C'est une application isolée de la formule du cours donnant l'équation d'une tangente en un point quelconque d'une courbe, ici noté M_0 ; ce n'est pas nécessairement la notation du cours. Pour appliquer exactement la formule, il faut aussi penser à associer à la parabole donnée une fonction (voir ex 1), et il faut remplacer $f(x_0)$ et $f'(x_0)$ en fonction de x_0 (il y a une adaptation).

2) Une figure s'impose, mais les élèves doivent y penser (initiative).

a) Cette question nécessite de choisir une méthode et de l'adapter à l'exercice. Soulignons le caractère non isolé de cette question par rapport aux connaissances qui nous intéressent (lien tangente/dérivée) : on n'utilise pas directement le caractère « tangent » mais seulement l'équation de la tangente comme équation de droite.

La question n'est pas simple : elle est posée dans le cadre géométrique, or on ne peut pas la résoudre entièrement dans ce cadre (on n'a rien sur la tangente dans ce cadre). Il faut donc nécessairement ou introduire un changement de cadres, traduire des propriétés géométriques en analytique et comparer des équations de droites pour montrer qu'elles sont les mêmes (il y a à mettre en œuvre un raisonnement sur des équations), ou retrouver à partir de données analytiques des propriétés géométriques.

Deux grandes démarches (correspondant à deux points de vue différents) peuvent en effet organiser la résolution : ou bien on cherche l'équation de la médiatrice et on montre que c'est celle de (T) ou bien on montre directement que (T) est médiatrice.

Plusieurs méthodes sont possibles pour caractériser la médiatrice, quelle que soit la démarche initiale.

On peut aussi utiliser la caractérisation de la médiatrice comme ensemble des points équidistants des extrémités du segment.

On peut utiliser le fait que la médiatrice est perpendiculaire à (MH) et passe par le milieu de [MH]. Il y a 9 façons pour démontrer l'orthogonalité et caractériser le milieu.

Pour cette orthogonalité, on peut utiliser par exemple un produit scalaire ou la formule reliant les coefficients directeurs de deux droites perpendiculaires (on a ici une occasion de soulever la question de la non généralité de cet outil « produit des pentes », à cause de la nullité de la pente de la tangente au sommet).

b) Il s'agit d'interpréter une propriété déjà vue sous une autre forme dans a) (question non isolée) : le projeté cherché est tout simplement le milieu de $[FH_0]$, dont on sait calculer les coordonnées (simple).

On constate que l'ordonnée de ce point est nulle. Il faut alors mettre en œuvre un changement de point de vue et perdre le reste de l'information (abscisse du point) pour interpréter ce résultat en terme

d'appartenance de ce point à l'axe des abscisses. Passer de coordonnées paramétriques particulières (a,0) à une caractérisation de l'ensemble auquel tous ces points appartiennent relève de la devinette car les élèves n'ont pas de méthode pour le faire (élimination de paramètres par exemple).
Reste de plus le problème de la réciproque de cette inclusion…

II]1) Le graphique peut aider à conjecturer les résultats, mais une fois de plus la question est posée dans le cadre géométrique (ou graphique) et doit être résolue dans le cadre analytique, même si les élèves ont deviné les réponses grâce à leur dessin. De plus pour la résolution les élèves doivent utiliser une question antérieure un peu éloignée (I 1) – d'où le caractère non isolé de cette question.
C'est la condition d'appartenance d'un point à une droite d'équation connue qui doit être mobilisé, ce qui amène un changement de point de vue : il faut remplacer, dans l'équation d'une tangente écrite sous forme y = ax + b, (x,y) par les coordonnées numériques d'un point particulier donné.
Ceci fait, les élèves ont à travailler sur une nouvelle équation. Ils doivent reconnaître que c'est une équation du second degré, plus rien à voir avec une équation de droite. Ils doivent identifier en même temps que l'inconnue est l'abscisse des points de tangence éventuels, et que la discussion du nombre de solutions de leur équation leur donne le résultat cherché.
Les trois points de l'énoncé correspondent aux trois situations possibles : discriminant positif, nul ou négatif. Si la question est résolue pour le point A, la résolution pour B et C devient simple et isolée (reprise).
2) Cette question généralise la précédente, en introduisant des paramètres.
La condition d'appartenance d'un point (a,b) à la tangente doit être mobilisée, et nécessite de remplacer (x,y) par (a,b). Ensuite la résolution des équations du second degré avec des paramètres doit être disponible (reconnaissance des inconnues et des paramètres).
L'interprétation du résultat n'est pas non plus simple pour un élève de première même si elle peut paraître intuitivement évidente (« intérieur, extérieur »de la parabole) : il s'agit de caractériser un ensemble de points par une inéquation. Le seul exemple connu (demi-plan limité par une droite d'équation donnée) est le plus souvent mémorisé sous forme technique.
3) Il s'agit d'un travail sur les coefficients directeurs. Cette question suppose une bonne maîtrise du second degré et peut être considérée comme un travail de recherche compte tenu de la limitation du programme sur le second degré (somme et produit des racines hors programme)

b) *Protocole de passation en classe*

On prévoit que le travail dure deux heures et que la dernière question fera l'objet d'une rédaction à la maison, voire même que sa recherche sera faite en dehors du cours.

La rédaction de la partie cherchée en classe sera rendue à la fin de la séance.

c) ***Préparation du retour de classe : cf. ci-dessus.***

d) ***Le retour effectif***

Nous avions un objectif : faire travailler le lien entre coefficient directeur et tangente, pour installer des connaissances pas seulement techniques. Pour ce faire, nous avons proposé le problème ci-dessus, avec l'hypothèse que le travail sur ce problème contribue à cette construction. Qu'en est-il ?

Nous disposons de plusieurs types de matériel pour commencer à analyser ce qui s'est passé.

- **Résultats globaux des élèves**

Nous avons recueilli 84 copies d'élèves (quatre paquets). Pour les dépouiller, nous avons établi une grille commune de dépouillement (annexe) et nous disposons donc des résultats codés (annexe). Nous donnons ici les principaux constats que nous pouvons faire à partir de ce tableau, cela peut servir partiellement d'évaluation du travail fait en classe.

Nous constatons que 79% des élèves ont écrit correctement l'équation de la tangente demandée. Cependant 43% des élèves n'ont pas explicité la fonction f, et certains ont eu des difficultés d'écriture (31% : confusion entre x et x_0) ou autres écritures maladroites (7%).

Pour établir cette équation, les élèves (ayant réussi la question) rencontrent surtout un problème de choix de procédure : en fait ou ils écrivent a priori l'équation de la tangente en introduisant la fonction f et remplacent les inconnues par leurs valeurs (79%), ou ils partent de l'équation d'une droite, explicitent le coefficient directeur et écrivent que la droite passe par le point donné (21%).

Enfin 15% des élèves ayant choisi cette dernière procédure calculent ce coefficient directeur comme limite d'un taux d'accroissement. On peut penser que cela concerne des classes où l'introduction du calcul de dérivée est récente.

Pour démontrer que cette tangente est médiatrice, les élèves utilisent majoritairement (83%) la procédure suivante : ils comparent (une) l'équation de la tangente et celle de la médiatrice qu'il établissent ; pour cela ils cherchent les coordonnées du milieu de $[FH_0]$ et l'équation de la droite passant par ce point et perpendiculaire à (FH_0). Parmi ces élèves, 63% utilisent la relation entre coefficients directeurs de deux droites perpendiculaires (ce qui pourrait poser problème si la tangente est parallèle à l'axe des abscisses) et 20% utilisent le produit scalaire pour traduire l'orthogonalité.

Enfin *70% des élèves terminent correctement cette question* et 10% ne terminent pas mais ce qui est fait est correct.

Les coordonnées du projeté orthogonal du foyer sur (T) ont moins de succès : 23% des élèves n'abordent pas la question, 38% donnent un résultat juste avec une explication correcte, 29% ne justifient pas leur résultat juste (la forme de la question peut peut-être induire cette dernière modalité de réponse).

Pour les questions suivantes, moins de la moitié des élèves abordent la question, ce qui réduit l'intérêt des analyses. 15% des élèves produisent un résultat juste par le calcul et 13% par le graphique. Peu d'élèves (18%) confondent cependant tangente passant par un point et tangente en ce point, ce qui nous semble un résultat à souligner.

La dernière question n'est abordée que par 10% des élèves, et 6% la traitent bien...

Les élèves semblent rencontrer les mêmes difficultés que prévues mais réussissent à résoudre certaines questions non techniques (avec des pourcentages assez corrects, proches des ¾, pour les premières questions). Mais ont-ils travaillé comme prévu ?

- **Le détail des déroulements**

Nous avons aussi des enregistrements video et audio de séances qui permettent de préciser la dernière question.

Mais il n'y avait pas d'observateur et surtout, du fait de la durée de vie de ce groupe (deux ans), l'exploitation a posteriori que nous avons pu faire de ce matériel a été réduite.

Nous nous sommes demandé dans quelle mesure l'enseignant peut respecter le scénario, ou est amené à aménager les tâches pour que les élèves réussirent à résoudre, en leur laissant des adaptations (peut-être moindres que celles prévues initialement).

En fait, aussi bien les video que les comptes rendus que nous avons recueillis montrent d'abord que les élèves travaillent beaucoup plus lentement que prévu. Et pourtant ils travaillent vraiment, concentrés et actifs. On peut remarquer toutefois qu'il est très difficile que les élèves continuent longtemps de travailler dans une direction sans avoir l'aval de l'enseignant, ce qui se traduit par une tension permanente entre la demande de réponse des élèves et la volonté de l'enseignant de seulement les relancer, et par un certain ralentissement – le temps de poser des questions même sans réponses.

Par exemple dans une des classes, à la fin d'une séance de travail bien remplie, seuls 8 élèves sur 26 ont traité la première partie du problème. Dans la classe faible, au bout de deux heures, les élèves ont fait la première question et abordé la deuxième.

Plus précisément, l'analyse a priori est confirmée, avec des hiérarchies : le travail avec un paramètre semble être la plus grosse difficulté dans la deux classes citées, amenant à adapter la formule du cours en remplaçant la variable utilisée dans le texte du cours par une autre lettre. Pourquoi ne pas raisonner sur une valeur numérique ?

Dans la classe faible, l'utilisation d'un vocabulaire inconnu jusqu'alors et pourtant non indispensable déroute beaucoup les élèves : ils bloquent alors même qu'ils n'ont pas besoin d'en savoir plus que ce qui est dans le texte. On retrouve une interrogation plus générale, liée au fonctionnement même des mathématiques : qu'est-ce qu'une définition ? Qu'est-ce qu'une propriété ?

3) Test de fin d'année (post-test)

En fait ce test a été proposé à la fin de la première année d'expérimentation ; nous en donnons des résultats pour indiquer très grossièrement ce qu'on pourrait attendre d'une expérience de ce type en termes limités d'acquisitions d'élèves sur le lien tangente / coefficient directeur.

Enoncé

Existe-t-il des points P du plan d'où l'on peut mener deux tangentes perpendiculaires entre elles à l'hyperbole (H) d'équation : y=1/x ?

a) *Analyse de l'énoncé*

Le lien tangente / coefficient directeur intervient de façon non simple et non isolée.

En effet, le problème est ouvert, l'élève ne sait pas ce qu'il doit obtenir. Il n'a aucune indication de méthode. On peut remarquer que le degré d'ouverture dépend de la progression mais nous sommes en fin d'année, le problème a été proposé il y a longtemps, et ne peut être complètement restitué par la mémoire.

Plus précisément, la question est posée dans le cadre géométrique, mais ne peut être résolue que dans le cadre analytique, même si la représentation graphique peut donner des idées (y compris fausses, cf. asymptotes). Dans le cadre analytique, on peut penser qu'on peut caractériser l'orthogonalité de deux tangentes par une propriété de leurs coefficients directeurs, qui ne fait pas intervenir dans un premier temps le point d'intersection des tangentes (cherché) – on travaille sur une condition nécessaire, avec un changement de point de vue. La recherche de ces coefficients directeurs amène à les exprimer de manière générale : les inconnues, à choisir, sont les abscisses des points de tangence. C'est à cet endroit que la connaissance visée est mise en fonctionnement : deux fois de suite simplement et comme outil intermédiaire (fonctionnement non isolé), pour poser les bases d'un calcul (produit = -1). Enfin il faut résoudre une équation à deux inconnues qui s'avère heureusement toujours sans solution.

On peut aussi traduire l'orthogonalité vectoriellement (avec l'expression analytique du produit scalaire).

b) *Protocole de passation*

Les élèves cherchent en classe en groupes de voisins et rédigent individuellement au fur et à mesure; ce test est proposé quelques mois près l'expérience (tout en fin d'année). Ces conditions peuvent biaiser un peu les interprétations (élève sassez peu motivés).
Durée : 30 mn

c) *Quelques résultats*

Nous avons dépouillé deux paquets de copies, alors que les élèves avaient donc eu à chercher quelques mois avant un exercice équivalent à l'exercice 1 présenté ci-dessus et le problème en entier.

Sans donner le détail de la correction, nous pouvons indiquer les résultats analogues suivants :

Très peu d'élèves ont correctement posé seuls le problème, très difficile pour eux.
La plupart ont pensé aux coefficients directeurs des tangentes – beaucoup savent écrire correctement une équation de tangente en un point d'abscisse variable (acquisition ?). En revanche ils ne reconnaissent pas (sauf 4 sur 32 dans une des classes et 2 sur 32 dans l'autre) qu'ils ont à résoudre une équation à deux inconnues impossible. Un certain nombre ne s'engage pas dans le calcul mais au moins ces élèves dessinent l'hyperbole. Parmi eux, certains estiment que les asymptotes, plus ou moins bien déterminées d'ailleurs, considérées comme tangentes « à l'infini », répondent à la question...

Il est donc délicat de tirer une information sur notre expérience de ce test, trop éloigné de la tâche à évaluer.

Partie C : ***bilan (des élèves, des formateurs et des formés)***

Les élèves sont en général satisfaits de cette forme de travail et ont l'impression d'avoir compris notamment parce qu'on leur a laissé du temps. Certains sont tout de même sidérés du temps passé à faire « peu de choses » : alors en mathématiques on peut mettre si longtemps à résoudre, sans que l'enseignant s'en formalise, sans qu'il aide davantage, voire avec une certaine satisfaction de sa part ?

Mais ils ne peuvent pas préciser davantage (et c'est normal), et nous ne nous sommes pas donné les moyens d'en savoir plus.

Les formateurs signalent d'abord que ce stage est inhabituel, même si certains enseignants ne l'avaient pas vraiment noté en s'inscrivant. Des séances ont d'ailleurs été rajoutées à chaque fois. L'inscription explicite dans un travail de recherche, le nombre élevé de séances, le petit nombre de participants et leur implication peut-être supérieure à ce qui se passe dans d'autres stages (notamment à cause de cette participation à la recherche), l'objectif de production et la collaboration entre les deux groupes (Toulouse, Versailles) en sont des éléments spécifiques.

Deux types d'analyses ont donc été menées régulièrement et ont peut-être été en partie appropriées par les enseignants dans leur quotidien : le travail fin d'analyse des énoncés en fonction des activités potentielles des élèves sur ces énoncés, les transformations de ces activités engendrées par les différents déroulements en classe. Ces modifications inévitables, provoquées par le travail effectif des élèves et les accompagnements de l'enseignant (souvent improvisés), que ce soit au tableau ou dans son discours, ou par ses mimiques, peuvent se faire de manière subreptice et ne sont pas toujours évidentes.

Il semble que le travail en profondeur qui a été amorcé ait effectivement entraîné une prise de conscience au niveau des pratiques individuelles, voire un enrichissement effectif, et ne soit pas resté au niveau du seul discours sur les pratiques.

Mais à quel prix ? Obtenir ces résultats, en termes de pratiques des participants, demande beaucoup de temps (à cause de la cohérence et la stabilité des pratiques individuelles, comme nous l'avons indiqué au début). Cela exige un investissement lourd et pas toujours évident ni immédiat : la mise à plat des pratiques individuelles peut être difficile, voire gênante (cf. les difficultés du micro enseignement).

Enfin le transfert ultérieur en classe de ce qui a été acquis en stage, sur d'autres énoncés, est coûteux : l'élaboration de tâches non habituelles n'est pas immédiate, surtout quand on travaille seul, et pendant les déroulements des séances les enseignants doivent développer plus de vigilance que d'habitude. Ne pas répondre à la pression des élèves n'est pas facile, rappelons-le. Beaucoup de fatigue supplémentaire donc, sans que les effets sur les apprentissages des élèves soient évidents à court terme !

Voici quelques réactions des ***formés*** témoignant de ce qui précède.

- « Ce genre d'activités pour des élèves de classe scientifique me paraît indispensable. Les élèves l'ont bien accepté. Il faudrait évidemment répéter l'expérience régulièrement… si nous pouvions avoir plus de temps… »
- « Quand au professeur il pense que cette activité est très intéressante. C'est ainsi qu'on devrait concevoir l'activité mathématique, mais cela demande tellement de temps pour un résultat bien incertain si les élèves n'acceptent pas de jouer le jeu, que finalement il est un peu obligé de se rabattre sur des activités plus proches du bachottage

- Et enfin, le commentaire le plus positif !

« J'ai participé deux années consécutives au stage de conception de problème en 1^re^ S.
Ma pratique antérieure en classe était ce que je pourrai qualifier de « classique », avec des recherches assez nombreuses pour tenter de mieux faire travailler les élèves, de leur faire assimiler les notions : je concevais des feuilles de TD (ou modules) destinées à provoquer un entraînement à certains types d'exercices ou à proposer des situations de recherche, en particulier à l'aide de brochures des IREM de Bordeaux.
J'ai alors réalisé que souvent, c'était moi qui faisais le travail à la place des élèves, car je ne leur laissais pas le temps de trouver et je donnais les indices nécessaires pour avancer.
Je demandais trop pour la durée du TD.
La deuxième année, j'ai décidé de prendre le temps, en demi-classe, d'attendre que les élèves « trouvent ». Je donnais donc des exercices à faire sur place et ne donnais aucune indication préalable aux élèves. Ils furent d'abord très surpris d'avancer si peu en une heure, puis s'habituèrent à la méthode et peu à peu se mirent tous au travail. Ils avançaient à des rythmes différents et certains faisaient très peu de chose, mais ce qui était fait était bien compris. Je me suis aperçue de la profondeur de l'incompréhension chez certains, car ils étaient contents que je sois disponible pour expliquer des notions qu'ils auraient dû avoir assimilées depuis longtemps et n'hésitaient plus à me poser des questions. J'ai réalisé alors combien le désir d'avancer que j'avais, allait à l'encontre du but recherché auparavant.
Au cours du travail, je faisais le point au tableau lorsque c'était nécessaire.
Je pense que les séances en groupe devinrent de plus en plus profitables pour les élèves, et je voyais beaucoup plus clairement que les approches pouvaient être totalement différentes, et qu'en les laissant

chercher dans leur propre direction, je ne les décourageais pas. Les différentes solutions étaient exposées au tableau.

Le contenu du stage portait sur les différents niveaux d'acquisition d'une notion mathématique dont la prise de conscience permet de savoir ce qu'on cherche à éveiller chez l'élève lorsqu'on pose un problème, et aussi de l'évaluer plus correctement.
Même si je n'ai pas assimilé à fond tout le contenu du stage, en terme de notions de didactique, il m'a fait évoluer dans la pratique de mon métier en me rendant plus lucide sur les acquisitions des élèves. »

- Le formateur pour sa part pense que « l'obligation de suivre un travail aussi préparé que celui là révèle bien aux enseignants l'importance de leurs interventions, même s'ils ont l'illusion de laisser les élèves travailler seuls.

Ce travail mené en groupe reste très motivant même pour des élèves faibles : on voit que les élèves « entrent » en activité – le fait qu'ils n'ont pas bougé alors que la cloche sonne est très révélateur. Mais le temps nécessaire à entrer dans la tâche « en vrai » amène à retarder trop le moment du travail attendu sur du nouveau, même si l'entretien de l'ancien est important. De plus l'écoute de l'enseignant sur ce qui est nouveau justement est d'autant plus difficile que
* ils ont été actifs et doivent y renoncer pour écouter
* « ça » porte sur autre chose que ce qu'ils ont fait et cela rompt le processus précédent où on a beaucoup tenu compte de leur production...

Enfin, le formateur pense que ce type de formation est très coûteuse pour déboucher non exceptionnellement sur une réelle modification des pratiques des enseignants non convaincus au départ (à Toulouse il y a même eu trois ans). Or il est impossible d'obtenir de résultat avec des stages courts. ??? »

En conclusion, nous renvoyons à la liste des questions proposées dans le texte de Toulouse (page 55), questions communes aux deux groupes de travail et élaborées collectivement.

Annexe 1

La GRILLE d'analyse des productions (problème) :

Item 1 : question I)1). Equation de tangente

Code 0 : non traité

Code 1 : réponse exacte

Code 9 : réponse fausse ; Code 7 conservation de l'équation $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

Item 2 : Question I)1). Fonction non explicitée :

Code 0 : fonction correctement donnée

Code 1 : fonction non explicitée

Item 3 : Question I)1). Utilisation de notations comme y_P à la place de f(x).

Code 0 : Notation non utilisée

Code 1 : Notation utilisée

Item 4 : Question I)1). Confusion x/x_0

Code 0 : confusion non faite

Code 1 : confusion faite

Item 5 : Question I)1). Procédure choisie :

Code 1 : $f(x) = \dots$; $f'(x)= \dots$; $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

Code 2 : $y = ax+b$; calcul de $a = f'(x_0)$, puis de b sachant que la courbe passe par le point $(x_0, f'(x_0))$.

Item 6 : Question I)1) Calcul explicité du coefficient directeur comme limite du taux d'accroissement ; Code 0 : calcul non fait ainsi ; code 1 : calcul fait de cette façon

Item 7 : Question I)2) a. Procédures utilisées:

Code 1 : recherche du milieu de $[FH_0]$ puis de l'équation de la droite (FH_0) ;

(T) passe par I, et mm'= -1.

Code 2 : Idem sauf orthogonalité prouvée à l'aide du produit scalaire : $\overrightarrow{IM_0}.\overrightarrow{FH}$

Code 3 : Idem sauf orthogonalité prouvée à l'aide du produit scalaire : $\overrightarrow{FH_0}.\vec{u}$, où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (T).

Code 4 : égalité des distances : $M_0F = M_0H$ et I appartient à (T) .

Code 5 : autre procédure

Item 8 : Question I)2) a. procédure complète ou non

Code 0 : question non traitée

Code 1 : procédure complètement et exactement exécutée.

Code 2 : procédure partiellement exécutée ce qui est fait étant correct.

Code 9 : erreur sous-jacente.

Item 9 : Question I)2) b. Coordonnées du projeté orthogonal de F sur (T) :

Code 0 : non traité

Code 1 : juste avec explications

Code 2 : juste sans déduction de la question précédente.

Code 9 : erreur

Item 10 : Question II) 1) Nombre de tangentes :

Code 0 : non traité

Code 1 : juste par le calcul

Code 2 : juste en se servant de la représentation graphique.

Code 9 : erreur

Item 11 : Question II)1) confusion : « tangentes passant par » compris comme « tangente en »

Code 0 : pas de confusion.

Code 1 : il y a confusion.

Item 12 : Question II)2) condition pour qu'il existe deux tangentes

Code 0 : non traité

Code 1 : réponse exacte

Code 9 : faute .

Le tableau des résultats en 2000 (les pourcentages sont calculés sur le total de 84 élèves)

Code	Item1	Item2	Item3	Item4	Item 5	Item6	Item7	Item8	Item9	Item10	Item11	Item12
0	5%	43%	93%	69%		85%	3%	9%	23%	59%	82%	90%
1	79%	57%	7%	31%	79%	15%	63%	70%	38%	15%	18%	6%
9	11%							11%	10%	13%		
2					21%		8%	10%	29%	13%		4%
3							20%					
4							1%					
5							5%					
6	6%											

Annexe 2

ENONCES 99-2000

Exercice 1

On considère la famille des courbes C_p d'équation : $y = 3x + 1/(x+1) + p$

Existe-t-il des courbes de la famille tangentes à l'axe des abscisses ?

Devoir à la maison

On considère un repère orthonormal (O, i j) (l'unité est le centimètre)

1) Dessiner des rectangles OACB d'aire 12cm^2 tels que A soit sur la demi-droite [Ox) et B sur la demi-droite [Oy).

2) Déterminer et construire l'ensemble (H) des points C tels que l'aire de OACB soit 12 cm^2.

3) Soit I le milieu de [AB]. Déterminer l'ensemble (H') des points I centres des rectangles OACB d'aire 12 cm^2.

4) Montrer que (AB) est tangente en C à (H').

Donner l'allure de (H') en construisant un certain nombre de ses tangentes.

5) Tracer la tangente en C à (H'), elle coupe les axes (Ox) et (Oy) respectivement en M et N. A l'aide d'une transformation montrer que C est le milieu de [MN].

Exercice 2

Soit (P) la parabole d'équation $y=1/3x^2$ dans un repère orthonormal (O, i, j).

On appelle « foyer » de (P) le point F (0, 3/4) et « directrice » de (P) la droite (d) d'équation y= -3/4

A] Soit M_0 un point d'abscisse x_0 de (P), x_0 étant un réel donné.

1) Déterminer une équation de la tangente (T) en M_0 à (P).

2) Soit H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur (d).

a) Démontrer que (T) est la médiatrice du segment [FH_0].

b) Quelles sont les coordonnées du projeté orthogonal du foyer F sur (T) ?

B] 1) Soit A (2,0), B (0,2).

Combien existe-t-il de tangentes à (P) passant par A ?

Combien existe-t-il de tangentes à (P) passant par B ?

2) Soit N le point de coordonnées (a,b) . Montrer qu'il existe deux tangentes à (P) passant par N si et seulement si $b<1/3\ a^2$.Donner une interprétation graphique

3) Quel est l'ensemble des points d'où l'on peut mener à (P) deux tangentes perpendiculaires ?

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM,

Vous pouvez soit :

Consulter notre site WEB

http://www.ccr.jussieu.fr/iremParis7/welcome.html

Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7
Case 7018
2 place Jussieu
75251 Paris cedex 05

TITRE :

DEUX EXPERIENCES REALISEES EN FORMATION CONTINUE AUTOUR D'ENONCES DE PROBLEMES DE MATHEMATIQUES EN CLASSES SCIENTIFIQUES

AUTEUR (S) :

Groupe de recherche-formation de l'académie de Toulouse
Stage PAF de l'académie de Versailles

RESUME :

Il s'agit de la présentation de 2 expériences de formation continue d'enseignants de lycée, organisée autour de la fabrication d'énoncés. On expose d'abord les modalités d'analyse des énoncés, en fonction des activités qu'ils peuvent provoquer chez les élèves et les modalités de la formation. Puis chacun des groupes concernés (Toulouse, Versailles) relate l'expérience effective (3ans pour Toulouse, 2 ans pour Versailles). Le premier groupe présente d'abord des analyses d'énoncés puis l'élaboration de nouveaux exercices puis une expérience en classe, avec une observation très précise. Cela débouche sur une analyse des pratiques effectives. Le deuxième groupe présente des analyses du passage en classe et un petit bilan en termes de formation

MOTS CLES :

Enoncés, problèmes, lycée, analyses tâches, gestion de séances de travail, formation continue des professeurs de mathématiques

Editeur : IREM
Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la publication : R. CORI
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : septembre 2002
ISBN : 2-86612-227-5