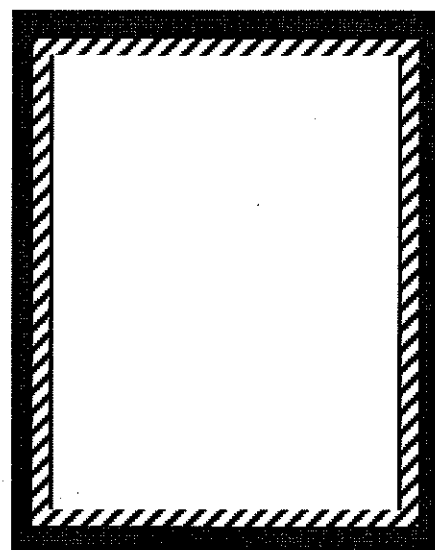
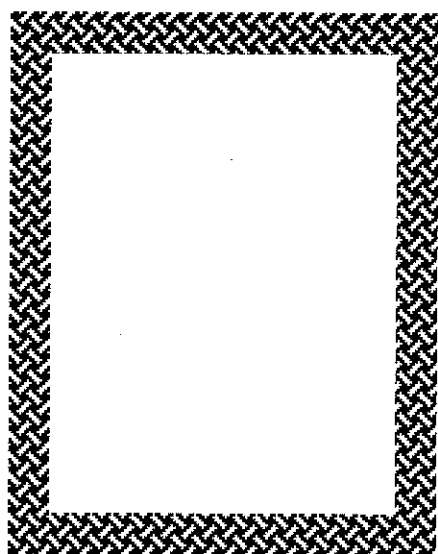


Actes de la journée en hommage à Régine Douady



changement
de cadre

organisée par l'équipe DIDIREM

le 14 juin 2001

édité par l'IREM
Université Paris 7 Denis Diderot

*Actes de la journée en hommage
à Régine Douady*

organisée par l'équipe Didiem

le 14 juin 2001

Sommaire

Aline ROBERT, <i>Utilisation des jeux de cadres dans l'enseignement</i>	5
Marc ROGALSKI, <i>Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et les jeux de cadres de Régine Douady</i>	13
Denis BUTLEN, <i>Les jeux de cadres dans la formation des professeurs d'école</i>	31
Marie-Jeanne PERRIN, <i>Milieu, cadres et registres</i>	63
Guy BROUSSEAU, <i>Cadres, jeux de cadres et théorie des situations</i>	73
Raymond DUVAL, <i>Comment décrire et analyser l'activité mathématique ? Cadres et registres</i>	83
Michèle ARTIGUE, <i>De la notion de « cadre » à l'articulation des cadres théoriques en didactique des mathématiques : quelques réflexions a posteriori</i>	107

Utilisation des jeux de cadres dans l'enseignement

Aline Robert

IUFM de Versailles

L'exposé que je vais présenter n'est pas théorique, il va servir d'introduction à la journée, s'adressant aussi bien aux mathématiciens qu'aux didacticiens, aux enseignants qu'aux chercheurs, et cela me permettra aussi de transgresser mes habitudes en évoquant d'abord brièvement, en introduction, le travail avec Régine.

Vous savez bien que, pour aller vite, certains chercheurs se placent plutôt au centre d'un champ donné et, mus par des évidences fortes pour eux (au sens de Descartes), souvent issues de leurs expériences, introduisent leurs idées nouvelles, sans toujours être trop préoccupés du reste du monde. Aux autres chercheurs du champ à se les approprier et à les faire fructifier.

Pour les jeux de cadres, Régine est ainsi au centre. C'est elle qui a apporté les intuitions, les premières idées, l'expérience, les données, dont elle avait récolté, avec Marie-Jeanne Perrin, une quantité impressionnante, grâce à des observations très nombreuses, très longues, et d'une certaine façon j'en ai profité, en l'écoutant et en réagissant de temps en temps, modestement, à son discours.

Ainsi le travail avec elle, c'est d'abord le souvenir de discussions animées, très riches, des idées fusaient dans tous les sens, même si nous savions bien que tout ne serait pas retenu. De toutes ces idées lancées oralement, même fugaces, sans filtrages, de temps en temps est sorti de quoi élaborer du nouveau, consolidant des intuitions, et organisant entre eux des éléments différents. Evidemment bien d'autres étapes avaient lieu, dont le passage à l'écrit qui amenait encore d'autres enrichissements, mais Régine, pour moi, c'est d'abord quelqu'un qui élabore en racontant.

Il se trouve que, d'une certaine façon, je viens déjà d'esquisser certains des ingrédients que nous allons retrouver toute la journée, déclinés autrement, à propos de jeux de cadres : mises en relations productives d'aspects différents d'un même contenu, et, du moins pour le cadre scolaire, discussion s'enrichissant de ces différences entre points de vue.

Avant de préciser la notion de jeux de cadres en mathématiques et d'illustrer la manière dont je l'utilise quasi-quotidiennement dans mon enseignement (je n'aborderai pas ici le point de vue de mes recherches précises), je voudrais ajouter que, du même coup ces recherches de Régine autour des jeux de cadres, ont légitimé pour moi, une certaine manière de faire des mathématiques, dont j'avais envie sans oser trop approfondir, car peu d'enseignants le valorisent explicitement : c'est la mise en fonctionnement consciente, reconnue, voire recherchée, de grandes méthodes mathématiques. Les jeux de cadres en font partie, mais il y en a d'autres, le passage du particulier au générique puis au général, la classification des outils, la recherche des paramètres d'une situation mathématique donnée, l'utilisation d'invariants, etc.

1 Jeux de cadres en mathématiques

1.1 Vers une définition : changements et jeux de cadres

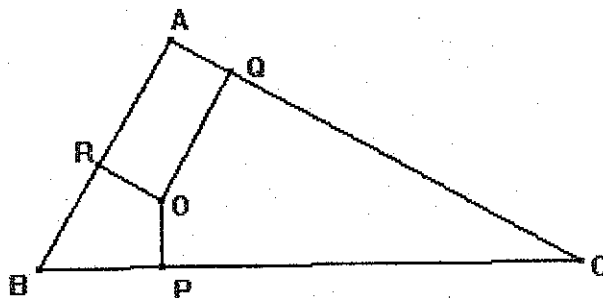
Venons-en aux jeux de cadres en mathématiques. La première lecture, générale, empirique, que j'en propose est celle d'une mise en relation intéressée et intéressante de deux traductions d'un même problème (à résoudre) dans deux (ou plus) domaines de travail. Intéressée parce qu'on en attend quelque chose, pour la résolution du problème, intéressante parce qu'on y arrive ! Les cadres sont les domaines des mathématiques mobilisés pour exprimer et travailler les traductions du problème, le « jeu » est le passage de l'un à l'autre et retour. En fait cette définition qualifie les changements de cadres, car, pour Régine, prévoir un jeu de cadres, c'est prévoir de faire utiliser aux élèves un changement de cadres mais sans indication explicite d'au moins un des cadres.

1.2 Un tout petit exemple, parmi d'autres¹

Il s'agit de démontrer une petite conjecture géométrique d'Erdős-Mordell qui a résisté longtemps² : dans un triangle ABC, un point O donné intérieur au triangle est projeté orthogonalement en P, Q, R sur les côtés [BC], [CA] et [AB]. Il s'agit de montrer que

$$2(OP + OQ + OR) \leq OA + OB + OC$$

Figure 1



Une symétrie par rapport à la bissectrice de A et l'utilisation d'un théorème de Pappus sur les aires, généralisant en quelque sorte le théorème de Pythagore, amènent à une première inégalité, où a, b, c désignent les longueurs des côtés [BC], [CA], [AB] :

$$OR \cdot b + OQ \cdot c \leq a \cdot OA$$

En travaillant de même à partir des trois sommets, on a donc, en additionnant les trois inégalités obtenues

$$OP \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c} \right) + OQ \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) + OR \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \leq OA + OB + OC$$

On a donc travaillé en géométrie, mais en utilisant aussi des calculs d'aires.

¹ Rappelons que tous les exemples de cet exposé sont tirés de situations réelles d'enseignement.

² cf. Repères-Irem n° 35, Le théorème d'Erdős-Mordell par la méthode des aires, J.L. Aymé

Le minuscule jeu de cadres qui intervient maintenant (et dont j'ai pu vérifier que bien des étudiants ne le trouvent pas spontanément) consiste à passer en analyse, à reconnaître qu'on a la somme de trois valeurs de la fonction $(x + 1/x)$ et à montrer que cette fonction est minorée par 2 sur $\mathbb{R}^+$, d'où le résultat.

1.3 Travail de l'expert

L'intérêt majeur en mathématiques de ce que Régine a ainsi baptisé « jeux de cadres », qui consiste à travailler une même question dans deux domaines différents, est ainsi de résoudre effectivement un problème insoluble dans un premier cadre en profitant des différences entre les domaines de travail.

Le travail de l'expert tient à quatre composantes :

- * l'idée d'introduire ce moyen (on retrouve la conception des mathématiques déjà évoquée, même si cela se fait tout seul)
- * le choix des cadres (travail de (re)modélisation)
- * le travail interne à chaque cadre
- * le travail de passage, d'interprétation (à l'aller et au retour) – c'est tout l'enjeu !

Mais pourquoi donc étiqueter quelque chose que les matheux font en partie naturellement, sans avoir de le nommer (ils n'ont pas attendu !) ? est-ce comme la prose de M. Jourdain ?

L'apport de Régine est justement de transporter aux apprenants « quelque chose » de ce travail spécifique du mathématicien, qui aide aux apprentissages. Mais comme l'apprenant n'est pas un expert, qu'il n'est pas non plus question d'en faire un expert (en général), il s'agit d'interroger ce mode de travail et d'en garder ce qui peut aider les apprentissages. D'où l'importance de le préciser pour l'interroger et le modifier, l'adapter si possible à l'apprentissage.

2 Jeux de cadres dans l'enseignement

2.1 Ce que ce n'est pas

Notons d'abord sur un exemple ce que le jeu de cadres n'est pas : ni une simple illustration, ni une simple conjecture, ni un simple contrôle. S'il n'y a qu'un de ces aspects, on pourrait parler de jeu de cadres faibles, en réservant le mot aux situations où il y a un travail effectif dans les deux cadres.

Voici l'énoncé d'un exercice (de seconde).

Soient A, B, C, D quatre points du plan, de coordonnées respectives $(2, -5/2)$, $(1, 1)$, $(3, -4)$, $(2, 0)$.

- 1) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires.
- 2) Traduire l'appartenance de M à la droite (AB) en utilisant la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$.
- 3) En utilisant la question 2 écrire qu'un point M de (AB) appartient à (CD).
- 4) En déduire les coordonnées de l'intersection de (AB) et (CD).

Le recours au graphique, pour illustrer la méthode et contrôler les calculs, n'est pas un changement de cadres car il n'y a pas de travail dans le cadre graphique.

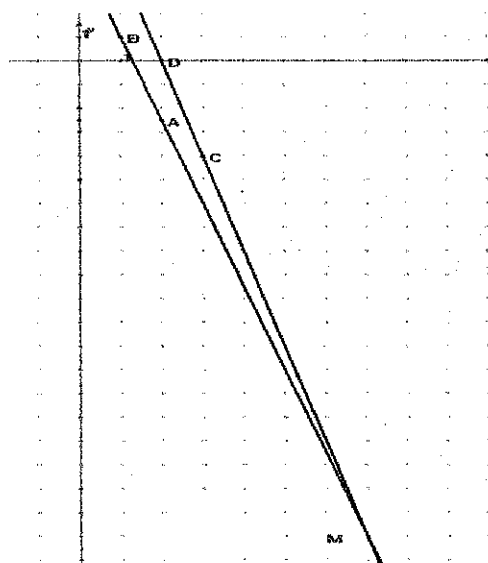


Figure 2

2.2 Une absence remarquée

On peut aussi reprendre un résultat déjà souvent signalé, et confirmé par les analyses écologiques des manuels, à savoir l'absence très notable dans l'enseignement d'exercices ou même de problèmes comportant des changements ou des jeux de cadres, même faibles.

2.3 Une difficulté réelle, mais un rôle producteur multiple

Enfin, les élèves n'aiment pas changer de cadres, là encore c'est une banalité. Or des petits exemples indiquent que non seulement ils peuvent « bénéficier » des changements de cadres pour la résolution de problèmes (et les apprentissages qui en découlent) mais encore ce type de travail peut les aider à mettre du sens à certaines propositions mathématiques.

Un exemple : il s'agit d'utiliser les égalités classiques suivantes

$$x/y = z/t = (x + z) / (y + t) = (x - z) / (y - t) \dots$$

Une simple vérification dans le cadre des fractions ne suffit pas à décider les étudiants à adopter ces égalités, suspectes d'entrer en contradiction avec les réductions au même dénominateur. En revanche, le passage au cadre des fonctions, et la transformation des deux premières égalités en l'existence d'un nombre k (ou d'une fonction linéaire $x \rightarrow kx$) tel que

$$x = ky \text{ et } z = kt$$

a permis à la fois de les convaincre, de leur donner un moyen de contrôle (dans le nouveau cadre) et de leur rendre disponible ce type d'égalités.

2.4

Un point clef en didactique : la résolution de problèmes

Notons par ailleurs le rôle des problèmes cherchés par les élèves dans les apprentissages. Plusieurs éléments doivent être rappelés brièvement ici pour comprendre la démarche didactique utilisée, qui sera précisée dans d'autres exposés.

Pour résumer, pour nous, l'apprentissage des élèves est fonction de plusieurs composantes, dont évidemment certaines ne dépendent même pas de l'enseignant. Mais parmi ce qui peut dépendre des enseignants, et bien sûr toujours des élèves, supposés ici jouer le jeu de la classe, **le choix du scénario et les conditions de travail** dans la classe sont des éléments importants. A certains moments des apprentissages (introduction, consolidation des notions), le travail des élèves sur des problèmes, qui restent pour nous, selon la formule de Vergnaud, source et critère de savoir, est déterminant.

Il s'agit de proposer des problèmes particuliers, répondant à des critères très précis, qui, insérés dans un cours complet, peuvent aider à mettre du sens et à apprendre (si les élèves s'investissent dans la tâche et si l'enseignant les laisse chercher).

Ces problèmes ne se réduisent pas à des applications simples et isolées de théorèmes déjà exposés : les gammes sont nécessaires mais non suffisantes à faire produire aux élèves toutes les adaptations, les mises en relations constitutives d'une connaissance, voire à rendre disponibles des connaissances (c'est à dire à pouvoir aller chercher seul et utiliser de manière adéquate une connaissance non indiquée).

2.5

Changements et jeux de cadres dans les problèmes

Dans ce contexte, un des grands apports de Régine est d'avoir précisément eu l'idée de proposer aux élèves, à certains moments des apprentissages³, des problèmes où un changement de cadres (ou un jeu de cadres) permet un double travail sur des domaines où les connaissances sont inégales. Inégales entre cadres, inégales entre élèves...

En somme elle a inversé les choses : schématiquement, les mises en relation (ici changements de cadres) sont un des objectifs, une des fins des apprentissages, elle les a proposées aussi comme moyen, comme ingrédient systématique dans certains de ces problèmes-clefs pour les apprentissages. Le travail du didacticien est alors l'élaboration de ces problèmes et leur intégration dans un cours complet. En gros, encore une fois, il s'agit de faire travailler dans deux cadres inégalement « acquis » par les élèves, le retour du cadre plus familier à l'autre constituant un moment clef du processus.

Tout se passe comme si Régine s'était dit «changer de cadres est difficile, c'est un des moteurs des résolutions expertes, eh bien forçons les élèves à en faire, en leur faisant résoudre des problèmes nécessitant des jeux de cadres, qu'ils peuvent aborder, en leur indiquant même les cadres s'il le faut, cela leur permettra de résoudre des problèmes non simples, en garantissant qu'ils le font de manière non automatique, donc porteuse de sens (grâce aux interprétations notamment) ». Si un interprète ne comprend pas ce qui est dit, il ne traduira pas bien !

Là où elle a eu de la chance d'une certaine manière, c'est que cela rejoignait une des grandes hypothèses de Piaget, sur l'utilité dans les apprentissages des déséquilibres / ré équilibrations (une des versions de la dialectique assimilation / accommodation). On peut lire dans les changements de cadres une réalisation de cette dialectique en mathématiques, et on

³ En particulier au début d'ingénierie du type dialectique outil/objet

peut rattacher leur efficacité à cette hypothèse de Piaget, particularisée aux mathématiques et à la situation scolaire (j'y reviendrai à la fin).

3 Mon enseignement : des exemples

J'annonçais plus haut que le travail du didacticien comprend l'élaboration de problèmes présentant des changements ou jeux de cadres (le mot varie selon qu'une indication est donnée ou non). Personnellement je travaille systématiquement dans cette optique non seulement en recherche (pour l'élaboration d'ingénierie pour l'enseignement supérieur) mais aussi dans mon enseignement quotidien (en Capes, en Deug, en licence professionnelle).

Là encore, une fois n'est pas coutume, c'est cette pratique quotidienne que je vais évoquer. Ainsi une grande partie de mon temps de préparation tient à la mise au point de problèmes, souvent transversaux par rapport aux chapitres du programme, et comportant des changements ou jeux de cadres : je fais l'hypothèse que, compte tenu de leur insertion dans mon cours, les résolutions de ces problèmes pourraient contribuer à produire du sens donc des connaissances, à condition que les problèmes ne soient pas trop difficiles, pour que les étudiants puissent travailler en petits groupes sans interventions directes de l'enseignant au moins pendant un certain temps, et qu'ils aient l'habitude de cette forme de travail, toutes conditions énoncées maintes fois par Régine.

Je vais donner rapidement des petits exemples (faute de temps), un qui m'a beaucoup servi, et un petit dernier de cette année.

3.1 Géométrie et analytique

Le premier exemple est la recherche de 4 points du plan, A, B, C, D, à partir de 4 points donnés, M, N, P, Q qui doivent être respectivement les milieux des segments [AB], [BC], [CD], [DA].

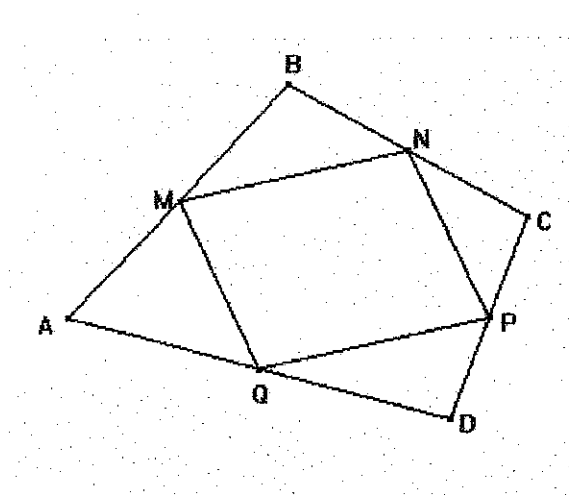


Figure 3

Cette recherche peut se faire dans le cadre analytique – on est amené à résoudre deux systèmes linéaires de 4 équations très simples à 4 inconnues chacune (les coordonnées des points inconnus) : ou bien les coordonnées des points donnés vérifient une condition et il y a une infinité de solutions dépendant d'un paramètre, ou bien sinon le système est impossible.

Cette recherche peut aussi se faire en géométrie. Ou bien on constate d'abord que si $MNPQ$ n'est pas un parallélogramme, le problème est impossible. Puis on continue en utilisant des propriétés de la figure, liées à la droite des milieux, et on conclut qu'alors le problème a toujours une solution unique à partir de n'importe quel point A donné. Ou bien on traduit la construction en composant quatre symétries axiales et en discutant de la nature de la transformation obtenue : si c'est une translation il n'y a pas de solution, car le quadrilatère ne se referme pas, si c'est l'identité, à partir de n'importe quel point A on obtient une solution (unique).

Il y a jeu de cadres lorsqu'on fait résoudre dans un cadre et qu'on fait interpréter dans un autre. Par exemple, à des étudiants plus forts en géométrie qu'en algèbre linéaire, on fera poser les systèmes, résoudre géométriquement, et, en cas d'existence de solution, interpréter l'expression « infinité de solutions dépendant d'un paramètre » à la lumière du résultat « pour tout A il existe un quadrilatère solution et un seul ». Pour les étudiants plus forts en algèbre, ce peut être la mise en évidence de la condition nécessaire « $MNPQ$ parallélogramme » qui va s'éclairer par la résolution analytique.

3.2 Géométrie et analyse

Un des derniers nés de mes exemples est inspiré d'un travail de Régine en seconde. Il s'agit de trouver un rectangle $EFAG$ d'aire maximale « inscrit » dans un triangle ABC rectangle isocèle en A . Le sommet E du rectangle $EFAG$ appartient à l'hypoténuse, F est sur $[AB]$ avec (EF) parallèle à (AC) , et G est sur (AC) avec (EG) parallèle à (AB) .

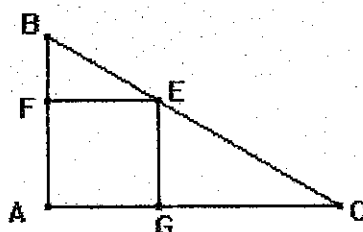


Figure 4

On constate que tous les rectangles ont le même périmètre, et en faisant un jeu de cadres (étude analytique ou graphique des aires des rectangles de périmètre donné), on conclut que le rectangle cherché existe, c'est le carré et on constate en interprétant ce résultat que le sommet E du rectangle doit être le milieu de l'hypoténuse.

4 Recherche

Enfin, j'ai adopté les jeux de cadres comme un des nombreux critères d'analyse des pratiques des enseignants en classe, mais ce n'est pas le lieu de parler de ces recherches là.

5 Pour finir, je reviendrai sur une question

Les didacticiens sont souvent amenés à adapter à la fois à la situation scolaire et aux mathématiques (et à leur épistémologie particulière) des éléments issus des travaux de psychologie cognitive, eux-mêmes souvent inspirés par l'apprentissage et le développement des enfants jeunes, ce n'est un secret pour personne.

Il se trouve d'une part que Régine a pu insérer avec succès dans ce cadre des éléments inspirés par les pratiques « expertes », les pratiques des mathématiciens. Est-ce parce que la recherche fonctionne en partie comme un apprentissage permanent ?

D'autre part l'introduction des jeux de cadres dans des problèmes à chercher en petits groupes permet non seulement de restituer un certain travail authentiquement mathématique mais elle permet aussi d'exploiter positivement des spécificités de la situation de classe. En effet dans les discussions qui s'instaurent sur le problème, dont on sait (si on laisse les élèves travailler) combien elles sont longues, tortueuses, et finalement efficaces, la présence des cadres différents favorise l'expression des diversités entre les élèves, elle peut même amener des conflits entre points de vue, dont on connaît la portée cognitive.

Ainsi les jeux de cadres concentrent bien plusieurs facteurs intéressant directement les processus d'apprentissage.

Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et le jeu de cadres de Régine Douady

Marc Rogalski

Université des sciences et technologies de Lille
Didirem (Paris 7)

Régine Douady a introduit [3] en didactique des mathématiques la notion de changements de cadre, de jeu de cadres et de dialectique outil-objet. C'est d'abord la pratique passée et présente des mathématiques et des mathématiciens qui a inspiré ces notions. Nous nous proposons ici d'expliquer comment elles interviennent effectivement dans cette pratique, conjointement d'ailleurs avec d'autres aspects : les registres de représentation et leurs règles de conversion, introduits par Raymond Duval [4], les niveaux de conceptualisation introduits par Aline Robert [5], et certaines autres idées, telles les changements de point de vue et l'activité de formalisation.

Ces notions s'entrecroisent de façon complexe dans le travail mathématique, au point qu'il est parfois difficile de distinguer ce qui relève de l'une ou de l'autre : les frontières sont parfois floues, des glissements de l'une à l'autre sont inévitables, voire utiles. De plus, l'utilisation de ces changements a sans doute été souvent inconsciente chez les mathématiciens du passé, mais il semble que ce ne soit plus toujours le cas aujourd'hui : des mathématiciens actuels pratiquent consciemment et volontairement les changements de cadre ou de niveau de conceptualisation, tant dans leur recherche que pour l'enseignement. Néanmoins, bien des mathématiciens, qui utilisent effectivement des changements de cadre, le font implicitement et ne sentent pas le besoin de l'explicitier. Il semble pourtant que cela peut être très utile de faire faire des changements de cadre ou registre aux élèves, en le leur disant ou non, selon le niveau (voir pourquoi en III 6/), et donc de former les futurs professeurs que sont certains de nos étudiants à reconnaître ce type d'activité, ce qui est utile aussi pour organiser leurs connaissances mathématiques. Bref, c'est une question dont les enseignants du supérieur devraient être conscients.

Nous commençons par mettre en évidence, à un niveau très global, quelques changements de cadre qui se sont produits dans l'histoire des mathématiques, et jusqu'à récemment, en donnant quelques exemples.

Puis nous essaierons de donner quelques définitions, mais les exemples de la partie suivante montreront que ces définitions sont parfois relatives.

Ensuite nous nous proposerons d'analyser le fonctionnement concret des changements de cadre, registre ou point de vue, en tentant de dégager leur intérêt, sur de nombreux exemples.

Enfin, deux annexes développeront deux exemples plus à fond, à titre d'exercices de style.

I. Quelques changements de cadres dans l'histoire des mathématiques

(a) Descartes et la géométrie analytique

C'est probablement l'un des plus anciens changements de cadre (1637), avec un double aspect. D'une part Descartes ouvre la voie à une utilisation plus intensive du cadre numérique en géométrie en montrant comment tout nombre, même exprimant une aire ou un volume, se représente par une longueur : la "droite numérique" absorbe ainsi tous les nombres ; de l'autre, ceci lui permet d'introduire le cadre de la géométrie "cartésienne" (avec des coordonnées), et donc l'utilisation de l'outil algébrique : on peut calculer plus ou moins aveuglément en géométrie. C'est une révolution par rapport à la géométrie des Grecs !

(b) L'utilisation des fonctions analytiques au 19ème siècle

Outil inventé aux 17ème et 18ème siècles, la théorie des séries est développée comme objet d'études inépuisables au 19ème siècle : les fonctions analytiques d'une variable complexe. Dès

lors, avoir recours à cette théorie pour traiter des problèmes d'analyse, même essentiellement réels, devient la grande mode, très efficace. Le mémoire de Riemann de 1859 sur la fonction zêta et son application aux nombres premiers est emblématique de cette démarche, et mènera à la première preuve du théorème des nombres premiers à la fin du siècle (il faudra attendre plus de 50 ans pour en avoir une preuve "réelle"). Hadamard disait, à peu près : "le plus court chemin d'un théorème dans le domaine réel à un autre est de passer par les complexes".

(c) L'algébrisation de la topologie et de la géométrie différentielle

Il s'agit du recours, initié par Poincaré en 1895, à des outils et théories algébriques (groupes d'homotopie et d'homologie) pour classer et étudier des espaces topologiques et des variétés différentiables. On a ainsi créé de nouvelles théories : la topologie algébrique, la topologie différentielle... Il est intéressant de noter que ce changement de cadre a entraîné la nécessité de développer spécifiquement certains aspects du cadre algébrique mobilisé, l'algèbre homologique, par exemple.

(d) Un point de vue algébrique récent sur la question de l'indépendance rationnelle des nombres $\zeta(n)$

Il s'agit d'un changement de cadre très récent, moins de 15 ans. Des progrès imprévus sur les "valeurs zêta multiples" (déjà envisagées par Euler), suscités par une approche informatique et par des idées issues de la physique théorique, ont amené à traduire les relations éventuelles entre ces nombres par des relations dans des Q-algèbres formelles de mots, formés sur un alphabet à deux lettres, et munies de "produits de mélange".

Ces structures algébriques sont encore mal connues, mais on espère ainsi que par des moyens purement algébriques et de théorie des langages on aura accès à la question de l'indépendance rationnelle des nombres $\zeta(n)$, et en particulier à la preuve de l'irrationalité des $\zeta(2n+1)$.

Pourtant, cette question semble relever essentiellement de l'analyse, et les progrès récents obtenus par Ball et Rivoal sont encore le résultat de moyens développés dans ce cadre.

L'avenir dira si ce changement de cadre aura répondu aux espoirs mis en lui...

Pour généraliser $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$, pour s

entier ≥ 2 , on pose, si les s_i sont des entiers, avec $s_1 \geq 2$:

$$\zeta(s_1, \dots, s_k) = \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_k \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_k^{s_k}}.$$

On associe à une telle "valeur zêta multiple", d'une part une intégrale multiple (dite de Drinfeld)

$$\int_0^1 d\omega_k \int_0^{x_{k-1}} d\omega_{k-1} \dots \int_0^{x_2} d\omega_1 \int_0^{x_1} \frac{dt}{1-t}, \text{ où}$$

$d\omega_i = \frac{dx_i}{x_i}$ ou $\frac{dx_i}{1-x_i}$, les cardinaux des paquets successifs de la première sorte étant déterminés par les nombres s_i ;

et de l'autre un mot sur un alphabet à deux lettres x et y : $x^{s_1-1} y x^{s_2-1} y \dots x^{s_k-1} y$.

II. Cadres, registres, points de vue, ... de quoi s'agit-il ?

Nous allons essayer de donner quelques définitions de ces notions, en les illustrant par des exemples.

(a) Cadres

"En gros", on dit qu'on travaille dans un cadre donné si on étudie un problème dont les données, les énoncés, les outils premiers d'études, se situent dans une théorie principale assez

bien définie, plus ou moins vaste, ayant souvent un rapport avec un certain champ conceptuel (au sens de Gérard Vergnaud). Un cadre apparaît ainsi comme un domaine de travail. Il peut y avoir entre différents cadres des relations d'emboîtement, ou des intersections non vides, avec des frontières nécessairement un peu floues. Il s'agit surtout de points de repère, utiles pour analyser les problèmes, pour classer, pour décrire des relations, pour situer des objets mathématiques précis, donc utiles aussi pour chercher et pour enseigner, et en particulier pour prévoir des changements de cadre.

Il peut s'agir de champs très vastes : analyse, algèbre, géométrie ; ou plus restreints : géométrie élémentaire, géométrie différentielle, théorie des équations différentielles, théorie des corps, algèbre linéaire ; voire encore plus précis (on peut alors parler parfois de "sous-cadres") : géométrie vectorielle, théorie des matrices, équations différentielles linéaires... On peut assez souvent les identifier via des manuels ou des chapitres de manuels ; ou bien à travers des intitulés de programmes ; ou bien même à travers des traditions historiques... Nous proposons quelques exemples d'emboîtements ou de relations d'inclusion autour d'objets plus précis.

(a1) *On dispose, en géométrie élémentaire plane, de plusieurs sous-cadres :*

- * ponctuel (figures, en affine ou euclidien, transformations) ;
- * vectoriel (vecteurs, relation de Chasles, produit scalaire...) ;
- * numérique (calcul sur des coordonnées, ou sur des nombres complexes, utilisation de mesures : longueurs, aires, angles...).

(a2) *L'objet "fonction" appartient naturellement à plusieurs cadres*

Selon les problèmes qu'on cherche à résoudre sur les fonctions, on pourra invoquer :

- * le cadre de l'analyse (propriétés de continuité, dérivabilité,...) ;
- * le cadre ensembliste (applications, équations, injectivité et surjectivité, fonctions réciproques, images réciproques...) ;
- * le cadre algébrique (types de fonctions et des formules les définissant et les régissant : polynomiales, circulaires...) ;
- * le cadre géométrique (graphes de fonctions ayant des propriétés géométriques particulières : droites, paraboles et hyperboles, questions d'asymptotes, de convexité...).
- * le cadre de l'analyse fonctionnelle (on est alors aussi dans le cadre ensembliste : les fonctions deviennent des éléments d'ensembles de fonctions, on a des applications entre ensembles de fonctions, des équations fonctionnelles...) ;
- * le cadre de l'analyse numérique (approximation et méthodes de calcul numérique).

(a3) *Le cadre de la convexité contient deux sous-cadres naturels*

- * le cadre fonctionnel (on utilise des fonctions convexes ou concaves) ;
- * le cadre géométrique (on travaille sur des ensembles convexes).

(b) Registres

Les registres sont des modes de représentation des objets mathématiques, accompagnés de règles de traitements, qui permettent d'étudier des problèmes. Le passage d'un registre à un autre, pour un type d'objets, s'opère selon des règles de conversion plus ou moins précises, qui ne transfèrent pas nécessairement dans le registre d'arrivée toutes les propriétés accessibles dans le registre initial (car chaque registre explicite des propriétés spécifiques), et qui ne conservent pas toujours de manière isomorphe les modes de traitement (chaque registre a aussi ses traitements spécifiques).

De plus, pour un type d'objets mathématiques, certains registres sont plus adaptés à certains cadres. Au point qu'il est parfois difficile de distinguer entre cadres et registres : pour quels objets, par exemple, est-on sûr de bien séparer le cadre géométrique et le registre graphique ?

Donnons plusieurs exemples, en renvoyant pour l'essentiel aux travaux de Raymond Duval [4], dont l'idée fondamentale est que le travail entre plusieurs registres de représentation est essentiel à la compréhension d'un objet ou d'un type d'objets mathématiques.

(b1) Les droites en classes de troisième et seconde : le registre des équations et le registre graphique, les cadres algébrique et géométrique

La droite est d'abord donnée dans le cadre géométrique, et le passage au cadre algébrique de son équation fait intervenir le théorème de Thalès (ou l'existence d'une base vectorielle). Son traitement dans le cadre géométrique est classique pour les élèves, mais le passage au cadre algébrique fait intervenir un registre des calculs algébriques sur deux variables (parfois traitées comme des inconnues) et des nombres (parfois des paramètres ou "coefficients"). Les relations entre : fonction linéaire, équation linéaire, équation d'un objet géométrique, droite de la géométrie élémentaire, et représentation graphique dans un système de coordonnées, sont loin d'être simples. S'y combinent changements de cadre et changement de registre, avec par exemple des règles de conversion entre le registre des équations et celui de la représentation graphique : interprétations de la pente, de la monotonie, de l'ordonnée à l'origine, du parallélisme, de l'orthogonalité, etc.

(b2) Les différents registres des vecteurs et des applications linéaires

A un niveau élémentaire, les vecteurs peuvent se représenter par des dessins (des flèches), ou bien par un tableau colonne de nombres (2 ou 3 selon la dimension) ou bien par des notations symboliques ($u, v, tu + sv, \dots$). On a d'ailleurs une même variété de représentations pour les applications linéaires : êtres formels, tableaux rectangulaires de nombres, familles de vecteurs colonnes, etc. Dans l'un comme dans l'autre cas, il est nécessaire d'utiliser les règles de conversion entre les différentes représentations, savoir traduire par exemple la somme de deux vecteurs, leur indépendance, etc.

(b3) Les registres de représentation des fonctions

Les fonctions ont 4 registres de représentation principaux :

* registre des tableaux de valeurs

x	0,5	1	1,5	2	2,5
f(x)	3	0	-1	$2\frac{1}{3}$	$\sqrt{2}$

* registre des formules

$$f(x) = \frac{3x + \sqrt{|x-2|}}{x^2 + 1}$$

* registre de la représentation graphique



* registre symbolique (avec un cadre ensembliste implicite)

$f, f + g, F', \exp(h) \dots$

Chacun de ces registres peut être plus ou moins bien adapté au traitement de certains problèmes. Même le registre des tableaux de valeurs peut permettre de résoudre certains problèmes. Par exemple, si $f(x)$ et $f(y)$ ont la même valeur, la question de l'injectivité éventuelle de f est résolue ! On peut avoir le même type d'arguments pour nier une monotonie envisagée. Voici un exemple plus subtil. Si $f = g - h$, avec g et h décroissantes, sur l'intervalle $[a, b]$, il se

peut que pour montrer que $f \geq 0$ sur cet intervalle, la seule méthode soit la suivante : si pour une suite de points $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ on obtient des valeurs de g et h qui vérifient les inégalités $h(x_i) \leq g(x_{i+1})$, alors on est sûr que $f \geq 0$. Cela peut se lire sur des tableaux de valeurs de g et h , par exemple tirés de tables numériques, ou calculés par ordinateur.

(c) Points de vue

Il s'agit là d'une notion sans doute moins précise que celles de cadre et de registre. Déjà, on peut dire que changer de cadre ou changer de registre pour étudier un objet mathématique, c'est un changement de point de vue sur cet objet. Mais on peut aussi changer utilement de point de vue en restant dans un même cadre ou un même registre. Voici quelques exemples.

(c1) *Des points de vue différents sur des objets de l'analyse*

Quand on est dans le cadre de l'analyse, montrer que deux nombres x et y sont égaux peut se faire par des calculs, c'est là un premier point de vue (avec d'ailleurs plusieurs sous-points de vue : partir de l'un pour arriver à l'autre par des calculs, ou partir des deux et prouver deux égalités à un même nombre) ; mais cela peut aussi se faire en montrant que pour tout $\varepsilon > 0$ on a à la fois $x < y + \varepsilon$ et $y < x + \varepsilon$ (ou $|x - y| \leq \varepsilon$).

De même, toujours dans le cadre de l'analyse, l'objet fonction fait intervenir plusieurs points de vue. On peut par exemple étudier une fonction d'un point de vue local, ou d'un point de vue global, ou étudier son comportement à l'infini. On peut aussi se placer du point de vue de l'analyse fonctionnelle, en situant une fonction dans un ensemble de fonctions, et étudier des problèmes d'analyse fonctionnelle.

(c2) *Des points de vue différents dans le cadre de l'algèbre linéaire*

Un premier exemple dans le cadre de l'algèbre linéaire est donné par la notion de rang, qui peut se voir et s'utiliser sous plusieurs points de vue :

- * le rang d'une famille de vecteurs ;
- * le rang d'une application linéaire ;
- * le rang d'une matrice (avec d'abord celui des lignes et celui des colonnes) ;
- * le rang d'un système d'équations linéaires.

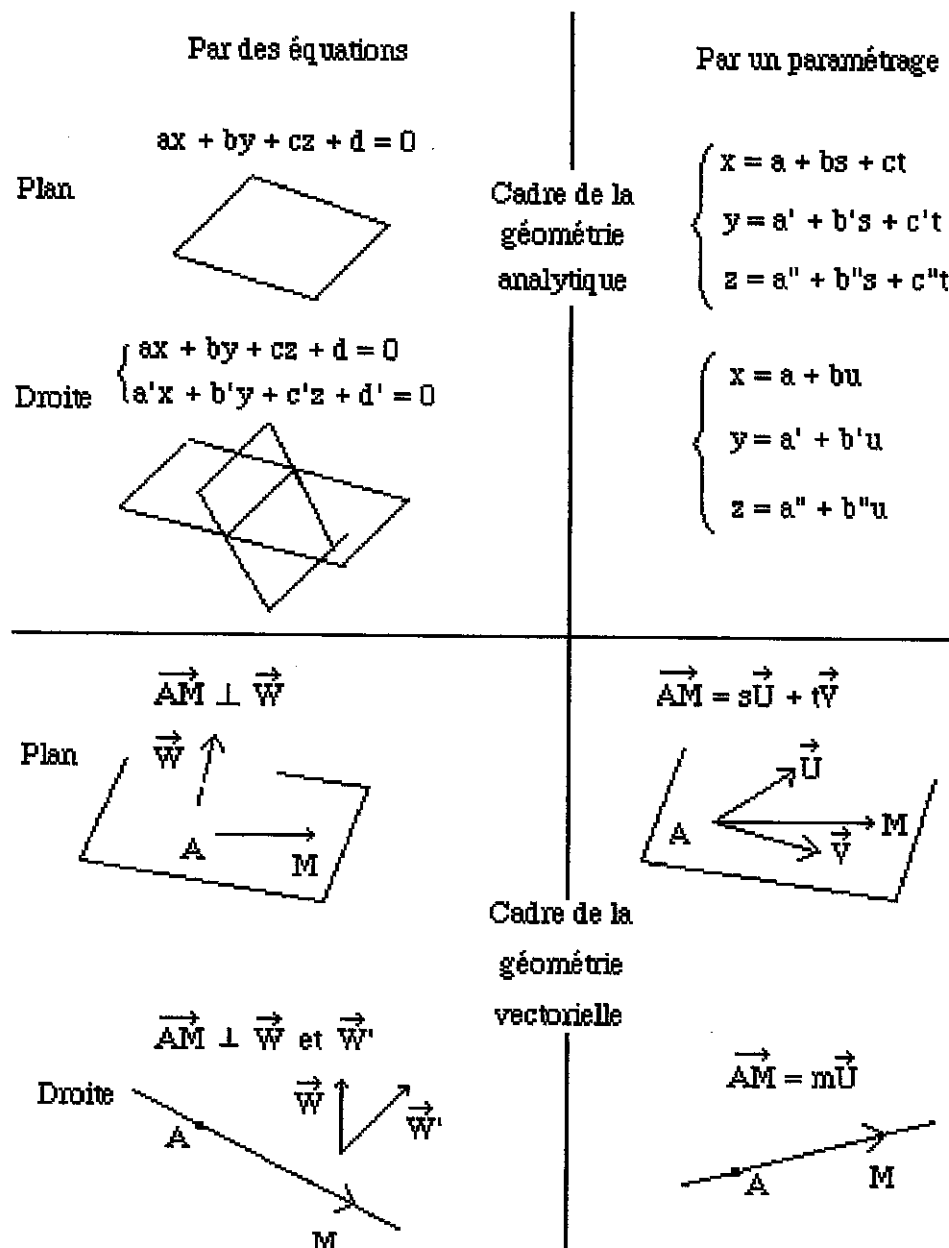
Les passages entre ces points de vue sont des théorèmes, qui ne sont pas de simples traductions d'un cadre à un autre ou de simples conversions entre registres.

Un autre exemple est déjà présent en logique, quand on parle des définitions de classes d'objets par "compréhension" ou par "extension". La version mathématique de cette dualité de points de vue est formée par le couple : "définition implicite, ou par des équations", *versus* "définition ou description en paramétrique". Cette dualité de points de vue est très présente en géométrie analytique, pour la description d'objets géométriques.

En algèbre linéaire, elle est particulièrement adaptée à la description des sous-espaces vectoriels ou affines. En se limitant à la dimension 3, une droite et un plan peuvent être définis selon ces deux points de vue (voir la figure ci-dessous).

Chacun de ces points de vue est adapté à un type de problèmes (par exemple, pour résoudre des problèmes d'inclusion ou d'intersection entre sous-espaces, on aura intérêt, selon la manière dont ils se posent, à les traiter par l'un ou l'autre des deux points de vue, voire en utilisant les deux à la fois). De même, dans chacun de ces deux points de vue, certaines particularités sont visibles et d'autres invisibles.

La figure qui suit montre bien que la présence des deux points de vue est compatible avec l'un ou l'autre des deux cadres, et même avec plusieurs registres possibles (trois en basse dimension, deux à partir de la dimension 4).



Enfin, il faut noter que, comme pour le rang, le passage d'un point de vue à un autre est un théorème (d'ailleurs difficile pour les étudiants) : en dimension n , un sous-espace de dimension k est paramétré linéairement par k paramètres indépendants, ou bien est défini par $n-k$ équations linéairement indépendantes.

(c3) *Un point de vue nouveau peut apparaître à un moment donné dans un cadre pré-existant*

Un exemple récent est dû aux progrès de la puissance de calcul des ordinateurs. Ainsi, tout un point de vue "effectif" s'est développé en arithmétique, où savoir que telle propriété a lieu à partir d'un entier N calculé effectivement (même grand) permet de prouver éventuellement

qu'elle est vraie en la vérifiant, par des calculs sur ordinateur, pour les entiers $n \leq N$. Le développement des moyens de calcul formel amène aussi à des points de vue nouveaux, par exemple en combinatoire.

(d) Niveaux de conceptualisation, formalisation

Un même problème peut se traiter avec des théories de divers niveaux emboîtés, la suivante étant plus générale ou plus "formelle" que la précédente. Cela se constate souvent en parcourant les programmes de l'enseignement des mathématiques sur plusieurs années successives de la scolarité, et c'est l'un des changements permanents de point de vue dont, à notre avis, il faut rendre conscients les futurs enseignants.

Un exemple classique est l'étude de la suite $u_{n+1} = au_n + b$. Au niveau de la classe de première, on la considère comme une sorte d'intermédiaire entre la suite arithmétique et la suite géométrique, et on bricole à partir de ce niveau de considération. En terminale, on peut la faire entrer dans la théorie des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$, et l'étudier comme telle. En première année d'université, on peut grimper d'un cran dans le niveau de conceptualisation et introduire une application linéaire dans l'espace vectoriel des suites (nous reprendrons cette dernière approche au paragraphe suivant).

De nombreux exemples de ce type de hiérarchies existent en géométrie, au fur et à mesure que des outils nouveaux deviennent disponibles : vecteurs, transformations, groupes de transformations, algèbre linéaire générale,...

En analyse, on peut parfois bricoler efficacement au niveau des objets fonctions pour étudier un certain problème, mais on peut souvent considérer un problème à un autre niveau de conceptualisation, comme un problème d'analyse fonctionnelle, par exemple, grâce à l'introduction d'espaces vectoriels normés de fonctions, d'applications linéaires, ou contractantes, entre ces espaces.

Bien entendu, savoir redescendre de niveau pour résoudre un problème particulier comme lemme auxiliaire dans un problème posé à un niveau conceptuel supérieur, est souvent aussi fort utile !

III. Que va-t-on chercher ailleurs par un changement de cadre, ou de registre, ou... ?

Comment fonctionnent concrètement les changements de cadre, ou de registre, ou de point de vue ? Pour quelles raisons va-t-on ailleurs chercher quelque chose, et quoi ? Nous allons passer en revue plusieurs possibilités, où nous verrons les idées précédentes s'entrecroiser de façon parfois complexe. Nous ne prétendons ni à l'exhaustivité, ni à l'unicité de la description proposée, qui devrait certainement être approfondie.

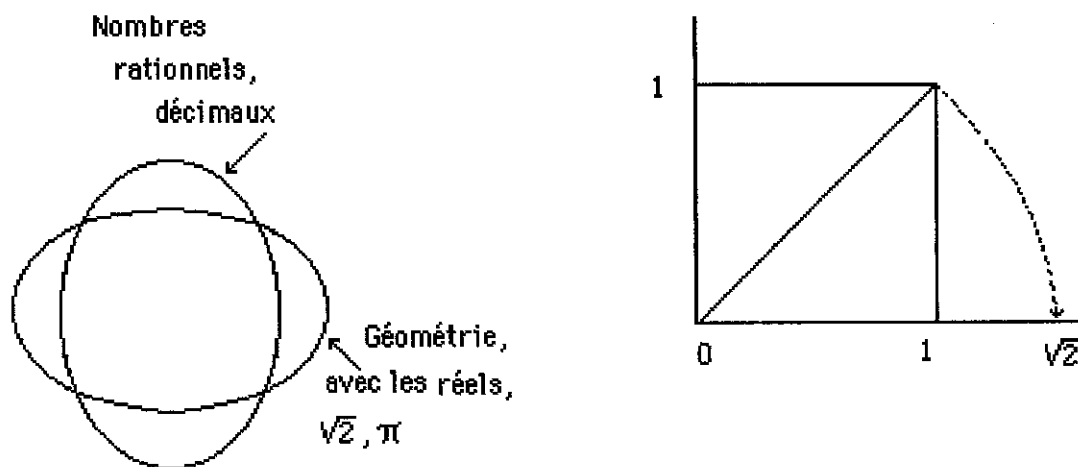
1/ Le jeu dans le changement de cadre : l'importation d'un objet

On va chercher dans un autre cadre un objet qui y est "implicitement", mais qui n'est pas facilement repérable dans le cadre où on travaille initialement. Cette différence entre les cadres est un "jeu de cadres", il permet d'introduire plus facilement un objet nouveau quand celui-ci existe sous une autre forme (remarquons que R. Douady réserve plutôt ce mot de "jeu" pour signaler le choix des cadres laissé aux élèves, dans une situation).

Cette version du changement de cadre est bien adaptée à la construction de situations fondamentales pour introduire certaines notions nouvelles.

Voici un exemple, qui peut se traiter de plusieurs façons. A un certain niveau de la scolarité, le cadre numérique contient les nombres décimaux et plus généralement les nombres rationnels, seulement. Il s'agit d'introduire la racine carrée d'un nombre, par exemple $\sqrt{2}$. Or, le cadre géométrique "contient" des nombres de façon implicite, dans la mesure où certains objets

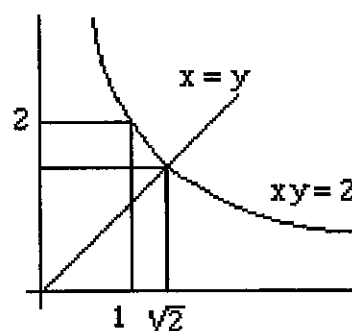
géométriques "existent naturellement", c'est-à-dire ont déjà été vus dans des figures ou des énoncés géométriques.



Par exemple, le nombre π existe, car il est "clair" que le périmètre du cercle existe. De même, la diagonale d'un carré a évidemment une longueur (une unité ayant été choisie), donc $\sqrt{2}$ a une "existence géométrique", avant d'avoir une existence numérique (au fond, c'est parce que la droite géométrique est "sans trou"). Profiter de cette différence de "contenance" des deux cadres pour introduire $\sqrt{2}$ dans le cadre numérique à partir de sa présence dans le cadre géométrique constitue précisément le "jeu de cadres".

A partir de cette idée, on peut construire plusieurs scénarios pour les élèves.

Régine Douady en a construit un où $\sqrt{2}$ apparaît comme défini plutôt par une coupure : on cherche à construire l'intersection de l'hyperbole $xy = 2$ avec la droite $x = y$.



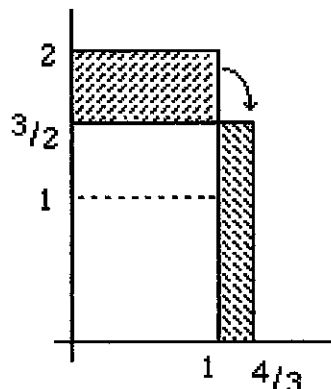
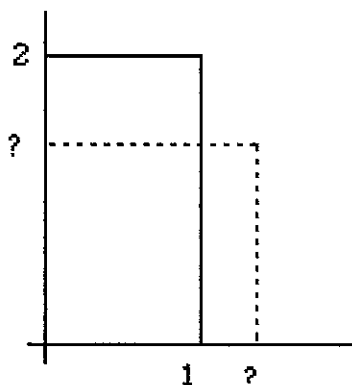
Voici le plan d'un autre, où l'objectif est plutôt d'importer dans le domaine numérique l'outil d'approximation du "nombre" $\sqrt{2}$ (pas encore construit dans ce domaine) par une suite classique.

On transporte le problème de la recherche d'un nombre $a > 0$ dont le carré a^2 est 2, du cadre numérique au cadre géométrique, en le transformant en le problème : trouver un carré (par la longueur de son côté) dont l'aire est 2. En effet, le cadre géométrique contient des notions : figures géométriques (carrés, rectangles,...), longueurs, aires, qui permettent d'y traiter le problème dans le registre du dessin géométrique. Le nombre 2 se traduit ainsi comme une aire, *a priori* celle d'un rectangle de côtés 1 et 2, et le problème est de le transformer en un carré, ou au moins de le rapprocher d'un carré, en conservant son aire.

L'idée est de transporter une partie (par exemple la moitié) de l'aire en excédent par rapport au carré de côté 1, de manière à construire un rectangle d'aire 2, de hauteur plus petite que 2 et de base plus grande que 1, donc plus proche d'un carré.

On obtient ainsi un rectangle de hauteur $\frac{3}{2}$ et de base $\frac{4}{3}$. On peut alors recommencer la même opération sur ce nouveau rectangle, en transportant la moitié de l'aire en excédent sur le

nouveau carré de côté $\frac{4}{3}$, etc, et construire ainsi une suite de rectangles de plus en plus proches d'un carré, et ayant toujours une aire égale à 2.

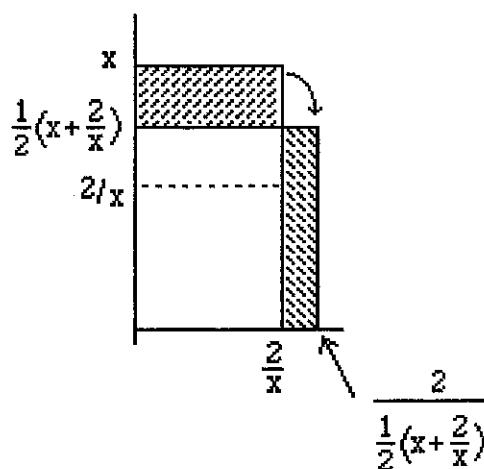


La convergence de ces objets géométriques vers un carré se "voit", ou bien se prouve en montrant que la différence entre la hauteur et la base des rectangles diminue "vite" :

$$0 \leq \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right) - \frac{2}{1/2(x+2/x)} = \frac{(x-2/x)^2}{2(x+2/x)} \leq \frac{1}{2} \left(x - \frac{2}{x} \right)^2.$$

On renvoie au cadre numérique l'approximation obtenue dans le cadre géométrique, sous la forme d'une suite de nombres rationnels :

$$u_0 = 2, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right).$$



Cette suite numérique fournit un procédé d'approximation de "quelque chose" associé à l'équation $a^2 = 2$. Ce procédé apparaît ainsi comme un "outil" pour résoudre de façon approchée cette équation, dans un certain contexte. Il restera à étudier d'autres approximations, par d'autres méthodes, et à décontextualiser pour construire "l'objet" $\sqrt{2}$.

2/ Situer le cadre où l'on se pose un problème dans une théorie plus générale qui contient d'autres cadres, et aller chercher dans ceux-ci une idée, une analogie, pouvant être importée

Voici un exemple, tiré du DEUG première année. On se propose de déterminer toutes les suites numériques $u = (u_n)$ vérifiant les relations

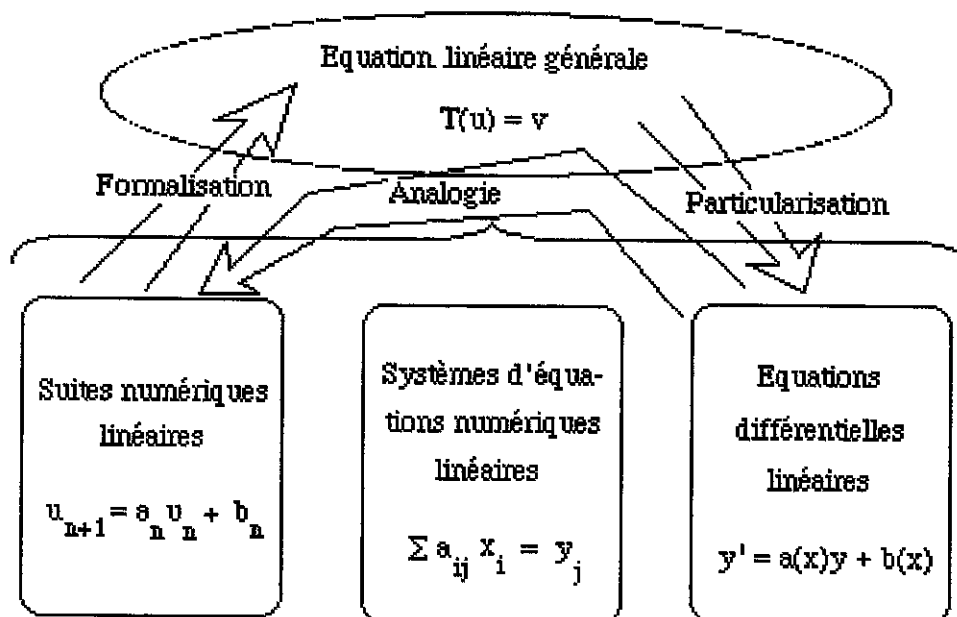
$$u_{n+1} = au_n + b, \text{ ou } u_{n+1} = au_n + b_n, \text{ ou même } u_{n+1} = a_n u_n + b_n,$$

les suites $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$ étant données.

La première chose est de reconnaître, dans le cadre des suites numériques, qu'il s'agit d'un *problème linéaire*, et donc de reformuler le problème sous la forme canonique de l'équation linéaire générale du cadre plus théorique de l'algèbre linéaire : $T(u) = v$ (ici, $u = (u_n)$, $v = b$, et T est l'application linéaire de l'espace vectoriel Σ des suites dans lui-même définie par la relation $T(u) = (u_{n+1} - a_n u_n)$). On a ainsi changé de "niveau de conceptualisation" par "formalisation".

La théorie dit alors qu'il faut résoudre l'équation "sans second membre" : $u_{n+1} - a_n u_n = 0$, ce qui donne tout de suite $u_n = C \prod_{0 \leq p \leq n-1} a_p$, où C est une constante arbitraire. Il faut alors trouver

une solution particulière, et le problème est de savoir comment. Mais la théorie générale de l'équation linéaire contient d'autres cadres, par exemple celui des équations différentielles linéaires, où on peut aller chercher une idée ou une analogie qu'on pourra peut-être importer dans le cadre des suites récurrentes linéaires. Et on ne peut pas ne pas penser à la méthode de variation des constantes... et cela marche ! On "fait varier" la constante C de la solution de l'équation homogène (le noyau de T), en posant $u_n = w_n \prod_{0 \leq p \leq n-1} a_p$. La nouvelle suite inconnue vérifie $w_{n+1} - w_n = b_n (\prod_{0 \leq p \leq n} a_p)^{-1}$, et le résultat s'en suit par sommation.



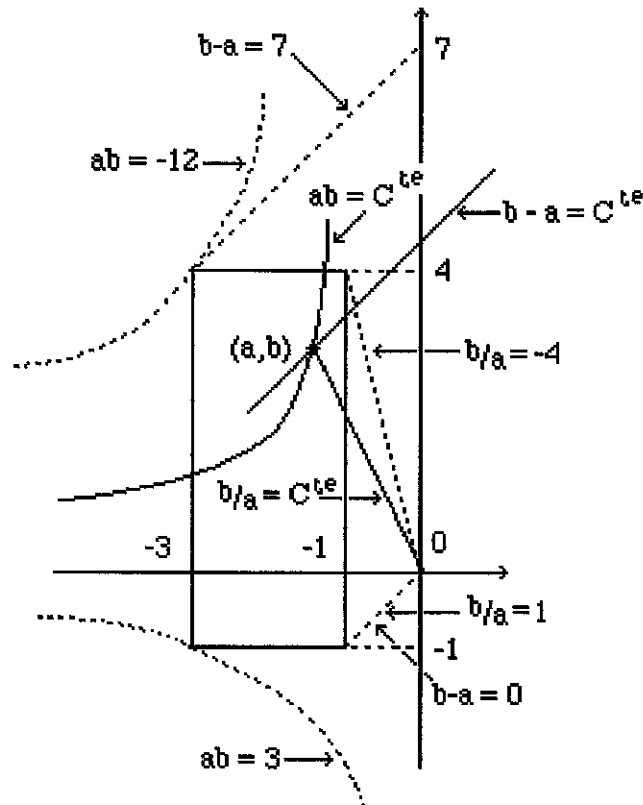
Un fonctionnement de l'analogie : changement de cadre par généralisation, réimportation d'une idée fructueuse (la variation de la constante) pour résoudre un problème sur les suites numériques, comme pour les équations différentielles.

3/ Un traitement qu'on ne sait pas faire ou mal faire dans le cadre de départ, en particulier parce qu'un registre ne s'y trouve pas alors qu'il est bien adapté au problème dans le nouveau cadre

Ainsi, la preuve d'inégalités numériques peut être pénible (par exemple pour des questions de gestion des signes, à un niveau élémentaire), et on peut avoir intérêt à représenter certaines quantités en fonction d'autres dans un registre graphique... mais celui-ci est bien adapté au cadre géométrique, d'où l'intérêt d'y passer.

Voici un exemple. On suppose que les nombres a et b sont assujettis aux seules conditions d'inégalités $-3 \leq a \leq -1$ et $-1 \leq b \leq 4$; on demande les meilleurs encadrements pour les quantités $\frac{b}{a}$, $b - a$ et ab . Le problème est un peu difficile à cause des signes. L'idée peut alors être de regarder les lignes de niveau des trois fonctions de deux variables qu'on doit encadrer, c'est-à-dire de passer dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé, d'y faire varier le

point (a,b) , en traçant le domaine où ce point doit se situer par les conditions imposées, et de chercher les maximums et minimums sur ce domaine des trois fonctions quotient, différence, produit. Pour cela, il faut interpréter graphiquement leurs lignes de niveau, ce qui va demander de faire de la géométrie (plus précisément dans le sous-cadre de la géométrie analytique des courbes élémentaires : droites, hyperboles).



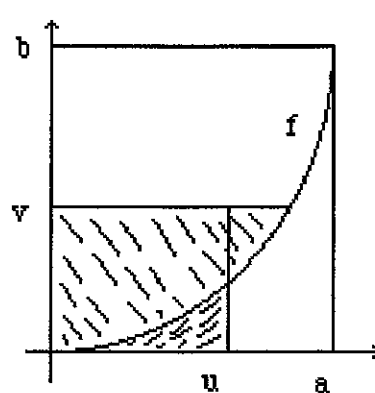
On a ainsi remplacé le traitement (relativement) difficile d'inégalités avec les règles du calcul du cadre numérique par le traitement des courbes de niveau de trois fonctions de deux variables, dans le cadre géométrique (et même de la géométrie "dynamique"), en utilisant les propriétés de la conversion entre le registre des équations de droites ou d'hyperboles et celui de leurs représentations graphiques (signification de la pente, de l'ordonnée à l'origine, etc).

On obtient ainsi facilement le résultat par "lecture directe" sur le graphique :

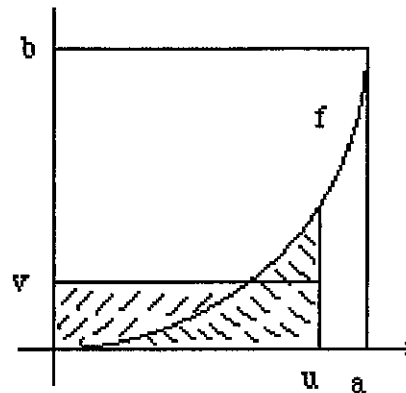
$$\begin{aligned} -12 &\leq ab \leq 3, \\ 0 &\leq b-a \leq 7, \\ -4 &\leq \frac{b}{a} \leq 1. \end{aligned}$$

Voici un autre exemple, cette fois donné initialement dans le cadre de l'analyse des fonctions. Il s'agit de prouver l'inégalité de Young : si f est une fonction continue strictement croissante de $[0, a]$ sur $[0, b]$, alors pour tout $u \in [0, a]$ et pour tout $v \in [0, b]$ on a l'inégalité suivante :

$$uv \leq \int_0^u f(t) dt + \int_0^v f^{-1}(t) dt.$$



Cas $v \geq f(u)$



Cas $v \leq f(u)$

Comme il s'agit d'intégrales, on peut envisager *deux points de vue* : celui des sommes de Riemann, et on voit poindre des difficultés (coordonner les sommes de Riemann de f et celles de sa fonction réciproque) ; et celui des aires, ce qui amène à passer dans le registre graphique, voire le cadre géométrique avec la notion d'aire. Et un dessin prouve alors immédiatement le résultat.

4/ L'évolution du traitement d'un problème fait naturellement apparaître le besoin d'utiliser des outils d'un ou de plusieurs autres cadres

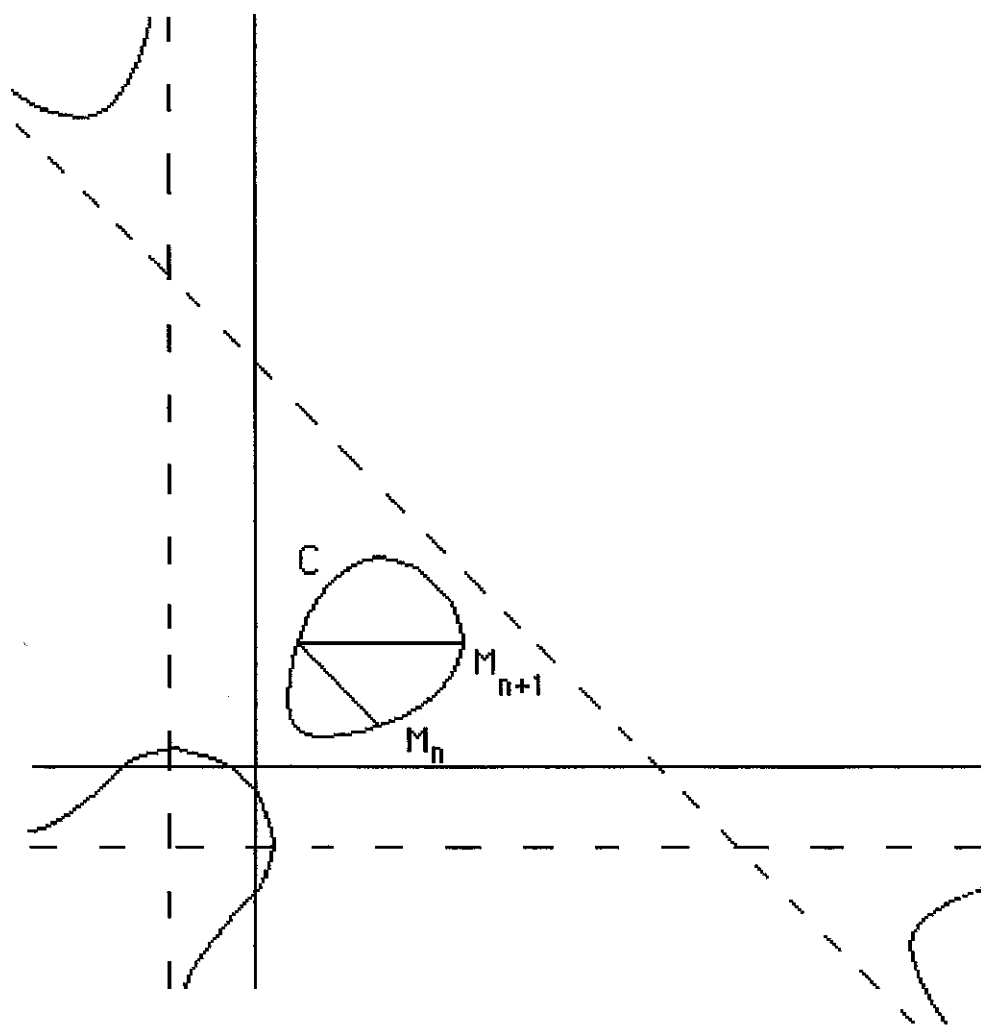
Voici un exemple sur lequel je suis personnellement tombé, lors d'un travail avec un collègue.

On étudiait la suite récurrente définie par $u_0 > 0$, $u_1 > 0$, $u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + a}{u_n}$, où $a > 0$ est un paramètre donné. On a constaté par quelques calculs que le point $M_n = (u_{n+1}, u_n)$ se déplace sur la composante connexe bornée C d'une certaine cubique G , d'équation

$$(x+1)(y+1)(x+y+a) = Kxy.$$

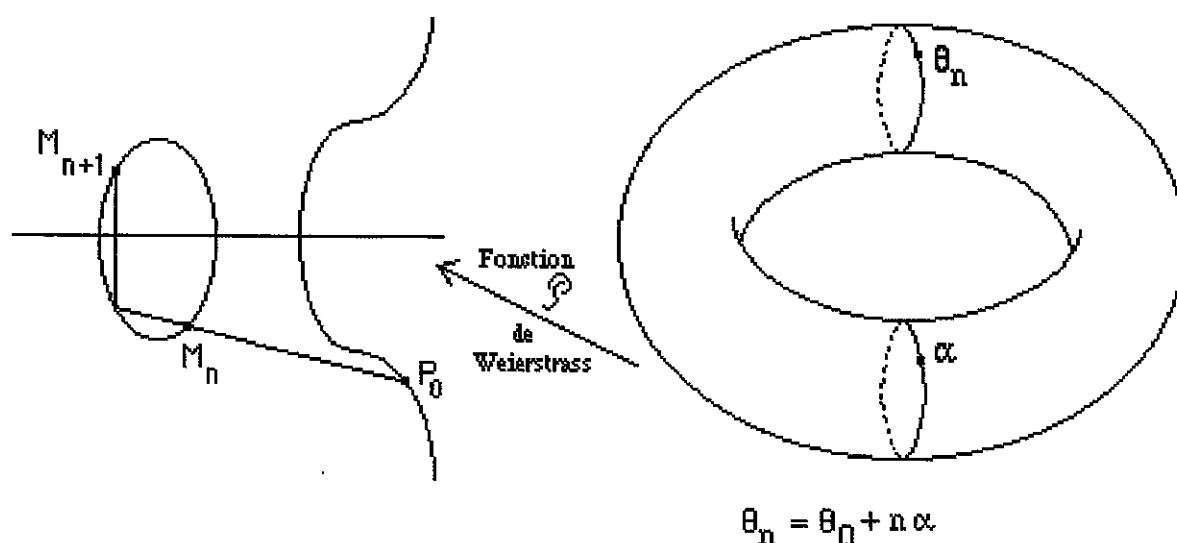
Ceci permettait déjà de montrer que la suite (u_n) ne converge jamais (quels que soient les données $a, u_0, u_1 > 0$).

On s'est alors posé le problème de son comportement, c'est-à-dire celui de (M_n) , sachant comment on passe géométriquement du point M_n au point M_{n+1} .



Cette évolution "autonome" du problème amenait donc naturellement à faire appel au cadre de la géométrie algébrique (on était sur une cubique) et à celui des systèmes dynamiques. Manifestement, il fallait des outils de ces théories pour aller plus loin.

Nous avons alors fait appel à... Adrien Douady, qui nous a fourni les outils nécessaires. D'abord, une transformation projective ramène la cubique à une forme plus canonique, sur laquelle l'évolution de la suite de points M_n s'interprète d'une façon agréable au moyen de la loi de groupe de la cubique : M_{n+1} est le produit de M_n pour cette loi de groupe par un point fixe P_0 . Mais la paramétrisation de la cubique par la fonction P de Weierstrass transforme la composante bornée C' en un cercle du tore, et les points M_n deviennent des nombres θ_n modulo 2π , auxquels on ajoute les multiples successifs d'un nombre fixe α . Alors, selon que le quotient de α par π est rationnel ou non, on obtient des orbites périodiques (avec des périodes arbitrairement grandes) ou des orbites denses dans le cercle.



La traduction de ces résultats dans le cadre initial permet alors de bien comprendre le comportement de la suite étudiée au départ (en particulier, l'existence de périodes possibles arbitrairement grandes, et d'orbites denses dans C , était imprévue).

5/ Quand le problème lui-même est posé dans deux cadres différents... on n'a pas le choix !

Voici un exemple souvent utilisé par Aline Robert pour expliquer aux étudiants l'intérêt des changements de cadres. On a vu qu'on a, en géométrie élémentaire, plusieurs sous-cadres.

On regarde alors l'énoncé suivant :

"Etant donné un triangle ABC , et O le centre du cercle circonscrit au triangle, soit H le point défini par la relation $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$. Montrer que ce point H est l'orthocentre du triangle".

Une analyse immédiate montre que l'hypothèse sur H est donnée dans le *cadre vectoriel*, alors que la conclusion est donnée dans le *cadre ponctuel*. On est donc *obligé*, si on veut prouver la seconde à partir de la première, de changer de cadre à un moment ou à un autre. A cause de la facilité du calcul vectoriel (en particulier le caractère automatique de la relation de Chasles), il est préférable de traduire la conclusion souhaitée dans le cadre vectoriel, sous la forme : le produit

scalaire de $\vec{AH}$ avec $\vec{BC}$ est nul, ... et les deux autres relations analogues (avec le point de vue pour l'orthocentre : H est sur les trois hauteurs). Il n'y a plus alors qu'à calculer (presque sans réfléchir !) le produit scalaire $\langle \vec{AH}, \vec{BC} \rangle$, en utilisant systématiquement la relation de Chasles et l'hypothèse, pour obtenir le résultat $\|\vec{OC}\|^2 - \|\vec{OB}\|^2 = 0$.

6/ Les préférences personnelles peuvent aussi inciter à changer de cadre, de registre ou de point de vue

C'est en fait très fréquent : aussi bien les élèves que les mathématiciens se sentent souvent plus à l'aise pour travailler dans certains cadres que dans d'autres, ou dans certains registres. Par exemple, on peut avoir du mal à faire de l'analyse sans faire des croquis de graphes de fonctions, et donc systématiquement se placer dans un registre graphique, et de là glisser vers le cadre géométrique (voir l'exemple de l'annexe 2, ou celui de l'inégalité de Young, donné dans 3/). Inversement, on peut parfois préférer des calculs aveugles mais sûrs et automatiques à une réflexion plus délicate ; alors, le recours au cadre algébrique, par exemple avec des calculs formels, ou à celui du calcul vectoriel, peut permettre de satisfaire ce penchant ! Ou bien, pour déterminer des grandeurs numériques dans un problème géométrique, on peut choisir selon ses préférences tel ou tel sous-cadre de la géométrie, voir l'exemple de l'annexe 2.

L'existence de ces préférences personnelles doit être prise en compte dans l'enseignement, et acceptée. Mais la question se pose aussi de savoir s'il ne faut pas à certains moments "forcer" les élèves à travailler dans des cadres ou des registres différents de ceux qu'ils préfèrent.

Des études qui ont suivi les travaux de R. Douady ont en effet suggéré que le travail dans un seul cadre ou un seul registre n'est pas favorable à l'apprentissage : quand on regroupe les réponses d'élèves ou étudiants à des tests en "blocs" correspondant aux cadres ou registres présents dans chaque question, on constate une corrélation entre l'échec dans la poursuite des études et la présence de blocs vides (même si certains blocs sont "pleins", c'est-à-dire réussis) : il vaut mieux en savoir moins dans tous les cadres qu'avoir des cadres où l'on est incapable de fonctionner et des cadres où l'on excelle. C'est ce qui s'appelle "l'hypothèse des blocs", qui a été confirmée en analyse (voir [1]) et en algèbre (voir [2]).

Bibliographie

- [1] Boschet F. et Robert A., *Acquisition des premiers concepts d'analyse sur " " dans une section ordinaire de première année de Deug*, Cahier de didactique des mathématiques n° 7, IREM de Paris VII.
- [2] Dorier J.-L., *Contribution à l'enseignement à l'université des premiers concepts d'algèbre linéaire. Approches historique et didactique*, Thèse de l'université Joseph Fourier, 1990.
- [3] Douady R., *Jeu de cadres et dialectique outil-objet*, Recherche en didactique des mathématiques, vol. 7 n° 2, p. 5-31, La pensée sauvage éditions, 1986.
- [4] Duval, R., *Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*, Annales de didactique et de sciences cognitives 5, Strasbourg : IREM, 1993.
- [5] Robert A., *Niveaux de conceptualisation et enseignement secondaire*, in L'enseignement de l'algèbre linéaire en question, ed. Dorier J.-L., La pensée sauvage éditions, 1997.

Annexe 1. Diverses méthodes pour calculer $1+2+3+\dots+n$... généralisations ?

(1) Arithmétique algébrique

(1a) Si on a deviné le résultat : récurrence immédiate.

(1b) Sinon : $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$

$$n^2 = (n-1)^2 + 2(n-1) + 1$$

$$(n-1)^2 = (n-2)^2 + 2(n-2) + 1$$

.....

$$2^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 + 1$$

$$(n+1)^2 = 1^2 + 2S_1(n) + n \Rightarrow S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Se généralise à $S_p(n)$, en donnant une relation de récurrence qui exprime $S_p(n) = 1^p + 2^p + \dots + n^p$ au moyen des $S_q(n)$, $q < p$.

(2) Arithmétique "visuelle"

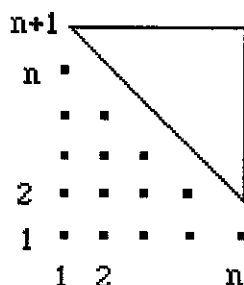
$$1 + 2 + 3 + \dots + n = S_1(n)$$

$$n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = S_1(n)$$

$$n(n+1) = 2S_1(n)$$

(3) Géométrie "visuelle"

Les nombres triangulaires des Grecs



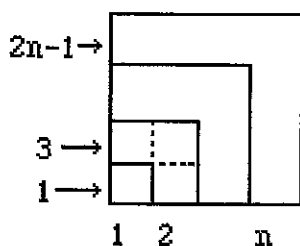
Se généralise aux nombres pentagonaux et autres ...

(4) Mixte géométrie "visuelle"-arithmétique-algèbre

On calcule d'abord la somme

$\Sigma = 1+3+5+\dots+(2n-1)$
par les "gnomons" des Grecs :

$$\Sigma = n^2.$$



Puis on obtient $2+4+6+\dots+2n$ en ajoutant à Σ n fois un 1, donc

$$S_1(2n) = n^2 + (n^2 + n)$$

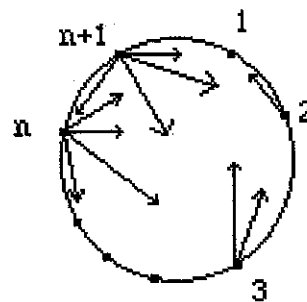
$$= \frac{2n(2n+1)}{2}; \text{ puis on a }$$

$$S_1(2n+1) = S_1(2n) + 2n + 1.$$

(5) Géométrie combinatoire ou combinatoire pure

On confronte deux points de vue pour calculer le nombre de segments joignant deux à deux $n+1$ points sur un cercle (c'est aussi le problème des "poignées de main", alors résoluble dans le cadre de la combinatoire pure) :

- * un point de vue "local" : nombre de segments issus du point $n+1$, puis du point n , puis ..., ce qui donne $n+(n-1)+\dots+1$;
- * un point de vue global : nombres de paires de points, ce qui donne directement C_{n+1}^2 .



(6) Algèbre et analyse des polynômes

On dérive la relation $1+x+x^2+\dots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, et on fait tendre x vers 1 dans le résultat. Le premier membre donne tout de suite $S_1(n)$, le deuxième membre demande quelques calculs, soit par développement limité, soit par un calcul de polynômes, en posant $x = 1-u$.

Généralisation possible pour $S_2(n)$, mais les calculs deviennent pénibles : il faut multiplier par x la dérivée obtenue ci-dessus, redériver, et chercher à nouveau la limite. Au-delà de $p = 2$...

(7) Développement limité à l'ordre 1 d'une somme d'exponentielles

Il s'agit d'un *changement de point de vue* dans l'expression précédente : on remplace x par e^x , ce qui a l'avantage de donner une forme fixe (indépendante de l'exposant p , si on veut poursuivre). On écrit donc

$$1+e^x+e^{2x}+e^{3x}+\dots+e^{nx} = \frac{e^{(n+1)x} - 1}{e^x - 1}.$$

Le développement limité en 0 à l'ordre 1 du premier membre est $n+1+S_1(n)x+x\epsilon(x)$. On calcule le développement limité à l'ordre 1 du second membre par quotient des deux développements à l'ordre 2.

Extension aux $S_p(n)$ pour p pas trop grand, en calculant le quotient des développements limités du second membre à des ordres de plus en plus grands.

(8) Limite d'une somme trigonométrique

C'est le *point de vue* "partie imaginaire" de la relation précédente, avec la relation

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

On divise alors par x , et on fait tendre x vers 0.

(9) Développements en séries avec les polynômes de Bernoulli

C'est l'extension de la méthode (7), où on développe en série au lieu de se borner aux développements limités. On part de la série génératrice

$$\frac{xe^{tx}}{e^x - 1} = \sum_{p \geq 0} B_p(t) \frac{x^p}{p!},$$

où B_p est le p -ème polynôme de Bernoulli. Soit $b_p = B_p(0)$ le p -ème nombre de Bernoulli. La formule du (7) donne alors

$$\sum_{p \geq 0} S_p(n) \frac{x^p}{p!} = \frac{e^{(n+1)x} - 1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} \left\{ \frac{xe^{(n+1)x}}{e^x - 1} - \frac{x}{e^x - 1} \right\} = \frac{1}{x} \sum_{p \geq 0} [B_{p(n+1)} - b_p] \frac{x^p}{p!}.$$

En identifiant, on trouve la formule générale, pour tout $p \geq 1$:

$$S_p(n) = \frac{1}{p+1} [B_{p+1}(n+1) - b_{p+1}].$$

Pour exploiter cette formule, il faut alors disposer de formules récurrentes (classiques) sur les polynômes et les nombres de Bernoulli.

Annexe 2. Du changement de registre au changement de cadre dans un problème d'analyse

Voici un problème d'optimum initialement posé dans le cadre de l'analyse :

trouver le maximum et le minimum de $\frac{y}{x}$ sur l'ensemble $\Delta = \{(x,y) \mid x \geq (y-1)^2 + 1\}$.

1/ Restons d'abord dans le cadre de l'analyse.

(a) Premier point de vue : la variable est x

Dans Δ , on a $x \geq 1$. Pour x fixé, y doit vérifier $1 - \sqrt{x-1} \leq y \leq 1 + \sqrt{x-1}$, donc $\frac{y}{x}$ est encadré entre les deux fonctions : $f(x) = \frac{1 - \sqrt{x-1}}{x}$ et $g(x) = \frac{1 + \sqrt{x-1}}{x}$. Le problème se ramène donc à la recherche du maximum M de g et du minimum m de f , sur $[1, +\infty[$. Des calculs classiques par dérivation donnent, plus ou moins aisément : $m = \frac{1 - \sqrt{3 + \sqrt{8}}}{4 + \sqrt{8}}$ et $M = \frac{1 + \sqrt{3 - \sqrt{8}}}{4 - \sqrt{8}}$, et le problème est résolu.

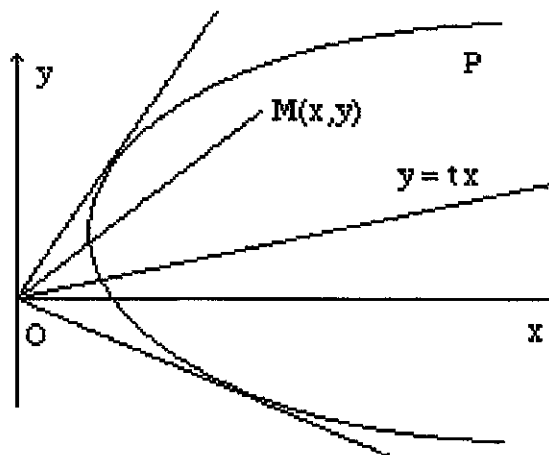
(b) Deuxième point de vue : la variable est y

Dans Δ , si $y \geq 0$, alors $\frac{y}{x} \leq \frac{y}{(y-1)^2 + 1}$, dont on cherche le maximum ; si $y \leq 0$, alors $\frac{y}{x} \geq \frac{y}{(y-1)^2 + 1}$, dont on cherche le minimum. Des calculs analogues donnent $m = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$ et $M = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$, résultat qu'il est amusant de comparer à celui du (a) !

2/ Utilisons le registre graphique pour visualiser le domaine

On trace le graphe de la fonction $x = (y-1)^2 + 1$, et on voit que le domaine Δ est l'intérieur d'une parabole, en particulier est convexe. Dans le registre graphique pour les droites, on interprète la quantité $\frac{y}{x}$ comme la pente de la droite joignant l'origine O au point $M(x, y)$ intérieur à la parabole. Alors, la lecture du graphique et la convexité de Δ nous permettent de voir que m et M sont les pentes des deux tangentes issues de O à la parabole P . Comment les trouver ?

On constate qu'il faut alors nécessairement passer au cadre de la géométrie, à partir du traitement graphique du problème, afin de disposer d'énoncés permettant de déterminer ces tangentes à une parabole. C'est un exemple du glissement possible du changement de registre au changement de cadre.



3/ Travaillons donc dans le cadre géométrique

Il apparaît alors trois points de vue, qui vont correspondre à trois sous-cadres de la géométrie : le point de vue de la géométrie algébrique et des équations polynomiales, celui de la géométrie différentielle, et celui de la géométrie ponctuelle exploitant les propriétés géométriques de la

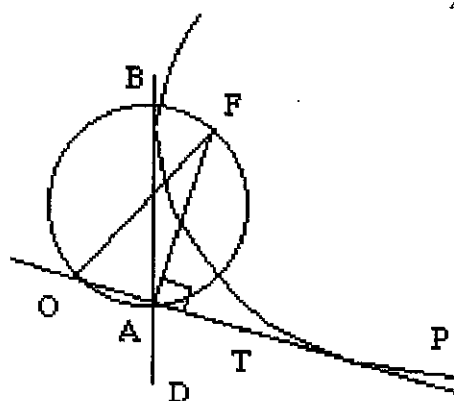
parabole. L'utilisation de l'un ou l'autre de ces points de vue peut alors relever des préférences personnelles...

(a) En géométrie algébrique élémentaire

On écrit que la droite d'équation $y = tx$ ($t \neq 0$) coupe P en un seul point, c'est-à-dire que l'équation du second degré en x : $x = (tx - 1)^2 + 1$ a une seule racine ; on annule son discriminant, on obtient une équation en t dont les racines sont $\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$; ces deux valeurs sont les nombres m et M cherchés.

(b) En géométrie différentielle

On écrit l'équation de la tangente au point (y, x) de la courbe graphe de la fonction $x = h(y) = (y-1)^2 + 1$, au moyen de la dérivée de h au point y , et on dit que cette tangente passe par O . On obtient $y^2 = 2$, on en déduit x , puis $\frac{y}{x}$.



(c) En géométrie ponctuelle

On détermine le foyer et la tangente au sommet de la parabole, et on utilise le fait que la projection du foyer F sur une tangente T est sur la tangente au sommet D , ce qui donne, pour déterminer la droite $T = (OA)$ par le point A , projection du foyer, la recherche de l'intersection du cercle Γ de diamètre OF avec D : on obtient deux points A et B .

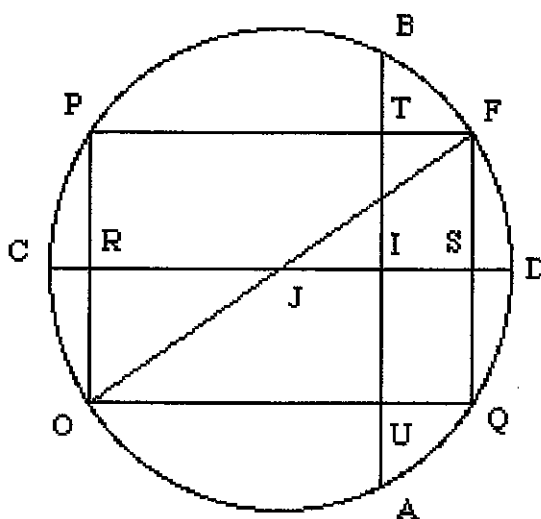
Reste à déterminer la pente des deux droites (OA) et (OB) , et là il faut des moyens de calcul. D'où la nécessité de l'une des deux étapes suivantes.

(c1) Calculs en géométrie analytique

Le foyer F a pour coordonnées $(\frac{5}{4}, 1)$, donc le cercle Γ a pour équation $x^2 + y^2 - \frac{5}{4}x - y = 0$; D a pour équation $x = 1$, donc les ordonnées de A et B sont solutions de l'équation $y^2 - y - \frac{1}{4} = 0$, donc valent $\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$. Ce sont les pentes cherchées, car les points A et B ont pour abscisses 1.

(c2) Calculs en géométrie numérique

La figure permettant de déterminer A et B est formée d'un rectangle $OPFQ$ inscrit dans le cercle de diamètre FO . La droite AB détermine alors un carré



$OPTU$, et on cherche la longueur $h = IB$, connaissant $RI = a$ et $IS = b$ (ici, $a = 1$ et $b = \frac{1}{4}$). Le théorème de Pythagore, la relation $IB^2 = CI \cdot ID$ et la relation de Chasles sur l'axe CD permettent de trouver $h^2 = \frac{a^2 + 4ab}{4}$, ce qui nous donne bien, ici, $h = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Les jeux de cadres dans la formation des professeurs d'école

Denis Butlen

équipe DIDIREM, IUFM de Créteil

Le but de cette contribution est d'explicitier comment nombre de formateurs de mathématiques utilisent les éléments théoriques élaborés par Régine Douady dans la formation des professeurs d'école.

Il s'agit d'un témoignage essayant de résumer un travail collectif de rationalisation et de diffusion des pratiques d'un ensemble de formateurs. Ce travail s'est fait en collaboration avec des chercheurs en didactique des mathématiques impliqués ou non dans la formation. Certains didacticiens ont par ailleurs pris comme objet d'étude ce travail (D. Butlen 1992 et 1994, C. Houdement 1995, A. Kuzniack 1994, M.L. Peltier 1995).

Mon intervention porte essentiellement sur la formation initiale mais je souligne dès maintenant que bien des situations mises au point pour la formation initiale sont utilisables et utilisées pour un public de formation continue. Cet exposé a pour titre : « Jeux de cadres dans la formation des professeurs d'école » mais il ne se limite pas à l'étude de l'utilisation des seuls jeux de cadres en formation. Il me paraît très difficile de séparer les situations qui mobilisent les jeux de cadres des situations mobilisant d'autres aspects de la théorie développée par Régine Douady, en particulier la dialectique entre outil et objet d'une part et entre ancien et nouveau d'autre part.

Si mon exposé porte ce titre, c'est pour souligner combien la notion de jeu de cadres est productrice de situations en formation initiale des professeurs d'école.

1 Introduction

La dialectique outil-objet et les jeux de cadres sont certainement avec la théorie des situations les deux grandes organisations théoriques de la didactique des mathématiques les plus utilisées par les formateurs de mathématiques intervenant dans le premier degré. Le nombre de documents publiés qui utilisent ces concepts pour élaborer des dispositifs ou des situations de formation en témoignent.

Dans cette contribution, je décris plusieurs niveaux d'utilisation comme outil de formation de la dialectique outil-objet et des jeux de cadres. Chaque utilisation est illustrée par quelques exemples.

Ce témoignage s'appuie sur des documents exposant des recherches comme le compte rendu d'un atelier lors de l'école d'été de Saint-Sauves (D. Butlen, C. Houdement, Marie-Lise Peltier, 1994) mais aussi sur des documents destinés aux formateurs comme les documents de travail pour la formation des enseignants publié par l'IREM de Paris 7 n°4 (D. Butlen, M.

Pezard, 199) ou n°9 (D. Butlen, M.L. Peltier, 199) ou encore divers articles extraits des documents édités par la COPIRELEM (actes de colloques, documents pour la formation en didactique des mathématiques des professeurs d'école, documents du formateur...)

2 Plusieurs exemples d'utilisation

Les jeux de cadres et plus généralement la dialectique outil-objet trouvent leur place dans la construction et l'organisation de la formation des PE à plusieurs niveaux.

2.1 Une première utilisation : la construction de nombreux dispositifs ou situations d'apprentissage pour les élèves de l'école primaire, outils de référence en formation

Les concepts élaborés par Régine Douady ont inspiré beaucoup d'activités destinées aux élèves de l'école primaire (ingénieries, manuels, recherches-action) qui, dans un second temps, sont devenues des outils de formation. Ce n'est évidemment pas une spécificité des seuls jeux de cadres, bien des situations importées directement ou inspirées de la théorie des situations partagent cette propriété. Mais cet aspect témoigne de la portée et de l'influence des idées développées par Régine Douady.

Je citerai notamment les recherches « développement » ou recherches « action » produites par beaucoup d'IREM et par l'INRP. Ces travaux ont donné lieu à des ouvrages de référence largement utilisés en formation comme ceux de la collection « ERMEL » par exemple.

Il est devenu difficile de tenir le compte des situations de ces ouvrages qui sont organisées, plus ou moins librement d'ailleurs, selon un schéma de type jeux de cadres.

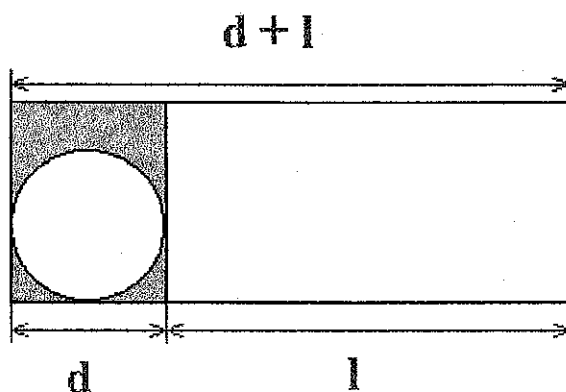
Cette utilisation en formation a été très rapide ; elle date de plus de vingt ans et a pour une part précédé la mise en forme de la théorie.

Je peux ici apporter un témoignage personnel qui remonte à 1981 et qui a marqué mon entrée dans la profession. Nommé à l'école normale de Versailles en septembre 1981, un collègue¹ m'a proposé d'introduire un stage de formation continue d'instituteurs par la recherche du rectangle de périmètre minimal et d'aire donnée. D'autres² proposaient de commencer la formation initiale des élèves-instituteurs par le traitement d'une situation mise au point par une équipe de l'INRP (1981) permettant d'étudier comment des élèves de CM pouvaient résoudre dans plusieurs cadres différents un autre problème d'optimisation connu sous le nom de la « boîte à problèmes ».

¹ Yves Clavier, professeur de mathématiques à l'école normale de Versailles

² Jeanne Bolon et Yves Clavier, professeurs de mathématiques à l'école normale de Versailles

Le problème est le suivant : « Découper dans une feuille de bristol de 10 cm sur 32 cm, le fond et le tour d'une boîte de 10 cm de hauteur et dont le diamètre est le plus grand possible. »



$$d + l = 32$$

Les élèves de CM2 résolvent ce problème de proportionnalité en faisant intervenir des connaissances relevant des cadres géométrique avec mesure, numérique ou graphique. Les étudiants peuvent également mobiliser des connaissances algébriques.

Enfin, dans une autre formation initiale, une autre collègue³ proposait de commencer par l'étude d'un autre problème d'optimisation : celui de la recherche du triangle d'aire maximale, inscrit dans un cercle et dont un (ou deux) sommet(s) est (sont) fixés. La résolution de ce problème pouvait appeler là encore plusieurs cadres : géométrique mais aussi numérique (trigonométrie, suites numériques)...

A l'époque, en tant que nouveau formateur, je dois avouer avoir été quelque peu dérouté par ses propositions, propositions qui allaient occasionner des lectures...

Nous étions loin d'analyser les stratégies de formation des professeurs d'école normale avec la grille mise au point par Alain Kuzniack (1994) dans sa thèse mais les jeux de cadres étaient déjà là... Si nous nous référons à sa typologie des stratégies des formateurs (reprise et développée ensuite par Catherine Houdement), nous hésitions à cette période entre monstration et homologie.

Ces situations de formation s'appuyant sur des jeux de cadres et construites, pour les élèves de l'école élémentaire, se sont révélées particulièrement résistantes ; elles ont été longtemps utilisées et pour certaines d'entre elles le sont encore. Cette résistance à l'obsolescence constitue une des caractéristiques communes à beaucoup de situations de formation relevant plutôt de l'homologie et organisées selon un schéma de type dialectique outil-objet ou de jeux de cadres.

2.2 Les jeux de cadres, outil permettant au formateur de construire un dispositif de formation ayant pour but de réorganiser et compléter les connaissances mathématiques des étudiants

³ Michèle Artigue, professeur des universités, IREM de Paris 7, Université de Paris 7

Rappelons les contraintes institutionnelles de la formation des professeurs d'école ainsi que le profil des étudiants. Si l'entrée dans les mathématiques en première année est facilitée par la nécessité de préparer les épreuves du concours – du moins jusqu'à cette année- ceux-ci ont très majoritairement suivi des études supérieures non scientifiques. Leurs passés mathématiques sont très divers, mais le plus souvent ces étudiants présentent d'importantes lacunes, voire des blocages dans cette discipline. Le souci premier du formateur est donc de les réconcilier avec les mathématiques, puisqu'ils vont être amenés à les enseigner dès leur sortie de l'IUFM.

Compte tenu de notre public, notre expérience de formateur nous conduit à choisir, des approches diversifiées des thèmes mathématiques du programme, pour leur permettre de se confronter « sans crainte » à des notions qu'ils ont déjà rencontrées dans leur scolarité antérieure et sur lesquelles ils peuvent mobiliser des connaissances. Ces approches sont le souvent différentes de celles qui ont contribué à "bloquer" ces futurs maîtres.

Il nous semble alors possible de redonner du sens à des notions qui n'étaient souvent pour eux que des mots vides de sens ou des écritures « magiques » et de les aider à accéder à une vue plus globale des mathématiques qu'ils doivent enseigner. Plus précisément c'est un moyen de leur faire percevoir les liens qui unissent les différents thèmes, les passerelles entre les diverses notions et donc de les amener à prendre du recul par rapport au savoir à enseigner.

Les changements et les jeux de cadres sont ici des outils centraux. Illustrons ce propos par deux types de situations.

2.2.1 *Des situations d'homologies construites à partir d'un problème dont la résolution est favorisée par un jeu de cadres*

J'évoque deux situations: pavages et PGCD⁴ (cf. annexe 1) d'une part, la boîte du pâtissier⁵ (annexe 2) d'autre part, élaborées par Marie-Lise Peltier et Catherine Houdement (1991 et 1992). Ces situations font partie maintenant des outils partagés et utilisés par les PIUFM⁶.

2.2.1.1 **La situation « Pavages et PGCD »**

Il s'agit selon les auteurs de : « *proposer aux étudiants une situation durant laquelle ils vont "faire des mathématiques" : résoudre un problème d'apparence géométrique en utilisant un outil mathématique numérique, le PGCD, et prétexte à une réflexion plus poussée sur la "nature" des nombres-mesures (rationalité et irrationalité, incommensurabilité de deux réels).* »

Cette situation est avant tout pour les auteurs une situation d'homologie : « *A l'occasion certaines notions de didactique peuvent être pointées dans cette activité (notions*

⁴ In COPIRELEM *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, Tome 2, pp37-43, IREM Paris 7, université Denis Diderot Paris 7, Paris, France

⁵ In COPIRELEM *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, Tome 1, pp131-134, IREM Paris 7, université Denis Diderot Paris 7, Paris, France

⁶ PIUFM : professeur intervenant dans la formation des Professeurs d'Ecole

d'outil et d'objet, variable didactique, contextualisation, ...), mais elle reste à visée essentiellement mathématique. »

Un scénario a été publié en 1991 dans les actes de Cahors ; il est donc daté. Les objectifs didactiques sont sans doute davantage développés aujourd'hui dans la formation initiale des professeurs d'école.

Le problème général présenté aux étudiants est le suivant : *« il s'agit de paver un rectangle de dimensions données avec des carrés tous exactement superposables, les plus grands possible. Nous appelons « paver » le fait de placer les carrés bord à bord, sans chevauchement, sans trous, sans débordement. On pourrait encore dire qu'il s'agit de réaliser un "carrelage" du rectangle. »*

Les dimensions varient progressivement. Elles sont entières dans une première phase (42 cm et 96 cm puis 462 et 165 ; 1620 et 1650 ; 105 et 176 ; 67320 et 245700) rationnelles dans un second temps (72,45 et 61,2 ; 21/15 et 49/14...) Le problème est ensuite posé dans l'ensemble des irrationnels et débouche sur des réflexions sur l'incommensurabilité.

Les auteurs analysent l'activité des étudiants du double point de vue mathématique et didactique.

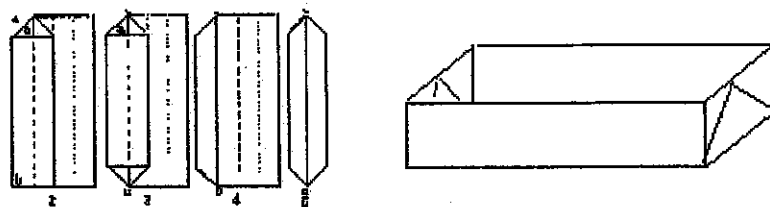
Ils dégagent les notions mathématiques susceptibles d'être étudiées à cette occasion : : *« approche géométrique de la notion de PGCD, différentes méthodes permettant de le calculer, réinvestissement de connaissances numériques telles que critères de divisibilité, différenciation "en acte" des ensembles numériques N , D , Q , R , modélisation enfin du problème en accord avec la réalité pour N , D et Q , en désaccord avec la réalité pour R , limites de l'approximation. »*

Ils soulignent que diverses notions didactiques peuvent être pointées dans cette séquence, en particulier l'aspect outil d'une notion. *« Le PGCD de deux nombres est introduit ici en tant qu'outil de résolution du problème et non présenté en tant qu'objet de savoir par une définition. Ceci permet de donner du sens à la notion de PGCD. A l'issue de la phase d'institutionnalisation, le PGCD a acquis un statut d'objet mathématique ayant sa place dans "l'édifice" des connaissances mathématiques. »*

2.2.1.2 La situation de « la boîte du pâtissier »

Il s'agit de *« déterminer les dimensions de la feuille servant au pliage ci-dessous et permettant d'obtenir une boîte à fond carré. »*

Cette situation peut déboucher sur l'étude de fonctions de R^2 dans R^2 ou R^3 .



Cette situation a fait l'objet de plusieurs études. Dans le tome III⁷ des documents pour la formation en didactique des mathématiques des professeurs d'école (COPIRELEM, Colmar, 1993), nous étudions, avec Marie-Lise Peltier, les diverses procédures de résolution mises en œuvre par les étudiants et les conditions de leurs réussites notamment grâce à des changements de cadres incités par certaines contraintes plus ou moins explicites figurant dans les consignes : passage du cadre numérique à un cadre algébrique ; d'un cadre géométrique à un cadre numérique, d'un cadre géométrique à un cadre algébrique...

Les deux situations que je viens d'évoquer permettent de faire faire réellement des mathématiques non élémentaires (fonctions de plusieurs variables dans la seconde situation, fractions continues dans la première ...) à des étudiants faibles en mathématiques. Ce sont notamment des jeux de cadres et une dialectique entre ancien et nouveau qui permet d'obtenir ce résultat.

2.2.2 Des situations pouvant se traiter dans différents cadres et selon le cadre choisi appelant des notions mathématiques différentes

J'évoquerai ici une troisième situation élaborée par M.L. Peltier et C. Houdement, publiée dans le tome 2 des documents pour la formation en didactique des mathématiques des professeurs d'école (Pau, 1992), intitulée « Aire de surface plane⁸ » (cf. annexe 3).

La situation de départ consiste à trouver tous les partages possibles d'une feuille d'annuaire de téléphone en deux parties directement superposables, sans perte ni recollage.

Ce problème a pour but de réorganiser et compléter les connaissances des étudiants. Même si l'on ne peut pas parler de jeux de cadres dans cette activité, elle offre l'occasion de faire le lien entre différentes connaissances prenant du sens dans des cadres différents, de faire le lien entre ces différents cadres et le fonctionnement de ces connaissances.

De plus, ce problème débouche sur l'étude de rapports existant entre cadre mathématique et champ conceptuel. En effet, la même situation de départ peut être utilisée pour traiter de la symétrie centrale, des aires, des isométries, des fractions.

⁷ In COPIRELEM (1994) *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, Tome 3, pp 69-78, Actes du stage de formation de la Direction des Ecoles FCAH02 CE, Colmar, IREM de Paris 7, Université de Paris Denis-Diderot-Paris7, Paris, France

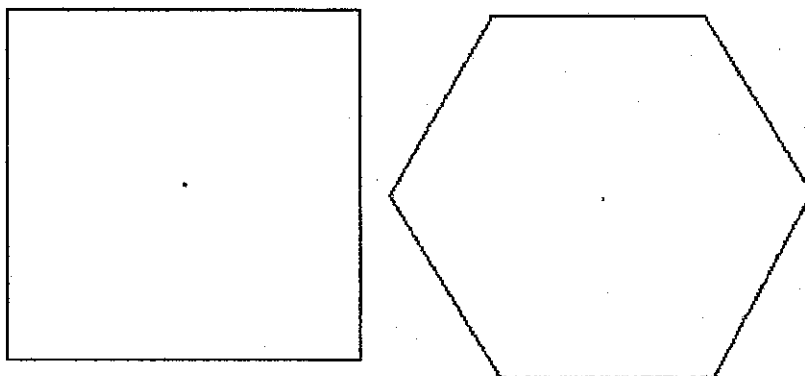
⁸ In COPIRELEM (1993) *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, Tome 2, pp 59-64, Actes du stage de formation de la Direction des Ecoles FCA 901 CE, Pau, IREM de Paris 7, Université de Paris Denis-Diderot-Paris7, Paris, France

Elle se prête particulièrement à la mise en œuvre d'une dialectique entre ancien et nouveau. Les étudiants mobilisent de l'ancien implicite (la symétrie centrale), cet ancien va (re) devenir du nouveau, grâce à des décontextualisations des institutionnalisations locales et progressives.

Enfin, elle sert d'outil pour (re) construire du nouveau (rotation centrale d'angle $2\pi/3$ et ce à partir du prolongement suivant :

« En partant du centre, partager ce carré en quatre parties directement superposables, sans perte ni recollage. »

« En partant du centre, partager cet hexagone en six parties directement superposables, sans perte ni recollage. »



M.L. Peltier souligne cet aspect ainsi : *« Rien n'est vraiment nouveau pour les professeurs d'école ; les notions de symétrie orthogonale, d'aire, de fractions, de déplacements (symétrie centrale et rotation centrale) ont déjà été étudiées au collège mais elles sont devenues ou sont restées floues. Elles sont souvent confondues avec d'autres bien que reconnues partiellement en situations. Des situations organisées selon un schéma de type dialectique outil-objet permet à la fois de revisiter ces notions en leur redonnant du sens. Une dialectique entre ancien implicite, ancien explicite, nouveau explicite permet de travailler à nouveau ces notions, de les réorganiser tout en les resituant dans une organisation plus vaste : celles des branches des mathématiques où elles s'inscrivent.*

Il est peu probable que des situations plus standards permettraient d'obtenir aussi rapidement ce résultat. »

2.3 Les jeux de cadres, contenu d'enseignement s'inscrivant dans une stratégie de transposition, objet d'enseignement en formation

Nos étudiants doivent se former dans toutes les disciplines de l'école. Il est donc plus difficile d'exiger d'eux abondance de lectures complémentaires au cours. Il est donc nécessaire de les confronter, à l'intérieur du cours, au maximum d'interrogations mathématiques mais aussi didactiques.

Pour cela, le formateur est amené à construire des situations spécifiques dont le but essentiel est de dégager par une mise en situation des étudiants et par son analyse a posteriori

certaines caractéristiques de diverses notions didactiques. Bien évidemment, aucune situation ne peut être "exemplaire" d'un concept de didactique et d'un seul, c'est par l'analyse et la comparaison de plusieurs situations que le sens des différents concepts de didactique pourra se construire.

Je continue à utiliser en formation initiale mais aussi lors d'un enseignement de didactique des mathématiques (licence de sciences de l'éducation) des situations se prêtant à cet objectif (D. Butlen, M. Pezard 1991, cf. annexe 4). Bien que les propositions de progression sur la multiplication proposées dans les manuels scolaires actuels aient évoluées depuis, ces situations permettent toujours d'aborder ces notions didactiques.

Voici, à titre d'exemple, une situation de formation construite à partir d'une situation d'introduction des écritures multiplicatives au CE1⁹ (D. Butlen, M. Pezard, 1991).

Il s'agit, à partir de l'analyse d'extraits d'une séance d'introduction des écritures multiplicatives au CE1 de répondre aux questions suivantes :

1. Déterminer les connaissances en jeu dans la situation.
2. Expliciter le choix didactique justifiant la présentation de la notion.
3. Y-a-t-il plusieurs cadres ? Si oui, lesquels ?
4. Déterminer les variables de la situation.
5. Faire une analyse de la tâche de l'élève.
6. Commenter les différentes phases du déroulement.
7. Prolongement : quels exercices de renforcement ?

La situation est une situation de communication inspirée des travaux de l'équipe de didactique de Bordeaux :

« Le groupe émetteur doit envoyer un message au groupe récepteur lui permettant de retrouver le plus rapidement possible et le plus facilement possible la grille correspondante dans un lot de grilles. Ce message doit être le plus court possible et doit désigner le nombre de carreaux de la grille. »

L'analyse de cette situation débouche notamment sur un exposé du professeur centré sur les jeux de cadres.

2.4 Les jeux de cadres et la dialectique outil-objet, outil d'analyse d'ingénieries et de divers documents pour l'élémentaire.

Une organisation d'enseignement en terme de dialectique outil-objet nous paraît un bon outil de construction d'ingénieries, comme l'ont prouvé différentes recherches, mais la durée de formation ne nous permet généralement pas d'en faire construire par les étudiants eux-mêmes. C'est aussi un outil d'analyse et de lecture non seulement des ingénieries mises

⁹ In BUTLEN D., PEZARD M. (1991), Un enseignement de didactique des mathématiques à des futurs instituteurs-maîtres-formateurs, *Document n°4 pour la formation des enseignants*, pp 25-39, IREM de Paris 7, Université de Paris Denis-Diderot-Paris7, Paris, France

au point par des didacticiens, mais, plus généralement, des divers documents et ouvrages pédagogiques existants (et c'est à partir des ouvrages que travailleront nos étudiants).

Les concepts d'outil et d'objet permettent de préciser le statut des connaissances dans telle activité ou tel exercice, d'analyser leur fonctionnement. Le repérage des cadres dans lesquels est posé le problème et dans lesquels il peut être traité, l'étude approfondie des outils disponibles pour les élèves dans chacun des cadres sont nécessaires pour pouvoir optimiser le rôle des changements de cadres dans la résolution du problème posé.

Pour décider de conserver ou d'adapter valablement une situation prise dans un écrit (par exemple un manuel scolaire), le maître doit connaître le statut de la connaissance en jeu. Sinon toute modification risque de dénaturer l'activité et de déséquilibrer la progression dans laquelle cette activité s'inscrit.

En résumé la prise de conscience du fonctionnement des connaissances en terme d'outil et d'objet nous semble augmenter la liberté du maître dans ses choix.

La situation « aire de surfaces planes » déjà évoquée illustre bien cette dernière utilisation.

Avant de conclure, je tiens à préciser que la présentation adoptée pour ce témoignage, risque de présenter sous un aspect réducteur les situations évoquées, notamment celles de C. Houdement et Marie-Lise Peltier.

J'ai souvent parlé de situations d'homologie ; en fait, ces situations s'inscrivent dans une stratégie mélangeant monstration, homologie et transposition. Comme les scénarios le montrent, leur traitement débouche souvent (voire toujours) sur plusieurs types d'institutionnalisation. Ces stratégies permettent en particulier au formateur de (re) construire rapidement une épistémologie des notions mathématiques ainsi convoquées.

3 Des jeux de cadres mathématiques au jeux entre domaines disciplinaires

Je pense que l'intérêt manifesté par les formateurs de professeurs d'école pour les jeux de cadres réside aussi dans un début de réponse, contextualisé dans le domaine mathématique, aux problèmes posés par l'interdisciplinarité et la polyvalence.

Les professeurs d'école, pour encore une durée indéterminée mais sans doute longue, sont appelés à enseigner tous les domaines disciplinaires de l'école élémentaire. Cette polyvalence n'est pas sans poser de nombreux problèmes en formation : temps de formation trop court, impasses inévitables sur certains contenus disciplinaires, nécessité d'unifier en partie les différentes formations disciplinaires, liens entre contenus et méthodes...

L'analyse de situations construites sur un schéma de type dialectique outil-objet et jeux de cadres pourrait permettre d'initier une réflexion sur des situations faisant le lien entre différents champs disciplinaires.

Bibliographie

BELOUZE B., BOUSEY E., CHAZET B., (1981) une boîte à problèmes, INRP, *Ateliers de pédagogie*, Activités Mathématiques, paris, France

- BUTLEN D., PEZARD M. (1991), Un enseignement de didactique des mathématiques à des futurs instituteurs-maîtres-formateurs, *Document n°4 pour la formation des enseignants*, IREM de Paris 7, Université de Paris Denis-Diderot-Paris7, Paris, France
- BUTLEN D., HOUEMENT C., PELTIER M.L. (1993), Etude de situations construites selon un schéma de type dialectique outil-objet en formation des professeurs d'école, In ARDM, *Actes de la septième école d'été de didactique des mathématiques*, pp113-116, IREM de Clermont-Ferrand, Clermont-Ferrand, France
- BUTLEN D., PELTIER M.L. (1994), L'état de la réflexion sur la place et le rôle d'un enseignement spécifique de didactique en formation des professeurs d'école, *Document n°9 pour la formation des enseignants*, IREM de Paris 7, Université de Paris Denis-Diderot-Paris7, Paris, France
- COPIRELEM (1991) *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, Tome 1, Actes du stage de formation de la Direction des Ecoles FCA 905 CE, Cahors, IREM de Paris 7, Université de Paris Denis-Diderot-Paris7, Paris, France
- COPIRELEM (1993) *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, Tome 2, Actes du stage de formation de la Direction des Ecoles FCA 901 CE, Pau, IREM de Paris 7, Université de Paris Denis-Diderot-Paris7, Paris, France
- COPIRELEM (1994) *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, Tome 3, Actes du stage de formation de la Direction des Ecoles FCAH02 CE, Colmar, IREM de Paris 7, Université de Paris Denis-Diderot-Paris7, Paris, France
- DOUADY R., (1987) jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7/2, pp5-31, Ed La Pensée Sauvage, Grenoble, France
- DOUADY R., (1992) Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement, *Repères-IREM*, n°6, Topiques Editions, Pont à Mousson, France
- DOUADY R., (1994) Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir, *Repères-IREM*, n°15, Topiques Editions, Pont à Mousson, France
- KUZNIAK A. (1994), Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de mathématiques de maîtres du premier degré, Doctorat de l'université de Paris 7, spécialité : didactique des mathématiques, IREM Paris 7, Université de Paris Denis-Diderot-Paris7, Paris, France
- HOUEMENT C. (1995), Projet de formation des maîtres du premier degré en mathématiques : programmation et stratégies, Doctorat de l'université de Paris 7, spécialité : didactique des mathématiques, IREM Paris 7, Université de Paris Denis-Diderot-Paris7, Paris, France
- HOUEMENT C., KUZNIAK A. (1996), Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16/3, Ed La Pensée Sauvage, pp289-322, Grenoble, France
- INRP (1990-1998) *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire*, Ed Hatier, Paris France
- PELTIER M.L. (1995), La formation initiale, en mathématiques, des professeurs d'école : « entre conjecture et éternité », Doctorat de l'université de Paris 7, spécialité : didactique des mathématiques, IREM Paris 7, Université de Paris Denis-Diderot-Paris7, Paris, France

Titre : Pavage et PGCD

Auteurs : Marie-Lise PELTIER et Catherine HOUEMENT (Pr. I.U.F.M. Rouen)

Type : Activités en formation initiale ou continue

Résumé : à partir d'une situation problème de pavage de rectangles, dégager les notions de PGCD, de partie aliquote commune, d'irrationalité, puis pointer quelques concepts de didactique : aspects outil-objet d'une notion, variable didactique, seuil épistémologique.

Origine : problème tiré de *Problème ouvert et Situation Problème* (IREM de Lyon No 64, 1988).

Durée prévue : deux séances de trois heures.

En annexe : développements mathématiques.

PAVAGE ET PGCD

I - OBJECTIFS

Objectifs mathématiques

Il s'agit de proposer aux étudiants une situation durant laquelle ils vont "faire des mathématiques" : résoudre un problème, d'apparence géométrique, en utilisant un outil mathématique numérique, le PGCD, et prétexte à une réflexion plus poussée sur la "nature" des nombres-mesures (rationalité et irrationalité, incommensurabilité de deux réels).

Objectifs didactiques

A l'occasion certaines notions de didactique peuvent être pointées dans cette activité (notions d'outil et d'objet, variable didactique, contextualisation,...), mais elle reste à visée essentiellement mathématique.

II - ACTIVITÉ

Problème général présenté aux étudiants

"Il s'agit de paver un rectangle de dimensions données avec des carrés tous exactement superposables, les plus grands possible. Nous appelons "paver" le fait de placer les carrés bord à bord, sans chevauchement, sans trous, sans débordement.

On pourrait encore dire qu'il s'agit de réaliser un "carrelage" du rectangle."

Phase 1

rectangles de dimensions entières

Objectif

Faire émerger la notion de PGCD en tant qu'outil de résolution du problème.

Consigne 1

"Vous devez carreler un rectangle de dimensions 42 cm sur 96 cm."

Les diverses propositions sont recensées. Si l'échec est total, la nouvelle consigne est de carreler un rectangle de 8 cm sur 12 cm, afin de permettre un dessin effectif du rectangle et de ses carrelages.

Remarques

Les étudiants proposent généralement, dans un premier temps des carrés de 2 cm sur 2 cm, et progressivement essaient d'autres valeurs.

Certains étudiants ne sont pas convaincus que des carrés de 6 cm sur 6 cm sont les plus grands possible répondant à la question, ils essaient des valeurs décimales non entières supérieures à 6.

Consigne 2 :

reprise de la consigne 1 avec divers rectangles :

462 cm sur 165 cm

pour qu'il soit impossible de faire le dessin

1620 cm sur 1650 cm

pour mettre en évidence une propriété du PGCD.

105 cm sur 176 cm

pour dégager la notion de nombres premiers entre eux.

- 67320 cm sur 245700 cm

pour faire évoluer les procédures de recherche et se libérer des unités.

Synthèse

1 - Quelles procédures ont été utilisées pour résoudre le problème ?

- Le tâtonnement et la recherche de diviseurs successifs.
- L'utilisation des dessins.
- La décomposition des nombres en facteurs premiers, soit par décompositions multiplicatives successives, soit avec l'algorithme traditionnel.

2 - Quelle propriété vérifie le côté du carré répondant à la question ?

- C'est un diviseur des deux nombres, pour que l'on puisse "paver"
- C'est le plus grand diviseur des deux nombres, pour que ce soit le carré le plus grand possible.

La notion mathématique ainsi dégagée est celle de **plus grand diviseur commun** à deux nombres.

3 - Quelles propriétés ou définitions ont déjà été rencontrées ?

- $\text{PGCD}(ka, kb) = k \text{ PGCD}(a, b)$
- Si $\text{PGCD}(a, b) = 1$, a et b sont dits **premiers entre eux** (on dit aussi **étrangers**).

Institutionnalisation sur les points suivants

- Définition du **PGCD** de deux nombres entiers.
- Définition de la notion de **nombres entiers premiers entre eux** ("étrangers")
- Recensement des **méthodes de recherche du PGCD** de 2 nombres entiers :

• **1ère méthode**, utilisant la structure factorielle de N : décomposition en facteurs premiers des deux nombres.

• **2ème méthode**, utilisant la structure euclidienne de N : algorithme d'Euclide.

- Présentation géométrique de la méthode des soustractions successives (utilisant la propriété si d/a et d/b alors $d/a-b$) : antéphère (cf. annexe 1).
- Algorithme d'Euclide sous sa forme usuelle. Traitement informatique de cet algorithme.
- Lien avec les fractions continues.

Phase 2 :

rectangles de dimensions **non entières**.

On étend maintenant le problème de l'existence d'un carré le plus grand possible permettant de paver un rectangle de dimensions quelconques.

Objectifs

- Faire émerger la notion de "partie aliquote commune" à deux rationnels.
- Poser le problème de irrationalité de certains nombres.

Consignes successives

- Paver un rectangle de 72.45 sur 61.2.
- Paver un rectangle de 21 15 sur 49 14
- Paver un rectangle de 25 3 sur 40 11.

Recensement des résultats et des procédures utilisées.

- 72,45 et 61,2 sont remplacés par 7245/100 et 6120/100 : des méthodes utilisées pour les entiers sont réinvesties.

- 21/15 et 49/14 remplacés par 7/5 et 7/2 :
or $1/5 = (1/10) \times 2$ et $1/2 = (1/10) \times 5$: donc 7/10 convient.

- 25/3 et 40/11 sont remplacés par 275/33 et 120/33 : des méthodes utilisées pour les entiers sont réinvesties (soit décomposition en facteurs premiers, soit algorithme d'Euclide).

Synthèse

1 Les décimaux sont "naturellement" transformés en fractions décimales pour travailler à nouveau sur les entiers : D^+ se trouve naturellement plongé dans Q^+ .

2 L'extension à $Q^+ - D^+$ se fait "en douceur", le dénominateur commun retrouve son sens et la "commune mesure" sa définition.

3 Le côté du carré solution est un nombre ayant des propriétés comparables à celles du PGCD lorsque les dimensions étaient entières, c'est la commune mesure aux deux dimensions du rectangle ou encore la partie aliquote commune aux deux nombres qui les mesurent.

Nouvelle consigne

"Est-il toujours possible de paver un rectangle avec des carrés?"

Généralement la réponse des étudiants est oui. Ceci va permettre d'introduire la notion d'incommensurabilité de certaines grandeurs et de comprendre qu'il n'est par exemple pas possible de paver un rectangle de dimension 1 et $\sqrt{2}$ avec des carrés.

Ici il est possible de donner un aperçu historique et philosophique de ce problème car la méthode décrite dans le livre X des Elements d'Euclide est analogue à celle de la recherche du PGCD par soustractions successives : "étant données deux grandeurs inégales et la plus petite retranchée de la plus grande, si le reste ne mesure jamais le reste précédent, les deux grandeurs sont incommensurables".

On peut également proposer une démonstration géométrique de l'incommensurabilité de 1 et de $\sqrt{2}$ s'appuyant sur cette propriété et prolonger cette méthode au développement en fraction continue de $\sqrt{2}$ (cf. annexe 2).

Remarque

Le problème de l'incommensurabilité de 1 et de $\sqrt{2}$ revient à celui de irrationalité de $\sqrt{2}$, mais il est à rappeler que deux nombres irrationnels peuvent mesurer des grandeurs commensurables par exemple $3\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ puisque leur rapport est 3.

Exemples d'autres rectangles "classiques" que l'on ne peut théoriquement pas paver avec des carrés :

- les "rectangles d'or"
- les rectangles correspondant aux formats standard des feuilles de papier (A4, A3, A2...).

Il est intéressant de noter la différence entre le problème théorique et la manipulation pratique, car il est évidemment possible matériellement de paver la feuille A4 avec des carrés puisqu'il s'agit alors de travailler sur des valeurs approchées décimales qui sont donc toujours "commensurables".

Institutionnalisation

Pour traiter le problème du pavage par des carrés d'un rectangle de dimensions décimales ou rationnelles, la méthode est identique à celle utilisée pour les entiers.

La notion dégagée est alors celle de "partie aliquote commune" à deux rationnels (ou deux décimaux).

Le problème n'a pas de solution si les deux dimensions sont incommensurables, c'est à dire si les deux nombres qui les mesurent ont un rapport irrationnel.

ANALYSE DE L'ACTIVITÉ

1 - Analyse mathématique

- Notion de PGCD, avec approche de diverses méthodes pour le trouver. Vision "géométrique" du PGCD.

- Réinvestissement de connaissances numériques telles que critères de divisibilité,...

- Différenciation de N, D, Q, R "en acte".

- Modélisation du problème en accord avec la réalité pour N, D et Q, en désaccord avec la réalité pour R. Limites de l'approximation.

2 - Analyse didactique

Diverses notions didactiques peuvent être pointées dans cette séquence.

- L'aspect outil d'une notion

(dans la construction des connaissances par dialectique outil-objet).

Le PGCD de deux nombres est introduit ici en tant qu'outil de résolution du problème et non présenté en tant qu'objet de savoir par une définition. Ceci permet de donner du sens à la notion de PGCD.

A l'issue de la phase d'institutionnalisation, le PGCD a acquis un statut d'objet mathématique ayant sa place dans "l'édifice" des connaissances mathématiques.

- Variable didactique

- dans la phase 1, le choix des dimensions des différents rectangles pour faire évoluer les procédures de calcul du côté du carré est un exemple de variable didactique.

- dans la phase 2, les dimensions du rectangle imposent des méthodes de démonstration de niveaux fort différents : à ce titre ce sont des variables didactiques.

- La notion de preuve :

cette situation permet de montrer les limites de la preuve pragmatique et la nécessité de preuves intellectuelles.

- La "contextualisation" d'une notion

(ici celle de PGCD dans la phase 1) : cette contextualisation est à la charge du maître, c'est sa pertinence qui assurera la prise de sens de la notion par les élèves.

ANNEXE 1

Seconde méthode (utilisation de la structure euclidienne)

convention d'écriture :

p/n signifie ici : p est un diviseur de n

Propriété utilisée :

Si d/a et d/b alors $d/(a-b)$
car $a = nd$, $b = md$, et donc $a - b = (n - m)d$.

Cette méthode est présentée dans les éléments d'Euclide (300 av. J.C.) au livre VII mais semble être connue depuis l'époque pythagoricienne (540 av. J.C.)

Position du problème avec le rectangle 96×42 :

Pour $a > b$, si on peut paver le rectangle a sur b , on peut paver le carré b sur b et donc aussi le rectangle b sur $a - b$, et ainsi de suite...

Soustractions successives

Si $d/96$ et $d/42$ alors $d/(96 - 42)$ soit $d/54$

Si $d/54$ et $d/42$ alors $d/(54 - 42)$ soit $d/12$

Si $d/42$ et $d/12$ alors $d/(42 - 12)$ soit $d/30$

Si $d/30$ et $d/12$ alors $d/(30 - 12)$ soit $d/18$

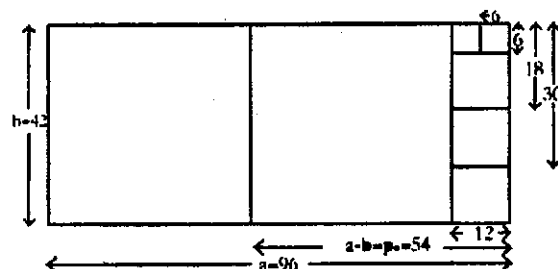
Si $d/18$ et $d/12$ alors $d/(18 - 12)$ soit $d/6$

Si $d/12$ et $d/6$ alors $d/(12 - 6)$ alors $d = 6$.

Ce procédé porte le nom d'antéphérèse.

Pourquoi ce procédé a-t-il une fin ?

Toutes les différences obtenues sont nécessairement inférieures à 96 et il n'y a qu'un nombre fini d'entiers entre 0 et 96 donc au bout d'au plus 96 soustractions, 2 restes seront égaux.



On peut "améliorer" ce procédé en effectuant la division euclidienne de 96 par 42 :

$96 = 2 \times 42 + 12$; $d/96$ et $d/42$ donc $d/12$

$42 = 3 \times 12 + 6$; $d/42$ et $d/12$ donc $d/6$

$12 = 2 \times 6$; donc $d = 6$

C'est l'algorithme d'Euclide que l'on peut définir par :

$$\begin{aligned} \text{pgcd}(a, 0) &= a \\ \text{pgcd}(a, b) &= \text{pgcd}(b, a - bq) \\ \text{et } \text{pgcd}(a, b) &= r_n, \text{ dernier reste non nul.} \end{aligned}$$

C'est une méthode récursive facile à traiter en informatique :

```
ordonner a et b
si b = 0
  alors pgcd(a, b) = a
  sinon pgcd(a, b) = pgcd(b, a mod b)
```

(Le procédé a une fin car la suite des restes est une suite d'entiers positifs strictement décroissante)

Lien avec les fractions

$$\frac{96}{42} = 2 + \frac{12}{42} = 2 + \frac{1}{\frac{42}{12}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{6}{12}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}$$

Cette décomposition est due à l'Hindou Arvâbhata (500 ap. JC)

ANNEXE 2

Dans le livre X, Euclide utilise pour démontrer l'incommensurabilité de 2 grandeurs une méthode analogue à celle de la recherche du pgcd par soustractions successives :

"Etant donné 2 grandeurs inégales et la plus petite retranchée de la plus grande, si le reste ne mesure jamais le reste précédent, les 2 grandeurs sont incommensurables".

On s'arrête dès que l'on trouve deux restes successifs p_n et p_{n+1} qui se trouvent dans le même rapport que les grandeurs initiales a et b .

$\frac{a}{b} = \frac{p_n}{p_{n+1}}$; les 2 grandeurs sont alors incommensurables.

Démonstration

Supposons qu'il existe n tel que $\frac{p_n}{p_{n+1}} = \frac{a}{b}$

(a et b non nuls)

alors, en continuant les soustractions successives on obtiendra 2 nouveaux restes p_m

et p_{m+1} tels que $\frac{p_n}{p_{n+1}} = \frac{p_m}{p_{m+1}}$

En effet, $\frac{a}{b} = \frac{p_n}{p_{n+1}}$ donc $\frac{a}{p_n} = \frac{b}{p_{n+1}} = \frac{1}{k}$

D'où $p_n = ka$, $p_{n+1} = kb$

et $p_{n+2} = p_n - p_{n+1} = ka - kb = k(a-b) = kp_0$

et $p_{n+l} = kp_{l-2}$ pour $l \geq 2$

La suite de nombres suivante est "pseudo-périodique" :

$b, p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, \dots, p_{2n+1}, p_{2n+2}, \dots$
 $b, p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, ka, kb, kp_0, \dots, kp_n, kp_{n+1}, \dots$
 $b, p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, ka, kb, kp_0, \dots, k^2a, k^2b, \dots$

$$(p_{n+r} = kp_{r-2})$$

$$\text{d'où } \frac{p_{2n+2}}{p_{2n+3}} = \frac{kp_n}{kp_{n+1}} = \frac{p_n}{p_{n+1}} = \frac{a}{b}$$

et d'une façon générale

$$\frac{p_{n+a(n+2)}}{p_{n+a(n+2)+1}} = \frac{a}{b}$$

Montrons qu'alors on ne pourra jamais trouver deux restes successifs égaux.

Soit n le plus petit entier tel que $\frac{p_n}{p_{n+1}} = \frac{a}{b}$

Supposons qu'il existe s tel que $\frac{p_s}{p_{s+1}} = 1$

Alors nécessairement $s > n+1$. On divise $s-n$ par $n+2$

$$q(n+2) < s-n < (q+1)(n+2)$$

$$s-n = q(n+2) + r \text{ avec } r < n-2$$

$$p_s = p_{n+r+q(n-2)} = k^q p_{n+r} = k^{q-1} p_{r-2}$$

$$\text{Alors } \frac{p_s}{p_{s+1}} = \frac{k^q p_{n+r}}{k^q p_{n+r+1}} = \frac{p_{n+r}}{p_{n+r+1}} = \frac{p_{r-2}}{p_{r-1}} =$$

ce qui est contradictoire.

Donc a et b sont incommensurables.

$$a = \sqrt{2}$$

$$b = 1$$

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

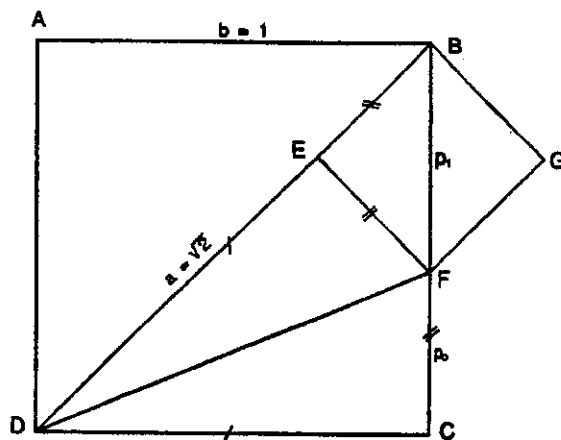
$$p_0 = a - b = \sqrt{2} - 1$$

$$p_1 = b - p_0 = 1 - (\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2} = \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)$$

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2}$$

On en déduit que 1 et $\sqrt{2}$ sont incommensurables.

Démonstration géométrique : antéphérèse



$$a = BD$$

$$b = BC = DE$$

La perpendiculaire en E à DB coupe BC en F

$$p_0 = a - b = BD - BC = BD - DE = BE$$

$$p_1 = b - p_0 = BC - BE = BC - FC = BF$$

Les triangles rectangles EDF et CDF sont isométriques car ils ont l'hypoténuse commune et un côté de même longueur.

Donc EF = FC. Or BEF est rectangle isocèle, donc EB = EF = FC

On construit le carré EFGB, il est semblable à ABCD

$$\text{On a donc } \frac{p_1}{p_0} = \frac{a}{b}$$

Développement en fraction continue de $\sqrt{2}$ (idée datant de la Chine, de l'Inde, de la Grèce antique).

Théorie précisée par Fermat (1601-1665), Euler (1700-1783), Lagrange (1700-1783), Legendre (1752-1833)

$$a = \sqrt{2} \quad b = 1 \quad p_0 = a - b \quad p_1 = b - p_0 \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} = \frac{p_1}{p_0}$$

$$a = b + p_0 \quad b = p_0 + p_1 \quad \text{donc} \quad a = 2p_0 + p_1$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2p_0 + p_1}{p_0 + p_1} = 1 + \frac{p_0}{p_0 + p_1} = 1 + \frac{p_0 + p_1}{p_0}$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{p_1}{p_0}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{a}{b}}$$

d'où itération du processus

$$\text{On a donc } \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}}$$

D'où

$$\boxed{\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}$$

Titre : La boîte du pâtissier

Auteurs : Catherine Houdement (PEN Rouen), Marie Lise Peltier (PEN Rouen)

Date : avril 1991

Origine : "Aides pédagogiques CM" (APMEP), p 103

Type : compte-rendu d'activité FI et FC d'instituteurs

Résumé : à partir d'une activité de fabrication par pliage d'une boîte parallélépipédique, pointer les concepts didactiques, de situation, dialectique outil objet, variable didactique.

Mots-clés : résolution de problème - modélisation - autovalidation - dévolution - situation didactique - pliage et géométrie.

LA BOÎTE DU PÂTISSIER

Objectifs didactiques

1) mettre en évidence quelques concepts de didactique (situation didactique, dialectique outil-objet, variable didactique, dévolution...)

2) analyser des processus de recherche, montrer l'importance :

- du cheminement personnel
- de la confrontation
- de la validation interne à la situation comme moteur de la recherche.

(le fait de pouvoir évaluer soi-même son travail permet de continuer si nécessaire la recherche sans nouvelle intervention du maître)

Objectifs mathématiques

1) revenir sur le vocabulaire géométrique et sur l'étude d'objets géométriques du plan et de l'espace.

2) modéliser une situation.

Déroulement

2 temps :

I - Les étudiants résolvent le problème mathématique puis visionnent le document vidéo relatant la résolution d'une partie du problème dans une classe de CM.

La séquence est ici menée avec les objectifs plutôt mathématiques pour que les étudiants vivent la situation côté élève et comparent leurs réactions et leurs procédures de résolution à celles d'élèves de CM.

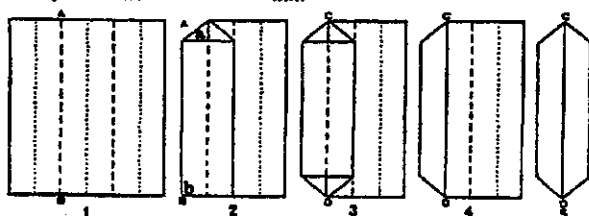
II - Recul didactique par rapport à cette suite d'activités : l'analyse fait basculer les étudiants côté enseignant : le professeur explicite ses choix, explique ses décisions, analyse les procédures et les erreurs des "élèves".

(Le problème proposé est tiré de "Aides pédagogiques pour le cycle moyen", APMEP, p. 103)

I - Mise en situation de recherche

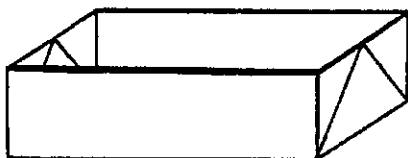
phase 0 : première construction de boîtes

Les plis en creux sont représentés : —
et les plis en relief :



Construire une boîte à partir d'une feuille rectangulaire de format A4 en suivant les instructions (P) suivantes :

- faire apparaître les cinq plis (équidistants) indiqués, fig. 1
- plier suivant AB, et réaliser les pliages du coin (a), fig. 2
- réaliser dans le coin (b) les mêmes pliages qu'en (a), fig. 3
- plier suivant le pli en creux CD, fig. 4
- mêmes actions dans la partie droite de la feuille. On aboutit au résultat représenté fig. 5
- il reste à ouvrir la boîte, et à marquer les plis des arêtes :



NB : on obtient deux boîtes de formes différentes suivant que l'on plie sur la longueur ou la largeur de la feuille A4.

phase 1 : les boîtes à fond carré

Recherche

Travail par groupes de 4, après une indispensable recherche individuelle de 5 minutes.

Consigne 1

"Construisez en suivant les instructions (P) une boîte à fond carré puis rédigez une affiche relatant la recherche, la méthode retenue, les conclusions que vous en tirez. Il est important que vous notiez tous les essais, même ceux qui n'ont pas abouti."

Procédures observées chez les normaliens

- faire le pliage à partir d'une feuille carrée.
- mesurer les dimensions de la boîte presque carrée obtenue en phase 0 et enlever la différence sur la longueur, puis sur la largeur.
- déplier la boîte construite dans la phase 0 et étudier les pliages.
- construire un carré au centre d'une feuille et le compléter par les bandes nécessaires à la construction par pliage.
- dessiner sur le fond d'une boîte déjà construite un carré, déplier la boîte et construire par translation les bandes nécessaires pour la construction.

Remarques

Les procédures sont analogues à celles observées chez des enfants de CM2 confrontés à la même consigne. (Ces derniers peuvent également proposer une méthode par découpage du fond de la boîte pour le rendre carré.)

Consigne supplémentaire pour la gestion du temps

"Construisez la boîte à fond carré la plus grande possible à partir de la feuille A4."

Mise en commun

Présentation au groupe entier des différentes affiches et explication d'un des auteurs.

NB : le professeur laisse exposer chacun des groupes, sans prendre position, il n'y a donc pas nécessairement de conclusion générale du type : "pour une boîte à fond carré de côté x , il faut prendre une feuille de dimensions $2x, 3x$ ".

Consigne 2

"Sauriez vous construire une boîte dont le fond est un carré 6×6 ?"

(gestion du temps : construire des boîtes à fond carré gigognes)

Synthèse

Généralisation avec institutionnalisation.

"Pour construire une boîte à fond carré de dimension x , la feuille rectangulaire a pour dimensions $2x$ et $3x$, et on la plie suivant la longueur".

Phase 2 : condition d'existence des boîtes

Relance de la situation

Consigne 1

"Pour construire une boîte de fond 6 x 13, de quelles feuilles peut-on partir?"

Gestion du temps

"Elaborez un tableau de valeurs numériques correspondant aux différentes boîtes construites pendant la recherche de la phase 1."

rectangle de départ	dimension du fond de la boîte

Consigne 2

"Construisez une boîte de fond 8 x 14 et hauteur 5".

Synthèse

* prise en compte de la hauteur de la boîte dans le tableau précédent.

* recherche d'une condition sur la hauteur pour qu'on puisse construire une boîte de fond $x \times y$ et de hauteur h : "la hauteur de la boîte est toujours la moitié de l'une des dimensions du fond."

Phase 3 : Extension du champ numérique pour une modélisation algébrique

Consigne 1

"Trouvez les dimensions de la feuille permettant de construire une boîte de dimension 12 x 15 et de hauteur 6."

Ici, il s'agit de demander une prévision (éventuellement avec d'autres valeurs numériques) et sa justification, de façon à obtenir une modélisation de la situation.

Synthèse

1) si on connaît les dimensions de la boîte : fond x et y , (hauteur $x/2$), on obtient les dimensions de la feuille par la fonction :

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longrightarrow (3x, x+y)$$

(et le pliage se fait suivant x)

2) si on connaît les dimensions x et y de la feuille que l'on plie suivant x , celles de la boîte sont données par la fonction :

$$g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \longrightarrow (x/3, y - x/3, x/6)$$

Prolongement éventuel de cette phase :

Consigne 2

"Recherchez les conditions sur les dimensions x et y de la feuille pour que l'on puisse obtenir une boîte en la pliant suivant x ."

conclusion :

- si $x < y$, le pliage est toujours possible
- si $x > y$, le pliage n'est possible que si $x < 3y$ (lien avec l'ensemble de définition de la fonction g .)

Phase 4 (facultative) : relance vers des consignes relatives au volume

Exemples : quelles feuilles choisir pour construire une boîte à fond carré contenant 1/2 litre, une boîte cubique contenant 1 litre, une boîte ayant un volume de 160 cm³ ?...

Phase 5 : visionnement du film "la boîte du pâtissier"

Pour repérer les procédures de résolution des élèves de CM et mettre en évidence le rôle de l'erreur.

II - Analyse de l'activité

A - Analyse mathématique

Cette situation permet de :

- faire des rappels de géométrie, de vocabulaire.
- élaborer un codage fonctionnel utile comme outil de prévision (les fonctions f et g permettant une généralisation "puissante").
- travailler sur le raisonnement : émission d'hypothèses, validation ou invalidation de ces hypothèses, mise en évidence et en défaut de raisonnements du type : "si je pars d'un rectangle j'obtiens une boîte à fond rectangulaire, donc si je pars d'un carré, j'obtiens une boîte à fond carré."

B - Analyse didactique

1. Description de la situation

- phase de dévolution (cf. B 2.3)
- travail sur les consignes (simples, courtes)
- analyse de la tâche : production avec des contraintes, validation interne,...
- rôle de l'erreur : elle apparaît ici très positive car elle permet d'avancer soit en éliminant les hypothèses invalides, soit en les modifiant pour les rendre valides.
- la gestion du temps (consignes annexes qui permettent de gérer le temps et l'hétérogénéité du groupe, mais qui participent aussi à l'élaboration de la synthèse collective).
- institutionnalisation possible à plusieurs moments :
 - sur des points méthodologiques
 - sur le raisonnement
 - sur les notions mathématiques.

2. Quelques concepts de didactique

2.1 conditions pour qu'un problème puisse être source d'apprentissage :

- l'énoncé a du sens pour les élèves
- le problème est consistant (la réponse n'est pas évidente)
- l'élève comprend ce qu'est une réponse au problème
- il peut s'engager dans des procédures de résolution
- il peut en contrôler lui même les effets.

2.2 phases d'une situation didactique

- action
- formulation - communication
- validation
- institutionnalisation
- réinvestissement.

2.3 dévolution

- en phase 0, l'élève se libère des difficultés matérielles
- en phase 1, la réalisation effective de l'objet et la validation interne motivent sa recherche.

2.4 dialectique outil-objet

- elle fonctionne ici localement sur l'objet savant «fonction de $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ »
- elle intervient ici comme outil implicite dans les phases 1 et 2
- la phase 3 permet d'explicitier cet outil, de l'utiliser pour prévoir d'autres constructions, pour anticiper l'action.
- une phase supplémentaire permettrait de l'étudier plus précisément en tant qu'objet, mais ceci est en dehors des objectifs de la formation des instituteurs.

Le fonctionnement outil-objet de la notion de fonction dans cette situation, permet d'illustrer l'esprit des mathématiques :

- résolution locale
- nécessité de généralisation
- puissance de la modélisation pour anticiper, pour résoudre en une fois une famille de problèmes isomorphes.

2.5 variables didactiques

- le fait d'imposer ou non la hauteur de la boîte à construire (phase 2 consignes 1-2) influe sur la manière dont les étudiants prennent en compte les résultats antérieurs.
- le fait de demander ou non une boîte constructible dans une feuille A4 (phase 3, consigne 1). Le choix fait bloque les procédures de tâtonnement et de constat et incite à réfléchir à des procédures de prévision, donc à modéliser la situation.
- variable non prise en compte dans cette séquence, mais qui peut être discutée : le fait de ne pas imposer le type de pliage (par exemple, plier en 10 au lieu de 6) peut induire des procédures de recherche tournées vers le pliage à faire et non vers les dimensions de la feuille à plier.

2.6 contrat

- constater les effets du contrat implicite : un problème posé à l'école a toujours une solution (cf phase 2, consigne 2), on ne rédige que "la bonne solution" (cf phase 1 consigne 1)
- construire un contrat explicite, a contrario, par le choix de consignes appropriées (cf ci-dessus)

Titre : Aire de surfaces planes

Auteurs : Marie-Lise PELTIER et Catherine HOUEMENT (P.IUFM Rouen)

Type : Activités en formation initiale ou continue

Résumé : un exemple de progression de la construction du concept de grandeur à la notion de mesure : les aires.

Origine : idée de Cécile Véron, professeur de mathématiques à l'Ecole Normale de Rouen jusqu'en 1986.

Durée prévue : deux séances de trois heures.

AIRE DE SURFACES PLANES.

(Ce chapitre est un complément à la partie "Aire de figures planes" des actes de Cahors.)

OBJECTIFS

Objectifs mathématiques

- Indépendamment, dans un premier temps, du dénombrement sur quadrillage, du calcul numérique et de l'utilisation de formules :

- construire le concept d'aire,
- construire la notion de mesure,
- faire fonctionner l'additivité des mesures d'aires.

- Distinguer aire, périmètre et forme d'une surface.

- Utiliser la symétrie centrale comme outil de résolution de problème et en déduire quelques propriétés.

- Introduire les fractions, produire des égalités entre fractions, les comparer, les ranger.

Objectifs didactiques

La situation présentée illustre les notions d'outil et d'objet puisqu'elle permet de mettre en jeu deux concepts mathématiques : l'aire en tant qu'objet, la symétrie centrale en tant qu'outil implicite de résolution du problème posé. Cette situation permet en outre d'introduire les fractions comme des codages nécessités par l'insuffisance des entiers pour des classes de surfaces de même aire.

ACTIVITÉ

Phase 1

Objectif

Construire des surfaces de même aire, mais de formes différentes et définir la notion d'aire (hors contexte numérique).

Matériel

- Feuilles d'annuaires téléphoniques (format A4) en grand nombre
- Ciseaux, instruments usuels de géométrie.

Organisation

travail individuel.

Consigne 1

"Vous devez partager chaque feuille en deux parties exactement superposables sans perte et sans recollage (c'est-à-dire qu'avec les deux parties il sera possible de reconstituer la feuille initiale) ; vous devez chercher un maximum de partages différents répondant à cette consigne de partage que nous désignerons par (P)".

Procédures observées

- Les étudiants commencent par plier en deux suivant les médianes, puis les diagonales du rectangle. En général à ce moment, certains pensent qu'ils ont trouvé tous les partages possibles, il est alors nécessaire de redonner la consigne en précisant qu'ils doivent essayer d'en trouver d'autres.

- La procédure suivante consiste à plier la feuille de telle sorte que deux sommets diamétralement opposés se superposent. Ce partage permet généralement à l'idée qu'il existe un nombre infini de solutions de se répandre.

Les autres procédures que l'on rencontre sont les suivantes :

- des pliages en 8 ou 16, suivis de dépliages et découpages en suivant certaines lignes de pliage plus ou moins bien choisies (d'où des réussites ou des échecs!) ;
- des recherches en construisant des segments de même longueur en partant de deux sommets diamétralement opposés ;
- des procédures consistant à construire une ligne de partage symétrique par rapport à une médiane, puis, en raison de l'échec, évolution de cette procédure vers la construction d'une ligne de partage symétrique par rapport au centre de la feuille.

Remarque

On peut constater de très nombreux essais qui n'aboutissent pas ; mais ces essais permettent à leur auteurs de faire de nouvelles hypothèses sur les propriétés de la ligne de partage. De nombreux étudiants trouvent assez vite comment construire une ligne de partage polygonale qui permet de résoudre le problème, et en faisant des tracés symétriques de part et d'autre du centre de la feuille : puis certains cherchent des lignes de partage curvilignes à main levée ou en traçant des arcs de cercles.

Synthèse

Les étudiants viennent afficher un certains nombre de partages réalisés. Ils vérifient à chaque fois la superposition exacte des deux parties et la reconstitution possible de la feuille initiale avec les deux parties, ils expliquent à leurs camarades le procédé utilisé pour obtenir la ligne de partage.

Apport du professeur et première institutionnalisation

1 - Sur l'aire.

- Les deux parties issues d'un partage (P) sont superposables, elles ont donc même forme et même périmètre.

- Deux parties issues de deux partages (P) différents ne sont pas directement superposables, pourtant elles vérifient toutes les deux la propriété :

"avec deux parties analogues à chacune d'elles, on peut reconstituer la feuille entière" : elles sont donc aussi "étendues" l'une que l'autre, elles contiennent la même quantité de papier, elles correspondent toujours à "une demi feuille". on dit qu'elles ont même aire.

Constats.

- Deux surfaces de même aire n'ont pas nécessairement la même forme.
- Deux surfaces de même aire n'ont pas nécessairement le même périmètre.
- Deux surfaces superposables ont même aire, même forme, même périmètre.
- A partir d'une partie quelconque issue d'un partage (P), on peut, par découpage et recollage, sans chevauchement et sans perte de papier, construire n'importe quelle autre partie issue d'un autre partage (P).

On conviendra d'appeler momentanément famille G, la famille des parties obtenues.

2 - Sur la symétrie.

La propriété vérifiée par la ligne de partage pour répondre à la consigne est la suivante : cette ligne est symétrique par rapport au centre du rectangle.

Phase 2

Objectifs mathématiques

- Réinvestir la notion d'aire et celle de symétrie centrale.
- Constituer un stock de formes d'aires différentes, mais facilement comparables.
- Introduire un codage fractionnaire et le faire fonctionner.

Enjeu

Permettre à tous de créer des surfaces de formes originales et "tarabiscotées".

Organisation

Travail individuel ou par groupe de deux

Matériel

Le même que précédemment.

Consigne 2

"Vous devez recommencer l'activité de la consigne précédente, mais avec des rectangles ayant même aire que les formes précédentes, c'est-à-dire avec des demi-feuilles rectangulaires".

Remarques

Les étudiants peuvent ainsi réinvestir ce qu'ils ont fait, ou ce qu'ils ont vu faire par d'autres, lors de la phase 1. On note, à ce stade, qu'ils prennent plaisir à laisser libre cours à leur imagination et qu'ils prennent conscience que l'on peut augmenter à loisir le périmètre de la surface sans en modifier l'aire.

On constitue ainsi une seconde classe de surfaces de même aire que l'on désigne par H.

On matérialise les deux classes déjà obtenues par des grandes feuilles de papier (type *paper board*) sur lesquelles on colle plusieurs surfaces de la classe.

Lorsqu'il s'agit d'introduire un codage des classes ainsi construites, rendant compte des surfaces qu'elles contiennent, l'ensemble du groupe s'accorde généralement pour désigner la classe G par $\frac{1}{2}$, car elle contient des demi-feuilles, et la classe H par $\frac{1}{4}$, car elle contient des quarts de feuilles.

Ce codage est retenu et noté sur les grandes feuilles qui matérialisent les classes.

Consigne 3

"Vous allez construire, par groupe de 2 (ou de 4), des surfaces ayant même aire que la feuille d'annuaire, mais de formes différentes".

Procédures observées.

Les étudiants placent côte à côte de diverses façons :

- deux surfaces de la famille $\frac{1}{2}$, issues d'un partage (P), c'est-à-dire exactement superposables,

- ou deux surfaces de la famille $\frac{1}{2}$, issues de deux partages (P) différents, donc de même aire, mais de formes différentes,

- ou une surface de la famille $\frac{1}{2}$ et deux surfaces de la famille $\frac{1}{4}$,

- ou quatre surfaces de la famille $\frac{1}{4}$.

Synthèse

Les différentes propositions sont présentées et discutées. En cas de désaccord, on reconstitue par découpage et recollement la feuille d'annuaire à partir de la feuille proposée.

Les surfaces retenues constituent une nouvelle classe de surfaces de même aire que l'on décide de coder par 1 puisqu'il s'agit de surfaces ayant même aire qu'une feuille d'annuaire.

La description des différentes procédures donne lieu à leur traduction en terme de codage fractionnaire :

- les deux premières procédures citées se traduisent par

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ ou par $2 \times \frac{1}{2} = 1$ (lu comme "deux fois un demi")

- la troisième par

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ ou par $\frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1$

- la dernière par

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ ou par $4 \times \frac{1}{4} = 1$

Consigne 4

"Vous allez, par groupes de quatre, construire de nouvelles classes de surfaces de même aire".

Procédures observées

- Partage en deux parties superposables de rectangles correspondant au quart de la feuille d'annuaire.

- Assemblage de surfaces de différentes classes déjà obtenues.

Mise en commun.

Les différentes classes proposées sont comparées, des surfaces de chaque classe sont collées sur de grandes feuilles, chaque classe est

codée en fonction des surfaces qu'elle contient et l'on donne des écritures variées rendant compte des différentes procédures utilisées pour construire les surfaces de la classe.

Lors de cette mise en commun, on obtient généralement de très nombreuses classes et donc de très nombreuses écritures, par exemple :

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} ; \frac{1}{8} + \frac{1}{4} &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} &= \frac{3}{4} ; 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} ; 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{6}{4} ; \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} &= \frac{7}{4} \quad \text{etc....} \end{aligned}$$

Consigne 5

"Vous allez mettre en ordre les différentes classes obtenues : pour cela, vous pouvez construire, pour chaque classe, un rectangle de la famille dont une dimension est fixée, par exemple, la largeur de la feuille d'annuaire".

Mise en commun.

Le rangement des classes en fonction de la relation "...est moins étendue que..." est matérialisé par la mise en ordre des grandes feuilles représentant les classes, elle est justifiée par la superposition des rectangles des différentes classes qui ont une dimension commune, elle donne lieu à une série d'écritures du type :

$$\frac{1}{8} < \frac{1}{4} < \frac{3}{8} < \frac{1}{2} < \frac{3}{4} < 1 < \frac{3}{2} < \frac{7}{4} < 2$$

Un réinvestissement individuel de ces différentes phases peut être proposé à partir de surfaces planes distribuées (cf. annexe). Lors de la mise en commun de ce travail individuel, on constate qu'il est possible de choisir n'importe quelle classe comme classe unité et que les codages qui s'en déduisent sont proportionnels aux codages de départ.

ANALYSE DE L'ACTIVITÉ

Analyse mathématique

Cette série d'activités est un exemple d'une progression sur une grandeur et la mesure liée à cette grandeur.

Le professeur reprend avec les étudiants l'explicitation du rôle des différentes étapes :

1. pour définir la grandeur aire :
 - définition d'une relation d'équivalence sur un ensemble de surfaces, ici la relation "avoir même aire" ;
 - construction de l'ensemble quotient, ici les classes des surfaces ayant même aire ;
 - caractérisation des classes, ici par le codage fractionnaire et le choix d'un représentant "rectangle" de chaque classe ;
 - construction d'une relation d'ordre sur l'ensemble quotient.

2. pour construire un codage numérique qui est une mesure : construction d'une application de l'ensemble quotient dans l'ensemble des nombres réels

- positive,
- additive,
- monotone,
- parfaitement déterminée par le choix d'une unité, ici la classe de la feuille A4,
- vérifiant les propriétés suivantes : l'inégalité triangulaire, les surfaces vides ont une aire nulle, il existe des surfaces non vides d'aire nulle.

Remarque

Cette situation permet de distinguer naturellement objet mathématique, grandeur mesurable, mesure.

D'autre part, elle apparaît comme une introduction pertinente de la nécessité des nombres non entiers, et plus précisément des fractions.

En effet elle permet de donner du sens à des écritures fractionnaires :

- définition de $\frac{1}{n}$ par $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = 1$ et par $n \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \times n = 1$:

- production d'égalités variées sur ces nombres :

- comparaison et rangement de fractions et d'écritures fractionnaires.

Enfin elle permet de faire des rappels sur la symétrie centrale qui est apparue comme un outil de résolution du problème de partage.

Analyse didactique

Cette situation permet de pointer

- l'aspect auto-validant de la première consigne de la première phase : c'est l'étudiant lui-même, sans intervention de quiconque qui décide si le partage qu'il vient de réaliser convient ou est à rejeter :

- le rôle de l'hypothèse erronée dans cette phase : en effet, c'est très souvent à partir d'une ligne de partage qui ne convient pas que l'étudiant réussit à trouver les propriétés que doit vérifier cette ligne pour répondre à la consigne :

- l'aspect outil de la notion de symétrie centrale, qui est utilisée par tous les étudiants après un certain temps de recherche, bien qu'elle

n'ait pas fait l'objet d'un apprentissage antérieur ; la notion de symétrie centrale n'est donc pas abordée par sa définition, elle est perçue par son aspect fonctionnel ; il est possible ici de faire le choix d'institutionnaliser (ou non) cette notion pour dégager son aspect objet de savoir et d'étudier les propriétés utilisées pour construire la ligne de partage :

- l'aspect objet du concept d'aire, qui est ici mis en évidence non pas par une définition, mais par une relation d'équivalence :

- l'aspect outil de la notion de fraction, qui apparaît ici comme un codage rendant compte de manipulations finalisées avant de devenir objet de savoir institutionnalisé et d'être réinvesti dans d'autres contextes.

PROLONGEMENTS

1 - Sur l'aire

Au niveau mathématique

Transfert des notions étudiées sur d'autres matériaux.

Activités de réinvestissement.

Au niveau didactique

Etude de manuels à partir d'un questionnement du type

-- Comment est introduite dans les manuels scolaires la notion d'aire ?

- Aspect dénombrement.
- Aspect encadrement.
- Rôle des quadrillages.
- Introduction de l'unité.
- Formules.

-- Quelle est la part et le type de manipulation proposée aux élèves ?

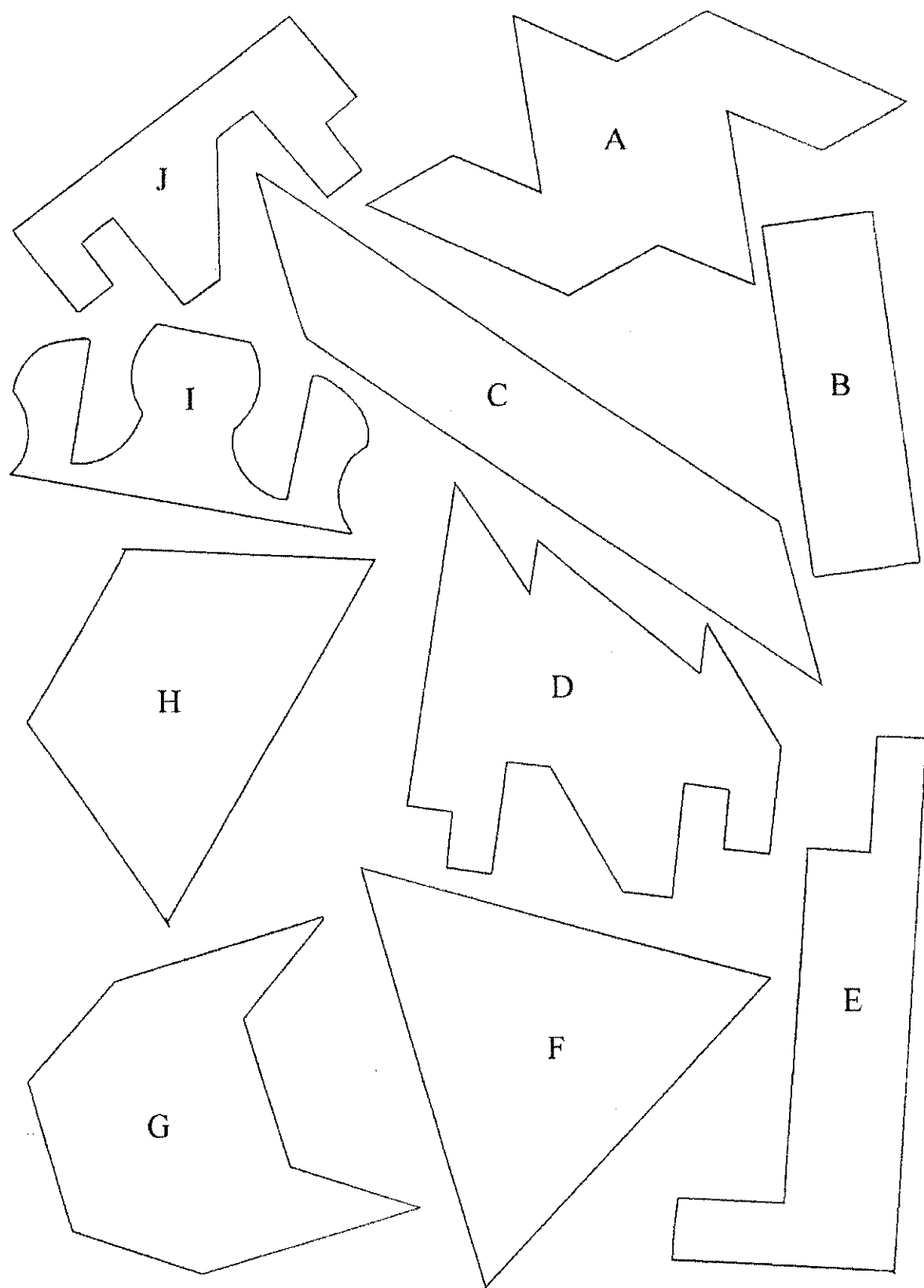
-- Comment le manuel prend-il en compte les distinctions :

- aire / dénombrement,
- aire / nombre,
- aire / surface,
- aire / périmètre ?

2 - Sur les rationnels

Cette situation est une des situations-phares pour travailler l'extension de la notion de nombre entier. Elle fait partie à ce titre de la progression sur l'introduction des rationnels.

ANNEXE



Annexe 4 : introduction d'écritures multiplicatives au CE1

B) AUTOUR DE LA MULTIPLICATION - JEUX DE CADRES - VARIABLES DIDACTIQUES - APPRENTISSAGE PAR DESEQUILIBRE / REEQUILIBRE - SITUATION DE COMMUNICATION

B-1) Analyse d'extraits d'une préparation de séquence introduisant les écritures multiplicatives au cours élémentaire

Il s'agit d'analyser des extraits d'une préparation d'une séquence d'introduction des écritures multiplicatives au cours élémentaire première année.

Une série de 7 questions permet de conduire cette analyse (voir document n°6, pages 27 à 30). Voici le déroulement de l'analyse.

a) Recherche, par groupe de trois, des réponses aux questions 1, 2 et 3

Il s'agit de la première leçon sur la notion d'écriture multiplicative, la forme adoptée est une situation de communication par groupe, cette forme est justifiée par le fait que l'objectif est la production d'une écriture, d'un langage.

Les choix didactiques et les objectifs sont exposés dans le texte complet de la préparation, nous invitons le lecteur à s'y reporter.

A propos de la question 3, nous avons été amené à préciser la notion de cadre et replacer cette notion dans le cadre de la théorie de Régine Douady.

Quels sont les cadres qui interviennent ?

On fait ici référence à la théorie des jeux de cadres de R. Douady.

Idée centrale : les connaissances ayant trait au concept à acquérir ne sont pas maîtrisées de la même manière dans chacun des cadres. Les connaissances les plus grandes dans un des cadres devraient amener les élèves à faire des conjectures dans les autres cadres et à leur donner des idées de procédures à tester.

Exemples de cadres:

- Réel physique
- Graphique
- Numérique
- Géométrie, informatique ...

Une situation d'apprentissage doit faire intervenir la notion dans des **cadres différents**. Ici on s'appuie sur 2 cadres : cadre numérique et cadre géométrique.

Remarques:

1. Un aller-retour entre ces 2 cadres sera utilisé tout au long de la construction de la technique opératoire.
2. Autres **exemples d'interventions de jeux de cadres**: Réel-physique / numérique: manipulations de collections pour obtenir différentes décompositions additives d'un nombre (écritures additives).
3. Découpages de rectangles, de grilles rectangulaires lors de la construction de la technique opératoire (liaison cadres physique / géométrie / numérique)...

b) la réponse aux questions 4 et 5 permet de revenir sur la notion de variable didactique et sur l'analyse de la tâche de l'élève:

« Une variable didactique est une variable sur laquelle l'enseignant peut agir et dont un changement de valeur peut entraîner un changement de procédures ».

Autrement dit:

« C'est un élément de la situation sur lequel l'enseignant peut jouer et qui va modifier les rapports des élèves avec les notions enjeu dans la situation ».

Les exemples sont divers :

- le matériel utilisé (ex : papier quadrillé, papier blanc en géométrie)
- le type de tâche (ex : tâche de constat ou de fabrication dans la comparaison au C.P.)
- la répartition des tâches
 - . entre enfants
 - . dans le temps
- les contraintes de la tâche (ce qui est autorisé...)
- la forme du travail (individuel, par groupes ...)
- la gestion du temps (le temps laissé aux élèves pour résoudre un problème permet d'éliminer des procédures trop coûteuses en temps)
- la taille des nombres

Mais l'origine socioprofessionnelle ou le sexe des élèves ne sont pas des variables didactiques.

Dans le cas de cette séquence on peut jouer sur plusieurs variables :

- les variables numériques : il faut prévoir une grille faisant intervenir des nombres assez grands ($a > 6$ et $b > 11$) afin de placer les élèves dans une situation où les techniques primitives de dénombrement ("un à un" ou paquets par paquets) sont plus laborieuses et où la perception globale, de visu de ce nombre devient très difficile ; enfin où l'écriture $a \times b$ devient plus commode car plus rapide, plus économique pour décrire spatialement le nombre d'éléments de la collection.
- le choix des grilles du groupe récepteur : doivent être présentes :
 - des grilles différentes de celles du groupe émetteur mais dont les dimensions restent assez proches
ex: pour une grille 7×12 . Il faut prendre : 8×12 ; 6×10 ; 11×9 ; 7×11 ; 6×12 les deux dernières dimensions servant à signaler l'erreur classique : « oubli du carré du coin »
 - des grilles ayant même nombre d'éléments que la grille de l'émetteur mais de dimensions différentes
ex: pour 7×12 , prévoir des grilles : 2×42 ; 1×8 ; 14×6 ; 28×3 ; 42×2 ...
pour 9×14 : 18×7 ; 3×42 ; 1×84 ... (ceci pour éliminer les messages de type "84" pour 7×12 ou des messages additifs)
- les contraintes de la situation (message) le message doit :
 - être court et essentiellement numérique afin d'éliminer les messages écrits en français, trop longs et souvent incompréhensibles et d'élaborer une nouvelle écriture du type $a \times b$,
 - permettre au groupe récepteur de retrouver rapidement et facilement la grille.
- les formes de travail : le travail par groupes est ici justifié par la volonté d'obtenir des productions plus riches et d'éliminer certaines erreurs par un premier filtre (effectué par les élèves du groupe).

Nous renvoyons le lecteur à la lecture du texte (en italique) de la préparation pour l'analyse de la tâche de l'élève. Notons que cette partie de l'activité peut être l'occasion de parler de l'analyse a priori et de situer celle-ci par rapport au contrat didactique.

Ainsi l'analyse a priori permet à l'enseignant d'accroître ses marges de manœuvres et de prendre conscience de ses prises de décision lors du déroulement de la séquence (interventions de l'enseignement face à un déroulement prévu ou non) et du décalage entre prévisions et réalisations effectives.

Nous renvoyons le lecteur, sur ce point, à l'article de A. Mercier et M.H. Salin dans (4) intitulé « L'analyse a priori, outil pour l'observation ».

Notons que cette analyse de la tâche de l'élève nous a semblé très difficile à obtenir de la part des instituteurs (tant confirmés que débutants), cela s'explique sans doute par un manque d'habitude de cette « tâche » et par le fait que cette activité porte justement sur le contrat didactique.

Nous renvoyons le lecteur au texte complet de la préparation pour répondre aux questions suivantes. Un accent particulier a été mis sur la nécessité de jouer sur une double définition des écritures multiplicatives.

DOCUMENT N°6 (distribué aux stagiaires) : extraits d'une préparation de la première séquence introduisant la notion d'écriture multiplicative au CEI (les phrases imprimées en italique ne font pas partie du texte distribué).

Cette séquence s'inspire d'une situation élaborée par l'IREM de bordeaux. Elle constitue la première leçon sur la notion d'écriture multiplicative.

Objectifs de la séquence :

- Introduire la notion d'écriture multiplicative d'un nombre entier naturel,
- Donner un sens à cette écriture,
- Renforcer la notion de nombre naturel.

Notre choix :

L'analyse mathématique de la notion, l'analyse des pratiques enseignantes et des manuels scolaires montrent qu'il y a deux grandes manières d'introduire cette notion.

On peut introduire cette écriture à partir de l'addition répétée:

$$7 \times 12 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7$$

$$12 \times 7 = 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12$$

Cette méthode si elle présente l'avantage de s'appuyer sur des connaissances acquises par les élèves sur l'addition présente par ailleurs beaucoup d'inconvénients : les facteurs a et b ne jouent pas les mêmes rôles (12 paquets de sept éléments, ce n'est pas la même chose que sept paquets de 12 éléments) ; cela peut amener certains maîtres à introduire dans un premier temps une multiplication non commutative ! Elle oblige d'autre part à introduire un vocabulaire et des notations peu commodes.

On peut aussi présenter l'écriture $a \times b$ comme une désignation du nombre d'éléments d'une collection organisée sous forme de grilles rectangulaire comportant a lignes et b colonnes ou bien b lignes et a colonnes.

Cette présentation si elle élimine les défauts de la première, a l'inconvénient d'être très liée à la disposition spatiale de la collection à décrire.

Nous avons adopté le principe d'une présentation dialectique de l'écriture multiplicative $a \times b$ s'appuyant sur deux cadres

- *un cadre géométrique (spatial) : $a \times b$ désignera le nombre d'objet d'une collection organisée ou pouvant s'organiser sous forme de grilles rectangulaires,*
- *un cadre numérique : $a \times b$ sera une écriture plus courte de l'une des deux écritures additives répétées ci-dessus*

Cette séquence a pour but de présenter aux élèves une situation évolutive permettant de faire le lien entre ces deux cadres et ses deux conceptions.

Présentation de la situation

Il s'agit d'une situation de communication entre les élèves.

La classe est divisée en groupes (3 à 4 élèves) de deux types : émetteur et récepteur. Chaque groupe joue à la fois le rôle de récepteur et d'émetteur.

Le groupe émetteur possède une grille rectangulaire (dessinée sur une feuille polycopiée) dont les dimensions peuvent être par exemple de 7 et 12 ou bien de 9 et 14.

Le groupe récepteur possède un lot de grilles parmi lesquelles se trouve la grille du groupe émetteur.

La consigne est la suivante:

« le groupe émetteur doit envoyer un message au groupe récepteur lui permettant de retrouver le plus rapidement possible et le plus facilement possible la grille correspondante dans son lot. Ce message doit être le plus court possible et doit désigner le nombre de carreaux de la grille. »

Les variables de la situation :

Les variables numériques : il est nécessaire de prévoir une grille faisant intervenir des nombres assez grands, par exemple $a > 6$ et $b \geq 11$ afin de placer les élèves dans une situation :

- où les « techniques primitives de dénombrements » (un à un ou paquets à paquets) sont plus laborieuses,
- où l'écriture $a \times b$ devient plus commode car plus rapide, plus économique pour décrire (spatialement) le nombre d'éléments de la collection,
- où la perception globale, de visu de ce nombre devient très difficile.

Le choix des grilles du groupe récepteur : il faut que soient présentes :

- des grilles différentes de celles du groupe récepteur, mais dont les dimensions sont assez proches de celle-ci, par exemple :

- dans le cas de la grille 7 x 12, on peut choisir des grilles de dimensions : 8 x 12 ou 6 x 10 ou 11 x 18, en particulier pour invalider les messages des élèves "ne comptant qu'une seule fois le carré du coin",
- des grilles ayant le même nombre d'éléments que la grille du groupe émetteur mais dont les dimensions sont différentes, ainsi :
- dans le cas d'une grille 7 x 12, il faut prévoir des grilles 42 x 2, 14 x 6, 3 x 28,
- dans le cas 9 x 14, des grilles de dimensions 18 x 7, 3 x 42...

Ceci afin d'éliminer certains messages (84 par exemple) qui ne permettent pas de trouver rapidement et sûrement la bonne grille.

Les contraintes de la situation : la consigne comprend certaines contraintes, indispensable au bon déroulement de la séquence, ainsi le groupe émetteur doit envoyer un message :

- court et essentiellement numérique, afin d'éliminer des messages écrits « en français, avec des phrases », trop longs et souvent incompréhensibles. Cela permettra également l'élaboration éventuelle d'une écriture permettant de désigner le cardinal de la collection,
- qui doit permettre au récepteur de trouver rapidement et facilement la grille du groupe émetteur,
- le message doit de plus, désigner le nombre de carreaux.

Analyse de la tâche de l'élève

Pour élaborer son message, l'émetteur doit

- soit dénombrer un à un le nombre d'éléments de la grille et en donner une « écriture canonique »,
- soit dénombrer « paquets à paquets » ce nombre et traduire cette activité par une écriture additive ou canonique. Le dénombrement peut alors prendre en compte ou non, la disposition spatiale de la collection (nombre d'éléments d'une ligne ou d'une colonne, nombre de lignes ou de colonnes),
- soit de dénombrer le nombre d'éléments d'une ligne et d'une colonne et traduire cette activité par une écriture multiplicative ou proche de cette forme.

Analyse des messages des élèves

Nous avons constaté une grande diversité des messages produits par les élèves. Nous pouvons les classer ainsi:

- des écritures canoniques : 84 pour la grille 7-12, par exemple,
- des écritures additives :

- faisant intervenir la symétrie de la figure ou le partage en deux de celle-ci $42 + 42$,
- des écritures additives répétées basées
 - soit sur le nombre d'éléments d'une ligne ou d'une colonne $12+12+12+12+12+12$ ou $7+ 7+ 7+ 7+ 7+ 7+ 7+ 7+ 7+ 7+ 7+ 7$
 - soit sur une technique de dénombrement paquets à paquets $10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 4$ etc ...
- des écritures rendant compte de la disposition spatiale de la collection $12C\ 7L$ ou $12,7$ - on peut voir apparaître des messages montrant que l'élève a déjà rencontré cette notion, par exemple : 12 fois 7 ou bien 7 fois 12 ou 12×7 ou encore $12 \times 7 = 84$.

Validation de l'activité

La situation étant une situation de communication, la validation pourra se faire dans un premier temps sur le fait que le groupe récepteur a pu ou non déterminer la grille du groupe émetteur.

Un autre élément de validation portera, lors de la comparaison des messages, sur le respect des contraintes de la consigne : longueur du message, caractère numérique, rapidité et facilité du décodage... Cela implique que le maître ait le souci constant, dans cette phase, de faire respecter ces contraintes.

Déroulement de l'activité

1. Enoncé de la consigne
2. Phase de recherche et élaboration des messages de la part de l'émetteur.
3. Phase de recherche de la part du groupe récepteur pour déterminer la grille correspondante. Il pourra demander par écrit (à l'aide de phrases courtes) des explications supplémentaires au groupe émetteur s'il ne peut remplir sa tâche. L'émetteur devra alors lui renvoyer un autre message.
4. Phase de comparaison des productions : celle-ci a pour but, à partir de comparaison des messages et des difficultés rencontrées par les décodeurs, de dégager ou d'introduire (si aucun message de ce type apparaît) les avantages d'un codage à l'aide d'une écriture multiplicative.
 - Les écritures canoniques ne seront pas retenues comme efficaces car elles ne permettent pas de reconnaître de façon certaine la grille.
 - Les écritures traduisant un comptage paquets par paquets (autres que celles s'appuyant sur le cardinal d'une ligne ou d'une colonne) également car elles imposent un travail important et peu sûr pour le groupe récepteur.
 - Les écritures additives répétées ne satisfont pas à la contrainte de la consigne : message trop long, demandant un temps de recherche trop important pour le décodeur. Le maître devra introduire l'écriture multiplicative à partir des messages prenant en compte la disposition spatiale de la collection. S'il existe des messages du type $12C, 7L$, il devra alors souligner que ces messages ne satisfont qu'une partie de la consigne et en particulier, ne codent pas le nombre de carreaux de la grille. Il introduira alors l'écriture 12×7 ou 7×12 comme satisfaisant à cela. Il fera de même pour les messages du type 12 fois 7 ou 7 fois 12 . S'il apparaît des messages sous forme multiplicative, le maître utilisera ces élèves pour donner un sens à ce type d'écriture. Dans tous les cas, il s'attachera à montrer que ce type d'écriture est le plus adéquate pour répondre au problème posé.
5. Donner les deux sens de l'écriture multiplicative : l'explication précédente à partir des contraintes de la situation ne permet que de souligner un seul sens, celui s'appuyant sur la configuration de la collection. Nous pensons qu'il est nécessaire dès cette étape de dégager le caractère numérique de cette écriture, et pour cela de prouver que cette écriture désigne bien un entier naturel. Quand on pose la question aux élèves : « cette écriture désigne-t-elle un nombre ? ». Ils répondent souvent : « non, car on ne sait pas combien il y en a ? il faut compter ou calculer ! ». Un moyen de résoudre partiellement ce problème est de faire le lien entre cette écriture et les techniques de dénombrement mis en œuvre par certains élèves, celles qui se réfèrent à la fois à la disposition spatiale de la collection et à des additions répétées. Il est évidemment nécessaire de prévoir des activités renforçant cette notion. La compréhension de ce concept prend du temps.

Prolongements

- 1. Travail individuel rapide à partir d'une grille représentée sur une feuille photocopée, l'élève doit en un temps très court (60 secondes) désigner par l'écriture de son choix le nombre d'éléments de la grille. On pourra prendre comme dimensions 17 x 21 par exemple.*
- 2. Construction d'une grille correspondant à une écriture multiplicative donnée (sur papier quadrillé).*

Il s'agit de la 1^{ère} leçon sur la notion d'écriture multiplicative. Répondre aux questions suivantes :

- 1. Déterminer les connaissances en jeu dans la situation.**
- 2. Expliciter le choix didactique justifiant la présentation de la notion.**
- 3. Y-a-t-il plusieurs cadres ? Si oui, lesquels ?**
- 4. Déterminer les variables de la situation.**
- 5. Faire une analyse de la tâche de l'élève.**
- 6. Commenter les différentes phases du déroulement.**
- 7. Prolongement : quels exercices de renforcement ?**

Milieu, cadres et registres

Marie Jeanne Perrin-Glorian

IUFM Nord-Pas-de-Calais, Université d'Artois

et équipe DIDIREM, Université Paris 7.

1 Jeux de cadres

La notion de cadres a été introduite par R. Douady surtout pour prendre en compte des changements de cadre qui sont des moyens de résoudre des problèmes et de produire des connaissances nouvelles. Elle a montré sa fécondité dans le domaine de l'ingénierie didactique à travers la notion de jeux de cadres. Il s'agit d'un moyen à la disposition de l'enseignant pour organiser des situations qui favorisent des changements de cadre producteurs de connaissance. R. Douady définit un cadre comme un domaine des mathématiques avec des objets, des relations entre objets, donc des définitions et théorèmes, les représentations de ces objets dont certaines sont des représentations sémiotiques au sens de Duval et d'autres non. Bien sûr les cadres ne sont pas disjoints. Un objet mathématique peut apparaître dans plusieurs cadres, c'est même cela qui rend possible les changements de cadres et jeux de cadres. Il se peut que toutes les propriétés de cet objet ne figurent pas à la fois dans les deux cadres.

Si on se place du point de vue mathématique, un cadre est en quelque sorte maximal, du moins à une époque donnée. Mais si on considère l'apprentissage et l'organisation de situations didactiques, le cadre est réduit aux objets que l'élève connaît. C'est même cette incomplétude des cadres qui va créer des déséquilibres qui seront moteurs pour produire des connaissances nouvelles. Le cadre est donc destiné à évoluer. Du point de vue didactique, on peut voir le cadre comme un ensemble d'objets mathématiques, de représentations de ces objets, de relations entre ces objets, pertinents pour une classe de problèmes relativement à une population donnée. R. Douady parle de fenêtre conceptuelle pour désigner "l'ensemble des parties de cadres que l'élève fait interagir ou combine pour étudier le problème qui lui est soumis"¹. Le jeu de cadres pour l'élève se déroule donc dans une fenêtre conceptuelle qui dépend des connaissances de l'élève et du problème.

Par ailleurs, suivant l'apprentissage visé, on sera amené à faire ou non des distinctions entre cadres. Par exemple pour l'apprentissage de la notion d'aire nous avons établi un jeu de cadres entre la géométrie affine sans mesure et la géométrie euclidienne avec mesures. C'est à travers les mesures que peut s'établir le jeu de cadres entre la géométrie sans mesure et les nombres. C'est pourquoi il nous a paru important de développer la notion d'aire sans mesure pour que le jeu de cadres puisse fonctionner. Cette distinction n'a pas lieu d'être quand on veut faire, comme je le montrerai tout à l'heure sur un exemple, un jeu de cadres entre géométrie

¹ Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir Repères IREM n°15

plane et géométrie dans l'espace. A d'autres moments on distinguera géométrie plane vectorielle et géométrie plane des droites et points. La notion de cadre a un sens dans l'analyse du savoir mathématique ; R. Douady en a fait un outil pour l'analyse didactique.

2 Pourquoi rapprocher les notions de cadre et de milieu ?

En théorie des situations, le milieu est le système antagoniste du sujet : le milieu adidactique est un système dénué d'intentions didactiques extérieur au sujet, et qui, par ses rétroactions, permet une réflexion du sujet sur ses actions et, par là, un apprentissage. Le milieu est la cause des adaptations du sujet et les rapports de l'élève à la situation adidactique sont réglés par le contrat didactique, tout aussi indispensable dans la théorie. Le milieu est donc relatif à une situation qui modélise un savoir en jeu dans cette situation. Il peut comprendre des objets matériels mais aussi des objets mathématiques et des propriétés de ces objets, donc une partie d'un cadre ou de plusieurs cadres. Ces savoirs du milieu peuvent produire des rétroactions aux actions du sujet à condition que celui-ci ait les connaissances qui lui permettent de les interpréter comme tels : ce sont des savoirs naturalisés. Il faut donc distinguer dans le cadre en jeu les savoirs qui sont des savoirs naturalisés et ceux qui sont des enjeux d'apprentissage. Les savoirs naturalisés sont éventuellement des éléments du milieu de la situation, soit du milieu objectif s'ils sont donnés dès le départ, soit du milieu d'apprentissage s'ils ont été utilisés dans la phase d'action, et reconnus comme des savoirs anciens. Ils peuvent fournir des rétroactions aux actions du sujet dans la phase d'action sans que l'expérience sur le milieu matériel soit nécessaire, ou aux déclarations du sujet dans la phase de validation.

Dans le cas où le problème permet un jeu de cadres, le milieu contient des objets qui peuvent être modélisés de deux façons ou qui mettent en relation deux domaines mathématiques. Par exemple dans les problèmes de mesures d'aires de rectangles, on a un domaine géométrique avec les propriétés géométriques des rectangles, des opérations géométriques (découpage, déformation, pavage...) et un domaine numérique avec des opérations sur les nombres. La théorie des situations ne fait pas référence à la notion de cadre ni de jeux de cadres. Cependant, quand le milieu contient des objets de deux cadres, et certaines correspondances entre ces cadres, il peut arriver des rétroactions d'un des cadres sur des actions qui ont lieu dans l'autre cadre. Par exemple un calcul d'aires peut être rejeté parce que le résultat est incompatible avec une propriété géométrique. Les qualités particulières de tels milieux n'ont pas été spécialement étudiées du point de vue de la théorie des situations.

3 Des registres de représentations sémiotiques relatifs à des cadres.

Duval (1995) considère les représentations sémiotiques d'un point de vue cognitif général qui n'est pas spécifique des mathématiques. Elles remplissent des fonctions de communication, d'objectivation et de traitement. Il caractérise les registres de représentation sémiotique par le fait qu'il existe des règles permettant de reconnaître qu'une représentation fait bien partie du registre et des règles de traitement qui permettent de transformer une représentation d'un registre en une autre représentation du même registre ainsi que des règles permettant de passer, pour un même objet, d'une représentation dans un registre à une représentation dans un autre registre, ce qu'il appelle la conversion. R. Duval s'est beaucoup intéressé aux problèmes liés à la conversion, en particulier aux phénomènes de non congruence entre deux registres de représentation. Mais la fonction de traitement et les phénomènes qui lui sont liés est très intéressante aussi du point de vue des mathématiques parce que le traitement sur les représentations est en général le reflet d'un traitement sur les objets qu'elles représentent et les règles de traitement sont les traductions, dans le registre

considéré, d'opérations sur les objets qu'elles représentent. Or le traitement sur les objets se fait dans un cadre : traitement sur les objets et les représentations sont intrinsèquement liés. Ce sont des propriétés des objets du cadre, des définitions et des théorèmes qui valident et permettent de produire les règles de traitement dans les registres de représentation. Ainsi en est-il des règles d'addition et de multiplication des fractions qui sont justifiées par des propriétés de l'addition ou de la multiplication des nombres. Nous allons le montrer plus précisément dans le cas des représentations planes des figures de l'espace.

4 Exemple 1. Rechercher la mesure du côté d'un carré d'aire 27cm^2 .

Pour illustrer les liens entre cadres et milieu, j'ai choisi l'exemple classique, extrait de la thèse de Régine, du jeu de cadres entre numérique, géométrique et graphique pour travailler les décimaux et construire la connaissance "les décimaux permettent d'approcher d'aussi près que l'on veut un irrationnel". Nous allons voir sur cet exemple que le jeu de cadres est possible à cause de certaines propriétés du milieu et à condition que puisse s'établir un contrat didactique qui le favorise.

4.1 Quel est le milieu ?

Il contient des éléments matériels, des savoirs anciens ou fournis aux élèves comme des données, des résultats issus d'un travail précédent qui ont été validés collectivement et sur lesquels on peut donc s'appuyer pour continuer :

- * Du matériel : papier uni pour dessiner des rectangles ou pour calculer, du papier quadrillé pour placer des points sur un graphique.

- * Des savoirs anciens ou rappelés : formule du calcul de l'aire d'un rectangle, y compris quand les dimensions ne sont pas entières, multiplication en tableau de nombres écrits sous la forme $n + p/q$

- * Des calculs déjà faits, des graphiques déjà dessinés (sur papier gradué en pouces et dixièmes de pouce), des rectangles déjà tracés correspondant à la résolution d'un problème précédent : Je prends un point du graphique, ses coordonnées représentent les dimensions d'un rectangle. Je calcule l'aire de ce rectangle. Si cette aire est supérieure à 27 cm^2 , je colorie le point en rouge, si elle est inférieure à 27 cm^2 , je le colorie en bleu, si elle est égale à 27 cm^2 , je colorie le point en noir. Ce problème s'est transformé en : chercher le plus possible de rectangles d'aire 27 cm^2 .

Les connaissances des élèves leur permettent de maîtriser les savoirs ci-dessus. Il disposent aussi des connaissances issues de la résolution du problème précédent : les points noirs séparent les points bleus et les points rouges. Sur chaque verticale, il y a un point noir, ou chaque fois que je choisis une dimension de rectangle, il y a un rectangle d'aire 27 cm^2 qui a une dimension égale à la dimension choisie.

Le contrat didactique sur les mesures fait que, bien que l'énoncé du problème fasse intervenir à la fois le cadre géométrique et le cadre numérique, une fois le problème dévolu, et une stratégie établie à l'aide du graphique et validée par des arguments géométriques, les élèves travaillent entièrement dans le cadre numérique : c'est là qu'ils calculent, qu'ils valident le résultat, et font un nouveau choix de mesure de côté. Cependant le cadre géométrique et le cadre graphique sont nécessaires à la dévolution du problème, ce sont eux qui permettent de penser que la solution doit exister : " si on agrandit le côté entre 5 et 6 à un moment l'aire du

carré va passer par 27 entre 25 et 36"² ; "les carrés sont sur une droite, cette droite rencontre la courbe des rectangles d'aire 27 cm²."² contre les certitudes issues du cadre numérique après beaucoup de calculs "ça n'est pas possible, on ne trouvera jamais 27 juste parce que un millièmme par un millièmme, ça fait 1 dix millièmme, deux millièmme par deux millièmme ça fait quatre dix millièmme.... on n'a jamais 0 aux unités, ça ne marchera jamais"². Pour que les attentes exprimées dans le cadre géométrique deviennent compatibles avec les résultats obtenus à partir des connaissances disponibles dans le cadre numérique, il faut des connaissances nouvelles. Les situations où sont confrontés le discret et le continu sont riches d'interrogations possibles du sujet sur la situation qu'il a à traiter. Le continu n'est pas accessible dans le cadre numérique à ce niveau ; il est donc difficile de provoquer de telles confrontations au sein d'un seul cadre.

Remarquons que si l'on demande aux élèves de chercher un nombre qui, multiplié par lui-même donne 27 comme résultat, les élèves ne traduiront sans doute pas le problème dans le cadre géométrique. Il est probable qu'ils feront des essais en se servant implicitement de la fonction carré. Ils doivent dans ce cas avoir une bonne maîtrise numérique puisqu'ils n'ont pas d'autre représentation pour les aider dans leur choix ou contrôler les résultats. Cette dissymétrie s'explique parce que, dans un cas, le milieu contient des éléments de deux cadres et que le contrat didactique lié aux mesures amène à faire des calculs et que, dans l'autre cas, l'énoncé ne fait intervenir que le cadre numérique et que le contrat didactique usuel lié aux opérations sur les nombres n'invite pas à traduire les calculs dans un autre cadre. J'ai pu le vérifier à propos des problèmes suivants : parmi les rectangles dont le demi-périmètre est P, peut-on en trouver un dont l'aire est A ; parmi les nombres dont la somme est S, peut-on en trouver deux dont le produit est M. Dans le deuxième cas, les élèves ne sortaient jamais du cadre numérique et avaient plus de mal à contrôler les variations liées des deux nombres ; dans le cas du rectangle, même s'ils ne dessinaient pas les rectangles, ils faisaient varier l'une des dimensions, par exemple la longueur, et en déduisaient l'autre. Dans le cas des nombres, il faut presque identifier la variable écart entre les nombres pour se ramener à un problème à une variable qu'on peut gérer en utilisant implicitement la monotonie d'une fonction.

4.2 Graphique : cadre ou registre ?

Si l'on travaille en classe de seconde sur la notion de fonction, on entre dans un nouveau domaine des mathématiques à la jonction entre l'algèbre et l'analyse, on construit des objets d'un nouveau cadre. Dans ce cadre, la fonction a des représentations relevant de divers registres de représentation sémiotique : registre symbolique lié aux écritures du cadre algébrique, registre graphique, registre des tableaux. Ces diverses représentations sont bien des représentations d'un même objet qui a une existence à travers des propriétés, des liens avec d'autres objets. Quand on se place au niveau du cours moyen, c'est surtout le problème qu'on traduit dans diverses représentations. Les objets représentés sont des rectangles et le problème ne peut pas se traduire en termes de propriétés d'un objet. L'ensemble des carrés, l'ensemble des rectangles d'aire 27 cm² n'apparaissent que sur le graphique et ne peuvent pas prendre le statut d'objet mathématique. Ils n'ont pas leur correspondant dans le cadre géométrique ni dans le cadre numérique où on doit faire face à une infinité d'objets. C'est le graphique qui amène implicitement la continuité absente du cadre numérique. Le graphique est donc porteur de propriétés non seulement visuelles mais aussi mathématiques dont on ne

² Tous ces arguments ont été fournis par des élèves de CM2.

dispose pas dans le cadre numérique ; dans le cadre géométrique, on peut retrouver l'idée de continuité en ajoutant le mouvement soit en l'imaginant, soit en utilisant un logiciel de géométrie dynamique : on retrouve alors un objet, rectangle déformable qui n'a pas vraiment de statut mathématique mais qui peut servir de substitut aux objets équation et fonction, absents du paysage mathématique à ce niveau d'enseignement. Le graphique joue donc bien ici le rôle de cadre dans la mesure où il est porteur de propriétés mathématiques qui ne sont pas dans le cadre initial du problème (pour les élèves).

Pour ce problème, le registre graphique intervient dans deux cadres : celui de la géométrie avec les dessins de rectangles, celui des fonctions avec les représentations cartésiennes. Mais le cadre des fonctions n'existe pas pour les élèves. C'est le graphique cartésien qui, à lui seul, tient lieu de cadre, cadre capable de rassembler en un seul dessin une infinité d'objets des autres cadres.

Ainsi suivant le problème et le niveau considéré le graphique cartésien pourra être un registre de représentations dans un cadre ou un cadre à part entière dans le registre graphique.

5 Exemple 2 : section plane d'un cube.

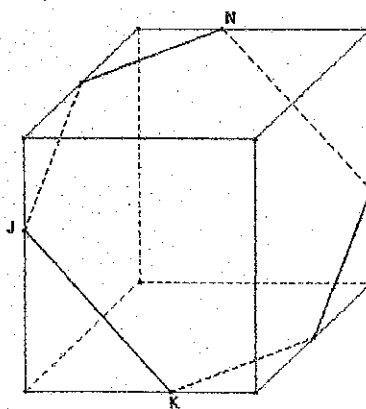
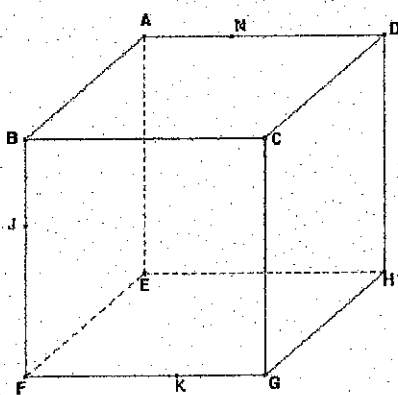
Pour illustrer de façon plus précise le jeu subtil, dans le traitement d'un problème, entre cadres, porteurs de propriétés sur les objets, et registres de représentation de ces objets, j'ai voulu aujourd'hui sortir des exemples classiques. J'ai choisi la géométrie dans l'espace qui me paraît bien montrer que le traitement dans le registre de la figure se fait dans un cadre mathématique et que ce sont ici les connaissances mathématiques qui permettent de voir la figure de l'espace à travers sa représentation plane. Le jeu de cadres se fera entre géométrie plane et géométrie dans l'espace et le milieu pourra être matériel ou constitué de certains savoirs de géométrie dans l'espace. Considérons le problème suivant qu'on peut donner en classe de seconde. Les données sont prises dans un manuel scolaire mais les questions ont été changées.

On se donne un cube $ABCDEFGH$ de 5,5 cm d'arête et les points N , J , K situés respectivement N sur $[AD]$ à 2 cm de A , J sur $[BF]$ à 2 cm de B , K sur $[FG]$ à 2 cm de G .

Dessiner la section du cube par le plan NJK sur la représentation en perspective du cube

Dessiner la section en vraie grandeur

Calculer le volume des deux parties du cube obtenues.



J'ai choisi un cas qui n'est pas trop évident mais qui n'est pas le plus complexe possible. En effet il est nécessaire de sortir des plans des faces pour dessiner la section, cependant on trouve toujours facilement une intersection avec une arête pertinente. Ici je n'ai

utilisé que les propriétés d'incidence mais on peut utiliser aussi des relations de parallélisme : les côtés du polygone intersection qui sont dans des faces parallèles du cube sont parallèles. Mais le parallélisme ne suffit pas, il faudra utiliser au moins une incidence nécessitant de sortir des faces dessinées ; cependant, les relations de parallélisme mobilisent les plans dans un ordre différent et imbriquent un peu plus la géométrie de l'espace et celle du plan.

Remarquons aussi que j'ai choisi les points de façon à donner aux variables visuelles des valeurs qui facilitent la tâche : on travaille sur le plan de face, puis sur le plan du dessus, puis sur le plan de droite qui sont les trois plans les plus visibles du cube représenté. De même, si on utilise le parallélisme, on pourra ensuite utiliser les plans de face et de dessus ou de face et de droite.

5.1 Apprentissages visés

Ce n'est pas un problème pour introduire un concept nouveau mais pour travailler et mettre en relation des notions déjà introduites. En didactique des mathématiques, on s'est jusqu'à présent beaucoup focalisé sur l'introduction de concepts nouveaux, mais l'acquisition d'une maîtrise des notions enseignées et leur utilisation dans des problèmes complexes est un point essentiel de l'apprentissage des mathématiques : il faut apprendre à mobiliser ses connaissances, à les organiser pour répondre au mieux au problème posé.

Ici on a un apprentissage sur toutes les connaissances que l'on a à mettre en œuvre pour résoudre le problème. Les deux principales sont les suivantes :

- * des intersections de droites sur le dessin ne correspondent pas forcément à des intersections dans l'espace : il faut d'abord voir si les droites sont dans un même plan.
- * il faut repérer les plans pertinents pour utiliser les connaissances de géométrie plane.

Mais il y a aussi les connaissances qui permettent de comprendre le problème :

- les connaissances permettant de relier l'objet matériel ou l'objet géométrique en trois dimensions à sa représentation sur le papier
- trois points déterminent un plan

Et aussi d'autres connaissances nécessaires pour l'action :

- * la section est un polygone convexe dont les côtés sont les segments intersection du plan avec les faces et dont les sommets sont les intersections avec les arêtes
- * un sommet intersection de deux côtés est sur l'arête intersection des faces correspondantes
- * les théorèmes et axiomes d'incidence concernant les intersections de droites et de plan dans l'espace, de droites dans le plan.

Pour la question 2, il y aura de plus les relations métriques concernant les triangles et éventuellement les polygones dans le plan. Ici on a un cas particulier : JNMK est un rectangle. L'hexagone peut donc facilement se construire à partir du rectangle et de triangles isocèles. Pour un pentagone quelconque il faudrait, par exemple, trianguler.

5.2 Traitement dans le registre de la figure

On dispose de deux registres : celui de la figure et celui du langage naturel. La question 1 se traite dans le registre de la figure et serait sans doute bien difficile à traiter uniquement dans le registre du langage. Mais le traitement de la figure est entièrement piloté

par les connaissances mathématiques : ce sont elles qui permettent d'identifier les plans et de déterminer le traitement à opérer sur la figure.

On a un premier segment facile à trouver sur la face frontale. Le point N est sur la face de dessus et la face arrière. Il faut donc trouver un deuxième point appartenant au plan JKN et à l'une de ces faces. C'est possible pour la face de dessus puisque la droite (JK) coupe les supports des arêtes de la face où elle est située en particulier (BC) qui est à l'intersection de la face frontale et de la face de dessus. etc... Ce sont bien les connaissances de géométrie dans l'espace qui guident le traitement de la figure.

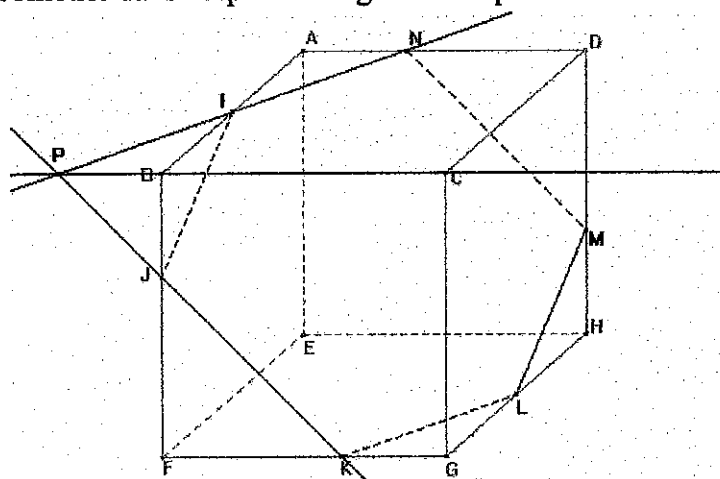
Pour la deuxième question, on peut la traiter dans le registre de la figure à condition de reconstruire en vraie grandeur un certain nombre de triangles en considérant les plans convenables. Là encore, c'est une articulation fine entre la vision sur la figure et le raisonnement qui vont permettre de sélectionner les plans pertinents : il faut articuler le registre de la figure et celui du langage naturel mais ce sont les connaissances du cadre géométrique qui contribuent à le faire parce qu'elles indiquent ce qu'il est pertinent de regarder sur la figure.

5.3 Jeux de cadre « géométrie plane / géométrie dans l'espace »

La première question relève essentiellement de la géométrie dans l'espace puisque le principal savoir concerné est que deux droites qui ne sont pas parallèles ne se coupent que si elles sont dans un même plan. Cependant, elle illustre bien que les problèmes de géométrie dans l'espace traités au niveau du lycée se ramènent à des problèmes plans, à condition d'identifier les bons plans (ici l'intersection d'un plan et d'un cube se ramène à des intersections de droites dans des plans moyennant une analyse du cube dans l'espace). Ainsi, la prise en compte du fait qu'une arête du cube est intersection de 2 faces permet d'exploiter cette arête comme relais pour passer d'une information sur une face à une nouvelle information sur une autre face. A ce moment là seulement, le travail se passe en géométrie plane qui devient le cadre de travail, le cadre intermédiaire avant de pouvoir répondre au problème posé. Remarquons au passage que le fait que les droites sont non parallèles et le fait qu'une droite coupe un segment sont lus sur la figure.

Nous avons déjà remarqué qu'on pourrait utiliser un autre outil de géométrie dans l'espace - deux plans parallèles sont coupés par un plan qui ne leur est pas parallèle suivant deux droites parallèles - en alternance avec les outils de géométrie plane.

C'est la deuxième question, et aussi la troisième, qui nécessitent vraiment un jeu de cadres entre la géométrie dans l'espace et la géométrie plane.

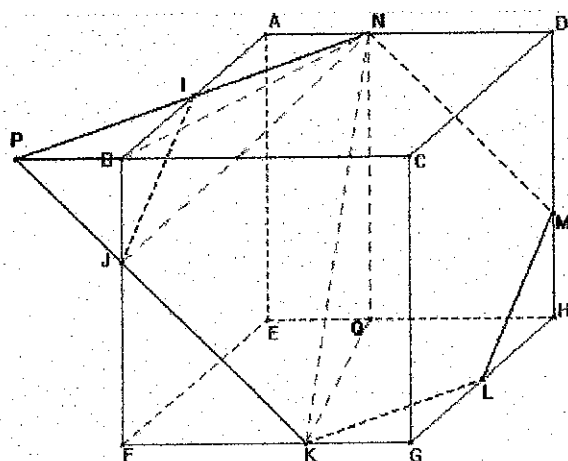


Il faut se placer dans le plan BCGF pour voir les triangles rectangles isocèles et déduire que $PB = 2 \text{ cm}$. On peut alors se placer dans le plan ABCD pour appliquer le théorème de Thalès par exemple et conclure que I est au milieu de [AB] puis utiliser le théorème de Pythagore pour calculer IN et de même pour les autres côtés.

Pour voir que JNMK est un rectangle, on a déjà deux côtés parallèles et de même longueur sur les faces parallèles du cube. On peut montrer que le triangle NJK est rectangle en J à l'aide de la réciproque du théorème de Pythagore après avoir calculé les longueurs de ses côtés en utilisant le théorème de Pythagore dans différents plans et en identifiant d'autres triangles rectangles :

JK dans le triangle JFK (plan BCGF), BN dans le triangle ABN (plan ABCD) puis JN dans le triangle BNJ puis QK dans le plan EFGH où Q est la projection orthogonale de N sur le plan EFGH (trapèze rectangle EQKF par exemple) puis NK dans le triangle rectangle NQK.

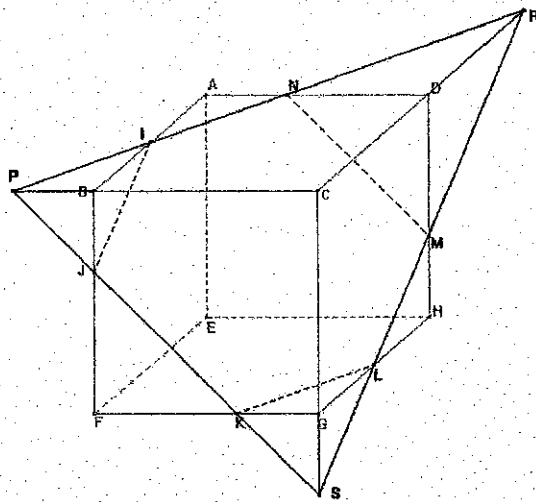
On peut aussi repasser par la géométrie dans l'espace pour identifier les plans de symétrie de la figure de l'espace : ACGE et DCFE et les axes de symétrie de la section.



Le cadre numérique intervient aussi car la géométrie plane est de la géométrie euclidienne avec mesure mais il n'y a pas à proprement parler de jeu de cadres puisque le numérique est seulement un outil de calcul : on ne produit rien de nouveau dans le cadre numérique et celui-ci ne permet de produire du nouveau dans le cadre géométrique que via des théorèmes de géométrie (Thalès ou Pythagore).

Pour la troisième question, on a besoin de connaissances de géométrie dans l'espace et d'une bonne visualisation de la figure pour voir le morceau de cube comme la différence d'une grosse pyramide CPRS et de trois petites, BPIJ, DNMR, SGLK, de la formule du volume d'une pyramide, de la capacité à identifier sur la figure les éléments pertinents de la formule et de les calculer en se ramenant à des connaissances de géométrie plane : en fait ici les calculs ont été faits pour la question 2 sauf pour DR. Là encore le cadre numérique est au service de la géométrie.

Les petites pyramides seront apparentes si l'on a construit la section en utilisant les relations d'incidence. Si la section est donnée il faut prolonger les arêtes pour voir apparaître les pyramides pertinentes.



5.4 Et le milieu ?

Un milieu matériel est possible : cube avec 3 points marqués. Même si le cube est réalisé dans une matière qu'on peut couper facilement (par exemple pomme de terre) il n'est pas facile de réaliser la section sur le milieu matériel. Là encore les connaissances mathématiques sont nécessaires pour déterminer les intersections avec deux faces voisines de façon à bien placer le couteau. En revanche, le milieu matériel est un milieu pour la validation. En particulier pour la deuxième question, on peut réaliser le polygone section sur une feuille de carton et l'évider. La feuille doit emboîter correctement le cube.

D'autres éléments de validation peuvent être des savoirs mathématiques : par exemple le parallélisme des segments qui sont dans des faces opposées. Ici plusieurs éléments peuvent intervenir dans la construction : des relations d'incidence ou des relations de parallélisme. Les éléments qui n'ont pas servi à la construction peuvent servir à la validation. Si l'on met dans le milieu matériel un certain nombre de savoirs, par exemple en donnant une liste de propriétés de la figure complète et de théorèmes que l'on peut utiliser, il reste à reconnaître les plans et les droites pertinents à faire intervenir et dans quel ordre les faire intervenir.

En conclusion, le premier exemple montre la pertinence des jeux de cadres pour produire des connaissances nouvelles, ce qui était connu depuis longtemps à travers tous les travaux de Régine Douady. J'ai voulu, dans le deuxième exemple, montrer sa pertinence pour traiter des problèmes complexes et aussi montrer que, en mathématiques, l'articulation entre deux registres se fait à l'intérieur d'un cadre, en utilisant les connaissances de ce cadre parce que les grilles de lecture des représentations sont données par le cadre. Cependant des jeux de cadres peuvent contribuer à cette articulation : ici, qu'on soit en géométrie dans l'espace ou en géométrie plane, on dispose du registre des figures et du registre du langage naturel. Le fait d'isoler le sous-cadre de la géométrie plane va amener à redessiner dans le plan de la feuille des figures extraites de la représentation en perspective et amener à mettre en adéquation des discours sur la figure avec ce que l'on voit.

Quant au milieu, il me paraît constitué éventuellement d'une partie matérielle, mais aussi d'une partie d'un cadre ou de plusieurs cadres mathématiques comprenant des savoirs naturalisés de ce cadre ou de ces cadres et qui, de ce fait, acquièrent une certaine objectivité, suffisante pour amener des rétroactions aux décisions ou aux déclarations du sujet dans une situation adidactique, lui permettant ainsi de construire ou consolider de nouvelles connaissances dans les cadres concernés. La possibilité de jeux de cadres (qui sont, comme nous venons de le voir, l'une des voies à l'origine des raisons des adaptations du sujet à la

situation adidactique proposée et des rétroactions possibles du milieu, et donc l'une des voies pour construire ou consolider de nouvelles connaissances dans les cadres concernés) est liée au fait que le milieu mette en présence plusieurs cadres et que le contrat didactique relatif à ces cadres permette un passage dans les deux sens. Par exemple, les problèmes de mesure sont favorables à une interaction entre les cadres géométrique et numérique. Les représentations jouent un rôle fondamental en mathématiques par un jeu subtil entre les propriétés mathématiques et les propriétés visuelles ou linguistiques des représentations. Là encore, la donnée donc la présence dans le milieu d'une situation de telle ou telle représentation va influencer sur les connaissances mises en jeu par les élèves : les variables cognitives liées aux représentations sémiotiques interfèrent avec les variables mathématiques du problème.

Bibliographie

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

DOUADY R. (1987) Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en didactique des mathématiques* n° 7/2, 5-32, La Pensée Sauvage, Grenoble

DOUADY R. (1992) Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement *Repères-IREM* n° 6, éd. Topiques, Pont-à-Mousson, 132-158.

DOUADY R. (1994) Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir, *Repères IREM* n°15, 37-61, Topiques éditions

DUVAL R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang, Berne.

Cadres, jeux de cadres et théorie des situations

Guy Brousseau

DAEST, Université Bordeaux 2

1 Introduction

Depuis le commencement de nos relations, au tout début des années 70, Régine Douady s'est montrée intéressée par l'approche que la « théorie des situations didactiques en mathématiques » offrait pour l'étude de l'enseignement des mathématiques. Par ses contributions, tant théoriques qu'appliquées, elle a enrichi considérablement le domaine. La « dialectique outil -objet » par exemple, se joue entre les situations d'action, de formulation et de validation, pour transformer les modèles implicites en moyens identifiables, puis ces moyens en *instruments* – réutilisables et communicables-, et parallèlement en *objets* d'études, et par des adaptations qui anticipent sur les usages futurs, en *outils*, propres à effectuer le chemin inverse, d'objet d'études en outils. L'idée de cette dialectique, l'un des mécanismes fondamentaux de l'avancement des mathématiques et de la transposition didactique, est d'ailleurs très profondément liée à l'idée qui fait reposer la création de la pensée sur les interactions d'un homme distinct d'un « milieu » sur lequel il agit et qui réagit sur lui, axiome fondamental de la T.S.D.M. (Théorie des situations didactiques mathématiques). Mais aujourd'hui c'est d'un autre de ses apports conceptuels qu'il s'agit : la considération de cadres et surtout de « jeux de cadres ». Il s'agit là d'une des réponses à un des problèmes non résolus de la théorie celui des agrégats de connaissances adaptés à des agrégats de situations.

2 La notion de cadre

*« Un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations. Nous concevons la notion de cadre comme une notion dynamique. Le **changement de cadres** est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui sans être nécessairement tout à fait équivalentes, permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en œuvre d'outils et techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation. L'objectif est pour le chercheur, de se forger des convictions débouchant sur des conjectures et de poser des jalons permettant d'en organiser des plans de démonstration... [ou à en chercher les failles]... Les traductions d'un cadre dans un autre aboutissent souvent à des résultats non connus, à des techniques nouvelles, à la création d'objets mathématiques nouveaux, en somme à l'enrichissement du cadre origine et des cadres auxiliaires de travail¹ ».*

¹ Régine DOUADY, Jeux de cadres et dialectique outil-objet, in *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 7/2, 5-31 (1986) La Pensée Sauvage Grenoble

Régine Douady utilise ici une métaphore courante chez les mathématiciens, mais significative. Suivant cette métaphore, une branche des mathématiques, c'est-à-dire un ensemble organisé de théories, constitue un cadre dès lors qu'elle reçoit - ou qu'elle est susceptible de recevoir - un « tableau », c'est-à-dire une collection d'éléments d'une autre branche, laquelle appartient ou constitue un autre cadre. Ainsi le choix du terme « cadre » instaure d'emblée un rapport entre au moins deux cadres. Si l'on admet que les cadres sont organisés différemment, les éléments migrants sont appréhendés selon deux structures et avec deux environnements différents : l'ancien et le nouveau.

Mais arrêtons-nous un instant sur ce qu'est un cadre. Il existe bien des termes pour désigner des regroupements de connaissances mathématiques et bien des manières de les constituer et de les utiliser. Des énoncés aux définitions et aux théorèmes puis aux théories, des notions aux concepts, des signes aux formules et aux langages, des secteurs aux branches, l'agrégation d'objets mathématiques se constitue suivant des liens multiples et suit des modalités variées. Les liens à interroger sont par exemple :

- des liens « logiques » : les objets se déduisent les uns des autres par des dérivations logiques relativement courtes, ou l'un tient une place dans la démonstration de l'autre etc.. Ces liens sont apparentés à des liens formels, les objets peuvent s'exprimer de la même manière, dans le même langage, l'un est une réécriture de l'autre ;
- des liens « topologiques », les objets diffèrent peu les uns des autres, sont « proches » au sens qu'ils ne diffèrent que par quelques variables. Par exemple :
 - des liens « sémantiques » : ils traitent, quoique de façon différente, des mêmes objets ou bien ils sont co-présents dans des études importantes ou nombreuses ;
 - des liens pragmatiques : ils sont traités par la même théorie, ou par un même ensemble de théories

Mais ces « liens » peuvent aussi bien être des raisons de grouper les notions ou au contraire de les repousser dans des domaines différents, selon que l'on veut généraliser ou différencier les notions pour le travail en cours. Grâce à cette souplesse, les mathématiciens ne cessent de réorganiser leur champ pour poser et résoudre des problèmes nouveaux.

Régine Douady entend par « cadres » les regroupements issus de leur activité, mais globalement les plus vastes et les plus stables de l'univers des mathématiques : les cadres numérique, algébrique, géométrique, graphique, très anciens, et les cadres fonctionnel topologique ou informatique sont plus récents.

Les raisons de ces regroupements ou de ces réorganisations de groupements sont aussi nombreuses que les fonctions variées qu'ils remplissent, mais on peut soupçonner que les deux raisons fondamentales sont d'assurer au moindre coût les plus grandes possibilités de transformation et d'augmentation des connaissances tout en continuant à en garantir la validité. Mais les fonctions des mathématiques et par conséquent les regroupements de connaissances doivent-ils être les mêmes dans toutes les institutions et notamment dans les institutions scolaires ? Pour des raisons d'homogénéité culturelle la réponse devrait être oui, mais pour des raisons d'adaptation effective il apparaît que non. La didactique cherche à dénouer ce conflit, mais il n'y a guère de risque que ces divergences se manifestent sur l'organisation des cadres, ce qui fait leur valeur pour l'enseignement.

3 L'agrégation de connaissances et des situations en T. S. M²

Néanmoins, sur des questions plus particulières, les professeurs sont constamment confrontés à ces problèmes d'agrégation des connaissances mathématiques (en notions, en leçons, en chapitres etc.), et d'agrégation de situations (pour constituer par exemple des assortiments d'exercices ou de problèmes³), qu'ils doivent mettre en rapport avec des agrégats d'élèves (par exemple pour différencier ceux qui ont acquis une notion de ceux qui ne l'ont pas acquise). La façon dont ils utilisent ces agrégats n'est pas très différente de celle dont ils utilisent les cadres et en tout cas elle leur pose les mêmes problèmes. C'est pourquoi il peut être intéressant de plonger l'étude du fonctionnement des cadres dans celle plus générale (du point de vue de la didactique théorique) de l'agrégation (justification et constitution des agrégats).

Ce problème se présente immédiatement en théorie des situations. Pour des questions de commodité, on suppose d'emblée que l'on peut identifier « une » connaissance (ou un agrégat) afin d'en étudier le fonctionnement isolé. La question de l'agrégation des connaissances se pose à part, un peu comme en théorie naïve des ensembles où on distingue des éléments et des ensembles pour illustrer l'appartenance alors que tous sont des ensembles. Les études, aussi bien empiriques mais surtout théoriques de cette épineuse question, n'avancent que très lentement.

Il est clair que la définition d'objets nouveaux répond à des besoins d'économie. Il est possible alors d'en déduire certaines inégalités didactiques, comme celle qui ferait dépendre l'intérêt d'une définition de considérations sur sa longueur, sur la complexité du répertoire qu'elle utilise, sur sa fréquence d'emploi dans un domaine déterminé etc.. Il en est de même de la constitution et de l'usage de catégories d'objets, de démonstrations etc. Tous les groupements n'ont donc pas le même intérêt pour tout le monde.

Il peut paraître vain de vouloir retrouver par la théorie et le calcul ce qui est le résultat de l'activité complexe d'un très grand nombre de personnes ayant affronté de façon répétée une multitude de problèmes. Mais si l'explication des agrégats constitués n'est pas forcément prioritaire, il semble bien que l'apprentissage en produise « naturellement » et en utilise qui n'ont pas l'évidence culturelle des théories ou des cadres mathématiques. Gérard Vergnaud détermine ainsi des « champs conceptuels » qui, du point de vue de la psychologie, joueraient le rôle des branches et des cadres, Yves Chevallard considère des praxéologies pour organiser les fonctions réciproques des connaissances et Raymond Duval identifie les groupements attachés à des registres linguistiques. La théorie des situations, engagée à mettre en évidence aussi bien les ressorts des actions et les connaissances implicites qui leur sont attachées, que les langages et les organisations logiques et mathématiques qui se manifestent dans les situations, a avancé la notion de « conception ». Une conception est constituée comme un concept mathématique, comme un champ conceptuel, (i.e. d'un répertoire de schèmes et de modèles implicites, de langages et de registres linguistiques, de savoirs et d'un champ de situations), mais à l'inverse d'un champ conceptuel, elle est attachée à une institution ou à un sujet : elle est le fruit d'une histoire, d'une adaptation. Elle peut être inconsistante, inadéquate,

² T.S.M. Théorie des Situations Mathématiques, partie de la Théorie des Situations Didactiques en Mathématiques TSDM.

³ dont l'étude est commencée par Florence Esminjaud-Genestoux dans sa thèse « Fonctionnement didactique du milieu culturel et familial dans la régulation des apprentissages scolaires en mathématiques » Université Bordeaux 1 (2000).

inadaptée, inefficace... Elle peut être stable ou fugace, ou même constituer un obstacle... Je dois reconnaître que la recherche de conceptions « implicites », celles qui n'ont pas reçu le label de la culture ou de l'histoire n'est pas aisée et qu'il est fréquent que l'on puisse douter de son utilité⁴. Mais c'est à ce niveau de généralité, me semble-t-il, qu'il faut se placer pour étudier, de façon scientifique et expérimentale, la question du fonctionnement des agrégats dans les situations didactiques et donc en particulier pour analyser le fonctionnement des cadres en didactique. En particulier la dépendance entre les connaissances dites « acquises » et les nouvelles « acquisitions » (métaphore un peu douteuse) est liée à la constitution de ces conceptions, et les difficultés du rejet des obstacles et des erreurs.

L'étude précise des raisons de l'agrégation des connaissances, de leurs formes et de leur constitution sortirait du cadre de cet hommage et j'espère que Régine me pardonnera cette digression⁵.

4 Les changements de cadres comme technique de recherche

Régine insiste sur le caractère producteur des changements de cadres volontaires, effectués par un chercheur, à ses risques et périls. Elle prolonge ainsi les travaux de Polya qui préconisait la simple recherche de similitudes ou d'analogies. Le changement de cadre est bien plus qu'une suggestion ou qu'une heuristique. C'est une méthode. Ses difficultés et ses avantages sont bien connus de ceux qui doivent traduire un texte d'une langue dans une autre relevant d'une culture assez différente. En cherchant dans un second répertoire les moyens d'exprimer ce qui a été construit dans le premier, on est conduit à interroger la pensée elle-même.

La facilité conduit parfois à se représenter cette « traduction » comme une sorte d'isomorphisme : on reconnaît la chose transportée par ce qui est identique dans les deux cadres. Cette représentation est insuffisante : il est parfois aussi important de s'intéresser à ce qui est différent. C'est-à-dire qu'il convient d'appréhender la comparaison par des moyens plus généraux : des morphismes ou des descripteurs par exemple.

Mais il y a plus. Que gagne Dedekind lorsqu'il passe de l'ensemble des points de la droite à l'ensemble des coupures de la droite⁶ ? On peut voir que ce qui change

⁴ La recherche pourtant minutieuse d'Eugène Comin n'a pas permis de faire apparaître clairement les conceptions de la proportionnalité (*Proportionnalité et fonction linéaire* Thèse de l'Université de Bordeaux 1 2000)

⁵ Un cadre, une praxeologie, un champ conceptuel, un concept, une conception, un registre ou une carte sémantique sont des objets différents par leur définition, leur emploi, les objets qu'ils identifient, mais ils ont en commun le fait de désigner des agrégats de « connaissances » destinées à fonctionner ensemble assez fréquemment. Il convient d'y trouver « tout » ce qui est nécessaire à la résolution d'une famille de situations déterminées par une institution (les concepts), par la culture (les cadres), par leur composition (les champs conceptuels), par un mode de constitution (les conceptions), par leur fonctionnement (les préxeologies : tâches, techniques, technologie, théorie), par les systèmes psycholinguistiques qui peuvent s'y présenter (les registres), par l'histoire, par la méthode d'étude (les cartes sémantiques) etc. On peut néanmoins y reconnaître des éléments similaires, (entre autres des organisations de connaissances et de savoirs).

essentiellement ce sont des propriétés ergonomiques des objets qu'il considère. Un intervalle est plus familier plus facile à concevoir que l'ensemble des suites de Cauchy, et il porte mieux les informations topologiques pertinentes que l'idée d'un point sur une droite.

Si la traduction est un isomorphisme, (de la structure, du problème) le gain logique est nul. C'est l'environnement de connaissances et de savoirs mobilisés qui change ainsi que leurs propriétés économiques, leur familiarité, leurs proximités etc. Et plus particulièrement leur statut d'objet, de moyen ou d'outil : telle transformation péniblement définie dans un cadre formel devient évidente dans le cadre géométrique parce qu'elle est l'outil de problèmes de mécanique familiers. Tels rapports entre des transformations géométriques, impossibles à rencontrer dans aucune activité spatiale deviennent simples et symétriques dans un cadre algébrique.

L'importance du rôle de la vue dans nos comportements et dans notre culture fait que nous identifions notre connaissance de l'espace avec notre « vision », au point de la qualifier de vision mentale⁷. Mais nous possédons une telle capacité et une telle rapidité d'exploration et de mémorisation des informations de ce type qu'il y a tout intérêt à y traduire ce que l'on veut traiter. Il est bien connu que certains traitements algorithmiques ou syntaxiques y sont moins commodes et que l'usage du temps présente certains avantages.

C'est sur le fond des nécessités de l'ajustement de la traduction et sur les différences de familiarité des objets correspondants que surgit parfois (mais parfois seulement) ce qui fait l'intérêt des changements de cadres : le contre exemple, la généralisation, l'identification à un objet connu, la preuve etc.

5 Usages didactiques : des changements de cadres aux jeux de cadres

Comment ce qui est utile aux chercheurs en mathématiques ne serait-il pas utile aux élèves et à leur professeurs. Le moyen incontournable d'exprimer, d'apprendre et de comprendre les connaissances est leur organisation. Quelle organisation de hasard pourrait l'emporter sur l'organisation culturelle ?

La théorie des situations implique de considérer les connaissances du point de vue des actions du sujet et surtout des situations auxquelles elles répondent. L'élève qui cherche et qui, de son propre chef, prend le risque d'envisager son problème dans un autre cadre que celui qui lui a été proposé, se trouve dans la même position que le mathématicien du paragraphe précédent et peut y trouver les mêmes avantages. Il faut saluer les succès de l'entreprise comme il convient. Mais je connais peu de problèmes scolaires qui doivent ou même peuvent être résolus par ce moyen hardi. Faut-il inciter les élèves à le faire ? La question est plus délicate.

On connaît le rôle de l'analogie dans l'enseignement. Les professeurs sont friands de ce moyen d'obtenir à bon marché des batteries de problèmes que les élèves peuvent ainsi apprendre à résoudre par analogie. Il n'y pas lieu de mépriser ce moyen, mais on connaît les effets de l'abus de l'analogie. Car il faut bien observer que le procédé est assez orthogonal au

⁶ Pedro Alson montre comment un changement de traduction vers le cadre graphique modifie très sensiblement les conditions ergonomiques de l'étude des fonctions : *Eléments pour une théorie de la signification en didactique des mathématiques*. Thèse de l'Université Bordeaux 1 (2000)

⁷ Avec Grecia Galvez nous avons montré les limites de ce point de vue. Je ne crois pas que le traitement des informations visuelles dans le système nerveux central passe par des structures analogiques.

projet. L'élève qui imite ou importe une solution, par imitation, dans des conditions qu'il croit analogues, peut ne pas essayer (en plus) de comprendre si et pourquoi cette solution est adéquate, et quand elle ne le serait pas. Il est même incité par cet apprentissage à remplacer le raisonnement mathématique par une analogie. De plus, ce procédé se révèle à l'usage très coûteux, car pour définir un objet par ce moyen, il faut croiser toutes les valeurs des variables non pertinentes de la situation (il faut parcourir le champ par le biais de variations qui montrent ce qui est « toujours » conservé)

En général, l'élève avec qui on utilise l'analogie comme méthode pédagogique n'est pas dans la même position que le chercheur. Ce n'est plus un risque qu'il prend, c'est un moyen de reconnaître ce qu'on lui dit et qu'on lui demande et d'y répondre. Le risque que prenait le chercheur et qui pouvait maintenir sa vigilance en éveil ne lui est plus renvoyé. C'est le professeur qui l'assume, avec toutes les conséquences que l'on connaît⁸.

L'analogie comme moyen didactique ne peut pas être évitée. Passe de la considérer comme un moyen sporadique légitime mais l'utiliser systématiquement et la professer comme méthode est abusif.

Remarquons que ce qui est visé ci-dessus est l'usage du changement de cadres comme *outil* heuristique enseigné, utilisé systématiquement et justifié par une épistémologie simpliste.

Aussi n'est-ce pas du tout ce que nous propose Régine Douady. Le changement de cadres montré, comme *objet* d'enseignement, pour étendre le champ d'une notion et l'ériger en concept fait partie du savoir à enseigner et de la culture. Son rôle est même très important. Dès lors que le changement de cadres devient objet d'étude, il se mue en *jeu de cadres* qui, comme tous les objets d'enseignement, pourra se transformer en moyen et en outil de travail pour les élèves.

6 Les jeux de cadres

La détermination des objets qui ne sont pas donnés par la culture (comme les cadres) suit deux voies : la méthode descendante qui procède par différenciation de gros objets : - faire telle chose est différent de faire telle autre par tel ou tel aspect - et la méthode ascendante qui procède par agrégation des petits : tel objet est utilisé avec ou voisin de tel autre de tel ou tel point de vue. Limiter les différenciations et hiérarchiser les agrégations sont les deux faces d'une même difficulté que rencontrent la définition et l'usage de ces « modèles ». La théorie des situations, favorise la solution de ces difficultés parce que les objets sont définis par leur fonction, ce qui fait apparaître des objets différents, mais parents en ce sens qu'ils peuvent jouer la même fonction. En T.S. l'étude d'un agrégat isolé n'a pas beaucoup de sens, ni du point de vue théorique, ni du point de vue expérimental. Un agrégat est toujours déterminé par des choix et donc le paradigme d'un ensemble d'alternatives.

Ainsi l'étude du fonctionnement didactique des jeux de cadres, c'est-à-dire d'un ensemble organisé d'agrégats, est méthodologiquement beaucoup plus pertinente : par exemple un jeu de cadre définit non seulement des proximités entre les éléments d'un même cadre mais aussi une distance minimale entre des objets correspondants de deux cadres différents. De plus, les jeux de cadre limitent heureusement le possibilités de rapprochement.

⁸ Les effets du contrat didactique

Par nature, le champ des mathématiques est infini. Chaque partie, chaque élément est susceptible de se combiner avec d'autres pour créer des questions et des objets nouveaux et les résultats sont toujours différents, par leur objet, par leur présentation, par leur fonction etc.. chaque partie est susceptible de devenir le métalangage d'une autre (en s'y appliquant) et se prête par conséquent à une infinité d'interprétations. La diversité de ces interactions charme les amateurs mais affecte aux mathématiques enseignées une trop grande entropie. Si la totalité du répertoire mathématique des élèves est susceptible de devoir être appliqué dans chaque problème, la difficulté devient excessive et bloque l'apprentissage.

Les jeux de cadres présentent donc un grand intérêt comme *objet d'enseignement*. Et Régine Douady a parfaitement montré les caractéristiques de leur utilisation. J'en soulignerai deux :

- certains enseignants pourraient être tentés de se borner à présenter les différents cadres, sans expliciter leurs rapports ou même en les cachant, afin de pouvoir les utiliser comme moyens didactiques (de produire des problèmes ou de surprendre les élèves). Il est indispensable d'explicitier les éléments et le fonctionnement du jeu de cadres (tout en limitant toutefois le glissement méta-didactique que cette stratégie risque de favoriser) ;
- d'autres à l'inverse pourraient présenter un tableau mort de ressemblances et de différences, et réduire le fonctionnement du jeu de cadres au spectacle de l'analogie. Régine a bien insisté dans les études expérimentales qu'elle a menées, sur l'importance du caractère dialectique des rapports entre cadres. Il faut y puiser des questions autant que des réponses.

Ce dernier point renvoie à l'usage effectif des jeux de cadres dans la genèse scolaire des notions mathématiques. Ils forment ensemble un lieu où se développent les autres dialectiques, poussées par les situations en évolution. Quels rôles spécifiques jouent-ils ? Quels indices peuvent conduire à les mettre en œuvre, ou au contraire à limiter la fuite en avant que constituerait une accumulation des similitudes ? Quels rapports ont ils avec d'autres paradigmes et d'autres alternatives moins solidement établies ?

7 La disparition du cadre « analogique » dans l'enseignement obligatoire

Nous allons hélas avoir la possibilité de voir les effets de la disparition d'un de ces cadres et de mesurer par là l'importance des Jeux de cadres. Il s'agit de ce que j'appellerai le cadre analogique.

Tous les professeurs et tous les mathématiciens tiennent pour assez nécessaire la connaissance de la droite « réelle ». La facilité avec laquelle on y porte la plupart des objets mathématiques élémentaires : les distances, les ordres, les négatifs, les intervalles, les opérations numériques, les voisinages etc. en font un auxiliaire indispensable de nombreuses démonstrations et un instrument de nombreux apprentissages. Or cette connaissance est en train de perdre ses fondements.

Le remplacement des manipulations humaines de mesurage des grandeurs « continues » - essentiellement les longueurs, les masses, le temps, mais aussi les angles, les capacités, les volumes - par des instruments automatiques, a fait disparaître des moyens de construction et des éléments de signification de cette droite, par exemple les transformations associées aux manipulations nécessaires au mesurage et aux calculs. Mais ce remplacement n'a pas beaucoup affecté la connaissance « empirique » de cette droite.

Par contre le remplacement partout des affichages « analogiques » par des affichages numériques va sérieusement écorner le nombre et la durée des usages de cette droite.

L'inventaire des objets mathématiques dont la conception va passer désormais par des voies beaucoup plus coûteuses donne la mesure des efforts supplémentaires qu'il faudra faire dans les classes, contre le cours des habitudes. Par exemple il est beaucoup plus difficile de concevoir la proximité de deux nombres, et l'intervalle qu'ils forment, par l'examen de leur expression numérique que par leur position relative sur une droite. Et là, l'écriture d'une paire de nombres « $\{A, B\}$ » contient beaucoup moins de potentialités de représentations que l'image d'un segment sur une droite.

Lorsque l'usage des calculatrices aura rendu très peu familiers les calculs mentaux élémentaires, il faudra inventer de nouveaux objets mathématiques et de nouvelles manières de les connaître.

Si le milieu extra-scolaire influence les connaissances scolaires par divers canaux explicites (les décisions « politiques » sont bien moindres que les représentations culturelles et l'épistémologie spontanée véhiculées par divers médias), les situations de la vie courante ont des effets bien plus puissants parce qu'ils sont implicites, moins visibles et plus incoercibles.

Cet effet vient renforcer une évolution normale des mathématiques qui, par la théorie de la mesure, ont pu s'affranchir de l'étude des grandeurs, renvoyée dans le domaine des différentes disciplines (physique, économie etc.). De plus, une évolution - explicable par d'autres raisons - vers une plus grande proximité de ce que les enfants écrivent à l'école avec les expressions algébriques, a fait disparaître presque complètement le traitement explicite des nombres-mesures (accompagnés d'une unité). Enfin, le rapprochement des enseignements des mathématiques avec les conceptions des mathématiciens a fait sortir des programmes de mathématiques du primaire de nombreux sujets aujourd'hui rattachés à d'autres disciplines. Ces sujets qui étaient pourtant indispensables à la compréhension et à l'usage des mathématiques par le fait qu'ils constituaient des jeux de cadres, ne sont en conséquence plus enseignés à ce niveau.

8 Apports Bordelais

J'ai dirigé quelques travaux utilisant ou étudiant le concept de cadres : ce sont, entre autres, ceux de Eduardo Lacasta, Isabelle Bloch, Pedro Alson, et Eugène Comin.

Eduardo LACASTA a montré que la compréhension d'une notion l'emporte sur la connaissance d'un cadre comme facteur d'explication des réussites des élèves à un questionnaire sur la notion de fonction (et heureusement).

Pedro Alson a étudié un profond changement de la représentation des fonctions dans le même cadre graphique, puis il a essayé de formaliser le rapport entre une théorie et sa description dans un cadre différent,

Isabelle Bloch a comparé les ostensifs (elle dit « les divers registres » mais pour moi les registres sont des petits bouts de cadres) mobilisés pour représenter les fonctions pour l'étude des limites et mis en expérience les idées d'Alson.

Eugène Comin en étudiant la proportionnalité a montré l'influence prévalente des « cadres » et des situations typiques sur la conception de linéarité, conclusion qui semble contraire à celle d'Eduardo.

Par contre il est exact que je n'ai jamais étudié de façon systématique l'usage des jeux de cadres, ni *du point de vue théorique*, ni dans mes *travaux d'ingénierie*⁹. Je me suis contenté de signaler la différence qu'il y avait entre l'usage systématique de jeux de cadres dans la recherche et dans l'enseignement, et certains emplois didactiques un peu pervers de la notion de changement de cadres (comme d'ailleurs de nombre d'autres procédés « heuristiques ») pour justifier des ruptures de contrat trop violentes ou pour manifester indûment une épistémologie ésotérique.

9 Conclusions

L'approche qui consiste à observer des objets empiriques de l'enseignement, à les étudier et à les utiliser de façon astucieuse dans l'enseignement est parfaitement compatible et même complémentaire avec l'approche théorique et expérimentale. Je dirai même qu'elle n'en est pas une alternative, elle en fait partie, chacune est indispensable à l'autre. Nous ne sommes pas nombreux à éprouver ce sentiment pour avoir voulu créer et observer des processus longs et dialectiques sur des questions importantes. Et Régine Douady s'y est employée merveilleusement

Les Jeux de cadres méritent d'être utilisés dans l'enseignement et doivent continuer à être étudiés en didactique. Mais comme pour la plupart des concepts de didactique, leur bon usage ne se diffuse pas facilement vers les enseignants. Les pratiques des mathématiciens sont trop éloignées de celles des enseignants, les problèmes des enseignants bien trop ignorés des mathématiciens pour que la compréhension s'établisse la plupart du temps sur autre chose que des malentendus. Les mathématiques et l'épistémologie qu'ils ont en commun sont bien trop faibles pour engendrer les solutions nécessaires et pour faire passer d'une institution à l'autre autre chose que des métaphores. Les apports de la didactique - théorie, expériences et ingénierie - seraient nécessaires, mais pour l'instant ils sont beaucoup trop modestes en regard des attentes et déjà beaucoup trop complexes pour les moyens qu'on est en mesure de leur réserver.

En tout cas, Régine merci pour ta vigilance mathématique et pour tes nombreux apports en Didactique.

Bibliographie

ALSON HARAN, Pedro; (2000) "Eléments pour une théorie de la signification en didactique des mathématiques. " Thèse de l'Université Bordeaux 1

BLOCH, Isabelle. (2000) " L'enseignement de l'analyse au Lycée : la notion de limite." Thèse de l'Université Bordeaux 1

COMIN, Eugène (2000) "Proportionnalité et fonction linéaire Caractères causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire." Thèse de l'Université Bordeaux 1

⁹ Sauf avant 1970, dans mon ouvrage de chez Dunod, référence plus loin

DOUADY, Régine; (1986) "Jeux de cadres et dialectique outil-objet", in *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol .7/2, 5-31 La Pensée Sauvage Grenoble.

ESMINJAUD –GENESTOUX, Florence. (2000) " Fonctionnement didactique du milieu culturel et familial dans la régulation des apprentissages scolaires en mathématiques" Thèse de l'Université Bordeaux 1

GALVEZ PEREZ, Grecia. (1985) "Aprendizaje de la orientacion en el espacio urbano" CINESTAVMexico

LACASTA ZABALZA Edouardo. (1995) "L'usage des graphes dans l'enseignement" Thèse de l'Université Bordeaux 1

MAUDET, Camille; (1982) Les situations et les processus de l'apprentissage d'une fonction logique. Thèse de 3^{ième} cycle Université Bordeaux 1

PERRIN-GLORIAN, Marie-Jeanne, (1993) "Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans les classes faibles" in *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol .13/1.2 pp 5-118 La Pensée Sauvage Grenoble

RATSIMBA-RAJOHN, Harrisson, (1982) " Elements d'étude de deux méthodes de mesures rationnelles" in *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol .3/1, pp 65-120

Comment décrire et analyser l'activité mathématique ?

Cadres et registres

Raymond Duval

Université du Littoral, IUFM Nord Pas de Calais

L'apport de Régine Douady à la recherche didactique est d'avoir exploré jusqu'où on pouvait faire mettre en résonance «le travail du maître et des élèves dans la classe» avec «l'activité des mathématiciens» (R. Douady 1992, p. 132). Elle est partie de l'idée que les situations scolaires d'apprentissage devaient d'abord mettre l'élève «en activité mathématique» (1986, p.9), et cela dès l'école primaire (1984). C'est dans cette perspective qu'elle a élaboré l'hypothèse globale suivante (1986, p.9) :

On peut construire effectivement des connaissances mathématiques en faisant jouer *la dialectique outil-objet* au sein de *jeu de cadres* appropriés, grâce à des problèmes répondant à certaines conditions.

Cette hypothèse, qui se réfère à une description épistémologique du travail du mathématicien, présuppose évidemment que l'activité mathématique ne mobilise rien d'autre que les structures cognitives les plus communément partagées par tous les individus, mathématiciens ou non mathématiciens, sujets cultivés ou non cultivés. Cela revient à postuler un certain «isomorphisme», «partiel» (Piaget 1967), entre les démarches mathématiques et le fonctionnement cognitif commun à tout individu. Mais l'importance communément accordée à la «résolution de problème» en dehors des mathématiques pouvait alors être considérée comme suffisante pour justifier une telle présupposition.

De mon côté (Duval 1988 a, b, c), les observations faites sur la discrimination des représentations graphiques, sur la complexité de la «lecture» des figures en géométrie ainsi que sur les conditions de la découverte de la démonstration, m'ont conduit à souligner l'importance des différents registres de représentation sémiotique utilisés en mathématiques et à mettre en évidence les difficultés durables, souvent insurmontables, que créent les changements de registres exigés par l'activité mathématique. La compréhension n'émergeant chez les sujets qu'avec la coordination d'au moins deux registres de représentation, celle-ci devient un enjeu essentiel pour l'apprentissage des mathématiques. Que cela entraîne la remise en question de l'hypothèse d'un «isomorphisme» entre les démarches mathématiques et le fonctionnement cognitif commun à tout individu importe peu ici. Le problème explicitement posé, pour déterminer les conditions d'un apprentissage *par tous* les élèves jusqu'au Lycée, est celui de savoir ce qui fait la spécificité de l'activité mathématique au regard des autres activités de connaissance et ce qu'elle exige comme structure(s) de fonctionnement pour pouvoir être vraiment pratiquée.

Il n'est peut-être pas inutile de rappeler ici la complexité à laquelle doit faire face tout essai d'analyse de ce qu'est l'activité mathématique. En tant qu'elle ouvre un champ de

connaissances, il est nécessaire *de partir des objets* qu'elle permet de découvrir ou de construire. Mais en tant qu'elle est une activité, il est non moins nécessaire *de partir de la manière dont le sujet fonctionne* quand il «fait» des mathématiques, ainsi que R. Douady l'a fortement et justement montré. Cependant, regarder le sujet «en activité mathématique» est loin d'être une démarche simple ou univoque. Car le fonctionnement du sujet peut être analysé en fonction des objets à manipuler, à utiliser ou à transformer : dans ce cas, les opérations cognitives que le sujet doit accomplir risquent d'être décrites par rapport aux seules opérations mathématiques. Mais le fonctionnement du sujet peut aussi être analysé en fonction des systèmes internes (de représentation ou autres) qui doivent être mobilisés pour que le sujet ait accès aux objets mathématiques et qu'il puisse en diriger et en contrôler les transformations : dans ce cas les opérations mathématiques doivent être situées par rapport aux opérations cognitives qui les rendent effectives chez un sujet. Autrement dit, dans l'analyse du fonctionnement du sujet, nous retrouvons cette dualité des points de vue qui est inhérente à l'étude de toute acquisition de connaissances. (Duval 1998b p. 167-179). En partant de la manière dont le mathématicien fonctionne quand il fait des «maths», R. Douady a privilégié la première voie d'analyse : elle a été ainsi conduite à analyser l'activité mathématique *du côté des différentes organisations d'objets mathématiques au sein desquelles le mathématicien est amené à «circuler»* quand il travaille. En partant des problèmes récurrents de compréhension, rencontrés par les élèves dans les différents domaines mathématiques, nous avons privilégié la seconde voie : cela nous a conduits à regarder l'activité mathématique *du côté de l'architecture cognitive requise pour accéder à la variété des objets et des démarches mathématiques* (dans les domaines numériques, géométriques, algébriques, etc.) auxquels l'enseignement confronte les élèves jusqu'au Lycée.

Évidemment, les questions de l'articulation de ces deux points de vue sont celles qui viennent le plus immédiatement. Ces deux approches se recouvrent-elles ou sont-elles réellement différentes ? L'activité mathématique apparaît-elle de la même manière selon que l'on adopte l'un ou l'autre point de vue ? Et, finalement, comment interpréter des divergences éventuelles d'analyse par rapport au problème évoqué plus haut ? En réalité, pour être en mesure d'y répondre, il faut d'abord remonter aux questions que la description et l'analyse de l'activité mathématique conduisent à se poser, quel soit le point de vue adopté. Et si une comparaison doit être entreprise, elle doit d'abord l'être au niveau de ces questions directrices pour toute analyse de l'activité mathématique. Il nous semble qu'elles sont de trois types :

1. celles qui sont relatives à l'identification des processus constituant la dynamique de l'activité mathématique,
2. celles qui sont relatives aux conditions d'un développement de l'activité mathématique chez les élèves,
3. celles qui sont relatives aux rapports entre résolution de problème et situation d'apprentissage.

Nous venons d'employer le mot, inévitable mais peut-être trompeur, de «comparaison». Il peut être en effet trompeur dans la mesure où il laisserait entendre que l'on ferait ici un exposé parfaitement équilibré et neutre des deux approches. Ce qu'évidemment je suis le plus mal placé pour faire, étant totalement impliqué dans une approche et n'ayant jamais réellement pratiqué l'autre. Mais regarder comment l'analyse du fonctionnement du sujet «en activité mathématique» faite dans une perspective des changements de cadre peut s'inscrire dans celle faite dans une perspective de registres permet d'explicitier l'ensemble des questions à prendre en compte pour décrire et pour analyser, d'une manière pertinente et pas trop incomplète, ce qu'est l'activité mathématique. Bref, la comparaison se fera sur le mode

d'une présentation en contrepoint. Et, en ce sens, nous espérons contribuer à la réflexion sur ce problème dont R. Douady a montré qu'il était fondamental pour la didactique.

1 La «dynamique» propre à l'activité mathématique : de quelle nature sont les processus cognitifs en jeu ?

C'est dans la recherche de la solution d'un problème que la dynamique propre à l'activité mathématique peut être le mieux observée. Ce qui, en effet, apparaît le plus frappant dans cette situation, c'est que la recherche requiert *des changements de direction de la pensée qui apparaissent comme des ruptures* parce qu'ils ne semblent pas découler des données de la phase juste antérieure. Tout se passe comme s'il fallait brusquement changer la manière de représenter les données, ou penser à autre chose, à l'encontre du déroulement spontané du jeu d'associations qui a été induit par la première compréhension du problème ou les premiers traitements engagés. En rappelant que l'activité du mathématicien consiste dans le travail de recherche, R. Douady a montré que les changements de direction de pensée étaient au cœur de l'activité mathématique. Mais, même après coup, pour celui qui a cherché sans succès à résoudre un problème, cette caractéristique est frappante. Car lorsqu'on lui explique la solution, ou plus simplement lorsqu'on lui suggère des idées pour le mettre «sur la voie», c'est avec étonnement qu'il découvre les transformations de données ou de manière d'appréhender un objet auxquelles il aurait dû penser. Et souvent, il n'arrive pas à comprendre comment il aurait pu y penser. Ce qu'un élève de cinquième, il y a plus de trente ans, nous expliquait ainsi : «les maths, ça n'est pas logique !».

L'intérêt de la notion de «cadre» et de celle de «registre de représentation sémiotique» est de porter directement sur cette dynamique propre à l'activité mathématique, pour tenter de décrire avec précision les changements de direction de pensée qu'elle génère et pour en identifier les processus sous-jacents. Abordant l'analyse de l'activité mathématique à partir des mêmes phénomènes typiques, il n'y a donc rien de surprenant à ce que, d'une manière ou d'une autre, chacune des deux approches rencontre les mêmes questions directrices. En dressant ainsi la liste des questions directrices que l'on rencontre nécessairement, il est facile de dresser un tableau synoptique des deux approches (Figure 1). Mais un tel tableau, utile voire nécessaire pour des raisons d'économie (par exemple pour suivre plus facilement l'exposé des démarches, en situant les différents moments, ou pour en rassembler synthétiquement toutes les informations) peut être un sérieux obstacle à la compréhension de la problématique propre à chaque approche. En effet, ce ne sont pas les colonnes 2 et 3 de ce tableau qui sont essentielles mais la colonne 1. Si un examen attentif des analyses faites en termes de cadre et en termes de registre montre qu'aucune des questions directrices n'est ignorée dans les deux approches (le fait que les deux colonnes soient également remplies suffit à l'attester), en revanche, *toutes les questions directrices n'y ont pas la même importance : on ne leur accorde pas le même ordre de priorité*. Et c'est là, nous semble-t-il, que s'impulsent les différences ou les divergences que l'on peut noter. La différence des réponses dans les colonnes 2 et 3 résultent d'abord de la différence de l'ordre d'importance donné aux différentes questions directrices. Pour prendre une image, le tableau ci-dessous devrait être regardé comme une carte en relief : on verrait alors que, d'abord dans la colonne 1 et par suite dans les colonnes 2 et 3, certaines lignes correspondent à des cîmes dans une approche et à des creux dans l'autre ! Le relief visualiserait ainsi la différence des problématiques. Ce sont les logiques propres à chacune que nous allons essayer d'explicitier ici, en sachant bien que les pratiques réelles peuvent en réalité déborder les logiques ou ne pas s'y réduire. Mais une telle tentative n'est peut-être pas inutile pour avancer dans une analyse de ce qu'est l'activité mathématique commandée par des préoccupations d'apprentissage.

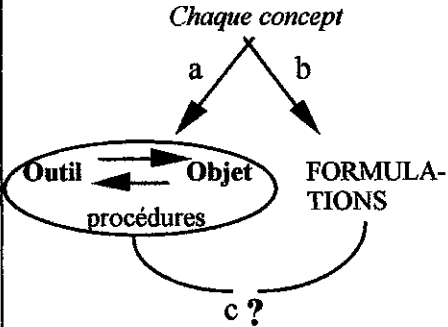
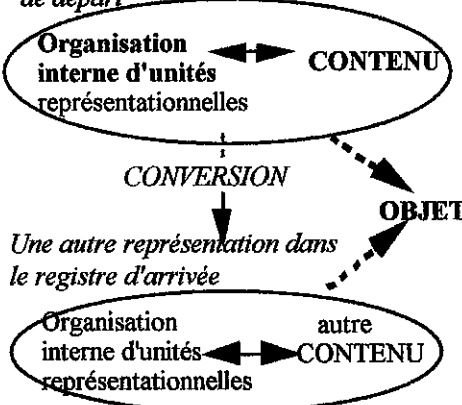
Questions directrices pour l'analyse de l'activité mathématique	CADRE	REGISTRE
I. Comment peut-on DISTINGUER les différents <i>cadres</i> et les différents <i>registres</i> ?	Un ensemble de concepts susceptibles d'être organisés en une progression théorique une branche des mathématiques	un système sémiotique producteur d'un type de représentations, et dont la production peut répondre à des fonctions cognitives différentes.
II. 1 Comment DECRIRE l'opération du CHANGEMENT ?	— une réinterprétation portant sur la formulation des problèmes à résoudre	— une conversion portant sur des unités de représentation, mais conservant la référence de la représentation de départ
2 Qu'apporte un changement ?	— une création d'objets mathématiques nouveaux ou des «mises en oeuvre d'outils et techniques qui ne s'imposaient pas» (1986, p11)	— rendre explicités d'autres propriétés de l'objet permettre des traitements impossibles ou trop coûteux dans le registre de départ
3. Quelle transparence des correspondances entre les données avant et celles après ?	— « correspondances imparfaites »	— congruence ou non congruence entre les unités respectives des représentations de départ et d'arrivée
4. Quelles conditions pour comprendre le processus du changement ?	— utilité du recours à «un cadre auxiliaire de représentation»	— discrimination entre les variations de représentation dans un registre qui entraînent une variation de représentation dans l'autre registre et celles qui ne changent rien
III Quelles sont LES DISTINCTIONS OPERATOIRES UTILISEES POUR ANALYSER LE FONCTIONNEMENT de l'activité mathématique ?		Une représentation dans le registre de départ  Une autre représentation dans le registre d'arrivée

Figure 1. Les problématiques de changement de cadre et de registre

Nous avons regroupé les questions relatives à la nature des processus propres à la dynamique de l'activité mathématique dans le deuxième bloc de lignes de ce tableau. Les deux premières (II.1, II.2) sont celles qui s'imposent quasi-immédiatement dès que l'on

reconnaît dans l'opération de changement de direction de la pensée une caractéristique fondamentale de l'activité mathématique. C'est donc par un examen de la place donnée à ces deux questions dans les deux approches que nous allons commencer.

1.1 L'opération de changement de « ... » : quel degré de complexité ?

Si l'on s'en tient à ces deux premières questions, les différences entre les deux approches peuvent paraître minimes. Pourtant, dans l'une, le changement de « ... » est vu comme un mouvement de pensée plus ou moins naturel dans la mesure où il ne soulèverait — du moins *rétroactivement* — aucune difficulté insurmontable. Mais dans l'autre on en souligne, au contraire, la complexité intrinsèque qui le rend, pour les élèves, souvent impossible à concevoir *proactivement* et même, parfois, difficile à comprendre *rétroactivement*.

Pour désigner ou décrire l'opération de changement de cadre on parle de « traduction », de « formulation différente », de « réinterprétation », ce qui présente pour le moins une connotation « langagière » que le terme plus général de « conversion » évite, puisque l'on peut convertir en visuel, en numérique, en schéma... Mais l'essentiel n'est pas là. Une opération du changement de cadre n'est ni regardée dans toute sa complexité intrinsèque ni envisagée comme étant constamment mobilisable, implicitement ou explicitement, au cours d'une même démarche de résolution. Et cela pour une raison simple : le changement de cadre, qui est d'abord défini en référence à « l'activité du mathématicien » lorsqu'il résout un problème, privilégie la fonction heuristique. Les problèmes proposés à des fins d'apprentissage doivent donc permettre d'effectuer un changement de cadre. Mais cela tend à le focaliser, ou à le localiser, sur une phase précise dans l'ensemble de la démarche de résolution : « Le changement de cadres est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui sans être tout à fait équivalentes, permettent ... la mise en oeuvre d'outils et de techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation » (Douady 1986, p.11). Autrement dit le changement de cadre consiste à traduire un problème dans un domaine de travail autre que celui que la première présentation du problème permet d'identifier. Car le problème en question doit pouvoir se formuler « dans au moins deux cadres différents » (Douady p.13). Ainsi, pour donner un autre exemple que celui proposé par R. Douady, le problème du partage d'une diagonale d'un parallélogramme en trois segments égaux peut être traité dans un cadre vectoriel ou dans un cadre de géométrie euclidienne (Laborde 2001 p.3-6). Et dans une perspective de cadre, on choisira le cadre dans lequel la résolution pourra s'avérer plus difficile en fonction des connaissances déjà acquises.

Décrire le changement en termes de conversion de représentation sémiotique, c'est au contraire insister sur la complexité de ce changement. En effet, un changement de cadre ne peut pas être réellement qualifié de « traduction », ou de « formulation différente », sans que l'on prenne en compte, non seulement la formulation à traduire et la nouvelle formulation, *mais également les systèmes ayant permis de produire respectivement l'une et l'autre*. On constate alors que les représentations sémiotiques mobilisées par le changement sont souvent hétérogènes : ainsi d'une figure à un énoncé, ou d'un énoncé en français à une formule algébrique, il peut y avoir un saut cognitif considérable. Ce qui veut dire qu'il y a plusieurs types de conversion, selon les types de registres mobilisés (*infra* Figure II). Parler de « traduction » ou de « formulation différente » c'est se limiter à la conversion entre deux langues « naturelles », c'est-à-dire en rester à l'homogénéité de deux registres d'un même type (discursif et multifonctionnel). Ou même à des transformations « réinterprétatives » lexicales à l'intérieur

de la langue ! Par exemple, le passage d'un cadre géométrique à un cadre numérique consiste dans une «requalification» (au sens juridique du terme) pour «désigner» un nombre qui reste le même dans les formulations référentielles de départ et d'arrivée (même si la connotation de grandeur se trouve gommée) : «*demi-périmètre 41cm*» $\Rightarrow$ «*somme $a + b = 41$* » (Douady 1986 p.21-22). Traduction ou reformulation ne sont qu'une forme particulière de conversion. A travers la diversification de ses formes, l'opération de conversion apparaît donc comme une opération qui est sous-jacente à tout acte de compréhension en mathématique. Et on la retrouve dans le travail à l'intérieur d'un domaine mathématique, même après que le changement de cadre, c'est-à-dire la reformulation du problème, ait été effectué.

C'est pourquoi les questions de la faisabilité d'une opération de changement, c'est-à-dire de la transparence et du degré de complexité de son exécution (*infra* Figure I : II.3, II.4), n'ont pas la même importance dans les deux approches. Restant au second plan dans l'approche en termes de changement de cadre, puisqu'elles peuvent être laissées aux interventions de l'enseignant ou d'un élève plus expert, ces questions deviennent fondamentales dans celle en termes de changement de registre puisqu'elles doivent relever de l'initiative personnelle de chaque élève. Examinons ce point avec plus de précision.

1.2 Reconnaissance proactive ou retroactive du changement de «...»?

Techniquement, une analyse des opérations de changement, que ce soit en termes de «cadre» ou de «registre», ne peut se faire qu'en étudiant les «correspondances» entre ce qui était donné avant ces opérations et ce qui donné après. Or la place faite à ce type d'analyse varie beaucoup d'une approche à l'autre.

Dans une problématique de changement de cadre, les questions de la transparence et de la complexité d'une opération de reformulation ne peuvent pas être ignorées puisque, souvent, un changement de cadre s'accompagne d'un changement de registre. Ainsi on n'exclut pas le fait que les «correspondances entre les cadres soient imparfaites» (Douady 1986 p.22). Mais comme un changement de cadre a d'abord pour fonction de donner accès à un nouveau domaine de travail dans une résolution de problème, il est plutôt considéré comme ce dont il faut partir pour pouvoir introduire une nouvelle démarche mathématique. D'où le souci de choisir des problèmes dans lesquels le changement de cadre soit, pour les élèves, une opération spontanée ou, à défaut, si on doit le leur suggérer, une opération qui soit acceptable par tous (Douady 1986, p.7) :

L'observation des procédures des élèves, du contenu cognitif de leurs échanges en situation de communication a attiré notre attention sur l'importance des changements de cadre spontanés (i.e. à l'initiative de l'élève) ou provoqués (par l'intervention d'un autre élève ou de l'enseignant) pour avancer dans la recherche d'un problème, pour débloquer une situation, pour évoluer les situations. Les changements de cadre étaient possibles par le choix des problèmes que nous avions fait.

Autrement dit, si les élèves ne peuvent pas toujours reconnaître *proactivement* un changement de cadre, en revanche *retroactivement* la reconnaissance des correspondances entre après et avant ne soulèverait aucune difficulté. Cela implique également que l'on pourrait toujours trouver des conditions où le changement de cadre serait une opération simple pour les élèves, c'est-à-dire une opération d'un coût cognitif très faible. Et, à défaut, le changement de cadre étant une variable didactique entre les mains de l'enseignant, celui-ci peut toujours aider sa réalisation ou le «donner» comme une idée. Cependant la question qui demeure en suspens est celle du transfert de ces situations où le changement de cadre est spontané ou «aidé» à celles où il ne l'est plus. Tout apprentissage se joue sur de tels transferts.

Lorsqu'on regarde une activité mathématique à partir des différentes représentations sémiotiques qu'elle mobilise ou utilise (des énoncés uniquement en langue naturelle, des formules littérales, des expressions algébriques, des graphiques, des figures et, *a fortiori*, des représentations mixtes) l'opération de changement de registre s'avère être, au contraire, une opération qui, en raison de sa complexité cognitive, est presque toujours un point de «blocage» difficilement surmontable par les élèves. Cela peut surprendre, dans la mesure où un changement de registre coïncide, dans beaucoup de cas élémentaires, avec un changement de cadre. Mais l'ampleur de ce phénomène, quelque soit le niveau de l'enseignement obligatoire que l'on regarde, ne peut pas être ignorée. Il suffit, pour l'observer, de recourir à un dispositif de variation systématique de micro-tâches portant sur la reconnaissance des correspondances entre la représentation dans le registre de départ et celle, après conversion, dans le registre d'arrivée. Certes, avec de tels dispositifs, nous sommes loin de la résolution de problème! Mais toute résolution de problème implique nécessairement que beaucoup de ces micro-tâches soient triviales pour les élèves, c'est-à-dire que ceux-ci soient *capables de reconnaître proactivement et non pas seulement rétroactivement les correspondances entre avant et après*. Or les observations ainsi recueillies montrent chaque fois que non seulement il n'y a pas de reconnaissance proactive d'une conversion possible mais que très souvent les élèves ne la reconnaissent pas ou ne la discriminent pas *rétroactivement* : deux représentations d'un même objet sont pour eux deux représentations de deux objets totalement différents, et ils ne voient pas comment on a pu passer de l'une à l'autre. Ajoutons que l'ampleur de ce phénomène est d'autant plus importante que beaucoup de changement de registres ne résultent pas d'un changement de cadre mais se font à l'intérieur d'un même cadre mathématique. Comme on peut le voir, par exemple, en géométrie ou dans l'étude des fonctions linéaires ou affines.

Cependant le plus intéressant pour comprendre ce qui fait la spécificité de l'activité mathématique n'est pas là. On peut remarquer que la réussite dans la reconnaissance des correspondances —et donc dans la transparence de l'opération de conversion— tient à *des phénomènes de congruence et de non congruence qui sont d'ordre sémiotique et non pas d'ordre conceptuel*. En effet, le contenu d'une représentation produite dans un registre, c'est-à-dire les propriétés de l'objet que le registre rend accessible, dépend des possibilités d'explicitation que ce registre offre. Et, évidemment, l'intérêt d'une diversité de registres est de ne pas offrir les mêmes potentialités d'explicitation ou de présentation des propriétés d'un objet : *l'invariance référentielle liée à l'opération de conversion va donc de pair avec une modification du contenu qui, elle, va dépendre du système sémiotique mobilisé*. Car ce sont les propriétés explicitées qui constituent le contenu d'une représentation. Si, pour reprendre l'expression de R. Douady, les correspondances sont ou paraissent «imparfaites», ce n'est donc pas d'abord «pour des raisons mathématiques ou à cause des connaissances insuffisantes des élèves», c'est en raison même des systèmes sémiotiques utilisés, sans lesquels, d'ailleurs, la pensée ne pourrait pas fonctionner. Tout cela veut dire que pour un même objet mathématique, certaines conversions de représentations seront congruentes et d'autres non. *Cela dépendra à la fois des deux registres mobilisés et du sens de la conversion!* En choisissant les problèmes de telle manière que le changement de cadre puisse se faire de manière «spontanée» ou puisse être reconnu rétroactivement par les élèves, R. Douady a choisi des situations dans lesquelles les conversions de représentation étaient très majoritairement congruentes. Mais, comme on peut facilement le deviner, les phénomènes de non-congruence ne peuvent pas être systématiquement évités et, surtout, la compréhension mathématique requiert qu'ils ne soient plus une cause de «blocage».

On voit là surgir une fissure, sinon une faille, dans le rapprochement tenté entre l'activité de l'élève et celle du mathématicien, c'est-à-dire entre la situation d'un individu en

formation et celle d'un professionnel ayant une longue et constante pratique : c'est la possibilité, ou non, de circuler à loisir entre des représentations sémiotiquement hétérogènes et de contenus différents bien qu'elles réfèrent au même objet. La conversion, en raison de sa complexité, est donc ce qu'il faut analyser pour remonter aux structures profondes dont le fonctionnement de la pensée en mathématiques dépend. Naturellement, si la question directrice de la transparence des correspondances, et donc de la faisabilité (proactive) par les élèves, de l'opération de changement de «...» n'est pas considérée comme prioritaire, l'écart entre l'activité de l'élève et celle du mathématicien peut apparaître négligeable.

En résumé, les deux approches partent du fait que ce sont les changements de direction de la pensée liés à des changements (respectivement conceptuels et sémiotiques) de représentation des objets qui manifestent la dynamique propre à l'activité mathématique. Elles s'accordent également sur ce qui constitue l'apport des changements de cadre ou de registre. A une nuance près cependant, tenant à la fonction heuristique qui est mise en avant dans le changement de cadre : un changement de registre ne conduit pas à la création d'objets mathématiques nouveaux, même s'il permet de rendre accessible d'autres propriétés de l'objet que celles explicitées dans la représentation initiale. Sur ce point, la distinction entre contenu d'une représentation et objet représenté est une distinction décisive : la création d'un nouveau contenu de représentation n'implique pas la création d'un nouvel objet.

En revanche, les descriptions commencent à diverger sur ce qui constitue l'«invariant» d'ancrage du changement, c'est-à-dire sur ce par rapport à quoi un changement peut être identifié et décrit. Pour décrire un changement de cadre on se centre essentiellement sur un «problème» tandis que pour décrire un changement de registre on se centre essentiellement sur les objets représentés. Nous sommes donc là en présence de deux problématiques différentes : l'une de *résolution (mathématique) de problème* et l'autre d'*accessibilité cognitive des objets mathématiques*. Rappelons d'ailleurs que le terme «objet» ne désigne pas tout à fait la même chose dans les deux approches. Nous gardons au terme «objet» son sens à la fois phénoménologique et sémiotique : d'une part point focal d'un acte d'attention permettant de discriminer ou de distinguer une chose d'une autre et, d'autre part, ce à quoi renvoie l'emploi d'un signe ou d'une représentation ou encore l'invariant référentiel d'expressions ou de représentations considérées comme équivalentes. Ce que R. Douady appelle «objet» est plutôt un complexe théorique ou culturel de plusieurs objets, bref un réseau de concepts prenant place dans un «édifice plus large» (1986, p.9). C'est la raison pour laquelle d'ailleurs il y a des changements de registres sans qu'il y ait changement de cadre mathématique.

Ce ne sont donc pas les mêmes questions que l'on est conduit à privilégier et à travailler dans une problématique de changement de cadre et dans une problématique de changement de registres. Et cela conduit à formuler différemment les conditions d'apprentissage des mathématiques.

2 Quelles sont les conditions d'un développement de l'activité mathématique chez les élèves ?

L'intérêt d'une analyse de l'activité mathématique est, bien évidemment, de dégager les conditions de son développement ou, plus spécifiquement, les conditions de son appropriation par les élèves. Avec cette préoccupation, nous retrouvons donc la question de la dualité des points de vue, évoquée dans l'introduction : d'une part, il y a les exigences propres à une démarche mathématique (ses «outils», ses conditions de validité) et, d'autre part, il y a les exigences propres au fonctionnement cognitif par lequel des sujets peuvent mener une démarche mathématique, c'est-à-dire d'en avoir l'initiative et le contrôle. Cette dualité a

souvent été perçue comme une alternative voire même érigée en dilemme. Et cela au prix d'une impasse sur le problème cognitif fondamental que pose l'apprentissage des mathématiques : l'activité mathématique ne requiert-elle *que le fonctionnement cognitif commun* qui est mobilisé dans les autres domaines de connaissance ou, au contraire, requiert-elle le développement d'un *fonctionnement cognitif impliquant des structures spécifiques et plus complexes* ? Ce problème cognitif peut-être formulé autrement —on n'échappe pas ici à la logique du changement de cadre !— : accède-t-on aux objets mathématiques de la même manière que l'on accède aux autres objets de connaissances dans les autres sciences ? Alors que l'option générale en didactique s'en tient à la première hypothèse, probablement sous l'effet de l'héritage du modèle piagetien de développement, l'analyse des conditions nécessaire au développement de l'activité mathématique conduit, au contraire, à reconnaître la nécessité du choix de la seconde.

2.1 De quoi dépend l'activité mathématique : d'«outils» ou des systèmes de fonctionnement cognitif du sujet ?

L'activité mathématique ne se réduit pas à des changements de cadre. Devant permettre de mettre en œuvre des «outils et techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation» d'un problème (1986, p. 11), il concerne surtout la phase initiale de la résolution d'un problème. Aussi, pour analyser l'activité mathématique qui suit un changement de cadre, R. Douady recourt à la «dialectique outil-objet». Arrêtons-nous un instant sur la métaphore instrumentale qui commande l'emploi du mot «outil» pour décrire le fonctionnement de l'activité mathématique à l'intérieur d'un cadre :

nous disons qu'un *concept est outil* lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'**usage qui en est fait pour résoudre un problème**. Un élève, en activité mathématique, peut recourir à un outil de manière implicite ou explicite (R. Douady, 1986, p.9).

Ainsi dans cette perspective les théorèmes deviennent des «outils», ce mot tendant même à supplanter le terme «théorème» lorsque l'enseignement introduit l'exigence de démonstration. Or le recours à un tel concept-métaphore entraîne trois conséquences qui jouent sur la description que l'on peut faire des conditions de développement de l'activité mathématique chez les élèves.

(1) Cela conduit à proposer un modèle de fonctionnement unique de l'activité mathématique, quel que soit le cadre choisi. Autrement dit, si les cadres se distinguent par les concepts propres aux différents domaines des mathématiques, en revanche le fonctionnement de l'activité doit présenter des aspects fondamentaux communs d'un cadre mathématique à l'autre, et le seul intérêt d'un cadre par rapport à un autre cadre est dans les moyens de résolution qu'il offre, ou qu'il n'offre pas, pour un problème.

(2) Cela réintroduit la séparation entre, d'un côté, les concepts et, de l'autre côté, les représentations sémiotiques alors que la description d'un changement de cadre tendait à rejeter une telle séparation ! En effet, alors que les formulations interviennent comme l'une des composantes essentielles pour l'analyse d'un changement de cadre, puisque ce sont elles qui situent un problème dans tel ou tel autre cadre mathématique, elles semblent en quelque sorte devenir complètement extérieures ou étrangères aux concepts dans la présentation qui est faite de la dialectique outil-objet (Figure I *supra*, III). Autrement dit, s'il ne peut pas y avoir de problème sans formulation, en revanche il pourrait y avoir des concepts sans représentations sémiotiques (que celle-ci soient, ou non, intériorisées).

(3) Cela tend à exclure le sujet des conditions du déroulement d'une activité. Et cela à la fois sous l'angle du rapport de maîtrise du sujet à l'outil particulier qui est utilisé, et sous celui des systèmes internes de fonctionnement du sujet qui sont mobilisés pour qu'il puisse utiliser efficacement l'outil. En mettant en avant cette notion d'outil on repousse au second plan l'utilisation de l'outil qui peut être faite par les élèves. Ou, plutôt, on est conduit à supposer qu'ils découvriront plus ou moins spontanément comment s'en servir d'une manière mathématiquement acceptable. Or quelle peut être la portée d'une telle supposition lorsqu'on l'applique à l'ensemble des élèves d'un système éducatif ? Et la proportion des élèves pour lesquels cette supposition ne peut pas être vérifiée, ne tend elle pas à croître de manière importante au fur et à mesure que l'on avance dans le curriculum ?

Dans une problématique de registre de représentation, on distingue l'activité de conversion et celle de traitement. Ce qui veut dire qu'une résolution de problèmes peut faire alterner des traitements et des conversions. Par «traitement» nous entendons la transformation d'une représentation d'un registre donné en un autre représentation du même registre. Il s'agit donc là d'une opération qui est doublement restreinte par rapport à la notion d'utilisation d'un outil. Cette opération est localement restreinte puisqu'un traitement s'identifie, par exemple, au niveau de chaque pas dans la résolution d'un problème. Et cette opération est souvent mentalement ambivalente ou en suspens, puisque *le moyen permettant la transformation locale (au niveau d'un pas de résolution) n'est pas seulement envisagé par rapport à une propriété mathématique mais aussi par rapport au système de fonctionnement cognitif que le registre mobilisé permet d'effectuer*. Cela veut dire que chaque registre offre des possibilités de traitement qui lui sont propres, par exemple d'ordre discursif ou d'ordre visuel. Mais cette distinction est encore trop globale. Ainsi parmi les registres permettant des traitements discursifs certains permettent des traitements par association et par expansion (les langues naturelles) d'autres seulement par substitution (les écritures symboliques, les langues formelles (Duval 1995 p. 125-132, 238-250). De même la variété des traitements visuels possibles ne relèvent pas d'un seul et même registre (Duval 2001). D'où la nécessité d'un classement des registres permettant d'analyser la diversité des modes de fonctionnement cognitifs possibles. La classification, très simple, proposée ci-dessous n'a évidemment qu'une valeur illustrative du lien étroit qu'il y a entre un «traitement» et le type de registre de représentation sémiotique dans lequel il est effectué.

	DISCURSIF	NON DISCURSIF
REGISTRES MULTIFONCTIONNEL : les traitements ne sont pas algorithmisables	langue naturelle <i>associations verbales (conceptuelles)</i> <i>raisonnement :</i> — <i>argumentation à partir d'observations, de croyances..</i> — <i>déduction valide à partir de théorèmes (substitution)</i>	figures géométriques planes ou en perspective (des configurations de formes en 0, 1, 2, 3 D) <i>appréhension opératoire et pas seulement perceptive</i> <i>constructibilité avec des instruments, un changement d'instrument pouvant entraîner des changements de contraintes</i>
REGISTRES MONOFONCTIONNELS : les traitements sont principalement des algorithmes	systèmes d'écriture : — numériques (binaire, décimale..) — littérale, algébrique, symbolique (langue formelle) <i>calcul</i>	graphes cartésiens <i>changement de système de coordonnées,</i> <i>interpolation, extrapolation</i>

Figure 2. Classification des différents types de registre de représentation sémiotique

Nous avons mis, en caractères droits, un exemple de registre, et en italiques des traitements spécifiques à ce type de registre. Notons que ce que les figures géométriques, en termes de registre, se limitent aux «formes» visuellement identifiables en 1, 2, ou 3D et ne comprennent **aucune indication de mesure ou de propriété : de telles indications** relèvent d'autres registres. On voit ici pourquoi un cadre géométrique mobilise simultanément au moins deux, sinon trois, registres de représentation. Ce qui est généralement considéré comme une figure géométrique est en général une représentation mixte, dans laquelle on associe des unités représentationnelles de registres différents.

Une analyse des traitements mathématiques qui prend en compte le registre dans lequel ils sont effectués, et non plus seulement l'utilisation instrumentale d'un concept, conduit aux trois déplacements suivants :

(1') La diversité des fonctionnements cognitifs que l'activité mathématique peut mobiliser ou mettre en oeuvre, selon les situations, est explicitement prise en compte. Car on ne «comprend pas», on ne «raisonne» pas, on ne «réfléchit» pas, on ne «cherche» pas, on ne «travaille» pas... de la même manière avec des figures, avec des schémas, avec des mots, avec des énoncés ou avec des formules, etc... Et même si certains registres sont communs à tous les individus d'une même société ou d'une même culture, comme la langue, en revanche les traitements faits dans ces registres communs utilisent d'autres possibilités que celles qui sont habituellement mises en oeuvre dans la pratique commune de la communication. Cela apparaît aussi bien dans les démarches de raisonnement en langue naturelle que dans la manière de regarder des figures ou de lire des tableaux.

(2') Toute coupure entre concept et représentation sémiotique est rejetée. De même qu'il n'y a pas de «problème» sans «formulation», de même il n'y a pas de concept sans représentation sémiotique. *Naturellement, on peut changer le registre de représentation d'un concept, mais on ne peut jamais séparer le concept d'une représentation sémiotique.* C'est d'ailleurs la raison pour laquelle, en suivant la distinction sémantique de Frege, nous préférons parler d'objet mathématique plutôt que de «concept» et prendre comme primitive le couple {signe, objet}¹ (Duval 1998). Et il serait erroné de croire que l'objet et la représentation

¹ Il ne faut pas confondre la relation **signe-objet** avec la distinction **signifiant-signifié** par laquelle on définit les signes : le signe n'est en rien un signifiant et le signifié n'est pas l'objet. Si les signes existent indépendamment des objets, en revanche il n'y pas de signifiant sans signifié. Prenons l'exemple des mots d'une langue (substantifs, adjectifs ou verbes). Les mots ont plusieurs signifiés mais ces signifiés ne renvoient pas à des objets, sinon ils ne seraient que des noms propres. Pour que les mots réfèrent à un objet il faut des opérations discursives de détermination et de complémentation combinant plusieurs mots : ce sont les syntagmes qui permettent de désigner des objets (Russell parlait de «description définies»). Beaucoup de notations mathématiques sont des signes «dégénérés» : ce sont des signes sans signifié, sans contenu, qui n'existent qu'en tant qu'ils désignent un objet, c'est-à-dire une opération ou une relation mathématique. En d'autres termes, les notations mathématiques fonctionnent comme des noms propres ! Pour résumer, la relation entre signe et objet est une *relation de référence*, tandis que la relation entre signifiant et signifié est une *relation d'association-fusion intransitive*; et cette relation signifiant-signifié ne doit évidemment pas être confondus avec les *relations d'association verbale qui, elles, sont transitives* et forment des «réseaux sémantiques». Souvent, ces trois types de relation, radicalement différents, sont confondus, ce qui hypothèque beaucoup d'explications théoriques ou de modélisations de l'activité cognitive.

Dans son ouvrage fondateur, Saussure ne disait pas autre chose : « le signe linguistique unit non une chose et un nom mais un concept et une image acoustique » (p. 98) et il précisait : « nous nous proposons de conserver le mot **signe** pour désigner le total et de remplacer *concept* et *image acoustique* respectivement par *signifié* et *signifiant* » (p.99). Or chacun de ces deux aspects indissociables d'un signe ne peut être identifié que dans ses rapports de contraste ou d'opposition avec l'aspect correspondant d'autres signes (p.159). C'est pour cela qu'il n'y a de signe que dans un système de signes. Et Frege, pour expliquer les mécanismes de progression discursive du calcul et du raisonnement, s'était appuyé sur les variations de signifié ou de contenu

sémiotique y resteraient, malgré tout, séparés comme les deux faces d'une pièce de monnaie. Imaginons en effet que nous voyions le côté «signe de..» (ou «représentation de..») et retournons la pièce, qu'allons nous trouver ? Non pas l'objet lui-même, mais une autre représentation sémiotique de cet objet, le plus souvent dans un autre registre ! Notre pièce était faite de deux représentations sémiotiques qui n'avaient pas le même contenu. En réalité cette petite expérience mentale ne marche pas toujours. En effet, elle ne marche pas pour les objets auxquels je puis avoir soit un accès perceptif (et dont je puis donc avoir une « image mentale ») indépendamment de toute médiation sémiotique, — que cet accès soit direct comme pour tous les objets physiques de notre environnement ou indirect en recourant à des dispositifs instrumentaux comme pour tous les objets situés en deçà ou au delà de nos seuils de discrimination perceptive—. Mais les objets mathématiques ne relèvent d'aucune de ces deux catégories d'objets accessibles en dehors d'une médiation sémiotique. Et nous retrouvons ici la question soulevée en début de cette deuxième partie : accède-t-on aux objets mathématiques de la même manière que l'on accède aux autres objets de connaissances dans les autres sciences ?

(3') Les registres de représentation sémiotiques ne doivent pas être seulement considérés comme des «outils», c'est-à-dire comme des instruments disponibles, des méthodes ou des procédures, entre lesquels le sujet pourrait choisir, mais comme *des systèmes qui, au contraire, développent la capacité de représentation mentale du sujet*. Ils sont inhérents au fonctionnement de la pensée. Naturellement, à la différence des systèmes permettant, dès la naissance, d'accomplir les fonctions cognitives vitales de réception, de conservation et de réactivation des informations du milieu environnant, les sujets doivent progressivement s'approprier les systèmes de représentation sémiotique. L'activité mathématique, du moins celle qui est sollicitée des élèves tout au long de la scolarité obligatoire, requiert l'appropriation et la coordination de ces systèmes sémiotiques qui accroissent le champ du fonctionnement cognitif et celui des représentations (Séminaire IUFM 1999, p.40-48) Et c'est peut-être là le point aveugle de beaucoup de modèles cognitifs ou épistémologiques utilisés pour analyser les problèmes d'apprentissage des mathématiques : ils les réduisent à des outils extérieurs.

2.2 L'enjeu des apprentissages mathématiques en formation initiale : construction de savoirs ou développement de l'«architecture cognitive » du sujet ?

Il est essentiel de ne jamais confondre la conscience du sujet et les systèmes de fonctionnement cognitif qui lui permettent de discriminer des objets, de les reconnaître sous des présentations différentes, de choisir des outils, de contrôler des résultats. Toute activité consciente repose sur la coordination de plusieurs systèmes hétérogènes de représentation dont les fonctionnements ne sont pas conscients. *C'est sur la prise en compte de cet envers inconscient de la conscience que repose l'approche cognitive des problèmes de développement et d'apprentissage*. Rappeler cela peut sembler trivial. Et pourtant les conséquences didactiques en restent profondément méconnues. *Car cela veut dire que la conscience est le lieu d'émergence des représentations mais non pas leur principal, et encore moins leur unique système de production* : dans ces conditions, peut-on faire comme si c'était

d'expressions différentes (donc de signes ou de combinaisons de signes différents) qui conservent la référence au même objet (Duval 1998). Pour Frege, l'objet c'est l'invariant référentiel. Mais cette détermination prend une importance particulière lorsque les objets, comme en mathématiques, ne sont pas accessibles indépendamment de représentations sémiotiques !

le sujet (donc l'élève) qui produisait ou modifiait consciemment les représentations formant le contenu de ses pensées, de ses conceptions ou de ses croyances ? Le présupposer, implicitement ou explicitement, relève de ce que l'on pourrait appeler *l'illusion unitaire du sujet*. Une telle illusion, caractéristique d'une épistémologie cartésienne, revient à identifier le sujet à sa conscience actuelle et à faire de celle-ci le principal système de production des représentations et non pas seulement leur lieu d'émergence. Le rôle reconnu aux registres de représentation sémiotique change selon que l'on s'en tient à une conception unitaire du sujet ou que l'on prend en compte l'envers infraconscient et complexe de toute activité consciente. De quel côté situer les registres de représentation sémiotique ?

Les considérer comme des «outils» c'est les situer uniquement du côté conscient, c'est en faire des objets disponibles et manipulables que le sujet ferait fonctionner de manière délibérée, c'est-à-dire en pouvant en commander non seulement le choix mais l'émergence consciente qui les précède ainsi que la dynamique productive et pas seulement son contrôle rétroactif. Car, évidemment, tout ce qui est utilisable comme outil est d'une certaine manière extérieur au fonctionnement cognitif de la pensée. Comme, par exemple, comme pour les instruments d'écriture et de dessin qu'il a dans sa trousse ! Si l'on s'inscrit dans une telle perspective, il faut cependant admettre qu'il n'y a pas *un* «outil sémiotique» (l'écriture littérale ou symbolique de l'algèbre par exemple) mais *autant* d'outils sémiotiques *que* de systèmes de représentation. En outre, les outils sémiotiques restent irréductibles à ces autres outils que seraient les concepts et les théorèmes.

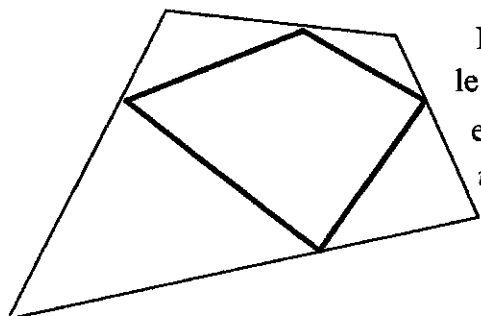
Au contraire, les considérer comme des conditions nécessaires pour une certaine forme d'activité consciente, en l'occurrence l'activité mathématique, c'est les situer du côté infraconscient, c'est en faire les systèmes de production de ce qui survient à la conscience. Ici la relation de la conscience à ces systèmes n'est plus une relation de commande, mais une relation d'«incorporation» pour reprendre la formule de Merleau-Ponty (1945 p.161). En ce sens il n'y a pas plus d'usage instrumental, ou consciemment commandé des systèmes sémiotiques qu'il n'y a un usage instrumental de notre corps, c'est-à-dire de la voix pour parler, des yeux pour regarder ou explorer ou même de la main pour accomplir l'action qui vient à l'esprit ! Le rapport du sujet à sa main n'est pas de même nature que le rapport du sujet à l'outil qu'il dirige de sa main. Et si, localement, certains parmi les quatre types de registre, peuvent être utilisés comme des «outils», c'est toujours sur la base soit de leur incorporation préalable, soit en référence à un autre registre qui lui est déjà plus ou moins incorporé. C'est seulement en fonction de leur degré d'incorporation préalable et globale que les systèmes sémiotiques peuvent avoir aussi un usage instrumental. Dans cette perspective, le fonctionnement cognitif de la pensée est indissociable de son degré de structuration : *la conscience du sujet ne peut pas construire au delà de ce que lui permet l'architecture cognitive sous-jacente, laquelle détermine les capacités de reconnaissance immédiate ainsi que les traitements dont elle peut avoir l'initiative ou le contrôle*. Et cela apparaît de manière plus manifeste et plus décisive pour l'activité mathématique que pour la plupart des autres formes d'activité cognitive. L'enjeu des apprentissages mathématiques en formation initiale c'est, en définitive, celui de l'incorporation de ces systèmes sémiotiques de représentation à l'architecture cognitive initiale des sujets : dans cette perspective, *les acquisitions décisives ne sont pas des acquisitions conceptuelles mais des acquisitions fonctionnelles*.

Ces quelques remarques peuvent paraître très éloignées des analyses didactiques. Elles ont pourtant une conséquence pratique : dans l'analyse de la production des élèves, on ne peut pas s'en tenir seulement aux procédures.

Voici, à titre d'exemple, une tâche de construction proposée en fin d'enseignement primaire et dont l'objectif est de faire prendre conscience aux élèves ce passage de deux à une

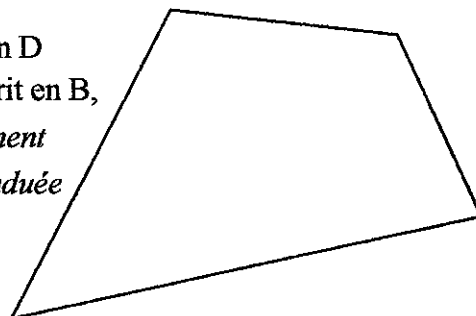
dimension (Perrin 2000) nécessaire pour accéder à la compréhension de certaines propriétés géométriques.

Figure B : un quadrilatère inscrit dans un autre quadrilatère



REPRODUIRE en D
le quadrilatère inscrit en B,
en utilisant *seulement*
une règle non graduée

Figure D : un quadrilatère



Le problème de la reproduction tient à la contrainte consistant dans l'interdiction de l'utilisation d'une règle non graduée. Cela impose certaines procédures correspondant à la mise en oeuvre de propriétés affines. En effet, il faut effectuer le détournement par la construction d'un réseau de douze droites supports pour déterminer la position des sommets du quadrilatère à reproduire¹. Cette construction du réseau de droites implique deux procédures différentes qui sont des actions très simples à exécuter, même si elles demandent une certaine précision dans le geste technique nécessaire pour tracer une droite (*infra* Figure 3). Mais la mise en oeuvre de chacune de ces deux actions présuppose des opérations cognitives qui vont mettre l'individu en situation d'initialiser ces actions. La première opération semble particulièrement difficile dans la mesure où la réorganisation visuelle doit se faire *contre la loi gestaltiste* de clôture. Il y a une résistance perceptive à briser le contour fermé d'une forme 2D pour en prolonger les côtés. La seconde est, peut-être, plus naturelle dans le contexte de la première. Cependant il faut une troisième opération qui va permettre de choisir les deux procédures à initialiser : reconnaître les deux quadrilatères de la figure de départ dans le réseau des droites supports que l'on obtiendra si on prolonge les côtés. En effet, l'enchevêtrement des triangles et des quadrilatères possibles que le *loi gestaltiste* de clôture permet d'y détacher, et donc de «voir», tend autant à dissimuler les deux quadrilatères qu'à les montrer. Or une telle reconnaissance peut intervenir avant (on est alors en présence d'un sujet autonome pour la résolution) ou seulement après, comme justification intuitive du détournement par le réseau de droites support. De toutes manières la résolution de ce problème entraîne un travail dans le registre des figures et elle exige que le sujet soit capable de surmonter, sans un coût temporel, ou autre, trop considérable, les deux résistances visuelles suivantes :

- générer un réseau ouvert de droites supports à partir d'une figure close,
- reconnaître dans un réseau de droites les figures cibles qui sont données dans l'énoncé de la tâche mais qui ne sont pas spontanément reconnaissables dans le réseau

Or ces deux résistances visuelles touchent un changement de dimension dans l'identification perceptive des unités figurales d'une configuration. Et en outre elles sont en quelques sortes opposées

¹ En effet les deux quadrilatères ont des diagonales concourantes et de plus chaque diagonale du quadrilatère inscrit passe par un point d'intersection de deux droites supports des côtés du grand quadrilatère

I. PROCÉDURES :	II OPÉRATIONS COGNITIVES d'organisation visuelle
(1) Prolonger les côtés pour faire apparaître les droites supports,	(1') Réorganiser l'unité figurale 2D : voir le quadrilatère circonscrit comme une configuration d'unités figurales 1D,
(2) Joindre les points d'intersection créés par prolongement pour faire apparaître d'autres droites.	(2') Regrouper des unités figurales 0D en des unités figurales 1D.
	(0) Reconnaître parmi beaucoup d'unités figurales 2D potentielles possible les deux quadrilatères correspondant à ceux de l'énoncé

Figure 3 L'analyse d'une tâche mathématique, faite dans une perspective d'apprentissage, doit distinguer les procédures mathématiques acceptables et les opérations cognitives qui permettent au sujet d'«y penser» et d'en contrôler la mise en oeuvre

On voit alors le problème de l'apprentissage des mathématiques en formation initiale. On peut le formuler dans la question suivante : suffit-il de mettre les élèves dans des situations où ils seront conduit à mettre en oeuvre une procédure, seul où avec l'aide de quelqu'un d'autre, pour que d'une part ils s'approprient le systèmes de fonctionnement propre aux différents registres mobilisés (et dont, ici, dépendent les opérations cognitives d'organisation visuelle) et que d'autre part ils le coordonnent avec un registre permettant d'énoncer des propriétés ? En d'autres termes, les variables didactiques doivent-elles être déterminées seulement en fonction des procédures ou ne doit-on pas aussi prendre en compte les opérations cognitives ?

Il ne s'agit là que d'un exemple pour montrer la nécessité d'une double analyse de l'activité mathématique. Nous avons pris cet exemple en raison des difficultés ultérieures qui apparaissent aussi bien dans l'utilisation heuristique des figures que dans la sensibilité à la force démonstrative de certaines organisations d'énoncés. Mais la nécessité de cette double analyse est peut-être encore plus spectaculaire lorsqu'il s'agit d'introduire l'algèbre dans l'enseignement au Collège : que l'on recourt à des lettres ou à des mots de la langue parlée, on ne peut ignorer la complexité des opérations discursives de la désignation et de la description d'objets sous peine de rendre très obscure l'introduction des lettres, des inconnues et des variables (Duval 2001).

3 «Problème» et situation d'apprentissage : comment en analyser et en contrôler les rapports ?

Le travail que Régine Douady a développé se situe évidemment à ce point hypothétique où l'activité de l'élève pourrait s'approcher de celle du mathématicien, point que l'on désigne par le terme très, ou trop, générique de «problème» : « nos hypothèses amènent à *découper* les notions mathématiques, objet de l'apprentissage, *selon un enchaînement de problèmes* qui, par leur organisation et *grâce à leur résolution* dans une *responsabilité partagée* entre l'enseignant et les élèves doivent... (1986 p. 8)¹. Mais il y a une distance considérables entre les problèmes «auxquelles dans leurs recherches, les mathématiciens sont confrontés...» et les problèmes que l'on peut proposer aux élèves du Primaire ou du Collège à des fins d'apprentissage. Indépendamment de la différence de position entre un élève et un

¹ Le surlignement par les italiques est le fait de R. Douady et j'ai ajouté un surlignement en caractère gras.

mathématicien par rapport à un problème mathématique à résoudre (temps pouvant être consacré à la recherche, compétences en mathématiques, intérêt personnel, capacité d'investissement différentes entre un enfant et un adulte...) on serait presque tenté de dire que cette modification de fonctionnalité change la nature des «problèmes» : car il s'agit alors de faire mettre en oeuvre, à travers la résolution d'un problème, la notion mathématique à apprendre. Ce qui revient, en quelque sorte à adapter les problèmes aux exigences d'une situation d'apprentissage. Autrement dit, les problèmes retenus doivent remplir certaines conditions» (1986, p.7,9). Oui, mais cela soulève plusieurs problèmes didactiques majeurs et qui sont encore loin d'être évidents aujourd'hui, concernant d'abord le choix des «problèmes» et, ensuite, la valeur des interprétations que l'on peut faire des productions d'élèves obtenues au cours de la résolution. Comment détermine-t-on ces conditions ? Certaines sont-elles communes aux différentes notions mathématiques «découpées» en vue de leur apprentissage ? Comment peut-on montrer que les problèmes remplissant le cahier des charges ainsi fixé permettent effectivement un réel apprentissage pour les élèves ? D'un point de vue méthodologique ces questions nous renvoient à la question suivante : *comment analyser un problème en vue d'explicitier les conditions ou les moyens d'apprentissage qu'il offre aux élèves* ? Les analyses de l'activité mathématique en termes de changement de cadre et en termes de changement de registres nous conduisent à deux méthodes totalement différentes d'analyse : l'analyse en aval et l'analyse en amont.

3.1 L'analyse en aval

En mathématiques, un problème implique toujours un énoncé, même si l'on prend soin de bien distinguer l'énoncé du problème et le problème posé. En effet, c'est l'énoncé qui d'une part fixe les hypothèses de départ et les contraintes éventuelles à respecter et qui d'autre part détermine l'objectif à atteindre, sous la forme d'une question ou d'une simple injonction. Toute analyse d'un problème part donc d'une formulation du problème.

La méthode habituellement mise en oeuvre consiste à rechercher et à examiner les différentes solutions possibles en vue de choisir les conditions, ou la situation, dans lesquelles ce problème pourra être proposé en classe : introduire une notion nouvelle, faire utiliser ce qui a déjà été enseigné dans des situations différentes de celles déjà présentées aux élèves... Et l'examen des différentes solutions possibles se fait en fonction des différentes «notions» (propriétés) ou des différentes procédures que chacune met en oeuvre. Nous appellerons «analyse en aval» cette méthode d'analyse puisqu'elle va de l'énoncé du problème à la résolution du problème.

L'approche en termes de changement de cadre s'inscrit dans cette méthode d'analyse en aval, mais en attirant l'attention sur le fait que la formulation de l'énoncé est une composante essentielle du problème, dans la mesure où elle se fait en référence aux concepts d'un cadre mathématique. Un changement de cadre conduit donc à une reformulation de l'énoncé du problème.

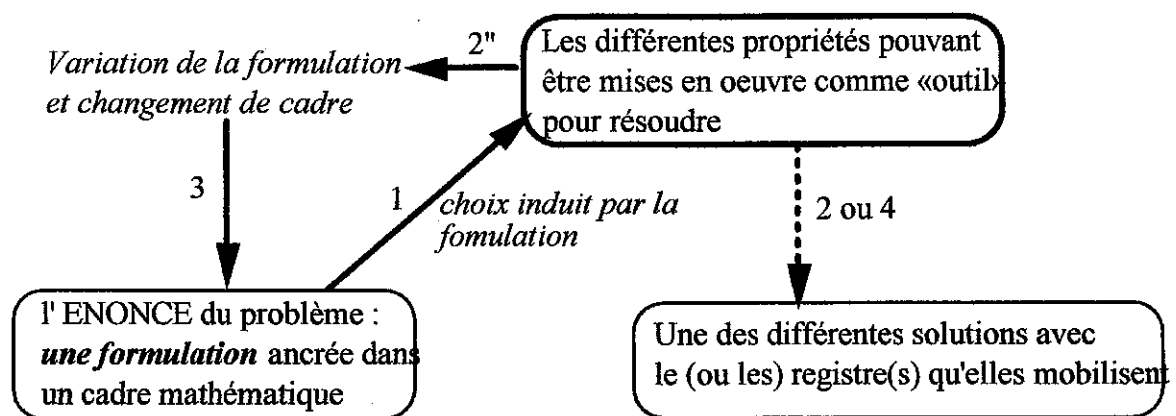


Figure 4 Méthode d'analyse en aval

Cette méthode d'analyse en aval est évidemment celle de l'analyse mathématique d'un problème. En introduisant la boucle (1, 2'', 3) dans la méthode d'analyse, l'approche en termes de changement de cadre conduit donc à expliciter des variations que l'enseignant peut contrôler et mettre en oeuvre dans le déroulement du travail des élèves. En effet, une formulation particulière étant choisie et proposée aux élèves, un (ou plusieurs) parcours de la boucle peuvent être introduit dans le travail de recherche et de résolution. Et c'est ce type de variations qui permet de rapprocher le travail des élèves en classe de celui du mathématicien.

3.2 Analyse en amont

L'analyse cognitive d'un problème de mathématique suit une autre direction. On ne s'intéresse pas à ses différentes solutions possibles mais à la solution qui peut être privilégiée par le choix d'un énoncé ou qui est attendue suite au choix de cet énoncé. Car il ne s'agit pas ici d'analyser l'énoncé du point de vue des connaissances mathématiques qu'il peut mobiliser mais du point de vue la tâche cognitive que représente le passage de l'énoncé à l'initialisation, par le sujet qui doit le résoudre, des premiers pas de la solution privilégiée, ou prédéterminée, par la formulation de l'énoncé.

On part donc du couple {un énoncé de problème, une solution} et cela permet de déterminer ce que nous appellerons la «distance cognitive» entre la formulation de l'énoncé et les premiers pas de la solution. Cette distance dépend des types de registres (*supra* Figure 2) mobilisés par cette formulation du problème et de ceux mobilisés par les premiers pas de la solution sont effectués : le passage de l'énoncé aux premiers pas de la solution peut exiger ou non une conversion dont la complexité va varier selon le type de registre de départ et le type de registre d'arrivée et, au cas où une conversion est nécessaire, celle-ci peut être congruente ou non. La distance cognitive peut donc varier de façon importante. En outre, on peut prendre en compte le fait que le registre mobilisé dans les premiers pas donne lieu ou non à des traitements algorithmisés.

On peut alors envisager toutes les variations de l'énoncé qui, sans modifier la solution que l'on veut faire privilégier, vont réduire ou augmenter cette distance cognitive. Cela permet de générer un **champ d'énoncés** et de l'ordonner selon en fonction des facteurs qui déterminent leur plus ou moins grande complexité de compréhension.

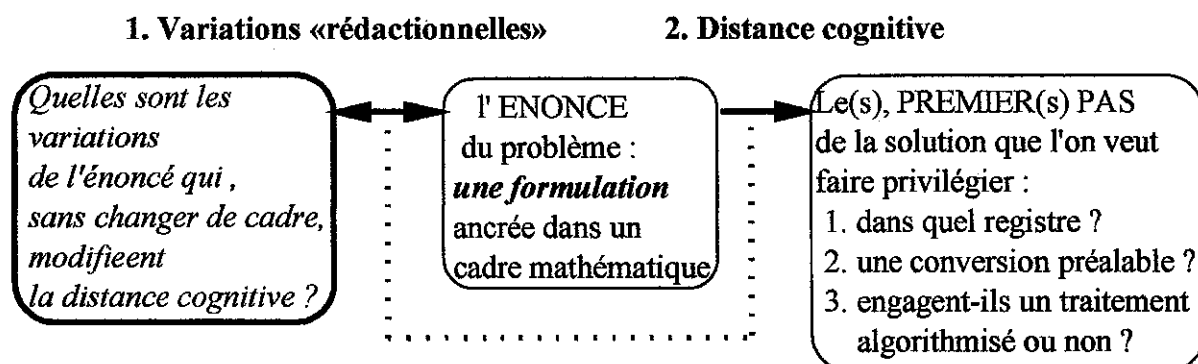


Figure 5 Méthode d'analyse en amont

Avec cette méthode, que nous appellerons «en amont», l'analyse joue sur la corrélation (le trait en pointillé sur le schéma) entre une variable dépendante, la distance cognitive, et des variables indépendantes, qui sont les facteurs de variation de la formulation de l'énoncé. Naturellement, cela ouvre deux questions à la recherche

- (1) l'identification des facteurs susceptible de modifier la distance cognitive,
- (2) la vérification de la pertinence et du «poids» de chacun de ces facteurs chez les élèves, individuellement, en binômes ou sur des populations plus larges qu'une classe y compris en tenant compte des différents niveaux des élèves.

Le premier exemple d'une méthode d'analyse en amont, proche de celle que nous décrivons nous semble être le travail de G. Vergnaud sur les problèmes additifs (1976). En ayant explicitement pris en compte deux facteurs (la variation état/transformation, et la place de l'information manquante dans l'ordre de description de la situation non mathématique), il a généré systématiquement un ensemble d'énoncés résolubles par une seule opération d'addition ou de soustraction et il a montré des écarts de réussite entre certains pouvant aller au delà de deux années scolaires. L'analyse de la corrélation entre les variations d'énoncés et les résultats enregistrés montre d'ailleurs l'importance d'un troisième facteur jouant sur la congruence ou la non congruence entre la formulation des termes porteurs de l'information numérique dans l'énoncé et l'opération arithmétique à mobiliser pour résoudre : la non congruence est la plus forte quand par exemple les verbes porteurs de l'information numérique dans l'énoncé sont des antonymes.

Naturellement une analyse de l'énoncé en termes de registre permet une identification rapide des facteurs susceptibles de modifier la distance cognitive. Dans les énoncés de problèmes de géométrie, il faut également prendre en compte le caractère mixtes des représentations. Il y a à la fois la figure de départ, celle qui est donnée dans l'énoncé ou qui peut être construite à partir de l'énoncé, et il y a la dénomination des objets géométriques (dénomination qui renvoie à unités figurales 0, 1, 2 ou 3D). Il peut donc y avoir ici deux facteurs différents de non congruence : la figure de départ permet de voir, «visuellement» ou non, les modifications conduisant à la solution, et la manière dont les objets sont nommés dans l'énoncé oblige ou non à une requalification des objets nommés pour passer de la considération d'unités figurales 2D à des unités figurales 1D, par exemple.

3.3 Laquelle des deux méthodes ?

Question évidemment rhétorique dans un exposé puisque la réponse semble évidente, bien qu'elle le soit moins dans les discussions, où l'on tend à les opposer comme

mathématique/ non mathématique. Inutile de poursuivre ici un débat sans fin. Cependant, dans la mesure où les deux analyses sont conduites dans une perspective d'enseignement et d'apprentissage, on peut faire les remarques suivantes.

L'analyse en aval requiert une *culture mathématique* : elle renvoie à une base de connaissances mathématiques qui doit nécessairement dépasser le contexte particulier, ou étroit, de la formulation d'un énoncé, quel qu'il soit. Et le recours au changement de cadre présente, par rapport à cela, l'avantage et l'intérêt de faire établir une «circulation» entre des domaines, ou plus modestement, entre des zones de connaissances mathématiques, qui avant pouvaient être considérés comme séparés. En ce sens, ce travail d'analyse apparaît autant comme un travail de «synthèse» car il consiste en une «interprétation» pour reprendre le terme employé par R. Douady. Il n'y a donc rien de surprenant à ce que ce type d'analyse puisse être un élément essentiel *dans la formation des futurs enseignants*. Mais il n'y a rien de surprenant à ce qu'il ne puisse intervenir dans la formation des élèves qu'à travers «l'intervention du maître», ce qui, en définitive laisse plus souvent les élèves en situation de reconnaissance rétroactive qu'il ne leur donne les moyens d'une reconnaissance proactive. A moins qu'il n'y ait jamais à chercher «tout seul» (Douady 1986, p. 19).

L'analyse en amont requiert que l'on prenne en compte les différentes variations possibles d'un énoncé de problème ET les variations éventuelles de conduite et de production des élèves. Elle renvoie donc aux conditions permettant à un sujet d'entrer, relativement rapidement, dans une démarche mathématique sur un type de problème. Et, dans cette perspective, la reconnaissance proactive, ou même seulement rétroactive, d'un «changement de ... » à effectuer est un enjeu décisif d'apprentissage. En effet, il doit être possible à un élève très ordinaire de mener une *activité mathématique* sans posséder déjà ne serait-ce que des bribes d'une culture mathématique. Indépendamment des exigences méthodologiques d'observation et d'interprétation auquel elle répond, l'analyse en amont travaille sur les conditions permettant à un sujet de développer une activité mathématique préalablement à l'acquisition d'une culture mathématique. C'est pourquoi une analyse de l'activité mathématique en termes de registres de représentation sémiotique est apparue aussi essentielle qu'une analyse en termes de cadres. Et cela est un élément décisif pour *la formation des élèves*. La critique que l'on peut adresser à cette méthode d'analyse, d'un point de vue mathématique, n'est donc pas d'être non mathématique. Car comment pourrait-on étudier les problèmes de compréhension des démarches mathématiques que les élèves rencontrent dans les phases d'apprentissage, autrement que par des observations pratiquées systématiquement et de manière que la généralisation des conclusions soit contrôlable ? Et, prendre comme donnée d'analyse un type de solution mathématique¹ dont on attend des élèves qu'ils soient conduits à le produire serait «psychologique» donc non mathématique ? Non, la critique que l'on peut faire à cette méthode est à chercher ailleurs. Cette méthode conduit à privilégier des problèmes «dégénérés» au détriment de «vrais» problème de recherche. «Dégénérés» parce qu'elle tend à décomposer la résolution d'un problème entre un ensemble de tâches qui peuvent être cognitivement hétérogènes, et que, parfois, elle conduit à isoler l'une de ces tâches et à pratiquer les variations sur cette tâche et non plus sur l'énoncé du problème. A la différence de la méthode en aval qui relève plus de la «synthèse», la méthode en amont est vraiment une analyse qui cherche à identifier les différents facteurs commandant la dynamique de pensée propre à un type de démarche mathématique. Pour étudier les

¹ Quelle que soit la diversité des types de solutions auxquels conduit l'analyse en aval, chaque solution peut relever d'une analyse en amont et donner lieu à des conclusions très différentes.

problèmes d'apprentissage, il faut, d'une certaine manière, découpler activité mathématique et culture mathématique. Et force est de reconnaître qu'il reste encore beaucoup de zones obscures concernant l'apprentissage des mathématiques par tous les élèves, si «la structuration personnelle est de première importance en mathématique pour qu'il y ait effectivement savoir» (Douady 1986, p.19). Sur ce point on ne peut pas se contenter de constats comme «la connaissance de la classe s'est enrichie d'un théorème» (1986, p.20).

3.4 Vous avez dit «problème» : quel type de problème ?

Il est surprenant, vu l'importance donnée à la notion de problème et à la résolution de problème, que la notion de problème reste finalement une notion floue. Il suffit de changer d'interlocuteur, ou de changer de niveau d'enseignement, pour que ce qui est considéré comme un problème ne le soit plus ou cesse de le devenir. Et cela indépendamment des connaissances présumées par la résolution. L'embarras devient encore plus grand quand on examine l'emploi généralisé du mot «problème» dans toutes les disciplines. Ce qui conduit à se demander s'il y a des différences spécifiques importantes (à la fois pour le fonctionnement cognitif et pour l'apprentissage) entre un problème mathématique et un problème non mathématique. Mais laissons cette question «transversale». Autrefois, Polya et à sa suite G. Glaeser, avaient tenté d'esquisser une classification des problèmes. Apparemment sans suite. Il est vrai que leur préoccupation était plus orientée vers une didactique de l'heuristique. Pourtant, même relativement à un «concept», les problèmes que l'on peut poser peuvent être de type d'être différents. D'un point de vue cognitif, en tous cas, on ne confondra pas trois types de problèmes que nous appellerons respectivement :

- problèmes descriptifs
- problèmes de justification
- problèmes d'application

Les problèmes descriptifs sont les problèmes dans lesquelles l'essentiel du travail de recherche porte sur la constitution d'un corpus de données, pour prendre une analogie avec les démarches d'observations dans les autres disciplines. Sans la constitution d'un tel corpus, toutes les démarches d'explication ou de justification ou même de catégorisation notionnelles ne peuvent que tourner à vide. En mathématiques, la constitution d'un corpus de données coïncide avec la génération de données : il ne suffit pas de trouver seulement un exemple mais tous *les cas possibles* répondant à une condition fixée. En ce sens les problèmes que R. Douady donne en exemple sont des problèmes descriptifs (1986, p. 13, 20). A l'opposé, les problèmes d'application sont constitués par des énoncés narrato-descriptifs qui plantent des données quantitatives dans le décor d'un contexte non mathématique des données quantitatives, dans le but de faire utiliser un type de traitement mathématique. La caractéristique de ces énoncés est de *superposer deux descriptions de nature différente*, dont une seule est pertinente. Il est intéressant de rappeler que les questions relatives à la compréhension des énoncés de problèmes mathématiques se réfèrent davantage aux énoncés de problèmes d'application qu'aux énoncés des autres types de problèmes.

Or le plus intéressant est que les «représentations» qui peuvent être utilisées pour la résolution des problèmes descriptifs et des problèmes d'application ne sont pas du tout les mêmes. Pour les problèmes descriptifs, elles relèvent de registres de représentation qui peuvent remplir, d'un strict point de vue mathématique, une fonction de traitement : par exemple une figure (Douady 1986, p.16) ou un graphe (Douady 1986, p. 22). Ce qui suppose que l'on contrôle bien et les phénomènes de congruence et de non congruence des conversions

et leur sens. En revanche, pour les problèmes d'application, il n'en va plus de même. La fonction principale des représentations qui peuvent être utilisées est d'aider à comprendre l'énoncé, c'est-à-dire de faire discriminer les deux descriptions superposées et de rendre visible l'articulation des données quantitatives entre elles. C'est pourquoi de telles représentations ne remplissent pas une fonction de traitement et, d'un point de vue mathématique, elles peuvent même apparaître mathématiquement sans intérêt. Cependant, leur utilisation par les élèves, bien que très transitoire, peut être essentielle et, surtout, leur choix doit répondre à un cahier des charges très précis pour justement favoriser la compréhension des énoncés et ne pas constituer un écran supplémentaire. Ce qui, hélas, est encore loin d'être le cas.

On voit donc la nécessité et l'urgence de recherches sur tout ce que recouvre le flou de l'emploi didactique du mot «problème» dans l'enseignement des mathématiques, surtout au niveau de l'enseignement obligatoire. Flou accentué par le recours à des modèles qui veulent rendre compte de tout apprentissage, en mathématiques et en dehors des mathématiques. Vous avez dit «problème» ?

4 Conclusion

Nous pouvons revenir à la question principale énoncée dans le titre et oublier les autres questions qu'elle nous a conduits à envisager. Elle vient de l'idée très forte que l'apprentissage des mathématiques ne pouvait se faire que lorsque les élèves se trouvaient dans une situation leur permettant de pratiquer une *activité mathématique*. Idée forte, parce qu'elle donne comme objectif à l'apprentissage des mathématiques la «structuration personnelle» et l'autonomie de la pensée, chaque élève devant être capable «tout seul» d'initiative et de contrôle dans la conduite de démarches mathématiques. On voit alors la complexité de la question que soulève un tel objectif : comment décrire et analyser une telle activité dont les productions sont loin d'être aussi rapidement accessibles que les productions des autres types d'activité scientifique ou culturelle et qui sont peu visibles dans l'environnement ?

La notion de «*changement de cadre*» constitue un apport important pour décrire et analyser la *dynamique propre à l'activité mathématique*. Car elle met l'accent sur les changements de direction des actes de pensée, c'est-à-dire de la *noésis*, qui sont nécessaires pour être capable de mener *soi-même*, c'est-à-dire sans assistance, une démarche mathématique. Et on ne saurait trop rappeler combien cela a constitué un apport neuf par rapport aux caractérisations antérieures de l'activité mathématique que l'impérialisme axiomatique de la réforme de l'enseignement avait imposé vers les années 70 : un véritable squelette logicisant ayant entraîné dans sa chute la dépréciation du langage. Comme si le langage se réduisait à du vocabulaire ! On aura cependant remarqué que nous dissociions la notion de «*changement de*» direction de la pensée et la notion de «*cadre*». Car la question est à la fois de savoir comment repérer ces changements de direction de pensée en mathématiques et quelles sont les conditions requises pour que tout un chacun en devienne capable.

Le choix entre une approche en termes de cadre et une approche en termes de registres dépend de ce par rapport à quoi on va décrire l'activité mathématique : la *culture mathématique* de la communauté des mathématiciens ou les *systèmes de fonctionnement cognitif* permettant au sujet de conduire les différents types de démarches intellectuelles requis en mathématiques ?

L'organisation de l'enseignement à l'échelle d'une population implique évidemment une fragmentation curriculaire de cette culture mathématique. Et dans cette perspective, la dynamique propre à la pensée mathématique ne peut être décrite et analysée que contre

l'inertie des multiples découpages curriculaires en concepts et en procédures. Les changements de cadre remettent au premier plan l'unité de cette culture comme nécessaire à l'activité mathématique. Et l'on voit d'ailleurs que cela constitue un des objectifs principaux de la formation des futurs enseignants de mathématiques.

En revanche, l'analyse des problèmes d'apprentissage rencontrés par les élèves en mathématiques, c'est-à-dire aux différents niveaux de l'enseignement et dans les différents contenus enseignés, conduit à regarder l'activité mathématique aussi par rapport aux systèmes de fonctionnement cognitifs requis par les divers démarches intellectuelles en mathématiques. Mais là, la présupposition d'un certain «isomorphisme» entre les démarches mathématiques et le fonctionnement cognitif commun à tout individu n'apparaît plus tenable. L'approche en termes de registre de représentation sémiotiques est née de ce constat. Et cela a conduit à rechercher la complexité sous-jacente aux changements de direction de la pensée. Les distinctions entre des transformations de représentation de type traitement ou de type conversion, la prise en compte des variations de conversion en fonction des types de registres mobilisés, la discrimination des types de traitement propres à chaque registre, renvoient à un ensemble de facteurs dont on peut toujours vérifier la pertinence et le poids dans les réussites et les échecs des élèves concernant leur compréhension et leur acquisition de connaissances mathématiques.

Cependant, chacun sait que la description et l'analyse de l'activité mathématique ne peut pas se limiter à ce qui en fait la dynamique propre, le «changement de...». Il y a tout d'abord le problème, trop souvent éludé¹, de l'accessibilité des objets mathématiques par rapport à l'accessibilité d'autres objets de connaissance. C'est par rapport à ce problème que l'*articulation des représentations de registres différents* et, d'une manière plus profonde, celle de l'intégration et de la coordination dans les structures cognitives du sujet des différents registres de représentation sémiotique, apparaissent d'une importance décisive pour l'apprentissage des mathématiques. Et cela d'autant plus que l'on estime que «la structuration (cognitive)² personnelle est essentielle au savoir mathématique» comme l'écrivait R. Douady. Cela ouvre deux champs de questions :

(1) Comment situer le modèle de fonctionnement cognitif que cette analyse conduit à développer par rapport aux modèles classiques de psychologie cognitive centrés sur le traitement de l'information ? Ce qui revient à poser la question plus globale : quel modèle de sujet épistémique (cartésien, kantien, piagetien, modulaire...) implique l'apprentissage en mathématiques ?

(2) Dans nombre de situations, en mathématiques, on mobilise simultanément deux registres de représentation, soit sous la forme de représentations mixtes comme les figures géométriques incluant un codage des propriétés données à titre d'hypothèses, soit la forme d'un complexe de deux représentations comme, par exemple, avec les nombres polygonaux ou encore avec l'introduction de nombres tels que la racine carrée d'un nombre (cf. M. Rogalski). Cela implique évidemment, d'un point de vue cognitif, qu'une certaine articulation soit déjà maîtrisée par les élèves. Mais cela n'est pas suffisant. Il apparaît, en effet, que les représentations constituant ces représentations mixtes ou complexes peuvent remplir les unes par rapport aux autres des fonctions cognitives différentes. Par exemple, les représentations de type discursif peuvent remplir une fonction descriptive par rapport aux représentations de type «visuel». L'analyse de l'activité mathématique exige donc que les fonctions internes

¹ Cette question est une question sensible en raison de ce que nous avons appelé le paradoxe cognitif de la compréhension en mathématiques.

² Je me permet de glisser cette interpolation dans l'affirmation de R. Douady.

respectives des représentations combinées en des «hyper-représentations» mixtes ou complexes soient également prise en compte. Nous avons commencé de dégager les principes et la méthode d'une analyse fonctionnelle des représentations mobilisant simultanément plusieurs registres (Séminaire IUFM; 1999). C'est un peu l'étape qui suit toutes les recherches centrées sur les «changements» de cadres et de registres.

Bibliographie

- Douady R., 1984, *Jeux de cadres et dialectique outil-objet*, Thèse d'Etat, Université Paris7.
- Douady R., 1986, Jeux de cadre et dialectique outil-objet, *Recherches en didactique des mathématiques*, n°7.2 pp. 5-31
- Douady R., 1992, Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement, *Repères*, n°6 pp. 132-158
- Duval R., 1988a, Ecarts sémantiques et cohérence mathématique, in *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, n°1, 7-25.
- Duval R., 1988b, Pour une approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence, in *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, n°1, 57-75.
- Duval R., 1988c, Graphiques et Equations : l'articulation de deux registres, in *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, n°1, 235-255
- Duval R., 1995, *Sémiosis et pensée humaine* Berne: Peter Lang
- Duval R., 1998 Signe et objet (I) : trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet; Signe et objet (II) : questions relatives à l'analyse de la connaissance *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, n°6, 139-163, 165-196 .
- Duval R., 2001, L'apprentissage de l'algèbre et le problème cognitif de la désignation des objets. *SFIDA* n° 13 IREM de Nice.
- Laborde C. (2001) Analyse de textes de démonstration dans Produire et lire des textes de démonstration (Eds. E. Barbin, R. Duval, I. Giorgiutti, J. Houdebine, C. Laborde). Paris : Ellipses.
- Piaget J., 1967, *Biologie et connaissance*. Paris : Gallimard
- Perrin M.-J., 2000, Des problèmes pour enseigner la géométrie à l'école. Des expériences spatiales aux objets géométriques. Conférence IUFM.
- Saussure (de) F. 1973 (1915) *Cours de linguistique générale*, Paris : Payot.
- Séminaire IUFM, 1999, *Conversion et articulation des représentations analogiques* (Dir. Duval R.). I.U.F.M. Nord Pas de Calais : D.R.E.D.

De la notion de « cadre » à l'articulation des cadres théoriques en didactique des mathématiques : quelques réflexions a posteriori

Michèle Artigue

Université Paris 7

Ce colloque organisé en l'honneur de Régine Douady et centré sur la notion de « cadre » qu'elle a introduite et travaillé dans le champ de la didactique des mathématiques a été intéressant à plus d'un titre. Il a permis, vingt après l'émergence de cette notion en didactique des mathématiques, de s'interroger sur ce qui en a fait une notion qui a pris sa place dans l'édifice didactique, une notion qui a été utilisée et questionnée par de nombreux chercheurs, une notion aussi qui a diffusé, par le biais de la formation des enseignants et de vulgarisations diverses, au-delà de la seule communauté des chercheurs, ce qui n'est pas si fréquent. Il nous a aussi conduit à nous interroger sur les rapports que cette notion entretenait ou pourrait entretenir avec des notions qui, dans l'habitat didactique, occupent des niches voisines, avec lesquelles elle est susceptible de rentrer en concurrence. Et ces interrogations, ces réflexions, m'ont conduite personnellement, plus largement, à m'interroger sur la question de l'articulation des cadres théoriques en didactique des mathématiques et, au-delà de cette question, sur le rôle que les uns et les autres jouons au sein de la communauté didactique. Ce sont ces quelques réflexions que je souhaiterais partager avec le lecteur, qu'il ait ou non assisté au colloque, à travers ce texte. Elles sont tout à fait personnelles, sans aucun doute largement discutables et n'engagent bien sûr que leur auteur.

Les exposés présentés à ce colloque et dont ces actes se font l'écho, les réactions de Régine Douady à ces exposés, ont mis d'abord en lumière, la façon dont une chercheuse, vivant dans une culture et dans un environnement donnés, a cherché à répondre à la question fondamentale et jamais définitivement résolue de savoir comment des connaissances anciennes peuvent générer du nouveau, un nouveau parfois en fort décalage si ce n'est en rupture avec l'ancien, et comment surtout cette construction de nouveau peut s'organiser dans un cadre institutionnel comme l'est celui de l'Ecole. A partir d'observations diverses mais particulières, Régine Douady s'est construit un modèle où la dialectique entre l'ancien et le nouveau se nourrissait de changements de cadres. Les cadres mathématiques, par leurs interactions, étaient en quelque sorte le moteur essentiel, générant à la fois déséquilibres cognitifs et moyens de dépassements de ces déséquilibres, au sens Piagétien du terme. De là est née la thématique d'une chercheuse, le fil d'Ariane qui a tissé sa vie didactique, sa perception du didactique. L'identification comme objet de ce qui n'avait sans doute été pendant un temps qu'une intuition didactique, qu'un outil de pensée, a permis ensuite

d'avancer. Il a fallu préciser, en s'appuyant sur la confrontation à la contingence mais en la dépassant aussi nécessairement, ce que pouvait recouvrir exactement cette notion intuitive de cadre, ce qui constituait la force des changements de cadres en mathématiques. Il a fallu préciser ce que pourraient être des transpositions efficaces au monde de l'enseignement : de là sont nés les jeux de cadres. La notion de cadre émergeait ainsi comme objet didactique. Sa cohérence, sa pertinence pouvaient être débattues, d'autres chercheurs pouvaient l'utiliser, la façonner en fonction de leurs besoins propres : elle devenait un objet public, échappant de gré ou de force à son concepteur. Il est intéressant cependant de remarquer que si la notion de cadre a été largement utilisée, elle n'a en fait que peu bougé, comparativement à d'autres concepts didactiques. Les exposés à ce colloque d'A. Robert, M. Rogalski, D. Butlen, me semble-t-il, le mettent bien en évidence, tout en montrant la pertinence et l'efficacité de cette notion, qu'il s'agisse pour le didacticien de conduire des analyses de savoirs mathématiques, de penser des genèses scolaires possibles de ces savoirs ou de penser la formation des maîtres.

Ce colloque a aussi été l'occasion de travailler sur la place de cette notion de cadre dans l'édifice didactique, sur son articulation avec d'autres notions pouvant sembler voisines, et de réfléchir plus largement sur les questions de compatibilité et complémentarité des cadres théoriques développés en didactique des mathématiques. Chaque notion, chaque construction didactique nouvelle, pour subsister et se développer, doit remplir une fonction dans l'édifice didactique que l'existant ne remplissait pas ou remplissait moins efficacement. La notion de cadre est, à mes yeux, une notion qui a permis à la didactique des mathématiques en France, de prendre en compte très tôt des connections, des flexibilités qui jouent un rôle essentiel dans l'activité des mathématiciens¹ et dont on pouvait dès lors supposer qu'elles avaient à jouer un rôle décisif aussi dans l'apprentissage des élèves. Ceci n'est sans doute pas étranger à son succès. Cette attention aux flexibilités nous est aujourd'hui devenue familière et différentes constructions théoriques sont venues l'épauler, en France comme à l'étranger, mais il faut souligner que ce n'était pas le cas lorsque la notion de cadre a émergé. L'accent était davantage mis sur le développement « vertical » des connaissances, via des niveaux de conceptualisation, d'abstraction, de formalisation, croissants que sur leur développement « horizontal », ou sur la dialectique entre ces deux types de développement dans laquelle justement s'inscrit la notion de cadre. Le caractère fortement contextualisé ou situé des connaissances que nous construisons, l'importance des constructions cognitives à réaliser pour leur permettre d'être exploitables en dehors de leur contexte d'apparition, en bref la complexité de la dialectique entre connaissances et savoirs était encore largement sous-estimée. Il faut voir là, sans doute, au moins partiellement, l'influence de l'épistémologie Piagétienne alors dominante. L'accent était de plus davantage mis sur les ruptures qui marquent l'avancée des connaissances que sur le développement d'une quelconque flexibilité et les didacticiens français avaient trouvé dans la notion d'obstacle épistémologique empruntée à G. Bachelard le moyen de théoriser ces ruptures. Les évolutions de la connaissance se modélisaient en évolutions de conceptions, des évolutions dans lesquelles le didacticien étudiait en priorité les singularités de la dynamique. Tout en émergeant de cette culture didactique, la notion de cadre orientait le regard dans une autre direction, une direction qui s'est révélée fructueuse.

¹ Soulignons cependant que cette position épistémologique elle-même ne va pas de soi : l'histoire des mathématiques montre que, pendant des siècles, il a été considéré comme inélégant voire parfois même illégitime de prouver des résultats dans un domaine avec des arguments issus d'un autre domaine, même si de telles articulations avaient pu être source d'inspiration. L'histoire des rapports entre géométrie et algèbre l'illustre clairement.

Comme nous l'avons souligné plus haut, ce colloque avait aussi pour ambition de réfléchir sur la position de la notion de cadre au sein de l'édifice didactique, au moins au sein de la didactique française. Quels rapports s'étaient établis avec des notions comme celle de conception qui jouaient déjà, au moment de son émergence, un rôle clef dans la modélisation didactique des processus d'apprentissage en mathématiques ? Comment ces rapports avaient-ils évolué et pourquoi ? Quels rapports s'étaient construits avec la théorie des situations didactiques qui, on le sait, a joué et joue encore un rôle fédérateur au sein de la communauté française des didacticiens des mathématiques ? Quels rapports s'étaient établis avec la notion de registre, importée dans la communauté par R. Duval, et qui pouvait apparaître au premier regard comme une notion concurrente ? Les exposés de N. Balacheff, G. Brousseau, R. Duval et M.J. Perrin ont permis de travailler ces questions au cours du colloque.

En ce qui concerne les relations entre cadres et registres, R. Duval et M.J. Perrin ont particulièrement bien montré, me semble-t-il, en quoi ces notions se différencient mais en quoi aussi elles se complétaient et étaient solidaires. R. Duval a pointé les différences en répondant à trois questions fondamentales :

- Comment reconnaît-on la diversité des cadres, respectivement des registres ?
- Quelles distinctions sont effectuées dans chaque cas pour rendre opératoire la notion ?
- A quels phénomènes sont liés les changements de cadres, respectivement de registres et quels sont leurs effets ?

M. J. Perrin, tout en soulignant elle aussi les différences, a montré la solidarité de ces deux notions. Certes chaque notion a sa fonctionnalité et sa cohérence propre, certes plusieurs registres interviennent généralement au sein d'un même cadre et, en sens inverse, un même registre peut intervenir dans plusieurs cadres mais, aujourd'hui, une analyse en termes de cadres qui ferait l'économie d'une analyse sémiotique en termes de registres nous semblerait insuffisante pour fonder l'analyse et l'action didactique. En sens inverse, une analyse qui se voudrait uniquement sémiotique risquerait d'oublier des déterminants essentiels : ce sont des propriétés mathématiques relatives à un cadre qui permettent en effet de justifier les règles de traitement dans un registre ou de conversions entre registres au sein d'un même cadre.

En ce qui concerne conceptions et cadres, la confusion n'était guère possible mais N. Balacheff a insisté sur le fait que les deux notions répondaient à des modélisations de nature différente : celle de conception qu'il définit comme un quadruplet correspond à une modélisation épistémique, celle de cadre à une modélisation mathématique. Elles sont en ce sens complémentaires. Les jeux de cadres ont pour ambition de permettre l'évolution des conceptions et faire qu'à la limite, en fin d'apprentissage, les deux modélisations relativement à un objet mathématique donné, tendent à se confondre. Dans ces conditions, pour N. Balacheff, et c'est semble-t-il un thème récurrent dans ses discussions avec R. Douady, l'efficacité didactique de la notion de cadre pour l'analyse tient aussi à ce que la différenciation soit claire et que la notion de cadre ne se charge pas d'attributs de nature épistémique comme les images mentales.

En écoutant l'exposé de G. Brousseau, la question de l'articulation avec la théorie des situations didactiques m'a personnellement paru moins triviale. Pour G. Brousseau, comme il l'a expliqué, la notion de cadre renvoie à la question des 'agrégats' : agrégats de connaissances et agrégats de situations destinées à fonctionner ensemble assez fréquemment. C'est pour lui une question centrale dans la théorie des situations didactiques. Les notions de concept et de conception, utilisées dans cette théorie mais aussi celles de praxéologie, de champ conceptuel, de registre participent toutes selon lui de tentatives pour répondre à cette

question, avec des entrées bien sûr différentes. Quelle place exacte alors pour la notion de cadre ? J'ai senti G. Brousseau gêné ici par l'absence d'une définition plus précise, catégorique, de la notion de cadre. A ce questionnement, s'ajoutaient visiblement des interrogations sur la gestion didactique des jeux de cadre et les glissements méta-didactiques que de tels jeux risquaient d'engendrer.

Son exposé, au-delà des questions pertinentes qu'il soulevait, m'a conduit à m'interroger sur les rôles que nous jouons les uns et les autres au sein de la communauté didactique. Comme un certain nombre d'entre nous, j'utilise conjointement dans mon travail des cadres théoriques distincts, en fonction des problématiques de mes recherches et des besoins que je ressens. Un tel comportement est, semble-t-il, impossible à des chercheurs qui, comme G. Brousseau, R. Douady et R. Duval, pour ne citer qu'eux car ils étaient présents à ce colloque, sont portés par une thématique forte qui fait leur créativité didactique. Il est essentiel que de tels chercheurs existent et que la communauté les laisse creuser leur sillon. Mais si l'on veut que cette communauté vive et se développe dans un univers de recherche qui, comme celui de la didactique des mathématiques, ne peut se satisfaire d'un paradigme unique, il est important aussi qu'existent au sein de la communauté ceux qui sauront tisser ensemble, parce qu'ils accepteront d'en affaiblir les exigences, des cadres théoriques et des concepts, qui sauront mettre en évidence et exploiter leurs complémentarités, leurs solidarités a priori insoupçonnées. Le développement de la recherche didactique, la capitalisation de ses résultats sont aussi à ce prix.

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM

Vous pouvez soit :

- Consulter notre site WEB :

<http://iremp7.math.jussieu.fr>

- Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7

Case 7018

2 place Jussieu

75251 Paris cedex 05

TITRE :

Actes de la journée en hommage à Régine Douady,
organisée par l'équipe DIDIREM

AUTEUR (S) :

**Aline ROBERT, Marc ROGALSKI, Denis BUTLEN,
Marie-Jeanne PERRIN, Guy BROUSSEAU,
Raymond DUVAL, Michèle ARTIGUE**

RESUME :

Textes des conférences données lors de cette journée

MOTS CLES :

Changement de cadres, conversion de registres sémiotiques,
Dialectique outil / objet
Théorie des situations didactiques, milieu didactique,
Enseignement des mathématiques,
Homologie, analogie, conception, agrégat

**Editeur : IREM
Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la
publication : R.CORI
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : 2002
ISBN : 2-86612-224-0**