A.R.D.M.

ASSOCIATION POUR LA RECHERCHE EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

INSTITUT DE RECHERCHE POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Actes du séminaire national de didactique des mathématiques

Année 2000

Edités par Teresa Assude et Brigitte Grugeon,

Équipe DIDIREM, Université Paris 7

Actes du séminaire national de didactique des mathématiques

Année 2000

Edités par Teresa Assude et Brigitte Grugeon

ARDM et IREM de Paris 7

Sommaire

Le séminaire en acte(s)

Le séminaire national est un des lieux de rencontre réguliers de la communauté des chercheurs mais aussi des formateurs ou enseignants qui s'intéressent à la recherche en didactique des mathématiques. Il est organisé par l'Association de recherche en didactique des mathématiques (ARDM) en collaboration avec une équipe de recherche qui prend en charge pendant deux ans la responsabilité scientifique et l'organisation matérielle.

Les fonctions du séminaire sont celles de communiquer, de transmettre, de valider, de débattre les travaux en cours, travaux qui sont marqués par les objets, les problématiques et les méthodes à un moment donné. Le séminaire en acte recouvre la recherche en acte, en train de se faire au moment où elle se fait. Il est intéressant de garder des traces de ce travail en acte qui va évoluer, changer, s'approfondir : les traces permettent une mémoire et la mémoire permet d'y revenir pour mieux voir les avancées, les héritages et y asseoir les projets ou les développements.

Malgré son existence depuis de nombreuses années, le séminaire n'a été mis en actes qu'en 1993 et 1994 dans l'ouvrage coordonné par Claire Margolinas intitulé « Les débats de didactique des mathématiques ». Cette fonction de « mémoire » nous paraissant essentielle, nous avons décidé de reprendre une tradition éphémère dans les actes qui suivent où chaque auteur est responsable de ce qu'il affirme. Nous voulons que ces actes puissent être un instrument de travail, à la fois, pour les auteurs qui peuvent exploiter leurs textes (en les retravaillant ou non) et les soumettre dans d'autres lieux de publication, pour les lecteurs qui peuvent s'imprégner des thèmes et des débats du moment et les faire évoluer.

Nous avons organisé les séminaires de l'année 2000 à partir de thématiques actuelles de la recherche : preuves et raisonnements, pratiques de l'enseignant et enseignement et apprentissage de l'analyse.

Le premier thème « P*reuves et raisonnements* » regroupe le texte de Paolo Boero « *Entrer dans la culture des théorèmes* » et celui de Viviane Durand-Guerrier *« Logique et raisonnement mathématique : Variabilité des exigences de rigueur dans les démonstrations mettant en jeu des énoncés existentiels* ». Le texte de l'exposé de Julien Rolland *« Illustration de la pertinence des mathématiques discrètes pour la modélisation et la distinction condition nécessaire/condition suffisante* » est absent de ce recueil.

Le deuxième thème « *Pratiques de l'enseignant* » regroupe des textes issus de cadres théoriques distincts. Le texte d'Aline Robert « *Introduction, pourquoi une étude de pratiques en classe, comment la mener, que peut-on attendre des choix faits, quels manques ?* » ouvre ce thème. Il est suivi par ceux de Christophe Hache « *L'enseignant de mathématiques au quotidien, études de pratiques en classe de seconde* » et de Danièle Vergnes « *Analyse des effets d'un stage de formation continue en géométrie sur les pratiques d'enseignants de l'école primaire* » qui illustrent certains points. Le texte de Janine Rogalski « *Y a-t-il un pilote dans la classe ? Approche de psychologie ergonomique de l'activité de l'enseignant* » aborde ce thème du point de vue ergonomique. Il manque le texte de Michèle Artaud « *Analyser et évaluer des praxéologies didactiques en vue de les développer* » qui sera néanmoins disponible sur l'Internet à l'adresse suivante : http://www.aix-mrs.iufm.fr/recherche/.

Cinq textes correspondent au troisième thème de l'année « *Enseignement et apprentissage de l'analyse* ». Il s'agit des textes d'Eduardo Lacasta « *Les modes de fonctionnement du graphique cartésien de fonctions comme milieu : rapports effectifs et fictifs au savoir* », de Frédéric Praslon « *Continuités et ruptures dans la transition terminale S/DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement* », d'Isabelle Bloch « *Situations à dimension a-didactique et paradigmes d'enseignement dans le secondaire : la notion de fonction* », d'Elena Nardi « *Towards Calculus as an 'arsenal of techniques': a Spectrum of Pedagogical Development for the teaching of undergraduate mathematics* » et de Michèle Artigue « *L'entrée dans le champ conceptuel de l'analyse : réformes curriculaires, recherches didactiques : où en est-on ?* ».

Deux exposés du séminaire de 2000 ne rentrent dans aucun des trois thèmes : il s'agit de celui d'André Pressiat « *Aspects épistémologiques et didactiques de la liaison "points-vecteurs"* » dont le texte ouvre ces actes, et de celui d'Adolphe Adihou « *Résolution de problèmes arithmétiques par la mise en équation et méthode de résolution* » dont le texte est absent de ce recueil.

Chaque séminaire s'est terminé par des débats relatifs à chaque thème. Nous voulons remercier Michèle Artigue, Claire Margolinas et Luc Trouche de les avoir animés et d'avoir permis à ceux qui étaient présents, par leurs questions et remarques, de se rendre compte des enjeux essentiels concernant ces thèmes. Vous trouverez en annexe le programme de chaque séminaire.

Et pour finir, que ce séminaire en acte(s) puisse être un réel instrument de travail pour tous.

Point de vue sur l'enseignement de la géométrie au lycée

ASPECTS EPISTEMOLOGIQUES ET DIDACTIQUES DE LA LIAISON "POINTS - VECTEURS"

André PRESSIAT[1]
INRP et IUFM d'Orléans – Tours

La présentation porte sur une thèse, soutenue en mai 1999. Le point de départ de ce travail réside dans le constat des récentes difficultés d'enseignement, en France, relatives à l'emploi du calcul vectoriel pour traiter des questions de géométrie au lycée, constat que nous expliciterons en examinant l'enseignement de deux types de problèmes : le traitement vectoriel des questions d'alignement et de concours en classe de seconde, et l'étude de configurations planes à l'aide de transformations vectorielles en terminale. Le but de ce travail est d'analyser les raisons de ces difficultés, puis de proposer des éléments d'ingénierie curriculaire sur ce thème. Comme l'indique le titre de la thèse, le cadre d'analyse est à la fois épistémologique et didactique. Du point de vue didactique, le cadre théorique utilisé est celui de la théorie anthropologique, et notamment les notions d'organisation mathématique et d'organisation didactique. La démarche générale consiste à entreprendre une étude épistémologique et historique la plus complète possible relative à l'émergence des notions de vecteur, d'espace vectoriel et d'espace affine, en focalisant notre attention sur les organisations mathématiques et didactiques déjà mises en œuvre, en France mais également dans d'autres pays, qui intègrent les deux types de problèmes évoqués plus haut. Cette prise de distance par rapport aux pratiques institutionnalisées et dominantes dans notre pays est ensuite mise à profit pour proposer de nouvelles organisations mathématiques et didactiques qui ne souffrent plus des mêmes faiblesses ; elles introduisent un nouvel ostensif, le vecteur - position, ce qui modifie les techniques utilisées, mais également le contenu et la genèse des organisations mathématiques et didactiques proposées.

Dans la suite, nous évoquerons rapidement quelques exemples de problèmes dont l'enseignement a récemment rencontré des difficultés. Ensuite, nous développerons la liaison « points – vecteurs » d'abord du point de vue théorique, puis du point de vue des types de problèmes et des techniques. Nous présenterons ensuite la nouvelle organisation mathématique et didactique, avant de conclure et d'évoquer des questions qui restent à étudier.

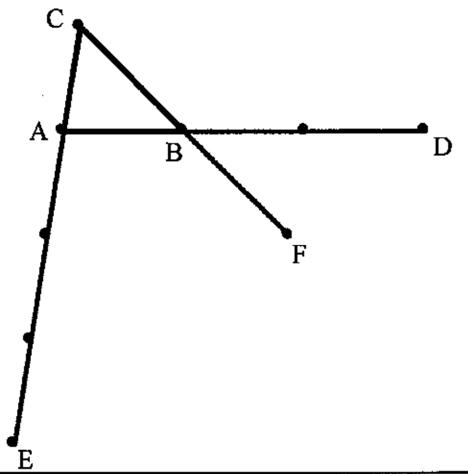
---

[1] andre.pressiat@wanadoo.fr

I. DIFFICULTES RECENTES DANS LA MISE EN ŒUVRE DES PROGRAMMES

1. Au niveau de la classe de Seconde

L'énoncé suivant est un exemple illustrant le type de problèmes d'alignement souvent traité immédiatement après que la multiplication externe a été introduite. Il sert de support à l'explicitation d'une méthode proposée par N. Vogel dans un article de la revue «Repères IREM» (n°16), dans lequel l'auteur critique celles proposées par divers auteurs de manuels.



<u>Énoncé</u>

On donne un triangle ABC et les trois points D, E, F définis par :

$\overrightarrow{AD} = 3\,\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CF} = 2\,\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{AE} = -3\,\overrightarrow{AC}$.

Prouver que D, E, F sont alignés.

La méthode proposée, du point de vue mathématique, n'utilise que la définition et les propriétés élémentaires de l'addition et de la multiplication externe, ainsi que la caractérisation de l'alignement de trois points en termes de vecteurs colinéaires. En revanche, elle fait intervenir des accessoires et des techniques associées à ces accessoires : identification et utilisation de vecteurs ou chemins coloriés reliant des points ; l'emploi des vecteurs seuls semble manquer de puissance et d'autonomie, il faut le contrôler à l'aide d'indices extérieurs. Ces techniques ne seront ni reprises dans les classes ultérieures, ni reliées à celles découlant de l'emploi du barycentre. On peut s'étonner de l'absence quasi-totale dans les manuels de Seconde d'une technique comme la suivante, utilisant une base attachée à la configuration.

Prenons comme base $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$. Décomposons $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{EF}$ dans cette base.

$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE} = 3\,\overrightarrow{AB} + 3\,\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} + 3\,\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AC} + 2\,\overrightarrow{CB} = 4\overrightarrow{AC} + 2\,\overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{AC}$

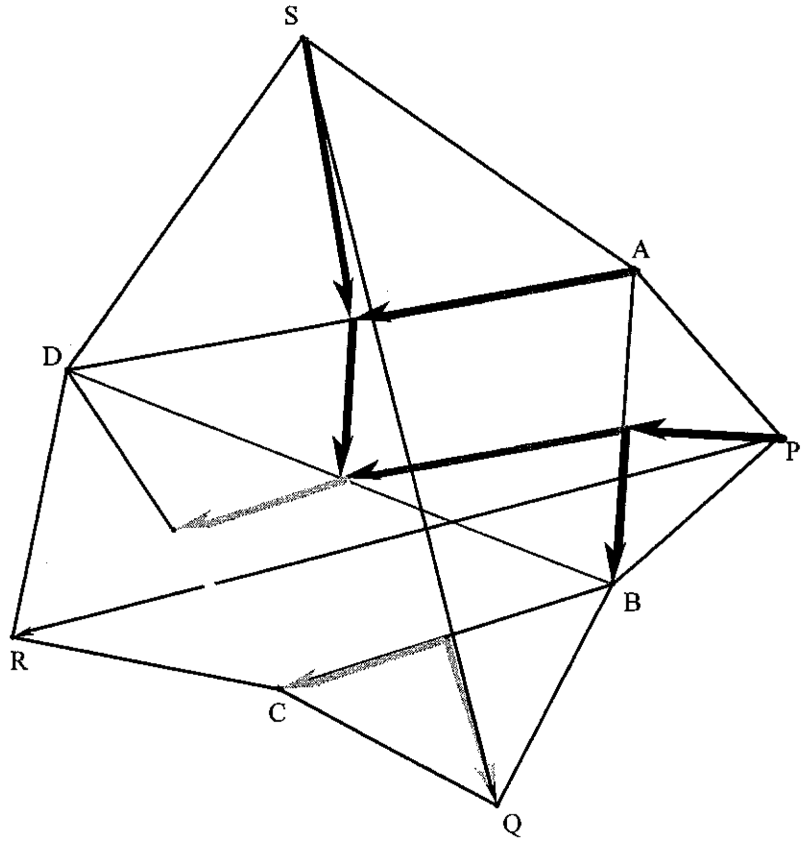
$= 2\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AC}$.

Donc $\overrightarrow{ED} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{EF}$. Et donc D, E et F sont alignés.

Le recours à une base est jugé inutile pour traiter une telle question. La notion de base sera introduite plus tard, et réservée quasi-exclusivement à l'utilisation en géométrie analytique.

2. Au niveau de la classe de Terminale S

La technique que nous allons évoquer concerne l'emploi d'une transformation vectorielle (essentiellement une isométrie vectorielle ou une similitude vectorielle) pour l'étude d'une configuration du plan (par exemple, celle dite « des triangles de Napoléon » ou celle de Van Aubel – les centres des carrés construits sur les côtés d'un quadrilatère ABCD forment un quadrilatère EFGH dont les diagonales ont même longueur et sont perpendiculaires – illustrée ci-dessous).



Nous laissons au lecteur le soin de reconstituer l'effet du quart de tour vectoriel direct sur la décomposition du vecteur $\overrightarrow{PR}$, et de reconstituer ensuite le vecteur $\overrightarrow{SQ}$. L'introduction de cette technique dans les programmes date de 1986, avec une première mise en application dans les classes à la rentrée 1989 ; elle disparaîtra dès la rentrée scolaire de 1994.

II. POINTS ET VECTEURS : POINT DE VUE THEORIQUE

Parmi les 43 ouvrages que nous avons examinés pour reconstituer l'émergence et le développement du calcul vectoriello - ponctuel, les auteurs suivants sont incontournables.

Pour l'émergence des espaces vectoriels

LEIBNIZ - 1672/79 HAMILTON - 1843

GRASSMANN - 1839/44 GIBBS - 1879/84

BURALI-FORTI & MARCOLONGO - 1909/10

Pour l'émergence des espaces affines

WEYL - 1918/22 FRÉCHET - 1928

Pour les constructions théoriques de la géométrie, autres que celles d'Euclide et de Weyl

HILBERT - 1899 BIRKHOFF – 1929 BRISAC – 1955

BLUMENTHAL – 1961 DIEUDONNÉ - 1964/68

Pour les articulations entre les voies anciennes et la voie vectorielle

FRÉCHET - 1928 ARTIN / BLUMENTHAL - 1955

CHOQUET – 1964 MIRON – BRÄNZEI - 1995

Nous n'évoquerons ici que certains d'entre eux, d'un triple point de vue : existence dans leurs travaux d'une remise en cause des théories antérieures ; citations (parfois traduites par nos soins) de certains passages importants ; influence de l'œuvre du point de vue didactique.

LEIBNIZ - 1672/79

• Dans son ouvrage «La caractéristique géométrique», Leibniz critique le choix des axiomes fait par Euclide, ainsi que la géométrie analytique de Descartes.

• Il est à la recherche de l'analogue pour la géométrie de ce que l'algèbre permet pour les grandeurs : « Il nous faut encor une autre Analyse proprement geometrique ou lineaire, qui nous exprime directement *situm* comme l'Algebre exprime *magnitudinem*. Et je croy d'en avoir le moyen, et qu'on pourroit representer des figures et meme des machines et mouvemens en caracteres, comme l'Algebre represente les nombres ou grandeurs ; et je Vous en envoye un essay, qui me paroist considerable. ».

Dans ce but, il définit les caractères :

« Les caractères sont des objets exprimant les relations entre d'autres objets, plus faciles à manier qu'elles », et introduit en particulier le suivant :

« on désigne par A.B la situation mutuelle des points A et B, c'est-à-dire un extensum (rectiligne ou curviligne, peu importe) qui les relie et demeure le même tant que cette situation ne varie pas ». Leibniz définit ensuite la notion de congruence, et introduit à ce sujet une nouvelle notation, voisine de la lettre γ, qui lui permet de définir les ensembles suivants : sphère de centre A et de rayon AB, plan (ensemble des points équidistants des points A et B), droite (ensemble des points Y tels que $A.Y \gamma B.Y \gamma C.Y$).

Leibniz utilise la congruence γ pour énoncer des axiomes :

– le premier dit que $A\gamma B$, c'est-à-dire qu'un point quelconque est congru à tout autre, ce qui distingue l'espace géométrique de l'espace physique ;

– le deuxième dit que la relation $A.B \gamma B.A$ est toujours vraie.

Ces choix interdisent à Leibniz de voir A.B et B.A comme deux entités distinctes, étape indispensable pour que Leibniz ait pu développer un système vectoriel. Grassmann fournira une réponse au projet que Leibniz a su définir sans pouvoir le conduire à son terme, réponse qui lui permettra en 1846 de gagner un prix promis par la revue « Jablonowskischen Gesellschaft » pour récompenser la création d'un système satisfaisant aux contraintes énoncées par Leibniz.

HAMILTON - 1843

On sait qu'on lui doit l'introduction du mot « vecteur » :

« The algebraically *real* part may receive ... all values contained on the one *scale* of progression of number from negative to positive infinity ; we shall call it therefore the scalar part, or simply the scalar of the quaternion, and shall form its symbol by prefixing, to the symbol of the quaternion, the characteristic Scal., or simply S., where no confusion seems likely to arise from using this last abbreviation. On the other hand, the algebraically imaginary part, being geometrically constructed by a straight line or radius vector, which has, in general, for each determined quaternion, a determined length and determined direction in space, may be called the vector part, or simply the vector of the quaternion ; and may be denoted by prefixing the characteristic Vect., or V. We may therefore say that a quaternion is in general the sum of its own scalar and vector parts, and may write

$$Q = \mathrm{Scal}.Q + \mathrm{Vect}.Q = S.Q + V.Q$$

or simply Q = SQ +VQ. ».

Hamilton illustre l'emploi des symboles V et S dans le cas particulier des quaternions dont la partie scalaire est nulle : si $\alpha = xi + yj + zk$ et $\alpha' = x'i + y'j + z'k$, $S\alpha\alpha' = -(xx' + yy' + zz')$ et $V\alpha\alpha' = i(yz' - z'y) + j(zx' - xz') + k(xy' - x'y)$.

GRASSMANN - 1839/44

• Comme Leibniz, il remet en cause la construction d'Euclide : « la géométrie manque toujours d'un début scientifique et [...] le fondement pour tout l'édifice de la géométrie souffre jusqu'à présent d'un défaut qui rend nécessaire une transformation complète de celui-ci. »

• Il est l'inventeur de la relation que seuls les manuels (à de rares exceptions près) et la tradition française attribuent à Chasles, comme le montre cet extrait d'une de ses lettres :

« Le point de départ vint de la considération de quantités négatives en géométrie : j'étais habitué à voir les distances AB et BA comme des quantités opposées. Il en résultait la conclusion que si A, B et C sont des points d'une ligne droite, alors dans tous les cas AB + BC = AC, ceci étant vrai aussi bien lorsque AB et BC sont dirigés dans le même sens que s'ils sont de sens contraire (quand C est entre A et B). Dans ce dernier cas, AB et BC ne sont pas considérés simplement comme des longueurs, mais simultanément leurs sens sont pris en considération car ils sont de sens contraires. Ainsi fut mis à jour la distinction entre somme de longueurs et somme de distances ayant une direction fixe. Il en résultait la nécessité de définir ce dernier concept de somme non seulement dans le cas où les distances ont des sens égaux ou opposés, mais aussi dans tous les autres cas. Ceci peut être fait de la manière la plus simple en faisant que AB + BC = AC reste vrai quand A, B et C ne sont pas sur une même ligne droite. ...

Quand je combinai ce concept de produit géométrique avec l'idée antérieurement établie de somme géométrique, l'harmonie la plus frappante en résulta.

Un travail sur la théorie des marées, que j'avais entrepris il y a longtemps, me conduisit à la Mécanique Analytique de Lagrange et, de ce fait, je repris ces idées d'analyse. Tous les développements dans ce travail furent transformés selon les principes de cette nouvelle analyse d'une manière si simple que les calculs devenaient souvent plus de dix fois plus courts que dans l'œuvre de Lagrange. ».

C'est également à Grassmann que l'on doit l'extension du calcul barycentrique de Mœbius dans le cas où la somme des coefficients est nul, résultat connu dans la tradition française sous le nom de «fonction vectorielle de Leibniz» (!).

Son travail, d'accès difficile, sera très peu diffusé, avant de connaître une reconnaissance tardive.

GIBBS - 1879/84

C'est l'un des créateurs de l'algèbre linéaire moderne, en isolant les vecteurs de la théorie des quaternions.

« Mon premier contact avec les quaternions eut lieu lors de la lecture de « Electricity and Magnetism » de Maxwell, où les notations des quaternions sont beaucoup utilisées. Je fus vite convaincu que pour dominer ce sujet, il était nécessaire que j'en maîtrise les méthodes. En même temps, je me rendis compte que, bien que les méthodes soient appelées quaternioniques, l'idée de quaternion était tout à fait étrangère au sujet. En ce qui concerne le produit de vecteurs, je me suis rendu compte qu'il y avait deux importantes fonctions (ou produits) appelées la partie vectorielle et la partie scalaire du produit, mais que la réunion des deux pour former ce qui était appelé le produit (complet) ne faisait pas avancer la théorie en tant qu'instrument d'investigation géométrique.[...] J'ai donc commencé à développer, en repartant de zéro, l'algèbre comportant les deux sortes de multiplication, les trois opérateurs différentiels, ...[...] Je finis par imprimer ce travail, mais ne le publiai pas, même si j'en distribuai un bon nombre d'exemplaires à des personnes qui me semblaient pouvoir y trouver un intérêt. Le délai que je pris et mon hésitation venaient principalement de ma difficulté à me décider sur des détails de notations, sujets secondaires en eux-mêmes, mais pour lesquels il vaut mieux éviter des changements inutiles. [...]. De toute manière, je me rendis compte que les méthodes que j'utilisais, tout en étant à peu près celles de Hamilton, étaient presque exactement celles de Grassmann. [...]. Je n'ai cependant pas conscience d'avoir été influencé par les écrits de Grassmann dans mon « Vector Analysis », même si je n'étais pas mécontent, dans l'introduction, de m'abriter derrière un ou deux noms distingués (Grassmann et Clifford) pour avoir fait des changements de notation que je pensais être détestables pour les quaternionistes. ».

• Gibbs est le premier à avoir donné un cours de calcul vectoriel, ayant précisément pour support son « Vector analysis ».

WEYL – 1918

Les propriétés « affines » ont été pressenties par Euler (1707–1783). Möbius parle d'affinités pour désigner les transformations projectives qui conservent le parallélisme.

• Hermann Weyl invente les espaces affines (qu'il définit et dont il établit les propriétés en quelques pages) afin de pouvoir les utiliser dans une géométrie différentielle permettant de traiter la théorie de la relativité générale d'Einstein.

Dans une multiplicité à n dimensions, munie d'un système de coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_n$, les formules de changements de coordonnées pour passer du système $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})$ au système $x_1, x_2, \dots, x_n$, étant de la forme $x_i = f_i(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})$, où les fonctions f_i possèdent des dérivées partielles α_k^i continues dont le déterminant n'est pas nul, ceci afin d'assurer que la géométrie affine soit valable dans l'infiniment petit, de façon à pouvoir calculer les dx_i en fonction des $d\overline{x_i}$, par les formules

$dx_i = \alpha_k^i \, d\overline{x_i}$, (avec la convention de sommation d'Einstein)

les coordonnées relatives d'un point $P'(x_i + dx_i)$ infiniment voisin d'un point $P(x_i)$ sont les composantes d'un élément linéaire ou d'une translation infinitésimale $\overline{PP'}$.
Les translations infinitésimales jouent le même rôle pour le développement du calcul tensoriel que celui que jouent les translations finies pour l'édification de la géométrie affine.
• Seulement 44 ans plus tard, on verra l'introduction des espaces affines tels qu'ils ont été définis par H. Weyl dans les programmes de la classe de Maths Spéciales A'.

BIRKHOFF - 1929

• L'ouvrage est construit de façon à enrichir petit à petit le système d'axiomes, de façon à faire disparaître des propriétés indésirables d'une part, et de façon à introduire le plus tard possible l'axiome d'Euclide d'autre part. On développe ainsi au maximum la géométrie dite « absolue », dans laquelle on ne fait intervenir ni cet axiome ni sa négation.

Aucune considération vectorielle n'apparaît dans ce livre. Il constitue une façon de structurer, sur le plan du savoir « savant », l'édifice enseigné au collège. Les noms donnés aux axiomes se veulent suggestifs.
Axiome 1 : Incidence
Axiome 2 : le postulat de la règle (graduée)
Il existe une application d de $\Pi \times \Pi$ dans **R**, $(P, Q) \mapsto PQ$, telle que pour chaque droite d il existe une bijection f de d dans **R**, telle que : pour tout couple (P, Q) de points de d on ait : $PQ = |f(P) - f(Q)|$.
On peut alors définir la relation « être entre », les notions de segment, de demi-droite, d'angle (comme réunion de deux demi-droites de même origine, non portées par la même droite), d'ensemble convexe.
Axiome 3 : Séparation
On peut alors définir l'intérieur d'un angle (comme intersection de deux demi-plans) et démontrer qu'il y a équivalence entre l'appartenance d'un point M à l'intérieur d'un angle $\angle AVB$ et le fait que la demi-droite [VM) coupe le segment AB.
Axiome 4 : l'axiome du rapporteur
Axiome 5 : axiome du miroir (ou côté – angle - côté : cet axiome peut être présenté sous deux formes équivalentes)
Axiome 6 : Postulat d'Euclide (ou pour la géométrie non-euclidienne : l'axiome des parallèles).
• En 1929, Birkhoff et un enseignant, Ralph Beatley, ont écrit un article intitulé « A New approch to Elementary Geometry » fondé sur les propriétés ci-dessus et donnant des conseils à l'intention des enseignants de lycée.

CHOQUET - 1964

• Choquet propose deux axiomatiques permettant de dégager la structure vectorielle du plan.

La première s'inspire de la démarche de Birkhoff, mais la simplifie :

– d'une part, en remplaçant l'introduction de la relation « être entre » par celle d'une relation d'ordre total sur chacune des droites ;

– d'autre part, en introduisant très tôt l'axiome des parallèles, ce qui lui permet d'introduire en tant qu'axiome la conservation du milieu par une projection parallèlement à une droite (et d'obtenir ainsi un « plan de translation »).

Enfin, il utilise abondamment le pointage des droites et du plan, démontrant que les résultats obtenus en matière de vecteurs sont indépendants du point choisi.

La deuxième fait jouer un rôle plus important à la notion de distance.

• La première de ces axiomatiques inspirera les programmes de collège de la période des mathématiques modernes, la seconde les programmes qui leur succéderont.

DIEUDONNÉ - 1964/68

• Il propose une théorie du plan et de l'espace affine en se plaçant uniquement dans un espace vectoriel (de dimension 2 ou 3) ;

a et b désignant deux points d'un tel ensemble, la droite D_{ab} est l'ensemble des points $a + \xi\,(b - a)$ ou encore $(1 - \xi)\,a + \xi\, b$, ξ décrivant $\mathbf{R}$.

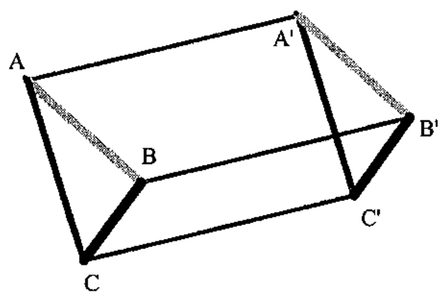
La notion de barycentre n'est nulle part abordée, pas même dans les thèmes d'exercices proposés.

• Son influence dans les débats sur l'enseignement de la géométrie est bien connue.

ARTIN – BLUMENTHAL - 1955/61

• Ils proposent une reconstruction axiomatique de la géométrie affine, sans disposer au départ de la notion de nombre.

– Elle met d'abord en évidence l'importance du petit axiome de Desargues (version affine)



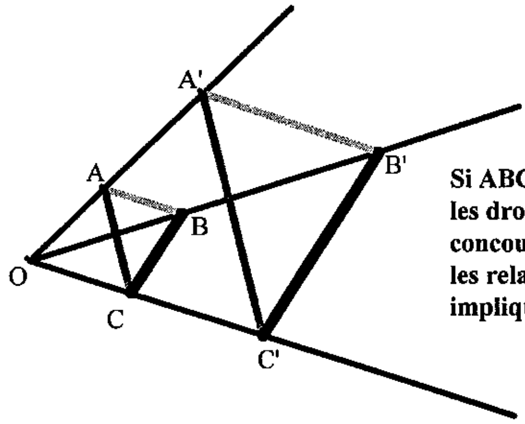
Si ABC et A'B'C' sont deux triangles tels que les droites (AA'), (BB') et (CC') soient parallèles et distinctes, alors les relations (A'B') // (AB) et (A'C') // (AC) impliquent : (B'C') // (BC).

pour obtenir la transitivité de l'équipollence et le groupe additif des vecteurs à partir du parallélisme (Artin, «plan de translation» de Lelong-Ferrand), et pour obtenir un ensemble de nombres Γ ayant les propriétés suivantes (Blumenthal) :

1) $(\Gamma,+)$ est un groupe commutatif ; 2) pour toute coordonnée a, $a.0 = 0.a = 0$; 3) la multiplication est distributive à droite par rapport à l'addition.
Les vecteurs sont introduits à l'aide des translations, leur addition à partir de leur composition, aspect que l'on retrouve dans les programmes de collège depuis 1985, au moins.

Blumenthal étudie un exemple simple de plan non arguésien (dans lequel le petit axiome de Desargues – ainsi d'ailleurs que le grand – est faux), qui mérite d'être davantage connu : le plan de Moulton.

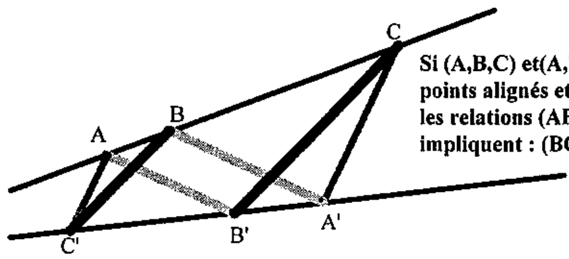
– Le grand axiome de Desargues (version affine)



Si ABC et A'B'C' sont deux triangles tels que les droites (AA'), (BB') et (CC') soient concourantes et distinctes, alors les relations (A'B') // (AB) et (A'C') // (AC) impliquent : (B'C') // (BC).

permet de faire de Γ un corps, de définir une multiplication externe et de faire de l'ensemble des vecteurs un espace vectoriel sur ce corps, le plan initial étant un plan affine attaché à cet espace vectoriel, et enfin de démontrer que toute droite du plan qui coupe la droite des y a une équation de la forme $y = x.m + b$.

– Enfin, l'axiome de Pappus (version affine)



Si (A,B,C) et(A,'B,'C') sont deux triplets de points alignés et distincts, alors les relations (AB') // (A'B) et (AC') // (A'C) impliquent : (BC') // (B'C)

assure la commutativité du corps, ce qui permet d'obtenir la forme usuelle des équations de droite.

MIRON – BRÂNZEI - 1995

• Ces auteurs roumains font le point sur les grandes présentations axiomatiques modernes de la géométrie élémentaire. On y retrouve les auteurs précédemment évoqués (Hilbert, Birkhoff, Weyl), dont les travaux sont repris avec un point de vue de logicien (axiomatique minimale, catégoricité), sans perdre de vue les questions d'enseignement.
L'introduction de la notion d'espaces « presque vectoriels » permet de mettre à jour le caractère non minimal du système d'axiomes usuel pour les espaces vectoriels, et d'expliquer le caractère un peu surprenant de l'axiome « Pour tout x, $1 * x = x$ ». On obtient un système d'axiomes minimal en remplaçant dans la définition usuelle d'un espace vectoriel l'axiome précédent par l'axiome « $\forall x \neq 0,\ 1 * x \neq 0$ ».

• Ils proposent une *définition mathématique des vecteurs en termes de direction, sens, longueur* dans le cadre de l'axiomatique de Hilbert, ce qui montre d'une part qu'une telle définition est possible, mais d'autre part qu'elle est très complexe.

On peut noter l'abondance et la diversité des travaux théoriques mettant en jeu la liaison points - vecteurs, ainsi que leur impact sur l'évolution des programmes d'enseignement en France.

Dans le paragraphe suivant, nous allons montrer qu'un travail beaucoup plus réduit a été fait en ce qui concerne les aspects pratiques et techniques d'emploi du calcul vectoriello - ponctuel dans des problèmes relevant de la géométrie élémentaire.

III. POINTS ET VECTEURS : POINT DE VUE DES TYPES DE PROBLEMES ET DES TECHNIQUES

Les ouvrages dans lesquels les aspects pratiques et techniques sont évoqués sont beaucoup moins nombreux.
Compte tenu des contraintes de place, nous n'aborderons ici que les problèmes d'alignement.
Nous évoquerons dans un premier temps les ouvrages de Grassmann et de Gibbs, et ensuite ceux de Marcolongo et Burali-Forti et de Coffin, qui sont les premiers ouvrages de calcul vectoriel publiés en langue française.

GRASSMANN

Le présent travail est grandement facilité par la traduction de l'Ausdehnungslehre de 1844, par Dominique Flament , parue en 1994)
Les idées de base sont traduites par le choix d'expressions telles que « déviation d'un point R par rapport à un autre point A », « écart d'un élément à un autre », « déviation totale d'une série de points par rapport à un point R », « écart d'une association élémentaire à un élément », qui correspondent pour les deux premiers au vecteur $\overrightarrow{RA}$ et pour les deux derniers à des expressions telles que :

$$\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{RB} + \overrightarrow{RC}, \text{ et plus généralement } a\,\overrightarrow{RA} + b\,\overrightarrow{RB} + c\,\overrightarrow{RC}.$$

L'idée de départ consiste à pointer le plan ou l'espace en un point R et à considérer les écarts ou déviations d'un point ou d'un système de points pondérés par rapport à ce point R, puis de s'intéresser à des systèmes dont les déviations par rapport à R sont les mêmes. Des exemples simples sont alors traités. C'est alors que l'indépendance du résultat par rapport au choix initial du point R apparaît, ce qui débouche sur la notion de grandeurs élémentaires égales, puis sur la théorie de ces grandeurs élémentaires, théorie qui permet d'étendre celle faite par Möbius à propos du barycentre au cas où la somme des masses est nulle.

Les applications traitées par Grassmann concernent la statique (le barycentre comme « centre de forces parallèles », mais également une étude des corps flottants faisant intervenir une association de masse nulle, le vecteur constant qui lui est associé se voyant attribuer une signification physique), et le magnétisme (pour illustrer à nouveau les associations de poids total nul).

Mais aucune application concernant la géométrie élémentaire n'est donnée dans cet ouvrage.

GIBBS

Dans son article « On multiple algebra » (1869), Gibbs évoque les intérêts respectifs de l'« analyse vectorielle » et de l'« analyse ponctuelle » de Grassmann pour les applications de l'algèbre « multiple » à la géométrie. Il ne donne aucun exemple, mais développe des considérations générales sur la portée de chacune de ces branches ; il termine en évoquant l'utilisation du plan ou de l'espace pointé :
« Si on représente les points par des vecteurs tracés à partir d'une origine commune, et si on développe alors celles des relations entre de tels vecteurs représentant des points qui sont indépendantes de la position de l'origine, par ce simple processus on peut obtenir une grande partie de l'algèbre ponctuelle, et peut-être cette algèbre toute entière. (...) L'analyse vectorielle, ainsi élargie, est à peine distinguable de l'analyse ponctuelle, mais le traitement du sujet de cette manière a en quelque sorte un caractère d'expédient, comparé à l'unité et à la simplicité que présente ce sujet lorsqu'on le développe directement à partir de l'idée de quelque chose situé en un point. ».

MARCOLONGO & BURALI-FORTI – 1910

Les notations employées pour désigner les vecteurs sont de trois sortes : ***a*** , B – A, et A + ***a*** , ce qui leur permet d'écrire par exemple que "***a*** = B – A" équivaut à "B = A + ***a***".
Leur ouvrage comporte une critique détaillée de confusions à éviter (vecteur/segment) et d'expressions à ne pas employer : ainsi, un vecteur ***a*** n'a ni origine, ni extrémité ; les auteurs, au lieu de parler de l'origine de ***a***, de l'extrémité de ***a***, suggèrent l'emploi de phrases telles que :

« extrémité d'un vecteur ***a***, dont A est l'origine » = A + ***a***

A la fin de l'ouvrage, ils introduisent la relation d'équipollence, seule compatible avec l'emploi du signe «=» tel qu'il a été codifié par Leibniz, afin d'éviter certains abus de langage relatifs aux vecteurs «égaux».

Quant aux applications à la géométrie élémentaire, elles s'appuient sur la théorie du barycentre, faite en terme de formes de Grassmann de première espèce, c'est-à-dire de manière très formelle.

– le milieu du segment AB est $\dfrac{A+B}{2}$;

– l'égalité de vecteurs $B-A=C-D$ équivaut à l'égalité $\dfrac{A+D}{2}=\dfrac{B+C}{2}$;

– si A, B, C sont trois sommets consécutifs d'un parallélogramme, le sommet opposé à B est $A+C-B$.

– le symétrique de A par rapport à O est $2O-A$.

– le cas du centre de gravité « de l'aire d'un triangle ABC » est traité ainsi :

$$G = \frac{A+B+C}{3} = \frac{A+2\frac{B+C}{2}}{3} = \frac{B+2\frac{C+A}{2}}{3} = \text{etc.}$$

COFFIN - 1914

Il réalise en détail l'organisation que Gibbs avait seulement esquissée. En une vingtaine de pages, dont le sommaire est reproduit ci-dessous, il présente essentiellement les techniques relatives à certains types de problèmes, renvoyant à d'autres ouvrages pour leur démonstration.

Une lecture plus attentive permet d'identifier la prise en compte des types de problèmes suivants :

– trouver une équation (vectorielle, paramétrique) d'une droite passant par l'origine dont on connaît un vecteur directeur (Type 1).

– trouver une équation (vectorielle, paramétrique) d'une droite ne passant pas par l'origine dont on connaît un point et un vecteur directeur (Type 2).

– trouver une équation (vectorielle, paramétrique) d'une droite ne passant pas par l'origine dont on connaît deux points (Type 3).

– trouver le point d'intersection de deux droites connaissant une équation vectorielle paramétrique de chacune d'elles (Type 4).

– démontrer que trois points sont alignés (Type 5).

Concernant la technique de détermination du point d'intersection de deux droites (Type 4), une indication très importante est donnée. Il convient d'exprimer tous les (rayons) vecteurs qui interviennent à l'aide de deux ou trois (rayons) vecteurs constituant une base. Alors, par l'intermédiaire des décompositions des vecteurs dans cette base, le problème se trouve ramené à la résolution d'un système d'équations linéaires à deux inconnues numériques. Coffin n'hésite pas, pour des problèmes de géométrie plane, à prendre une origine en dehors du plan, afin de pouvoir utiliser une base de l'espace.

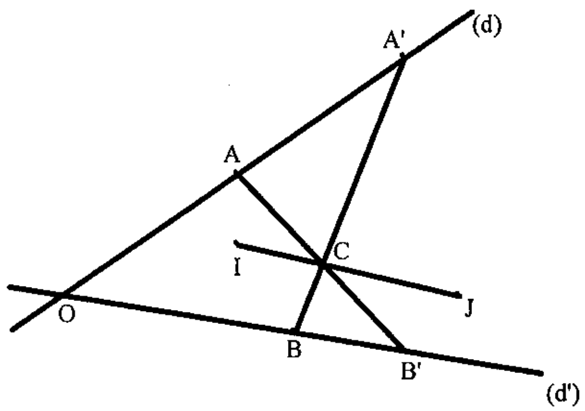
L'emploi de rayons - vecteurs (ou vecteurs - positions) est ici clairement assumé, et l'indépendance des résultats obtenus par rapport au choix du point « origine » fait l'objet d'une démonstration. De plus, il permet d'utiliser des expressions très parlantes comme « vecteurs qui se terminent sur une même droite » ou « vecteurs termino - colinéaires ».

On peut par ailleurs remarquer que les problèmes d'alignement sont dotés d'une technique avant que la notion de barycentre (désignée sous le nom de centroïde) soit introduite.

L'influence du livre de Coffin a été fort limitée en France en ce qui concerne les mathématiques. Sans doute sa date de parution explique-t-elle en partie ce phénomène. Le premier ouvrage de calcul vectoriel d'inspiration vraiment française (Calcul vectoriel. Théorie, applications géométriques et cinématiques, A. Chatelet, J. Kampé de Feriet, 1924) privilégie pour les vecteurs les deux notations $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$, et ne reprend aucune des techniques évoquées par Coffin, préférant aborder les questions géométriques par une voie analytique.

La brochure étudiée dans le paragraphe suivant est beaucoup plus récente. Elle souhaite mettre en évidence les techniques purement vectorielles permettant de traiter les problèmes d'alignement et de concours. On pourra noter comment les différents types de problèmes évoqués par Coffin sont intriqués, certains d'entre eux (type 4) étant mal affichés.

Une publication de l'IREM d'Aix - Marseille : « Les problèmes d'alignement et de concours en géométrie plane » (1983)



Les auteurs considèrent la « configuration fondamentale » reproduite ci-dessus, et mettent l'accent sur la méthode « du double alignement ». On se place dans le repère $\left(O, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ et on pose : $\overrightarrow{OA'} = a\,\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB'} = b\,\overrightarrow{OB}$; après avoir fait trouver à quelle condition les droites (AB') et $(A'B)$ sont sécantes, ils demandent de déterminer les coordonnées de leur point d'intersection C. Pour cela, une indication est donnée, suggérant d'introduire les paramètres x et y tels que :

$$\overrightarrow{AC} = x\,\overrightarrow{AB'} \text{ et } \overrightarrow{A'C} = y\,\overrightarrow{A'B},$$

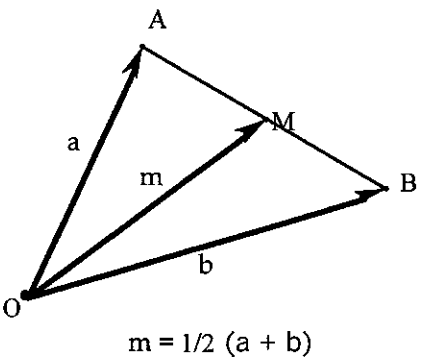
dans le but d'obtenir deux écritures du vecteur $\overrightarrow{OC}$ dans la base $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$, qui permettent de conclure. Ils précisent alors (la brochure date de 1983) que la méthode qui vient d'être décrite doit être bien maîtrisée au niveau de la première S et que, compte tenu de son importance, il convient de proposer dès la classe de Seconde des exemples de résolution de ce problème, et d'investissement de cette méthode pour résoudre d'autres problèmes. Le résultat :

$$\overrightarrow{OC} = \frac{a(1-b)}{1-ab}\overrightarrow{OA} + \frac{b(1-a)}{1-ab}\overrightarrow{OB},$$

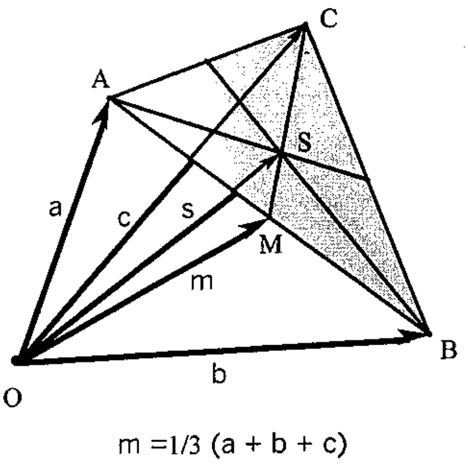
est ensuite réutilisé dans la résolution de problèmes classiques (tels que : les milieux des diagonales d'un quadrilatère complet sont alignés ; les théorèmes de Ménélaüs et de Pappus).

FLETCHER, PEDOE, ...

Contrairement à la tradition française, l'emploi de vecteurs - positions se retrouve en bonne place dans plusieurs ouvrages anglo-saxons : « Didactique » de J.T. Fletcher (traduction française en 1966), manuels scolaires allemands actuels (Collection LS, Lambacher et Schweizer, 1995/96), et d'une manière très complète dans l'ouvrage de Dan Pedoe «Geometry, a comprehensive course» (1970, édité en 1988). À titre d'exemple, nous reproduisons ci-dessous des figures du manuel scolaire allemand :



m = 1/2 (a + b)



m =1/3 (a + b + c)

(Dans l'ouvrage en question, les lettres minuscules désignant les vecteurs – positions sont surmontées d'une flèche : nous ne l'avons pas reproduite ici ; il en sera de même dans certains des schémas qui suivent.).

CHATELLUN, IREM de Bordeaux : l'enseignement des vecteurs, LELONG-FERRAND, FRESNEL

Les ouvrages et publications françaises reprenant de telles pratiques (reposant sur la manipulation de vecteurs - positions et sur l'utilisation de formes nulles de Grassmann) sont beaucoup plus rares.

– L'ouvrage de Lucien Chatellun (1952), qui s'adresse à des étudiants et aux candidats aux concours de l'enseignement fait une place à l'étude des formes nulles de Grassmann faisant intervenir 3 ou 4 points. Mais cette étude sert de moyen pour démontrer les théorèmes de

Ménélaüs et de Céva, qui sont ensuite utilisés dans les applications en géométrie élémentaire. Les seules applications véritables des formes nulles de Grassmann concernent des exercices difficiles posés à l'agrégation.

– Dans la publication de l'IREM de Bordeaux « L'enseignement des vecteurs, Quatrième, Troisième, Seconde » (1992), le plan pointé et les vecteurs - positions sont introduits, mais ils le sont surtout pour définir la multiplication d'un vecteur par un nombre, et pour démontrer les propriétés de cette opération. En revanche, ils ne sont pas utilisés dans des techniques de résolution d'exercices ou de problèmes.

– Dans deux ouvrages universitaires récents (« Les fondements de la géométrie » de J. Lelong-Ferrand (1985), et « Méthodes modernes en géométrie » de J. Fresnel (1996)) on retrouve une allusion aux formes de Grassmann et à leur emploi pour caractériser des points alignés. Mais dans le premier, les exercices sollicitant ces résultats sont très guidés et aucune autonomie du lecteur au sujet de ces outils n'est attendue ; pour le deuxième, les énoncés en question servent à démontrer d'autres caractérisations de l'alignement de points ou du caractère lié d'une famille de points, mettant en œuvre des outils mathématiques tels que les coordonnées barycentriques ou les déterminants.

CONCLUSION des paragraphes 2 et 3

• Du point de vue historique et épistémologique, on note un déséquilibre entre :

– d'une part, l'important travail de constructions théoriques de la géométrie en liaison avec le calcul vectoriel (et son impact sur l'évolution des programmes d'enseignement) ;

– d'autre part, un travail beaucoup plus réduit concernant les aspects pratiques et techniques de l'emploi du calcul vectoriello-ponctuel dans les questions relevant de la géométrie élémentaire.

Le passage de l'époque « des mathématiques modernes » à celle de la « contre - réforme » semble reposer sur un principe implicite, que l'on pourrait formuler ainsi : *si un environnement technologico - théorique est suffisamment puissant pour permettre la construction de la géométrie élémentaire, alors il est naturellement générateur de techniques puissantes pour résoudre les problèmes classiques relevant de ce domaine.* Les techniques en question sont supposées exister potentiellement, leur mise en œuvre et les éventuelles mises au point auxquelles elles pourraient donner lieu (au niveau $(T\ ,\ \tau)$ de l'organisation mathématique) sont supposées à la portée de tout auteur de manuel et de tout professeur maîtrisant convenablement les niveaux (θ, Θ).

• À l'issue de ce travail d'enquête sur l'utilisation du calcul vectoriel dans les questions élémentaires de géométrie affine, on voit apparaître deux univers dans la pratique du calcul vectoriello - ponctuel :

– un univers anglo-saxon, où l'on utilise effectivement le pointage du plan ou de l'espace, ainsi que les vecteurs - positions (les « écarts » ou les « déviations » de Grassmann), les propriétés géométriques en question étant caractérisées en termes de vecteurs - positions.

– un univers français de l'enseignement secondaire, où les vecteurs - positions sont indésirables, la notation $\overrightarrow{AB}$ et la relation de Chasles (sous forme additive) étant au cœur des techniques.

IV. Proposition d'une organisation mathematique locale concernant l'etude du calcul vectoriel au debut du lycee, et d'elements de l'organisation didactique associee.

La proposition qui suit suppose que les vecteurs ont été introduits comme ils le sont actuellement au collège en France, et que la multiplication d'un vecteur par un nombre a été traitée.
Nous allons présenter les grandes classes de problèmes dans l'ordre chronologique de leur étude, et préciser les types de problèmes T_i qui les composent . La première souffre souvent d'un mauvais affichage, car on la considère comme un simple exercice de « traduction ».

Modélisation vectorielle de figures de la géométrie affine.

T_1
Traduire vectoriellement l'appartenance d'un point M à une droite déterminée par deux points A et B, ou à la demi-droite d'origine A passant par B, ou au segment $[AB]$.

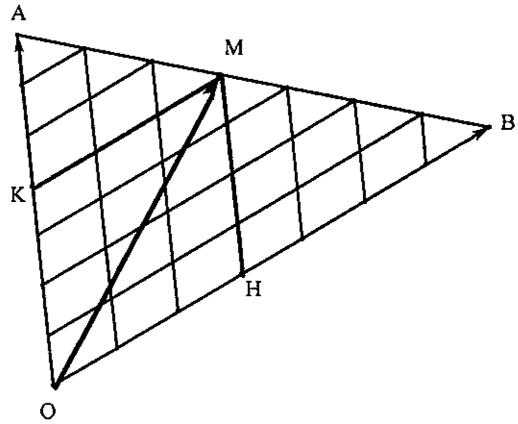
T_2
Traduire vectoriellement le fait qu'un point M se trouve sur le segment $[AB]$, à une fraction p/q de la distance AB à partir de A (ou de B).

T_3
Traduire en terme de position du point M sur le segment $[AB]$ une relation vectorielle du type :
$\vec{AM} = \frac{p}{q}\vec{AB}$ ou du type :
$\vec{m} = \left(1-\frac{p}{q}\right)\vec{a} + \frac{p}{q}\vec{b}$.

T_3 bis
Traduire en terme de position du point M sur la droite (AB) ou demi-droite $[AB)$ une relation vectorielle du type :
$\vec{AM} = k\,\vec{AB}$ ou du type :
$\vec{m} = (1-k)\vec{a} + k\,\vec{b}$.

T_4
Traduire vectoriellement qu'un quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

Ce premier type de problèmes est l'occasion d'une première rencontre avec l'introduction des vecteurs - positions, le point « origine » étant en-dehors de la droite (AB). Le travail de $\mathbf{T_2}$ doit être l'occasion de mieux comprendre pourquoi le nombre $\frac{p}{q}$ apparaît comme coefficient de $\vec{b}$, et non pas de $\vec{a}$, sans pour autant l'installer prématurément comme un savoir de type algorithmique.
Considérons par exemple le cas où $p = 3$ et $q = 7$.



M est alors aux $\frac{3}{7}$ de $[AB]$ à partir de A. L'utilisation du « petit théorème de Thalès » relatif aux divisions régulières (travaillé actuellement dès la classe de Quatrième) montre que c'est le projeté H de M sur (OB) parallèlement à (OA) qui est aux $\frac{3}{7}$ de $[OB]$ à partir de O. Quant au projeté K de M sur (OA) parallèlement à (OB), il est aux $\frac{4}{7}$ de $[OA]$ à partir de O.

La technique τ permettant de modéliser une figure à l'aide de tels vecteurs - positions va ensuite faire l'objet d'un travail, dans un double but : montrer l'effet du choix d'un point de la figure comme point «origine» ; préparer la notion de base (plus précisément de famille génératrice), en donnant à voir que dans plusieurs cas, tous les vecteurs - positions des points de la figure peuvent s'exprimer comme combinaisons linéaires de deux d'entre eux, plusieurs choix pour ces deux vecteurs étant possibles.

	T_5 Dans le plan pointé (le point « origine » est précisé) exprimer tous les vecteurs - positions des points d'une figure en fonction de certains d'entre eux, qui sont précisés. La figure est du type : polygone avec points localisés sur certains « côtés » par rapport aux extrémités de ces côtés.
Travail de la technique τ, préparant un premier moment technologique	**$T_{5\ bis}$** Effet du changement de point « origine » dans des problèmes du type précédent : on prend comme point « origine » l'un des points de la figure.
	T_6 Pointer le plan, et choisir deux vecteurs non colinéaires de manière à pouvoir exprimer tous les vecteurs - positions des points de la figure en fonction de ces deux vecteurs.

À titre d'exercice relatif à T_5, on peut indiquer le suivant :
*Un triangle ABC est donné, A' est le milieu de [BC], B' celui de [AC] et C' celui de [AB]. G est le point situé au tiers de [BB'] à partir de B' (ou au 2/3 de [*BB'] à partir de *B*) ; *H* est le point situé au tiers de [*CC'*] à partir de *C'* ; *K* est le point situé aux 2/3 de [*AA'*] à partir de *A*. *O* est un point du plan distinct de tous les points de la figure.
Il s'agit de déterminer les vecteurs - positions de *A'*, *B'*, *C'* et de *G*, *H* et *K* en fonction de $\vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c}$, et d'en déduire une propriété bien connue.

$\vec{a'} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$; $\vec{g} = \frac{2}{3}\vec{b'} + \frac{1}{3}\vec{b}$; $\vec{b'} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$; $\vec{h} = \frac{2}{3}\vec{c'} + \frac{1}{3}\vec{c}$; $\vec{c'} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$; Ainsi, $G =$ $\vec{k} = \frac{2}{3}\vec{a'} + \frac{1}{3}\vec{a}$, donc $\vec{g} = \frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$; $\vec{h} = \frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$; $\vec{k} =$... Donc : $\vec{g} = \vec{h} = \vec{k}$.
H = *K*, et les trois médianes ont ce point en commun.

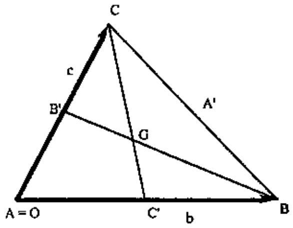
Arrive ensuite le premier moment technologique, dans lequel se fait la mise en place de la notion de base. Ce travail est facilité par une situation de reprise, permettant de réinvestir les connaissances des élèves sur les repères (orthogonaux). Ici, en pointant le plan en l'origine du repère, il ne reste plus qu'à définir une base, et à justifier l'existence et l'unicité des coordonnées d'un vecteur.

$\boxed{\theta_1 \text{ Premier moment technologique, facilité par une situation de reprise : bases, repères.}}$

Cette introduction des bases va permettre d'élaborer une première technique vectorielle pour déterminer le point d'intersection de deux droites, analogue à celle évoquée par Coffin (sans s'autoriser cependant le choix d'un point « origine » extérieur au plan de la figure comme le fait cet auteur).

Localisation du point d'intersection de deux droites (ou segments)	$\longrightarrow$	**T₇** Déterminer vectoriellement le point d'intersection de deux droites (ou de deux segments), ces droites (ou segments) étant déterminés par deux points, que l'on sait repérer par leurs vecteurs - positions.

Pour illustrer $\mathbf{T_7}$, reprenons l'exemple du centre de gravité d'un triangle, et déterminons la position sur chacune d'elles du point d'intersection de deux médianes.



Pointons le plan en A, les vecteurs de base étant les vecteurs - positions de B et C.
Alors : $\vec{c}\,' = \frac{1}{2}\vec{b}$, $\vec{b}\,' = \frac{1}{2}\vec{c}$.

Le point G, commun aux deux médianes (BB') et (CC'), est le point de paramètre t sur la première, de paramètre s sur la seconde, ce qui se traduit par : $\vec{g} = (1-t)\vec{b} + \frac{t}{2}\vec{c}$ et $\vec{g} = (1-s)\vec{c} + \frac{s}{2}\vec{b}$. De l'unicité de l'écriture du vecteur $\vec{g}$ dans la base $\left(\vec{b}, \vec{c}\right)$, on déduit le système : $\begin{cases} 1-t = \frac{s}{2} \\ \frac{t}{2} = 1-s \end{cases}$, d'où l'on tire : $t = s = \frac{2}{3}$.

On peut alors aborder les problèmes d'alignement.

Alignement de trois points	$\longrightarrow$	**T₈** Démontrer vectoriellement l'alignement de trois points A, B et C.

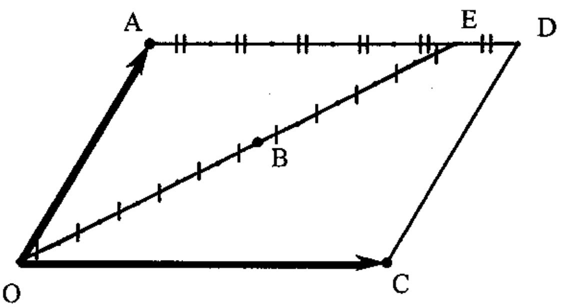
Ce type de problèmes étant au cœur de l'organisation mathématique, nous allons détailler les techniques qui le concernent.

Techniques relatives à $\mathbf{T_8}$	**Éléments technologiques**
τ_{81} * La première technique consiste à démontrer que deux des six vecteurs que l'on peut former à l'aide de ces trois points, par exemple $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, sont colinéaires. (Nous avons vu toutes les difficultés que la mise en œuvre de cette méthode ne manque pas de susciter).	Caractérisation de l'alignement de trois points à l'aide de la colinéarité de deux vecteurs.
τ_{82} * Dans le plan pointé, l'un des trois points, A par exemple, étant le point « origine » (technique τ_{821}). Il suffit alors de démontrer que $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont colinéaires ; pour cela, il convient en général de les exprimer dans une même base (constituée par les vecteurs - positions de deux points non alignés avec le point « origine ») et de démontrer la proportionnalité de leurs coordonnées dans cette base.	Caractérisation de l'alignement de trois points à l'aide de la colinéarité de deux vecteurs.

* Dans le plan pointé, les trois points étant distincts du point « origine ». Deux situations se présentent alors : **Ou bien,** (technique τ_{822}) on arrive à montrer que le vecteur - position de l'un des trois points, $\vec{b}$ par exemple, s'écrit comme combinaison linéaire des deux autres, la somme des coefficients étant égale à 1 : $\vec{b} = k\,\vec{a} + (1-k)\,\vec{c}$. Alors, d'après les techniques vues pour **T3**, B appartient au segment $[AC]$, donc A, B et C sont alignés. **Ou bien,** (technique τ_{823}), on cherche trois nombres α, β et γ, non tous nuls, dont la somme est nulle, et tels que: $\alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} + \gamma\,\vec{c} = \vec{0}$.	Cette technique τ_{823} peut s'introduire à partir de celle qui précède τ_{822}. Sa justification sera évoquée ci-dessous.

Pour introduire la technique la plus élaborée τ_{823}, on peut étudier d'autres configurations avec la technique τ_{822}, par exemple :

E est aux $\frac{5}{6}$ de $[AD]$ à partir de A, B est aux $\frac{6}{11}$ de $[OE]$ à partir de O.



Il s'agit de démontrer que A, B et C sont alignés.

$\vec{e} = \vec{a} + \frac{5}{6}\vec{c}$

De $\vec{e} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{d}$, $\vec{d} = \vec{a} + \vec{c}$, $\vec{b} = \frac{6}{11}\vec{a} + \frac{5}{11}\vec{c}$, on déduit $\vec{e} = \vec{a} + \frac{5}{6}\vec{c}$, puis $\vec{b} = \frac{6}{11}\vec{a} + \frac{5}{11}\vec{c}$. Ce résultat peut également s'écrire plus commodément (car sans faire apparaître d'écritures fractionnaires) sous la forme :

$$11\,\vec{b} - 6\,\vec{a} - 5\,\vec{c} = \vec{0},$$

égalité dont le premier membre est une combinaison linéaire des vecteurs - positions des points dont on veut montrer l'alignement, dont la somme des coefficients $(11 - 6 - 5)$ est nulle.

Ce résultat est-il toujours vrai lorsque des points A, B et C sont alignés ?

Si $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$, alors $\vec{c} - \vec{a} = k\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$, ce qui s'écrit : $\vec{c} + (-1+k)\vec{a} + k\,\vec{b} = \vec{0}$, avec $1 + (-1 + k) - k = 0$.

Ainsi, si A, B et C sont trois points alignés, leurs vecteurs - positions vérifient une relation de la forme $\alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} + \gamma\,\vec{c} = \vec{0}$, la somme $\alpha + \beta + \gamma$ étant nulle.

Pour avoir un outil permettant de démontrer l'alignement de trois points, la question de la valeur de vérité de la réciproque se pose. Ainsi, que dire de trois points A, B et C dont les vecteurs - positions vérifient des relations telles que :

$7\vec{a}-5\vec{b}-2\vec{c}=\vec{0}$; $6\vec{a}-7\vec{b}-\vec{c}=\vec{0}$; $-9\vec{a}+5\vec{b}+4\vec{c}=\vec{0}$;

$\alpha\,\vec{a}+\beta\,\vec{b}+(-\alpha-\beta)\,\vec{c}=\vec{0}$, α et β désignant deux nombres réels non nuls ?

Nous ne détaillerons guère le type de problèmes suivant $\mathbf{T_9}$, dont les techniques consistent à exprimer dans une même base les vecteurs positions des quatre points A, B, C et D et à démontrer ensuite que $\vec{b}-\vec{a}$ est colinéaire à $\vec{d}-\vec{c}$.

$\mathbf{T_9}$ Démontrer vectoriellement le parallélisme de deux droites (AB) et (CD).

Il est cependant remarquable que la démonstration du théorème de Pappus (affine) s'obtient très facilement avec cette technique.

La mise en place progressive des techniques τ_{821}, τ_{822}, τ_{823} et celles relatives à $\mathbf{T_9}$ est à l'origine du deuxième moment technologique.

θ_2 Un deuxième moment technologique : relations vectorielles indépendantes du point « origine ». Vers une autonomisation du modèle : les combinaisons linéaires de deux vecteurs - positions conduisent à en introduire un troisième, indépendant du choix du point « origine » : le barycentre.

L'étude des types de problèmes $\mathbf{T_1}$ à $\mathbf{T_8}$ met en évidence l'intérêt de relations telles que :

$$\vec{m}=(1-k)\vec{a}+k\vec{b},\text{ où } k \text{ désigne un nombre réel (forme 1)}$$

$$\alpha\,\vec{a}+\beta\,\vec{b}+\gamma\,\vec{c}=\vec{0},\text{ avec } \alpha+\beta+\gamma=0 \text{ (forme 2),}$$

la première étant un cas particulier de la seconde.

Il est facile de démontrer que ces relations ne dépendent pas du point « origine » choisi.

Les relations utilisées dans ce qui précède sont donc toutes indépendantes de la manière dont on pointe le plan pour pouvoir utiliser des vecteurs - positions.

Les combinaisons linéaires de vecteurs - positions ayant un rôle dans ce qui précède font apparaître deux cas particulièrement importants :

– les combinaisons linéaires de deux vecteurs - positions dont la somme des coefficients est égale à 1 ;

– les combinaisons linéaires de trois vecteurs - positions dont la somme des coefficients est égale à 0.

Une question se pose alors ?

Que dire d'une combinaison linéaire de deux vecteurs – positions dont la somme des coefficients n'est pas égale à 1 ?

Considérons une telle combinaison : $\alpha\,\vec{a}+\beta\,\vec{b}$.

• Si $\alpha + \beta = 0$, alors $\alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} = \alpha\,\vec{a} - \alpha\,\vec{b} = \alpha\left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \alpha\,\overrightarrow{BA}$. On retrouve le résultat vu précédemment : une combinaison linéaire de deux vecteurs dont la somme des coefficients est nulle est un vecteur, indépendant du point « origine » choisi.

• Si $\alpha + \beta \neq 0$, alors deux stratégies peuvent être envisagées pour utiliser ce que nous connaissons sur les combinaisons linéaires de vecteurs - positions :

– se ramener à une combinaison linéaire de deux vecteurs - positions dont la somme des coefficients est égale à 1 ;

– faire intervenir un troisième vecteur - position de manière à obtenir une combinaison linéaire de trois vecteurs - positions dont la somme des coefficients est égale à 0 ; on sait d'ailleurs que la première stratégie est un cas particulier de la seconde.

Quelle que soit la voie choisie, on est amené à introduire un point G dont le vecteur - position $\vec{g}$ vérifie :

$$(\alpha + \beta)\vec{g} = \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} \ (1)$$

ou encore

$$-(\alpha + \beta)\vec{g} + \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} = \vec{0} \ (2).$$

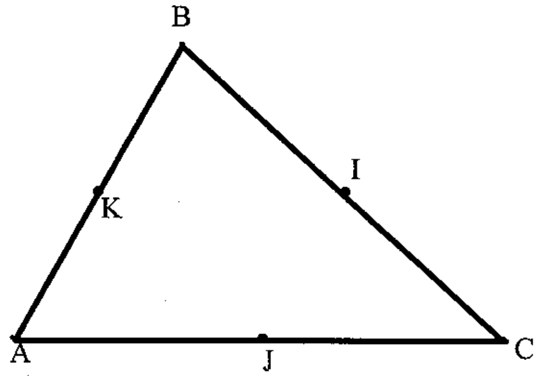
La relation (2) montre que ce point G est indépendant du choix du point « origine » choisi, et que le point G est sur la droite (AB).

La relation (1), écrite sous la forme : $\vec{g} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\vec{a} + \frac{\beta}{\alpha + \beta}\vec{b}$, met bien en évidence le fait que la somme des coefficients de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est égale à 1 ; elle permet en outre de situer G sur la droite (AB) : $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$, ou $\overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\overrightarrow{BA}$.

Alors, on peut introduire le vocabulaire relatif au barycentre de deux points pondérés, qui notons-le, n'a pas été sollicité jusqu'ici.

Reprise de T_8
avec la technologie θ_2, qui génère de nouvelles techniques, rendant inutile le choix d'une base du plan, mais reposant encore sur le calcul vectoriel sur les vecteurs - positions.

Reprenons l'exemple du centre de gravité d'un triangle :



Déterminons le point d'intersection des médianes $[AI]$ et $[BJ]$. Pour cela, cherchons à égaler une combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{a}$ d'une part, de $\vec{j}$ et $\vec{b}$ d'autre part, ayant des coefficients de même somme.

On a : $2\vec{i} = \vec{b} + \vec{c}$ et $2\vec{j} = \vec{c} + \vec{d}$.

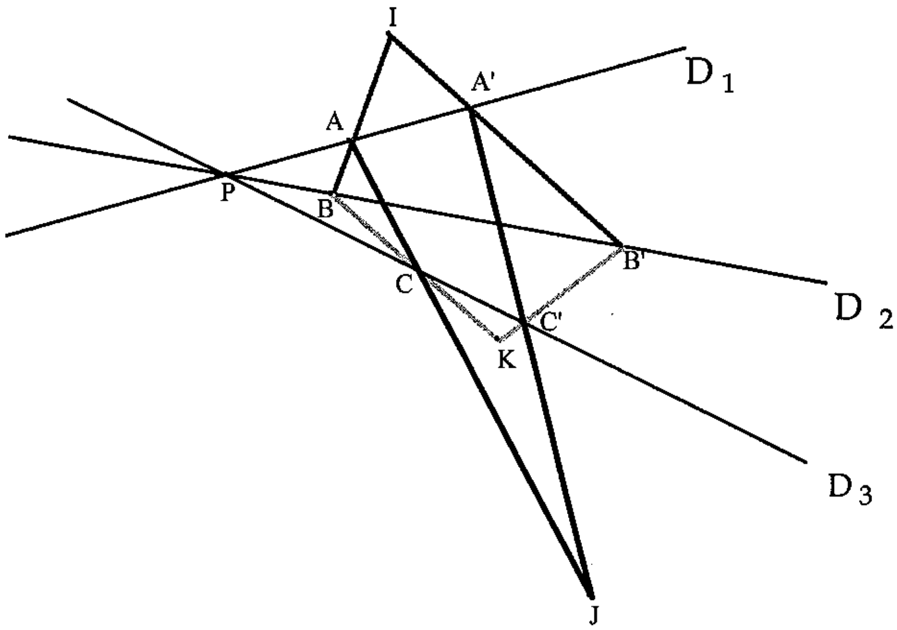
En soustrayant membres à membres, on fait disparaître $\vec{c}$, vecteur - position qui nous gêne : $2\vec{i} - 2\vec{j} = \vec{b} - \vec{a}$, d'où l'on déduit :

$$2\vec{i} + \vec{a} = 2\vec{j} + \vec{b}$$

On introduit alors le point G dont le vecteur - position $\vec{g}$ vérifie $3\vec{g} = 2\vec{i} + \vec{a} = 2\vec{j} + \vec{b}$, (ou si l'on préfère $\vec{g} = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{a} = \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{b}$.), point qui est donc commun aux segments $[AI]$ et $[BJ]$.

Il est facile de montrer que $3\vec{g} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ puis que $3\vec{g} = \vec{c} + 2\vec{k}\left(\text{ou } \vec{g} = \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{2}{3}\vec{k}\right)$, ce qui prouve que G appartient aussi au segment $[CK]$.

Pour montrer la puissance de ces techniques de modélisation et de démonstration, illustrons leur emploi pour démontrer le théorème de Desargues (projectif).



P est le point de concours des droites (AA'), (BB') et (CC'). I est le point d'intersection de (AB) et $(A'B')$, ... Il s'agit de démontrer que I, J et K sont alignés.

La bonne idée consiste à traduire que P est le point de concours des trois droites en termes de barycentres :

$\vec{p} = \alpha\,\vec{a} + (1-\alpha)\vec{a'}$; $\vec{p} = \beta\,\vec{b} + (1-\beta)\vec{b'}$; $\vec{p} = \gamma\,\vec{c} + (1-\gamma)\vec{c'}$.

De $\alpha\,\vec{a} + (1-\alpha)\vec{a'} = \beta\,\vec{b} + (1-\beta)\vec{b'}$, on déduit $\alpha\,\vec{a} - \beta\,\vec{b} = (1-\beta)\vec{b'} - (1-\alpha)\vec{a'}$, égalité qui nous incite à introduire le vecteur - position du point I, commun aux droites (AB) et $(A'B')$, qui vérifie :

$(\alpha - \beta)\vec{i} = \alpha\,\vec{a} - \beta\,\vec{b}$. En procédant de la même manière, on établit les relations :

$(\beta - \gamma)\vec{k} = \beta\,\vec{b} - \gamma\,\vec{c}$, $\quad (\gamma - \alpha)\vec{j} = \gamma\,\vec{c} - \alpha\,\vec{a}$.

On en déduit que $(\alpha - \beta)\vec{i} + (\beta - \gamma)\vec{k} + (\gamma - \alpha)\vec{j} = \vec{0}$; or la somme des coefficients est nulle. Ce qui suffit pour démontrer l'alignement des points I, J et K.

Retour à la géométrie analytique
Équation d'une droite coupant les deux axes du repère.

Lors de l'étude du type $\mathbf{T}_1$ de problèmes, nous avons vu que si la droite (AB) ne passe pas par le point « origine » O, alors un point M du plan appartient à la droite (AB) si et seulement si il existe un nombre réel k tel que :

$$\vec{m} = (1-k)\vec{a} + k\,\vec{b},$$

ce qui revient à dire que l'appartenance du point M à la droite (AB) est équivalente à la relation : $x = 1 - y$, ou encore $x + y = 1$, (x, y) désignant les coordonnées du point M dans le repère $\left(O; \vec{a}, \vec{b}\right)$. En d'autres termes, $x + y = 1$ est une équation cartésienne de (AB) dans le repère $\left(O; \vec{a}, \vec{b}\right)$.

Considérons maintenant un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan et une droite D coupant respectivement les axes des abscisses et des ordonnées en A et B, distincts de O. Si a désigne l'abscisse de A, et b l'ordonnée de B, D a pour équation $X + Y = 1$ dans le repère $\left(O; a\vec{i}, b\vec{j}\right)$.

On en déduit une équation cartésienne de D dans le repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$:

$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, forme d'équation peu travaillée dans les programmes récents.

On peut terminer par un retour à la première grande classe de problèmes : les vecteurs permettent de modéliser les demi-plans, sous-ensembles qui jusqu'ici ne pouvaient être modélisés qu'en géométrie analytique.

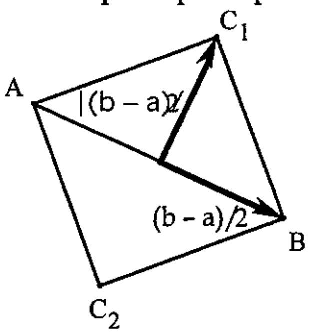
Modélisation vectorielle de figures de la géométrie affine.	⟶	$\mathbf{T}_{10}$ Traduire vectoriellement l'appartenance d'un point M au demi-plan de frontière (AB) auquel appartient le point C : relation du type $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}+k'\overrightarrow{AC}$; ou encore, en pointant le plan en A, relation de la forme $\vec{m} = k\,\vec{b} + k'\,\vec{c}$, $k \in \mathbf{R}$ et $k' \in \mathbf{R}^{*+}$.

Les vecteurs - positions peuvent également être utilisés pour traiter des problèmes de géométrie euclidienne (métrique). Faute de place, nous ne pourrons détailler ici l'organisation mathématique correspondante, qui permet de modéliser les figures usuelles de la géométrie euclidienne, de traiter certaines études de configurations sans avoir besoin de recourir au produit scalaire, et qui constitue une excellente préparation à l'interprétation géométrique (ponctuelle et vectorielle) des nombres complexes, et pourrait donc agréablement en préparer l'étude.

Afin d'aiguiser la curiosité du lecteur, précisons que le calcul vectoriel introduit précédemment, qui travaille avec des vecteurs - positions et des vecteurs écrits sous la forme $\overrightarrow{AB}$, doit être complété par l'introduction d'un opérateur, que l'on trouve sous une forme plus complexe dans les travaux de Grassmann, ainsi que dans de nombreux ouvrages américains :

il s'agit de l'opérateur $|$ qui, appliqué à un vecteur $\vec{m}$, donne le vecteur $\big|\vec{m}$, image de $\vec{m}$ par le quart de tour vectoriel direct. On a donc, pour tout $\vec{m}$, $\Big|\left(\big|\vec{m}\right) = -\vec{m}$. On utilise abondamment la linéarité de l'opérateur $|$.

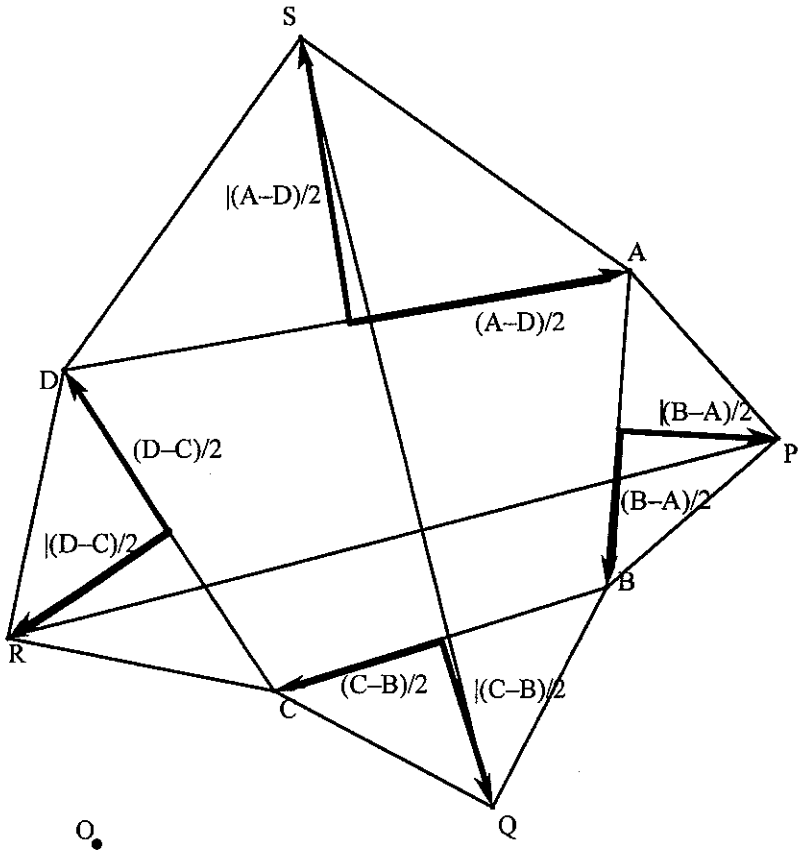
Par exemple, on peut modéliser le triangle ABC rectangle isocèle en C, en localisant son sommet principal C par rapport à la base principale [AB] de la manière suivante :



$$\vec{c}_1 = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} + \Bigg|\,\frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}.$$

$$\vec{c}_2 = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} - \Bigg|\,\frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}.$$

Revenons, pour terminer, à la configuration de Van Aubel, dans laquelle on suppose que le quadrilatère ABCD est orienté dans le sens direct.



En désignant, comme le fait Pedoe, un point et son vecteur - position par la même lettre, les données se traduisent à l'aide des quatre égalités suivantes :

$P = (A + B)/2 + |\,(B - A)/2$

$Q = (B + C)/2 + |\,(C - B)/2$

$R = (C + D)/2 + |\,(D - C)/2$

$S = (D + A)/2 + |\,(A - D)/2.$

Quant à la conclusion « $PR = QS$ et les droites (PR) et (QS) sont perpendiculaires », elle se traduit par « $|(R-P) = \pm(Q-S)$ ». Un contrôle graphique sur la figure permet de conjecturer que le résultat attendu est $|(R-P) = Q-S$.
Il s'agit de démontrer que $|(R-P)$, c'est-à-dire que $|R - |P$ est égal à $Q - S$, ce qui se fait à l'aide des règles usuelles du calcul vectoriel vues jusqu'ici, auxquelles on ajoute celles relatives à l'opérateur « | » :
$|R = |(C+D)/2 + | \, | (D-C)/2$ c'est-à-dire $|R = (C-D)/2 + | (C+D)/2$,
$|P = |(A+B)/2 + | \, | (B-A)/2$ c'est-à-dire $|P = (A-B)/2 + | (A+B)/2$,
donc $|R - |P = (C-D-A+B)/2 + | (C+D-A-B)/2$.
D'autre part, $Q-S = (B+C-A-D)/2 + | (C-B-A+D)/2$.
D'où le résultat.

V. CONCLUSION

1. Les raisons d'étudier le « Calcul vectoriel »

On peut donc dégager deux raisons fondamentales au projet commun de Leibniz et Grassmann :
– fonder d'une manière nouvelle la géométrie en tant que théorie mathématique (1) ;
– trouver des objets mathématiques et des opérations sur ces objets permettant de symboliser les relations géométriques présentes dans les figures ou dans les transformations géométriques, de manière à pouvoir en déduire les propriétés, par un simple calcul algébrique (2).

En vue d'un enseignement au niveau du Collège et du Lycée, la raison (2) mérite une attention particulière. On peut alors en proposer la formulation suivante, visant à expliciter la raison principale de l'étude du calcul vectoriel au début du lycée :
– dans un premier temps, à propos d'une figure usuelle de la géométrie vue antérieurement : supposant connus certains de ses éléments, caractériser à l'aide de vecteurs, ses autres éléments. En d'autres termes, il s'agit de décrire à l'aide de vecteurs comment on peut engendrer (ou construire) une figure à partir de certains de ses éléments.
– dans un second temps, démontrer les propriétés d'une figure géométrique en utilisant un calcul algébrique d'un type nouveau : le calcul vectoriel.

2. Construction d'une organisation mathématique adoptant cette raison comme motif pour étudier le calcul vectoriel

Nous nous sommes efforcés de proposer une organisation mathématique et didactique respectant les conditions suivantes :
– le professeur indique au départ les raisons d'étudier l'œuvre ;
– l'étude est consacrée à des types de problèmes légitimes par rapport à ces raisons ;
– elle accorde une place importante aux techniques, et notamment à leur travail, dans le but d'améliorer leur fiabilité d'une part, de cerner leur portée d'autre part ;
– le niveau technologique est introduit pour justifier, et rendre intelligible les techniques d'une part, créer de nouvelles techniques plus efficaces pour des types de problèmes anciens et engendrer de nouveaux types de problèmes d'autre part.

Une telle organisation impose cependant d'avoir identifié au préalable
– des types de problèmes T_{ijk},
– des techniques τ_{jk},
– des technologies θ_k,
et d'avoir trouvé au moins un chemin dans cet espace à trois dimensions le long duquel le professeur va conduire l'étude proposée à l'élève.
C'est ce que nous avons tenté ici en ce qui concerne le calcul vectoriel au lycée, en prenant comme germes de types de problèmes les questions suivantes, prises dans les programmes récents d'enseignement à ce niveau en France :
– les problèmes d'alignement et de concours,
– l'étude des configurations de la géométrie euclidienne plane ;
quant à l'organisation didactique correspondante, seuls quelques éléments la concernant ont été abordés, en mettant en lumière certains moments de l'étude.

Notre travail met en évidence l'importance, dans l'organisation mathématique, des techniques, et en particulier des dispositifs qu'elles supposent, notamment du point de vue des ostensifs. Ainsi, le choix des ostensifs relatifs aux vecteurs conditionne l'existence même de certaines techniques. Notre étude met en évidence les trois ostensifs suivants :
– la notation $\overrightarrow{AB}$;
– la notation du « vecteur libre » $\vec{u}$;
– la notation $\vec{m}$ du vecteur - position d'un point M relativement à un point « origine » O.
En France, au niveau de l'enseignement secondaire, seuls les deux premiers sont reconnus par l'institution. Ils suffisent pour traiter le niveau technologique, la notation $\vec{u}$ étant indispensable à ce niveau. Dans les pays anglo-saxons que nous avons considérés (Allemagne, Grande-Bretagne, États-Unis), le troisième est couramment utilisé ; il est une partie du dispositif de nombreuses techniques : il facilite ainsi la description de ces techniques, ce qui est important pour leur enseignement, en même temps qu'il constitue un outil de base de ces techniques. Sa place n'est cependant pas confinée au niveau des techniques, car il intervient naturellement dans la justification de ces dernières, c'est-à-dire au niveau technologique des organisations mathématiques. L'organisation proposée adopte donc l'emploi du vecteur - position. Pour qu'elle puisse être viable, il est indispensable que la communauté de l'enseignement des mathématiques change d'attitude à son égard, ce qui constitue un travail de longue haleine, auquel cet article voudrait apporter une première contribution.

3. Des questions qui restent à étudier

On a vu précédemment que l'expérimentation de l'organisation proposée ne concerne pas seulement les élèves mais également les professeurs et leurs formateurs, puisqu'elle suppose des changements importants des habitudes de travail dans un domaine qui n'a guère évolué depuis longtemps.

Par ailleurs, d'autres questions restent à étudier plus précisément, parmi lesquelles nous citerons :
– l'articulation avec les débuts de l'enseignement du calcul vectoriel ;
– la cohabitation des vecteurs - positions $\vec{m}$ et des vecteurs « libres » $\vec{u}$;

– l'articulation avec l'enseignement des nombres complexes et de leurs applications géométriques : ces derniers se montrent plus efficaces dans l'étude des questions faisant intervenir des angles ;
– l'articulation avec les débuts de l'Algèbre linéaire.

BIBLIOGRAPHIE

AMALBERTI R., ARNAL J-P., BENIAMINO J.C., MARION J., OVAERT J.L., PROUDHON D., VERNET J-M., 1983, *Les problèmes d'alignement, de parallélisme et de concours en géométrie plane*, G.R.E.G., IREM d'Aix-Marseille.

BLUMENTHAL Leonard M., 1980, *A modern view of geometry*, Dover Publications, Inc., New York.

BURALI-FORTI C., MARCOLONGO R., 1910, *Éléments de calcul vectoriel avec de nombreuses applications à la géométrie, à la mécanique et à la physique mathématique*, traduction française de S. Lattès, Librairie scientifique J. Hermann, Paris.

CHEVALLARD Yves, 1991-1992, *Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique*, Séminaire Laboratoire de Structures Discrètes et de Didactique, Université Joseph Fourier, n° 122, Grenoble.

CHEVALLARD Yves, 1995, *La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique*, Actes de l'École d'Été de Didactique des Mathématiques de 1995,pp. 83 - 122, (édition coordonnée par Robert Noirfalise, IREM de Clermont-Ferrand , et Marie-Jeanne Perrin - Glorian, IUFM d'Arras et Équipe DIDIREM Paris VII).

CHEVALLARD Yves, 1997, *Familière et problématique, la figure du professeur*, Recherches en didactique des mathématiques, Volume 17/3, La Pensée Sauvage Éditions, Grenoble, pp. 17 - 54.

CHEVALLARD Yves, 1999, *L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique*, Recherches en didactique des mathématiques, Volume 19/2, La Pensée Sauvage Éditions, Grenoble, pp. 221 - 266.

CHOQUET G. , 1964, *L'enseignement de la géométrie*, éditions Hermann, Paris.

COFFIN J.-G., 1914, *Calcul vectoriel avec applications aux mathématiques et à la physique*, traduction française par Alex Véronnet, Gauthier-Villars, Paris.

CROWE Michael J., 1967, *A history of vector analysis, The evolution of the idea of a vectorial system*, University of Notre Dame Press, Notre Dame, London.

DIEUDONNE J., 1966, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, troisième édition, collection «Enseignement des sciences», Hermann, Paris.

DORIER Jean-Luc (coord.), 1997, *L'enseignement de l'Algèbre linéaire en question*, La Pensée Sauvage Éditions, Grenoble.

FLAMENT D., 1994, *Hermann Günther Grassmann, La science de la grandeur extensive, La Lineale Ausdehnungslehre*, Librairie Scientifique et Technique A. Blanchard, Paris.

FLETCHER T. J., 1966, *L'apprentissage de la mathématique aujourd'hui*, une didactique nouvelle pour l'enseignement du second degré, traduit de l'anglais par

F. Dubail, D. Duclos, M. Glaymann, M. Hagege, C. Mourgues, M. Mourgues, O.C.D.L, Paris.

FRESNEL J., 1996, *Méthodes modernes en géométrie*, collection Formation des enseignants et formation continue, Hermann, Paris.

GIBBS J. Willard, 1961, *The scientific papers of J. Willard Gibbs*, Volume II, Dynamics, Vector Analysis and Multiple Algebra, Electromagnetic Theory of Light, Miscellaneous Papers, Dover Publications Inc., New York.

GOUTEYRON A., BOUSCASSE J.-M., CHAUMET M.-C., COLMEZ F., DAMEY P., PINET B., PUYOU J., ROBERT Y., (1992), L'Enseignement des vecteurs, IREM de Bordeaux.

IREM de Strasbourg, 1975, *Le livre du problème , volume 5, calcul barycentrique*, Cedic, Paris.

LEIBNIZ G.W. , 1995, *la caractéristique géométrique*, texte établi, introduit et annoté par Javier ECHEVERRIA, traduit, annoté et préfacé par Marc PARMENTIER, Librairie philosophique J.Vrin, Paris.

LELONG-FERRAND J., 1985, *Les fondements de la géométrie*, PUF, Paris.

MIRON R. et BRÂNZEI D., 1995, *Backgrouds of arithmetic and geometry, an introduction*, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong.

PEDOE Dan, 1988, *Geometry, a comprehensive course*, Dover Publications, New York.

PRESSIAT A., 1999, *Aspects épistémologiques et didactiques de la liaison «points-vecteurs»*, Thèse de doctorat, Université Paris VII Denis Diderot, 486 p. En vente à l'IREM de Paris VII (141 F + 28 F de frais de port).

SCHMID A. et SCHWEIZER W. (dir.), 1995,par BÜRKER M., KOLLER D., SCHEID H., SCHMID A. et avec la collaboration de GERLACH H., *LS Analytische geometrie, Leitstungskurs, classe de terminale, matière principale)*, Ernst Klett Schulbuchverlag, Stuttgart, Düsseldorf, Berlin, Leipzig.

VOGEL Nicole, 1994, *Quelques repères pour apprendre à démontrer avec la relation de Chasles*, Repères–IREM, n° 16, pp.83 - 109.

WEYL H., 1922, Espace, temps, matière, Librairie Blanchard, Paris.

La rationalité mathématique en question

ENTRER DANS LA CULTURE DES THEOREMES A 12-14 ANS: UN DEFI POUR LA DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

Paolo Boero[2]
Dipartimento di Matematica, Università di Genova

I. INTRODUCTION

Approcher la démonstration entre 12 et 16 ans ("Collège", "Junior High School", "Scuola Media") constitue un défi important pour la didactique des mathématiques dans tous les pays. Parfois face aux difficultés rencontrées par les enseignants on reporte ce sujet en le traitant seulement dans les écoles qui préparent aux études universitaires scientifiques. Parfois les chercheurs eux-mêmes justifient ce choix par une minimisation de l'importance de la démonstration dans les mathématiques d'aujourd'hui (pour une discussion sur ces phénomènes, voir Hanna, 1996).

Cet exposé se situe dans une perspective tout à fait différente: la démonstration demeure un des éléments les plus importants des mathématiques et de la culture mathématique. Il faut la transmettre aux nouvelles générations, car elle constitue la clé de l'accès au savoir théorique dans le domaine des mathématiques. Exclure la démonstration de l'enseignement des mathématiques pour tous signifie donner une image fausse des mathématiques et soustraire aux gens une opportunité de faire l'expérience du coté théorique d'un savoir élaboré par l'humanité au cours de l'histoire.

Cela dit, il faut reconnaître que l'approche traditionnelle de la démonstration à l'école ne marche pas. Il faut alors s'interroger sur les raisons de la faillite, et élaborer un cadre théorique susceptible de suggérer et de soutenir des alternatives valables pour le travail en classe.

Comme l'on verra par la suite, mon exposé portera sur un but plus général que l'approche de la démonstration - le but de l'entrée dans la culture des théorèmes; les raisons de ce choix seront presentées au point 2.

"Entrer dans la culture des théorèmes" pour les élèves signifie développer des compétences spécifiques inhérentes à la production de conjectures et à la preuve de ces conjectures en prenant en compte des éléments de savoirs théoriques. On a besoin de passer par des analyses historico-épistémologiques et cognitives pour sélectionner les éléments spécifiques, essentiels, dans la production et la preuve des conjectures, et les théories

2 *boero@dima.unige.it*

auxquelles les élèves seront confrontés dans leur apprentissage. En particulier, le rôle crucial de l'exploration dynamique (cf. Boero et al, 1996; voir aussi Simon, 1996) de la situation problème dans la production et la preuve des conjectures doit être pris en compte; ceci peut aider à la sélection du "champ d'expérience" et des tâches dans lesquelles une telle dynamique est de ce qu'on appelle "naturelle" pour les élèves. On considère aussi qu'il y a un phénomène de continuité (possible) entre la production d'une conjecture et la construction de sa preuve et que ceci est un élément favorisant l'approche de la démonstration (voir Garuti et al, 1996; 1998). Ce phénomène doit être pris en compte pour sélectionner les situations - problèmes dans lesquelles cette continuité pourra avoir lieu de la meilleure façon. Les théorèmes appartiennent à la culture scientifique (Vygotsky, 1985, Ch. VI); une médiation appropriée de l'enseignant est donc requise pour tous ces aspects sur lesquels il y a une rupture significative avec la culture du quotidien: la forme des énoncés, la structure des démonstrations comme textes, la nature des raisonnements permis, etc.

L'exposé incorpore certains résultats obtenus en collaboration avec les équipes de Modena (Mariolina Bartolini Bussi), Pisa (Maria Alesssandra Mariotti), Turin (Ferdinando Arzarello) et tient compte des résultats de Nadia Douek (IUFM de Creteil) pour ce qui concerne les liens entre argumentation et démonstration (voir Douek, 1999a, 1999b).

II. CADRE THEORIQUE CONCERNANT LA RECHERCHE MENEE

Le cadre théorique est celui de la recherche pour l'innovation auquel maintenant se réfèrent la plus grand partie des recherches italiennes en didactique des mathématiques:

- on part des problèmes et des problématiques qui se manifestent dans les classes (dans nos cas, la problématique de l'approche de la démonstration entre 12 et 14 ans);

- on s'appuie à des outils qui viennent de l'épistémologie, de l'histoire des mathématiques, des sciences cognitives pour traiter les problèmes considérés; dans beaucoup de cas, il faut transformer ces outils en les intégrant et adaptant à la spécificité disciplinaire et didactique des questions abordées. Nous avons dû considérer en particulier les éléments constitutifs des théorèmes au cours de l'histoire (analyse historico-epistémologique) et les processus de production (ou de médiation) de ces éléments (aspect cognitif);

- on cherche à élaborer des outils théoriques pour l'interprétation des difficultés des élèves et la prédiction de leurs comportements en vue de l'innovation didactique à réaliser (par exemple, l'outil de l'unité cognitive des théorèmes).

Dans ce cadre, un aspect important à remarquer est que dans beaucoup de cas l'innovation didactique (surtout dans ses premières réalisations en classe) fonctionne véritablement comme "ingénierie didactique" dans le sens d'Artigue (1988): en effet l'innovation didactique, conçue selon les hypothèses de travail élaborées par les chercheurs, est le contexte où ces hypothèses sont validées et d'où viennent les éléments nécessaires pour ré-élaborer les hypothèses initiales et pour formuler des nouvelles questions de recherche.

Un autre aspect important de notre cadre de recherche est le rôle joué par les enseignants-chercheurs: en raison du fait qu'il s'agit de "recherche pour l'innovation" et du fait de l'évolution dialectique du rapport entre hypothèses de travail et expérimentation en classe sur les temps longs du projet de recherche, les enseignants-chercheurs non seulement participent à la définition des problématiques sur lesquelles on travaille, mais ont un rôle crucial dans la gestion et l'analyse à-posteriori du travail expérimental dans les classes, en vue de l'évolution du cadre théorique et de la problématique de recherche.

Une question intéressante (en relation avec le débat sur la place du cognitif dans la recherche en didactique des mathématiques) est la suivante: peut-on se passer de l'aspect cognitif dans un travail didactique sur l'approche scolaire des théorèmes? Nous pensons que non, parce que l'analyse cognitive est nécessaire en particulier (mais non seulement) pour comprendre quels sont les processus mentaux à développer pour une participation productive des élèves au travail sur les théorèmes dans la classe et quelles sont les pratiques d'enseignement qui peuvent faire obstacle (ou favoriser) le développement de ces processus.

III. A PROPOS DE L'OBJET D'ENSEIGNEMENT VISE: ENSEIGNER LA DEMONSTRATION OU ENSEIGNER LES THEOREMES?

Le choix qu'on a fait a été celui d'une approche "holistique", en considérant la démonstration comme une partie importante du théorème et qui n'a pas de sens hors du théorème. L'approche "holistique" a été suggérée par l'analyse historique et épistémologique du savoir mathématique en jeu: à partir d'Euclide jusqu'à nos jours, un théorème est tel s'il est constitué d'un énoncé et d'une démonstration de l'enoncé faisant référence à une théorie. La définition de *théorème = (énoncé, démonstration, théorie de référence)* (Mariotti et al, 1997) constitue le point de départ pour développer un discours didactique sur les théorèmes dans le quel trouve sa place la problématique de l'approche de la démonstration.

En particulier, on a essayé de mettre en évidence les éléments stables constitutifs des énoncés, des démonstrations et des théories de référence pour la plus grande partie des théorèmes au cours de l'histoire (en choisissant de ne pas tenir compte des variations dues à l'évolution historique des cadres de référence épistémologiques pour ce qui concerne le statut des postulats, la modélisation du processus de démonstration, etc.). Pour les théorèmes de la géométrie (discipline qui permet une analyse historique plus vaste et continue) on a sélectionné les éléments suivants:

- l'énoncé est général (c'est-à-dire, il ne se réfère pas à une figure ou configuration particulière, mais à une classe de figures ou de configurations ayant certaines propriétés); il est aussi (implicitement ou explicitement) conditionnel (*si... alors...*); et il est écrit dans le registre mathématique du langage naturel selon un style ("genre") particulier;

- la démonstration est constituée par des "arguments" enchaînés de façon déductive, les arguments étant des prémisses acceptées ou d'autres résultats déjà démontrés ou des évidences incontestables; elle aussi est écrite selon un style particulier du registre mathématique du langage naturel;

- la théorie de référence est constituée par un corpus cohérent d'arguments qui découlent des prémisses acceptées et par une série de considérations (règles, commentaires, etc.) de type "méta" sur la façon de développer la théorie à partir des prémisses et sur les propriétés que doit avoir la théorie.

D'une façon cohérente avec l'idée que les mathématiques ne sont pas seulement constituées d'objets (comme les concepts ou les signes particuliers des différents domaines, ou les textes des démonstrations), mais aussi d'activités qui se réalisent à travers des processus individuels ou sociaux (voir Granger, 1992; Boero, Dapueto et al, 1995), on a établi les distinctions suivantes dans les champs sémantiques rattachés à certains mots-clés:

- le terme "conjecture" peut évoquer deux choses assez différentes, c'est à dire soit le processus de production ("conjecturer": "conjecturing" en Anglais) soit le texte issu de ce processus;

- de la même façon, le terme "démonstration" peut évoquer soit le processus de construction ("démontrer": "proving" en Anglais) soit le texte issu de ce processus.

A notre avis, tenir compte de ces distinctions sous-jacentes aux mots-clés est très important parce que dans le débat sur la démonstration comme objet d'enseignement on tend souvent à transférer au processus certains des caractéristiques du produit, avec des conséquences graves pour l'enseignement et pour l'apprentissage. En particulier la demande que le processus soit conforme à certains requis du produit (comme la proximité d'un calcul logique, l'exclusion des aspects métaphoriques et des analogies, etc.)(cf Hanna, 1989) peut entraver le processus de construction de la démonstration (voir Douek, 1999b).

IV. OBSTACLES RENCONTRES PAR LES ELEVES DANS L'APPROCHE DES THEOREMES EN CLASSE

Il faut distinguer les différents types d'obstacles qui concernent les différentes phases de la production d'un théorème en relation avec les différents choix épistémologiques possibles dans l'encadrement des théories mathématiques.

Pour ce qui concerne les <u>obstacles épistémologiques</u>, il est clair que si l'on se met dans une perspective "formaliste", la démonstration comme "calcul logique" entraîne une rupture nette avec les formes usuelles de raisonnement (et alors l'argumentation ordinaire, même l'argumentation qui organise les "arguments" selon formes de raisonnement plutôt contraignantes - comme la déduction, l'induction, l'analogie, etc. - peut être vue comme un obstacle). Mais est-il nécessaire de se situer dans la perspective formaliste pour faire des mathématiques? L'opinion de certains mathématiciens d'aujourd'hui semble plutôt critique envers la réduction de la démonstration (comme processus et aussi comme produit) à un calcul dépourvu de toute référence sémantique (voir Thurston, 1994).

Et d'autres mathématiciens (ici, le discours porte sur le coté épistémologique) nient qu'il soit possible d'évacuer toutes les références sémantiques dans la construction et dans la compréhension d'une démonstration (voir l'analyse de G. Longo, E.N.S., à propos du théorème de Kruskal, Séminaire E.N.S, mars 2000; Colloquium Mathematicum, Université de Gênes, mars 1999).

Compte tenu de tout cela, je ne vois pas la nécessité de forcer la formation des élèves dans le sens d'une culture "formaliste" de la démonstration et des théories mathématiques. On peut concevoir le passage de l'argumentation favorisant la construction d'une démonstration au produit final selon une perspective de continuité (et, si nécessaire, d'allers-retours entre argumentation et enchaînement déductif visé). Bien sûr il faut tenir compte du fait que le produit final est soumis aux contraintes (en particulier, règles d'écriture) de la tradition culturelle concernant les théorèmes mathématiques. En ce sens le produit final ne devra pas contenir métaphores ou analogies (pourtant importantes dans la construction de la démonstration), et une pièce d'argumentation du type: *"pour prouver X, il faudrait vérifier si Y est une conséquence des hypothèses, parce qu'il me semble que Y entraîne X"* sera remplacée, dans le texte final, par une phrase du type: "*Y est une conséquence des hypothèses, parce que...; et X est conséquence de Y, parce que...*".

La continuité épistémologique (entre processus de construction et production finale) n'est pas mise en cause par ces règles d'écriture, qui relèvent plutôt d'une tradition culturelle (à mettre en valeur dans la classe à travers une médiation convenable de la part de l'enseignant).

Obstacles culturels: réussir un enchaînement logique un peu long peut être étrange aux cultures d'origine de certains élèves; mais même avec des élèves d'origine sociale et culturelle plutôt haute, certains aspects de la démonstration peuvent être en contradiction avec les usages courants de la langue et le raisonnement commun. Par exemple la "nécessité" l'emporte sur la "suffisance" dans les énoncés courants (si je dis que *"pour éteindre la lumière il faut appuyer sur ce bouton"*, je sous-entend qu'il est aussi suffisant...). Mais aussi la forme spécifique des textes "énoncés" et "démonstrations" est très particulière et relève d'une culture spécialisée, d'un consensus social dans la communauté des mathématiciens et de ceux qui ont une bonne culture mathématique. L'enseignant doit réaliser la médiation de cette forme de texte.

A propos des obstacles épistémologiques et des obstacles culturels, dans la perspective épistémologique choisie on peut noter que les uniques obstacles qui subsistent sont de type culturel et portent sur les règles de composition du texte final de la démonstration et sur sa forme.

Obstacles didactiques: lors de l'approche des théorèmes, une didactique inappropriée peut produire des obstacles: par exemple, par choix de tâches inappropriées, renforcer la tendance à la vérification empirique (en particulier, à travers la mesure) des conjectures; ou donner l'impression d'un jeu sans contenu de connaissance (comme dans le cas de la démonstration de certains énoncés "évidents"). Tout cela rend discutable l'approche usuelle des théorèmes mathématiques dans le domaine de la géométrie plane. On connaît bien les difficultés liées au manque de motivation et de "sens" qui se manifestent quand on part des postulats d'Euclide. Des axiomatiques "riches" ont été conçues pour éviter ces difficultés, mais elles n'évitent pas le recours de la part des élèves à la mesure comme moyen de validation (la mesure étant assez facile à utiliser quand on travaille sur des figures géométriques planes). Au contraire dans d'autres domaines (comme la géométrie de l'espace ou la géométrie de la représentation plane d'objets et situations dans l'espace) le recours à la mesure (ou, en général, à la vérification empirique) est pratiquement impossible ou très difficile à gérer si l'on veut obtenir une validation assez fiable.

D'autre part, je ne considère pas que le passage par la mesure ou par des jeux démonstratifs de propriétés "évidentes" soit profitable pour les élèves dans l'approche des théorèmes. En effet, à mon avis les élèves ont besoin d'un apprentissage "en positif", qui puisse leur permettre de faire une expérience non frustrante de raisonnements généraux, de construction d'enchaînements déductifs, etc.

Toujours à propos des obstacles didactiques, il me semble que la pratique traditionnelle d'approche des théorèmes et de la démonstration par illustration du maître suivie de répétition de la part de l'élève soit contradictoire avec les buts d'une approche consciente et "opérationnel" des théorèmes. En effet, par la voie traditionnelle l'élève répéter un produit, n'apprend pas à produire, et cela est grave parce que le processus de production est très loin de certaines caractéristiques que d'habitude a le produit (comme le manque de redondance, l'exclusion de métaphores et analogies, etc.). On peut bien dire qu'en répétant des produits l'élève manque d'expérience à propos de certains aspects cruciaux du processus de production.

V. UNE INGENIERIE DIDACTIQUE CONCUE POUR L'ACCES A LA CULTURE DES THEOREMES

Dans le travail d'ingénierie didactique qui a constitué le cadre expérimental pour le développement de nos recherches sur l'enseignement et l'apprentissage des théorèmes, on a toujours essayé de distinguer ce qui doit rester à la charge des élèves, et ce qui est à la charge de l'enseignant.

En considérant les différentes phases de la production des théorèmes, nous pensons que les premières phases de la production des conjectures et de la construction de la démonstration peuvent (et doivent) être à la charge des élèves dans n'importe quel moment du parcours didactique de l'approche des théorèmes. La raison de ce choix est implicite dans les discours précédents: il faut que les élèves puissent faire expérience directe d'un travail créatif, qui donne le sens (et le plaisir) d'une maîtrise par le raisonnement d'une situation complexe pour laquelle n'existent pas d'autres moyens accessibles d'arriver à une solution.

Etre à la charge des élèves ne veut pas dire que l'enseignant puisse ignorer leurs difficultés; au contraire il doit chercher à opérer des choix appropriés pour ce qui concerne le contrat didactique, les activités préalables, les tâches spécifiques et la gestion des situations didactiques sur les théorèmes:

A) activités préalables et contrat didactique: nos expériences en classe nous ont montré l'importance d'activités préalables sur la production et la validation d'hypothèses dans des domaines différents, comme occasions pour établir un contrat didactique (Brousseau, 1986) caractérisé par: la motivation (argumentée) des hypothèses produites; l'importance attribuée à la qualité (clarté, niveau d'explicitation) des produits écrits individuels des élèves, productions qu'on utilise systématiquement comme objets de discussion en classe; le fait qu'une hypothèse bien motivée et bien présentée mais "fausse" a plus de valeur q'une hypothèse "correcte" mais pauvre de motivations et mal exprimée;

B) les tâches doivent être à la portée des élèves, en particulier les élèves doivent connaître assez bien le domaine auquel se réfère le problème posé, ils doivent surtout avoir assez d'expérience à propos de l'exploration des liens entre les variables pertinentes pour la résolution du problème. Ce critère peut suggérer de choisir des domaines mathématiques familiers comme le domaine des nombres naturels, ou bien des domaines non mathématiques (ombres du soleil, engrenages, etc.: voir Bartolini Bussi, 1996; Boero et al, 1996; Mariotti et al, 1997; Bartolini Bussi et al, 1999) qui fonctionnent, par le moyen de modèles mathématiques simples et bien adaptés aux situations considérées, comme lieux de travail intellectuel où les métaphores "physiques" et "spatiales" aident le travail productif des élèves; voici quelques exemples:

("Problème des deux bâtons", 13/14 ans): *"On sait que deux bâtons verticaux sous le soleil produisent des ombres parallèles sur le sol. Peut-on produire des ombres parallèles sur le sol avec un bâton vertical et un bâton incliné? Justifier la réponse"* (Boero et al, 1996)

("Problème du centre de la table", 10/11 ans): *"Placer la petite balle au centre de la table; justifier le choix"* (Bartolini Bussi, 1996)

(dessin: une table en perspective, une petite balle à coté)

("Problème des roues engrenées", 10/11 ans): *"Un certain nombre de roues s'engrènent en formant un collier. Peut-on toujours faire tourner l'engrenage? Justifie ta réponse"*(Bartolini Bussi et al, 1999)

C) pour ce qui concerne les premières activités de construction de démonstrations, il est bien qu'elles soient facilitées par le choix de tâches telles que les "arguments" produits pour justifier la plausibilité de la conjecture puissent constituer les arguments-clés à enchaîner dans la construction de la démonstration (voir "unité cognitive des théorèmes", 5.2.);

D) au fur et à mesure que les élèves progressent dans le travail sur les théorèmes, l'enseignant doit s'assurer que les élèves arrivent peu à peu à maîtriser certains éléments cruciaux de la culture des théorèmes (en particulier, il faut qu'ils se rendent compte assez tôt des premières règles de fonctionnement des démonstrations et des théories: enchaînement déductif "sans sauts" des "arguments", nature des arguments admis - propriétés connues comme "vraies" ou déjà démontrées).

L'indication D) constitue le point de contact naturel entre activités confiées aux élèves et activités qui nécessitent d'une médiation importante de la part de l'enseignant.

En particulier, pour ce qui concerne la production des textes des énoncés et des démonstrations et la forme finale du produit, la médiation culturelle de l'enseignant est nécessaire et doit être soutenue par le discours et surtout (particulier ment au début) par l'utilisation soit des productions des élèves, soit des "modèles" de référence. Par exemple on choisit des textes individuels produits par les élèves, à propos desquels on mène une discussion en classe pour les évaluer selon des critères de qualité donnés par l'enseignant ("médiation indirecte") et pour les améliorer; on peut aussi les comparer avec un énoncé ou une démonstration "officielle" bien choisie par l'enseignant ("médiation directe"). Mais on a vu que aussi la proposition d'un modèle de texte final suivie par l'effort individuel des élèves d'approcher le modèle proposé ("Jeu des voix et des échos", Boero et al, 1997; 1998) et par la discussion de quelques textes produits peut fonctionner très bien pour une approche graduelle de la forme "standard" du produit final.

VI. DES APPORTS THEORIQUES ET DES QUESTIONNEMENTS ISSUS DE L'INGENIERIE DIDACTIQUE

L'ingénierie didactique décrite au point précédent a fonctionné dans les dernières quatre années comme contexte pour l'avancement du travail de recherche. Ici je vais présenter quelques acquis récents et des questions ouvertes.

1. Modalités de genèse de la conditionnalité des énoncés

La conditionnalité (i.e. la structure *"Si... alors..."*) constitue (comme on a vu au point 2.) une caractéristique importante et permanente des énoncés de beaucoup de théorèmes. A travers l'analyse de quelques centaines de protocoles d'élèves d'ages différents (du Collège à l'Université) engagés dans 19 tâches de production de conjectures en géométrie, théorie élémentaire des nombres, algèbre et analyse mathématique, on a identifié quatre modèles élémentaires de genèse de la conditionnalité des énoncés, qui dépendent largement de la nature de la tâche. On ne sait pas en ce moment si ces modèles couvrent (avec leurs combinaisons possibles dans la production d'un même énoncé) tous les processus de production de la conditionnalité des énoncés. L'utilité des résultats obtenus jusqu'ici consiste dans la possibilité de choisir des tâches qui puissent permettre aux élèves de faire l'expérience d'une pluralité de voies d'accès à la production des conjectures. Le travail de recherche en cours maintenant consiste dans l'étude des liens entre modes de production des conjectures et modes de production des démonstrations (en effet, lors de la phase de construction de la démonstration on retrouve souvent les formes de raisonnement que l'on a classé pour la genèse de la conditionnalité: voir Arzarello, 2000).

Les modes de production de la conditionnalité que on a classé sont les suivants (voir Boero et al, 1999):

- exploration dynamique, jusqu'à une section temporelle lors de la découverte d'une régularité: *"quand A alors B"* devient *"si A alors B"*;

(mode de production fréquent, par exemple, dans le "problème des deux bâtons")

- violation d'une régularité, et recherche de la condition de laquelle cette régularité dépend :

(tâche: *"Ecrire la propriété géométrique qui a permis à Thalès de trouver la hauteur d'une pyramide à l'aide des ombres"*, 13 ans)

(Igor) *"Nous savons que les rayons du soleil sont parallèles, et les ombres sont proportionnelles aux bâtons. Mais les droites peuvent ne pas être parallèles, dans ce cas je ne vois pas de possibilité de proportionnalité* (dessins et mesures). *Peut être qu'il est vrai que si deux droites sont parallèles, elles coupent des segments proportionnels"*.

- généralisation: exploration d'un ensemble de cas, passage à un énoncé de niveau (plus) général:

(ce comportement est fréquent pour les taches de généralisation, comme dans le cas de la généralisation de la propriété: *"La somme de deux nombres impairs consécutifs est divisible par quatre")*

- abduction (voir Peirce, interprété par Arzarello et al, 1998): étude d'un cas et passage à un énoncé de niveau (plus) général *("de quelle condition générale dépend ce cas particulier?"):*

(on retrouve ce comportement, bien que moins fréquent que le précédent, dans les mêmes tâches qui donnent lieu au comportement précédent).

2. Unité cognitive des théorèmes

Le travail essentiel sur l'unité cognitive des théorèmes a été mené par un enseignant-chercheur, Rossella Garuti, en prise directe sur l'observation de ses élèves. Au départ, on a observé que le travail de construction de la démonstration d'une conjecture produite par les élèves était particulièrement aisé quand ils pouvaient utiliser des arguments et des formes de raisonnement (en particulier, modalités d'exploration dynamique) produites en phase de production de la conjecture (Garuti et al, 1996). Ensuite, on a considéré des cas (historiques, ou même enregistrés dans les classes) dans lesquels cette continuité entre processus de production de la conjecture et processus de construction de la démonstration était improductive (car la construction de la démonstration demandait d'autres arguments et/ou d'autres formes de raisonnement). On a considéré aussi la situation d'un énoncé à prouver non produit par l'élève, et les liens que l'élève tendait à établir entre la phase de prise en charge de l'énoncé (compréhension, analyse de sa portée, recherche d'arguments pour sa plausibilité) et la phase de construction de la démonstration.

On est parvenu ainsi (Garuti et al, 1998) à définir l'unité cognitive comme la manifestation d'un lien de continuité qui peut être établie dans certains cas entre le processus de production d'une conjecture (ou le processus de prise en charge d'un énoncé reçus par autrui) et le processus de construction de la démonstration.

Quand l'unité cognitive se manifeste, elle concerne: les théories de référence et (en leur sein) les arguments produits en phase de conjecture (ou de prise en charge de l'énoncé à prouver) et reconsidérés en phase de démonstration comme éléments à enchaîner déductivement; les représentations symboliques utilisées dans les deux phases; les types d'explorations menées (ici la continuité concerne la nature du dynamisme - variables qui bougent, variables fixes - et non pas la fonction du dynamisme, qui change nécessairement: on passe de la découverte du lien "causal" entre hypothèse et thèse, à l'exploration des virtualités conséquentes à l'hypothèse et des leurs relations avec la thèse).

L'unité cognitive des théorèmes peut être regardée comme un outil pour: interpréter certaines difficultés des élèves (et des mathématiciens: voir l'histoire du "dernier théorème de Fermat"); prévoir une partie au moins des difficultés d'une tâche de démonstration; construire des séquences didactiques graduelles d'approche des démonstrations (et de théorèmes), en partant par des tâches de conjecture et de démonstration qui à priori permettent la réalisation de l'unité cognitive.

3. Dimension mathématique des activités de conjecture et de démonstration dans des domaines non mathématiques

Une des objections les plus fréquentes quand on présente les activités sur les "théorèmes des engrenages" ou sur les "théorèmes des ombres du soleil" est qu'il ne s'agit pas de "théorèmes mathématiques". La réponse a ces objections constitue un sujet d'approfondissement constant dans notre travail. En effet, on peut considérer des niveaux différents de réponse à des interlocuteurs différents.

Si les objections portent sur le fait qu'un véritable travail mathématique (et d'éducation mathématique) doit se concentrer sur les aspects purement formels et logiques, la réponse est pour nous facile, parce qu'on n'adhère pas a cette position épistémologique (qui d'ailleurs est refusée aussi par beaucoup de mathématiciens de nos jours: cf. Thurston, 1994).

Si les objections portent sur le fait que les objets du travail théorique ne sont pas des entités mathématiques, mais des bâtons ou des roues, la réponse nécessite un travail de réflexion approfondi sur le rôle des métaphores physique, des objets qu'on peut toucher, manipuler, plier, etc., dans un véritable travail mathématique. En effet, s'il est vrai que ces référents physiques jouent un rôle important dans l'heuristique, il est vrai aussi que les mathématiciens savent se détacher des aspects "concrets" (et en reconnaître les limites) quand on passe de l'heuristique au travail systématique sur les objets mathématiques. Il faut alors concevoir le travail des élèves dans les domaines d'expérience des engrenages ou des ombres du soleil comme une étape d'un parcours qui, à plus long terme, doit porter sur la géométrie (ou sur l'algèbre) des engrenages et sur la géométrie des ombres du soleil, c'est-à-dire sur des véritables théories mathématiques concernant les modèles mathématiques des situations physiques. A ce propos je voudrais signaler le fait que quand les élèves passent au domaine géométrique l'expérience précédente dans les domaines physiques joue un rôle crucial comme référence heuristique dans les situations difficiles (voir Parenti et al, à paraître): de cette façon on peut bien dire qu'on va vers un véritable travail mathématique (où l'heuristique n'a pas peur de s'appuyer sur des considérations très concrètes!).

A l'objection *'mais alors pourquoi vous ne travaillez pas directement dans les domaines mathématiques'* on peut répondre qu'on pourrait le faire si le but fondamental de l'éducation mathématique était concentré sur les objets et les relations mathématiques. Si au contraire l'on décide qu'un but crucial est le développement et la maîtrise consciente des activités mathématique, alors il faut considérer la qualité des processus mentaux accessibles aux élèves dans les différents domaines. A ce propos dans les protocoles des élèves on trouve que la référence aux aspects dynamiques des ombres du soleil ou des engrenages est très importante pour déclencher des explorations dynamiques (cf. "transformational reasoning" chez Simon, 1996) et elles s'avèrent décisives soit dans la phase de production d'une conjecture soit dans la phase de construction de la démonstration. Si l'on veut que les élèves puissent faire l'expérience de ces processus il faut les mettre dans la meilleure condition pour qu'ils puissent les développer. La familiarité avec les aspects dynamiques des engrenages et des ombres peut bien être considérée comme une condition qui explique la facilité des élèves à réaliser des explorations dynamiques riches et performantes.

Voici un texte de démonstration d'une élève de 13 ans ("Problème des deux bâtons"):

(Enoncé négocié dans la classe: *"Si le plan vertical du bâton incliné contient des rayons du soleil, alors les ombres du bâton incliné et du bâton vertical sont parallèles")*

(Démonstration de Lucia): *"J'imagine un bâton vertical placé à la base du bâton incliné; il fait une ombre alignée avec l'ombre du bâton incliné, parce que les deux bâtons appartiennent au plan vertical du bâton incliné, qui contient des rayons du soleil, qui font l'ombre. Mais l'ombre du bâton vertical imaginaire est parallèle à l'ombre du vrai bâton vertical (parce que les deux bâtons sont // et nous savons que bâtons // produisent ombres //), et alors l'ombre du bâton incliné, elle aussi est // à l'ombre du bâton vertical."*

Les objections sur lesquelles nous travaillons davantage maintenant concernent le problème du transfert de certains processus du domaine physique au domaine mathématique; en effet le fait que des explorations dynamiques performantes soient à la portée de presque tous les enfants dans les cas des engrenages ou des ombres du soleil ne constitue pas une garantie de leur transfert en travaillant sur des problèmes qui concernent des figures géométriques ou d'autres entités purement mathématiques. La recherche en cours (en particulier dans les équipes de Gênes et de Turin) concerne deux aspects complémentaires:

- analyse des processus dynamiques de conjecture et de démonstration par des gens compétents dans le domaine mathématique; on estime pouvoir trouver des fortes ressemblances avec les processus déjà analysés dans les domaines physiques (Arzarello 2000; Busetti 2000);

- analyse des comportements des élèves des classes expérimentales quand ils font face à des tâches purement mathématiques. On a déjà trouvé chez quelques élèves des évidences pour le transfert au domaine algébrique de certaines caractéristiques du style personnel d'exploration, d'anticipation, etc. mises en évidence dans le travail dans les domaines physiques (Boero et Garuti, 2000).

BIBLIOGRAPHIE

ARTIGUE, M. (1988), 'Ingénierie didactique', *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 7, 5 - 62

ARZARELLO, F.; MICHELETTI, C.; OLIVERO, F. AND ROBUTTI, O. (1998), 'A model for analyzing the transition to formal proof in geometry' , *Proceedings of PME-XXII*, Stellenbosch, vol. 2, pp. 24-31

ARZARELLO, F. (2000), 'Inside and Outside: Spaces, Times and Language in Proof Production', *Proceedings of PME-XXIV*, Hiroshima, vol. 1, 23 - 38

BALACHEFF, N. (1988), *Une étude des processus de preuve en mathématiques*, thèse d'état, Université de Grenoble

BARTOLINI BUSSI, M.G. (1996), 'Mathematical Discussion and Perspective Drawing in Primary School', *Educational Studies in Mathematics,* **31**, 11-41

BARTOLINI BUSSI, M.G. (1998), 'Drawing Instruments: Theory and Practices from History to Didactics', *Documenta Mathematica,* Extra vol. ICM 1998, Vol. 3, pp. 735-746

BARTOLINI BUSSI, M. G.; BONI, M.; FERRI, F. & GARUTI, R. (1999), 'Early Approach to Theoretical Thinking: Gears in Primary School', *Educational Studies in Mathematics*, 39, 67-87

BOERO, P.; GARUTI, R. (1994), 'Approaching rational geometry: from physical relationships to conditional statements', *Proceedings of PME-XVIII*, Lisboa, Ed. GRAFIS, Lisboa, vol. 2, pp. 96 - 103.

BOERO, P.; CHIAPPINI, G.; GARUTI, R.; SIBILLA, A. (1995), 'Towards Statements and Proofs in Elementary Arithmetic: An Exploratory Study About the Role of Teachers and the Bahaviour of Students', *Proceedings of PME-XIX,* Recife, Brazil, Universitade Federal de Pernambuco, Recife, 1995, vol. 3, pp. 129-136.

BOERO, P.; DAPUETO, C.; FERRARI, P.; FERRERO, E.; GARUTI, R.; LEMUT, E.; PARENTI, L.; SCALI, E. (1995), 'Aspects of the Mathematics-Culture Relationship in Mathematics Teaching-Learning in Compulsory School', *Proc. of PME-XIX,* Recife, vol. 1, pp. 151-166

BOERO, P.; GARUTI, R. AND MARIOTTI, M.A. (1996), 'Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures', *Proceedings of PME-XX,* Valencia, vol. 2, pp. 121-128

BOERO, P.; PEDEMONTE, B. AND ROBOTTI, E. (1997), 'Approaching Theoretical Knowledge through Voices and Echoes: a Vygotskian Perspective', *Proceedings of PME-XXI*, Lahti, vol. 2, pp. 81-88

BOERO, P.; CHIAPPINI, G.; PEDEMONTE, B.; ROBOTTI, E. (1998), 'The voices and echoes game and the interiorization of crucial aspects of theoretical knowledge in a vygotskian perspective: ongoing research', *Proc. of PME-XXII,* Stellenbosch, vol. 2, 120-127.

BOERO, P. (1999a), 'Didactique des théorèmes entre histoire des mathématiques, épistémologie et sciences cognitives', *Proc. of CIEAEM-50,* Neuchatel, pp. 297-302.

BOERO, P. (1999b), 'Choix des thèmes de travail et des tâches pour l'approche de théorèmes, *Actes de la X-ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathematiques*, IUFM de Caen, Tome II, pp. 59-63.

BOERO, P.; GARUTI, R. & LEMUT, E. (1999), 'About the Generation of Conditionality of Statements and its Links with Proving', *Proceedings of PME-XXIII*, Haifa, vol. 2, pp. 137-144.

BOERO, P. & GARUTI, R. (2000), 'Aspetti logico-linguistici e dinamiche mentali', in J.P. Drouhard et M. Maurel (Eds.), *Actes des Séminaires SFIDA-9 à SFIDA-12,* Volume III, 1997/99, IREM de Nice, pp. XII/3 - XII/6

BROUSSEAU, G. (1986), 'Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques', *Recherches en didactique des mathématiques*, 7, 33-115

BUSETTI, E. (2000), *Analisi dei processi di dimostrazione,* Tesi di laurea, Università di Genova

DOUEK, N. (1999a), 'Some Remarks about Argumentation and Mathematical Proof and their Educational Implications', *Proc. of the CERME-I Conference*, Osnabrueck (to appear)

DOUEK, N. (1999b), 'Argumentative Aspects of Proving: Analysis of Some Undergraduate Mathematics Students Performances', *Proc. of PME-XXIII,* Haifa, vol. 2, pp. 273-280

DUCROT, O. (1980), *Les échelles argumentatives,* Ed. de Minuit, Paris.

DUVAL, R. (1991), 'Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration', *Educational Studies in Mathematics*, 22, 233-261

GARUTI, R.; BOERO, P.; LEMUT, E. & MARIOTTI, M.A. (1996), 'Challenging the traditional school approach to theorems: a hypothesis about the cognitive unity of theorems', *Proceedings of PME-XX,* vol. 2, pp. 113-120, Univ. de Valencia, vol. 2, pp. 113-120.

GARUTI, R.; BOERO,P. & LEMUT, E. (1998), 'Cognitive Unity of Theorems and Difficulties of Proof', *Proceedings of PME-XXII*, vol. 2, pp. 345-352

GRANGER, G. G. (1992), *La vérification*, Editions Odile Jacob, Paris

HANNA, G. (1989), 'More than formal proof', *For the Learning of Mathematics*, 9, 20-23

HANNA, G. (1996),'The Ongoing Value of Proof', *Proceedings of PME-XX,* Valencia, vol. 1, pp. 21 - 34

HAREL, G. & SOWDER, L. (1998), 'Students' Proof Schemes', in A. Schoenfeld et al (Eds.), *Research on Collegiate Mathematics,* Vol. 3, M.A.A. and A.M.S. pp. 234-283.

LAKATOS, I. (1985), *Preuves et réfutations*, Hermann, Paris

MARIOTTI, M.A.; BARTOLINI BUSSI, M.; BOERO,P.; FERRI, F.; GARUTI, R. (1997), 'Approaching geometry theorems in contexts', *Proceedings of PME-XXI*, Lahti, vol.1, pp. 180-195

PARENTI L., BARBERIS M. T., PASTORINO M., VIGLIENZONE P.: 'From dynamic exploration to "theory" and "theorems"', in P. Boero (Ed.), *Theorems in School,* Kluwer Ac. Pub. (à paraître)

SIMON, M. (1996), 'Beyond Inductive and Deductive Reasoning: The Search for a Sense of Knowing', *Educational Studies in Mathematics,* 30, 197-210

THURSTON, W.P (1994), 'On Proof and Progress in Mathematics', *Bulletin of the A.M.S.*, 30, 161-177

TOULMIN, S. (1958), *The Uses of Argument*, Cambridge University Press, Cambridge.

VYGOTSKY, L. S. (1985), *Pensée et langage*, Editions Sociales, Paris

LOGIQUE ET RAISONNEMENT MATHEMATIQUE
VARIABILITE DES EXIGENCES DE RIGUEUR DANS LES DEMONSTRATIONS METTANT EN JEU DES ENONCES EXISTENTIELS

Gilbert Arsac[3]
Institut Girard Desargues, Université Claude Bernard Lyon1

Viviane Durand-Guerrier[4]
IUFM de Lyon, LIRDHIST, Université Claude Bernard Lyon1 & IREM de Lyon

D'une manière générale, dans les démonstrations mathématiques proposées aux étudiants, on trouve assez peu de références explicites à la logique classique (calcul des propositions, calcul des prédicats). A contrario, on exige de ces mêmes étudiants un certain niveau de rigueur dans les preuves qu'ils produisent, ceci afin d'en assurer la validité. Dans les travaux que nous menons, nous examinons la question de l'articulation entre logique, rigueur et validité sous deux points de vue. D'une part du côté du praticien des mathématiques dans son rôle de professeur : *par quoi, dans son discours auprès des étudiants remplace-t-il la logique absente* ? D'autre part du côté de l'étudiant en mathématiques : *comment, en tant que novice du domaine mathématique étudié, peut-il satisfaire aux exigences de rigueur qui permettent, en principe, de se prémunir contre les preuves non valides* ? Pour cette présentation, nous nous intéressons principalement à la première question. Nous appuierons nos réflexions sur un protocole obtenu en soumettant une démonstration de topologie comportant une erreur, proposée par un étudiant, à un certain nombre d'enseignants de mathématiques.

I. MOTIVATIONS

En Didactique des Mathématiques, les travaux sur la démonstration, dont les derniers sont ceux conduits par Raymond Duval (1993, 1995), utilisent comme cadre logique de référence essentiel le calcul des propositions, en mettant au coeur de l'apprentissage de la

[3] arsac@desargues.univ-lyon1.fr
[4] durand-guerrier@lyon.iufm.fr

démonstration l'appropriation par l'élève du bon usage de la règle d'inférence du Modus Ponens : reconnaissance du théorème pertinent, vérification des conditions d'application de ce théorème et détachement de la conclusion. La pertinence de ce cadre d'analyse s'explique, du point de vue logique, par le fait que l'on manipule, en Géométrie, essentiellement des théorèmes universels qui peuvent se mettre sous la forme : " Pour tout x, si P(x), alors Q(x) ". Cependant, dans les démonstrations géométriques, en général les quantificateurs n'apparaissent pas, c'est-à-dire que l'on travaille sur un exemple générique. On n'a donc besoin que d'une instance de l'énoncé ouvert correspondant : " Si P(a), alors Q(a) ", où a désigne un élément générique du domaine de référence considéré. On est alors effectivement ramené au calcul des propositions. Notons cependant (Durand-Guerrier, 1999), que cela conduit à des difficultés lorsque l'énoncé universellement quantifié est non pas vrai, mais faux sur le domaine considéré. Voici un exemple simple illustrant ce fait :

> Soit Q un quadrilatère ; pour chacune des deux implications suivantes dire si elle est vraie ou fausse :
>
> a) si Q est un rectangle, alors ses diagonales ont même longueur.
>
> b) si les diagonales de Q sont perpendiculaires, alors Q est un losange.

L'énoncé a) est vrai, car il est associé à un théorème universel ; quant à l'énoncé b), c'est une instance d'un énoncé ouvert admettant à la fois des exemples et des contre-exemples. Autrement dit, on ne peut pas se prononcer sur la valeur de vérité de cet énoncé. Le déclarer faux revient à assimiler cet énoncé à l'énoncé universellement quantifié correspondant. Comme le fait remarquer Houdebine, (1998, page 115) cet exercice " fait apparaître chez des élèves de quatrième une hésitation entre faux, pas toujours vrai et vrai ".

Lorsqu'on aborde les démonstrations en Analyse, il apparaît très clairement que le cadre théorique proposé par Raymond Duval pour la Géométrie devient inopérant dans de nombreux cas, en particulier lorsqu'interviennent des théorèmes existentiels. Nous allons illustrer ce point à travers l'exemple d'une démonstration, erronée, du théorème des accroissements finis généralisés. Nous rappelons ci-dessous l'énoncé de ce théorème, ainsi que celui du théorème usuel des accroissements finis.

Théorème des accroissements finis :

Etant donné deux réels a et b tels que $a < b$ et une fonction numérique f définie sur l'intervalle fermé [a ; b], si f est continue sur l'intervalle fermé [a ; b], et dérivable sur l'intervalle ouvert]a ; b[, alors il existe un réel c dans l'intervalle]a ; b[tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.

Théorème des accroissement finis généralisé :

Etant donné deux réels a et b tels que $a < b$ et deux fonctions numériques f et g définies et continues sur l'intervalle fermé [a ; b], dérivables sur l'intervalle ouvert]a ; b[, si la dérivée g' de la fonction g ne s'annule pas sur l'intervalle]a ; b[, alors il existe un réel c dans l'intervalle]a ; b[, tel que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Une démonstration, fréquemment rencontrée en DEUG scientifique première année, consiste à déduire le deuxième théorème du premier, de la façon suivante :

La fonction f vérifie les conditions d'application du théorème des accroissements finis, donc il existe c dans]a ; b[, tel que $f'(c)(b-a) = (f(b)-f(a))$. De même g vérifie les conditions d'application du théorème des accroissements finis, donc il existe c dans]a ; b[, tel que $g'(c)(b-a) = (g(b)-g(a))$. Comme g' ne s'annule pas sur]a ; b[, $g'(c) \neq 0$ et donc $(g(b) - g(a)) \neq 0$. On peut donc faire le quotient des deux égalités, on obtient alors l'égalité cherchée.

Cette démonstration est fausse ; on peut le montrer sur un exemple en considérant deux fonctions pour lesquelles on ne peut pas *choisir le même point* c, ce qui n'est pas si facile d'ailleurs puisque, pour exhiber un contre-exemple, on ne peut pas considérer deux polynômes de degré inférieur ou égal à 2 ; on peut par exemple prendre les fonctions qui à x associent respectivement x^2 et x^3 ou encore x^2 et $\sin x$. Si l'on analyse cette démonstration à l'aide du modèle de Raymond Duval, on est conduit à examiner son organigramme (cf.

annexe 1). Celui-ci montre que les différents théorèmes, explicites ou implicites, sont utilisés correctement : la non-validité ne dépend pas d'une mauvaise application de la règle du Modus Ponens. L'erreur peut être analysée de deux points de vue.

- Premier point de vue : comme nous l'avons vu ci-dessus, l'erreur consiste à penser que le point c dont l'existence est affirmée est le même pour les deux fonctions alors que ce n'est pas toujours le cas. Le fait d'utiliser la même notation c pour appliquer le théorème à f et g introduit l'hypothèse que c " ne dépend pas" de f. Ici encore, il y a un problème de quantification sous-entendue (le théorème est vrai quelle que soit f) et de dépendance de variable. Cette erreur peut aussi être attribuée à une absence de contrôle de la démonstration par les connaissances mathématiques. Nous retrouverons ceci dans l'analyse du protocole.

- Deuxième point de vue : sur le plan logique, l'erreur consiste à utiliser une lettre de variable liée comme s'il s'agissait d'un nom d'objet. Ceci revient à *squeezer* l'inférence sémantique associée à la règle d'instantiation existentielle, et du coup, à ne pas respecter les restrictions correspondantes sur les noms d'objets : à savoir, qu'une lettre utilisée pour une instance d'un énoncé existentiel ne peut pas être utilisée pour désigner un autre objet. L'utilisation de cette règle permet de corriger le raisonnement précédent : on déduit une instance pour f avec par exemple la lettre r, puis une instance pour g avec par exemple la lettre s. On peut bien alors obtenir l'égalité des deux quotients, mais ceci ne prouve pas le résultat cherché (cf. annexe 2). Une manière d'éviter l'erreur, fréquemment rencontrée dans la classe de mathématiques, consiste à utiliser une lettre différente pour la variable liée dans chacune des deux instances de l'énoncé existentiel. Cette méthode n'a pas de statut théorique, ni sur le plan logique, ni sur le plan mathématique, car les règles de manipulation des lettres muettes en mathématiques sont analogues aux règles de manipulation de lettres de variables liées en logique. Il s'agit donc d'une pratique permettant, par l'utilisation d'un formalisme intermédiaire entre langage courant et formalisme logique, d'attirer l'attention sur le fait que l'on ne peut pas considérer a priori qu'il s'agit du même élément pour les deux fonctions.

Ce qui précède montre que, pour contrôler, <u>sur le plan logique</u>, la validité de la démonstration proposée, il faut faire appel à une règle d'inférence qui ne peut pas se formuler dans le calcul des propositions. Il faut donc enrichir le modèle proposé par Raymond Duval en se plaçant dans le calcul des prédicats. On se trouve alors dans une théorie beaucoup plus difficile à manipuler que le calcul des propositions, mais aussi beaucoup plus près des mathématiques. D'ailleurs, pour certains auteurs comme Gilles Gaston Granger (1994), la logique stricto-sensu ne comprend que le Calcul des Propositions. Glaeser (1973) quant à lui considère le

Calcul des Propositions et le Calcul des Prédicats comme des théories mathématiques. Nous n'entrerons pas ici dans ce débat qui dépend des définitions respectives que l'on donne des mathématiques et de la logique.

Sur le plan didactique, nous adoptons le point de vue suivant lequel le Calcul des Prédicats fonctionne comme un système de référence pour l'analyse logique des démonstrations mathématiques, en particulier des démonstrations d'analyse. Cependant, bien que le langage des prédicats soit le socle du symbolisme mathématique, la transcription dans ce langage d'une démonstration d'analyse est une opération qui ne peut être faite que par un mathématicien suffisamment expert dans cette théorie logique. De ce point de vue, la situation est bien différente de celle de la géométrie où, lorsqu'on peut se contenter du calcul des propositions, la formalisation est en général assez aisée. L'usage en mathématiques du symbolisme du calcul des prédicats, par exemple des quantificateurs, est associé en fait à une pratique qui est souvent assez éloignée des règles de fonctionnement du modèle théorique. Comme on l'a vu dans l'exemple précédent, ce non respect porte en particulier sur les modes de manipulation des variables, mais est compensé par un contrôle de la validité des démonstrations à l'aide des connaissances mathématiques en jeu. Ceci suppose qu'elles soient disponibles et cette condition introduit une différence fondamentale entre l'étudiant et le mathématicien. Comment un étudiant peut-il contrôler la validité des preuves qu'il produit dans un domaine mathématique en cours d'étude ? Que faudrait-il enseigner dans les premiers cycles universitaires scientifiques, en dehors des connaissances mathématiques proprement dites, pour permettre aux étudiants de contrôler eux-mêmes la validité des preuves ? Peut-on identifier chez les mathématiciens, et au premier chef chez les enseignants, une pratique de la démonstration en analyse suffisamment stable pour fournir la base d'un tel enseignement ?

La recherche en cours que nous présentons ici a pour objet une première enquête sur la distance entre la pratique des enseignants de mathématiques à l'université et le modèle de référence théorique qu'est le calcul des prédicats. Pour cela nous avons utilisé une démonstration de topologie proposée par un étudiant, que nous avons soumise à une vingtaine d'enseignants, en étudiant en particulier le vocabulaire qu'ils utilisent et les règles de contrôle qu'ils proposent. Il s'agit d'un début de recherche dont l'objectif est de dresser un état des lieux à partir d'un questionnement sur les références théoriques, logiques et épistémologiques des enseignants, afin de poursuivre par une recherche plus didactique. Cependant, il y a déjà un aspect didactique puisque nous étudions le discours que l'enseignant adresse à l'étudiant.

Nous cherchons à repérer d'une part les invariants, d'autre part les spécificités de chaque enseignant. A ce stade de la recherche, nous ne disposons pas d'un cadre théorique très précis ; nos analyses sont donc plutôt de type empirique.

II. ANALYSE DU PROTOCOLE

1. Présentation du protocole et première analyse

a) *Le contexte*

La démonstration sur laquelle nous allons travailler (voir ci-dessous) a été proposée par un étudiant considéré comme brillant par le professeur destinataire.
Voici cette démonstration (la rédaction est exactement celle de l'étudiant qui raisonne implicitement par l'absurde en partant de $d(A,B) = 0$; nous avons simplement ajouté la numérotation des lignes pour faciliter les renvois au texte).

Question : (E,d) est un espace métrique, A et B sont deux parties de E. On définit $d(A,B)=\inf\{d(x,y),\ x\in A,\ y\in B\}$. Montrer que si A est compact et B est fermé et $A\cap B=\emptyset$, alors $d(A,B)\neq 0$.

Démonstration :

1 $\forall\, \varepsilon>0,\ \exists\, x\in A,\ \exists\, y\in B,\ 0\leq d(x,y)<\frac{\varepsilon}{2}$.

2 Comme $x\in A$, et A fermé $\Rightarrow x\in\overline{A} \Rightarrow \exists\ (x_n)\subset A,\ x_n\rightarrow x$.

3 Or, $d(x_n,y)\leq d(x_n,x)+d(x,y)$

4 Et, comme $x_n\rightarrow x$, $\exists\, n_0$, $n\geq n_0$ $d(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{2}$,

5 d'où, pour $n\geq n_0$, $d(x_n,y)<\varepsilon$, ainsi $x_n\rightarrow y$ et comme $(x_n)\subset A$, alors :

6 $y\in\overline{A}=A$, or $y\in B \Rightarrow y\in A\cap B \Rightarrow A\cap B\neq\emptyset$.

Il s'agissait d'un devoir à la maison et l'étudiant a soumis cette démonstration, conscient d'avoir démontré un résultat avec des hypothèses plus faibles que celles indiquées (A et B fermés, au lieu de A compact et B fermé). En commentaire, le professeur concerné écrit :

> " A première vue, je n'ai pas vu l'erreur mais en reprenant la démonstration je me suis rendu compte que (x_n) dépend de ε de départ ! On a donc $d(x^{\varepsilon}_n, y^{\varepsilon}) < \varepsilon/2$, mais si on prend un $\varepsilon' > 0$, on ne peut avoir $d(x_n, y) < \varepsilon'$. Je pense que le problème relève d'un abus de langage ; on devrait dire : $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in A, \exists y_\varepsilon \in B\ \ 0 \leq d(x_\varepsilon, y_\varepsilon) < \varepsilon/2$. "

Notons qu'il n'y a pour l'enseignant aucun doute sur le fait que la démonstration comporte une erreur ; en effet, a priori, il sait que les hypothèses indiquées dans l'exercice sont minimales. Autrement dit, c'est le savoir mathématique qui permet de disqualifier la démonstration proposée par l'étudiant. Ceci dit, il va de soi que cela ne suffit pas aux yeux de l'enseignant et le commentaire proposé concerne la recherche de l'erreur dans la démonstration ; cette erreur est interprétée comme relevant d'*un abus de langage*. De notre point de vue, la correction proposée à la fin du commentaire est à mettre en rapport avec la remarque concernant le théorème des accroissements finis : sur le plan logique, le fait d'indicer les lettres x et y n'a pas de pertinence puisqu'il s'agit de variable liées. Sur le plan mathématique, comme nous l'avons déjà dit, c'est une pratique qui n'a pas de statut théorique. En fait, la première phrase de l'étudiant est parfaitement correcte sur le plan de la syntaxe. C'est dans l'usage qui en est fait ensuite que résident les difficultés.

b) Analyse de la démonstration à l'aide de la déduction naturelle.

Dans le Calcul des Prédicats, nous disposons de systèmes de preuve formelle, par exemple celui dû à Copi et présenté rapidement dans Hottois (1989). Il s'agit d'une extension au Calcul des Prédicats de la Méthode de Déduction Naturelle dans le Calcul des Propositions due à Gentzen, et qui fournit des règles d'introduction et d'élimination des connecteurs propositionnels. Voici comment la présente l'auteur :" Ce système offre l'intérêt de proposer des démonstrations qui restent au plus près de l'aspect familier des syllogismes. Cette présentation correspond à la volonté de formaliser et d'axiomatiser en ne rompant pas avec la rationalité discursive naturelle. " Un tel système peut en particulier être utilisé pour contrôler la validité de preuves mathématiques, sans recourir à une formalisation complète dans le Calcul des Prédicats, et propose de ce fait un moyen terme entre une position formaliste extrême s'appuyant sur la théorie de la démonstration de Hilbert, inaccessible de fait, et la position inverse qui consiste à dire que les démonstrations mathématiques n'obéissent à aucune règle. Il se fixe donc un but qui n'est pas sans rapport avec l'objet de notre recherche. Les quatre règles de manipulation des énoncés quantifiés dont on dispose dans ce système sont données sous la forme suivante (pp.101-102) :

" 1) I.U.[5] Instantiation Universelle

$$\frac{(x)fx}{fa}\ ^{6})$$

a constante individuelle quelconque substituée à x

(...)

2) G.U. Généralisation Universelle

$$\frac{fa}{(x)fx}$$

avec a, constante d'objet absolument quelconque choisie dans le domaine (de x), c'est-à-dire considérée uniquement du point de vue de son appartenance à ce domaine.

(...)

3) G.E. Généralisation Existentielle

$$\frac{fa}{\exists xfx}$$

a constante quelconque

(...)

4) I.E. Instantiation existentielle

$$\frac{\exists xfx}{fw}$$

Attention à l'interprétation de w : il s'agit d'une constante d'objet, mais dont on retient seulement qu'elle est le nom de l'un des objets qui, par hypothèse, doivent, (ou doit s'il n'y a qu'un objet de ce type) vérifier ∃xfx. Le plus souvent, on ne sait rien de plus, c'est-à-dire qu'on ignore l'identité précise de cet objet. c'est pour cela qu'il faut veiller à ce que le signe introduit (ici w) soit sans occurrences antérieures qui précisément le détermineraient (l'identifieraient) de façon abusive. "

L'application de ces règles au cas qui nous intéresse montre qu'il manque trois instances successives de l'énoncé (1) :

De l'énoncé, $\forall\varepsilon>0\ \exists x\in A\ \ \exists y\in B,\ 0\leq d(x,y) < \varepsilon/2$ (1) on peut inférer par la règle d'Instantiation Universelle (I.U.) $\exists x\in A\ \ \exists y\in B,\ 0\leq d(x,y) < \varepsilon/2$ (2) où ε est une lettre de constante, sans restriction (un élément générique du

---

[5] L'auteur utilise l'abréviation UI ; nous préférons respecter l'ordre des mots en français.

[6] (x) traduit une quantification universelle, ce qu'en mathématique nous noterions ∀x.

domaine de référence, ici R^{+*}, dont nous ne changeons pas le nom, conformément à la pratique des mathématiciens, ce que ne ferait pas un logicien). De cet énoncé, on peut inférer en appliquant deux fois la règle d'Instantiation Existentielle (I.E.), $0 \leq d(x,y) < \varepsilon/2$ (3) où cette fois x et y sont des lettres de constantes soumises aux restrictions de la règle d'instantiation existentielle. Rappelons qu'en logique, on choisirait des lettres différentes pour les variables et les constantes d'objets : par exemple ici, on pourrait écrire : $0 \leq d(a,b) < c/2$ (4). De cette manière, après avoir introduit la suite convergent vers x, on aboutirait à la ligne 5 à l'énoncé $\forall n > n_0,\ d(x_n,b) < c$ (5). En appliquant alors la règle de généralisation existentielle (G.E.), on obtient : $\exists y \in B,\ \exists x \in A^N,\ \forall n > n_0,\ d(x_n,y) < c$ (6), puis par la règle de généralisation universelle (G.U.) : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in B,\ \exists x \in A^N,\ \forall n > n_0,\ d(x_n,y) < \varepsilon$ (7).

N.B. Parmi les règles de restrictions, se trouvent naturellement le respect de l'ordre d'introduction des lettres : si une instantiation existentielle se fait après une instantiation universelle, la généralisation existentielle devra se faire avant la généralisation universelle correspondante.

Or l'énoncé (7) ne traduit évidemment pas le fait qu'il existe une suite de A convergent vers un point de B, si bien que l'erreur de l'étudiant provient d'une conclusion illégitime : la lecture qu'il fait de ce qu'il a écrit à la ligne 5 le conduit à restituer les quantificateurs absents sans contrôler l'ordre dans lequel ces quantificateurs doivent être écrits.

Dans les commentaires, un des enseignants écrit, en réponse à la question 1 : " (l'étudiant) confond le fait qu'une propriété est vraie pour un " ε fixé " et " quel que soit ε " (q_1). Or la méthode classique de démonstration associée à G.U., l'exemple générique, légitime dans de nombreux cas, consiste bien à démontrer " pour un a fixé " et à affirmer ensuite que le résultat ne dépend pas en fait du choix de a. Autrement dit, ce commentaire laisse dans l'ombre la difficulté spécifique de cette démonstration proposée par l'étudiant, à savoir qu'on ne peut pas appliquer G.U. sans précaution dans ce cas.

Le système dû à Copi est très près de la pratique mathématique ; en particulier parce qu'il introduit les constantes d'objets ; son intérêt principal, par rapport à la pratique mathématique habituelle, réside dans le fait de rendre explicites les règles de manipulations des variables. Il est donc intermédiaire entre la pratique usuelle et un système entièrement formalisé. La méthode de déduction naturelle due à Quine, bien qu'utilisant des règles analogues, en diffère dans le sens où elle ne fait pas appel aux constantes d'objets : elle utilise uniquement des lettres de variables, libres ou liées, et introduit le contrôle de la validité en imposant des restrictions sur l'ordre alphabétique des variables utilisées[7], au lieu d'un méta-discours. C'est donc un système formalisé dans lequel les règles de contrôle sont syntaxiques. Parmi les quatre règles introduites par Quine, deux correspondent à des schémas conditionnels universellement valides du calcul des prédicats. Ce sont :

I.U., associée à " $(\forall xFx) \Rightarrow Fy$ " (1)

et G.E. associée à " $Fx \Rightarrow (\exists yFy)$ " (2)

Les deux autres règles

G.U. associée à " $(Fy \Rightarrow (\forall xFx)$ " (3)

et I.E. associée à " $(\exists xFx) \Rightarrow Fy$ " (4)

ne sont pas associées à des schémas valides. Par exemple, (3) n'est pas valide comme le montre le contre-exemple suivant. Plaçons nous dans l'arithmétique des entiers naturels , interprétons F par " être un nombre premier et y par le nombre 7. Le schéma (3) s'interprète par la proposition :" *si 7 est un nombre premier, alors tous les nombres entiers sont premiers'* "Cette proposition est fausse, car son antécédent est vrai, tandis que son conséquent est faux. Le schéma (3) n'est donc pas universellement valide. On démontre de même que le schéma (4) n'est pas valide en interprétant cette fois y par 6, ce qui conduit à la proposition : " si il existe un entier naturel premier, alors 6 est un nombre premier ". Cette proposition est fausse pour la même raison que dans le cas précédent.[8]

Le fait que les deux dernières règles soient associées à des schémas non valides impose d'édicter des restrictions dans l'usage de ces règles, restrictions que Quine (1950) formule de la manière suivante (p.218) :

> " Les variables d'instantiation de I.E. et de G.U. doivent être différentes lors de chaque application, et la variable d'instantiation lors de chaque application doit être alphabétiquement postérieure à toutes les variables libres de la ligne générique de l'application en question "

N.B. Lors de l'application de l'une de ces règles, la ligne générique est celle qui contient un quantificateur de plus que l'autre, appelée ligne instanciée. Pour I.E. et G.E., la ligne générique précède la ligne instanciée ; pour I.U. et G.U., c'est le contraire.

---

[7] Nous empruntons la présentation de cette méthode à Gochet & Gribomont, 1990, pp.221-231

[8] Notons que nous prouvons la non validité par des arguments de type sémantique ; c'est déjà la méthode employée par Aristote dans la théorie du syllogisme : la validité est prouvé de manière syntaxique (à partir de principes premiers et de règles), la non validité est prouvée par production d'un contre-exemple.

Pour faciliter le contrôle du respect de cette règle, Quine introduit un procédé de signalisation : pour chaque application de I.E. et de G.U. on mentionne sur la ligne déduite le nom de la variable instanciée, ce qui conduit à une nouvelle formulation des restrictions (p.219) :

> " Aucune variable ne peut être deux fois l'objet d'une signalisation et la variable signalée doit être alphabétiquement postérieure à toutes les variables libres de la ligne générique. "

Revenons à la démonstration de l'étudiant : on peut la formaliser en désignant par une lettre de prédicat, par exemple F, la propriété sur la distance de x à y.

L'énoncé de la ligne n°1 est de la forme	(1)	$\forall z \exists x \exists y Fxyz$	
On applique I.U.	(2)	$\exists x \exists y Fxyt$	
On applique deux fois I.E.	(3)	$\exists y Fuyt$	u
	(4)	$Fuvt$	v

u et v sont deux variables libres obtenues par une instantiation existentielle ; elles sont donc introduites dans l'ordre alphabétique et signalées sur la ligne instanciée.

Après quelques transformations mathématiques on arrive à

(5) $Guvt$

(où G désigne la propriété ad hoc). Comme t est antérieur alphabétiquement à u et v, on ne peut pas faire une instantiation universelle sur t ; autrement dit la déduction :

(6) $\forall z Guvz$

est incorrecte.

Notons que dans de tels systèmes, les règles d'écritures proposées et les restrictions imposées aux variables permettent de garantir la validité de la déduction complète, et ce bien que certaines des déductions ne soient pas *localement* valides. Ceci est associé au fait que le contrôle pas à pas de la preuve ne suffit pas ici, il faut un contrôle global, et ce contrairement à ce que l'on fait en Géométrie où les questions de formalisation des discours quantifiés n'apparaissent en général pas (cf. Duval 1993). Notons toutefois que le principe de signalisation ci-dessus proposé par Quine vise à faciliter ce contrôle. La validité logique de ce type de preuve vient de ce que l'on peut montrer que chaque fois que les restrictions imposées aux variables dans l'application de G.U. ou I.E. sont respectées, on peut reconstruire une dérivation dans laquelle les deux règles suspectes sont remplacées par un Modus Ponens combiné avec l'introduction d'une prémisse auxiliaire que l'on pourra réduire à une tautologie. Ces deux règles apparaissent donc comme des artifices pour abréger les démonstrations (Gochet & Gribomont, 1990, p.227). Du point de vue épistémologique, les considérations précédentes montrent qu'il suffit de savoir transcrire une démonstration mathématique en déduction naturelle pour être assuré de l'existence d'une transcription formalisée dans le cadre théorique du calcul des prédicats. Autrement dit, la distance entre démonstration pratique et démonstration formalisée n'est peut-être pas aussi infranchissable qu'on l'affirme parfois (cf. par exemple R Hersh, 1997, p. 50).

Remarquons que, de même que la logique des propositions transforme la notion de causalité en implication, les systèmes de preuve du calcul des prédicats présentés ici absorbent la notion intuitive de dépendance dans des règles d'écriture et de manipulation des quantificateurs et des variables. Or, comme nous allons le voir, le mathématicien tient à garder à l'esprit cette notion de dépendance car elle lui semble indispensable pour comprendre. D'autre part, il semble peu vraisemblable que l'on puisse enseigner aux étudiants des règles assez complexes et uniquement syntaxiques.

2. Le point de vue des enseignants

En relation avec nos préoccupations de recherche, la démonstration de cet étudiant et les commentaires de l'enseignant nous ont paru mériter une exploration plus importante, ce qui nous a conduit à mettre en place une enquête auprès de collègues enseignant à l'université. Nous avons recueilli les réponses d'une vingtaine d'enseignants aux questions suivantes :

1) Quelles erreurs comporte cette démonstration, (vous pouvez supposer que vous l'expliquez à un collègue) ?
2) Qu'écririez-vous sur la copie ?
3) Quel corrigé proposeriez-vous à cet étudiant ?

Dans les premiers questionnaires, la formulation de la première question était la suivante : " Quelles erreurs, *sans s'attarder aux abus de notation de l'étudiant qui ont été reproduits*, comporte cette démonstration ? (vous pouvez supposer que vous l'expliquez à un collègue). " Plusieurs collègues nous ont fait remarquer qu'il était difficile de se tenir à cette consigne compte tenu de ce qu'a écrit l'étudiant, aussi nous avons supprimé la partie de la phrase en italique.

Nous avons obtenu vingt-deux réponses d'enseignants de mathématiques en poste dans diverses universités scientifiques : Grenoble, Lille, Lyon, Montpellier, Paris, Rouen. Plusieurs réponses sont très détaillées, d'autres sont un peu plus elliptiques. Nous proposons une première étude qualitative des réponses permettant de dégager quelques grandes tendances dans le discours des enseignants, et aussi de pointer des différences.

a) Le contrôle par les connaissances mathématiques : la production d'un contre-exemple

Tous les enseignants repèrent que le résultat étant faux, la démonstration ne saurait être correcte. Quatorze d'entre eux proposent un contre exemple ; pour une minorité, c'est le premier argument proposé à l'étudiant. C'est en effet un moyen de s'assurer de la non validité du résultat établi. Mais ceci ne permet pas de savoir en quoi la démonstration est fautive. Il est remarquable de constater que certains enseignants disent n'avoir pas détecté, à la première lecture, d'erreur dans la démonstration. Ce sont donc leurs connaissances mathématiques (et non pas l'analyse logique de la démonstration) qui leur donnent la certitude d'une erreur de raisonnement et c'est leur pratique de la démonstration en Analyse qui les oriente vers le problème de la dépendance des variables. On comprend mieux alors le fait que l'étudiant, ne disposant pas de ce contrôle, puisse ne pas voir son erreur. On peut bien sûr s'interroger sur le conseil donné par l'un d'entre eux : " *quand on n'est pas sûr, il faut expliciter la dépendance* " ; n'est-ce-pas précisément un des problèmes de nombreux étudiants de n'être jamais très sûr des démonstrations qu'ils produisent ?

b) La prégnance de la notion de dépendance

Tous les collègues, sauf un, (soit 21) écrivent que " x et y dépendent de ε " et douze d'entre eux le traduisent en introduisant la notation $x_\varepsilon y_\varepsilon$ ou la notation y^ε [9]. Pour certains collègues, cette notation indicée apparaît comme un " canon " mathématique. On peut lire par exemple (réponse à la première question) :

" à la ligne 1, x et y qui dépendent de ε ne sont pas indicés par ε ; c'est un abus classique, souvent pratique ".

Pour d'autres collègues, les indices fonctionnent plutôt comme un *garde-fou* ; on peut lire dans quelques réponses à la question 2 (à l'adresse de l'étudiant)

" mettre des indices quand on n'est pas sûr de soi. "

" x et y dépendent de ε, une notation comme x_ε évite de l'oublier. "

" le dérapage fondamental est là, quand on oublie d'écrire $x = x_\varepsilon$, $y = y_\varepsilon$. "

Certains collègues utilisent une notation de type fonctionnel (question 2):

" précise $x(\varepsilon)$, $y(\varepsilon)$ " et plus loin, " $\exists n_0(x; \varepsilon)$ "

[9] On ne peut évidemment pas en conclure que seuls ces 12 collègues traduisent, en général, cette dépendance par cette notation.

" Il faut garder en mémoire les paramètres dont dépendent les quantités qu'on manipule : c'est en écrivant $h(\varepsilon,x_0)$, $h(\varepsilon)$ qu'on peut comprendre la différence entre continuité simple et continuité uniforme. "

Les réponses recueillies laissent penser que la règle qui consiste à indicer les lettres de variables muettes dans une quantification existentielle lorsque celle-ci est précédée d'une quantification universelle fonctionne comme une *règle de raisonnement* en Analyse, permettant à la fois d'éviter les erreurs et de mettre en évidence le " sens ", ici la " dépendance des variables ". Si on prend au pied de la lettre la notation proposée comme une notation fonctionnelle, alors ceci revient à assumer implicitement l'axiome du choix (sauf cas particuliers où on pourrait effectivement déterminer une telle fonction). D'ailleurs, la démonstration classique de la continuité qui utilise une suite construite en posant " $\varepsilon = 1/n$ " utilise implicitement l'axiome du choix dénombrable. On peut penser cependant que pour certains collègues, cette notation vise avant tout à rappeler par le symbolisme le fait que x_ε dépend de ε, en un sens *vague*.

La mise en relation des erreurs de l'étudiant avec des règles formelles de manipulation des variables et des quantificateurs fait apparaître de très grandes différences entre les différents enseignants. En ce qui concerne les quantificateurs deux collègues parlent d'une *mauvaise gestion des quantificateurs*. tandis que quelques collègues proposent de contrôler ce qui a été démontré en réécrivant formellement la phrase avec les quantificateurs (il s'agit donc ici d'un contrôle de type global sur les écritures symboliques) ; deux collègues quant à eux proscrivent au contraire tout emploi des quantificateurs et recommandent l'usage de la langue courante. En ce qui concerne les variables, à lire les commentaires de la plupart des collègues, il semble que dans la phrase quantifiée, les lettres renvoient implicitement à des objets du domaine considéré ; ceci n'est cependant pas partagé par tous. En effet, quelques (rares) collègues pensent que, comme les lettres qui suivent un quantificateur sont muettes et ne désignent par conséquent aucun objet, les objets que l'on manipule doivent être introduits explicitement au moyen d'*identificateurs* à l'aide de lettres qui les désignent. Cette position est à rapprocher des règles de démonstration naturelle de Copi évoquées plus haut :

- un énoncé universel vrai dans un domaine d'objets donné, de la forme "$\forall x F x$" permet d'affirmer chacune de ses instances ; pour utiliser dans un raisonnement un tel énoncé, on écrira par exemple *soit a un objet du domaine* et on pourra alors utiliser " Fa " comme une proposition affirmée ;

- un énoncé existentiel vrai, dans un domaine d'objets donné, de la forme " ∃xFx " *autorise* à considérer un objet w du domaine vérifiant la propriété correspondant à F ; on écrira par exemple *soit w un objet du domaine tel que Fw* et dans la suite du raisonnement, on utilisera " Fw " comme une proposition affirmée.

Cette exigence d'introduction des identificateurs s'oppose à une pratique largement répandue qui consiste à ne pas distinguer entre variable liée (lettre muette) et constante individuelle d'objets (paramètre) ; le changement de statut logique des lettres dans les démonstrations est en effet le plus souvent passé sous silence[10]. Cette question est en général considérée comme trop difficile pour être abordée. C'est par exemple la position de Glaeser (1973) ; dans cet ouvrage destiné aux futurs enseignants de mathématiques il consacre un chapitre à la logique dans lequel il aborde le calcul des propositions et le calcul des prédicats. Concernant ce dernier, il écrit :

> " Cela (la formalisation de la grammaire du langage des prédicats) nécessite un grand effort d'analyse que nous ne pouvons pas entreprendre dans cette ouvrage ; les règles de substitution sont très subtiles et font intervenir des distinctions entre variables libres et symboles individuels. "

Cette question n'est donc pas traitée dans l'ouvrage. D'une manière générale, cet aspect est peu abordé dans les éléments de logique proposés aux étudiants de premiers cycles universitaires. Notons cependant qu'il faut ici se garder de généraliser ; en effet dans certaines démonstrations, les objets, ou certains objets, sont introduits explicitement et parfois les deux modes d'exposition cohabitent comme nous allons le voir au paragraphe suivant.

c) Aperçus dans un manuel

Nous trouvons dans le cours de Topologie de Choquet (1984, p.49) :

[10] Cf. Arsac et Durand-Guerrier, 1999.

Proposition 13-13. - Dire que E est localement connexe équivaut à dire que pour tout ouvert w de E, les composantes connexes de w sont ouvertes.

Démonstration. - 1° Soit E localement connexe ; soit w un ouvert de E, et soit C une composante connexe de w.

Pour tout x ε C, il existe un voisinage connexe V de x contenu dans w ; on a évidemment V ⊂ C, donc C est un voisinage de x. Comme C est voisinage de chacun de ses points, il est ouvert.

2° Inversement, supposons que toute composante connexe de tout ouvert de E soit ouverte. Pour tout x ∈ E , et pour tout voisinage V de x, la composante connexe C deV qui contient x est ouverte ; donc C est le voisinage de x contenu dans V que nous cherchions.

Dans la première partie de la démonstration, les lettres E, w et C sont introduites comme des constantes d'objets génériques : si on prouve le résultat pour de tels objets, on pourra en déduire le théorème (c'est l'application implicite de G.U.)

La troisième ligne de la démonstration est un énoncé clos de la forme " ∀x∃VFxVCw ".

A la quatrième ligne, les lettres V et x ont changé de statut logique et sont manifestement des lettres de constantes d'objets ; notons que rien, dans la notation, ne vient rappeler que " V dépend de x " ; il faut dire qu'ici, cet *oubli* n'est pas dangereux, ce que l'on peut illustrer à l'aide la preuve à la manière de Quine :

(1) ∀x∃VFxVCw

(2) ∃VFtVCw

(3) FtuCw (u instancie V)

(4) GtC

(5) ∀xGxC

Ceci nous montre pourquoi ce n'est pas *dangereux* : dans la transformation qui permet de passer de (3) à (4), la variable instanciée à partir de l'énoncé existentiel (2) a *disparu,* absorbée dans la définition mathématique correspondante. Par conséquent, il n'y a pas de risque d'erreur dans la restitution des quantificateurs. Cela nous le voyons a posteriori ; celui qui rédige la démonstration le sait a priori. Qu'en est-il de l'étudiant qui étudie le cours ?

Quant à la phrase " C est voisinage de chacun de ses points ", elle joue à la fois le rôle de (4) et de (5) ; dans un mouvement inverse, x passe du statut de lettre de constante d'objet, à celui de variable liée. On retrouve le même phénomène dans la deuxième partie de la démonstration.

On peut comparer cette démonstration avec le début de la démonstration ci-dessous qui se trouve dans le même ouvrage, p.75

"Théorème 18-4. - Toute application continue f d'un espace métrique compact E dans un autre espace métrique F est uniformément continue.

Première démonstration.[11] - Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue on peut, à tout $x \in E$, associer un voisinage ouvert w_x, tel que l'oscillation de f sur w_x soit $\leq \varepsilon$.

Soit p le nombre associé à la famille des w_x d'après le lemme 18-1.

Toute boule B(y,p) de E est contenue dans au moins un w_x ; donc sur cette boule, l'oscillation de f est $\leq \varepsilon$; ceci démontre la continuité uniforme de f.

Comparons les deux phrases suivantes:

Pour tout $x \varepsilon C$, il existe un voisinage connexe V de x contenu dans w

A tout $x \in E$, (on peut) associer un voisinage ouvert w_x, tel que l'oscillation de f sur w_x soit $\leq \varepsilon$.

Elles ont la même structure syntaxique, mais on voit apparaître une différence de traitement concernant la " dépendance " de la deuxième lettre de variable sur la première. Dans le cas de la deuxième démonstration, c'est parce qu'on a besoin de la famille des w_X que l'on marque l'indexation ; en d'autre termes *x va varier pendant le temps du raisonnement*.[12]

Dans la démonstration suivante, tirée du même ouvrage, p. 92, on voit apparaître une " dépendance " qui semble relever plutôt du *principe de précaution* :

Dans ce qui suit on note X un ensemble quelconque, Y et un espace métrique muni d'une distance d, et F(X,Y) l'ensemble des applications de X dans Y. Cet ensemble est muni d'un écart noté également d défini de la manière suivante :

soient f et g deux applications de X dans Y , $d(f,g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$

[11] L'auteur donne deux démonstrations de ce théorème.

[12] Nous allons retrouver ceci plus loin chez Liouville.

Théorème 22-5. - Lorsque l'espace métrique Y est complet, F(X,Y) est aussi complet.

Démonstration - Soit (f_n) une suite de Cauchy de F(X,Y). Pour tout x $\in$ X, l'inégalité

$$d(f_p(x), d(f_q(x)) \leq d(f_p, f_q)$$

montre que la suite ($f_n(x)$) de points de Y est une suite de Cauchy. Comme Y est complet, elle possède une limite que nous noterons f(x).

Or f_n étant une suite de Cauchy, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n(\varepsilon)$ tel que, pour tous p et q $\geq n(\varepsilon)$, et pour tout x $\in$ X, on ait :

$$d(f_p(x),f_q(x)) \leq \varepsilon$$

Si dans cette inégalité on laisse x et p fixes et que $q \to \infty$, $f_q(x)$ tend vers f(x), et on obtient l'inégalité :

$$d(f_p(x),f(x)) \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } p \geq n(\varepsilon)$$

Il résulte de cette inégalité que $d(f_p,f) \leq \varepsilon$, donc la suite f_n converge vers f dans l'espace F(X,Y) muni de l'écart d.

Donc cet espace est bien complet.

Ici, on voit apparaître explicitement une notation de type fonctionnel sous la forme $n(\varepsilon)$; on peut penser qu'ici on veut insister sur le fait que l'entier n introduit ne dépend pas de x, mais seulement de ε. D'autre part, on retrouve les changement subreptices de statut logique pour les lettres x, p et q ; x et p sont *fixés provisoirement dans le temps du raisonnement* .[13] Enfin, le théorème qui permet de justifier la substitution de f à f_q dans l'inégalité n'est pas explicité ; ce qui peut laisser croire qu'une telle substitution va de soi, or précisément, il y a ici des manipulations de lettres qui en d'autres circonstances pourraient être *dangereuses.*

Ces trois démonstrations mettent en évidence la grande variabilité de traitement des écritures quantifiées à l'intérieur d'un même manuel. Dans d'autres démonstrations de l'ouvrage apparaissent plusieurs niveaux d'indices dans des énoncés existentiels. Il n'est pas facile de déterminer ce qui pilote les choix de l'auteur quant aux notations utilisées. On peut légitimement se demander comment un lecteur novice peut faire la différence entre les situations où telle pratique peut conduire à une démonstration erronée, alors qu'elle sera acceptable dans d'autres cas. En tant que chercheur en Didactique des mathématiques, on peut faire l'hypothèse que *la règle de raisonnement* consistant à marquer la dépendance n'a pas un caractère de généralité absolue et est utilisée par l'expert lorsqu'il sait qu'il y a un risque de

[13] On trouve ceci explicité chez Liouville dans le cours de calcul Différentiel de l'Ecole Polytechnique (Editions Ellipses)

" dérapage " ; en d'autres termes, l'expert choisit le niveau de rigueur qu'il s'impose dans un cours ou dans un manuel, non seulement en tenant compte du niveau d'évolution de la théorie qu'il expose, et du public auquel il s'adresse, mais également en s'appuyant sur ses connaissances du domaine, ce dernier point n'étant a priori par partagé par celui qui s'adonne à l'étude.

d) Le vocabulaire utilisé autour de la notion de dépendance des variables

Nous avons relevé ci-dessous le vocabulaire associé à la notion de dépendance dans les différentes réponses des enseignants.

" *Il faut pouvoir prendre* ε *et le faire varier:* " (q_3)[14] versus " *pour* ε,*x fixés* " sur la copie

" *ligne 5 on " voyait " que si on changeait de* ε,*on changeait de* y_ε. " (q_2)

" *si on veut faire tendre* ε *vers 0,* y_ε *n'est pas fixé.* "

" *à la ligne 1, x et y qui dépendent de* ε *ne sont pas indicés par* ε. "

" (...) *elle émousse notre vigilance sur la variabilité de x et de y.* "

" (...) *une famille de suites* $(x_{n\varepsilon})$ *qui accompagne une famille de* (y_ε) "

" *il faudrait montrer qu'étant donné un réel quelconque, indépendant de tout choix antérieur, à partir d'un certain rang la distance à y d'un terme de la suite est inférieur à ce réel.* "

" *Attention, pour chaque* $\varepsilon > 0$ *fixé, x et y dépendent de* ε. " (q_2)

" *ceci n'a été montré que pour " le "* ε *fixé au départ* " (q_2)

" *Attention, x se déplace avec* ε *; si tu fixes x ,* ε *est fixé également .* "

" *x et y sont fonction de* ε *(surtout y)* "

" *dans 5, le y étant fonction de* ε,*on n'a pas :* $(x_n) \to y$ " (q_1)

" *expliquer que y est fonction du choix de* ε. " (q_2)

" *si on se réfère à la ligne 1, pour avoir un x (et un y), il aurait fallu commencer par fixer un* ε. "

" *il faut garder en mémoire les paramètres dont dépendent les quantités qu'on manipule.* "

" *il faut acquérir l'intuition des moments où on piétine et de ceux où on avance réellement quand on cherche un exercice, et se souvenir qu'un raisonnement mathématique est un voyage qui ne peut pas s'achever quand est resté à la case départ* "

" *son x dépend de* ε *; lorsqu'il fixe x, le* ε *est fixé.* "

" *dès que n dépasse le temps* $N(\varepsilon/2)$... "

" *x et y dépendent de* ε *! Aussi son x bouge avec* ε; "

Le vocabulaire utilisé est assez varié et imagé : on fait varier, ou au contraire on fixe ; on change ; il apparaît des termes liés à l'idée de déplacement : on accompagne, on fait un

[14] q_1,q_2 et q_3 désignent respectivement les questions 1, 2 et 3 que nous avons posées aux enseignants.

voyage ; il y a les interventions du temps (du raisonnement) ; la notion de mouvement : tout bouge. Comme on pouvait s'y attendre apparaissent donc des images, des métaphores, des analogies. Pour certains collègues, cela semble remplacer le contrôle par les outils logiques ou symboliques qui sont peu mobilisés. D'autres collègues font référence explicitement aux deux modes de contrôles.

III. Un exemple historique

Dans ce qui suit nous analysons une démonstration de Liouville qui se trouve dans l'ouvrage : *Calcul différentiel. Cours de l'Ecole Polytechnique 1847-1848* (éditions Ellipses). L'intérêt pour notre travail est qu'on y retrouve une erreur qui nous semble être du même type que celle qui se trouve dans la démonstration de l'étudiant.

1. Présentation de la démonstration.

Liouville se propose de démontrer d'une part que lorsque la dérivée d'une fonction est strictement positive sur un intervalle, la fonction est strictement croissante sur cet intervalle ; et d'autre part que lorsque la dérivée d'une fonction est identiquement nulle sur un intervalle, la fonction est constante sur cet intervalle. Les deux démonstrations comportent des déductions non justifiées. Nous présenterons ici seulement la seconde pour sa similitude avec celle de l'étudiant.

Liouville écrit (*nous avons ajouté la numérotation des phrases pour faciliter notre exposé*) :

Soit $\mathbf{f}(x)$ une fonction supposée réelle : on a

$\mathbf{f}'(x) = \lim (f(x+h) - f(x))/h$. Par conséquent, $f'(x) = (f(x+h) - f(x))/h + \varepsilon$

$\boldsymbol{\varepsilon}$ étant une quantité qui tend vers 0 quand h tend lui-même vers 0. Donc

0. $\mathbf{f}(x+h) - \mathbf{f}(x) = h\ \{\mathbf{f}'(x) + \boldsymbol{\varepsilon}\}$

[démonstration dans le cas $f'(x) > 0$, non reproduite ici]

<u>Quand la dérivée est constamment nulle pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b, la fonction est constante pour toutes ces valeurs.</u>

1. soient x et x_1 deux valeurs quelconques de la variable comprises entre a et b.

2. Je dis que $f(x) = \mathbf{f}(x_1)$.

3.	Je considère m quantités comprises entre x et x_1, en posant $mh = x_1 - x$, ces quantités sont
4.	$x+h, x+2h, x+3h, x+(m-1)h, x_1$.
5.	en vertu de l'équation générale
6.	$\mathbf{f(x+h) - f(x) = h \{f'(x) + \varepsilon\}}$
7.	on a, puisque f'(x) est constamment nulle,
8.	$f(x+h) - f(x) = h\varepsilon_1$,
.	$f(x+2h) - f(x+h) = h\varepsilon_2$,
.	$f(x+3h) - f(x+2h) = h\varepsilon_3$,
	....
	$f(x_1) - f(x + (m-1)h) = h\varepsilon_m$,
9.	En ajoutant membre à membre, on a :
10.	$f(x_1) - f(x) = h(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + ... + \varepsilon_m)$
11.	Soit ε la plus grande de toutes les quantités représentées par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ etc. On a :
12.	$f(x_1) - f(x) < h.m\varepsilon$ ou $f(x_1) - f(x) < mh.\ \varepsilon$
13.	Mais, $mh = x_1 - x$. Donc
14.	$f(x_1) - f(x) < (x_1 - x)\ \varepsilon$.
15.	Le premier membre est une quantité constante qui ne varie pas quand m augmente ; il en est de même de $x_1 - x$
16.	**mais ε a pour limite 0 quand m croît indéfiniment.**
17.	Il suit de là que le premier membre de l'inégalité est nécessairement nul puisqu'il est constamment moindre qu'une quantité qui s'approche indéfiniment de zéro.
18.	Donc $f(x_1) = f(x)$. Ce qu'il fallait démontrer.

2. Eléments d'analyse anachronique

L'analyse qui suit est anachronique en ce sens que nous critiquons le texte de Liouville comme s'il s'agissait d'un texte contemporain, exactement de la même manière que nous l'avons fait pour la démonstration fausse de l'étudiant qui a servi à notre enquête. A la ligne **16** se trouve une affirmation non justifiée, à savoir :

ε a pour limite 0 quand m croît indéfiniment

Avec notre point de vue moderne sur le statut des lettres :

A la ligne **0**, h et x sont des lettres de variables ; **ε** est une fonction de deux variables, et pour chaque valeur de x, la fonction partielle de la variable h tend vers 0 quand h tend vers 0. A la ligne **1**, x_1 et x sont introduits comme éléments génériques. Ce sont des noms d'objets. Ce principe de démonstration correspond à l'application de G.U. A la ligne **3**, m n'est pas introduit explicitement comme élément générique, mais il va fonctionner comme un élément fixe jusqu'à la ligne **14**. Moyennant quoi, h est également fixé. Si nous tenons compte de ces éléments, la ligne **6**, malgré les apparences, n'est pas identique à la ligne **0** car dans l'égalité, x et h sont des quantités fixées depuis la ligne **1** (elles peuvent fonctionner comme valeurs assignées à une lettre de variable) ; par conséquent, il en est de même de ε, qui est renommé en ε_1 à la ligne **8**. On peut penser cependant que dans l'esprit de l'auteur, ce qu'il veut, c'est réécrire l'équation générale. Pour cela, si l'on voulait respecter les règles du calcul des prédicats, il faudrait changer les deux lettres de variable. On peut écrire par exemple :

6'. $\mathbf{f}(y+u) - \mathbf{f}(y) = u\,\{f'(y) + \boldsymbol{\varepsilon}\}$ où **ε** tend vers 0 quand u tend vers 0.

La ligne **8** est alors obtenue en affectant à y successivement les valeurs x, x+h, x+2h, x +3h,...x+(k-1)h et à u la valeur h. On obtient ainsi les quantités constantes ε_1, ε_2, ε_3...

Jusqu'à la ligne **14**, on effectue un certain nombre de manipulations sur des quantités constantes. On peut remarquer qu'à la ligne **10** déjà, on peut faire " disparaître " la lettre h en écrivant :

10'. $f(x_1) - f(x) = (x_1 - x)\ (\varepsilon_1+ \varepsilon_2+ \varepsilon_3+......+\varepsilon_m,) / m$.

Comme on peut remplacer h partout par $(x_1-x)/m$, l'égalité **10'.** peut effectivement être considérée comme ne faisant pas du tout intervenir h. Cette écriture peut faire penser à la moyenne de Césaro. Cependant, il faut tenir compte du fait suivant : pour chaque valeur de m, on définit une suite ω de la manière suivante :

$\omega_1=\varepsilon_1,\omega_2=\varepsilon_2,\omega_3=\varepsilon_3,......,\omega_m=\varepsilon_m$, et $\omega_k=0$ pour tout k supérieur strictement à m.

On a ainsi affaire à une famille de suites. Liouville introduit le maximum des quantités ε_k pour aboutir à la majoration ligne **15.** Il utilise l'énoncé suivant :

Il existe un unique entier j tel que pour tout k compris entre 1 et m, $\varepsilon_k \leq \varepsilon_j$. *Il note* ε *cet élément.*

Cet entier j dépend de m (il s'agit d'une instantiation existentielle suivant une instantiation universelle) ; en outre chacun des éléments de la suite w dépend lui-même de m. A la ligne **15**, m n'est plus fixé (ce n'est plus un élément générique) ; il devient une variable. Par suite h devient une fonction de m (une suite) ; il en est de même pour **ε**. D'ailleurs, **ε** a clairement le statut de suite à la ligne **16**.

Lorsque Liouville rédige son texte, le calcul de prédicats n'a pas encore été développé et les travaux de Bolzano ne sont pas disponibles. Cependant, il accorde une place importante dans son cours à la notion de variable. Il précise en ces termes au début de son cours (page 1) la notion de variable qu'il utilise :

> " On appelle quantité constante une quantité qui ne varie pas pendant le cours d'un calcul[15] ; on appelle quantité variable, une quantité qui prend différentes valeurs dans le même calcul [...]
> On appelle variable indépendante une quantité à laquelle on donne des valeurs arbitraires depuis une quantité a jusqu'à une quantité b ".

Cette notion s'oppose à celle de quantité fonction de x, x variable indépendante. La définition de la fonction fait appel à la notion de dépendance : la quantité varie quand x varie. On note que l'objet premier ici est la quantité et que *fonction, constante, indépendante*, sont des adjectifs, des qualités de la quantité variable. La notion de fonction de fonction est introduite de même, pour une quantité qui dépend d'une variable qui n'est pas elle-même indépendante, puis celle de fonction de plusieurs variables et Liouville écrit page 10 : " Tout le calcul différentiel se conçoit sur la base de ces distinctions : variables indépendantes et dépendantes. "

Sous ce point de vue, x et x_1 sont des quantités constantes ; ceci est confirmé ligne **15.** Toutefois, pour passer de la ligne **7** à la ligne **8**, la quantité x fonctionne comme quantité variable puisqu'elle prend des valeurs successives. En ce qui concerne m, elle semble fonctionner comme quantité constante jusqu'à la ligne **14**. A partir de la ligne **15**, elle fonctionnerait comme variable indépendante (si on fait une extension de cette notion pour les entiers naturels). Ce changement de statut pour m affecte en ricochet le statut de h, puisque h est une quantité fonction de m et également celui de ε ; en effet la quantité ε est fonction de h et de m , mais comme h est fonction de m, ε est fonction de fonction de m. Notons que pour que l'on puisse considérer ε comme fonction de deux variables, il faudrait, du point de vue de Liouville, que h soit une variable indépendante, ce qui n'est pas le cas. En outre, même si l'on considère que tout au long du calcul m est une quantité variable, h est utilisée comme variable indépendante ligne **6** ; il s'ensuit que son statut à la ligne **7** est instable ; elle intervient comme variable dépendante pour les quantités x+ h, x +2h etc. ; est-elle dépendante ou indépendante quand elle représente l'accroissement ?

---

[15] C'est nous qui soulignons.

Ce qui précède montre que dans cette démonstration une même lettre peut désigner, suivant les moments du calcul, une quantité constante et une quantité variable ; une variable indépendante et une variable dépendante ; c'est le reproche qui est fait majoritairement par les enseignants à l'étudiant dont nous avons analysé la démonstration.

Comme l'affirmation **16** n'est pas motivée, on ne sait pas quel est le raisonnement de Liouville. Sans doute considère-t-il que la déduction est évidente, puisqu'il ne la justifie pas. Peut-être applique-t-il la composition des limites en considérant que la suite ε est de la forme θ o h, avec θ fonction de la variable h ayant pour limite 0 en 0 et h suite de limite nulle. Or, en fait, la fonction θ dépend de m ; c'est pourquoi, dès que l'on fait *varier* m, " *tout bouge* ". Nous proposons ci-dessous une " reconstruction " de sa démonstration

L'idée de Liouville est de décomposer l'accroissement $f(x_1)$ - f(x) en somme des accroissements f(x+kh) -f(x+(k-1)h) pour $1 \leq k \leq m$. En ajoutant les valeurs absolues qu'il néglige, on obtient :

$$|f(x_1)-f(x)| \leq \sum_{k=1}^{m} |f(x+kh)-f(x+(k-1)h)|$$

Puis Liouville écrit :

$$f(x+kh)-f(x+(k-1)h) = \frac{f(x+kh)-f(x+(k-1)h)}{h}.h = \varepsilon_k h,$$

où
$$\varepsilon_k = \frac{f(x+kh)-f(x+(k-1)h)}{h}.$$

D'où
$$|f(x_1)-f(x)| \leq h\left(\sum_{1}^{m} |\varepsilon_k|\right).$$

En raisonnant grossièrement, on peut dire que chaque ε_k tend vers 0 quand h tend vers 0, c'est à dire quand m tend vers $+\infty$. Mais comme le nombre de termes de la somme $\sum_{1}^{m} |\varepsilon_k|$ est égal à m, donc tend vers l'infini, Liouville sait, la lecture de son cours le montre, qu'on ne peut pas en déduire que cette somme tend vers 0. C'est de là que vient sans doute l'idée de poser :

$$\varepsilon = Max\{|\varepsilon_k| / k = 1, 2, \ldots n\}$$

D'où $$|f(x_1) - f(x)| \leq m\varepsilon h = \varepsilon(x_1 - x)$$

Puis Liouville affirme que ε tend vers 0, et c'est là la clé du résultat.

Or, de notre point de vue, ceci est loin d'être évident. Revenons en effet à la définition de la limite. Il s'agit de montrer que pour tout $\alpha > 0$, on peut trouver $M \in N$ tel que pour tout m>M on ait $\varepsilon \leq \alpha$. Ici la seule variable est bien m, car ε_k, une fois fixés f,x, x_1, ne dépend que de $h = \frac{x_1 - x}{m}$, donc de m, et la définition même de ε introduit à nouveau une dépendance de m.

L'inégalité $\varepsilon \leq \alpha$ est équivalente, par définition de ε, à la conjonction des inégalités $|\varepsilon_k| \leq \alpha$ (k = 1, 2,..n). Or ε_k est le taux d'accroissement de la fonction f au point $x + (k-1)h = x + (k-1)\frac{x_1 - x}{m} = x_{km}$, cette dernière notation mettant en évidence la dépendance par rapport aux deux variables k et m. Comme $f'(x_{km}) = 0$, il existe η_k (que l'on pourrait noter η_{km}) tel que :

$$|u| \leq \eta_k \text{ implique } \frac{|f(x_{km} + u) - f(x_{km})|}{u} \leq \alpha$$

Finalement, pour que $|\varepsilon| \leq \alpha$, il suffit que l'on ait $|\varepsilon_k| \leq \alpha$, c'est-à-dire $h \leq \eta_k$ pour k variant de 1 à m. Ceci équivaut à $h \leq Min\{\eta_k / 1 \leq k \leq m\}$, ou encore à

$$\frac{x_1 - x}{m} \leq Min\{\eta_k / 1 \leq k \leq m\}.$$

Mais comme le deuxième membre est une fonction de m, dont a priori on ne sait rien, on ne voit pas comment, logiquement, affirmer cette inégalité. Il faut en conclure que l'évidence implicitement supposée par Liouville ne résulte pas d'une déduction logique simple reposant sur la définition de la dérivée.

3. Commentaires

Notons tout d'abord que ce type d'exercice est extrêmement périlleux et qu'il est difficile de se départir de ses outils d'analyse habituels et précisons que nous ne prétendons nullement faire une analyse historique de ce texte. Notre perspective est clairement didactique ; il ne faut pas oublier que ce texte est un cours, certes destiné à des étudiants de haut niveau, mais c'est néanmoins un texte à caractère didactique. Précisons également que nous ne prétendons pas que notre analyse soit totalement aboutie. Ces précautions prises, nous pouvons avancer quelques commentaires. La lecture de la démonstration de Liouville fait apparaître une affirmation non motivée (comme allant de soit) à la ligne **16**. L'analyse logique (modeste) de la démonstration en termes modernes permet de repérer un changement de statut pour certaines lettres. S'il s'agissait du texte d'un étudiant contemporain, on pourrait dire qu'il s'agit d'une erreur du même type que celle relevée dans le texte de l'étudiant analysé plus haut. Concernant Liouville, c'est la connaissance du contenu mathématique qui est en jeu ; il sait que le résultat est juste ; d'une certaine manière son intuition ne le trompe pas. On pourrait dire à la manière de Poincaré qu'il avait bien senti ce qui se passait. On peut d'un autre point de vue rattacher ceci au projet de Frege, à savoir créer un système permettant d'éliminer tout recours à l'évidence. Ici, il n'y a pas de recours explicite à l'évidence, mais l'affirmation de la ligne **16** y fait implicitement appel.

IV. CONCLUSION ET PERSPECTIVES DE RECHERCHE

1. Conclusion

En l'état actuel de notre travail, les conclusions sont nécessairement modestes. Nous pouvons toutefois dégager de notre enquête deux phénomènes de nature opposée :

- un invariant apparaît chez les enseignants que nous avons interrogés : la nécessité de bien noter dans quel cas une variable (ici x ou y) dépend d'une autre variable (ici ε). Ainsi un contrôle sémantique du raisonnement est nécessaire ; en outre cette insistance sur un problème relatif à la manipulation des variables souligne le rôle de cette notion, et donc la pertinence de la référence au calcul des prédicats. Paradoxalement, la notion de variable ne fait plus l'objet d'un enseignement, alors que nous avons vu chez Liouville des développements explicites sur la définition d'une variable et ses différents statuts considérés même comme le fondement de la compréhension du calcul infinitésimal.
- en revanche, une grande variabilité apparaît chez les enseignants quant à la nécessité de contrôles de type syntaxique sur les démonstrations. Il en est de même de l'emploi des quantificateurs qui sont interdits par une minorité et employés par une majorité mais d'une façon qui peut être fort laxiste ou au contraire très rigoureuse.

En prenant en compte non plus seulement notre enquête mais l'ensemble des exemples que nous avons abordés, il apparaît qu'il existe bien une pratique de la démonstration en analyse, intermédiaire, des points de vue langagiers et cognitifs, entre la simple logique sous-jacente au langage courant et une démonstration formalisée. Cette pratique nous apparaît pour le moment bien difficile à définir exhaustivement, comme on peut le voir en revenant sur l'usage que nous avons rencontré de l'indexation d'une variable par une autre dont elle dépend. A propos de cet usage, on peut relever :

- que dans le domaine des démonstrations en (ε,η) (une " sphère de pratique " dirait Bourdieu, 1980) un assez grand nombre de collègues *canonisent* cette notation. Mais son apparition chez Choquet doit être expliquée : peut-on considérer qu'elle intervient dans des cas qui sont simplement des formes plus abstraites des (ε,η) ?

- que par contre dans d'autres domaines, elle n'apparaît pas. Il semble peu vraisemblable par exemple, dans le cas du théorème des accroissements finis, d'écrire c_f, voire c_{fab}, pour indiquer toutes les variables dont dépend c ! D'ailleurs l'énoncé lui-même du théorème porte sur des éléments génériques ; ce qui dispense de faire apparaître la quantification universelle. On peut se demander si ce n'est pas Liouville qui a raison, en ce sens que lorsque les variables sont destinées à garder la même valeur (où la même référence) le temps d'un calcul, ou plus largement le temps d'un raisonnement, alors on les considère comme des constantes, jouant d'ailleurs souvent le rôle d'exemple générique. Effectivement, dans la plupart des applications du théorème des accroissements finis, f, a et b sont fixés et de ce point de vue, la démonstration du théorème généralisé recèle un " piège ". Il ne semble pas certain toutefois que cette intervention du temps du raisonnement permette d'expliquer toutes les apparitions et absences de l'indexation des variables, y compris dans une même démonstration comme on l'a vu chez Choquet ; les connaissances mathématiques a priori de celui qui rédige la démonstration semble en effet jouer un rôle non négligeable. Ceci nous semble être au cœur du questionnement didactique qui motive notre recherche : comment un étudiant, novice du domaine mathématique abordé, peut-il se frayer un chemin dans ces pratiques non stabilisées de la démonstration en analyse.

2. Propositions de recherche

Nous allons, pour terminer, indiquer un programme de continuation de ce travail sur l'articulation entre *logique, raisonnement*, *rigueur et validité*.

1) La poursuite de l'étude de démonstrations anciennes (antérieures à l'élaboration du calcul des prédicats) en s'intéressant en particulier au statut des lettres utilisées, au type des déductions faites et aux outils de contrôles présents dans la démonstration.

2) La poursuite d'étude de démonstrations issues des manuels avec la même perspective.

3) La mise en perspective avec les travaux balisant ce champ en Didactique des Mathématiques et en Epistémologie

4) L'analyse du discours de l'enseignant dans sa classe

5) L'analyse de démonstrations produites par des étudiants

A terme, le but est de faire des propositions structurées d'enseignement pour les premiers cycles universitaires scientifiques et pour la formation des professeurs de mathématiques permettant en particulier de répondre à la question posée en introduction, à savoir :
de quels outils un étudiant en mathématiques doit-il disposer pour satisfaire aux exigences de rigueur qui permettent en principe de se prémunir contre les preuve non valides ?

Notons bien que ces outils devant être opératoires dans tous les domaines mathématiques rencontrés, il est bien clair qu'un enseignement de logique stricto-sensu ne saurait répondre à cette exigence. A contrario, notre hypothèse de travail est que cet enseignement doit s'appuyer sur la logique des prédicats.

BIBLIOGRAPHIE

Arsac G. & Durand-Guerrier,V. (1999), Démonstration et quantification existentielle in *Actes de la X° Ecole d'été de Didactique des Mathématiques*. IUFM Académie de Caen.

Bourdieu P. (1980) *Le sens pratique*. Editions de Minuit.

Choquet G. (1984), *Cours de Topologie*. Masson.

Copi I.(1954) Symbolic Logic. NewYork.

Durand-Guerrier V. (1999), L'élève, le professeur et le labyrinthe in *Petit X* n°50. IREM de Grenoble.

Duval R. & Egret M.A. (1993), Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif in *Repère n°12*. Topiques Editions.

Duval R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine.* Peter lang

Gentzen G.(1935), Untersuchungen über das logische Schliessen in *Math. Zeitschr.*, 39.Traduction française : *Recherche sur la déduction logique.*. PUF 1955.

Glaeser G. (1973), *Mathématiques pour l'élève professeur.* Hermann

Gochet P.& Gribomont P. (1990), *Logique. Méthodes pour l'informatique fonda-mentale.*. Hermès

Granger G.G. (1994), *Formes, opérations, objets.* Vrin.

Hersh R. (1997), *What is mathematics, really.* Oxford.

Houdebine J. (1998) *La démonstration. Ecrire des démonstrations au Collège et au Lycée.* Hachette Education.

Liouville J.,*Calcul différentiel. Cours de l'Ecole Polytechnique 1847-1848.* Ellipses

Quine W.V.O. (1950), *Methods of logic.* Holy, Rinehart & Winston. Traduction française : *Méthodes de logique.* Armand Colin. 1972.

Pratiques de l'enseignant de mathématiques :
Où en est-on ?

POURQUOI UNE ETUDE DE PRATIQUE EN CLASSE ? COMMENT LA MENER ? QUE PEUT-ON ATTENDRE DES CHOIX FAITS ? QUELS MANQUES ?

Aline Robert[1]
DIDIREM, Université Paris 7

I. INTRODUCTION

Cet exposé aurait pu être fait dans le thème 1 de l'école d'été de didactique des mathématiques d'Août 1999 : on peut le lire comme un complément de tous ces travaux.

Dans sa conférence de la dernière école d'été (thème 4 Août 1999), M.J. Perrin évoquait 4 entrées principales dans l'étude du didactique, dont la dernière, relativement « globale », empirique, « consiste à découper la réalité observée à partir de questions posées a priori ». Cette entrée, poursuit-elle, conduit « à construire des catégories permettant de repérer des régularités à partir de l' observation de la contingence, en s'inspirant éventuellement d'autres disciplines »... « Les questions de méthodologie prennent ici beaucoup d'importance », conclut-elle. Les autres entrées sont l'entrée par le savoir et les situations qui mettent en jeu ce savoir, l'entrée par l'étude des institutions où vivent ces savoirs, et l'entrée par l'étude de l'élève, de son développement, de ses conceptions...

La démarche dont s'inspirent les recherches présentées ce matin relève bien, me semble-t-il, de la description de la première entrée citée ici : il s'agit d'une démarche se réclamant du didactique dans la mesure où l'entrée dans les questions liées à l'enseignement des mathématiques et à leur apprentissage se fait par les contenus, mais qui part de problèmes, même s'ils ne sont pas posés pour être abordés directement dans un cadre habituel existant (en physique on dirait mal posé), exprimés de manière trop naïve par exemple... Autrement dit il s'agit de mettre au point dans chaque recherche une problématique suffisamment proche des problèmes posés, mais inscrite (inscriptible) dans un ou plusieurs cadres théoriques (si on peut établir une certaine légitimité de ce mixage), et de trouver une méthodologie adaptée. Ce n'est pas toujours possible !

Du coup, je vais suivre pour cet exposé introductif le cheminement un peu tortueux entre tous les problèmes abordés, qui a conduit aux recherches actuelles, dont celles qui vont être

[1] robert@math.uvsq.fr

présentées sont deux exemples très emblématiques. Ce sont ces questionnements qui organiseront le discours, sortes de balises tout au long de l'histoire que je vais raconter, à un niveau de généralité qui déborde ce qu'on a l'habitude d'appeler recherche, mais cela sera compensé par les deux exposés suivants, mieux cadrés. Il ne s'agit pas de prendre le point de vue du formateur, ou d'être prescriptif, mais, a contrario, de réfléchir en amont de recherches précises ou de cadres théoriques définis, de rappeler le paysage, dont nous pensons qu'il compte. J'essaierai bien sûr tout au long de relier notre point de vue aux autres, sans faire d'analyse systématique ni de travail bibliographique exhaustif (cf. bibliographie). Globalement il m'apparaît d'ailleurs une convergence certaine, par delà les mots et les approches.

Signalons que le vocabulaire utilisé peut être à revoir, le mot « analyse de pratiques » est sans connotation (il faudrait dire étude), le mot professeur peut m'échapper (Chevallard a expliqué pourquoi il préfère « enseignant », mais ses raisons ne s'appliquent là où je me place), etc.

Considérons trois parties :

- la préhistoire : premiers problèmes et nos premiers travaux sur les enseignants de mathématiques et les formations à l'enseignement,
- recherches de cadrages théoriques pour analyser les formations,
- retour aux analyses de pratiques d'enseignants y compris dans les recherches sur la formation (problématiques, méthodologies, premiers exemples).

Et une conclusion : des premiers problèmes à la question de la résistance des enseignants de mathématiques à la didactique, place de ces travaux, perspectives de recherches sur les pratiques et les formations...

II. PREHISTOIRE DES RECHERCHES PRESENTEES ICI : PREMIERS PROBLEMES, NOS PREMIERS TRAVAUX SUR L'ENSEIGNANT ET LES FORMATIONS A L'ENSEIGNEMENT, DE LA FIN DES ANNEES 80 AU MILIEU DES ANNEES 90, PREMIER BILAN.

1. Première période

Aux origines de ces premiers travaux qui abordent directement des questions liées à l'enseignant, on trouve trois préoccupations, la difficulté de transmission d'ingénieries didactiques, le rôle (supposé) sur les apprentissages du méta dans le discours des enseignants de lycée, avec en toile de fond les problèmes spécifiques d'enseignement en classe difficile (qui ont monté au fur et à mesure de ces années là, et que je n'aborderai que plus loin) et des problèmes de contenus et de formes de formations professionnelles initiales des enseignants (en mathématiques). Les deux premières sont internes à la didactique, le problème des classes difficiles et la troisième préoccupation sont portés par une très forte demande externe (formateurs, institution), liée à une difficulté explicite exprimée par les formés, qui peut se résumer en une grande tension entre les formations dites théoriques et les pratiques en classe.

Les premiers travaux sur l'enseignant

Ce sont les travaux que nous avons menés avec J.Robinet dans la fin des années 80 concernaient les représentations métacognitives des enseignants et venaient en particulier du constat de notre difficulté à transmettre des séquences didactiques.

Dans beaucoup de travaux, on avait constaté en effet des décalages entre le travail réel de l'enseignant en classe et le travail souhaité (par le chercheur notamment). A ce moment là, nous avions tendance à mettre assez systématiquement ces décalages entre ingénieries et réalisations du côté des représentations (métacognitives, sur les mathématiques leur enseignement, leur apprentissage,) des enseignants : schématiquement nous disions que les professeurs ne mettent pas en œuvre ce qui est prescrit parce qu'ils n'adhèrent pas à l'esprit du projet proposé, qu'ils l'appliquent à la lettre mais dans leur optique de l'apprentissage des mathématiques, différente de celle des concepteurs du projet. D'où des recherches sur ces représentations, pour les préciser.

Ces recherches ont abouti à souligner les diversités de représentations. Par exemple Bonnot Marilier, (94), a montré que même pour des enseignants ayant tous choisi une pratique très discriminante en classe (le travail en petits groupes – initiales : TPG) les représentations divergent, bien que les enseignants n'ayant pas fait le choix du TPG expriment des représentations encore plus éloignées des précédentes que celles-ci entre elles.

Le lien représentations métacognitives / pratiques effectives s'est ainsi avéré très complexe.

Nous avons de même constaté depuis que certains discours (notamment de PE) pouvaient faire croire à des représentations conformes à celles des formateurs, alors même que les pratiques correspondantes en classe étaient tout autres.

Nous avons alors conçu le soupçon qu'il pouvait y avoir des différences entre les représentations (exprimées) telles que nous les avons recueillies et les pratiques réelles, et que du coup les changements de discours, qui peuvent être appris, n'étaient pas suffisants pour garantir des changements de pratiques, voire réciproquement (sans que nous puissions trouver d'enseignants ayant changé de pratiques).

Nous avons retenu qu'il y a là un incontournable pour comprendre ce qui se joue, mais sur lequel nous n'avions pas encore de prise.

Ceci dit, nos méthodologies étaient « directes », travail sur questionnaires, entretiens, littérature professionnelle, depuis des méthodes indirectes, prenant plus en compte les pratiques (discussion sur des textes d'énoncés à proposer aux élèves par exemple) ont été testées avec de meilleurs résultats.

Le cadre des représentations sociales (Jodelet 1989, Abric 1988) est peut-être finalement moins adapté à nos recherches actuelles que celui des habitus, qui sépare moins pratiques et conceptions (Bourdieu 1972).

De fait, aujourd'hui on sait bien que les difficultés pour les enseignants de mettre en œuvre telle ou telle séquence didactique peuvent tenir à d'autres facteurs que des différences de représentation :

- ce peut être une classe qui rend impossible l'adaptation d'un scénario (Perrin 1997),
- ce peuvent être des notions qui ne se prêtent pas à un travail préalable sur un problème (Dorier 1997).

On va ajouter plus loin d'autres raisons encore qui tiennent peut-être à l'exercice même du métier d'enseignant.

2. Deuxième période (début des années 90)

Dans le même temps, d'autres recherches (Chiocca 1995, Josse et Robert 1993) essayaient de percer **le secret des discours des enseignants en classe**, notamment en ce qui concerne la qualité des commentaires « méta » qu'ils comportent (on parlait alors de discours d'accompagnement et de discours de réflexion). D'une certaine manière les travaux ultérieurs de Mopondi sur les explications avaient la même motivation, dans un autre cadre.

Nous avions l'hypothèse (trop naïve sous cette forme) que c'était, au lycée, par delà la qualité des scénarios, une variable peut-être discriminante sur les apprentissages des élèves, et qui n'était pas précisée dans les ingénieries (implicitement sollicitée, dans les institutionnalisations notamment). Il s'est avéré là encore effectivement de grandes diversités, notamment en ce qui concerne la part de structuration explicite contenue dans les discours (annonces de ce qui va être fait, étapes explicitées dans les démonstrations ou dans les cours, bilans), ou la qualité et la quantité des argumentations et des ouvertures à des réflexions.

Cette variabilité se constate à la fois pour un même enseignant, dans une même classe, sur un même contenu, selon les moments, et entre enseignants (la thèse de C.Hache va encore préciser et nuancer ce dernier résultat : les enseignants ne font pas tous tout).

Une seule régularité, largement confirmée par tous les travaux ultérieurs : les élèves ont peu de responsabilité scientifique dans le déroulement de la classe, ils ont peu d'accès au générique, au général, cette responsabilité est réservée aux seuls enseignants. C. Chiocca concluait notamment à l'époque qu'il y avait sans doute une grande part d'improvisation dans certains commentaires enseignants, peut-être faute de suffisamment de travail préalable sur ces discours (y compris de la part des didacticiens).

Cependant nous n'avons pas mis en relation ces diversités et les apprentissages des élèves, laissant en suspens nos interrogations. D'autres travaux sur les apprentissages dans l'enseignement supérieur essaient d'évaluer autrement ces apports du « méta » (notamment dans le groupe enseignement supérieur, C. Castela) ...

3. Troisième période

Enfin nous étions confrontées à des problèmes en lien avec la **formation professionnelle initiale en mathématiques des instituteurs (Professeurs d'école, initiales PE),** puis depuis 1991 des professeurs de lycée et collège (initiales PLC).

a) Côté Professeurs d'école

Une des questions qui s'est posée était celle de l'enseignement de la didactique en formation initiale des PE (quoi enseigner ?) : on en était arrivé à penser que c'était un bon moyen pour faire faire des math aux étudiants candidats ! (années 90). Autre question importante : faut-il transposer à l'enseignement de ce mélange mathématique/didactique... la didactique (comment enseigner) ?

La thèse de Pezard (Pezard 1985) sur l'enseignement de la proportionnalité aux futurs instituteurs, avait testé la première hypothèse (Douady et Robert 1991) de la stratégie de « double institutionnalisation », stratégie de transposition avant la lettre.

Les thèses de Kuzniak (1994), Houdement (1995), Peltier (1994, 1995) ont permis de préciser plus systématiquement des dispositifs dans les formations existantes - différentes stratégies de formation (homologie, transposition notamment), selon le type d'engagement des formés dans la formation, différents choix de formateurs (avec les variables correspondantes, en termes de documents, de connaissances des formés, etc.), et ont montré de quoi étaient faites les épreuves aux concours de recrutement au professorat des écoles (CAPE). La dernière a aussi levé un début de voile sur l'effet des formations PE : on a pu voir que le pari de la formation n'était pas du tout gagné pour un certain nombre de PE !

b) Création des IUFM

Dans le même temps les instituts universitaires de formation des maîtres (initiales IUFM) apparurent. Alors, ce qui était réservé à la formation des instituteurs puis des PE s'est un peu étendu à celle des PLC (notamment en termes de questionnements, élargis aux universitaires). J'ai commencé à étudier les formations PLC2 (deuxième année d'IUFM, stagiaires reçus au concours de recrutement - Capes théorique - et enseignant dans une seule classe, en responsabilité), du point de vue des étudiants (cf. le texte « comment abreuver qui n'a pas soif », Robert (1995)) et de leurs formateurs (analyses des formations, et des formateurs). J'ai utilisé des méthodologies élémentaires, questionnaires et entretiens proposés à deux moments de l'année.

Les principaux résultats sont de deux types :

i) *Premier type de résultat : le passage étudiant / enseignant*

Ce passage s'est avéré un passage très difficile à de multiples égards, les travaux de Blanchard Laville et Nadot sur les PLC2 le montrent excellemment bien (cf. l'adolescence de la profession). Il y a d'autres travaux depuis en mathématiques sur des contenus (Bronner 1999, Lenfant 1999), ou sur la transition en général (professionnalisation, socialisation, ou transformation ?). C'est ce premier travail qui nous a amenée à l'idée d'une prise en compte explicite du métier dans nos analyses, suite à un élargissement à tous les enseignants de ce que nous avions remarqué pour les enseignants débutants. En effet ce n'est pas le passage qui nous intéresse ici, mais bien le statut d'enseignant (par rapport à celui d'étudiant).

Nous avons résumé les différences que nous avons mises en relief et retenues dans cette optique selon quatre axes.

* *Un changement dans le rapport aux mathématiques à enseigner*

La fréquentation des mathématiques n'est pas la même : pour les étudiants, il s'agit de résoudre des exercices et d'apprendre certaines connaissances, bien délimitées, en mettant en jeu une dialectique classique décontextualisation / contextualisation. Les preuves par exemple sont souvent des applications de théorèmes généraux (rarement génériques, ou générales).

Pour les enseignants en revanche, il s'agit moins de chercher à résoudre des exercices nouveaux (les exercices difficiles sont même éliminés) que d'élaborer le texte (cohérent) du savoir[2] à transmettre. Et cela est relativement nouveau. Il faut donc, au moins pour enseigner pour la première fois un contenu donné, trouver diverses sources (manuels, vieux cours, etc.),

[2] L'expression "texte du savoir" ne fait pas référence au seul texte écrit à la fin par les élèves ou l'enseignant mais à l'ensemble du savoir à enseigner.

à comparer le cas échéant, (re)comprendre à la fois les démonstrations, y compris décontextualisées, et ce qui est en jeu plus globalement. Puis il faut faire des choix d'organisation, d'exercices[3] et d'éléments de cours. Mais dans le même temps il faut élaborer un scénario complet, accroché à ce texte du savoir. Et il faut respecter le programme annuel, qui impose un certain rythme. L'enseignant gère ainsi une double globalité, pour chaque notion (cours, exo, répartition des rôles), pour traiter le programme. Certes, cela concerne des mathématiques en principe connues, mais il peut y avoir une actualisation, voire un approfondissement des connaissances, toutefois sur un domaine restreint par rapport aux connaissances universitaires.

* *L'introduction d'une dimension sociale et du « partage » avec les élèves (un changement dans les activités mathématiques).*

Il s'introduit une double dimension sociale essentielle dans les pratiques enseignantes, que ce soit au niveau de la pratique mathématique effective en classe, qu'il s'agit de « partager » avec les élèves, ou de l'insertion dans la vie sociale du lycée et dans le monde salarié. Partager mais de manière dissymétrique, diriger les activités, en étant regardé et écouté presque tout le temps, en étant aussi le recours des élèves face aux mathématiques.

La prise en compte des élèves, que ce soit par anticipation, au moment des préparations, ou réellement, pendant la classe, est une variable incontournable pour analyser les pratiques enseignantes. C'est ce qui leur donne sens, et cela représente un changement considérable avec les pratiques étudiantes, comme en témoignent tous les documents recueillis (formés, formateurs). Même la pratique de cours particulier n'a rien à voir avec ça. Ainsi, que ce soit la première fois qu'on enseigne ce contenu ou non, il faut retenir en partie ce qui a été élaboré (avoir des repères éventuellement), puis, dans un deuxième temps, en classe, le restituer, le jouer devant les élèves, tout en les animant, en les associant, en ajoutant aux strictes mathématiques divers éclaircissements. Il faut comprendre les interventions mathématiques des élèves, leurs erreurs éventuelles, improviser des explications ou même de nouvelles interventions plus globales, et, notons-le, cela peut aussi amener un enrichissement des connaissances (par la découverte –forcée !- de mises en relation, de changements de points de vue etc.)

* *Une évaluation indirecte, mais qui « passe » par les élèves*

[3] C'est à dire d'activités de recherches ou d'activités de familiarisation ou d'évaluations, sous formes d'exercices, problèmes, en classe ou en modules ou à la maison.

Voici une difficulté spécifique au métier d'enseignant : il n'y a pas d'évaluation directe possible ! Rien à voir avec les apprentissages donc.

De plus, l'évaluation indirecte par les élèves (la seule possible) est en partie biaisée, on ne peut pas savoir ce qui est dû au prof, les opinions peuvent être sans rapport avec les apprentissages (à court, moyen ou long terme...)

* *Un nouveau rôle du temps*

Le déroulement en temps réel, dans la classe, qui peut être une dimension contingente en didactique des mathématiques, devient ici une variable essentielle.

Nous avons conclu dans ces recherches préliminaires que le rapport au savoir mathématique de chaque enseignant, compris au sens large, avec la compétence mathématique et les activités mathématiques propres de l'enseignant, devient important à travailler dans toute sa complexité, et sa singularité : pour pouvoir reconstituer la démarche professionnelle dans son ensemble, dans ses dimensions disciplinaire, pédagogique, voire institutionnelle, et pour être en mesure de donner du sens aux seules traces visibles qui s'observent pendant une séance (les pratiques restreintes à la classe). Ces traces peuvent être en effet en partie obscurcies par des décisions globales ou immédiates, dues à l'institution ou au déroulement même du cours, et rester opaques si le travail d'élucidation précédent n'est pas fait.

De plus, les pratiques enseignantes sont des pratiques complexes, non réductibles à des unités séparées, comme la préparation, ou le déroulement, etc., vraisemblablement non décomposables en mises en fonctionnement de connaissances isolées disciplinaires, didactiques, pédagogiques, etc. car des recompositions de tous ordres s'opèrent constamment (par exemple, la préparation d'une séance influence grandement son déroulement, mais il s'ajoute toujours en classe des éléments non prévisibles, qui pourront à leur tour influencer les séances suivantes).

Cela doit nous amener à respecter cette complexité dans les analyses et leur interprétation, voire en formation. De plus, au sein d'une même discipline, les pratiques enseignantes peuvent varier selon les contenus enseignés, pivots de nos analyses, et selon les classes en présence (pour un même enseignant, et/ou entre enseignants) : voilà d'autres variables dont nous aurons à tenir compte dans nos analyses.

Ce que nous retenons aussi, c'est que la difficulté du passage n'est pas seulement liée à un changement de traitement des connaissances (mathématiques notamment), elle fait aussi intervenir le changement de statut (social y compris) des individus. L'élève professeur n'est pas un simple apprenant de nouvelles connaissances, ou savoir faire ou même pratiques, c'est un professionnel débutant ; apprentissage et formation n'appartiennent pas au même registre dans la mesure où les pratiques visées ne sont pas comparables socialement. C'est le début de notre réflexion différente, en termes de métier, voire d'habitus : l'enseignant fréquente les mêmes lieux que les élèves mais avec une toute autre culture, partageant un tout autre habitus (y en aurait-il même plusieurs ? comme pourrait le suggérer les cohabitations si délicates en IUFM).

ii) *Deuxième type de résultat : un grand absent, l'apprentissage des élèves... Vers l'idée de tension entre métier et apprentissage.*

Il s'est avéré que si l'objectif que « la classe tourne » était avoué et poursuivi par tous (formés et formateurs), celui de la réussite des élèves passait déjà en second, et celui des apprentissages des élèves n'était que très peu évoqué explicitement dans les formations, que ce soit en centre ou sur le terrain (sauf exceptions).

Le niveau le plus visible pour un observateur entrant en classe est en effet celui que nous avons appelé <u>« la classe tourne ».</u> C'est celui qui est visé d'abord en première année d'exercice. C'est celui que les formateurs évoquent toujours prioritairement.

Nous avons décrit ce niveau comme celui du respect des règles élémentaires de fonctionnement de la « collectivité classe » : prise de paroles contrôlée, silence lorsque l'enseignant parle, suivi minimum des différentes consignes, etc. ; tout cela aboutit à un confort relatif des différents partenaires (Robert 1996).

Un deuxième niveau d'évaluation des pratiques est celui - nécessairement relatif - de <u>la réussite</u>, en général mesuré sur des épreuves proposées (et le plus souvent corrigées) par l'enseignant lui-même[4]. Le problème est que cette réussite ne mesure souvent qu'une adéquation des procédures des élèves à des attentes de l'enseignant et donc n'en est qu'une estimation partielle. De plus elle est relative, car ces attentes peuvent varier d'un enseignant à l'autre, et/ou d'une classe à l'autre.

Le troisième niveau est celui de <u>l'apprentissage des élèves</u>. Celui-là, pourtant objectif ultime, est difficile à détecter, et pour l'enseignant, et pour l'institution, et il en est fait état très rarement dans des rapports ou autres évaluations individuelles. Certaines batteries de tests au début de la sixième, à la fin de la troisième nous donnent des indicateurs moyens, permettant des comparaisons. Du coup, ils relèvent plus du deuxième niveau que du troisième, d'autant plus qu'on sait bien qu'une faible modification des énoncés peut considérablement changer

[4] sauf en troisième et en terminale, à la fin de l'année au moins, et sauf en cas de contrôles communs.

les performances selon le degré d'apprentissage de ce que l'on étudie (Bodin 1997). Par ailleurs si on peut obtenir certaines « photos » des apprentissages en cours, cela ne dit rien sur les apprentissages potentiels, tout juste commencés, ou qui pourront s'installer, qui ne se traduisent pas encore par des critères de réussite, ni sur ce qui va s'oublier rapidement. De plus, il est très difficile de déterminer ce qui dépend vraiment de l'enseignement, voire de l'enseignant, dans des apprentissages[5].

A la fois conséquence immédiate et cause à long terme de ces difficultés, ces questions délicates sont peu abordées en formation initiale, en général, avec des enseignants-étudiants travaillant dans l'urgence, préoccupés du premier niveau d'abord, qui cherchent à intéresser leurs élèves tout en s'en faisant respecter[6].

Seulement cela ne s'arrête pas là : c'est encore la même chose en salle de classes, dans les rapports d'inspection, en formation continue... La question directe des apprentissages est mise à distance. Bizarrement, dès qu'on l'évoque, on est en général ou rejeté ou mal entendu : on se fait traiter ou de superficiel, de banal, ce qui peut être lié à une illusion de la transparence, ou de jargonneux, coupeur de cheveux en quatre, théoriciste, ce qui peut être lié à une conception artistique et non scientifique des apprentissages... Serait-ce dû aussi à un principe d'économie, le coût de certaines propositions étant élevé ? C'est pour moi une source d'étonnement toujours renouvelé, je pencherais plutôt à dire que tout se passe comme si il y avait un obstacle, presque au sens de Brousseau transposé, renforcé par le manque de modèles réels, le manque de repères intermédiaires explicités, le manque de gestes simples (recettes) relayant les projets.

Cela rejoint peut-être certaines résistances à certaines pratiques à utiliser dans les ingénieries didactiques (Salin 1999), directement liées à des objectifs d'apprentissages des élèves : nous sommes arrivées à l'idée que non seulement il faut tenir compte du métier d'enseignant mais qu'il y a peut-être des tensions potentielles entre l'exercice du métier et les apprentissages des élèves, voire de contradictions à certains moments, entre des objectifs définis pour les apprentissages des élèves et des contraintes liées à l'exercice du métier d'enseignant dans les études de pratiques.

---

[5] Citons par exemple une étude récente d'un sociologue G. Felouzis (1997), qui "mesure" l'effet enseignant sur l'apprentissage des élèves en mathématiques en classe de seconde et lui accorde une importance de 15 à 20% sur les apprentissages.

[6] L'excellent ouvrage "Pourvu qu'ils m'écoutent", recueil de mémoires professionnels de PLC2 publié par Davisse et Rochex contribue bien à notre connaissance de cet état d'esprit. Le deuxième volume s'appelle cependant « pourvu qu'ils apprennent »...

Il y a là un enjeu qui dépasse nos recherches, celui de l'alternative pour les nouveaux enseignants entre optimiser l'existant ou changer, enseigner autrement... Si pas d'éclaircissement, pas de changement profond.

4. Bilan et suite

Les interrogations restent qui, toutes, se sont resserrées autour des pratiques en classe. C'est là qu'est le vrai mystère, que ce soit pour comprendre les difficultés à adopter en classe des séquences non habituelles, ou pour évaluer le rôle de ce que l'enseignant dit ou ne dit pas, ou pour comprendre comment se forment les pratiques, voire pour percevoir les besoins des formés, avant de concevoir des scénarios de formation (y compris continue).

Ce constat a eu évidemment des conséquences sur notre démarche : nous avons travaillé directement ensuite sur les analyses de pratiques en classe. Les recherches de la deuxième génération ont en fait pris deux chemins, avant de se rejoindre pour une grande part : certains travaux ont continué à aborder de front des problèmes liés aux formations, mais en s'attaquant cette fois aux pratiques en classe et à leurs évaluations (qu'est-ce qui change dans les pratiques des formés, qu'est-ce qui n'arrive pas à être transmis, qu'est-ce qui en reste ?), d'autres ont regardé d'abord du côté des pratiques en classe, indépendamment des formations (même si l'idée d'une utilisation ultérieure en formation n'était pas absente). Mais c'est bien toujours finalement des analyses de pratiques qui sont faites, per se, ou à des fins d'évaluation.

III. TRAVAIL SUR DES CADRAGES THEORIQUES POUR ETUDIER LES FORMATIONS : LE CADRE DE LA DIDACTIQUE PROFESSIONNELLE (MILIEU DES ANNEES 90).

Les recherches sur les formations ne s'inscrivent pas naturellement dans les cadres théoriques existant. Les premières préoccupations ont été de mettre au point au moins un cadrage théorique pour les aborder.

1. Un bref survol non exhaustif de recherches déjà menées ou en cours

De nombreuses pistes de recherches ont déjà été explorées[7], d'ailleurs plus ou moins centrées sur l'analyse (préalable) des pratiques enseignantes (en réponse à la question « à quoi

[7]R. Bourdoncle a dressé un panorama de ce type de recherches, en toute généralité. Nous nous limitons aux recherches dans les dispositifs proches du système français, pour ne pas aborder les variables tenant aux différences de systèmes éducatifs.

former ? »), ou sur les formations (en réponse à la question « comment former ? »). Ces travaux tiennent compte ou non des contenus disciplinaires. Certaines recherches sont proches de recherches-actions, d'autres plus théoriques, mais les cadres théoriques évoqués restent divers, et les évaluations éventuelles des expériences, s'il y en a, très isolées.

Citons quelques pour illustrer la grande diversité des positions et esquisser la multiplication des travaux.

a) Autour de l'expertise enseignante (« à quoi former ? »)

Ainsi, par exemple, les travaux de Tochon (1993) ou de Tardif (1993) sur l'expertise enseignante mettent-ils en évidence un modèle de l'enseignant expérimenté (surtout en classe), qui révèle une forme spécifique de disponibilité et de réponses à l'improvisation, ces réponses n'étant pas étudiées du point de vue des savoirs enseignés. Le champ disciplinaire n'est pas spécifié[8].

Cependant il existe aussi des recherches plus précises centrées sur une discipline : par exemple, et pour n'en citer qu'une, en mathématiques, la recherche de Maurice (1996), qui dévoile sur les problèmes multiplicatifs l'expérience de l'enseignant et l'action effective de l'élève.

b) Autour de la réflexion a posteriori sur la pratique en classe (pratique réfléchie[9]) et la prise de distance (pour la formation), comme moyen de formation.

Ceci n'est pas spécifique d'un champ disciplinaire. Des travaux de Perrenoud (1994) et Cifali (1986), menés dans le cadre de la formation des professeurs d'école en Suisse illustrent cette piste de recherches, non évaluée directement à notre connaissance.

De manière plus générale, beaucoup de travaux[10] visent à expliciter tel ou tel caractère, souvent implicite, ou ignoré, des pratiques enseignantes : les auteurs s'appuient, en ce qui concerne la formation, sur l'hypothèse que cette explicitation a un rôle producteur au niveau des pratiques. Tout se passe comme s'il pouvait y avoir un transfert entre certaines connaissances théoriques sur les pratiques et les pratiques individuelles, moyennant un dévoilement suivi d'une réflexion qui doivent arriver au bon moment.

---

[8] Ainsi l'ouvrage édité par Paquay, Altet, Charlier et Perrenoud en 1996, intitulé "Former des enseignants professionnels, quelles stratégies? quelles compétences" est-il typique de toute une série de réflexions au dessus des contenus.

[9] Dans la tradition des travaux de D. Schön (1983) sur la professionnalisation du métier d'enseignant par la réflexivité.

[10]Par exemple des travaux récents de didactique de la physique en direction de la formation des maîtres (J.M. Boilevin, thèse en cours).

c) Autour de l'articulation théorie / pratique en formation professionnelle d'enseignants (travaux sur les modalités des formations)

Beaucoup de dispositifs de formation comportent deux volets, un théorique, avec des cours où les formés sont regroupés, et un plus pratique, avec des stages en classe, plus ou moins longs, en responsabilité[11] ou non. Les contenus des interventions en centre sont de deux types, disciplinaires et généraux. Il résulte de ces dispositifs des difficultés unanimement constatées par les formateurs et les formés sur la difficulté à faire « communiquer » les deux aspects des formations. De ce fait, dans beaucoup de travaux sur la formation professionnelle des enseignants, les chercheurs s'interrogent, y compris de manière théorique, sur la manière d'en articuler ces deux volets.

Par exemple les recherches actuelles sur le mémoire professionnel[12] en formation initiale tentent d'avancer sur ces questions.

De même des études précises sont menées sur le rôle du compagnonnage dans les formations sur le terrain (premier degré en mathématiques) et sur les principaux manques à gagner des débutants dans leur première classe (Butlen - travail en cours).
Les travaux de J. Portugais (1998) peuvent s'inscrire aussi ici.
D'autres recherches sur les nouvelles technologies (Abboud-Blanchard 1995) montrent l'importance des formations initiales dans l'acquisition de certaines disponibilités.

d) Autour des formations par la recherche des enseignants et/ou des formateurs (agents des formations professionnelles !)

Enfin des travaux de recherche essaient d'aborder la formation par la recherche, soit des enseignants soit des formateurs. Un certain nombre de travaux portent sur les formateurs, leurs savoirs (actuels, à venir...), et leur formation éventuelle, mais cela reste incomplet, vu la complexité du sujet. Ces travaux ont en général du mal à s'appuyer sur des cadres théoriques bien identifiés.

Aux questions de formation par la recherche[13] ou non, par exemple, il faut bien dire que les réponses apportées aujourd'hui sont en partie empiriques, avec une démarche mettant souvent

[11] Le formé est seul dans la classe, il en a la responsabilité pleine et entière ou non.
[12] Ainsi un colloque a été tenu sur cette question en mai 1996, un numéro spécial de la revue "Recherches et formation" y a été consacré, etc.

en jeu convictions et bon sens. Les résultats sont peut-être parfaitement valides, mais pour le moins non légitimés...

Un autre aspect de la question peut être signalé : le formateur développe des pratiques particulières, il est amené à faire des paris sur la formation, validés empiriquement, engagé comme il l'est dans une action à court terme. Il y a peut-être là des hypothèses à dégager, puis à valider ou à infirmer, à travers tout ce corpus empirique mis au point dans la pratique du formateur ; un travail de type ethnométhodologie[14] pourrait peut-être s'avérer efficace[15]. Castela et Eberhard (1999) ont un peu adopté ce point de vue à l'école d'été.

2. Un cadrage : la didactique professionnelle

Dans un premier temps un certain nombre de chercheurs, dont D. Butlen, ont essayé de définir des recherches calquées sur celles qui relèvent du cadre de la didactique professionnelle (un premier sens différent a été mis à ce mot, non repris ici – à savoir la didactique à usage de transmission professionnelle) : c'est un cadre adapté à analyser des formations professionnelles[16] d'adultes, centrées sur les contenus du travail visé par la formation. Ce cadre est utilisé dans des recherches d'ergonomie cognitive : les chercheurs s'appuient sur des hypothèses sur la manière dont se développent les pratiques et sur les contenus à transmettre en formation, pour concevoir, expérimenter et évaluer des scénarios de formation[17] (les objectifs sont exprimés en termes de compétences). C'est la réalité « formation professionnelle/pratique professionnelle » qu'on analyse, en se plaçant le plus possible en situation (professionnelle) réelle, en tenant compte des deux types de formation, théorique et pratique.

En effet, dans ce point de vue, une des hypothèses théoriques fondatrices est que les compétences (entendons les « bonnes » pratiques) se forment dans les rapports entre sujets et situations d'action, mais qu'il est possible de mettre en rapport de manière efficace les systèmes de pensées issues de l'action et ceux issus d'un savoir formalisé (Pastré 1995). Une autre hypothèse théorique est la possibilité de définir des concepts pragmatiques[18],

---

[13] Pour ne prendre qu'un exemple, citons l'ouvrage sous la direction de H. Hensler, paru en 1993, "La recherche en formation des maîtres, détour ou passage obligé".

[14] Dans l'esprit des travaux de A. Coulon par exemple, mais en adaptant au terrain des formateurs.

[15]Signalons que notre première tentative dans ce sens s'est heurtée à un trop manque de cadrage théorique.

[16] En général non enseignants

[17] Les hypothèses des ergonomes portent notamment sur les compétences.

[18] Cf. Pastre et Samurçay

conceptualisations intermédiaires opératoires pour l'action en situation et s'adaptant donc bien aux pratiques.

Plus précisément, que ce soit pour concevoir des scénarios de formation, ou pour diagnostiquer des formations, il s'agit de découper la réalité à étudier en trois pôles, savoirs de formation (disciplinaires et autres), formés (enseignants débutants), formateurs et situations de formations. Les situations de formation comportent les deux types de situations, théoriques, et d'enseignement effectif en classe. On travaille sur chacun de ces pôles et sur les relations entre eux (par exemple les savoirs des formateurs), l'ensemble étant conçu comme situé dans un cadre institutionnel donné, source de contraintes. Selon les objectifs cela amène à des ingénieries[19] ou à des analyses.

Ce cadrage diffère du cadre didactique disciplinaire, dont il s'inspire structurellement, dans la mesure notamment où les situations analysées sont surtout choisies en vraie grandeur. De plus les « formés » ne sont pas étudiés de manière générique mais plus clinique, en particulier avec leurs singularités.

Il y a ainsi une centration sur le sujet de la formation (le formé), et un déplacement de ce qui est considéré comme contingent, voire négligeable dans des analyses habituelles : ici tous les détails du déroulement en temps réel comptent.

3. Recherches effectives

Nous citerons pour mémoire les travaux de D. Butlen : entre autres il a fait une comparaison entre pratiques débutantes et expertes (régularités dans la gestion imparfaite de la classe, mises en évidence des contraintes et de six axes pour repérer les difficultés dans l'accomplissement de gestes professionnels) ; il a aussi analysé des pratiques de formateurs en formation, et travaillé sur la préparation du compagnonnage par un dispositif approprié en plusieurs temps (mises en actes, analyse réflexive, analyse différée)
D'autres travaux ont été présenté à l'école d'été de Houlgate (1999) : on trouve des études plus ou moins globales de dispositifs plus ou moins locaux (entretiens et visites, mémoire professionnel, TICE – intégration pour former aux TICE ou pour faire apprendre des math) Les recherches sont souvent encore à leur tout début.

[19] Propositions de séances effectives, basées sur des hypothèses explicitées, à tester expérimentalement.

Les manques : connaissances sur le pôle « pratiques et savoirs de formation »…

Avec une dialectique intéressante soulignée par Portugais : plus on comprend les pratiques, plus on comprend les apprentissages.

IV. DETOUR NECESSAIRE OU ANALYSE DIRECTE : LES ETUDES DE PRATIQUES EN CLASSE, EN RAPPORT OU NON AVEC UNE FORMATION PREALABLE.

Nous allons préciser ce que nous mettons sous le terme pratiques et les problématiques générales que nous abordons, puis nous évoquerons des aspects plus précis, qui entraîneront des choix de méthodologies.

1. Définition (provisoire) des pratiques :

Il est temps de définir ce que nous appelons pratiques enseignantes. Nous réservons ce terme à l'ensemble des activités de l'enseignant qui aboutissent à ce qu'il met en oeuvre en classe et à ses activités en classe. Nous tenons compte dans cette définition des projets plus ou moins implicites activés au moment de la préparation des séances. Ces projets correspondent à une actualisation des conceptions sur les mathématiques et leur enseignement et aux propres connaissances en mathématiques de l'enseignant. Nous appelons « lignes d'action » ces projets, auxquels nous ne pourrons accéder qu'indirectement, à travers leurs réalisations en classe ou des déclarations des enseignants.

Nous précisons « pratiques en classe » si nous nous restreignons justement à ce qui tient à l'exercice du métier d'enseignant en classe, au déroulement pendant la classe. Le terme désigne alors tout ce que dit et fait[20] l'enseignant en classe, en tenant compte de sa préparation, de ses conceptions et connaissances en mathématiques et de ses décisions instantanées, si elles sont conscientes. Nous spécifions par le terme « singularisation » la transformation, nécessairement singulière pour chaque enseignant, des projets ou « lignes d'action » en « pratiques en classe », qui sont, elles, en partie observables.

Ces observables que nous appelons les actes techniques, sont les constituants élémentaires des pratiques en classe : déplacements, écrits au tableau[21], discours et silences, mimiques. Les discours sont à l'heure actuelle les seuls facteurs que nous avons personnellement analysés.

[20] Ceci sera précisé lorsque nous aurons choisi un cadre théorique adapté à nos questions nous permettant de découper la réalité et donc de spécifier ce que nous retenons dans "le dit et le faire".

[21] Citons le mémoire de DEA de E. Roditi (1996) sur la question de l'utilisation du tableau.

Ces définitions nous semblent cohérentes avec ce que nous avions tiré de nos premiers travaux : à savoir tenir tous les bouts à la fois (des projets ou lignes d'action (représentations)aux pratiques effectives en classe (singularisations)), pour ne pas recommencer la réduction des études sur les seules représentations, et pour analyser ce qui importe dans le métier, le passage en classe.

Chevallard (1991) parle de gestes professionnels, dans un sens assez voisin, mais lié à un autre cadre théorique (anthropologique).

Les ergonomes évoqueraient plutôt le mot « compétences[22] » pour indiquer la prise en compte d'une composante du type « mise en fonctionnement » des savoirs faire et connaissances. Rogalski, Goigoux parlent ainsi de compétences, voire de schèmes.

Ceci dit, deux types de problèmes ont orienté les recherches sur les pratiques dont je parle ici, dans une certaine continuité avec les premiers problèmes évoqués. D'une part certains ont cherché à mieux définir le pôle « savoirs de formations », ou, dans un ordre d'idées proche, à évaluer des formations, décrites avec les moyens du bord dans un premier temps. Cela les a amenés à analyser les pratiques en classe, soit par souci de transmission (analyse des pratiques expertes par exemple), soit pour les évaluer ou les comparer. D'autres ont cherché plus directement à mieux comprendre les pratiques des enseignants en leur donnant une grande importance y compris pour les apprentissages des élèves.
Dans ces recherches, deux points de vue, complémentaires, ont été adoptés pour analyser ces pratiques en classe, et nous avons petit à petit évolué du premier à l'imbrication du premier au second.

2. Les analyses de pratiques du point de vue des apprentissages des élèves

On peut considérer que l'enseignant est un des rouages des apprentissages des élèves, et on l'étudie comme tel, dans sa stricte contribution à ces apprentissages. Ce point de vue est proche de ce qui est développé dans d'autres travaux de didactique des mathématiques (Brousseau 1996[23], enseignant régulateur...), nous l'avons partiellement adopté dans les analyses de pratiques ordinaires où nous choisissons donc les dimensions d'analyse en fonction des présupposés didactiques sur les apprentissages potentiels. Nous disons que nous

[22] Cf. numéro 123 de la revue Education permanente sur les compétences.
[23] Dde l'absence de maître, au contrat qui remplace le maître, puis aux régulations...

évaluons les pratiques à l'aune des apprentissages potentiels des élèves qu'elles peuvent engendrer, ces apprentissages étant caractérisés par les hypothèses didactiques disponibles. Par exemple nous étudions systématiquement dans les pratiques ce qui peut enclencher, dans les prévisions de scénario et pendant les séances, certaines dynamiques entre contextualisations et décontextualisations, vu leur importance (différentielle) dans les apprentissages (notamment en introduction des notions). Ou encore nous analysons les échanges prof/élèves, pour la même raison (étude des médiations). Ou bien nous étudions les formes de travail des élèves, pour repérer ce qui leur reste à faire en classe.

En fait nous avons repris, en les complétant, les premières dimensions introduites dans la théorie des situations pour élaborer et tester les ingénieries didactiques, mais nous les utilisons pour jauger des séances ordinaires, en nous appuyant sur les mêmes hypothèses.

Cela amène à des analyses a priori et a posteriori des séances, centrées autour des activités potentielles des élèves telles qu'on peut les reconstituer à partir de ce que l'enseignant donne à voir et à entendre (les élèves ne sont pas nécessairement étudiés en vrai). Scénario, tâches proposées (avec la gestion correspondante), discours de l'enseignant et activités potentielles des élèves, sont ainsi les dimensions analysées. La recherche de C.Hache (1999) en est un exemple et il va développer méthodologie et résultats. Une hypothèse implicite est que de la reconstitution de quelques séances nous pourrons induire des régularités dépassant ces seules séances.

Une autre recherche en cours cherche à cerner les différences entre enseignants dans la prise de notes instantanée des élèves.

M. Pariès (thèse en cours) pour sa part, précise le jeu des interactions enseignant / élèves, au moment où ceux-ci sont « invités » à entrer dans un raisonnement, avec des variables liées à la pragmatique du discours, et ses travaux s'inscrivent bien dans ce premier point de vue. Elle cherche en particulier à préciser la place de l'élève dans le discours (par rapport au savoir), en faisant varier les situations d'enseignement (Leutenegger 1999).

Même si ce point de vue nous a permis d'obtenir des résultats sur les pratiques, notamment de les comparer sur toutes ces dimensions liées aux apprentissages, de dégager des variables (pe entre contenus et activités enseignantes) et de montrer la complexité de la réalité en classe nous avons cherché à le dépasser, compte tenu de ce qui précède sur l'importance du reste, de l'exercice du métier.

En particulier ce point de vue ne permet pas d'interpréter cette autonomie de l'enseignant notamment pendant les séances, ses choix, leur cohérence, etc. qui là encore sont régis à la fois par les objectifs d'apprentissage et par la place de l'enseignant, exerçant une activité professionnelle propre. On a évoqué ci-dessus, et on peut l'illustrer précisément, que, quelques soient les prescriptions données, il reste toujours une autonomie pour l'enseignant, au moins en classe, mais aussi des contraintes qui dépassent le cadre d'une séance (programmes, pressions de l'institution, de lui-même).

3. Un deuxième point de vue pour analyser les pratiques en classe : celui de l'exercice du métier d'enseignant

Aujourd'hui des pistes sont proposées[24], pour le deuxième point de vue sur les pratiques de l'enseignant – anthropologie avec l'idée de praxéologie, ergonomie avec le travail sur les tâches et activités de l'enseignant, psychanalyse avec les recherches de transfert et contre transfert dans la classe, modèle de l'intentionnalité qui réintègre une dimension liée au projet de l'enseignant à divers niveaux. A chaque fois, on prend en compte quelque chose (pas la même chose pour tous) du fait qu'un enseignant exerce une profession, un métier, et que, ce faisant il est conduit à développer une stratégie personnelle liée à ce métier, avec des contraintes et des buts exprimés par rapport à lui et pas seulement par rapport aux élèves. Il doit concilier des objectifs liés aux apprentissages des élèves à des objectifs liés à sa propre activité, qui (par exemple) doit être suffisamment confortable (il ne doit pas s'effondrer au bout d'un mois), suffisamment gratifiante (il ne doit pas être détesté de trop d'élèves ni de trop de parents), suffisamment légitime (il ne doit pas être rejeté par ses collègues, ni mal vu par l'administration de son établissement), il doit gérer l'avancement du temps dans la classe, quitte à tricher (Mercier 1998), il doit à la fois s'intéresser aux élèves individuels et gérer la classe etc. Nous avons choisi des exemples globaux, banals, mais il existe aussi dans le déroulement quotidien de la classe des phénomènes beaucoup moins transparents qui traduisent cette situation, c'est du moins l'hypothèse que nous faisons et qui légitime l'adoption de ce point de vue : point de vue banal, mais il n'allait pas de soi qu'il fallait l'intégrer dans les recherches, sous peine de réduction trop grande.

Des chercheurs en psychologie ergonomique (Rogalski 1999, Goigoux) ont ainsi développé l'idée qu'il est possible de travailler sur un modèle du sujet enseignant, prenant en compte (et

[24] Cf. Rogalski J. « Analyse de psychologie ergonomique du travail de l'enseignant ».

dégageant) notamment la variabilité des pratiques. Ils analysent les pratiques en découpant en tâches et activités. Deux orientations sont imbriquées chez Rogalski : le modèle d'un EDO (initiales de « environnement dynamique ouvert ») et le modèle de la médiation (enseignant médiateur entre élève –au singulier ! - et savoir). Nous ne rentrerons pas ici dans le détail, nous allons préciser notre position actuelle, qui nous permet de tenir compte du fait qu'on est en classe de mathématiques, ce qui n'apparaît explicitement nulle part.

4. Une tentative d'imbrication

Pour notre part, nous avons tenté, et c'est D. Vergnes (2000) qui a la première exploré cette piste, de nous inspirer des deux points de vue, en retenant l'apport des ergonomes et psychologues cognitifs. C'est vraisemblablement la proximité avec les analyses déjà faites qui a conduit à ce choix (travail homogène).

L'idée générale est d'étudier les pratiques enseignantes soit dans des classes ordinaires, soit suite à des formations en découpant la réalité avec la deuxième optique, du point de vue de l'enseignant. Les analyses de chaque unité ainsi repérée se font ensuite en prenant en compte les tâches et activités mathématiques correspondantes des élèves (liées aux apprentissages potentiels éventuels), sur les contenus visés (première optique).

D. Vergnes va donc en développer un exemple. Le travail de P. Masselot (thèse en cours) consiste à faire une étude analogue suite à une formation initiale.

Les premiers résultats de recherches d'évaluation des pratiques suite à une formation légitiment a posteriori l'imbrication. Ils semblent indiquer précisément que les difficultés les plus résistantes, qui apparaissent de manière récurrente en classe, se présentent dans les moments où les « prescriptions » didactiques font état de « la classe », ou des élèves de la classe de manière générique, alors qu'il y a lieu de s'intéresser aux élèves particuliers, et que c'est là une réalité diversifiée, absolument imprévisible dans le détail, qui échappe au premier point de vue. C'est le cas par exemple de certaines phases de bilan, où on devrait récolter et faire partager toutes les productions des élèves de la classe, ce qui s'avère souvent impossible. La synthèse qui pourrait en résulter est aussi une opération particulièrement délicate pour l'enseignant. Cela échappe aussi au premier point de vue…

Citons encore d'autres travaux en cours dans cette voie :

La thèse de Mül (thèse en cours) cherche à illustrer la différence d'habitus primaire / secondaire par delà les programmes et manuels, en montrant des différences dans les tâches proposées aux élèves, régulières, qui relèvent plus d'habitude, de représentation de la dignité du collège ou de l'école que des textes officiels. Cela se marque par une valorisation, des attentes, pas toujours apparentes à partir des textes.

Dans la thèse de Praslon sur la dérivée, signalons que l'on perçoit aussi des différences subtiles, non dites entre les attentes des enseignants, par exemple sur le dessin (les enseignants du supérieur, s'il y a à dessiner vont dire « allez, vite, on se dépêche » et laisser deux minutes, en parlant en même temps, les enseignants du secondaire vont peut-être au contraire valoriser la tâche)...

Le travail de Roditi (thèse en cours) consiste justement à essayer d'interpréter en termes de métier les choix d'enseignants expérimentés sur un chapitre du programme de sixième (multiplication des décimaux). Il semblerait que les idées d'intentionnalité puissent aussi aider ici à valoriser les constats.

Dans une certaine mesure les études des enseignants en ZEP (Peltier, Ngono, Butlen, Pezard) peuvent aussi être abordées de ce point de vue : la tension entre apprentissages et exercice du métier y est maximale, et les exigences supposées (en termes d'apprentissages) de médiations supplémentaires sont difficiles à gérer dans le cadre du métier.

Ben Salah (thèse en cours) étudie la résistance des connaissances mathématiques de jeunes enseignants face à l'érosion du collège. Elle compare notamment les pages de manuel utilisées et les discours en classe. Elle dévoile plusieurs comportements possibles, du suivi quasiment aveugle du manuel à la prise de distance, laissant place y compris à des connaissances mathématiques originales (explicites ou implicites révélées par des commentaires indirects).

Enfin, des nouvelles hypothèses ont été émises sur la formation, suite à l'adoption de ce double point de vue. Un apport d'outils professionnels, sur les mathématiques est envisagé, avec allers-retours sur le terrain. Une recherche est en cours sur une évaluation de formation continue des professeurs de lycée et collège de ce type (thèse en cours de Sayac). Il n'est pas sûr cependant qu'on puisse se passer d'hypothèses plus élaborées que celles que nous faisons pour l'instant sur ce processus de formation continue, faisant là encore intervenir à d'autres endroits le métier.

5. Ce qui manque

Il y a trois tabous dans toutes ces recherches : *l'inconscient* (et pourtant il est certain qu'il y a aussi en classe une partie qui s'y joue) : suffit-il du « dont acte » que nous préconisons jusqu'à maintenant, lorsque sont en jeu des pratiques qui engagent si fortement les individus ?

les connaissances mathématiques (actuelles et potentielles) : il y a tout de même un paradoxe. En Capes, on déclare que les connaissances mathématiques de la plupart des candidats, dont une partie est reçue, sont insuffisantes, isolées, certains affirment que le « sens » (sorte de bouteille à l'encre) est trop absent etc. Une fois que les enseignants sont arrivés dans la profession, le sujet n'est plus jamais évoqué. Nous avons vu que les connaissances mathématiques évoluent effectivement, autrement, pour un autre usage, dans des domaines réduits. Est-ce suffisant ? Les connaissances potentielles sont-elles en place ? Et l'érosion, l'obsolescence ?

Nous développons l'hypothèse qu'il y a là une brèche possible : par l'intermédiaire d'outils professionnels, relief sur les math à enseigner. D'une certaine manière Castela rejoint ce point de vue.

De plus *les effets sur les élèves* ne sont pas abordés sauf localement, sans recherche du long terme. On sait que les tentatives d'évaluation sont vouées à l'échec, il y a un article de Bru qui fait le tour exhaustif des arguments irréfutables pour cela, mais le problème reste posé !

V. Conclusion : Ou en sommes nous des problemes initiaux ? Place par rapport a d'autres recherches, perspectives

Nous dégageons les conclusions suivantes :

1. Difficultés de transmission, qualités des discours de l'enseignant, comment et à quoi former les futurs enseignants...

Nous abordons autrement le premier problème : ce que nous pourrions appeler la résistance à la pénétration de certains acquis obtenus en didactique des mathématiques reste entière (Bolon 1996, Douady 1991, Salin 1999 , Portugais1998) et nous oblige à un changement de point de vue, et à nous redemander pourquoi.

Il ne s'agit plus de mettre en cause les enseignants (ou leurs représentations), mais bien de réfléchir à ce qu'on leur demande : serait-ce trop difficile, ou trop souvent impossible finalement ? Notre réponse, différente et peut-être complémentaire de celle de Blanchard-Laville (1997), est que, peut-être, nous n'avons pas assez pris en compte justement, l'exercice du métier, côté enseignant (point de vue ergonomique). Cela rejoint je crois ce que dit Portugais dans sa conférence à l'école d'été.

Signalons que Salin aborde de front cette question, en particulier à propos des pratiques ostensives et de la difficulté de leur abandon. Elle explique que ce n'est pas la formation des enseignants qui est en jeu, puisqu'ils produisent à froid les analyses attendues. Alors quoi ? elle pense elle aussi que ce n'est pas seulement le jeu des préférences inconscientes qui doit être appelé à l'aide mais autre chose, des exigences qui entraînent des décisions néfastes pour certains élèves. Cette élucidation fait l'objet de son travail actuel.

D'autre part tous nos travaux ont montré que les pratiques des enseignants sont très variables dans le détail, notamment en ce qui concerne le discours méta, et on peut même penser que tout le monde « ne fait pas pareil », malgré un éventuel jeu subtil de compensations. Cependant il y a des régularités dans ce qui n'est pas fait, et le cours dialogué, les pratiques ostensives, la mise à l'écart des élèves dans certaines parties du travail restent majoritaires. On rejoint le constat précédent.

De là à déterminer à quoi et comment former, reste une marge énorme, dont nous faisons l'hypothèse qu'une des manières de l'aborder dans des recherches est d'explorer encore, au niveau des pratiques, de manière plus complète le rapport *enseignant / enseignement des mathématiques, conçu dans une certaine globalité (faisant intervenir cette composante de l'exercice du métier).*

Par exemple, un des objectifs peut être d'étudier du point de vue de l'enseignant diverses façons de provoquer une activité visée : sont en cause (et de manière non indépendante) la place de l'activité dans la marche de la classe, son insertion dans un scénario, l'élaboration de l'énoncé, le mode de travail et de production choisis, l'accompagnement du déroulement de l'activité, la reprise éventuelle qui aura lieu d'être (mémoire), etc. Autrement dit il se mélange là du local et du global, du passé et du futur, qui sont peut-être incontournables...

2. De fait beaucoup des travaux exposés à l'école d'été de Houlgate (1999) d'une manière ou d'une autre rejoignent ces mêmes questionnements : beaucoup expliquent que l'enseignant a une marge de manœuvre, mais qu'il est soumis à des contraintes et du coup cherchent à préciser son rôle, ou même ses choix (y compris en PLC2). Mais ces analyses concernent souvent un moment donné bien délimité de la classe et ne se placent pas du point de vue plus global de ses pratiques, en recherchant une certaine cohérence (évoquée

cependant par Salin). De plus ce sont souvent les élèves qui fournissent le gros des analyses (cf. premier point de vue), ou l'ensemble élèves/enseignant, non distingué dans les analyses (la plupart des chercheurs empruntent leurs prémisses théoriques soit à la TS soit à l'anthropologie). Coulange (1999) par exemple analyse les tâches, techniques, etc. mais finalement en fonction des élèves.

En revanche, Bloch (1999) propose autre chose, un nouveau milieu pour analyser ce rôle du professeur et l'utilisation qu'il peut faire de ses connaissances, dissymétrisant les acteurs mais mettant en évidence une facette très spécifique du métier d'enseignant.

Leutenegger (1999) propose une méthode clinique qui élargit les méthodologies précédentes, tout en mettant sur le même plan enseignant et élèves ; elle est esquissée selon les trois principes de questionnements réciproques à partir des traces, analyses internes suivies d'analyses externes, rétroaction, et a pour objectif de reconstituer des phénomènes liés à l'enseignement faisant intervenir élèves et enseignant.

Plus généralement, dans le début de synthèse qu'elle propose, Margolinas (1999) évoque les questions suivantes abordées dans les recherches sur les pratiques : place du professeur dans les modèles, pratiques de l'enseignant dans les ingénieries. Du premier point de vue, que nous n'abordons pas mais que nous pourrions retrouver au détour d'un chemin, il s'agit de préciser (théoriquement, à l'avance) les éléments qui contraignent les pratiques, qui conditionnent les actions. Elle mentionne d'abord la place du professeur dans les théories des situations et anthropologique (définition et caractérisation) : cette place comporte pour la seconde trois composantes à étudier, l'aide à l'étude, c'est un élément du système stricto-sensu (expert en mathématiques) et lato sensu (professionnel) ; l'enseignant est vu comme préparant son cours, agissant dans la classe, système à mémoire pour le premier. Elle ajoute des contributions comme celle de Mercier, qui permet de travailler la coopération enseignant-élèves.

Pour les études au cours des ingénieries, elle suggère que les descriptions du professeur manquent de vocabulaire technique précis, que ce soit pour dire ce que l'enseignant fait ou ne fait pas, ou (ne) doit (pas) faire. Elle insiste sur les apports de Blanchard-Laville et Brousseau sur le plan affectif : maintenir une enveloppe psychique pour l'une, gérer l'investissement affectif, le désir des élèves pour l'autre (déplacement du désir de montrer son savoir). Elle décrit quelques débuts de descriptions techniques. Elle termine par deux propositions de formalisation de ces descriptions, une concernant la diffusion des stratégies, l'autre sur une analyse des possibles dans le rôle du maître (cf. validation / évaluation dans les phases de conclusion). Pour elle, les problématiques à venir doivent porter sur l'élaboration et la description d'ingénieries, améliorées, et sur l'étude du professeur « objet d'étude ».

Nous ne nous retrouvons pas directement ici, dans la mesure où nous analysons des pratiques « ordinaires », et où notre approche est délibérément empirique. Cependant la question des descriptions techniques des gestes professionnels est commune, même si jusqu'à présent elle était implicite de notre point de vue.

Pour Schubauer-Leoni (1999), le questionnement initial est exclusivement théorique, même si les propositions et dispositifs de recherche sont présentés « tous azimuts », ce qui rend difficile pour le béotien que je suis d'y retrouver les considérants théoriques du début de l'article.

Elle cherche à situer en effet les études de pratiques d'enseignant dans deux démarches de fabrications de modèles courants chez les sociologues, ascendant et descendant : elle explique en les analysant à la lumière de ces caractérisations comment les deux approches théoriques proposées en didactique des mathématiques s'y rattachent, dégage les insuffisances que cela représente et propose de s'inspirer de nouvelles approches plus locales, cliniques (modèles génératifs).

Notre approche me semble suivre de très loin un modèle ascendant, avec cependant un jeu permanent de comparaisons systématiques, inspiré non par la théorie mais par notre abord empirique, les comparaisons étant plus faciles à faire dans un premier temps (d'un point de vue méthodologique). Il me semble que nous partons d'analyses cliniques traitées avec les outils théoriques existants (clinique au sens de Mercier (1998), ou Leplat (1997)) ?

3. Recherches à venir : il s'agit de **compléter** les travaux en cours en ajoutant des analyses autour des questions suivantes, qui toutes portent sur l'enseignant : comment l'enseignant de mathématiques procède (peut procéder) pour obtenir telle ou telle activité des élèves ? Qu'est-ce que cela implique pour lui, qu'est-ce qu'il doit (savoir) faire, qu'est-ce qui est impossible (en introduisant les variables notions et classe) ? quelles activités mathématiques précises est-il amené à faire ? Peut-il imiter, quoi , à quelles conditions (ce qui nous semble difficile à travailler dans le cadre anthropologique) ?
On sait bien qu'importent le scénario (avec les objectifs), l'énoncé de la tâche, la gestion (avec le discours qui l'accompagne), mais qu'exigent ces impératifs, sont-ils toujours

compatibles avec le long terme, avec la vie même de la classe, avec l'exercice du métier de tel ou tel individu ? Quels compromis, raccourcis, aménagements peut-on envisager ?
Tout n'est pas possible partout, ni tout le temps, c'est ce qu'il faut approfondir... exemple : dans une séance de recherche de problème en petit groupes, institutionnalisation à la fin à la place de « au fur et à mesure », tenir compte du temps à l'aide d'une montre, compter sur ses doigts pour attendre suffisamment après une question, prévoir différentes méthodes au moment de la préparation (explicitement) : travail sur techniques et technologies...

BIBLIOGRAPHIE

Abboud M. (1995) Dix ans après, l'outil informatique a-t-il trouvé son chemin vers la classe de mathématiques, IREM de Rennes.

Abric J.C. (1988) *Coopération, compétition et représentations sociales*, Cousset, Del Val.

Altet M (1994) *La formation professionnelle des enseignants*, PUF, Paris.

Blanchard Laville C. (1997) L'enseignant et la transmission dans l'espace psychique de la classe, *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol 17-3, pp151-176.

Blanchard Laville C., Nadot S. Rapport intermédiaire à l'appel d'offres 1998 de l'IUFM de Versailles.

Bolon J. (1996) *Comment les enseignants tirent-ils partie des recherches faites en didactique des mathématiques* ? Thèse de doctorat d'état de l'Université Paris 5.

Bloch I. (1999) L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique ; détermination d'un milieu ; connaissances et savoirs *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol 19-3, pp135-194.

Bodin A. (1997) L'évaluation du savoir mathématique, questions et méthodes, *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol 171 pp 30-49

Bourdieu P. (1972) *Théorie de la pratique*, Editions de Minuit.

Bourdoncle R (1989) Les travaux sur la formation des enseignants et des formateurs, bibliographie signalétique, 1970-1988, INRP.

Bronner A.(1999) Contraintes et libertés de l'enseignant de mathématiques, *Actes de la 10ème école d'été de Houlgate,* pp 127-133.

Brousseau G . (1996) L'enseignant dans la théorie des situations didactiques, *Actes de la 8^{ième} école d'été de didactique des mathématiques,* IREM de Clermont -Ferrand

Brousseau G., Centeno J. (1991) Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant, *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol 11 2-3 pp 167-210

Bru M. (1991) Les variations didactiques dans l'organisation des conditions d'apprentissage, Toulouse, EUS.

Butlen D., Lagrange M., Perrin M.J. (1991) Elèves en difficulté en classe de sixième, *Repères Irem* vol 3 pp 97-139.

Castela C., Eberhard M. (1999) Quels types de modification du rapport mathématique en vue de la possibilité de quels gestes professionnels ? *Actes de la 10ème école d'été de Houlgate,* pp164-172.

Charlier E. (1988) Caractéristiques et facteurs explicatifs des décisions de planification d'un cours, Les sciences pour l'ère nouvelle, n°4-5.

Chevallard Y. Familière et problématique, la figure du professeur, *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol 17-3, pp17-54

Chevallard Y. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en didactique des mathématiques,* vol 19-2, pp 221-265

Chiocca M.C. (1995) *Des discours des enseignants de mathématiques en classe aux représentations de leurs élèves sur les mathématiques : un essai de réflexion didactique,* Thèse de doctorat de l'université Paris 7.

Cifali M. (1994) *Le lien éducatif : contre-jour psychanalytique*, PUF, Paris.

Comiti C, Grenier D (1997) Régulations didactiques et changements de contrat, *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol 17-3, pp81-102

Conne F. (1999) Faire des math, faire faire des math, in *Le cognitif en mathématiques,* Lemoyne G., Conne F. eds, pp 31-69, Les presses de l'université de Montréal.

Coulange L (1999) Détermination du rôle d'un professeur de troisième en situation à l'occasion de l'introduction officielle des systèmes linéaires, *Actes de la 10ème école d'été de Houlgate,* pp60-68.

Coulon A. (1993) *Ethnométhodologie et éducation*, PUF, Paris.

Davisse A., Rochex J.Y. Ed (1995) « *Pourvu qu'ils m'écoutent, discipline et autorité dans la classe* », mémoires professionnels de stagiaires (collège et lycée), (1998) « *Pourvu qu'ils apprennent, face à la diversité des élèves* », CRDP Créteil, France.

Dorier J.L. ED. (1997) *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, La pensée sauvage, Grenoble

Douady R., Robert A. (1991) Formation à l'enseignement des mathématiques : exemples, Document de travail pour la formation des maîtres, n°5, Irem Paris 7.

Fellouzis G. (1997) *L'efficacité des enseignants*, PUF, Paris.

Hache C. (1999) *L'enseignant de mathématiques au quotidien, études de pratiques en classe de seconde*, Thèse de doctorat de l'université de Paris 7

Hache C., Robert A. (1997) Un essai d'analyse de pratiques effectives en classe de seconde, ou comment un enseignant fait fréquenter les mathématiques à ses élèves pendant la classe, *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol 17-3 pp 103-150.

Hensler H. Ed (1993) *La recherche en formation dess maîtres : détour ou passage obligé sur la voie de la professionnalisation* Editions du CRP, Université de Sherbrooke.

Houdement C. (1995*) Projet de formation des maîtres du premier degré en mathématiques : programmation et stratégies*, Thèse de doctorat de l'université Paris 7.

Kuzniak A. (1994) *Etudes des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré*, Thèse de doctorat de l'université Paris 7.

Jodelet D. Ed (1989) *Les représentations sociales*, PUF, Paris.

Josse E., Robert AA. (1993) Introduction de l'homothétie en seconde, analyse de deux discours de professeurs, *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol 13 pp 119-154.

Leplat J. (1997) *Regards sur l'activité en situation de travail – contribution à la psychologie ergonomique*, PUF.

Leutenneger F. (1999) Etude des phénomènes temporels de l'enseignement : une approche clinique du didactique, *Actes de la 10ème école d'été de Houlgate,* pp.69-73.

Margolinas C. (1999) Les pratiques de l'enseignant de mathématiques, une étude de didactique des mathématiques, recherche de synthèses et perspectives, *Actes de la 10ème école d'été de Houlgate,* pp10-33

Marilier-Bonnot M.C. (1994) *Travail en petits groupes en classe de mathématiques : des pratiques aux représentations*, Thèse de doctorat de l'université paris 5.

Maurice J.J. (1996) Problèmes multiplicatifs : l'expérience de l'enseignant, l'action effective de l'élève, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 16/3, pp323-348..

Mercier A. (1998) Observer l'enseignement, in Brun et als Eds, *Méthodes d'étude du travail de l'enseignant*, Genève, Interactions Didactiques pp. 3-42.

Paquay L. (1993) Vers un référentiel des compétences professionnelles ? *Recherche et formation* n°15, INRP.

Pastré P. (1996) Variations sur le développement des adultes et de leur représentations, *Education permanente* n°119, Paris 33-63.

Pastré P . Samuçay R., Bouthier D (1995) le développement des compétences, analyse du travail et didactique professionnelle, *Education permanente* n°123, Paris 7-12.

Peltier M.L. (1995) La formation des professeurs d'école entre conjoncture et éternité, Thèse de doctorat d'état

Perrenoud P. (1994) *La formation des enseignants entre théorie et pratique*, L'Harmattan, Paris

Perrin M.J. (1997) Que nous apprennent les élèves en difficulté en mathématiques ? *Repères Irem* vol 29 pp43-68

Perrin M.J. (1999) Problèmes d'articulation de cadres théoriques : l'exemple du concept de milieu, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 19/3, pp279-322.

Pian J. (1999) Diagnostic des connaissances de mathématiques des étudiants de Capes, vers une interprétation cognitive des apprentissages individuels, *Cahier de didirem*, n°34, Irem Paris 7.

Portugais (1998) Esquisse d'un modèle des intentions didactiques, in Brun et als Eds, *Méthodes d'étude du travail de l'enseignant*, Genève, Interactions Didactiques.

Pezard M. (1985) *Une expérience d'enseignement de la proportionnalité aux élèves-instituteurs*, thèse de troisième cycle de l'Université de Paris 7.

Robert A. (1995a) Formation professionnelle initiale des futurs professeurs de mathématiques : les opinions des intéressés et de leurs tuteurs (formateurs sur le terrain), *Publication de la MAFPEN de Versailles.*

Robert A. (1995b) Professeurs de mathématiques de collège et lycée : formation professionnelle initiale ou comment désaltérer qui n'a pas soif ? *Document de travail* n°14, IREM Pais 7.

Robert A. (1995c) Analyse des discours non strictement mathématiques accompagnant des cours de mathématiques dans l'enseignement post-obligatoire, Educationnnal Studies of mathematics, 28, 73-86.

Robert A. (1996) Une approche de la formation professionnelle initiale des futurs enseignants de lycée et collège en mathématiques, Cahier de Didirem n°26, Irem Paris 7.

Robert A. (1999) Pratiques et formation des enseignants, Didaskalia, vol 15 pp123-157.

Robert A., Lattuati M. Penninckx J.(1999) *L'enseignement des mathématiques au lycée*, Ellipses, Paris

Robert A., Robinet J. (1992) Représentations des enseignants et des élèves, *Repères Irem*, vol 7, pp93-99.

Rogalski J. (1999) *Analyse de psychologie ergonomique du travail de l'enseignant*, actes du XXVIème colloque de la Copirelem (Limoges)

Salin M.H. (1999) Contraintes de la relation didactique dans l'enseignement de la géométrie au cours moyen deuxième année, *Actes de la 10ème école d'été de Houlgate*, pp83-90.

Schön D. ((1995) A la recherche d'une nouvelle épistémologie de la pratique et de ce qu'elle implique pour l'éducation des adultes, dans Barbier Ed. Savoirs théoriques et savoirs d'action, PUF, Paris.

Schubauer Leoni M.L. (1999) Les pratiques de l'enseignant de mathématiques. Modèles et dispositifs de recherche pour comprendre ces pratiques, *Actes de la 10ème école d'été de Houlgate*, pp34-49

Sensevy G. (1996) Le temps didactique et la durée de l'élève. Etude d'un cas au cours moyen : le journal des fractions, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 16/1, pp7-46.

Tochon (1992) *L'enseignant expert*, Hachette, Paris

Vergnes D. (2000) *Analyse des effets d'un stage de formation continue en géométrie sur les pratiques d'enseignants de l'école primaire*, Thèse de doctorat d'état de l'université Paris 5.

Bibliographie complémentaire

Page web sur l'enseignant.

L'ENSEIGNANT DE MATHEMATIQUES AU QUOTIDIEN, ETUDES DE PRATIQUES EN CLASSE DE SECONDE[25]

Christophe Hache[26]
DIDIREM, Université de Paris 7

I. PRESENTATION DU TRAVAIL[27]

Nous, équipe IUFM, de Versailles, disposions d'une quinzaine d'heures de cours filmées ainsi, par deux caméras (huit ont été étudiées ici : quatre professeurs étudiés chacun sur deux notions).

Le but était d'étudier les pratiques du professeur.

1. Pourquoi ?

Les recherches sur la relation entre enseignement et apprentissage, et en particulier les recherches en didactique des mathématiques, ont souvent commencé par étudier le « fonctionnement » de l'élève. Les grands courants de la recherche en didactique des mathématiques, étudiant donc le triangle didactique (Elève, Professeur, Savoir), ont buté relativement récemment sur le pôle professeur ; la connaissance qu'on en avait s'était révélée trop sommaire. Plusieurs problématiques ont alors été développées, par des chercheurs en didactique des mathématiques, autour du rôle du fonctionnement du professeur en classe, et de son métier.

Par ailleurs le milieu de la formation des professeurs (IUFM) enrichit les problématiques de recherche en suscitant de nouveaux questionnements relatifs au métier du professeur

---

[25] Cet exposé est précédé de celui de Aline Robert et suivit de ceux de Danielle Vergnes et Janine Rogalski qui le complètent

[26] cHache@gauss.math.jussieu.fr

[27] Cet exposé a été précédé par la projection de courts extraits vidéo de séances de cours en classe.

2. Comment ?

Je vais présenter deux points de vue de recherche sur cette question des pratiques du professeur, afin de pouvoir me positionner ensuite.

Le premier point de vue (logique pour un didacticien) consiste à observer le professeur par dessus l'épaule de l'élève ; c'est à dire à ne le voir que comme un élément pouvant amener l'élève à transformer ses connaissances pour progresser.

Ce point de vue s'accompagne d'une modélisation (en général simple) du professeur, d'un certain déterminisme. C'est en ce sens que Houssaye parle de « la place du mort » en parlant du professeur (en pensant au bridge).

Ce point de vue est, en général, critique : le décalage modèle / réalité peut apparaître culpabilisant pour le professeur, pourquoi n'intervient-il pas comme cela devrait être fait en théorie ?

Le second point de vue se centre plus sur le professeur et ses activités. Quelles sont ses libertés, quelles sont ses contraintes (externes : classe, notion - compte tenu programmes... ou interne : confort, légitimité, résultats...), quels sont ses choix ?

Dans un premier temps on pourrait dire que c'est l'élève qui va prendre « la place du mort ».

C'est le point de vue, par exemple, de la psychologie ergonomique qui considère le professeur comme devant gérer un « environnement dynamique ouvert » ; c'est à dire un environnement qui a sa vie propre (continue à évoluer sans intervention), et pour lequel on ne dispose pas (mais surtout pour lequel le professeur ne dispose pas, notamment sur le moment) de modélisation ou de moyen d'action simple et direct. Un pompier avec sa lance devant un feu de forêt, qui le dépasse nettement, est aussi devant un environnement dynamique ouvert.

Mon travail se place un peu entre les deux. J'étudie le professeur pour lui-même, j'étudie son jeu, son «métier», ses pratiques ; mais je ne l'étudie qu'en fonction de ce que l'on sait (notamment suite à des recherches en didactique des mathématiques) de l'apprentissage des élèves.

J'appelle univers cette partie des pratiques du professeur que je retiens. C'est le mode de fréquentation des mathématiques organisé par le professeur pour les élèves.

Comment décrire ces univers ? (Je rappelle que je me réfère à l'apprentissage des élèves).

-> J'essaye de caractériser la nature et la richesse des tâches proposées aux élèves.

-> J'observe ce que le professeur choisi d'ajouter, la façon dont il enrichit l'activité des élèves (jeu entre la contextualisation et la décontextualisation, entre les différents niveaux de langages, structuration, réflexions, questions sur la structuration, sur la réflexion...).

-> La façon et ce sur quoi les élèves interviennent, échangent (entre eux, ce qui n'a pas été observé, ou avec le professeur).

Je vais préciser tout ça plus loin.

3. Quelques résultats

Qu'ai-je observé, en me positionnant ainsi ?

J'ai en effet étudié 4 professeurs chacun sur les deux même

• Une grande variété d'univers.

- Chez un même professeur, même au cours d'une seule séance.
- Entre deux professeurs, sur une même notion.
- Entre deux notions, chez un même professeur.

• Une grande complexité et une finesse des variations, avec de subtiles nuances.

• Quelques régularités, notamment par rapport aux notions : ces variations ne se font pas au hasard.

Ce travelling de l'élève vers le professeur permet d'appréhender la réelle complexité d'un métier, et la réelle complexité de son étude, ou de sa formation.

4. Présentation du travail (rapide) et de la suite de l'exposé

Bien que je m'essaye actuellement à la pratique du métier, je me suis contenté dans cette thèse d'étudier le professeur. Voici comment (cf. annexe 1) :

Je suivrai un plan à rebours.

Introduction.
Pourquoi ?
Comment ?
Quelques résultats ?
Première partie.
Description des principaux univers caractérisés, répartition au sein des séances.
Seconde partie.
Indices.
Cinq indices de description.
Regroupement a posteriori de paramètres parmi 89.
Troisième partie.
Le travail d'analyse.
Description des 89 paramètres.
Nécessité de l'analyse factorielle.
Conclusion.

II. DESCRIPTIONS DES PRINCIPAUX UNIVERS CARACTERISES, REPARTITION AU SEIN DES SEANCES.

Dans un effort de concision j'ai assimilé les univers trouvés, dans les huit séances, en six grandes catégories, sans être exhaustif.

- Univers des *gammes*[28] *: il* s'agit d'épisodes pendant lesquels les élèves travaillent au moins un peu sur une tâche peu ou pas riche, il n'y a que rarement des échanges consistants et le professeur n'enrichit pas la situation.
- A l'opposé l'univers de *recherche consistante et variée: il y a* dévolution d'une tâche riche, le professeur ajoute quelque chose au cours d'échanges réels avec les élèves.
- On trouve aussi l'univers *débat:* les échanges sont très présents, la situation est riche, le travail des élèves est peu présent.
- Univers *discussion : c'est* un univers proche du débat mais le potentiel d'ouverture didactique est faible.
- Au contraire l'univers *travail riche mais silencieux* est caractérisé par un travail des élèves sur une tâche riche mais avec peu d'interventions orales du professeur ou des élèves.
- Enfin[29] on trouve l'univers de *correction magistrale : le* professeur ajoute quelque chose à une tâche riche, il pose des questions de fond aux élèves, mais les élèves travaillent et interviennent peu.

Il faut bien souligner que le fait de se centrer sur le professeur me donne le confort de ne pas donner de jugement de valeur, même implicite. Je ne sais pas, maintenant, si tel univers est préférable à tel autre. J'en ai observé l'existence, d'un certain point de vue ils sont donc profitables (sinon ils disparaîtraient). C'est sans doute leur multitude (constatée à tous les niveaux) qui fait que les côtés négatifs qui pourraient paraître d'un point de vue sont compensés, quelques instants plus tard, par un changement d'univers.

Le type de répartition des univers au sein d'une séance est très variable. Deux exemples :

1) certaines séances se présentent sous la forme d'une complexification et d'un enrichissement des tâches, ainsi que d'une intensification des débats (exemple : *gamme* puis *recherche consistante et variée*)

---

[28] Au sens où un pianiste fait des gammes. Il faut souligner, pour ce premier univers comme pour les suivants, que la connotation positive ou négative des noms ou même des valeurs des indices est toute relative, elle n'est liée qu'aux critères de descriptions choisis pour ce travail

[29] Il ne s'agit bien sûr que des univers repérés dans les huit séances observées.

2) on peut voir aussi des séances commençant par un *débat*, suivi de ce que j'ai caractérisé comme étant un univers de *discussion* (le même que *débat* mais sur une tâche plus "pauvre") et se terminant par un travail riche mais silencieux...

Tous les univers n'apparaissent pas tout à fait indifféremment chez tous les professeurs. On peut citer le cas d'un professeur, celui de la seconde vidéo, qui choisit systématiquement d'apporter un plus dans son discours (structuration, réflexion, argumentation, liens...). Il ne fait donc pas de gammes (dans les deux séances observées).

De même les deux notions mathématiques abordées ne le sont pas de la même manière. J'ai observé des séances sur les vecteurs (notion a priori plus difficile à introduire par une "activité introductrice", et en pratique signalée comme difficile) et des séances sur le vocabulaire fonctionnel (plus adapté à cette forme de travail). Globalement les univers sur les vecteurs sont moins "riches" (échanges, tâches ...). Je fais ici un aparté pour signaler que dans les analyses plus locales on se rend compte que le professeur donne (quelquefois à son insu) très rapidement les clefs du cours sur les vecteurs en début d'activité et transforme souvent ainsi les exercices introductifs en exercices d'applications

III. INDICES

On peut alors se poser la question de savoir comment ces descriptions sont obtenues ? Et d'où viennent ces caractérisations ? Je me suis servi de 5 indices de description (cf. Annexe 1).

1. Cinq indices de description.

Les trois premiers décrivent, en quelque sorte, ce que j'ai appelé le potentiel d'ouverture didactique (c'est à dire le déploiement mathématique, choisi par le professeur, de la notion proposée aux élèves) ; tant au niveau de la tâche que pendant la phase de travail des élèves ou dans le discours du professeur.

T-VAR

C'est un indice caractérisant a priori le potentiel d'ouverture didactique et mathématique de la tâche proposée a priori. Quelle liberté a l'élève, sous quelles différentes facettes va-t-il voir la notion envisagée...

ACTI

Cet indice permet d'évaluer la façon dont les élèves profitent de ce potentiel dans le déroulement de la séance. Ont-ils du temps ? Travaillent-ils seuls ? Le professeur modifie-t-il l'énoncé de la tâche ? Les affirmations sont-elles justifiées ?

D-VAR

Le professeur choisit-il d'amplifier ou de restreindre le potentiel dans son discours. Il est possible qu'il ouvre des portes, qu'il fasse des liens avec le cours ou avec d'anciens chapitres... il est possible qu'il ne fasse qu'une correction contextualisée et informative.

Les deux derniers indices caractérisent les échanges et la médiation dans la séance.

T-ECH

Cet indice décrit la façon dont les élèves peuvent intervenir oralement. Comment ils sont interrogés, s'ils interviennent spontanément, si leurs interventions sont reprises ou non...

D-ECH

Le dernier indice évalue le contenue des échanges. Le professeur interroge-t-il les élèves sur tout ce dont il parle ou effectue-t-il un choix ? Interroge-t-il les élèves sur le fond (structuration et organisation des connaissances, lien entre mathématiques contextualisées et décontextualisées...).

Cette liste et ces descriptions sommaires sont assez frustrante : pourquoi cinq indices et pas plus ou moins ? Pourquoi ceux-là ? D'où viennent ces descriptions ?

2. Regroupement a posteriori de paramètres parmi 89

Ces indices (cf. Annexe 1) se sont imposés après utilisation sur les huit séances étudiés de 89 paramètres descriptifs (issus essentiellement de moyen d'analyses offert par les résultats de recherche en didactique des mathématiques). Les séances ont été découpées, puis chaque épisode a été analysé selon ces 89 paramètres, ces paramètres n'ont pas pris des valeurs totalement aléatoires et se sont regroupés en grandes familles, les indices. Je vais expliquer maintenant comment je m'en suis aperçu.

IV. LE TRAVAIL D'ANALYSE

1. Description des 89 paramètres.

J'ai dit que les cinq indices caractérisant mes univers étaient une sorte de concentré de 89 paramètres descriptifs. Plus précisément, il y a 62 paramètres qualitatifs décrivant les tâches à effectuer et le déroulement de l'épisode et 27 paramètres quantitatifs décrivant le discours du professeur pendant l'épisode.

Je commence par les 27 paramètres de description du discours. Ils sont issus de 3 caractéristiques du discours du professeur : l'objet, la teneur et la fonction[30].

Les autres paramètres décrivent les tâches en jeu, pour les élèves, et le déroulement effectif de l'épisode.

On peut se demander pourquoi on tombe sur 62 paramètres et pas plus (ou moins) ? Il n'y a pas de prétention à l'exhaustivité, le but était simplement d'obtenir une description systématique, et suffisante compte tenu du travail à effectuer.

Description des paramètres sur plusieurs plans.

[Les schémas qui suivent sont en deux parties : l'un décrit les paramètres (italique) et l'autre en donne la valeur (souligné) pour une des vidéos visionnées en début d'exposé]

CONTEXTE MATHEMATIQUE DE L'EPISODE.

Notion étudiée, statut, niveau de conceptualisation, nouveauté, type de problème abordé, caractère outil ou objet de la notion abordée, cade principal, registre principal.

La <u>multiplication d'un vecteur par un nombre</u> est vue comme une <u>extension</u>. Il y a une légère <u>conceptualisation</u>, il y a <u>plusieurs cadres</u> en présence mais <u>le principal est le cadre</u> géométrique. Il s'agit d'un problème <u>de construction</u>, <u>nouveau</u>.

DEROULEMENT, CHRONOLOGIE.

Place du cours dans l'année, place de la séance dans le cours, place de l'épisode dans la séance, durée de l'épisode, enchaînement entre les épisodes.

C'est une séance du <u>premier trimestre</u>, d'<u>introduction</u> au cours, c'est le <u>premier épisode de la séance</u>, <u>il dure</u> un peu plus de 6 minutes, il est dans une <u>suite d'exercice</u>.

ANALYSE DE LA TACHE PRESCRITE.

Décontextualisation de l'énoncé, outil mathématique nécessaire, raisonnement possible, production demandée, habillage, nouveauté (question et situation), degré de mise en fonctionnement.

Et tout ce qui concerne le potentiel d'ouverture didactico-mathématique de la notion: choix de la méthode, des outils, du cadre, du registre, du point de vue, degré d'ouverture des questions, mise en relation, introduction d'un intermédiaire, reconnaissance.

L'exercice est <u>contextualisé</u>, il faut y <u>utiliser une définition</u>, il faut <u>faire une construction</u>, il n'y a pas d'<u>habillage</u>, la situation et la question sont <u>nouvelles</u>, la <u>mise en fonctionnement</u> est technique.
L'<u>initiative</u> laissée à l'élève est très faible (seule la méthode est libre), les <u>questions sont ouvertes</u>. Il n'y a <u>pas d'adaptation</u>, de transformation à faire, il n'y a <u>pas de mise en relation</u>, il n'y <u>a pas besoin d'introduire un intermédiaire</u>.

ANALYSE DE LA TACHE QUE LE PROFESSEUR SE DEFINIT, DE SON ACTIVITE, DE LA TACHE ATTENDUE POUR LES ELEVES, DE LEURS ACTIVITES.

Ce que le professeur veut faire (introduire, mettre en garde...), enjeu.
Ce que le professeur veut faire faire (révision...), ses exigences, la présence de justifications (données par qui).

Activité du professeur : débit de parole, passage dans les rangs, fermeture des questions, "triche".

[30] Voir Hache et Robert 1997.

Traces d'échanges : interventions spontanées, interrogation individuelle ou à la volée, qu'expriment les élèves (simples résultats ou plus).
Elèves : préparation à la maison, temps de recherche, type de recherche (individuelle, groupe, classe), moyens de contrôle dont dispose l'élève.
Le professeur veut introduire la notion et familiariser les élèves. Il ne fait pas de mise en garde, il ne juge pas l'exercice difficile.
Il ne s'agit pas de révisions, le professeur n'a pas d'exigences particulières, les justifications ne sont pas abordées (ou alors, de façon anecdotique, par le professeur).
Le professeur parle moins que dans les autres épisodes de la séance, il passe dans les rangs, il transforme les questions posées, il interroge les élèves nominativement.
Les échanges sont plutôt pauvres : les élèves expriment de simples résultats.
Les élèves ont préparé à la maison, ils n'ont pas de temps de recherche en classe, ils n'ont pas de moyen de contrôle interne (nouvelle notion, nouvelle situation, nouvelle question).

2. Prise en compte des 89 paramètres, nécessité de l'analyse factorielle.

Pour chaque épisode envisagé, je dispose donc de 89 données. Il y a 65 épisodes sur les huit séances. Difficile dans ces conditions de faire la moindre synthèse, de se faire une idée globale des données, même sur une seule séance (entre 6 et 12 épisodes).

J'ai donc utilisé des analyses factorielles. Deux pour chaque groupe de séance, conservant ainsi la distinction discours / tâche - activité.

EXEMPLE

Les analyses fournissent une représentation géométrique de mes données (nuage de point sur un plan).

Deux types de conclusions

-> Pour chaque groupe d'épisodes, une description, une organisation sont mis en place. Un questionnement local peut apparaître.

-> Transversalement on s'aperçoit que les paramètres ne se regroupent pas aléatoirement, suivant les groupes de séance se sont toujours les mêmes paramètres qui sont proches. C'est ainsi que j'en suis venu à définir les indices qui m'ont permis de caractériser simplement les univers (voir la liste des indices ci-dessus).

Et c'est ainsi que je finis cet exposé.

Juste quelques mots de conclusion.

V. CONCLUSION

1. Critiques

On peut faire au moins deux types de critique à ce travail.

En interne, on peut bien sûr me reprocher de n'avoir étudié que 8 séances. Je réponds, en général, que je n'étais pas sûr de mon outil d'analyse au départ, il y a aussi un problème de quantité de travail. On peut, en effet, aussi, toujours de façon interne, me reprocher la lourdeur et la longueur de ces analyses, notamment celles du discours du professeur. L'utilisation des indices est une piste à étudier pour simplifier ces analyses.

Par ailleurs, je n'ai pris en compte ici essentiellement que des résultats de recherche en didactique des mathématiques, je ne prends donc pas du tout en compte d'autres dimensions de ce qui se passe en cours. Dimension affective, sociologique...

2. Perspectives

Cette recherche peut se prolonger sur plusieurs plans.

- Je pense qu'il est nécessaire, à ce point de la recherche, de passer un temps à comparer les résultats et les outils ci-dessus avec ceux d'autres cadres théoriques.
- Il pourrait être intéressant d'étudier d'autres situations (d'autres séances) afin de développer les conclusions et les questionnements sur lesquels débouche cette recherche.

Comme je le disais au début, après avoir essayé d'étudié le métier du professeur, je m'essaye moi-même dans ce rôle en ce moment. La prise de recul n'est pas évidente après quelques mois. Ceci dit, il se trouve que j'ai des classes disons particulièrement vivantes et réactives. Il se trouve aussi qu'au début de l'année j'ai un peu mélangé les plaisirs en finissant ce travail et en exerçant. Enseigner avec en tête ces cinq indices, un peu comme un tableau de bord, est assez agréable. La classe réagit aux changements de dosages, aux changements d'univers.

Par ailleurs toujours au fil de cette expérience informelle, les cinq indices se sont révélé être des outils de description assez séduisant.

- J'ai donc envie de dire que ces indices pourraient être un outil de formation (pointage de choix à faire) ou d'autoformation (moyen de description de son activité, points de réflexion) au métier de professeur. Une réflexion théorique pourrait être menée en ce sens.

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

BLANCHARD-LAVILLE C., HATCHUEL F., LEUTENEGGER F., MERCIER A., MOSCONI N., SALIN M.H., SCHUBAUER-LEONI M.L., SENSEVY G. (1997) Conférence à plusieurs voix : approches cliniques des pratiques enseignantes, *Actes de la neuvième école d'été de didactique des mathématiques* (Houlgate), pp. 48-66.

BROUSSEAU G. (1995) L'enseignant dans les théories didactiques, *Actes de la huitième école d'été de didactique des mathématiques* (St Sauves), pp. 3-46.

BRUN J. (1998) ed. *Méthodes d'étude du travail de l'enseignant*, interactions didactiques.

CHEVALLARD Y. (1995) La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique, *Actes de la huitième école d'été de didactique des mathématiques* (St Sauves), pp. 83-122.

CHEVALLARD Y. (1997) Familière et problématique, la figure du professeur, *Recherche en didactique des mathématiques*, n°17/3, La pensée sauvage, Grenoble, pp.17-54.

HACHE C. (2000) L'enseignant de mathématiques au quotidien : Etude des pratiques en classe de seconde, *Thèse de doctorat*, Université Paris 7.

HACHE C., ROBERT A. (1997a) Comment en didactique des mathématiques prendre en compte les pratiques effectives des enseignants de mathématiques au lycée ? *Cahier de Didirem* n°28, Université Paris 7.

HACHE C., ROBERT A. (1997b) Un essai d'analyse de pratiques effectives en classe de seconde, ou comment un enseignant fait "fréquenter" les mathématiques à ses élèves pendant la classe ? *Recherches en didactique des mathématiques*, n°17-3, La pensée Sauvage, Grenoble, pp. 103-150.

MARGOLINAS C. (1995) Principes de l'analyse de la situation de l'enseignant dans une relation didactique, *Actes de la huitième école d'été de didactique des mathématiques* (St Sauves), pp. 66-68

MARGOLINAS C. (1997) Étude de situations didactiques "ordinaires" à l'aide du concept de milieu : détermination d'une situation du professeur, *Actes de la neuvième école d'été de didactique des mathématiques* (Houlgate), pp. 35-43.

MARGOLINAS C. (1999) Conférence à la dixième école d'été de didactique des mathématiques (Houlgate), A PARAITRE.

MARGOLINAS C. et PERRIN M.J. (1997) Éditorial, *Recherches en didactique des mathématiques*, n°17/3, La pensée sauvage, Grenoble, pp.7-15.

NOIRFALISE A ET R (1995) Visibilité et intelligibilité de l'action du professeur *Actes de la huitième école d'été de didactique des mathématiques* (St Sauves) pp. 146-155.

PASTRE (1996) Variations sur le développement des adultes et leurs représentations, *Éducation permanente* n°119, Paris, pp. 33-63.

PERRIN M.J. (1997) Pratiques des élèves et des enseignants en classe de mathématiques — Institutionnalisation en classe de seconde, *Cahier de Didirem* n°29, Université Paris 7.

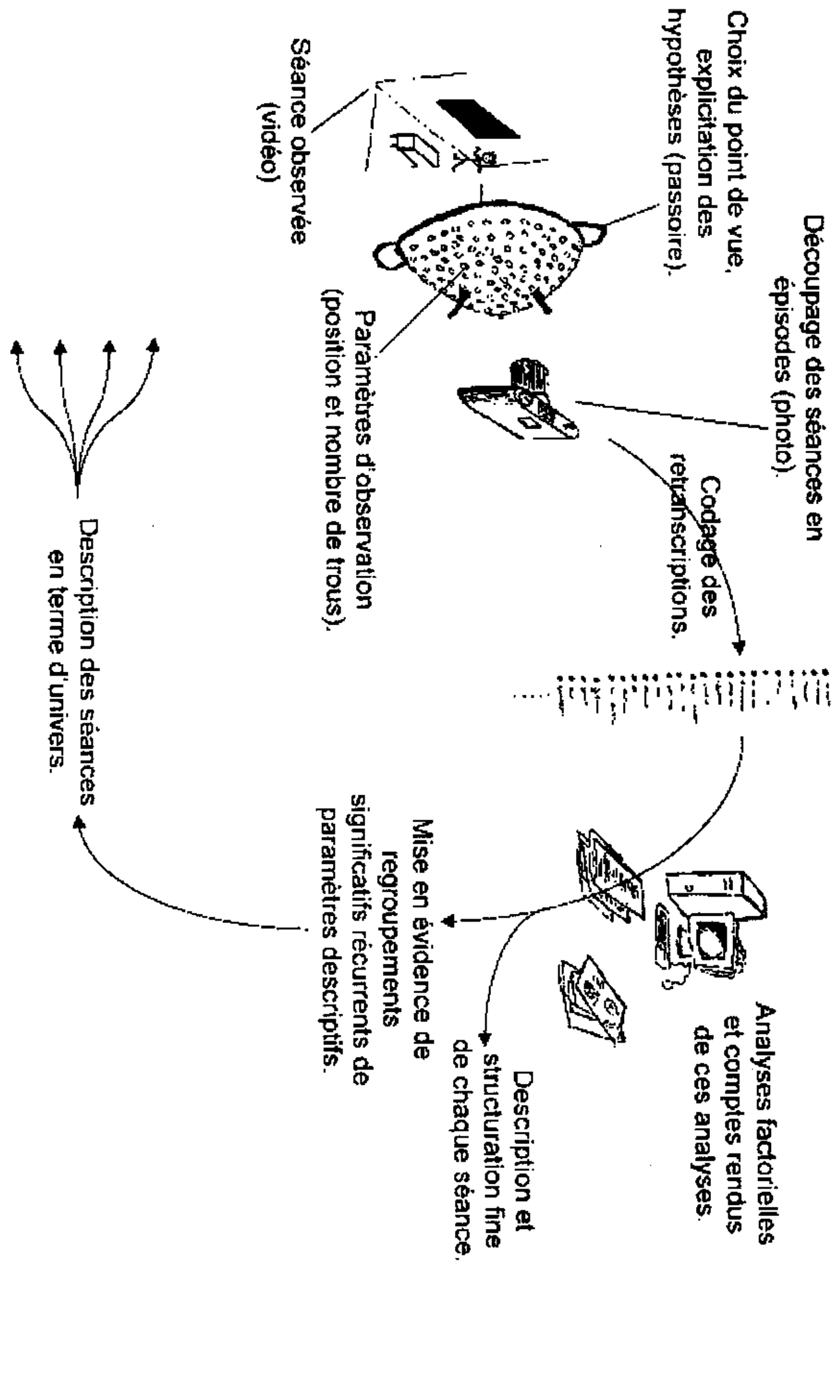
ROBERT A. (1996) Une approche de la formation professionnelle initiale des professeurs de mathématiques des lycées et des collèges, *Cahier de Didirem* n°26, Université Paris 7.

ROBERT A. (1999a) ed. Les pratiques des enseignants de mathématiques en classe de seconde, Rapport sur le projet de recherche 1997-1998 (appel d'offre de l'IUFM de Versailles), *Cahier de DIDIREM*, n°33, Paris.

ROGALKI J. et SAMURÇAY (1992) Formation aux activités de gestion d'environnements dynamiques : concepts et méthodes, *Education permanente*, n°111.

ROGALSKI J. (1998) Conférence au séminaire de l'équipe DIDIREM (IREM de Paris VII).

VERGNAUD G. (1994) Le rôle de l'enseignant à la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel, *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, La pensée sauvage, Grenoble, pp. 77-191.


Choix du point de vue, explicitation des hypothèses (passoire).
Découpage des séances en épisodes (photo).
Séance observée (vidéo)
Paramètres d'observation (position et nombre de trous).
Codage des retranscriptions.
Analyses factorielles et comptes rendus de ces analyses.
Description et structuration fine de chaque séance.
Mise en évidence de regroupements significatifs récurrents de paramètres descriptifs.
Description des séances en terme d'univers.

ANALYSE DES EFFETS D'UN STAGE DE FORMATION CONTINUE EN GEOMETRIE SUR LES PRATIQUES D'ENSEIGNANTS DE L'ECOLE PRIMAIRE

Danielle Vergnes[31]
IUFM de Versailles

La question à laquelle je me suis intéressée est une question de formation, et plus précisément une question de formation continue d'enseignants de l'école primaire.

La finalité d'une formation continue est qu'au bout du compte les élèves des enseignants formés apprennent "mieux". Or qu'apprend-on aux enseignants pour leur permettre d'améliorer l'apprentissage de leurs élèves ?

Les connaissances dont nous disposons sur les ingénieries de formation ne sont pas encore semble-t-il suffisantes, notamment ce qui concerne les contenus à proposer et les stratégies à mettre en œuvre au cours des stages, c'est à dire ce qu'il faut apprendre aux maîtres et comment.

De notre point de vue poser la question en terme de recherche d'ingénierie de formation est de ce fait prématurée. Mais nous pouvons chercher dans un premier temps à analyser les effets d'un stage de formation continue ordinaire sur les pratiques des enseignants de retour dans leur classe. Ce qui nous permettra peut-être en retour, d'avancer sur la question des ingénieries de formation.

Il y a un système à trois niveaux qui interfère : le formateur, l'enseignant, l'élève. Pour chacun des niveaux il y a une transposition à faire, donc chaque fois des "écarts", c'est à dire des pertes en quelque sorte: écart entre le projet du formateur qui est de former l'enseignant idéal et le projet qu'il conduit effectivement, écart entre ce que le formateur pense avoir produit comme effet et ce que l'enseignant formé fait ensuite dans le travail effectif de retour dans la classe.

[31] Danielle.Vergnes@ac-versailles.fr

L'objet de notre recherche est d'essayer de mesurer les écarts entre le projet du formateur et ce que fait effectivement l'enseignant formé de retour dans sa classe. L'objectif étant à terme de concevoir une formation qui minimise ces écarts.

I. Quelques elements theoriques sur lesquels nous nous sommes appuyee pour concevoir la formation et pour analyser des effets de cette formation.

Pour concevoir la formation et pour l'analyser nous avons adopté le cadre de la didactique professionnelle utilisé dans les recherches en ergonomie cognitive : les chercheurs s'appuient sur des hypothèses relatives à la manière dont se développent les pratiques et sur les contenus à transmettre en formation, pour concevoir, expérimenter et évaluer des scénarios de formation (les objectifs sont exprimés en termes de compétences). C'est la réalité "formation professionnelle/pratique professionnelle" qu'on analyse, en se plaçant le plus possible en situation professionnelle réelle, en tenant compte des deux types de formation, théorique et pratique.

En effet dans ce point de vue, une des hypothèses théoriques fondatrices est que les compétences (entendons les "bonnes" pratiques) se forment dans les rapports entre sujets et situations d'action, mais qu'il est possible de mettre en rapport de manière efficace les pensées issues de l'action et celles issues d'un savoir formalisé (Pastré,1995).

Une autre hypothèse théorique est la possibilité de définir des concepts pragmatiques, conceptualisations intermédiaires opératoires pour l'action en situations et s'adaptant donc bien aux pratiques.

Plus précisément, que ce soit pour concevoir un scénario de formation, ou pour diagnostiquer des formations, il s'agit de découper la réalité à étudier en trois pôles, savoirs de formation (disciplinaires et autres), formés, formateurs.

II. Le contexte de la formation

En tant que professeur de mathématiques dans un IUFM (PIUFM), parmi les tâches qui me sont prescrites, j'ai la charge d'élaborer et de conduire des stages de formation continue en mathématiques pour les enseignants de l'école primaire. Le stage qui a servi de contexte à cette recherche est un stage de formation continue en géométrie qui s'est déroulé sur 16

séances de mathématiques de 3 heures chacune au cours du mois de mars 1995.
C'est un stage ordinaire en ce sens qu'il n'est pas expérimental, c'est à dire qu'il n'a pas été conçu dans la perspective d'une recherche d'ingénierie de formation. Il était conforme aux cahiers des charges concernant la formation continue du premier degré, il a été accepté par la commission chargée d'examiner l'ensemble des propositions, puis inscrit au plan de formation. Les enseignants ont candidaté librement. Les enseignants ayant participé à ce stage n'étaient donc pas volontaires a priori pour participer à une recherche. Nous leur avons demandé au cours du stage s'ils acceptaient de se prêter au dispositif d'observation. Deux stagiaires sur les onze ont refusé. J'ai retenu pour cette étude les cinq stagiaires que j'ai effectivement observés en classe.

L'objectif, pour les formateurs, était de rester conforme aux sources habituelles des enseignants du premier degré. En particulier il ne s'agissait pas d'engager les enseignants dans une réflexion qui les conduirait à enseigner autre chose que d'habitude mais simplement de les engager dans une réflexion qui les conduirait à enseigner autrement la même chose que d'habitude. De ce fait les savoirs géométriques définis pour l'école primaire n'ont pas été questionnés.

Notre travail spécifique de chercheur a été alors, d'analyser les effets de ce stage en terme de pratiques en classe des enseignants ayant participé au stage.

En disant cela nous utilisons un préalable théorique tiré de la didactique professionnelle, postulant qu'il est légitime, pour analyser les pratiques, d'aller en classe observer les enseignants.

Nous avons enregistré au magnétophone cinq enseignantes, chacune d'elles à trois reprises. Une première fois 6 mois environ après le stage, pour une séance de géométrie, puis quelques jours plus tard pour une séance sur le numérique, enfin 18 mois après le stage de nouveau pour une séance de géométrie. Ces enregistrements ont été transcrits.

Ce qui apparaît dans une séance d'enseignement est la résultante de plusieurs dimensions : les modalités personnelles du rapport privé au savoir soumises aux contraintes de la situation d'enseignement, lesquelles renvoient à des contraintes didactiques, aux contraintes institutionnelles, aux contraintes relationnelles et aux propres contraintes intérieures de sujet au sens de sujet de l'inconscient.

Nous, en tant que chercheur, avons fait le choix d'analyser les phénomènes liés aux contraintes didactiques, autant qu'il est possible de faire ce découpage. Nous avons alors comparé les pratiques attendues par les formateurs, c'est à dire les pratiques qu'on pourrait attendre d'un enseignant imaginaire idéal du point de vue du formateur didacticien et les pratiques effectives des enseignants de notre corpus, et nous avons retenu des pratiques la dimension relative à ce qu'ils enseignent en mathématiques.

Nous allons dire comment nous avons fait cette comparaison.

III. METHODOLOGIE UTILISEE POUR ANALYSER LES PRATIQUES DES ENSEIGNANTS FORMES DE RETOUR DANS LEUR CLASSE ET LES EFFETS DU STAGE.

Pour organiser l'étude du travail de l'enseignant en classe, nous avons utilisé les concepts de tâche et activité définis en psychologie ergonomique et pour l'étude des contenus d'enseignement et des activités des élèves nous avons utilisé les outils de la didactique des mathématiques.

Nous allons expliciter l'articulation des différents types de tâches (figure 1) proposée en psychologie ergonomique (J. Leplat, 1997).

Le concept de tâche se décline d'une part en terme de tâche prescrite, c'est à dire les buts et les conditions explicités par un prescripteur et en terme de tâche attendue c'est à dire le contenu réel des attentes du prescripteur qui sont elles au moins en partie implicites.
Pour un enseignant de l'école primaire les prescriptions se trouvent en grande partie dans les programmes et instructions officielles.

Une des tâches prescrites par le Ministère aux enseignants, tâche à laquelle nous nous sommes plus particulièrement intéressée, est :

> L'enseignant doit faire en sorte qu'à la fin de cycle 3, l'élève soit capable "de reproduire, de décrire et de construire quelques figures planes (carré, rectangle, losange, parallélogramme, cercle, triangle), de les identifier dans une figure complexe".
> (Extrait des Instructions 1991)

Cette tâche est très globale elle est prescrite à l'enseignant dans la perspective de l'année scolaire. Il va falloir que l'enseignant l'inclue dans un système de tâches avec des temporalités différentes.
La tâche attendue par le Ministère n'est, elle, pas explicitée, mais on en a des traces, par exemple, dans les évaluations nationales qu'il organise.

L'enseignant, à partir de la tâche prescrite, se redéfinit une tâche, c'est sa représentation de la tâche prescrite. Elle peut différer de la tâche attendue par le Ministère du fait des contraintes de la situation ou de l'interprétation des buts que fait l'enseignant.
Enfin la tâche effective est celle à laquelle l'enseignant répond effectivement et qui peut différer de celle qu'il pense s'être fixée. Elle ne peut que s'inférer de l'activité de l'enseignant.

L'activité est déterminée par la tâche effective, elle recouvre ce que l'enseignant a effectivement accompli. C'est à dire ses actes extériorisés. Mais l'activité de l'enseignant c'est aussi les inférences, les hypothèses qu'il fait, les décisions qu'il prend qui sont liés à la tâche qu'il s'est redéfinie.

À son tour l'enseignant à partir de la tâche qu'il s'est redéfinie pour lui, va prescrire une tâche aux élèves. Cette tâche prescrite doit produire des effets sur le déroulement de la séance et au bout du compte doit permettre une activité des élèves dont la finalité est la construction de savoirs ou de compétences. L'enseignant a une représentation de ce que seront les tâches et activités des élèves qui s'exprimera sous la forme de tâche attendue.

À son tour l'élève, comme l'enseignant l'a fait avant lui, se redéfinit une tâche, et y répond d'une certaine façon.

Le chercheur lui se doit d'analyser ce système. Comment avons-nous procédé ?

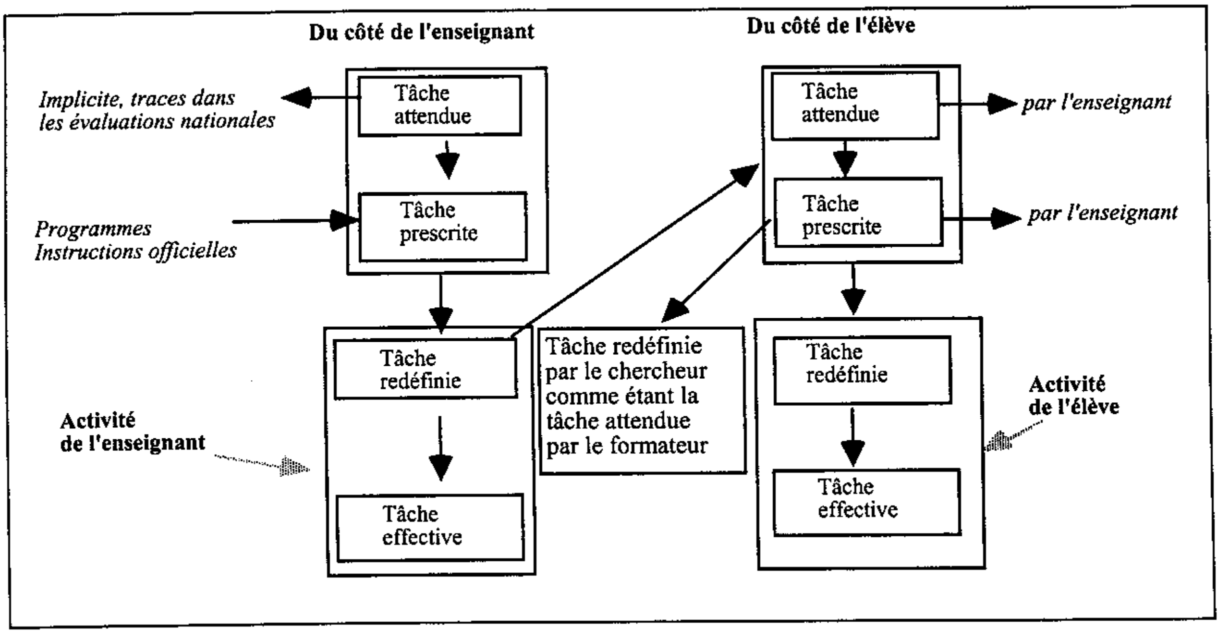


Figure 1

Nous avons défini à partir de la tâche prescrite par l'enseignant aux élèves, ce que pourrait être la tâche experte, c'est à dire la tâche redéfinie après coup par le chercheur comme étant la

tâche attendue par les formateurs.
Puis nous avons comparé cette tâche experte avec la tâche effective de l'enseignant.

Nous avons établi cette comparaison avec les outils de la didactique des mathématiques c'est à dire que nous avons appliqué à la géométrie les critères habituellement adoptés en didactique des mathématiques pour analyser les apprentissages : nous avons regardé notamment s'il y avait des moments adidactiques au cours des séances, s'il y avait des processus de dévolution, nous avons regardé la manière dont les élèves avaient des informations sur la validité de leur travail et si le maître proposait un moment de bilan.

IV. RESULTATS DE CE TRAVAIL.

Nous rappelons que l'objet de ce travail est d'essayer de mesurer les écarts entre le projet du formateur et ce que fait effectivement l'enseignant formé de retour dans sa classe.

1. Analyse des écarts

Il s'agit ici d'analyser les écarts qui se situent au niveau des scénarios entre les tâches effectives des enseignants et les tâches redéfinies par le chercheur comme étant les tâches attendues par le formateur et préconisées pendant la formation.

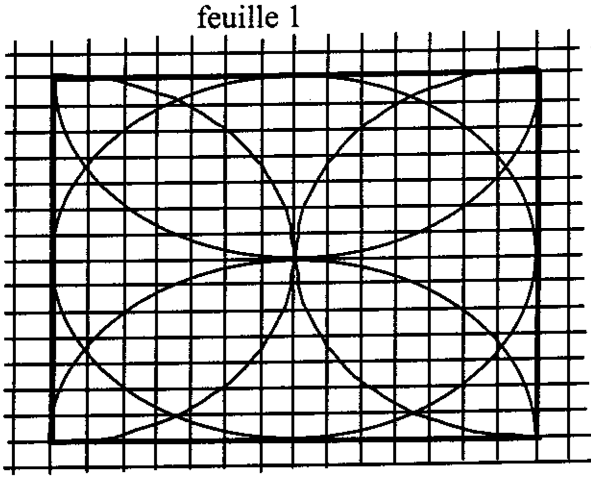
On observe des écarts à plusieurs niveaux, nous allons distinguer :

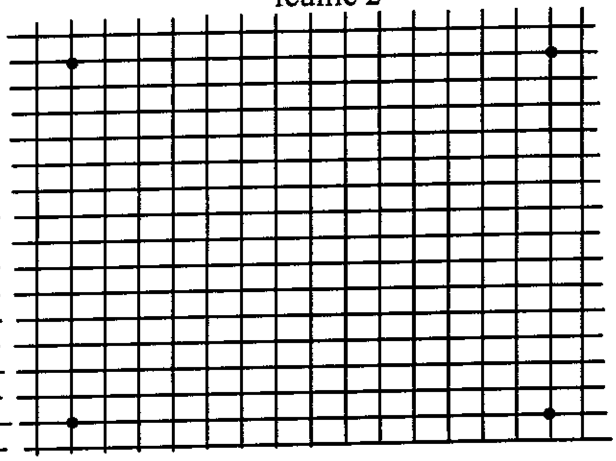
a) Les écarts dans le choix des situations fait par l'enseignant avant la séance ;

b) Les écarts dans la gestion de la séance elle-même

a) Les écarts dans le choix des situations fait par l'enseignant avant la séance

* Nous allons distinguer d'abord <u>le choix des types de situation</u> : certains enseignants choisissent des situations d'action là ou le formateur choisirait une situation de formulation. Prenons l'exemple de Martine au cours de la séance 1, son objectif est que ses élèves de CE2 utilisent correctement le vocabulaire de géométrie, la tâche qu'elle leur prescrit est de reproduire le dessin de la feuille 1 sur la feuille 2.





Martine a prévu un moyen de contrôle pour les élèves : ils superposent leur dessin reproduit avec le dessin initial qu'elle a pris le soin de photocopier sur un transparent.

Lorsque la tâche de reproduction est terminée, et que les élèves ont contrôlé leur dessin, Martine leur demande d'expliquer comment ils s'y sont pris. Les élèves décrivent les actions qu'ils ont menées pour réaliser la reproduction de la figure : essentiellement compter les carreaux pour repérer les points sur le quadrillage, tracer des cercles ou des traits. Martine attendait que les élèves utilisent un discours lié aux propriétés des figures géométriques représentées : carré dont les côtés sont perpendiculaires et ont la même longueur, cercle dont le diamètre à la même longueur que le côté du carré etc.

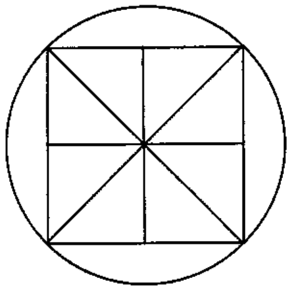
Or Martine a déjà positionné les sommets du carré sur le quadrillage, ce qui évite aux élèves de prendre des informations sur la distance entre ces points. De plus la présence du quadrillage évite que les élèves se posent des questions sur la position des côtés consécutifs du carré, elle est donnée de fait.

Au cours du stage de formation, différents types de situations ont été analysés, ce qui a permis de mettre en évidence quels effets ces types de situations produisent sur l'activité des élèves.

Plus spécifiquement l'intérêt et les limites de la reproduction sur quadrillage ont été étudiés, de même que dans des activités de reproduction, il a été montré que le langage n'est pas nécessaire. Il n'est pas nécessaire en effet de connaître le nom des figures ou d'énoncer les propriétés que l'on a repérées pour les reproduire. Manifestement Martine n'a pas entendu ou retenu cette analyse.

* Les écarts par rapport au choix des dessins géométriques proposés,
Brigitte, au cours de la première séance de géométrie de l'année avec ses élèves de CM2, prescrit la tâche suivante à ses élèves : Les élèves par groupes de deux doivent écrire un message pour que d'autres enfants construisent la figure à partir du message.
Parmi les figures géométriques données à ses élèves de CM2, on trouve des figures adaptées en vue de la production de message pour ce niveau de classe et d'autres figures qui sont inadaptées car trop difficiles soit à analyser, soit à décrire :

Exemple de figure relativement adaptée pour un premier message en CM2
La figure 6

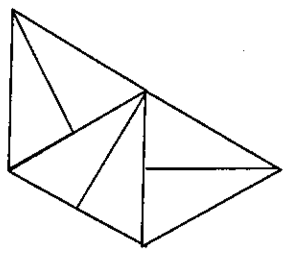


- Il est possible de percevoir d'abord le carré et ensuite le cercle. Dans ce cas, il faut donner les procédés de construction du carré (mesure de la longueur d'un côté) puis ensuite indiquer le centre et le rayon du cercle. Le centre peut être perçu comme intersection des diagonales du carré, le rayon est donnée par la longueur d'une demi-diagonale.

- Il y a d'autres manières de percevoir cette figure. En particulier les élèves peuvent voir d'abord le cercle et ensuite le carré. Dans ce cas après avoir donné les instructions pour tracer le cercle (centre et rayon), il faudra déterminer un procédé de construction du carré, une possibilité est de percevoir les diamètres comme des diagonales perpendiculaires du carré. Ce qui est un procédé moins évident pour des élèves de CM2.

Bien que comportant beaucoup d'objets géométriques, et différentes approches, cette tâche est à la portée d'élèves de CM2.

Exemples de figure difficile à décrire pour un premier message
La figure 7 peut être perçue comme composée de trois triangles équilatéraux identiques, une hauteur est tracée dans chaque triangle. Ils sont adjacents par un côté.



Le message est complexe car il faut préciser la position relative des triangles les uns par rapport aux autres et les hauteurs à dessiner. La désignation des points est nécessaire à l'élaboration du message.

Au cours du stage de formation, les stagiaires ont produit eux-mêmes des messages et ont analysé des figures destinées aux élèves en vue de la production de messages. Cette analyse a permis de faire un certain nombre de constats :

- certaines figures nécessitent de désigner les points pour permettre d'élaborer un message efficace alors que pour d'autres, il est possible de s'en passer.
- on peut observer que les élèves de l'école primaire n'utilisent pas spontanément la désignation des points. Il semble nécessaire de proposer un travail spécifique là-dessus.

Dans ces deux exemples, les écarts se situent au cours de la préparation de la séance : il apparaît que les enseignants n'anticipent pas l'activité cognitive que les élèves doivent mettre en œuvre pour réaliser la tâche demandée.

* Les écarts liés aux choix des variables de gestion des situations.
Au cours de la séance 1, Brigitte propose une situation de message avec 11 dessins différents, chaque groupe de 2 élèves a donc un dessin particulier. De ce fait la phase de mise en commun correction va être longue, de plus il n'y aura aucune comparaison possible entre les messages.
Au cours de la séance 3, Brigitte propose aussi une situation de message mais cette fois, elle donne le même dessin à tous les élèves. La validation des messages ne peut plus fonctionner. En effet les élèves connaissent le dessin à reproduire, les messages ne sont plus les seules informations dont ils disposent pour construire la figure.

Au cours du stage de formation, les formateurs ont fait vivre aux stagiaires une situation de communication. Les stagiaires par groupe de deux, avaient tous des figures différentes. Les formateurs ont fait ce choix pour complexifier la situation en permettant au cours de la même séance d'analyser plusieurs messages différents. Toutefois à la fin de la séance, les conditions de transposition de cette activité dans une classe ont été analysées. En particulier une des conditions retenue est que pour une situation d'élaboration de message de construction dans

une classe, il est préférable de choisir deux figures différentes seulement.
Apparemment ici Brigitte a reproduit directement la situation qu'elle a vécue.

b) Dans la gestion de la séance elle-même

* Certains enseignants donnent une consigne et essaient de la rectifier quand ils s'aperçoivent que la tâche effective de certains élèves ne correspond pas tout de suite à la tâche qu'ils attendent. Ils interrompent le travail de tous les autres élèves pour les en informer et ainsi essayer de les rapprocher de la tâche qu'ils attendent. On obtient alors des interventions en continue des enseignants.
Pour le chercheur qui analyse la séance il règne une certaine confusion dans la classe.

* Les enseignants ne concluent pas à la fin de la séance.
A la fin de la séance le maître veut faire le point collectivement. Mais pour éviter sans doute une correction qu'il doit juger non conforme à ce qu'est la tâche attendue d'un expert, il demande à un groupe d'élèves d'expliciter leurs procédés. Il se trouve alors dans une position très inconfortable car cette explicitation ne correspond pas à ce qu'il attend. Ce qui entraîne des décalages entre ce qu'il veut faire dire aux élèves et ce que les élèves disent effectivement. En général le bilan est reporté à la séance suivante.

Les écarts au niveau du scénario de la séance se traduisent par de nombreux incidents dus aux décalages entre les tâches attendues par l'enseignant et les tâches effectives des élèves dont nous avons donné de nombreux exemples dans la thèse et que nous allons analyser maintenant.

2. Analyse des incidents observés.

L'enseignant a pour tâche d'assurer l'avancement du travail de la classe mais il a aussi de plus en plus pour mission de s'assurer de l'avancement de l'apprentissage de chaque élève de la classe.
Dans les analyses que nous avons menées, nous pouvons constater que la plupart des enseignants gèrent simultanément l'individuel et le collectif, c'est sans doute pour eux une manière de répondre à cette injonction de l'institution.
Mais la gestion simultanée par l'enseignant de ces deux pôles de son activité mène parfois à une impasse : pour faire avancer la classe l'enseignant se sert des productions de quelques élèves or ce choix d'une part ne fait avancer le travail de la classe qu'au prix de nombreux incidents et d'autre part ne répond pas toujours aux difficultés des élèves concernés.

Au cours du stage de formation, les formateurs ont proposé aux stagiaires des situations de

classe comportant un milieu permettant l'action de l'élève, milieu offrant un support assez pertinent du point de vue du sens, à la formulation et à la validation ; autrement dit un milieu offrant une certaine marge pour l'activité mathématique de l'élève, ainsi que pour l'exploitation de cette activité lors du bilan. L'analyse de ces situations avait pour objet de montrer qu'une des activités de l'enseignant consiste à observer et analyser les actions des élèves afin d'anticiper les interventions qu'il devra faire lors de la phase de bilan et de validation.
Mais ce moment de l'activité de l'enseignant est particulièrement délicat à gérer. En effet le phare, ce qui organise les décisions de l'enseignant sont des temps qui concernent la classe et tout se passe comme s'il y avait coïncidence entre l'ensemble des élèves et la classe.
Or pour que l'enseignant perçoive l'ensemble de ses élèves comme une classe, une condition est que la tâche attendue par lui par rapport à sa tâche prescrite soit proche de la tâche effective des élèves. Cependant jamais tous les élèves n'entrent dans ce que l'enseignant attend. Il faut donc que l'enseignant décide si ce qu'il est en train de faire, fait avancer la classe comme il l'a prévu ou si les signaux que lui envoient quelques élèves l'obligent à changer sa prescription. Même dans le cas d'un enseignant "expert" ce type de décisions est délicat à gérer.

Dans notre corpus, quatre enseignantes essaient de mettre en place une gestion de ce type. Or pour trois enseignantes d'entre elles, la tâche qu'elles attendent des élèves ne correspond à la tâche effective, elles considèrent alors que les élèves ne font pas ce qu'elles pensent avoir prescrit, elles sont déstabilisées et reviennent à un mode de gestion type cours dialogué qui leur est plus familier. C'est à dire qu'elles ne retiennent que les réponses qui leur conviennent et d'une certaine façon pensent "effacer" les erreurs et aider les élèves qui n'étaient pas en train de faire ce qu'elles attendaient.

Dans un cours dialogué, ce qui pilote les décisions sont les connaissances que les enseignants ont de l'organisation des savoirs géométriques, ils sont alors dans un système qu'ils peuvent prévoir à l'avance. Par contre au cours de la formation, ce qui a été préconisé c'est de prendre des décisions en fonction de ce qu'on sait ou qu'on perçoit de l'organisation des conceptions des élèves par rapport à ces savoirs, mais ce système peut mener à l'improvisation donc au débordement.

Rappelons que l'objet de ce travail était de mesurer les écarts entre le projet du formateur et ce que fait effectivement l'enseignant formé de retour dans sa classe.
Nous avons observé que ces écarts ne sont pas identiques pour tous les enseignants. Il semble qu'il y ait des paliers dans les effets de la formation sur les pratiques.

3. Les paliers

Le premier palier serait caractérisé par la volonté manifestée par les enseignants de faire évoluer leur pratique en classe. Une des enseignantes de notre corpus (Dominique) ne semble pas rentrer dans ce cadre. Pour elle la formation n'a sans doute pas correspondu à ses attentes.

Au deuxième palier lorsque les enseignants cherchent à entrer dans un processus de changement, ils choisissent des figures plus complexes ou d'autres types de situation.
Ils passent aussi d'une démarche de correction à une démarche qui favorise un contrôle possible par les élèves.
Martine a découvert le transparent pour que les élèves puissent contrôler les reproductions de figure.
C'est la première fois de leur vie professionnelle que Brigitte et Patricia ont proposé une situation de communication.
Ce deuxième palier est caractérisé par le fait que ces choix sont faits avant la séance, au cours de la préparation. C'est à ce niveau que la formation semble avoir le plus d'effets.

Le troisième palier serait caractérisé par la volonté de l'enseignant à laisser un temps effectif pour le travail personnel de l'élèves. Brigitte est la seule enseignante de notre corpus qui est dans cette situation. On peut alors penser qu'elle dévolue d'une certaine façon le problème posé aux élèves. Ce qui est moteur pour l'apprentissage c'est l'interaction entre la tâche et les élèves et non l'ostension directe ou déguisée.
Ce troisième palier concerne l'action de l'enseignante dans la classe.

Le quatrième palier serait caractérisé par la capacité des enseignants à terminer la séance en faisant la synthèse des savoirs et savoirs faire qui ont été effectivement produits par les élèves au cours de la séance. Aucun des enseignants de notre corpus n'a atteint ce palier.
C'est évidemment le moment le plus difficile à gérer, car les enseignants interviennent en fonction de ce qui a été dit et fait pendant la séance, la préparation avant la séance permet de prévoir mais il reste quand même une grande part d'improvisation.

V. REMARQUES ET PERSPECTIVES.

1) Le mot tâche est utilisé pour désigner des réalités très différentes et ce n'est pas si simple à gérer de ce fait.
En effet dans les tâches attendues d'un enseignant, il y a plusieurs types de tâches qu'il va devoir mettre en œuvre et qui sont de tailles très différentes : c'est par exemple, le découpage des contenus d'enseignement qu'il va avoir à gérer sur l'année. Ce découpage et son

organisation dans l'année sont des tâches que l'institution attend de l'enseignant. Il est bien souvent piloté par le choix fait dans le ou les manuels utilisés par l'enseignant.
Il y a ensuite un découpage plus fin par thème, puis enfin par séance.
Or on utilise le concept de tâche de la même manière alors que l'activité de l'enseignant qui en découle n'est pas de même nature et n'a pas la même temporalité.

Mais il y a aussi interactions de différents types de tâches liées cette fois au fait que l'enseignant de l'école primaire est polyvalent. C'est à dire qu'à côté de l'enseignement des mathématiques, il a aussi pour mission d'enseigner le français, l'histoire géographie, etc. Il se doit donc d'une certaine façon d'organiser une cohérence entre ces différents enseignements. Ce qui est une contrainte supplémentaire sans doute très forte sur les tâches qu'il redéfinit pour lui et qui peut-être interagissent les unes avec les autres.

Une des perspectives de recherche pourrait être alors de regarder par un travail en parallèle de plusieurs chercheurs de disciplines différentes si les phénomènes observables dans une discipline relève des spécificités de la discipline ou de plusieurs disciplines ou si elles sont prioritairement sous d'autres types de contraintes, par exemple le fait que la classe est dans une ZEP, etc.

2) Les analyses diagnostiques que nous avons faites sont évidemment partielles au regard des phénomènes complexes qui se jouent au cours d'une séance de classe. Nous avons fait une analyse didactique et ergonomique des séances et il ne rentrait pas dans notre propos d'interpréter certains écarts très importants entre pratique effective et pratique attendue pour Dominique et Florence en particulier.
Une analyse en terme de rapport au savoir serait peut-être nécessaire pour comprendre ce qui ne s'est pas joué pour elles ou ce qui s'est joué autrement dans cette formation que ce qui était attendu par les formateurs mais cela relève d'une tout autre recherche.

3) Nous ne sommes pas un chercheur venant de l'extérieur enquêter sur un lieu. Le modèle sous jacent à cette méthodologie n'est pas une observation participante de type ethnologique, le modèle est plutôt de type participation auto-observé. Nous ne sommes pas simplement dans l'observation des enseignants mais aussi dans notre propre observation. Ceci n'est pas élucidé dans la thèse mais fait partie des contraintes de situation et en ce sens contribue à l'explicitation d'une culture professionnelle dans ses limites et dans sa pertinence qui est celle d'une connaissance intérieure du système de la formation.
Alors il y a un autre objet à cette recherche, à un autre niveau, celui de participer à l'élucidation des savoirs et des savoir-faire des formateurs.

4) Nous avons choisi la géométrie comme contenu mathématique du stage de formation. Or

c'est un domaine où les recherches en didactique ne sont pas encore abouties.
En particulier ce qui a manqué au formateur pour concevoir la formation c'est d'une part le manque de clarté des finalités de cet enseignement à l'école primaire d'autre part une analyse des processus de conceptualisation des savoirs géométriques et des ingénieries didactiques qui piloteraient ces processus.

5) La question à l'origine de ce travail était d'évaluer les écarts entre le projet du formateur et ce que fait effectivement l'enseignant formé de retour dans sa classe. L'objectif étant à terme connaissant ces écarts de réfléchir à une formation qui minimise ces écarts.
Les enseignements que nous avons tirés de ce travail pourraient peut-être permettre maintenant d'envisager une autre formation en élaborant un scénario et en l'évaluant.
En attendant d'avoir avancé sur la question de savoir "comment les pratiques se forment", nous pouvons peut-être pour réduire l'écart entre tâche attendue par les formateurs et tâche effective des stagiaires, faire des choix dans ce qu'on va transposer des recherches en didactique pour les proposer dans les formations. Ces choix seraient déterminés par une double contrainte : d'une part ce qu'on pense être déterminant pour l'apprentissage des élèves mais aussi par ce qu'on évaluerait comme étant transposable dans la classe par l'enseignant formé.

Y A-T-IL UN PILOTE DANS LA CLASSE ? APPORT DES CONCEPTS ET METHODES DE PSYCHOLOGIE ERGONOMIQUE POUR L'ANALYSE DE L'ACTIVITE DE L'ENSEIGNANT

Janine Rogalski[32]
Laboratoire Cognition & Activités Finalisées ESA 7021
Université Paris8-CNRS

PREAMBULE

Les concepts et méthodes de la psychologie ergonomique, que nous présentons ci-après, sont proposés comme des outils pour le chercheur en didactique et pour le formateur. La visée épistémique centrale est la compréhension des processus qui impliquent l'enseignant comme sujet psychologique, dans leur diversité comme dans leurs invariants : cela inclut l'analyse de l'activité ainsi que celle des compétences professionnelles, de leur formation et de leur évolution par l'expérience. Ces concepts et méthodes peuvent outiller le formateur en ce qui concerne les implications, pour sa propre conduite des processus de formation des enseignants, des connaissances acquises dans la visée épistémique. Ils peuvent aussi outiller la médiation du formateur pour faire fonctionner la réflexivité de l'enseignant sur sa pratique, débutante ou non. Cette visée pragmatique pour la formation est indépendante de la réponse à la question — posée entre autres par Tochon (1989) : "peut-on former les enseignants novices à la réflexion des experts". En tous cas, nous ne voyons pas de raison de faire de ces concepts et méthodes un objet que l'on enseignerait aux (futurs) enseignants — pas plus d'ailleurs que des connaissances produites.

Pourquoi étudier l'activité des enseignants ? Pour rendre compte de phénomènes observés dans les situations d'enseignement, dans la reproduction des situations didactiques (Artigue, 1986), à la fois dans leurs invariants et dans leur diversité. Pour désintriquer — au sens d'élucider le couplage — acquisition de l'élève dans sa dynamique propre et intervention didactique sur le rapport de l'élève au contenu d'enseignement. D'un point de vue de didactique professionnelle, pour identifier les processus de formation et de développement des compétences, en vue d'intervenir lors des situations de formation des enseignants (formation initiale au métier, ou formation continue).

[32] rogalskij@univ-paris8.fr

L'idée de considérer l'enseignant comme un professionnel n'est en rien nouvelle, ni celle de considérer la situation d'enseignement comme contrôle de processus, position déjà présente dans les actes d'un colloque franco-soviétique sur l'enseignement programmé (*Bulletin de Psychologie* (1973/74). Le diagnostic (Vermersch, 1979), la prise de décision (Chartier, 1989), la réflexivité (Tochon, 1989), les savoirs professionnels (Clerc, 1996), l'expertise enseignante (Tochon, 1993; Chartier, 1998), autant de notions qui ont déjà rattaché les recherches dans le champ de l'éducation à des questions sur l'activité et la compétence professionnelles. Il faut cependant souligner que ces approches ne placent pas au premier plan les contenus d'enseignement en jeu. Par exemple, lorsque Clerc souligne le besoin de "maîtrise d'un contenu d'enseignement" ou le fait que l'enseignant doit "revoir la totalité du contenu d'une leçon à la lumière des exigences de la classe" (Clerc, 1996, pp.306-307), il ne spécifie pas le statut de ce rapport au contenu enseigné, ni par conséquent la forme que doit prendre ce nouveau rapport au contenu de savoir.

Ce que nous proposons d'introduire est un cadre théorique, avec ses concepts et ses méthodes d'analyse, qui va nous permettre d'articuler analyse de l'activité de l'enseignant de mathématiques, analyse cognitive des processus d'acquisition chez l'élève et analyse didactique, où nous prenons l'acception de didactique, dans le sens de Brousseau, comme épistémologie expérimentale.

I. INTRODUCTION

L'étude de l'enseignant est devenue une problématique classique en didactique des mathématiques, et l'École d'été de 1997 lui a consacré une part importante (Bailleul et al. 1997), comme dans la communauté de psychologie de l'enseignement des mathématiques (On en trouve l'effet dans la place des communications sur ce thème dans les conférences de PME). La formule "étude de l'enseignant" est délibérément imprécise, car des approches diverses existent, au sein même de la didactique : pour ne prendre que le contexte français, l'étude de l'enseignant dans les développements de la théorie des situations (Brousseau 1995; Margolinas, 1997), celle des approches écologique ou anthropologique proposée par Chevallard (Chevallard, 1995; 1997; 1999; Artaud, 1997 ou l'étude—dans la lignée de Piaget et Vygotsky— de l'activité enseignante comme médiation dans les processus de conceptualisation et d'appropriation des connaissances par l'élève (Vergnaud, 1994), ne cherchent pas à répondre aux mêmes questions, n'ont pas les mêmes instruments conceptuels et méthodologiques. Pourquoi proposer une approche supplémentaire ? à quels problèmes se propose-t-on de répondre ? Quels acquis espère-t-on capitaliser d'autres études sur l'activité d'autres acteurs humains, que l'on poserait comme pertinentes ? Cette discussion des apports potentiels de l'approche de psychologie ergonomique que nous proposons sera pour l'essentiel dans le futur de ce texte : dans les usages que les lecteurs feront de cette approche pour répondre à leurs propres interrogations, ou pour en expliciter de nouvelles.

Nous allons donc partir du métier de l'enseignant tel qu'on peut l'approcher en psychologie ergonomique, pour expliciter des lignes d'analyse qui découlent de cette approche.

II. LE METIER D'ENSEIGNANT DE MATHEMATIQUES

Nous allons utiliser dans un premier temps le singulier de "métier d'enseignant de mathématiques", alors qu'il faudrait parler des métiers d'enseignant de mathématiques, puisqu'aussi bien les recrutements, les cadres institutionnels et la nature des conditions d'exercice diffèrent considérablement entre un professeur des écoles, un professeur de collège ou de lycée, un enseignant de mathématiques dans l'enseignement supérieur, pour ne considérer que l'enseignement général.

1. L'objet de l'action

Dans tous les cas cependant, un point commun d'analyse de ces métiers les différencie d'autres : la raison d'être de l'enseignant en mathématiques (ce pour quoi il est recruté, évalué et payé) est de transformer les relations des élèves des classes qui leur sont confiées avec un savoir mathématique, objet de l'enseignement dans ces classes. Une première caractéristique différencie le métier d'enseignant de celui d'autres professionnels dont l'activité a été étudiée en psychologie ergonomique : il ne s'agit pas d'intervention dans le monde des objets, des artefacts matériels ou immatériels, mais de transformation d'un (autre) sujet humain ; cette propriété est partagée par les métiers de formation, comme par ceux de thérapie ; dans le cas de l'enseignant de mathématiques la transformation visée se précise, et caractérise ce métier : il s'agit de transformer les relations entre l'élève et un savoir mathématique, enjeu de l'enseignement. L'objet de l'action de l'enseignant de mathématique est donc en quelque sorte un objet relatif, dont la nature même va rendre plus délicate à étudier l'activité de l'enseignant.

Comme il s'agit d'un rapport à un contenu de savoir mathématique, étudier l'activité de l'enseignant de mathématique ne peut se passer d'une composante de nature "épistémologique", touchant à l'analyse du savoir en jeu. Pour analyser l'activité de l'enseignant de mathématiques on a donc besoin d'une expertise sur ce savoir, tout comme on a besoin d'expertise sur les procédures de pilotage pour étudier l'activité d'un pilote dans le cockpit d'un avion. La position prise ici est forte puisqu'elle exclut qu'une analyse généraliste, prenant seulement en compte un rapport d'enseignant à élève, permette de comprendre l'activité propre de l'enseignant de mathématique et de former le candidat à ce métier [33].

[33] La dimension épistémologique dans l'analyse du rapport enseignement / apprentissage mathématiques est explicitée de manière convergente en didactique, par exemple dans (Artigue, 1995), ou (Sierpinska, 1999).

2. Le contrat (professionnel)

Dans son métier, l'enseignant de mathématiques est lié à un système prescripteur par un contrat. En effet des tâches lui sont prescrites (voir infra la définition de "tâche" dans le cadre de la psychologie ergonomique), qu'il doit accomplir en mettant en oeuvre des compétences (en principe) attestées par les procédures de recrutement. Formellement, un contrat le lie à son employeur (les textes régissant le métier), c'est à dire celui qui lui doit salaire: l'État, s'agissant des enseignants, membres de la fonction publique.

Mais au-delà de ce contrat formel, c'est avec un système prescripteur plus complexe que l'enseignant de mathématiques est dans une relation contractuelle qui comporte une part importante de définition indirecte et une part non moins importante d'implicite, voire de devant-être-non-dit). Dans ce système interviennent explicitement l'État comme représentant de la collectivité nationale, la composante ministérielle qui détermine les programmes et instructions, l'inspection (qui donne la note pédagogique), et aussi la direction de l'établissement (qui donne la note administrative). Plus ou moins implicitement, la communauté mathématique intervient dans les processus qui rendent légitime—ou non—un contenu d'enseignement, et les autres composants de la noosphère que sont les parents d'élèves[34].

Le double point de vue des "partenaires" (en termes de systèmes) en ce qui concerne la composante "axiologique" (celle qui concerne les visées) du métier enseignant est développé de manière approfondie dans le cadre proposé par Portugais, et utilisé pour mettre en relation l'intentionnalité et le cognitif (Portugais, 1999).

Ce contrat présente — toutes choses étant différentes par ailleurs — des propriétés communes avec le contrat didactique qui lie l'enseignant de mathématiques à la classe à laquelle il enseigne. En particulier, il y a une distance inévitable entre le prescrit (formel et textuellement explicité) et l'attendu (qui détermine *in fine* l'évaluation portée sur la réalisation de la tâche). Ce rapport entre formel / prescrit et attendu / réel est un élément largement présent dans les études sur le travail, qu'il s'agisse de sociologie ou de psychologie. Les notions de tâche et activité vont apporter des précisions sur les manifestations du contrat en termes de conditions de l'action.

3. Travail de l'enseignant et procédés didactiques

Considéré du point de vue de l'action de l'enseignant de mathématique sur son objet : le rapport des élèves à un savoir mathématique, on peut définir le métier d'enseignant comme

[34] On peut observer un tel système en acte lors de changements importants dans le système d'enseignement, ou plus particulièrement dans la définition de "standards professionnels" (Mc Leod, 1996).

consistant à "introduire les élèves dans un *procédé didactique*, c'est à dire un dispositif conçu pour produire un effet sur le rapport au savoir visé".

Le dispositif est donc défini, conçu, pour que le rapport au savoir en jeu soit, dans un état voulu, à l'issue du "passage" au travers du dispositif, sous des conditions plus ou moins explicites quant à l'état initial de ce rapport au savoir. La théorie des situations didactiques peut être considérée ici comme théorie de la conception des) procédés didactiques.

Que le procédé didactique ait été défini (*designed* dans le sens anglo-saxon de conception, qui définit le produit qui doit répondre à un ensemble de contraintes) par l'enseignant, ou qu'il lui soit proposé, son travail d'enseignant va être d'introduire effectivement les élèves dans le dispositif, et d'évaluer ce qu'il advient du rapport au savoir visé dans ce passage par le procédé didactique. Cette évaluation peut se situer en aval du procédé (c'est le sens le plus habituel du terme); elle peut aussi se situer durant le passage dans le procédé (en temps réel). On voit paraître déjà une dimension dynamique dans le travail de l'enseignant : l'établissement d'un diagnostic (a priori, a posteriori ou en ligne) des élèves en regard du savoir visé (c'est le *situation assessment* dans la terminologie anglo-saxonne dans le domaine de la gestion d'environnement dynamique).

En fait, et nous allons y revenir à propos des rapports tâche/activité, la temporalité intervient à un plus d'un titre. Tout d'abord, en termes "globaux", la temporalité de l'activité de l'enseignant se décline en termes d'une hiérarchie de "tempos" : temps long de l'année scolaire, qui est celui dans lequel s'expriment les objectifs des programmes, moyen terme d'intervention sur un domaine délimité de savoir (la mesure des surfaces en CM, ou en 6ème, par exemple), et court terme d'une séance de classe. A ces différentes échelles correspondent des différences dans la définition des procédés didactiques. La dominante des recherches sur l'activité de l'enseignant concerne cette dernière temporalité (pour des raisons dont nous ne discuterons pas ici) : il ne faut pas pour autant en oublier les autres. On peut d'ailleurs identifier aussi une micro-temporalité : celle des épisodes identifiables dans le décours d'une séance (en deçà souvent des phases bien repérées dans l'analyse des situations didactiques).

4. Enseigner c'est gérer un environnement dynamique

Considérant la temporalité dans toute son extension, le passage des élèves dans un procédé didactique se représente mieux en termes de gestion d'un environnement dynamique qu'en terme d'un processus de transformation. En effet, nous l'avons annoncé en introduisant notre approche, les rapports des élèves au savoir ne se modifient pas sous les seuls effets de l'action du procédé didactique géré par l'enseignant : des processus développementaux sont à l'oeuvre, dans la mesure où les connaissances des élèves se modifient sous l'action d'une dynamique interne —mieux étudiée pour les notions "élémentaires" sur le nombre ou l'espace que sur la notion de fonction ou d'espace vectoriel—, les interactions entre élèves dans et hors la classe travaillent elles aussi le rapport au savoir, les interventions externes jouent leur rôle, et enfin l'activité propre de l'élève modifie son rapport au savoir, et ce d'autant plus que son autonomie est attendue, voire nécessaire.

Nous avons dans ce qui précède effectué des glissements entre classe / élèves (au pluriel) / élève (comme sujet singulier). En fait, s'il est relativement facile d'identifier dans l'objet de l'action de l'enseignant le savoir en jeu, il est plus difficile de déterminer si le rapport à ce savoir concerne 1) une entité relativement abstraite : la classe, comme construction théorique de didactique (ou de sciences de l'éducation), 2) un ensemble hétérogène : les élèves de la classe , ou 3) chaque élève dans sa singularité (comme sujet psychologique individuel, et non comme sujet didactique). En fait, nous postulons qu'une analyse de l'activité de l'enseignant, dans sa totalité, comme un pilote nous a invité les ergonomes à le faire en ce qui concerne son propre métier (Jouanneaux, 1999), doit à la fois viser et permettre l'identification de "qui" est à être modifié dans son rapport au savoir mathématique.

Avant d'avancer dans l'analyse de l'activité de l'enseignant nous allons présenter les notions relatives de tâche et d'activité, qui permettent d'expliciter un élément essentiel du cadre théorique de psychologie ergonomique dans lequel nous nous situons. Ce qui nous permettra de mieux expliciter ce que nous entendons par pratiques (un terme polysémique, du fait du nombre de cadres théoriques dans lesquels on peut le trouver).

III. LES NOTIONS RELATIVES DE TACHE ET ACTIVITE

La distinction entre tâche et activité a été explicitée plus particulièrement par Leplat et Hoc, dans un tradition de psychologie ergonomique marquée à la fois par l'approche piagétienne et par les approches développées dans la psychologie soviétique dans la lignée de Vygotski. Schématiquement, la tâche est décrite du côté des objets et des moyens de l'action sur l'objet, et l'activité du côté de ce que le sujet met en oeuvre, hic et nunc, pour la réalisation de la tâche. Si on se place du point de vue du contrat entre le système prescripteur et professionnel considéré (ici l'enseignant de mathématiques), la tâche est d'abord du côté du prescripteur et l'activité de réalisation de la tâche est toujours du côté du sujet de l'action professionnelle[35].

1. La tâche comme but à atteindre, quant à l'état de l'objet d'action

La tâche est ce qui est à faire, plus précisément : le "but qu'il s'agit d'atteindre sous certaines conditions", selon la définition de Leplat & Hoc (1983), qui développent la notion proposée par le psychologue soviétique Léontiev, élève de Vygotsky.

[35] Les régulations entre ces deux interactants ont été théorisées dans le cadre de la sociologie du travail; la pertinentce de la théorie de la régulation conjointe a été montrée dans des études de terrain proches des notres (de Terssac, 1992). On peut y trouver des éléments essentiels pour aborder la question de l'autonomie, la liberté de l'enseignant (comme professionnel).

Exemples : "apprendre à lire aux enfants du CP"

"faire acquérir les notions [essentielles] de mesure des longueurs, surfaces, volumes au CM", sont des buts à atteindre sous certaines conditions (les moyens fournis à l'enseignant, ceux de l'élève, le temps alloué etc.).

Il y a en fait deux manières de définir le but. En terme de verbes comme nous venons de le faire, la définition insiste sur l'action, et contribuera d'ailleurs à rendre plus difficile la distinction tâche et activité. Une définition plus statique s'est avérée productive dans l'étude de la gestion d'environnement dynamique, en particulier lorsque le but ne détermine à l'évidence pas les moyens d'action pour l'atteindre. On définit alors le but comme un état-cible, celui que doit avoir l'objet de l'action lorsque la tâche sera (bien) réalisée. Le but "faire acquérir la mesure de surface comme produit de mesures de longueurs" se déclinera en : "l'élève /les élèves doi(ven)t savoir que, et être capable(s) de ..". On voit déjà sur cet exemple succinctement présenté, que la définition de l'état-cible apparaît plus exigeante que l'énoncé de l'action "faire acquérir", en fait la définition de l'état-cible introduit une évaluation de l'état, ici du rapport élève / savoir sur les mesures.

Les conditions de réalisation du but, peuvent et doivent s'expliciter plus précisément lorsqu'il s'agit d'analyser l'activité, en particulier si on veut évaluer les compétences mises en jeu dans l'activité, ou chercher comment former / développer ces compétences (cas de la formation des enseignants de mathématiques). On peut citer : les horaires scolaires, le nombre d'élèves maximum (ou minimum) dans la classe, l'organisation scolaire (un ou plusieurs enseignants pour une même classe, un ou plusieurs niveaux pour un même enseignant, une ou plusieurs classe de même niveau ..), le fonctionnement de la classe : fonctionnement en classe entière, dédoublée, l'existence d'un soutien institutionnalisé, le statut du travail à la maison, les conditions de sécurité côté élèves ... la liste n'est pas close.

Une telle définition ne préjuge pas du niveau auquel la tâche est décrite, ni de l'espace de liberté du sujet, son autonomie dans la réalisation de la tâche. Pour une tâche définie à un niveau générique, avec une large autonomie de moyens, et portant sur un large empan temporel, on parle aussi de mission. Nous utilisons l'un ou l'autre terme, selon que nous cherchons à insister sur l'autonomie (mission) ou qu'on focalise sur les buts et moyens (tâche). Les divers lieux de prescription du système d'enseignement définissent la tâche (ou la mission) des enseignants de mathématique à des niveaux différents.

2. L'activité de réalisation d'une tâche

L'activité est ce que développe un sujet donné lors de la réalisation de la tâche : non seulement ses actes extériorisés, mais aussi les inférences, les hypothèses qu'il fait, les décisions qu'il prend, la manière dont il gère son temps; et au-delà la gestion de son état personnel — sa fatigue, son stress, mais aussi le plaisir pris à l'interaction avec les élèves dans telle situation de classe etc. ...

Une part de l'activité est directement finalisée par le but de la tâche à accomplir, mais l'activité dépasse les actions sur "ce qui est à faire". Par exemple, un enseignant peut changer, d'une année sur l'autre, de problèmes, de séquence didactique sur un contenu donné, etc., non pas à cause de l'impact sur les élèves, mais pour maintenir sa propre motivation, éviter l'ennui de la répétition. Les processus d'obsolescence existent aussi du côté de l'enseignant, pas seulement ceux de l'obsolescence des objets du savoir du côté de l'élève...

Concernant l'enseignant, et celui de mathématiques en particulier, l'activité va comporter des éléments importants de définition de sa propre tâche, du fait de la latitude laissée officiellement dans les textes quant aux "moyens pédagogiques". En fait, avant de réaliser quelque tâche que ce soit, un sujet humain va toujours avoir une première activité qui est la représentation de ce qu'il a à faire, représentation construite par un processus d'interprétation de la prescription qui lui a été faite. Pour rendre compte des décalages prescrit / réel, et des interactions dans le travail entre prescripteurs et réalisateurs de tâches, une série de distinctions ont été introduites entre la tâche prescrite (le texte de la tâche) et l'activité (ce qui est mis en oeuvre par un sujet). Cette distinction a été introduite d'abord pour rendre compte de la fausse transparence de la tâche, et en particulier de l'implicite, qu'il soit non dit ou non conscient, voire inconscient — au sens de ce terme dans l'approche développée par C. Blanchard-Laville pour l'étude de l'enseignant dans la classe (Blanchard-Laville, 1997); elle est fort utile pour considérer les interactions entre l'enseignant et ses élèves.

3. Tâche prescrite, attendue, représentée, effective et activité

La notion de tâche se décline en plusieurs "avatars". Les différences peuvent porter sur divers points : le domaine d'exercice du métier d'enseignant, l'organisation de l'année scolaire, la préparation des séances centrées sur une notion particulière, le cours fait à telle classe, tel jour, sur tel sujet. Plus on se rapproche de la situation de gestion directe de la classe, en face à face et en temps réel, plus la définition de la tâche est à la charge de l'enseignant. Toutefois, les interventions lors des inspections rappellent l'existence d'une tâche attendue, qui ne touche pas seulement les missions générales, mais bien les moyens concrets de les réaliser.

Du côté du prescripteur on différencie :

- la **tâche prescrite** : ce sont les buts et les conditions explicités dans la prescription; elle est explicitée dans tous les textes et énoncés de l'institution (définition statutaire du métier, textes de programme, instructions, interventions de l'inspection, ..);

- la **tâche attendue** : c'est le contenu réel des attentes du prescripteur (non dites, non dicibles, insues ou inconscientes); c'est l'esprit de la tâche du point de vue du système prescripteur, alors que la tâche prescrite en serait la lettre ; c'est elle qui base l'évaluation de l'action de l'enseignant (de qui on n'attend par exemple jamais que tous les élèves aient tel savoir ou telle capacité mathématique après son enseignement, mais que "suffisamment" d'élèves en témoignent).

Du côté du réalisateur de la tâche, on distingue :

- la tâche **redéfinie** : c'est la représentation de la tâche que se donne l'enseignant de mathématiques. Elle est marquée par les représentations qu'il a concernant le savoir et l'activité mathématique; elle est aussi marquée par son système de valeurs: par exemple, un enseignant peut considérer pour une classe ou certains élèves que les intéresser à faire des mathématiques est le but majeur de son enseignement, et le fait de "faire le programme" au mieux un sous-produit. La tâche redéfinie est celle que l'on peut faire expliciter à l'enseignant au cours d'entretiens, ou dans des questionnaires qui en sont une transposition sans interaction face à face. Sa caractéristique est d'être explicitable, tout comme la tâche prescrite est explicitée.

- la tâche **effective** : c'est celle à laquelle il répond effectivement, et qui peut différer de celle qu'il pense s'être fixée. L'**activité** est déterminée par la tâche effective, ce que le sujet a effectivement accompli, les buts visés par l'action, les moyens effectivement mis en oeuvre, les contraintes effectivement respectées.

La tâche effective ne peut que s'inférer de l'activité de l'enseignant (ou du sujet professionnel considéré), dont elle peut être considérée comme un modèle partiel. Un enseignant peut vouloir par exemple introduire un concept impliqué dans la mesure de surface à partir d'une situation a-didactique où les actions des élèves de la classe face à un univers problématique conduiraient d'elles-mêmes à ce que le concept visé ait le statut opératoire attendu. Le déroulement effectif de la séance peut être tel que, sans le vouloir et souvent sans le savoir, le processus d'opérationalité du concept soit déclenché par l'enseignant ou le "bon élève" qui assure alors *de facto* le même statut.

Toutefois, la tâche effective peut être accessible au travers d'une activité réflexive de l'enseignant. Une méthode pour promouvoir une telle activité est l'entretien avec l'enseignant (Nardi, 1999); une autre méthode classique de l'ergonomie est l'auto-confrontation : le sujet commente pour l'analyste des traces de son activité (traces vidéo, audio, notes personnelles, traces au tableau pour l'enseignant, notations sur des copies, ...). La tâche effective se révèle souvent dans sa différence avec la tâche redéfinie par l'exclamation (de frustration) "mais c'est pas ça que je voulais faire !.".

L'activité, enfin, est ce qui se réalise contextuellement, hic et nunc, tel jour, lors de telle séance, avec tels élèves .. On en cherche évidemment à la fois des invariants "ce que fait X avec tel type de classe, pour tel type de contenu", et des variables : "avec quels types d'élèves, X fait-il ceci ou cela?", "pour quel type de contenu observe-t-on ceci?", "qu'est ce qui différencie X qui est un enseignant chevronné, de Y qui débute ?".

4. Le double point de vue des sujets : maître et élève

L'analyse que nous venons de présenter qui décline les rapports tâche(s) et activité pour l'enseignant, peut être conduite de manière similaire pour l'élève, comme le présente le schéma de la figure 1 ci-dessous. En effet, un des composants de l'activité de l'enseignant consiste à donner aux élèves des tâches à accomplir. La visée est que l'élève développe une activité dont l'enseignant attend / prévoit qu'elle produise un effet donné sur le déroulement de la classe, sur la mise en évidence de connaissances de l'élève, sur la construction des savoirs ou des compétences en jeu lorsque la tâche est prescrite. L'élève interprète la tâche prescrite (le texte de la tâche) en fonction du contexte, et dans le cadre du fonctionnement d'un contrat didactique (dont on sait la part inéluctable d'implicite).

Il faut souligner que, contrairement à l'usage habituel du terme "*activité*" dans le champ éducatif, l'activité attendue de l'élève peut être le fait qu'il écoute le cours, essaie de comprendre, et prenne des notes. Il faut remarquer aussi qu'il s'agit de tâche attendue, mais qu'elle peut aussi pour tout ou partie être rappelée sous forme de prescription par l'enseignant : "prenez votre cahier", "notez bien cela", "mais écoutez donc !", éventuellement de manière négative : "ce n'est pas la peine de noter, c'est dans votre livre".

On peut analyser certains dysfonctionnements — des attentes non satisfaites — par le fait que les élèves / des élèves répondent à une autre tâche, par exemple prennent la tâche au pied de la lettre, ou réalisent une autre tâche. L'enseignant analyse les productions de l'élève, une partie observable de son activité, en fonction de la tâche attendue, alors que l'élève vise à répondre à la tâche qu'il se représente, mais peut effectivement réaliser une tâche encore différente.

Attention, la distinction tâche / activité n'est pas naturelle ; elle va à l'encontre de formulations comme "les activités que l'on proposera à l'élève" que l'on peut rencontrer dans des textes pédagogiques divers (programmes, instructions, descriptions de fonctionnements de classe), et qui s'expliciteraient comme "les tâches que l'on proposera .." dans un contexte de psychologie de l'activité. Néanmoins, cette distinction entre tâche et activité est très importante pour repérer ce que l'on peut appeler, provisoirement au moins, des "malentendus" entre maître et élèves, ou des "résistances" lors de changements de programme.

Globalement, un but de l'analyse des interactions tâches/activités pour chacun des sujets individuels enseignant et élève est d'identifier les décalages potentiels pour mieux pouvoir les comprendre (du point de vue du chercheur, ou du formateur d'enseignant) ou mieux les contrôler (du point de vue du formateur d'enseignant ou de l'enseignant lui-même).

La figure 1 résume la double articulation des systèmes de tâches/activités dans les deux contrats professionnel et didactique. Les tâches prescrites — respectivement par l'institution à l'enseignant, et par l'enseignant à l'élève —, sont des observables. Les tâches attendues doivent être inférée des modalités de régulation du contrat, et en particulier des évaluations. L'activité est pour partie observable (dimensions externalisées), et pour partie inférable (en particulier quant aux processus cognitifs et aux connaissances d l'élève).

SYSTEME PRESCRIPTEUR	ENSEIGNANT (E)	
contrat prescripteur	professionnel / enseignant	
tâche prescrite		
tâche attendue		
	tâche représentée pour E	
	tâche réalisée par E	
	ACTIVITÉ de l'enseignant dont la prescription de tâches aux élèves	
	ENSEIGNANT (E)	**ELEVES / CLASSE (e)**
	contrat enseignant	didactique / élèves /classe
	tâche prescrite par E	
	tâche attendue de E	
		tâche représentée pour e
		tâche réalisée par e
		ACTIVITÉ des élèves

Figure 1. Articulation TÂCHES : ACTIVITÉ pour l'enseignant et pour l'élève.

L'enseignant prescrit la tâche en fonction des attentes qui sont les siennes en matière d'effet sur les relations élèves /savoir mathématique ; il vise à ce que l'activité de l'élève réponde à la tâche attendue (par un processus de dévolution).Les élèves ont accès direct à la tâche prescrite et c'est le contrat didactique qui va être un des déterminants de leurs inférences (implicites ou non) sur la tâche attendue (*hic et nunc*) par l'enseignant. L'enseignant peut accéder aux résultats de la tâche réalisée, et aux observables de l'activité des élèves. L'identification de la tâche représentée, qui peut conduire à modifier la tâche prescrite (la consigne le plus souvent), requiert une activité inférentielle de la part de l'enseignant.

Il faut souligner que les inférences des élèves ou de l'enseignant — omniprésentes dans les interactions sociales — peuvent être immédiates, automatiques et non directement conscientes, elles peuvent nécessiter un véritable "calcul". L'évaluation par l'enseignant de ce qui se passe dans la classe du côté des élèves est donc un composant de son activité qui n'est pas du tout transparente.

IV. L'ORGANISATION DE L'ACTIVITE DE L'ENSEIGNANT

L'analyse de l'organisation de l'activité est au coeur des concepts et méthodes de la psychologie ergonomique. Cette organisation peut être envisagée en particulier du point de vue des connaissances et représentations, du point de vue de la structure des tâches, et du point de vue de la temporalité de l'activité ; ces points de vue ne sont pas indépendants, mais il est nécessaire de distinguer logique de la structure et organisation temporelle[36], qu'il s'agisse de tâche ou d'activité.

Ainsi on peut identifier des emboîtements de tâches de différents niveaux, depuis la définition d'ensemble de la mission d'un enseignant de mathématiques, jusqu'à la gestion d'un épisode particulier en classe (la réponse à la question d'un élève par exemple, ou la décision à prendre devant le "décrochage" d'une classe). Une tâche définie - introduire la multiplication vectorielle par exemple dans une séance de classe en seconde - peut s'analyser d'une part dans son organisation temporelle : préparation, exécution devant la classe, évaluation a posteriori.

L'activité de l'enseignant peut s'analyser dans les termes des actions qui vont la composer : évaluation des connaissances initiales des élèves (qui peut se faire par anticipation en amont de la séance, ou en temps réel au début, et dans le cours de la séance), mise en oeuvre de la conduite de la séance qui a été planifiée dans la phase de préparation, décisions en temps réel liées à l'activité des élèves et aux interactions dans la classe.

1. L'articulation temporelle des tâches et de l'activité

L'unité minimale pour analyser l'articulation temporelle, le "tempo" de l'activité enseignante est l'année scolaire, en tous cas en général dans le cas du système d'enseignement. A ce niveau "stratégique", l'enseignant a pour mission d'enseigner un certain contenu (savoirs et compétences) dans un certain type de classe et certaines conditions d'exercice. Il a aussi une mission de maintien et développement de sa compétence d'enseignant de mathématiques. Emboîtés dans ce niveau de la mission globale d'un enseignant, on trouve les niveaux de la préparation concernant des unités thématiques (l'addition des fractions, par exemple), puis celui de la préparation d'une séance devant la classe. C'est à ce dernier niveau qu'on trouve ensuite (dans l'affinement de la temporalité) l'exécution d'une séance de classe devant les élèves.

A tous les niveaux de définition des missions et tâches, on peut retrouver une même organisation de l'activité : préparation (orientation, planification), mise en oeuvre (exécution), et évaluation (contrôle). La figure 2 présente un schéma de l'emboîtement de niveaux d'organisation logique et temporelle de l'activité de l'enseignant, qu'on retrouve sous des formes voisines dans les autres situations de gestion d'environnement dynamique, lorsqu'il appartient à un même acteur de réaliser une telle articulation missions / tâches.

[36] Cette distinction est similaire à celle de structure / fonctionnement dans les débats sur les stades piagétiens. On la retrouve dans un tout autre domaine dans la question des relations entre structure et fonctionnement s'agissant des molécules pharmaceutiques. Elle apparaît dans les grandes catégories d'analyse des systèmes en termes de fonctions, structures, et flux.

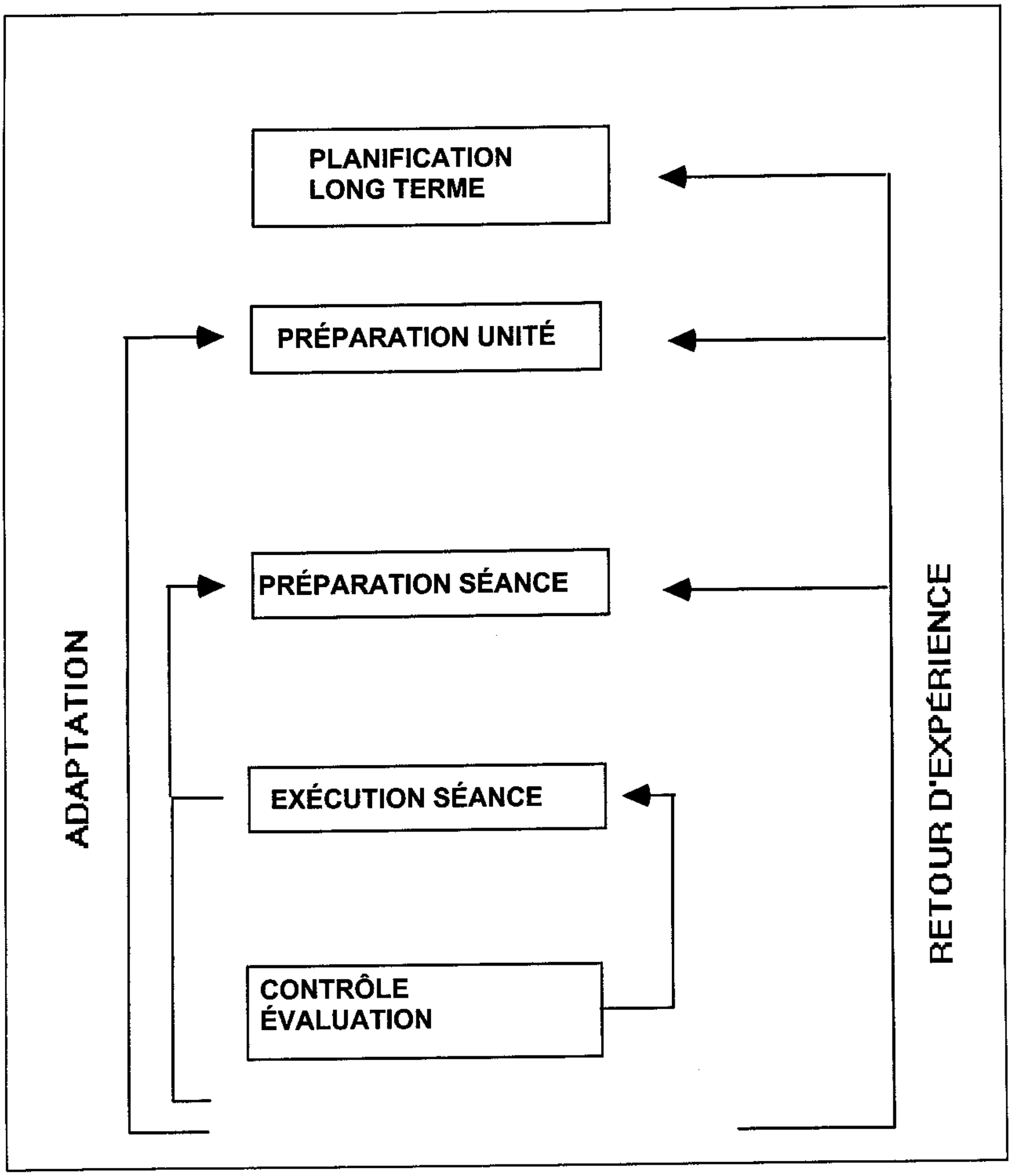


Figure 2. Schéma d'organisation de l'activité de l'enseignant aux différentes échelles logiques et temporelles : de la planification annuelle de réalisation du programme pour les élèves de la classe, à l'évaluation en temps réel du déroulement d'un épisode particulier d'une séance donnée. A chaque échelle temporelle correspondent deux processus asychrones : préparation (du contenu visé et du cours temporel choisi) et 2) contrôle / évaluation, qui porte sur le rapport réalisé / attendu et sur les effets produits sur les élèves[37]. L'exécution proprement dite porte essentiellement sur la relation en temps réel avec la classe. On peut parler de l'activité d'un enseignant ou des pratiques enseignantes en prenant en compte tout ou partie de cette organisation temporelle.

[37] Les effets en retour (flèches "montantes") de ce processus d'évaluation contribuent à modifier l'activité; un exemple d'étude dans (Nisbet & Warren, 1999).

2. Les composants de l'activité

A la fois la structure d'ensemble et l'analyse des composants particuliers intervenant a priori dans la réalisation d'une tâche d'un niveau donné sont des moyens d'analyse de l'activité de l'enseignant, aussi bien pour identifier l'organisation de l'activité de l'expert, que pour évaluer une formation, ou en retour contribuer à la concevoir. La situation est similaire — toutes choses différentes par ailleurs !— pour l'étude de l'activité du pilote de ligne. Dans la mission de vol pour un équipage d'avion civil, peut identifier des emboîtements dans la mission d'ensemble entre de grandes phases temporelles, le traitement des différentes phases de vol, et on peut aussi analyser les propriétés et l'articulation de composants de l'activité qui relèvent de logiques particulières[38].

La structure d'ensemble de l'activité est importante pour tenir compte de l'ensemble des contraintes et des choix de l'enseignant, pour faire des inférences sur ses compétences ou pour intervenir dans la formation. Ainsi, D. Vergnes met en relation les éléments apportés en formation sur l'enseignement de la géométrie au niveau élémentaire, ce que l'enseignant s'est proposé de faire dans une séance de classe et ce qui a été effectivement exécuté pour contribuer à l'étude des effets de la formation en interaction avec les propriétés propres dans enseignants.

A tous les niveaux de temporalités de tâches, on peut par ailleurs analyser l'activité en composants de différente nature. On peut en particulier analyser l'effet de variables "classe", et "contenu mathématique" sur l'activité de l'enseignant, et étudier la variabilité entre enseignants, comme l'a fait par exemple C. Hache. On peut se centrer sur des composants spécifiques, dont on postule qu'ils sont un rôle important dans les apprentissages des élèves ou qu'ils sont sensibles à l'expérience et la compétence de l'enseignant : gestion des situations de résolution de problème, gestion de la dualité questionnement / réponse aux questions spontanées, traitement des erreurs, gestion des situations incidentelles : discordance prévu / réalisé ; élèves en échec, ou à l'opposé "trop bons" élèves etc.

On peut aussi étudier un composant de l'activité qui intervient à des temporalités multiples, comme le sont la planification des séances ou l'évaluation.

[38] Un pilote et instructeur expert présente ainsi les composants de l'activité du pilote : la conduite de type, avec l'action sur les aides ou le pilotage manuel pour le type d'avion qu'il pilote, la conduite de l'avion avec les structures d'action liées aux phases de vol, la conduite de l'itinéraire : gestion du profil vertical et de l'axe temporel, la conduite du vol : contrôles radio, météo, systèmes de l'avion et enfin la conduite de la mission avec les interactions avec les passagers, la compagnie, le personnel naviguant commercial (Jouanneaux, séminaire CRIN "usage des simulateurs", Paris, mai 2000).

Une analyse préalable de la structure des tâches et de l'activité attendue pour les réaliser permet de situer plus précisément des types d'étude de l'activité ou des pratiques de l'enseignant qui sinon peuvent paraître dispersés, et à ce titre difficile à intégrer ensuite aussi bien dans une identification de ce qui fait un "bon enseignant", que dans des recherches précises sur l'impact de l'activité de l'enseignant sur les apprentissages des élèves, que dans la conception de situations de formation qui répondent à une nécessité d'intégration de savoirs et de pratiques locales pour permettre la formation d'une compétence attendue.

Dans le domaine de l'enseignement de la lecture, Goigoux a ainsi mis en évidence les centrations existantes dans les recherches en didactique du français langue maternelle, et l'existence de points aveugles dans les travaux existants (Goigoux, 1997). Les concepts et méthodes d'analyse de l'activité proposées par la psychologie ergonomique nous paraissent avoir une forte valeur heuristique, pour poser un ensemble de questions de recherche. Rappelons pour éviter tout malentendu que sans les acquis aussi bien sur les procédés didactiques (didactique des mathématiques) que sur les processus d'acquisitions des élèves (psychologie de l'apprentissage et de développement mathématique), on ne peut opérationaliser lesdites méthodes d'étude.

V. DETERMINANTS ET SPECIFICITES DE L'ACTIVITE DE L'ENSEIGNANT

Les variables qui déterminent la tâche relèvent de deux "espaces" : celui des propriétés de la situation de travail, et celui des caractéristiques du sujet, dans la relation à la tâche à accomplir. Un modèle utile pour organiser un ensemble de questions — aussi bien sur l'analyse de l'activité que sur les compétences ou sur la formation professionnelles — a été proposé par Leplat (Leplat, 1997) : savoir celui de la co-détermination de l'activité par l'espace "objectif" de la situation (d'enseignement, dans son caractère contextualisé) et par l'espace "subjectif" du sujet (ici l'enseignant de mathématique).

1. La codétermination de l'activité par la situation et par le sujet

La figure 3 présente un schéma de ce modèle. On a une double influence de la situation (situation d'enseignement pour le cas de l'enseignant ou du formateur) et du sujet (ses compétences d'enseignant, sa connaissances des élèves, mais aussi son état personnel : tonus, stress, fatigue, etc.) ; de cette activité résultent deux catégories de "produits" : des résultats sur les éléments de la situation, en particulier sur ce qui est visé dans la tâche à accomplir (les activités mathématiques des élèves, leurs acquisitions), et des effets sur le sujet lui-même (sa fatigue, sa satisfaction, sa connaissance des élèves, son point de vue sur les difficultés mathématiques pour les élèves, etc.).

Les résultats modifient donc la situation dans une forme de boucle de régulation ; les effets entrent de même dans une boucle de régulation de modification de l'enseignant lui-même. Résultats et effets fonctionnent à court terme et à moyen/long terme. La double régulation représentée figure 2 fonctionne en effet sur les différentes échelles temporelles soulignées plus haut :

- cours terme : ici, du déroulement d'une séance de classe, ou d'un épisode de cette séance, en cours de séance (régulation en temps réel), et à son issue (évaluation), ou en temps différé, avec des effets "d'après-coup". "Aujourd'hui ça a mal marché avec mes quatrièmes" est un commentaire qui relève de la régulation à court terme.

- temps "médium" : la régulation va modifier la préparation des séances suivantes, ou l'organisation sur l'année scolaire avec les mêmes élèves; elle va modifier les représentations de l'enseignant sur "où en sont" les élèves, ce qu'on peut faire avec eux ; elle va aussi modifier ou conforter la manière de gérer les séances suivantes sur le même thème ; elle peut contribuer à choisir des formes de séances en fonction des horaires, de sorte à éviter des effets sur lui-même de moindre tonus, etc. Un commentaire sur les élèves qui relève de ce moyen terme est une évaluation du type "j'ai une bonne seconde cette année".

- temps "long" : modification des élèves dans leur rapport avec le contenu d'enseignement de l'année, ou dans leur rapport aux mathématiques ; modification de l'organisation sur l'année scolaire ; modification de la position que se permet l'enseignant au fil de l'expérience acquise sur plusieurs années ; modification de l'enseignant dans ses compétences professionnelles, et aussi dans sa motivation d'enseignant, ce qui oriente globalement son activité. "Avant, j'avais toujours peur de ne pas finir le programme, maintenant je relativise" est un commentaire qui relève de la régulation à long terme.

La double flèche entre la situation et le sujet, dans la figure 2, représente le fait que les influences de la situation et du sujet sur l'activité ne sont pas indépendantes : la situation définit une certaine place du sujet, qui délimite les caractéristiques du sujet qui vont "jouer" sur la réalisation de la tâche ; le sujet lui-même donne à la situation un sens, il la positionne dans l'ensemble de ses domaines d'activité, dans le travail et hors travail.

Il ressort de ce modèle que l'analyse de l'activité de l'enseignant et de ses déterminants doit prendre en compte non seulement les effets sur les apprentissages des élèves, et plus largement de leurs acquis de socialisation scolaire, mais aussi les effets sur l'enseignant lui-même, en particulier la maîtrise des effets négatifs et le maintien d'un bien-être suffisant en classe et à la sortie de la classe.

2. Les déterminants "subjectifs"

Le rapport du sujet à la situation est un rapport dialectique dynamique, au sens où positionnement (du côté d'un assujettissement institutionnel) et posture (du côté de la subjectivité individuelle) sont mutuellement déterminés et déterminants, dans le cours de l'activité et de l'histoire du sujet. La notion de contrat professionnel, qui relie tâche attendue et activité en jeu lors de la réalisation de la tâche, comporte cette double orientation du rapport sujet / situation, où la situation détermine un espace de liberté pour l'enseignant, et où l'enseignant a et se donne sa propre autonomie : cela concerne les moyens d'action, les ressources et contraintes, les critères et les systèmes de valeurs, et les motifs et les buts eux-mêmes.

Les représentations (représentations sociales et représentations cognitives propres à un enseignant) interviennent dans la construction de la relation enseignant / situation. Les connaissances (savoirs et croyances) tant sur les mathématiques, que sur les voies et moyens de l'apprentissage pour les élèves, que sur les procédés didactiques ou les interactions de classe, sont des composants qui participent à la détermination de l'activité du côté "sujet enseignant". La gestion d'un environnement dynamique appelle la mise en fonctionnement de deux modèles, l'un sur la dynamique propre du processus à gérer — ici, pour faire bref, les appropriations de savoir mathématiques—, l'autre sur les effets de l'intervention sur le processus, ici l'intervention didactique. On est loin de pouvoir proposer à l'enseignant des savoirs collectifs partagés et étendus sur ces deux modèles en interaction[39].

Les états cognitifs, psychiques et physiques de l'enseignant sont une autre catégorie de déterminants, d'autant plus importantes que d'une part l'enseignant agit sur et interagit avec d'autres humains, et que d'autre part il est "de sa personne" un instrument central du processus d'enseignement : ceci concerne également les situations thérapeutiques, et les situations d'encadrement —management ou commandement, mais l'activité dans les unes comme les autres situations ont fait l'objet de peu de recherches en psychologie ergonomique, les concepts et méthodes adaptés sont pour largement à élaborer (l'approche via l'espace psychique de la classe en concerne une dimension spécifique, déjà fortement travaillée).

[39] Malgré l'existence de travaux sur ce thème développés dans une perspective constructiviste (par exemple : Simon & Schifter, 1993; Simon et al., 1999).

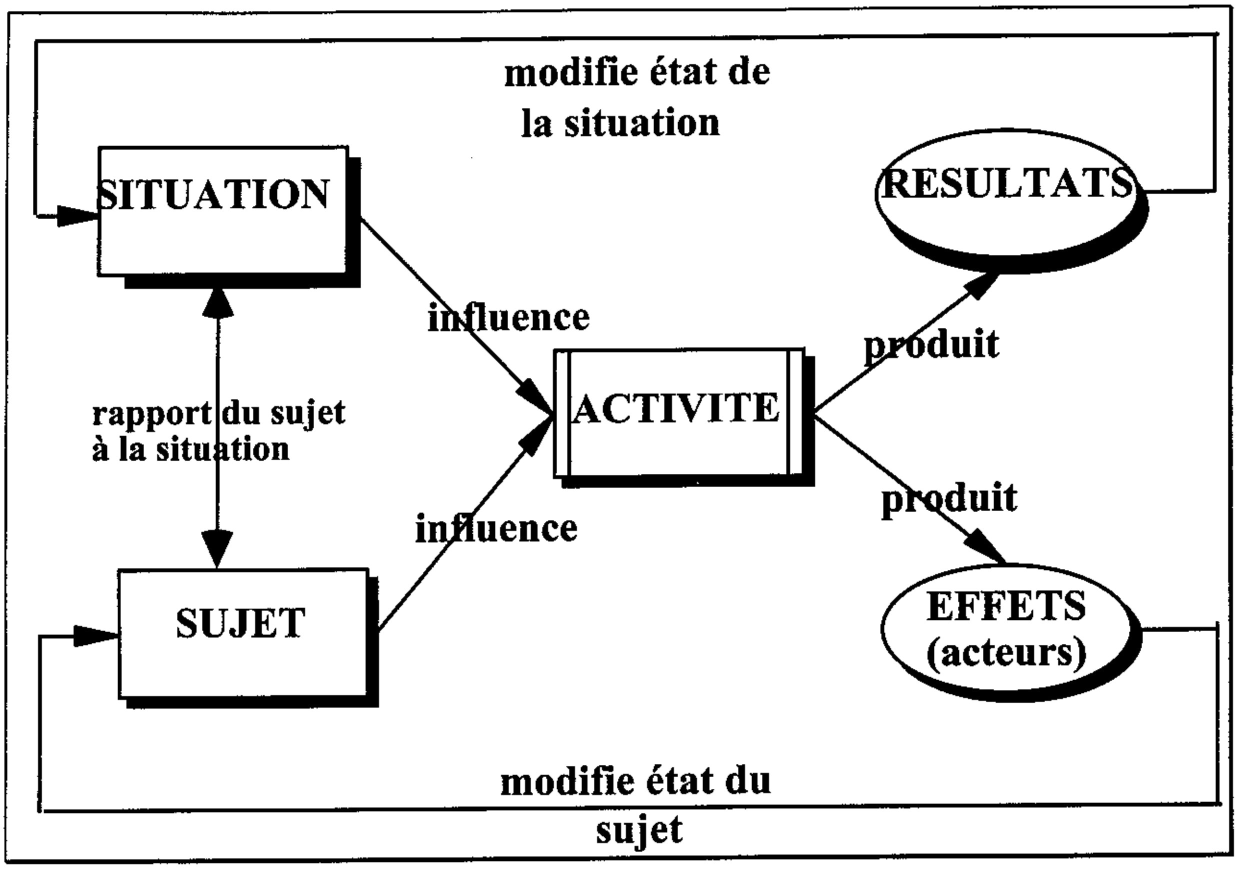


Figure 3. Schéma de co-détermination — Situation/Sujet — de l'activité du sujet par les propriétés de la situation et les caractéristiques du sujet, vis-à-vis de la tâche à accomplir. *(Modification du schéma de double régulation tâche/sujet de J. Leplat : Regards sur l'activité en situation de travail. 1997)*

VI. CONCLUSION

Nous venons de proposer une approche de psychologie ergonomique de l'activité de l'enseignant : nous en avons présenté un panorama relativement large, mais loin d'une tentative d'exhaustivité. Ainsi, nous n'avons pas abordé le problème de tout ce qui est préconstruit du point de vue de l'action enseignante et qui fait que l'enseignant ne reconstruit pas tout, tout le temps dans sa pratique, loin de là et heureusement pour lui. Pas plus que le pilote n'a à inventer "sur le tas" comment traiter un feu moteur ... L'analyse des outils proposés à l'enseignant (les manuels, les bases d'exercice, les logiciels d'enseignement, etc.) et l'analyse de ce dont il se sert comme instrument dans son activité, est un objet de recherche important, de la même manière qu'on peut les étudier pour un pilote, un contrôleur de trafic de bus, celui d'une centrale nucléaire, ou un officier de Sapeurs-Pompiers. L'approche instrumentale proposée par Rabardel (1995, 1999) a été utilisée déjà pour l'analyse de l'activité de l'élève (Trouche, 1997). Ce type d'analyse de l'instrumentalité de l'enseignant a toute sa place comme composant de l'étude de l'activité de l'enseignant dans l'approche générale que nous avons présentée, et elle a des conséquences en ce qui concerne la formation initiale et, peut-être plus encore, la formation continue.

Nous avons à peine évoqué une propriété cruciale de l'enseignement, à savoir la visée de transformation concernant des sujets humains. De ce point de vue, l'approche proposée nous semble devoir être complétée par une approche centrée sur la problématique de l'interaction entre sujets humains. On peut alors considérer dans l'activité de l'enseignant ce qui peut être analysé comme une activité de médiation, médiation du rapport que l'élève entretient avec un objet de savoir, un type d'activité, une compétence. Le schéma générique d'une action de l'enseignant sur ce rapport, se complexifie en un schéma où l'enseignant est un médiateur, au sens d'intermédiaire actif, entre l'élève et un savoir. C'est un point de vue qui spécifie une analyse de l'enseignement comme une situation où maîtres et élèves font — ensemble — des mathématiques, dans une relation asymétrique où l'enseignant exerce une activité de tutelle ou de médiation (Dumas-Carré & Weil-Barais, 1998).

Qu'il s'agisse de l'approche de l'enseignant comme gérant un environnement dynamique, ouvert et humain, ou de l'approche en terme de médiation que nous venons d'évoquer, nous prenons comme point de départ le fait qu'entre enseignant et élève, au niveau de l'enseignement initial en tous cas, la relation est fondamentalement asymétrique, et elle l'est doublement.

- ce qui est en jeu, du point de vue de l'enseignant, c'est une production externalisée, matérielle et immatérielle, dont une visée critique est de modifier les rapports des élèves et du savoir ; c'est cela qui constitue la prescription qui lui est faite d'enseigner un certain savoir à des certains élèves.

- ce qui est en jeu, du point de vue de l'élève, c'est sa transformation propre - dans son rapport à un savoir particulier, ici les mathématiques. Du point de vue des visées, il s'agit d'une production de soi, si l'élève la reprend à son propre compte, mais il peut ne pas la reprendre à son compte. Un but de l'enseignant, — et, au-delà du système scolaire et de son contexte social — est de réussir cette dévolution d'objectif. Ou peut-être est-ce seulement un moyen crucial ?

Au-delà des questions déjà abordées, se pose celle du statut de telles approches, issues de la psychologie ergonomique, par rapport au(x) cadre(s) théorique(s) développés en didactique des mathématiques, et au premier chef à la théorie des situations. Nous espérons que les éléments présentés ici serviront pour poursuivre un tel débat, largement engagé dans la communauté de didactique des mathématiques.

BIBLIOGRAPHIE

Artaud, M. (1997). Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. In M. Bailleul, C. Comiti, J.-L. Dorier, J.-B. Lagrange, B. Parzysz & M.-H. Salin (Eds.) *Actes de la IX° Ecole d'été de didactique des mathématiques*, (pp. 101-139). ARDM & Crédit Agricole Bruz.

Artigue, M. (1986). Étude de la dynamique d'une situation de classe: une approche de la reproductibilité. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(1), 5-62.

Artigue, M. (1995). The role of epistemology in the analysis of teaching/learning relationships in mathematics education. In Y. M. Pothier (Ed.),*Proceedings of the 1995 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Group*, (pp. 7-22). University of Western Ontario. University of Western Ontario.

Bailleul, M. Comiti, C., Dorier, J.-L., Lagrange, J.-B., Parzysz, B. & Salin, M.-H. (Eds.) (1997). Chapitre 1. Comprendre les pratiques d'enseignement : utilisation des concepts fondamentaux de la didactique et interactions avec d'autres champs. In *Actes de la IX° École d'été de didactique des mathématiques*, (pp. 11-98). ARDM & Crédit Agricole Bruz.

Blanchard-Laville, C. (1997). L'enseignant et la transmission dans l'espace psychique de la classe. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17(3), 151-176.

Brousseau, G. (1995). L'enseignant dans les théories didactiques. In M.-J. Perrin-Glorian & R. Noirfalise (Ed.),*VIIIème École d'Été de Didactique des Mathématiques*, (pp. 3-46). Clermont-Ferrand. IREM Clermont-Ferrand.

Bulletin de Psychologie (1974-75). *Psychologie de l'enseignement programmé.*

Chartier, M. M. (1998). L'expertise enseignante entre savoirs pratiques et savoirs théoriques. *Recherche et Formation*, 27.

Chevallard, Y. (1995). La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique. In M.-J. Perrin-Glorian & R. Noirfalise (Ed.),*VIIIème École d'Été de Didactique des Mathématiques*, (pp. 83-122). Clermont-Ferrand. IREM Clermont-Ferrand.

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17(3), 17-54.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (3), 221-265.

Clerc, 1996

Connes, F., & Lemoyne, G. (1999). Introduction. In G. Lemoyne & F. Connes (Eds.) *Le cognitif en didactique des mathématiques* (pp.1-27). Montréal : Les Presses Universitaires de Montréal.

Crahay, M. (1989). Contraintes de situations et interactions maître-élève; changer sa façon d'enseigner est-ce possible ? *Revue Française de Pédagogie*, 88.

de Terssac, G. (1992).*Autonomie dans le travail*. Paris: PUF.

Dumas-Carré, A., & Weil-Barais, A. (1998). *Tutelle et médiation dans l'éducation scientifique*. Bern: Peter Lang.

Goigoux, R. (1997). La psychologie cognitive ergonomique : un cadre d'étude des compétences professionnelles des enseignants de français. *La Lettre de la DFLM*, 21 (2), 56-61.

Hache, C., & Robert, A. (1997). Un essai d'analyse de pratiques effectives en classe de seconde, ou comment un enseignant fait préquenter les mathématiques à ses élèves pendant la classe. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17(3), 103-150.

Jaworsky, B. (1998). Mathematics teacher research: Process, Practice, and the development of teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1(1), 3-31.

Jouanneaux, M. (1999). *Le pilote est toujours devant*. Toulouse : Octarès.

Leplat, J. & Hoc, J.-M. (1983). Tâche et activité dans l'analyse psychologique des situations. *Cahiers de Psychologie Cognitive*, 3 (1), 49-63.

Leplat, J. (1997). *Regards sur l'activité en situation de travail*. Paris : PUF.

Margolinas, C. (1999). Le milieu et le contrat, concepts pour la construction et l'analyse des situations. In R. Norfalise (Ed.) *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, Actes de l'Université d'été de La Rochelle* (pp.3-16). Clermont-Ferrand : IREM.

Margolinas, C. et al. (1997). Etudes de situations didactiques "ordinaires" à l'aide du concept de milieu : détermination d'une situation du professeur. In M. Bailleul, C. Comiti, J.-L. Dorier, J.-B. Lagrange, B. Parzysz & M.-H. Salin (Eds.) *Actes de la IX° École d'été de didactique des mathématiques*, (pp. 35-43). ARDM & Crédit Agricole Bruz.

McLeod, D. B. (1996). The origins and development of the NCTM Professional Standards for Teaching Mathematics. In L. Puig & A. Gutiérrez (Ed.),*20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3 (pp. 361-368.). Valencia.

Nardi, E. (1999). Using semi-structured interviewing to trigger university mathematics tutors' reflections on their teaching practices. In O. Zaslavsky (Ed.),*23rd Conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education*, 3 (pp. 3.321-3.328). Haifa Israel. Technion. Israel Institut of Technology.

Nisbet, S. & Warren, E. (1999). The effects of a diagnostic assessment system on the teaching of mathematics in the primary school. In O. Zaslavsky (Ed.),*23rd Conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education*, 3 (pp. 3.337-3.344). Haifa Israel. Technion. Israel Institut of Technology.

Perrin-Glorian, M.-J. (1999). Problèmes d'articulation de cadres théoriques : l'exemple du concept de milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(3), 279-320.

Portugais, J. (1995). *Didactique des mathématiques et formation des maîtres*. Berne : Peter Lang.

Portugais, J. (1999). L'intentionnalité et le cognitif. In G. Lemoyne & F. Connes (Eds.) *Le cognitif en didactique des mathématiques* (pp. 71-102). Montréal: Les Presses Universitaires de Montréal.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies. Approche psychologique des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

Rabardel, P. (1999). Élements pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques . In M. Bailleul (Ed.) Actes de la 10ème École d'été de didactique des mathématiques : Evolution des enseignants de mathématiques, rôle des instruments informatiques et de l'écrit (pp. 33-41). Caen :. ARDM.

Robert, A. (1999). Recherches didactiques sur la formation professionnelle des enseignants de mathématiques du second degré et leurs pratiques en classe. *Didaskalia*, 15, 123-157.

Rogalski, J. (2000). Approche de psychologie ergonomique de l'activité de l'enseignant. *Actes du XXVIème Colloque COPIRELEM* (pp. 45-66). Limoges: IREM.

Sierpinska, A. (1999). Perspectives épistémologique, cognitive et didactique. In G. Lemoyne & F. Connes (Eds.) *Le cognitif en didactique des mathématiques* (pp.151-176). Montréal : Les Presses Universitaires de Montréal.

Simon, M. A., & Schifter, D. (1993). Toward a constructivist perspective: The impact of a mathematics teacher inservice program on students. *Educational Studies in Mathematics*, 25(4), 331-340.

Simon, M., Tzur, R., Heinz, K., Schwan Smith, M. & Kinzel, M. (1999). On formulating the teacher's role in promoting mathematics learning. In O. Zaslavsky (Ed.),*23rd Conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education*, 4 (pp. 4.201-4.208). Haifa Israel. Technion. Israel Institut of Technology.

Tochon, F. (1989). Peut-on former les enseignants novices à la réflexion des experts ? *Recherche et Formation*, 9.

Tochon, F. (1993). *L'enseignant expert*. Paris : Nathan.

Trouche, (1997). *Étude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation*. Thèse de doctorat. Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier.

Vergnaud, G. (1994). Le rôle de l'enseignant à la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde & P. Tavignot (Eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, (pp. 177-191). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Vergnes-Arotça, D. (2000). *Analyse des effets d'un stage de formation continue en géométrie sur les pratiques des enseignants de l'école primaire*. Thèse de doctorat des Sciences de l'Éducation. Université Paris5.

Vermersch, P. (1979). Analyse de la tâche et fonctionnement cognitif dans la programmation de l'enseignement, *Bulletin de Psychologie*, XXXIII, 343.

Didactique de l'analyse :
bilan, évolutions et perspectives

ANALYSE EN TERMES DE SITUATION DES USAGES DU GRAPHIQUE CARTESIEN DE FONCTIONS[1]

Eduardo Lacasta Zabalza[2]

Universidade Pública de Navarra

I. INTRODUCTION : TRAITEMENT COGNITIF DES DIFFERENTS MODES DE PRESENTATION DE LA FONCTION DE VARIABLE

Les travaux de recherche dans une perspective cognitive, ont traité l'effet sur l'apprentissage des différents modes de présentation de la fonction, sous l'hypothèse de base (imposée par décision méthodologique) que les phénomènes relatifs à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques peuvent être expliqués à partir des caractéristiques individuelles des sujets (psychologiques, cognitives, linguistiques...).

David Tall et autres (1991) ont analysé d'une part les rapports entre les différents modes de représentation et, d'autre part, l'importance de la visualisation dans l'enseignement de l'analyse. Pour Tall, la visualisation est un processus caractéristique de la "pensée mathématique avancée" qui permet d'avoir une représentation mentale. Le succès en mathématiques exige avoir des représentations riches des concepts et la construction d'une représentation mentale est basée sur des systèmes de représentation, c'est-à-dire, sur des "artefactes" concrets et externes ; dans le cas des fonctions, un de ces "artefactes" est la graphique cartésienne.

Des travaux de recherche en didactique de l'analyse (dans des approches théoriques différentes) montrent que les passages entre les différentes représentations faciliteraient certaines activités cognitives très utiles pour l'apprentissage.

---

[1] Ce travail est basé sur une contribution présentée au Colloque international "Autour de la théorie des situations didactiques" (DAEST, U. Bordeaux 2, 26-28 juin 2000).

[2] Departamento de Matemática e Informática. Universidad Pública de Navarra. Campus Arrosadia. 31006 Pamplona-Iruña. Espagne. elacasta@unavarra.es.

Les problématiques systémiques sont représentées par un certain nombre de travaux en didactique de l'analyse menés en France, qui ont contribué à dépasser la naïveté présente dans les premiers travaux du programme cognitif (notamment les produits de l'approche conceptualiste primitive), visant les possibilités d'action sur le système éducatif. Nous nous rapportons à l'article de Michèle Artigue (1998).

Mais la possible "incommensurabilité" des programmes de recherche cognitif et épistémologique étudiée par Josep Gascón (1999) heurte l'articulation des problématiques respectives. Autrement dit, il n'est pas évident que l'on puisse utiliser les résultats de recherche d'un programme dans l'autre, sans un développement des théories respectives qui permette de savoir si elles peuvent se comparer et si on peut les utiliser dans un champ commun.

La question de comment tirer des conclusions et utiliser les résultats d'un programme de recherche dans l'autre dépasse pour l'instant les objetifs de notre travail.

Néanmoins, nous pouvons affirmer que l'utilisation que l'on en fait de certains résultats et de certains outils de recherche peut donner des applications naïves, sous forme d'innovation des méthodes d'enseignement, qui méprisent l'importance d'une analyse rigoureuse de ses effets. Par exemple, des nombreuses situations et exercices proposés aux élèves de différents niveaux du secondaire, rassemblées dans les publications du Shell Centre et présentes dans les "Standards curriculaires" du National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1991), illustrent les "traductions" de Janvier (1983) ; l'influence de ces travaux sur la dernière réforme du système éducatif espagnol et l'innovation qui l'accompagne, est très forte et il semble que, dans les manuels et les livres pour le professeur issus de cette réforme, la richesse de la représentation repose préferemment sur les graphiques cartésiens de fonctions, qui seraient le "support intuitif" privilégié de l'apprentissage des fonctions.

II. QUELQUES PROBLEMES DIDACTIQUES POSES PAR L'ETUDE DU ROLE DU GRAPHIQUE CARTESIEN DE FONCTIONS (GCF) DANS L'ENSEIGNEMENT

Notre intention première est de prendre en compte les éléments fournis par la théorie didactique et plus nettement des éléments de la théorie des situations didactiques, pour avancer dans la description et le contrôle des différents types de milieux, qui ont pour origine le GCF. L'intention finale est de mettre au point des dispositifs d'ingénierie didactique pour l'amélioration de l'enseignement des fonctions dans le secondaire.

Le point de départ de la modélisation d'une situation d'enseignement en théorie des situations didactiques est la production d'un jeu spécifique du savoir visé –la fonction– entre différents sous-systèmes. Existe-t-il un jeu spécifique des connaissances de l'analyse et en particulier de la fonction ?

1. Situation fondamentale, situation adidactique et situation à dimension adidactique

Le problème de trouver des situations fondamentales des notions propres de l'analyse mathématique (fonction, limite, continuité...) reste ouvert. Néanmoins, en absence de situation fondamentale, nous pouvons *"considérer des situations qui, tout en portant une partie du savoir, par exemple ce qui est nécessaire pour la dévolution des problèmes d'analyse, ne comportent pas un milieu suffisamment résistant pour qu'il soit possible de compter seulement sur les rétroactions"* (Bloch, 1999). Isabelle Bloch prévoit *"la possibilité de faire cependant vivre la situation en y aménageant un milieu permettant l'action de l'élève, milieu offrant un support assez pertinent, du point de vue du sens, à la formulation et à la validation ; autrement dit, un milieu offrant une certaine marge pour l'activité mathématique de l'élève, ainsi que pour l'exploitation de cette activité lors du processus d'institutionnalisation. On peut traduire ceci par : la situation comporte une dimension a-didactique pour l'élève."*

Ce travail part de l'hyothèse qu'il est possible de trouver des situations comportant une dimension adidactique pour l'élève dans lesquelles celui-ci agit sur le GCF. L'approche systémique de la théorie des situations met l'accent sur l'identification des sous-systèmes en présence (l'enseigné, le système éducatif, le milieu) en tant qu'acteurs. Ce sont donc les rapports du professeur et de l'élève en tant qu'acteurs qui vont guider notre analyse sur le rôle du GCF.

2. L'illusion de l'évidence

Quand le professeur prépare son cours il organise un milieu qui est appelé *milieu matériel.* Dilma Fregona a étudié (Fregona 1995) les figures planes comme milieu dans l'enseignement de la géométrie. Son étude théorique montre comment (même s'il ne s'agit pas d'objets graphiques) se produit *l'illusion de l'évidence : le professeur "voit" dans l'objet ce qu'il veut* *enseigner, donc l'élève placé face au "même monde", "voit" la même chose.* Nos résultats appuient ce phénomène, en particulier quand le milieu matériel est le GCF. Autrement dit, il est supposé que le GCF a des vertus qui le font devenir un champ commun où le professeur et l'élève parlent un même langage.

Mais à partir de l'élève agissant sur le GCF en tant que milieu matériel, les différents rôles du maître et de l'élève donnent des milieux divers, dont la description générale la plus connue est celle du schéma des sous-systèmes emboîtés décrit par Brousseau (1998, p. 326). Nous espérons montrer par le biais de la description et caractérisation de ces milieux, l'aspect illusoire de l'evidence graphique.

3. Rapports fictifs et rapports effectifs au milieu matériel GCF

Dans une première approche nous prendrons la caractérisation due à Dilma Fregona des interactions effectives et fictives du sujet avec le milieu. Le sujet peut être le professeur ou l'élève.

L'interaction effective est celle qui ne dépend pas entièrement de l'acteur. Il reçoit de l'extérieur des sanctions non prévues de sa part. Le contrôle de ses actions est assumé, en partie, par un système extérieur.

L'interaction fictive a lieu quand l'enseignant cherche à organiser un milieu allié où l'acteur agit sous des contraintes qui essayent de lui faire éviter les confrontations.

Les rapports ostensifs, en particulier, sont des interactions fictives. En général, une expérience mentale ne permet que des rapports fictifs. Il ne s'agit pas ici de les rejeter dans l'absolu : ils peuvent être producteurs d'intuitions tout à fait convenables.

4. Opacité et transparence ; objets ostensifs et non ostensifs ; ostension

Nous pouvons considérer le GCF soit comme *objet* matériel perceptible dans le domaine graphique, soit comme *représentant* d'une fonction. Dans ce cas-ci l'objet matériel est en plus un signe, qui représente autre chose –la fonction– que lui même.

Quand on utilise le GCF matériel, le rapport à la fonction est *opaque* si c'est l'objet "qui l'emporte, *transparent* si c'est le signe qui est considéré en priorité" (Chauvat G., 1999).

Dans la théorie anthropologique (Bosch M. et Chevallard Y., 1999) le GCF est un objet *ostensif,* au même titre que les autres graphismes, les écritures, symboles, mots, discours et gestes mobilisés dans l'activité mathématique, qui ont un caractère matériel et perceptible. Les ostensifs ont d'une part une valeur instrumentale –dans le fonctionnement opaque– et une valeur sémiotique, quand ils fonctionnent de manière transparente. La fonction serait dans cette approche un *non ostensif,* c'est-à-dire, elle appartient au monde des notions, des concepts, des idées, etc. Cette conceptualisation a permis de mettre en évidence l'existence de contraintes touchant la dimension ostensive, comme la péjoration de l'écriture ou la transparence supposée du discours verbal.

Pour Bosch et Chevallard (op. cit.), il y a donc une pluralité de registres ostensifs –graphiques ou non– et dans la réalisation concrète de l'activité mathématique, les objets ostensifs activés se distribuent entre ces divers registres, "sans que l'on puisse voir fonctionner généralement un et un seul d'entre eux de manière autonome par rapport aux autres". Cette hypothèse est rapprochée par les auteurs de celle, plus forte, de Raymond Duval (1996), selon laquelle, les mathématiques "constituent le mode de connaissances dans lequel [la] mobilisation [d'une pluralité de registres de représentation sémiotiques] joue un rôle fondamental et apparaît de la façon la plus visible".

L'importance de la pluralité de registres ostensifs et de leur articulation est présente dans les travaux que venons de citer, dans le "jeux de cadres" de Régine Douady (1987) et dans nombre de travaux dans une approche cognitive.

Nous avons prouvé (Lacasta 1995) d'une part que *la conception mathématique conditionne pour l'élève la maîtrise des changements de représentations, plus qu'elle n'est conditionnée par elle, même si divers usages des graphiques préparent la compréhension des concepts mathématiques,* mais, en même temps, nous avons prouvé aussi que *les professeurs préfèrent dans l'enseignement des fonctions, les conditions (graphiques ou non) qui permettent le mieux un contrat didactique d'ostension : la présentation graphique des fonctions semble préférée, dans la mesure où elle favorise un contrat ostensif. Ainsi la place attribuée par les professeurs au graphique cartésien est basée sur une 'fausse transparence' du graphique, mais le graphique sert justement à faire la transposition didactique de la notion de fonction.* Et nous ajoutons que les ostensifs appartenant à d'autres registres contribuent aussi à cette transposition.

5. Le travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse

Dans la mesure où une situation fondamentale de la fonction n'est pas encore produite, il est nécessaire d'analyser l'activité du professeur, pour comprendre quelle est la situation pour l'élève.

Un des buts du travail de Isabelle Bloch (1999) est la modélisation "du milieu de l'enseignement de l'analyse, les activités respectives de l'élève et du professeur et les connaissances présentes dans cette double activité". À notre avis, le schéma des milieux emboîtés de Brousseau (1998), le schéma de Claire Margolinas (1994) – développé à partir des milieux emboîtés, selon une analyse ascendante et descendante – et les éclaircissements apportés par Marie Jeanne Perrin-Glorian (1999) sont des projections de la structuration du milieu, qui ont besoin d'ultérieurs analyses pour la meilleur connaissance du fonctionnement des divers milieux.

III. NECESSITE DE DISTINGUER LES TYPES DE MILIEU DEFINIS A PARTIR DU MILIEU MATERIEL

L'approche systémique de la théorie des situations permet de dégager des sous-systèmes où l'étude des problèmes posés peut se simplifier, par l'isolement de ces problèmes dans le sous-système élu.

Le professeur prépare son cours d'analyse avec le milieu matériel GCF et, suivant la structuration du milieu en des milieux emboîtés (Brousseau, 1998, p. 326), à un moment donné le sujet devient un sujet symbolique : *l'acteur objectif.* Le couple milieu-acteur constitue alors la situation objective qui est proposée effectivement à l'élève, avec laquelle il doit interagir. Elle constitue donc –pour l'élève– le milieu adidactique de départ organisé par l'enseignant autour d'une connaissance visée.

Nous pouvons simplifier l'analyse pour prendre en compte d'une manière plus générale que l'enseignant doit prendre des décisions sur le *milieu matériel* et sur les rapports d'un *acteur objectif.*

L'intervention de l'enseignant modifie les conditions de fonctionnement, les usages ou les formes d'emploi du GCF et c'est au niveau de *milieu objectif* que les fonctionnements du

GCF donnent des milieux divers, que le professeur devrait connaître et maîtriser, puisqu'il détermine implicitement des contraintes qui provoquent des interactions différentes. Le contrat didactique est le moyen qu'a le professeur pour établir les règles et les stratégies de base et pour les adapter aux changements de jeux de l'élève dans le système élève-milieu. Le professeur doit donc connaître quels sont les différents milieux en jeu quand les situations comportent l'utilisation du GCF.

Les occasions qu'aura l'elève de s'adapter dépendent des milieux organisés sur le GCF et l'élève doit connaître quelles sont les conditions de fonctionnement du GCF. Par contre, s'il n'y a pas un contrôle du milieu de la part du professeur, si l'élève ne connaît pas quelles sont les conditions de fonctionnement du GCF dans les différents milieux et, par conséquent, si le contrat didactique ne distingue pas sur quel milieu doit agir l'élève, c'est justement la tentative d'adaptation du milieu à soi-même qui amène très souvent l'élève à utiliser une analyse des fonctions qui ne dépasse pas le "point-par-point".

L'ingénierie didactique devrait résoudre le probleme du contrôle du milieu de la part du professeur. Mais dans notre cas, ce contrôle dépend des connaissances et des pratiques que les élèves devéloppent à partir de la notion de fonction. Le choix de certaines connaissances et le rejet d'autres relève de la transposition didactique. À partir d'une étude expérimentale qui fait apparaître des maladresses à la foi chez les enseignants et chez les étudiants en mathématiques de niveau universitaire, Antibi et Brousseau (2000), posent en termes de *dé-transposition* les problèmes sur lesquels deux conceptions proposent des connaissances contradictoires. L'étude de la *dé-transposition* serait "la partie de la didactique des mathématiques qui s'intéresse aux modifications des conceptions d'objets mathématiques précedemment enseignés, sous l'effet des dispositifs didactiques ultérieurs". L'ingénierie didactique pourrait essayer de résoudre quelques-uns des problèmes posés dans les milieux ayant pour base le GCF, en proposant des techniques de *dé-transposition,* qui seraient des méthodes de reprise, de modification et d'intégration des conceptions anciennes, reconnues comme légitimes, dans les nouvelles.

Essayons pour l'instant de nous borner à la caractérisation des milieux objectifs, en tant que des milieux comportant une dimension adidactique pour l'élève, où le professeur est l'organisateur de la situation, concernant le professeur lui-même, l'environnement immédiat de l'élève et le milieu culturel.

IV. TYPES DE MILIEU

Gérard Chauvat (1999) a utilisé trois des cinq fonctionnements du GCF définis par nous (Lacasta 1995) : l'abaque ou *nomogramme, l'idéogramme* et le *mode opératoire,* que nous appellerons dorénavant *opérateur.* Dans ce qui suit, nous avons pris quelques précisions apportées par Chauvat.

Signalons que les manifestations des types de milieu que nous allons définir ne sont pas nécessairement disjointes. Par exemple, le milieu *opérateur* et le milieu *graphique structuré,* que nous définirons plus loin, font souvent appel au fonctionnement *nomographique.*

1. Nomogramme

Le fonctionnement du graphique cartésien de fonctions comme nomogramme apparaît quand les élèves font usage du graphique comme abaque ; c'est-à-dire, comme moyen d'obtenir graphiquement des "y" pour des "x" donnés, et vice versa. L'interaction est alors *effective ;* c'est-à-dire, l'élève reçoit du graphique, par le biais de la lecture sur les échelles des axes, des valeurs non prévus de sa part.

Le GCF apporte deux caractéristiques aux abaques : d'une part on a une possibilité de *contrôle* implicite sur ce qu'on lit, puisque c'est un abaque avec un environnement (des valeurs, des repères...), et d'autre part il y a une perte de précision. C'est à ce niveau qu'apparaît la différence entre le certains abaques et le nomogramme issu de l'abaque cartésien.

Mais l'élève qui doit résoudre un problème dans le milieu matériel GCF, n'a pas assez d'information pour savoir si le dessin est fait pour fonctionner exclusivement comme abaque ou s'il est susceptible d'avoir d'autres fonctionnements, qui permettent de dépasser l'analyse "point-par-point".

Caractéristiques :

le nomogramme est un moyen effectif standardisé, algorithmisé, d'obtenir des résultats numériques par l'utilisation des propriétés locales du GCF, en principe, le sujet doit engager un *rapport effectif* avec le dessin précis qu'il a sous les yeux, mais ce rapport peut devenir *fictif* lors de l'inadaptation à certaines tâches, comme la représentation d'une fonction non affine, donné par sa formule, et

le sujet ne doit pas se soucier de ce que le graphique représente. Par conséquent, le rapport au GCF est *opaque.*

Support graphique :

Courbe non extrapolable tracée dans le plan cartésien repéré, où les échelles sont dessinées sur les axes ; c'est-à-dire, que l'élève peut interagir seulement sur le morceau dessiné de la courbe qu'il a sous les yeux.

Utilité :

i) le graphique devient un instrument simple et efficace pour déduire des valeurs représentées sur les échelles des axes et

ii) il y a des éléments (les échelles sur les axes, leurs valeurs extrêmes, la courbe dessinée) qui permettent à l'élève de repérer des valeurs qui ne conviennent pas, des points en dehors de la courbe, etc. ; c'est-à-dire, ces éléments facilitent un contrôle implicite de son usage.

Limitations :

i) le milieu nomogramme ne sert pas à faire des extrapolations,

ii) le nomogramme permet de trouver des valeurs de "y" pour chaque valeur de "x" (ou vice versa, dans le cas de l'abaque inverse), mais il ne permet pas de trouver l'image d'un intervalle ; autrement dit, l'abaque ne permet, par définition, qu'une lecture "point-par-point". Dans ce cas-ci, les interactions du sujet avec le milieu deviennent *fictives,*

iii) il y a une perte de précision par rapport aux tableaux de correspondances ou aux calculettes.

Le nomogramme accompagne d'autres fonctionnements du graphique, mais il constitue les premières règles de l'action de l'élève sur le milieu matériel GCF.

2. Illustrateur topologique

Il y a des propriétés topologiques employées implicitement par le professeur ou par les auteurs de manuels, pour illustrer les notions propres de l'analyse, tout en économisant des précisions théoriques.

L'illustrateur topologique –c'est-à-dire le dessin fait "ad hoc" à caractéristiques fixées à l'avance– est supposé porteur, en particulier, d'une représentation de la continuité, de la croissance, de l'infini, etc. que l'élève doit "voir".

Néanmoins, signalons que, par contre, les renseignements (les signes utilisés pour représenter la concavité, la croissance, etc.) organisés dans ce que l'on appele un tableau de variation, ont aussi un caractère d'illustration topologique, mais ils peuvent avoir une fonctionnalité de communication et l'élève peut les utiliser systématiquement, il peut les faire fonctionner selon un procédé, pour dessiner la courbe d'une fonction donnée par sa formule ou par d'autres conditions.

Caractéristiques :

i) le sujet engage le plus souvent un *rapport fictif* avec le dessin ; le professeur essaie d'éviter les confrontations aux dessins représentant la croissance, une discontinuité quelconque, etc.,

ii) le sujet peut arriver à mettre en œuvre une action *effective* à partir de l'organisation des renseignements fournis par l'illustration topologique et

iii) le sujet doit "voir" ce que le graphique représente ; par conséquent, le rapport au GCF est *transparent.*

Support graphique :

Courbe repérée, pas forcément arithmétisée, représentant une fonction quelconque ; ce qui est dessiné peut souvent n'avoir aucun rapport avec une équation particulière.

Utilité :

L'illustrateur topologique donne le même genre de renseignements qu'un tableau de variation (signe, croissance, maxima, concavité...). Le graphique devient un support de caractéristiques de fonctions génériques.

Limitations :

Il n'est pas nécessaire de préciser des valeurs numériques sur les axes, mais les variables doivent être définies sur un ensemble ordonné ; par exemple, on ne peut pas utiliser la fonction illustrateur topologique sur un histogramme.

Exemples : les graphiques que les manuels et les professeurs utilisent pour illustrer les notions de limite, discontinuité, bornes...

3. Idéogramme

En général l'idéogramme est le résultat d'une transformation de la courbe et il conserve essentiellement certaines propriétés topologiques. Le choix des paramètres, des échelles etc. est tel que le graphique prend toujours le même aspect conventionnel, avec ses points singuliers.

Les professeurs qui ont employé en classe des calculatrices graphiques savent bien que lorsque les élèves travaillent directement la représentation de fonctions données par leur formule, très souvent la graphique obtenue est décevante : soit elle n'apparaît pas à l'écran, soit il apparaît fréquemment un seul trait qui ne présente aucune des caractéristiques de la courbe attendues par le professeur. C'est alors l'enseignant qui doit agir sur la commande "range", qui permet de contrôler les échelles et les "x" et "y" maximales représentables, pour réussir à avoir l'image convenable *–l'idéogramme–* de la courbe correspondant à un type de fonction.

D'une manière figurée, l'idéogramme serait le produit de l'utilisation convenable, mais non contrôlée par l'élève ni par le professeur, des commandes "range" et "zoom" d'une calculatrice graphique, sur un GCF quelconque.

Le changement du rapport entre les échelles des axes change l'idéogramme : une parabole à l'axe vertical n'est plus l'idéogramme de la fonction quadratique si elle est trop étroite ou trop large.

Caractéristiques :

i) l'idéogramme est un signe graphique qui représente une idée (une expression algébrique, une fonction affine, quadratique, etc.),

ii) le rapport au GCF est *transparent* ; le sujet doit convertir le dessin qu'il a sous les yeux en la famille de dessins qui représentent le même type de fonction et

iii) le dessin peut n'avoir la moindre précision, pourvu qu'il ait la forme standard attendue.

Support graphique :

i) courbe non repérée, contenant les points singuliers et tous les éléments caractéristiques d'un type de fonction, y comprises, par exemple, les branches infinies et

ii) en plus de la courbe il se peut qu'il y ait un répertoire de symboles (par exemple, les assymptotes) qui permettent de reconnaître la fonction.

Utilité :

L'idéogramme peut représenter une famille de fonctions qui permet d'identifier une catégorie de fonctions.

Limitations :

i) le changement du rapport entre les échelles des axes change l'idéogramme et

ii) l'idéogramme est une fonction de communication estricte et unidirectionnelle ("la graphique d'une fonction quadratique est une parabole comme celle(s)-ci"), tandis que le nomogramme et l'illustrateur topologique peuvent envoyer à l'élève des informations –repérables au niveau des faits contingents– et ils peuvent permettre en somme la mise en œuvre d'une action effective.

Contrairement au milieu nomographique, qui confère au graphique un statut d'outil qui en légitime l'usage, le milieu idéogrammatique (tout comme l'illustrateur topologique) *péjore le recours au graphique en ne lui assignant qu'un rôle d'illustration* (Chauvat, 1999) et il privilège les rapports ostensifs : "la" courbe-ideogramme d'un type de fonction, qui est en fait un représentant des courbes de la fonction, devient dans le cours la classe d'équivalence des courbes représentatives de ce type de fonction.

4. Opérateur

Caractéristiques :

Dans ce milieu le GCF devient un élément interactif non algorithmisé de la situation et la réponse à un problème est toujours obtenue par un rapport effectif avec le graphique.

i) l'opérateur est le fonctionnement du graphique comme moyen de contrôle de la communication et comme moyen de détermination d'un autre objet,

ii) c'est une réponse non didactique, non subjective, qui ne dépend que partiellement de l'élève lui-même et dans laquelle il trouve une interaction et

iii) le rapport au GCF est prioritairement *opaque ;* les interactions de l'élève avec ce milieu se produisent sur l'objet matériel lui-même.

Support graphique :

Courbe tracée dans le plan cartésien repéré.

Tâches qui sollicitent l'opérateur :

i) trouver le plus grand intervalle en x pour lequel f est croissante ; trouver les valeurs de x pour lesquelles la pente de la tangente à la courbe est la plus grande, etc.,

ii) trouver la fonction affine qui a telle représentation graphique donnée,

iii) décomposer graphiquement une fonction en somme de fonctions *élémentaires...*

5. Graphique structuré

Dans un travail d'ingénierie didactique dû à Pedro Alson (1996), un certain nombre d'objets graphiques : *courbe, hauteur, chemin, allée, retour...* sont définis axiomatiquement dans un environnement purement graphique ; il s'ensuivent des conventions de codification et les transformations "horizontales" et "verticales" applicables aux courbes. C'est sont justement ces transformations de sous-ensembles du plan, induites par de fonctions, qui structurent le milieu graphique. Par le biais de cette structure, Alson développe une partie du calcul propre de l'enseignement secondaire, sans définition de limite, continuité ni dérivée.

Une structure mathématique est donc octroyée aux objets graphiques, en définissant des lois de composition des courbes (les transformations), permettant de construire des objets mathématiques complexes, dont la définition est basée sur les objets graphiques primitifs : la courbe devient un objet du savoir mathématique "fonction".

Cette structure est légitimée par un travail mathématique (Alson 1995), basé sur le modèle ensembliste des descripteurs (proposé par Alson) et la théorie de catégories, développée surtout par MacLane (1971) dans le domaine de l'algèbre. Alson définit un "functor" entre des catégories de fonctions et de graphiques, qui assure la correspondence opératoire de certaines manipulations algébriques avec quelques manipulations dans la présentation graphique.

Contrairement à la méthode suivie dans la plupart des cours d'analyse, dans les "Métodos de graficación" (Alson, 1996) la tâche principale de l'élève est de faire des interprétations analytiques des objets graphiques.

Le travail primitif sur les "traductions" de Janvier et le travail sur les quatre milieux que nous venons de décrire, ne change pas les objets de savoir de l'analyse. Le discours du savoir se déroule dans tout les cas sur le langage mathématique usuel, avec des formules, des inégalités, valeur absolue, epsilon, etc.

Le milieu *graphique structuré* d'Alson est *le seul milieu qui change les objets de savoir,* qui deviennent des "chemins", "bissectrice", etc., au lieu des éléments propres de l'analyse développée à la manière traditionnelle.

Le livre "Métodos de graficación" est un manuel dirigé aux élèves de premier cours universitaire vénézuélien, qui ont des "déficiences énormes" dans leur préparation mathématique. Ce livre contient une méthode qui pourrait constituer une technique de *dé-transposition,* dans l'esprit du travail de Antibi et Brousseau (2000), puisqu'elle reprend, modifie et intégre des connaissances anciennes dans une organisation nouvelle, par le biais de nouveaux objets de savoir.

Caractéristiques :

Quand l'activité de l'élève porte sur de "chemins" partant de l'axe OX –quand il applique la transformation horizontale induite par une fonction–, le GCF est surtout utilisé de manière *effective :* l'élève doit agir sur le GCF, sans qu'il connaisse "a priori" quel genre de réponse il va avoir, pour qu'il en tire une conclusion.

En ce qui concerne l'opacité et la transparence, le rapport au GCF est variable.

L'élève doit dessiner des "chemins", en interaction avec le GCF. Mais il n'est pas toujours nécessaire qu'il se soucie de ce que tous les éléments du graphique structuré représentent ; dans ce cas-ci le rapport au graphique est par conséquent *opaque.*

Par contre, quand l'élève construit le graphique de la composition ou de la somme de deux fonctions, il doit savoir ce qu'il représente –des formules spécifiques– et le rapport au GCF devient*transparent.*

Support graphique :

Il y a plusieurs éléments graphiques. La courbe tracée dans le plan cartésien est toujours présente ; il n'y a pas le plus souvent des échelles numériques, mais la courbe doit être repérée par rapport aux axes et, parfois, par rapport à la bissectrice. Dans certains cas il doit avoir nécessairement en plus la bissectrice ou des chemins déjà tracés.

Utilité :

L'étude des transformations horizontales et verticales des courbes met en jeu des propriétés topologiques du GCF : concavité, croissance, etc.

D'une manière générale, l'elève doit trouver la courbe d'une fonction comme le résultat d'une succession de transformations d'une courbe initiale.

La construction de courbes de la composition de fonctions.

V. CONSIDERATIONS FINALES ET QUESTIONS OUVERTES

Les graphiques jouent et joueront longtemps encore un rôle fondamental dans l'étude scolaire des fonctions. Ils seront jugés longtemps irremplaçables, bien que leur place soit appelée à changer sans doute, comme toutes les notions que la technologie vidéo-informatique (de logiciels comme DERIVE, MATHEMATICA, ORGE et, surtout, les calculatrices graphiques, bientôt à la portée des étudiants du secondaire) peut utiliser ou simuler.

Cependant,

- il paraît nécessaire de dénoncer *l'illusion de l'évidence graphique* et le recours naïf ou systématique au graphique : le graphique n'a pas de vertu didactique "per se ",
- c'est l'existence *de différents milieux* ce qui fait changer les rapports au savoir (à la fonction et à l'analyse fonctionnelle) de l'élève et du professeur ; l'analyse en termes de situation du GCF donne au moins 5 milieux différents, selon l'usage qu'en font les professeurs et les élèves dans la situation,
- la qualité des milieux *opérateur* et *graphique structuré* comme instigateurs d'un fonctionnement "réel", culturel du savoir (la fonction), favorise au mieux la valeur des connaissances acquises,

- le milieu *nomogramme* doit s'articuler avec l'opérateur et le *graphique structuré* pour récuperer le rapport effectif au graphique,
- il est nécessaire un *travail d'ingénierie didactique* pour : a) intégrer de manière raisonnée le recours au graphique dans ses différents milieux, b) mettre au point les instruments nécessaires pour exercer un contrôle sur les milieux et c) renforcer la composante adidactique des situations de l'analyse par le biais des milieux offrant un support à la formulation et à la validation,
- en particulier, l'analyse du milieu *graphique structuré* mérite une recherche approfondie, qui sera sans doute enrichie dans la thèse en cours de Pedro Alson et
- l'étude du milieu de Guy Brousseau (Brousseau 1998) et le schéma proposé par Claire Margolinas (1994) constituent une base théorique riche, pas suffisemment exploitée jusqu'au présent dans la didactique de l'analyse.

BIBLIOGRAPHIE

ALSON P. (1995), *Sistemas de descriptores con aplicaciones a la definición de propiedades de funciones y a una ingenieria didáctica.* Universidad Central de Venezuela, Caracas.

ALSON P. (1996), *Métodos de graficación,* Ed. Erro, Caracas.

ANTIBI A. et BROUSSEAU G. (2000), La détransposition des connaissances scolaires, *Recherches en didactique des mathématiques,* vol. 20, n° 1, La pensée Sauvage, Grenoble (pp. 7-40).

ARTIGUE M. (1998), L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse, , *Recherches en didactique des mathématiques,* vol. 18, n° 2, La pensée Sauvage, Grenoble (pp. 231-262).

BLOCH I. (1999), L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique. Détermination d'un milieu - connaissances et savoirs, *Recherches en didactique des mathématiques,* vol. 19, n° 2, La pensée Sauvage, Grenoble (pp. 135-194).

BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des situations didactiques,* La Pensée sauvage, Grenoble.

CHAUVAT G. (1999), Courbes et fonctions au collège, *petit x,* Grenoble (pp.23-44).

DOUADY R. (1987), Jeux de cadres et dialectique outil / objet, *Recherches en didactique des mathématiques,* vol. 7.2, La pensée Sauvage, Grenoble (pp. 5-32).

DUVAL R. (1996), Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ?, *Recherches en didactique des mathématiques,* vol. 16, n° 3, La pensée sauvage, Grenoble (pp. 349-382).

FREGONA D. (1995), *Les figures planes comme "milieu" dans l'enseignement de la géométrie : interactions, contrats et transpositions didactiques,* Thèse, Université Bordeaux I.

GASCÓN J. (1999), 'Didactique fondamentale' versus 'Advanced Mathematical Thinking': ¿dos programas de investigación inconmensurables?, *Actes de la Xe école d'été de didactique des mathématiques,* ARDM et IUFM, Académie de Caen.

JANVIER C. (1983), Représentation et compréhension. un exemple : le concept de fonction, *Bulletin AMQ, Association Mathématique du Québec.*

LACASTA E. (1995), *Les graphiques cartésiens de fonctions dans l'enseignement secondaire des mathématiques : illusions et contrôles.* Thèse. Université Bordeaux I.

MACLANE S. (1971), Categories for the Working Mathematician, *Springer Verlag.*

MARGOLINAS C. (1994), Jeux de l'élève et du professeur das une situation complexe. *Séminaire Dida Tech,* n° 158, Université Joseph Fourier, Grenoble.

N.C.T.M. (1991), *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática,* S.A.E.M. Thales, Sevilla.

PERRIN-GLORIAN M-J. (1999), Problèmes d'articulation de cadres théoriques : l'exemple du concept de milieu, *Recherches en didactique des mathématiques,* vol. 19, n° 3, La pensée sauvage, Grenoble (pp. 279-321).

TALL D. (éd.) (1991), *Advanced Mathematical Thinking,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

CONTINUITES ET RUPTURES DANS LA TRANSITION TERMINALE S / DEUG SCIENCES EN ANALYSE

LE CAS DE LA NOTION DE DERIVEE ET SON ENVIRONNEMENT

Frédéric Praslon[3]

Université de Marne la Vallée, DIDIREM, Université de Paris 7

I. INTRODUCTION

La massification actuelle de l'enseignement supérieur, qui s'accompagne d'exigences vis à vis de l'université, en particulier en termes d'adaptation au nouveau public d'étudiants, fait aujourd'hui de cette traditionnelle question de la transition institutionnelle entre le secondaire et le supérieur un problème plus crucial que par le passé. Il s'agit d'une préoccupation qui est d'ailleurs commune à beaucoup de pays, notamment d'Europe occidentale.

Cette question revêt différentes facettes, celle du statut et de la vie sociale de l'étudiant, par exemple, outre les niveaux d'ordre « académique », relatifs aux contenus et aux formes d'accès aux connaissances, aux modes d'évaluation, aux rapports enseignants / enseignés, en évolution entre lycée et université, et sources de difficultés nouvelles.

Pour notre recherche, nous avons fait le choix de l'approche didactique d'un domaine plus particulier des Mathématiques, l'analyse, qui joue un rôle clef dans la transition terminale S / DEUG Sciences, notamment parce qu'il s'agit d'un domaine déjà largement exploré au lycée (contrairement à celui de l'algèbre). A l'intérieur de ce domaine, nous avons fait le choix pour notre étude d'un concept plus particulier, mais fondamental, celui de la dérivée, pris dans son environnement. Ce thème est au cœur de l'enseignement de l'analyse, tant au lycée (classes de première et de terminale S) qu'en première année de DEUG Sciences, et se prête donc à une étude comparée assez fine, en vue de saisir les changements de rapport au savoir liés à la transition entre ces deux niveaux d'enseignement.

[3] praslon@univ-mlv.fr

L'objectif est à la fois de *mieux comprendre* cette évolution, de voir comment elle est *perçue* et *gérée* par l'institution universitaire, et de construire aussi des situations d'enseignement permettant de *sensibiliser* les acteurs aux ruptures rencontrées et de les *travailler*.

Après avoir précisé les points de départ de cette recherche (II), nous indiquons nos principales références théoriques (III), nos hypothèses et notre méthodologie générale de travail (IV). Nous présentons ensuite les résultats d'ensemble obtenus, au niveau de l'étude *institutionnelle* des rapports à la dérivée au lycée et en DEUG Sciences (V), puis au niveau de l'étude des rapports *personnels* des étudiants de DEUG Sciences à cette notion de dérivée (VI).
Enfin, la question de la gestion des ruptures en cours de première année d'université, abordée via la mise au point et l'exploitation d'*ateliers* en petits groupes, est décrite avec les résultats correspondants (VII).
Nous concluons notre exposé en indiquant différents prolongements ou perspectives que nous entrevoyons pour notre recherche, et en décrivant de manière très succincte une réalisation pédagogique qui a déjà été menée en contrepoint de ce travail (VIII).

II. POINTS DE DEPART DE CETTE RECHERCHE

1. Une expérience personnelle d'enseignant à l'université de Marne-la-Vallée.

Ce travail de recherche, finalisé par une thèse de Doctorat en Didactique des Mathématiques (F.Praslon, janvier 2000, université Paris 7), prend sa source dans notre expérience de terrain en tant qu'enseignant en DEUG Sciences à l'université de Marne la Vallée depuis 1992, et les difficultés d'adaptation, en augmentation régulière durant cette période, que nous avons pu constater chez les étudiants à leur entrée en première année de cette formation.
A la base de bon nombre de ces difficultés, il nous semblait notamment détecter l'existence d'attentes *non fondées* des enseignants du supérieur, vis à vis des néo-bacheliers, en termes de connaissances et plus précisément de savoir-faire, au regard des restrictions drastiques, tout particulièrement au niveau des pratiques, des textes de programmes de lycée.
Au fameux discours selon lequel : *« les étudiants devraient savoir (faire) ceci, cela en sortant de terminales S... »* semble avoir peu à peu succédé aujourd'hui l'idée plus pessimiste encore qu'*« ils ne savent plus (faire) grand chose en arrivant à l'université »*.

Il nous semblait intéressant de soumettre ce jugement péremptoire au crible d'une analyse des pratiques mathématiques effectives au lycée et à l'université, visant à jauger de façon précise l'importance de sauts réels entre les deux institutions, selon nous souvent sous-estimés, voire ignorés.

2. Un mémoire de D.E.A.

Nous avons eu l'occasion, dans ce mémoire intitulé : *« Etude de l'aspect méta dans un cours de DEUG A sur la dérivée à l'université de Lille »*, d'analyser le contenu du discours de l'enseignant (M.Rogalski) lors d'un cours en amphithéâtre (enregistré sur cassette audio), et de mesurer la façon dont il était reçu par le public d'étudiants, à la lecture de leurs notes de cours, et de fiches de synthèse qu'ils avaient à réaliser en séance de travaux dirigés.

Dans ce cours, constitué de deux séances de deux heures chacune, l'enseignant expose notamment différents préceptes et méthodes qualitatifs et assez universels en analyse, très emblématiques de la pratique de cette discipline au niveau de l'enseignement supérieur, en lien avec des niveaux de *généralité* et de *formalisation* plus élevés.
Parmi les méthodes exposées, citons celle qui consiste à *transformer* un problème, notamment à le ramener à un cas plus simple (changements de fonction, de variable, comparer f-g à 0 plutôt que comparer f et g entre elles...), et les méthodes de *raisonnement* (par l'absurde, par contraposée, par condition suffisante, notamment pour les démonstrations formelles en ε, avec utilisation des inégalités triangulaires).
Parmi les préceptes évoqués par l'enseignant, on peut citer : *« Quand on contrôle la dérivée, on contrôle la fonction ; la réciproque est fausse »* ou encore : *« Par passage à la limite, les inégalités strictes deviennent larges »*, voire certaines considérations sur la nécessaire distinction entre *« propriété locale »* et *« propriété globale »*.

A la lecture des notes de cours et surtout des fiches de synthèse des étudiants, on s'aperçoit nettement, au-delà des nombreux contresens et imprécisions commis[4], que la finalité d'un tel enseignement ne leur est pas encore accessible. Notons d'ailleurs que l'essentiel de la teneur

[4] Les précepts ci-dessus évoqués sont notamment exprimés dans un certain « langage de l'expert » qui n'est pas toujours compris par les étudiants. Par exemple, la formule : *« Par passage à la limite, les inégalités strictes deviennent larges »* est interprétée par eux de diverses manières (*« On ne peut pas travailler avec des inégalités strictes »* ou *« Les inégalités strictes ne permettent pas de passer aux limites »*...).

de ce cours (à la fois qualitativement et quantitativement) se situe davantage au niveau du discours *oral* méta-mathématique[5] de l'enseignant qu'au niveau de ce qu'il *écrit* au tableau. Or ce discours, à la lecture des notes de cours des étudiants, semble perdu au moins en partie, puisqu'on constate qu'ils ne notent en général *que* ce qui figure au tableau, c'est-à-dire généralement des énoncés et des algorithmes assez peu commentés.
Théoriquement possible compte tenu de leurs connaissances générales, cet enseignement apparaît cependant prématuré en début de DEUG Sciences, car il induit un saut qualitatif trop important dans le champ de l'analyse. Ce mémoire de D.E.A posait ainsi déjà le problème du *rapport* entre deux cultures bien distinctes.

III. REFERENCES THEORIQUES UTILISEES POUR CETTE RECHERCHE

1. Cadre théorique global : l'approche anthropologique d'Y.Chevallard.

Cette théorie anthropologique du didactique est en effet propre à caractériser les transitions institutionnelles (en général) en insistant sur la *relativité* des objets de connaissance aux institutions dans lesquels ils se situent : chaque institution se caractérise par une certaine *culture*, traduite par des *pratiques* dont découlent les rapports personnels aux concepts.
Ces rapports émergent donc de systèmes de pratiques, organisés selon Y.Chevallard en praxéologies, constituées de *tâches*, *techniques* (au sens large), *technologies* (discours sur la technique) et *théories* (technologies de ces technologies). Caractériser les nouveaux rapports aux concepts dans la transition revient alors à analyser l'évolution de ces praxéologies. En particulier, dans chaque institution, l'avancée du savoir s'accompagne nécessairement de la *routinisation* de certaines tâches et techniques destinées ensuite à devenir *transparentes*, aller de soi, ou encore, selon les termes d'Y.Chevallard, à être *« naturalisées »*.

En référence à cette approche, qui nous permet d'avoir un regard original sur cette question de la transition terminale S / DEUG Sciences, il nous faut donc arriver à identifier et à qualifier de façon précise les systèmes de pratiques respectifs dans les deux institutions, du lycée et de l'université, au moyen d'un *outil méthodologique* ad hoc.
Un des avantages de la théorie d'Y.Chevallard tient dans le fait qu'elle rend à la dimension technique, souvent péjorée dans l'analyse didactique, sa véritable place.

---

[5] C'est-à-dire « au dessus » du discours strictement mathématique.

2. **Cadres théoriques plus spécifiques par rapport à cette recherche.**

a) Les travaux de D.Tall et Ed.Dubinski (aspects cognitifs).

La distinction introduite par D.Tall et Ed.Dubinsky entre processus et objets, ainsi que celle effectuée par A.Sfard entre stade opérationnel et stade structurel, sont notamment utiles à décrire les sauts conceptuels rencontrés en DEUG Sciences, liés au monde fonctionnel.

b) Les travaux d'A.Robert (aspects épistémologiques et cognitifs).

Selon A.Robert, la référence aux connaissances de l'expert, marquées par un degré élevé d'*organisation active* et *individuelle*, est propre à saisir l'évolution nécessaire du rapport au savoir à l'entrée à l'université. Cela induit aussi la nécessité d'une certaine flexibilité cognitive, par ailleurs également évoquée par Tall et Dreyfus, et caractérisée par des mises en relation, des questionnements personnels, une utilisation plus systématique de repères, d'exemples ou de connaissances théoriques structurées selon le cas, une capacité à combiner ou à répéter des arguments, ...etc.

A.Robert introduit trois niveaux de mise en fonctionnement des connaissances (*technique*, *mobilisable* et *disponible*) qui permettent de quantifier ce besoin nouveau en termes de flexibilité cognitive.

Elle définit par ailleurs ce qu'elle appelle des niveaux de conceptualisation (« paliers correspondant à une organisation cohérente d'une partie du champ conceptuel : objets mathématiques présentés d'une certaine façon, théorèmes introduits, méthodes en découlant, et problèmes qui leur sont associés »), qui apparaissent en évolution dans la transition entre terminale S et DEUG Sciences.

Enfin, A.Robert isole des difficultés d'apprentissage propres à certains concepts introduits à l'université, liées aux aspects formalisateur, unificateur, généralisateur et simplificateur[6] de ces concepts (exemple : la notion formelle de limite en analyse, ou les différents concepts introduits en algèbre linéaire).

[6] Concepts « F.U.G.S ». L'aspect « simplificateur » des constructions théoriques envisagées, qui se juge par les économies de traitement qu'elles entraînent, reste surtout apparent à l'expert, et coincide au contraire à une perte de lisibilité initiale pour l'étudiant néophyte.

c) Les notions de cadre, de registre, et de point de vue.

Les notions de cadre (R.Douady), de registre (R.Duval), de point de vue (A.Robert, I.Tenaud, C.Castela, M.Rogalski) permettent de penser certains *niveaux* de cette flexibilité cognitive nouvelle, qui devient nécessaire au travail mathématique dès la première année de DEUG Sciences.

d) Des travaux plus spécifiques de la didactique de l'analyse.

Ils sont divers et variés. Il convient d'abord de citer ici les travaux de B.Cornu et A.Sierpinska concernant certains obstacles de nature épistémologique (notions de *limite* et de *tangente*, en particulier). M.Artigue décrit notamment l'*évolution* nécessaire des modes de pensée et de raisonnement en analyse, et M.Legrand évoque la *reconstruction* des rapports à l'algébrique en vue de l'apprentissage de cette discipline au niveau de l'enseignement supérieur. M.Schneider nous dévoile des problèmes liés à la *coexistence* entre une analyse rigoureuse et une analyse plus intuitive.

e) Les travaux sur les « méthodes » de M.Rogalski.

M.Rogalski analyse cette question des méthodes en termes de « recherche de stratégie préalable, guidée par métarègles », de « classement du problème », de « choix tactiques et techniques »...

Il affirme également le rôle accru, dans les débuts de l'université, de la mémorisation pour identifier, *re-connaître* des formes standards, afin de réaliser certaines tâches.

IV. HYPOTHESES ET METHODOLOGIE GENERALES DU TRAVAIL

1. Hypothèses de recherche.

La considération des références théoriques précédentes, comme notre expérience antérieure sur ce problème de la transition terminale S / DEUG Sciences nous ont amené à dégager certaines hypothèses de travail :

- Il semble y avoir, dans cette transition, coexistence de ruptures fortes et de microruptures d'ordres *technique* et *conceptuel*, ces dernières pouvant être présentes au sein des praxéologies perçues par l'institution universitaire comme les plus « ordinaires », les plus « transparentes ». Ce phénomène nous paraît d'ailleurs lié à une *sous-estimation* du rôle de la routinisation des tâches par les acteurs de cette institution.

- La transition ne se réduit pas, selon nous, au passage d'une analyse *« intuitive »* à une analyse *« formalisée »*, même si cette composante est présente. Des difficultés plus *transversales* (sollicitation de niveaux d'autonomie plus élevés pour la réalisation de tâches, travail sur des objets généraux, un monde fonctionnel en évolution...) pèsent au moins aussi lourdement sur cette transition.

- L'entrée, au niveau du supérieur, dans l'analyse démontrée, avec une évolution évidente de la « dialectique » cours-exercices, paraît une source de difficultés nouvelles, et pas seulement parce qu'elle implique des exigences nouvelles au niveau du raisonnement.
Au classique schéma « théorème-application », avec une optique d'opérationnalité qui guide l'enseignement des Mathématiques au lycée, se substitue en DEUG Sciences une construction et des *finalités* plus complexes à saisir, plus délicates à décrypter, induisant un *relief* nouveau. Ainsi, les *démonstrations*, d'intérêt et de difficulté variables, nous font rentrer au cœur du fonctionnement mathématique et des connections qui se tissent entre les divers concepts. Leur présence dans le cours ne relève donc pas d'un simple « souci d'esthétique » ; elles servent à rendre *intelligibles* les Mathématiques (réflexion nouvelle, par exemple, sur le *rôle des hypothèses* dans un énoncé).
Il convient de même, désormais, de comprendre le rôle assez *variable* des énoncés vis à vis de l'usage *plus ou moins* opérationnel qu'on peut en faire. Par exemple, le critère de Cauchy, assez peu utile lors de la pratique des exercices, sert surtout à *l'avancement du cours*, et va permettre, par exemple, d'établir que toute série absolument convergente est convergente, ce qui constitue en revanche un critère très opérationnel.

- Un besoin nouveau apparaît selon nous en DEUG Sciences au niveau des « méthodes ». Ces dernières sont d'ailleurs à distinguer des *« points-méthodes »* qu'on peut rencontrer dans des manuels de lycée, et qui ne sont en général que des *plans d'action* à usage très *local*, donnés « clef en main » aux élèves. L'idée de méthode sous-entend au contraire celle d'un *choix personnel* à effectuer, d'une démarche *réflexive* et d'une *distanciation* par rapport à l'action.

- Par ailleurs, un certain *« dégradé »* des méthodes paraît être à l'œuvre dans les débuts de l'enseignement supérieur. L'étudiant doit faire l'apprentissage de méthodes *spécifiques du supérieur* (exemple : méthode de raisonnement à ε-près), qui sont le plus souvent non désamalgamées du contenu même du cours (des définitions, des théorèmes...). Mais un travail de capitalisation et de réorganisation de connaissances *anciennes*, en *intégrant le neuf*, semble aussi nécessaire en début de DEUG. Citons l'exemple du calcul des limites, pour lequel les développements limités donnent un nouvel outil venant *compléter* les techniques élémentaires du lycée et non *s'y substituer*.

2. Méthodologie générale de recherche.

Prenant donc pour *fil directeur* le cadre théorique de Chevallard, nous avons fait le choix de caractériser les rapports institutionnels à la « dérivée » des élèves de lycées et des étudiants d'universités, par une étude des tâches qui leur sont soumises sur ce thème, dans chacune des deux institutions.

Cette étude est réalisée à partir de l'analyse d'exercices et de problèmes tirés de manuels de première S et de terminale S couramment utilisés au niveau national (collections « Déclic » « Transmath », « Terracher », et « Fractales »), de sujets de Baccalauréat, et au niveau du supérieur, d'exercices issus de feuilles de travaux dirigés de DEUG Sciences (1ère année) données dans diverses universités. Le fait de mener une analyse comparée entre deux objets d'étude distincts (manuels scolaires au lycée / feuilles de travaux dirigés en DEUG) peut paraître discutable sur un plan méthodologique. Il nous a cependant semblé s'imposer du fait que le travail en classe s'organise essentiellement à l'université à partir de feuilles d'exercices conçues par les enseignants eux-mêmes, ce qui n'est pas le cas au lycée où les ouvrages ont un véritable « statut officiel ».

L'outil méthodologique utilisé pour répertorier les résultats obtenus est une grille d'analyse multidimensionnelle construite sur la base de notre analyse théorique a priori des ruptures.

En second lieu, on étudie les rapports personnels des étudiants à la dérivée à leur *entrée à l'université* au moyen de tests écrits portant sur des tâches non routinières au lycée, situées déjà, selon nous, à la transition des deux cultures.

Enfin, des ateliers en petits groupes, menés *en cours* de première année de DEUG, sur des thèmes considérés par nous-même comme *emblématiques* de la transition (statut et rôle des définitions, étude de conjectures, travail sur des fonctions définies par des propriétés générales, ...etc.) visent à gérer localement les ruptures préalablement identifiées.

V. ETUDE INSTITUTIONNELLE DES RAPPORTS DES ELEVES ET DES ETUDIANTS A LA DERIVEE

1. Description de l'outil méthodologique : la grille d'analyse multidimensionnelle.

Construite à partir des ruptures supposées, cette grille d'analyse des tâches sollicitées au lycée et à l'université se constitue de cinq tableaux à double entrée. Chaque tableau correspond à *un* type d'observation donné, c'est-à-dire à *une* dimension d'analyse précise des tâches, et permet de mentionner à la fois des informations de natures *qualitative* et *quantitative.*

Les différentes dimensions d'analyse considérées sont les suivantes :

a) Le niveau de décomposition des tâches exigées, dont l'étude doit permettre de jauger la *complexité* de ces tâches,
b) Les aides à la résolution fournies par l'énoncé, qui dévoilent les *niveaux d'autonomie* exigés dans la réalisation des tâches,
c) Le statut outil ou objet des notions engagées, le contexte des diverses tâches (monde fonctionnel engagé, degré de généralité, ...etc.)
d) Les cadres de travail et les changements de cadres (guidés ou autonomes) nécessités,
e) Les registres sémiotiques d'expression du travail mathématique à effectuer.

Dans chaque tableau, on reporte *en horizontal* les caractéristiques possibles, utiles à décrire la dimension d'analyse considérée, et *en vertical*, les divers thèmes d'enseignement relatifs à la dérivée sur lesquels peut être centrée la tâche en question. On peut citer par exemple, pour la dimension d'analyse *« niveau de décomposition des tâches »*, les caractéristiques suivantes : *« activités de calcul »*, *« activités graphiques »*, *« application de définitions »*, *« application de théorèmes »*. Comme exemples de thèmes (indépendants de la dimension d'analyse considérée), on peut citer les rubriques : *« inégalités des accroissements finis »*, *« définition du nombre dérivé »*, *« étude des variations »*, ...etc.

Précisons aussi que nous avons été amené <u>à faire évoluer</u> cette grille en fonction du niveau d'apprentissage considéré :

- avec l'objet d'étude (*« caractéristiques »* à modifier entre lycée et université : par exemple, on a ajouté une rubrique *« absence d'aides »* dans le tableau des aides à la résolution relatif à la première année de DEUG Sciences),
- du fait du corpus enseigné (les *« thèmes »* d'enseignement varient d'une année à l'autre),
- par souci de simplification (passage de cinq à trois tableaux en cours d'étude, entre lycée et université).

Pour chaque thème, on définit ce que l'on appelle un <u>taux de répétitivité</u> des exercices portant sur ce thème. Le calcul de ce taux permet de rendre compte de la place accordée à la *systématisation* de tâches d'entraînement aux techniques standards en vue de rendre routinières ces techniques pour l'élève ou l'étudiant du niveau d'apprentissage considéré. L'objectif est en fait de mettre en évidence comme *facteur de rupture* dans la transition une répétitivité plus faible des tâches à l'université qu'au lycée.

2. Résultats de l'étude institutionnelle réalisée sur les manuels de lycée.

Nous présentons les résultats relatifs aux tâches sollicitées dans les manuels de lycée, selon les différentes dimensions d'analyse détaillées ci-dessus, en donnant quelques exemples en illustration.

a) Niveau de décomposition des tâches.

Les tâches observées dans les manuels de lycée sont *simples* et *isolées*, elles sont centrées sur l'application d'*une* technique ou d'*un* théorème particulier. Le <u>travail mathématique</u> est dans l'ensemble piloté par *quelques* pratiques <u>majoritaires</u>, bien mises en relief dans les manuels par une organisation très structurée des chapitres, notamment constitués de travaux pratiques, d'exercices corrigés, de fiches-méthodes. Un *contrat* et des *enjeux d'apprentissage* bien précis, ciblés, se dégagent de cette structure.

Au niveau graphique, il s'agit le plus souvent de tâches telles que : *lire* une information (très locale) à partir d'un graphe donné, *associer* deux à deux des graphes donnés (fonctions et dérivées) ; il n'y a guère de tâches de *production*, en dehors des tracés habituels de courbes représentatives de fonctions usuelles (mais cette tâche est en fait réalisée par la calculatrice).

Exemple de tâche graphique (manuel « Déclic » de terminale S ; exercice 1 page152) :

« Pour les courbes suivantes, représentatives de f sur [-1,3]

a) déterminer graphiquement $\lim_{h \to 0^+} (f(2+h)-f(2))/h$ *et* $\lim_{h \to 0^-} (f(2+h)-f(2))/h$ *;*

b) dites si f est dérivable en 2. »

b) Aides à la résolution.

Elles sont multiformes, implicites ou explicites, locales ou globales. Citons notamment le fait que les exercices sont le plus souvent regroupés par *thèmes*, ces thèmes étant signalés par des *sous-titres* (aide implicite). Il y a un découpage des tâches en sous-tâches plus élémentaires, et beaucoup de réponses sont *fournies*. Cet environnement se caractérise en fait, par la présence, d'un exercice à l'autre, de canevas répétitifs de questions souvent très directives, surtout en $1^{ère}$ S dans un rapport *initial* à la dérivée.
La possibilité d'un travail très progressif, par petites touches, de *l'autonomie* de l'élève, est ainsi offerte. En contrepartie, les niveaux d'autonomie visés demeurent assez restreints.

Exemple (manuel « Déclic » de première S) :

« Montrer que l'équation f(x)=0 admet une unique solution sur l'intervalle... » (ex n°31)

« Déterminer le nombre de solutions de l'équation f(x)=0 sur R » (ex. n°32 p.206)

Si on reprend la tâche de nature graphique évoquée dans le paragraphe précédent, on constate que l'interaction entre cadre algébrique et cadre graphique est totalement pilotée par le texte, l'expression du taux d'accroissement et le fait qu'il est nécessaire de distinguer « limite à gauche » et « limite à droite » sont précisés.

c) Statuts « outil » et « objet » des notions engagées. Contextes de résolution. Flexibilité.

Au sein de ces exercices, les notions sont surtout engagées dans leur statut « outil », plus rarement dans leur statut « objet ».

C'est *l'application, l'opérationalité* qui sont visées. Le travail porte sur des fonctions *usuelles* et des situations *particulières*. Le champ fonctionnel restreint, dans lequel se situent les tâches les plus courantes, *crée des règles* et entretient l'illusion selon laquelle des techniques de nature purement algébrique suffisent au travail en analyse. C'est particulièrement vrai au niveau de la classe de première S, où ce champ se réduit aux fonctions polynômes, fractions rationnelles et à radicaux[7].

Dans ce contexte, le travail formel et le rôle des définitions sont réduits. Il y a notamment des *prises de relais* permettant de plus avoir à faire référence aux définitions ; par exemple, les formules de dérivation formelle suffisent à la réalisation des tâches ordinaires, dans ce champ, rendant le plus souvent la définition du nombre dérivé sans objet. Les problèmes de nature plus qualitative, tels que *« étude de la dérivabilité en un point »* sont alors marginalisés.

La présence de *paramètres* n'est pas décisive, en général, du point de vue de la difficulté des exercices, car elle n'induit la nécessité d'une discussion délicate que de façon exceptionnelle.

Les aspects globaux l'emportent sur les aspects locaux ; ainsi par exemple, la définition par *approximation affine* de la dérivabilité en un point est surtout utilisée à des fins de *calcul numérique*, avec majoration éventuelle de l'erreur, et disparaît des exercices sollicités au sein des manuels de terminale S :

Exemple (exercice n°16 page 176, Déclic 1ère S) :

« Justifier que $1+3h$ est une valeur approchée de $(1+h)^3$ à $4h^2$ près ($h\in[-1;1]$).

En déduire une valeur approchée de $1,02^3$ et $0,95^3$ en précisant un majorant de l'erreur. »

→ On constate que le caractère « affine » de l'approximation sollicitée n'est guère mis en exergue par l'énoncé ; c'est un travail purement technique de majoration algébrique qui ressort surtout de la tâche proposée, avec application numérique à la clef.

Il y a de nombreux éclairages *graphiques* et *numériques*, au sein des tâches sollicitées, mais les changements de cadres demeurent généralement *pilotés* par le texte (comme le montre d'ailleurs l'exemple précédent).

En terminale S, il s'agit davantage de consolider les acquis en vue du baccalauréat, et de réinvestir des connaissances *anciennes* sur la dérivée dans de *nouveaux* contextes, que de faire l'apprentissage de nouvelles notions relatives à la dérivée. Ajoutons que les quelques objets

[7] Les fonctions trigonométriques, généralement enseignées assez tard dans l'année en 1ère S, ne font donc pas partie du champ de référence *« disponible »* au quotidien durant cette année.

nouveaux, relatifs à la dérivée, qui sont introduits (les inégalités des accroissements finis, le théorème de composition des dérivées, la notion dérivées successives...) sont utilisés de façon souvent très *rigide* dans les problèmes de synthèse[8].

Les quelques tâches complexes qui sont sollicitées, et nécessitent une certaine *flexibilité*, portent sur des connaissances *anciennes* par rapport à la notion de dérivée. Mais il y a dans l'ensemble, même à ce niveau, peu d'évolution qualitative entre les tâches sollicitées en première S et celles de terminale S.

On peut citer à ce propos l'exemple des études de fonctions nécessitant l'étude préalable d'une fonction auxiliaire, qui représentent un « grand classique », aussi bien au niveau des problèmes de Baccalauréat que des exercices spécifiques des manuels de terminale S.

Ce type de tâche est alors systématiquement *guidé*, et *décortiqué* par l'énoncé en sous-tâches élémentaires :

Exemple (exercice n°55 page 186, Déclic TS) :

« *1°) Etudiez les variations de* $g(x) = ln(x)-e/x$ *sur* R_+^*.

2°) Calculez $g(e)$ *et en déduire le signe de g sur* R_+^*.

3°) En déduire les variations de $f(x) = (x-e)(ln(x)-1)$. »

→ Ici, le calcul de $g(e)$ permet de constater que g est négative sur $]0,e[$ et positive sur $]e,+\infty[$, puisque $g(e) = 0$... or g se trouve être la dérivée de f...

3. Résultats de l'étude institutionnelle réalisée sur les feuilles d'exercices de DEUG.

a) Niveau de décomposition des tâches.

On constate ici, que même s'agissant de tâches portant sur des objets *particuliers*, il y a le plus souvent une complexité beaucoup plus grande des tâches sollicitées, dans les feuilles de travaux dirigés de DEUG Sciences, que dans les manuels de lycée. Par exemple, le calcul de primitives suppose l'assimilation de méthodes précises, en plusieurs étapes, que ne décrit plus l'énoncé (tâches peu découpées).

[8] On pense notamment ici aux fameux problèmes-types d'études de suites récurrentes selon la méthode du point fixe avec utilisation des inégalités des accroissements finis à la clef. Ces problèmes sont construits selon un canevas de questions très directives, qui ne varie guère d'un problème à l'autre.

b) Aides à la résolution.

Parallèlement à cette première constatation, on remarque que des tâches considérées (de façon générale) par les enseignants du supérieur comme « standards » en DEUG requièrent des niveaux d'autonomie beaucoup plus élevés que les tâches ordinairement sollicitées au lycée. Il y a notamment de la part de l'institution universitaire des attentes *nouvelles* et *implicites*, sur des objets *anciens*, auxquelles elle n'est pas nécessairement très sensible :

Exemple (université de Marne la Vallée, partiel, 1996) :

> « *On veut étudier la convergence de la suite récurrente* $(u_n)_{n\in N}$ *définie par* $u_0=\alpha$ *et* $(\forall n\in N)$ $u_{n+1} = 1/8\ (u_n^2+4u_n+3)$, *selon la valeur du réel* α.
>
> *1°/ Déterminer les limites possibles (éventuelles) de* (u_n).
>
> *2°/ Montrer que si* $\alpha\in[-5,1]$, *alors* $-1\le u_n \le u_{n+1} \le 1$ *pour tout* $n\ge 1$. *Conclure...* »

→ Il convient de penser à introduire *soi-même* la fonction $x \to f(x) = 1/8\ (x^2+4x+3)$ dont il faut étudier les variations, mais aussi à placer diverses valeurs *« charnières »* (pour le problème posé) dans le tableau de variations : les solutions *1* et *3* de l'équation $f(x) = x$, les *autres* solutions des équations $f(x) = 1$ et $f(x) = 3$, et le *minimum* de f sur R. Toutes ces sous-tâches, standards en terminale S, sont certes élémentaires vis à vis du niveau d'apprentissage considéré, mais le fait d'avoir à décider *seul* de les accomplir place cet exercice à un niveau de difficulté élevé pour les étudiants.

Le travail de routinisation des tâches ne fait plus guère l'objet de scénarios *progressifs*, tels que décrits plus haut pour les manuels de lycée, et reste très *inégal* d'une université à l'autre. La répétitivité des tâches est en *forte baisse*, ce qui va de pair avec une accélération forte du temps didactique, la variété et le nombre des objectifs d'apprentissage, en nette hausse par rapport au lycée, n'autorisant plus le « bachotage » de certaines tâches spécifiques durant les séances. Le continuum observé au sein des sections d'exercices de manuels de lycée[9] fait ainsi place en DEUG Sciences, dans les feuilles de travaux dirigés, à des suites d'exercices qui apparaissent comme assez disparates, surtout à l'étudiant néophyte, avec des sauts importants, d'un exercice à l'autre, du point de vue des difficultés d'ordres technique et conceptuel, des contextes abordés, comme des connaissances sollicitées.

[9] Par ailleurs davantage structurés et organisés, par nature même, dans leur conception, en vue de mettre en relief et de respecter une certaine progression, que de simples feuilles d'exercices.

Les réponses sont plus rarement fournies, sauf pour les tâches requièrant un raisonnement formel ou une argumentation consistante.
Les tâches présentant des difficultés particulières, à présent plus nombreuses, font souvent l'objet d'aides assez frustes. Des scénarios d'aide efficaces, ne dénaturant pas de telles tâches, souvent susceptibles de forcer le développement d'une certaine autonomie, d'une réflexion personnelle, et d'une flexibilité cognitive nouvelles, semblent aussi plus difficiles, désormais, à concevoir[10].

c) Statuts « outil » et « objet » des notions engagées. Contextes de résolution. Flexibilité.

Le statut « objet » des notions engagées est davantage mis en jeu que dans les tâches issues des manuels de lycée, ce qui va de pair avec un accroissement du rôle des *définitions* et du *travail formel* au sein de ces tâches, et une augmentation de leur *niveau de généralité.*
La présence de *paramètres* est plus souvent décisive vis à vis de la difficulté des tâches, et nécessite généralement une discussion susceptible de mettre en jeu de façon très cruciale les notions au cœur de l'apprentissage considéré.
Il y a un net rééquilibrage entre les aspects locaux et globaux, au profit des premiers, et une pluralité des moyens de réalisation des tâches beaucoup plus fréquente que pour celles des manuels de lycée, mais cette pluralité n'est que rarement mise en exergue par l'énoncé.
Les *éclairages* possibles dans d'autres cadres que le cadre algébrique (et en particulier, les cadres *graphiques* et *numériques*) ne sont pas autant exploités qu'au sein des tâches issues de manuels de terminales S, les changements de cadres utiles à la compréhension d'un problème ne sont pas suggérés comme c'est le cas au lycée.

Exemple (université de Marne la Vallée, sujet d'examen, 1997) :

« On pose $f(x) = x / \ln(x)$ pour $x>1$.

1°/ Etudier les variations de f et ses limites en 1 et $+\infty$.

2°/ Pour chaque x_0 de $]1, +\infty[$, indiquez la position relative de (Cf) et de sa tangente au point d'abscisse x_0.

On distinguera trois cas : $x_0<e^2$, $x_0> e^2$, $x_0= e^2$. »

[10] Peut-être y a t-il aussi une certaine *réticence* de l'institution universitaire à piloter de près la réalisation de ces tâches, justement en vertu de ces comportements d'adaptation qu'elles sont censées provoquer chez l'étudiant.

→ La valeur d'abscisse e^2 correspond au point d'inflexion de la fonction, et la discussion s'oriente donc autour de cette valeur de manière tout à fait cruciale. C'est l'aspect local qui est ici privilégié et diverses procédures sont possibles pour l'exécution de la seconde question : recours à une formule de Taylor, à un théorème de cours relatif aux notions de convexité-concavité, à l'étude de la fonction-différence $x \to f(x) - f(x_0) - f'(x_0).(x-x_0)$... ce que ne souligne pas l'énoncé. La gestion du travail est totalement laissée à l'initiative de l'étudiant, en particulier le choix de faire interagir, ou non, cadre graphique et cadre algébrique.

L'institution est moins attentive que celle du lycée à éviter, au sein d'une tâche donnée, le télescopage entre une notion théorique *nouvelle* et un contexte *nouveau*. Par exemple, on peut solliciter le développement limité d'une fonction trigonométrique réciproque, alors que le temps consacré à l'étude de ce type de fonction reste restreint au sein du cursus, et en tous cas sans commune mesure avec celui consacré en terminale à l'étude de fonctions logarithmes et exponentielles.

Il y a une certaine diversité des environnements d'exercices, souvent *riches de potentialité,* mais le travail critique reste paradoxalement assez *peu sollicité* vis à vis des possibilités qui sont offertes par les tâches proposées.

On constate qu'il existe des pratiques jalons (servant de point de repère vis à vis d'objectifs d'apprentissage) au niveau de la première année de DEUG Sciences, comme il en existe en terminale S. Parmi ces pratiques institutionnelles centrales, on peut par exemple citer le fait d'appliquer le théorème des accroissements finis à des fonctions et entre des points donnés :

Exemple (université de Nantes, feuille d'exercices) :

> « *On suppose que f est dérivable sur* R_+^* *et que :* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lambda$ *et* $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \mu$, *où* λ, μ *deux réels. En appliquant la formule des accroissements finis à f entre x et x+1, montrez que nécessairement* $\mu = 0$... »

→ Il s'agit d'une « pratique-jalon » dans l'institution, avec un guidage exceptionnellement directif de l'énoncé, et pas de sollicitation d'une critique de la nécessité de l'hypothèse : « $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \mu$ » pour l'obtention du résultat final : « $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ ».

Au terme de cette étude institutionnelle, la construction de deux organigrammes, l'un d'eux concernant les manuels de lycée et l'autre étant relatif aux diverses feuilles de travaux dirigés de DEUG Sciences, permet de résumer le « paysage conceptuel » dans l'environnement de la notion de dérivée aux deux niveaux d'apprentissage. De nettes différences apparaissent dans l'agencement des notions, des objets mathématiques entre eux, avec une relation plutôt de type *« descendante »* au lycée (fléchage en sens unique des définitions ou des énoncés de base vers leurs applications), et de type *« dialectique »* en DEUG Sciences (fléchages multiples, réseau très dense et complexe de connections et d'aller-retour entre concepts ou énoncés).

VI. ETUDE DES RAPPORTS PERSONNELS DES ELEVES / DES ETUDIANTS A LA DERIVEE

1. Présentation d'une tâche particulière. Résultats obtenus.

a) Description de la tâche et justification du choix effectué.

Nous présentons ici un exercice extrait du test soumis en septembre 1996 aux entrants en première année de DEUG Sciences à l'université de Marne la Vallée, exercice qui nous paraît particulièrement significatif de l'esprit général des deux tests de 1995 et 1996 utilisés dans cette recherche et, au niveau des résultats, du comportement général des étudiants face aux difficultés que soulèvent ces tests.

La tâche qui est proposée à travers cet exercice peut se résumer ainsi : *« se familiariser avec un nouvel objet mathématique, la dérivée symétrique, et la comparer à la notion de dérivée au sens ordinaire du lycée ».*

L'énoncé commence par présenter une fonction particulière, la fonction périodique de période égale à 1, définie sur $[0,1[$ par : $f(x) = x.(1-x)$, fournit son graphe, puis demande aux étudiants de se prononcer sur la continuité (satisfaite) et la dérivabilité (non vérifiée aux points d'abscisses entières) de cette fonction sur R (sous-tâche n°1).

La notion de nombre dérivé symétrique en un point x_0, notée $f_s'(x_0)$, est ensuite présentée ainsi aux étudiants : $f_s'(x_0) = \lim_{x\to x0} (f(x_0+h) - f(x_0-h)) / 2h$, et on leur demande, pour la fonction f qui a été introduite précédemment, de calculer les nombres dérivés symétriques et les nombres dérivés « au sens ordinaire » de cette fonction en $½$, $¼$, et 0, *s'ils existent*, puis de les comparer deux à deux entre eux (sous-tâche n°2).

Enfin, on propose l'étude des trois conjectures suivantes :

C1 : *« Toute fonction paire définie sur R admet une dérivée symétrique en zéro »*

C2 : « *Toute fonction paire définie sur R admet une dérivée (ordinaire) en zéro* »

C3 : « *Si une fonction définie sur R est dérivable au point x_0, alors elle admet aussi une dérivée symétrique en x_0 et on a : $f_s'(x_0) = f'(x_0)$* » (sous-tâche n°3).

Notons encore que l'énoncé rappelle la définition du nombre dérivé au sens ordinaire : $f'(x_0) = \lim_{x \to x0} (f(x_0+h) - f(x_0)) / h$, précisant qu'elle vaut aussi $\lim_{x \to x0} (f(x_0) - f(x_0-h)) / h$, si elle existe.

Les principes qui nous ont orientés vers le choix d'un tel questionnement :

Il nous a semblé que, conformément à nos souhaits, cette tâche était susceptible de nous aider à mieux saisir certains éléments de la transition institutionnelle qui se joue, car elle se situe bien, selon nous, à la transition des deux cultures, du secondaire et du supérieur.

En effet, d'une part, elle se démarque profondément des tâches ordinairement sollicitées au lycée :

- la fonction particulière sur laquelle l'étudiant doit travailler est définie seulement de manière implicite,
- l'étudiant doit intégrer à son travail un nouvel objet formel, la notion de dérivée symétrique,
- il doit aussi *démontrer* ou infirmer à l'aide de *contre-exemples*, des conjectures très *générales*.

Mais d'autre part, on doit relever en contrepartie :

- que la tâche demeure d'une faible technicité, notamment en raison de la simplicité de la fonction introduite,
- que l'activité démarre sur l'étude d'une fonction particulière, se prolonge au niveau de la notion nouvellement introduite par des calculs de nombres dérivés en des points également particuliers, avant l'étude finale de conjectures générales,
- que la forme même du questionnement est de nature à guider l'étudiant : le *graphe* de la fonction f est fourni par le texte, ce qui offre à l'étudiant la possibilité de visualiser la *parité* de cette fonction (au cœur des justifications à donner), et sa *non dérivabilité* aux points d'abscisses entières ; en outre, la fonction f peut être utilisée pour réaliser certaines inférences, et constitue un contre-exemple « prêt à l'emploi » en vue d'une étude de la conjecture C2.

L'un des objectifs de ce questionnement est ainsi de tester chez les étudiants une certaine flexibilité cognitive entre *cadres graphique* et *algébrique*, dans un contexte qui leur est *plutôt*

favorable, et leur capacité à saisir la fonction remplie ici par le graphe (il permet de s'orienter vers la solution correcte) autant qu'à produire une preuve formelle correcte.
Relevons enfin que la tâche proposée, qui serait très originale, fort éloignée des pratiques standards, usuelles, dans un environnement de lycée, ne semble pas davantage susceptible de figurer dans un environnement de DEUG Sciences du type de ceux observés dans notre étude institutionnelle, en raison des *contenus* mis en jeu, qui ne correspondent pas aux objectifs d'apprentissage en DEUG, et de la forme *progressive*, signalée plus haut, du questionnement.

b) Résultats obtenus. Analyse succincte des productions des étudiants.

Concernant les deux premières sous-tâches, relatives à la fonction f considérée (étude de la continuité et de la dérivabilité, calcul de nombres dérivés), le phénomène dominant au sein des productions des étudiants tient dans l'amalgame, s'exprimant sous *diverses formes*, entre la fonction f présentée et la fonction polynomiale $x \to x.(1-x)$.
Il convient donc de souligner ici la persistance de cet amalgame en dépit du fait que la courbe soit fournie. D'un point de vue théorique, il s'explique par le *saut qualitatif* identifié par Sfard (Sfard, 1991) intervenant dans le processus de *réification*, saut qui se manifeste en particulier dans la difficulté des étudiants à détacher l'objet « fonction » d'une expression algébrique.

Première sous-tâche : Pour l'étude de la continuité et de la dérivabilité de f sur R, on relève ainsi *trois* niveaux principaux d'interprétation :

- Un niveau *0*, caractérisé par un amalgame total, qui amène bon nombre d'étudiants à affirmer que : *« f est continue, dérivable sur R comme produit de fonctions continues dérivables ».* Par rapport à cette justification, on rencontre parfois l'argument suivant, plus raffiné : *« f est continue et dérivable sur [0,1[en tant que fonction polynomiale, donc elle l'est sur R par périodicité ».*

- Un niveau *1*, correspondant à l'identification de la nécessité d'une *étude locale* au point d'abscisse *0* et/ou au point d'abscisse *1*, mais sans distinguer limite à gauche et à droite, ou en prenant à gauche comme à droite, en *0* ou en *1*, l'expression $x(1-x)$ pour le calcul, sans aucune tentative de justification (amalgame *implicite*). L'étudiant est conscient du fait qu'une étude spécifique au point d'abscisse *0* (ou *1*) est attendue de sa part, mais il ne sait pas comment la mener et ne semble pas avoir vraiment compris le problème qui se pose.

- Un <u>niveau *2*</u>, qui correspond à l'identification d'un problème de *« raccordement »* aux points d'abscisses entières. Le traitement formel demeure cependant, même dans ce cas, rarement correct, mais aboutit souvent à une solution qui le sera. C'est notamment le cas pour ceux qui écrivent : *« f est dérivable si et seulement si f(0) = f(1) et f '(0) = f '(1) »*, conditions qu'ils appliquent à l'expression x.(1-x). Force est de reconnaître ici que ce niveau d'interprétation est difficilement dépassable pour des élèves sortant de terminale, compte tenu de leur référentiel du lycée[11]. Nous situons également à ce niveau 2, les interprétations de nature graphique (en général correctes), type : *« f n'est pas dérivable en 0, car la courbe admet deux demi-tangentes distinctes (resp. un point anguleux, resp. un pic) en ce point. »*[12]

La répartition statistique des procédures adoptées par les étudiants se fait selon trois tiers :

Procédures :	**Répartition :**
Niveau *0*	*1/3*
Niveau *1* ou *2*	*1/3*
Mixtes[13]	*1/3*

Le recours au <u>cadre graphique</u> est utilisé dans *20%* des réponses, mais pratiquement toujours comme argument *unique* se substituant au traitement algébrique. Il semble donc y avoir un *cloisonnement* des réponses par rapport aux deux modes de traitement possibles (algébrique / graphique), et <u>peu de flexibilité</u> observable entre cadres. En outre, on constate que <u>l'icône</u> *« point anguleux »* ne fait pas partie des connaissances *disponibles* chez un peu plus de la moitié des étudiants au moins (ceux qui ont dit que *f* est dérivable sur *R*).

[11] L'amalgame entre valeur en un point et limite en ce point y est banalisé pour les fonctions considérées, et les situations où la distinction entre limite à gauche et limite à droite est pertinente, et le recours à la définition du nombre dérivé nécessaire, gardent un caractère très marginal. L'étude institutionnelle nous avait ainsi appris que la définition du nombre dérivé a un statut davantage culturel qu'opérationnel au lycée.

[12] Notons que l'interprétation graphique de la non-dérivabilité est beaucoup plus souvent exploitée dans les réponses des étudiants que celle de la continuité (courbe « sans saut », ou « sans coupure »), sans doute parce qu'elle correspond à une situation pour lesquels les bacheliers ont plus d'exemples à leur disposition (fonctions avec des valeurs absolues) qu'ils ne disposent d'exemples de fonctions discontinues.

[13] Cas où l'étudiant se situe au niveau d'interprétation 0 dans son étude de la continuité, et au niveau 1 ou 2 dans son étude de la dérivabilité, ou le contraire (beaucoup plus rare).

Le fait marquant, au sein des réponses apportées à cette question, c'est donc la diversité des *tentatives d'adaptation* de mécanismes routinisés au lycée à cette situation plus complexe (étude en *0* ou en *1*, en distinguant ou non limites à gauche et à droite, en le faisant surtout pour la dérivabilité, ...etc.), et cela débouche souvent sur des réponses « toutes faites ».
Notons encore que les études locales sont plus souvent menées en *1* qu'en *0*, par sensibilité au *repère sémiotique* : $f(x) = x(1-x)$ sur $[0,1[$ (c'est l'idée que l'expression polynomiale fournie vaut pour $x=0$ mais pas pour $x=1$, donc qu'une étude locale s'impose en *1* plutôt qu'en *0*).

Deuxième sous-tâche : Au niveau des calculs de nombres dérivés particuliers, sollicités en ½, ¼ et *0* pour la fonction *f*, on relève, dans l'ensemble, *peu* de situations de ***blocage*** par rapport au nouvel objet formel introduit, la dérivée symétrique, ce qui est un élément très positif. La nature de cette sous-tâche facilite donc, nous semble-t-il, l'intégration de la notion nouvelle de dérivée symétrique dans le travail de l'étudiant.
Au niveau de la validité des réponses données, les résultats sont très contrastés.
Les calculs de nombres dérivés et dérivés symétriques en ½ et ¼, qui relèvent de procédures algébriques très simples[14], donnent respectivement lieu à des taux de l'ordre de *95%* et *75%* de réponses correctes[15], tandis qu'au point zéro « fatidique », l'étude de ces nombres dérivés (*existence* et calcul éventuel) n'est correctement effectuée que dans *14%* et *3%* des cas.
Ainsi, une nette majorité d'étudiants se contente de substituer la valeur *0* à la variable x dans l'expression formelle $f'(x) = 1-2x$ calculée précédemment, en vue d'évaluer $f'(0)$, comme ils l'ont fait pour déterminer les nombres dérivés aux points d'abscisses ½ et ¼. Il est intéressant de constater que cette manière de procéder, comme le résultat obtenu, sont en contradiction flagrante, chez un certain nombre d'étudiants, avec leur étude préalable de la dérivabilité de f sur *R* (première question)[16]. Nous interprétons ici cette contradiction par l'existence d'un cloisonnement, pour ces étudiants, entre une tâche *rituelle* dans la culture du lycée (calcul formel de nombres dérivés) et une tâche *plus marginale* dans cette culture (étude locale de la dérivabilité en un point).

---

[14] La fonction f est à identifier, en ces points de l'intervalle $[0,1[$, à la seule fonction polynômiale $x \to x(1-x)$.
[15] Pour le calcul des nombres dérivés « ordinaires », ils ne repassent pas par la définition du nombre dérivé ; ils appliquent l'expression $f'(x) = 1-2x$ aux valeurs ½ et ¼. Le taux de succès n'est que de 75% pour le calcul des nombres dérivés symétriques, car certains étudiants, constatant que $f_s'(1/2) = \lim_{h \to 0} 0/(2h)$, affirment que la dérivée symétrique n'existe pas en ½ : ils perçoivent $0/(2h)$ comme une forme indéterminée pour h tendant vers 0 (rapport inapproprié au concept de limite) .
[16] Il faut noter que 26% des étudiants avaient décelé la non-dérivabilité de f en 0 lors de la première sous-tâche.

Les erreurs, encore plus nombreuses, commises dans le calcul de $f_s'(0)$, sont dues quant à elles à la substitution de h par $-h$ dans l'expression $f(h) = h(1-h)$, valable seulement pour h pris dans $[0,1[$ (amalgame implicite avec la fonction polynomiale).

Troisième sous-tâche : Le *taux de participation* reste faible (respectivement *35%*, *25%*, *15%*, pour chacune des trois conjectures) avec peu de succès. Concernant la conjecture C2, il est plutôt fait référence à la fonction $x \to |x|$ comme exemple[17] de fonction paire n'admettant pas de nombre dérivé en 0, qu'à l'exemple traité de la fonction f (l'énoncé ne précisant d'ailleurs pas que cette fonction est paire, ce qui résulte de la façon dont elle est définie). Les quelques réponses apportées à la conjecture C3 témoignent d'un *amalgame* hâtif entre nombre dérivé et nombre dérivé symétrique.

2. Leçons à tirer de l'ensemble des tests de septembre.

Les tentatives des étudiants, présentées ci-dessus, d'adaptation de leurs connaissances du lycée et de leurs modes de fonctionnement les plus familiers, à une tâche complexe telle que celle que nous venons de décrire, correspondent à une *tendance générale* que l'on retrouve pour l'ensemble des tâches issues des tests.

Ces tentatives d'adaptation constituent en elles-mêmes un élément très positif, même si elles aboutissent souvent à des *démarches simplificatrices*, liées au champ d'expérience du lycée (fonctions usuelles, régulières), et à une *gestion séparée* des problèmes (faibles articulations, par exemple, entre continuité et dérivabilité). Une forte dépendance vis à vis du *contexte*, de la *forme* du questionnement proposé, et un fonctionnement séparé des divers *cadres* de travail (graphique, algébrique), sans grande flexibilité cognitive, sont autant de constantes observées chez les étudiants dans ces tests.

On constate en outre, que placés en face d'un réel conflit[18], les étudiants font rarement preuve d'attitude critique, soit qu'ils ne remarquent pas ce conflit, soit encore qu'ils le minimisent pour adopter une réponse « consensuelle ». Une représentation des mathématiques comme discipline *non problématique* paraît bien installée chez eux, la fonction de *vérification* et la notion de *contrôle de la cohérence* leur semblant étrangères.

[17] Classique et standard, déjà en terminale S.

[18] Confrontation amenée délibérément par le texte de l'exercice, ou découlant des réponses apportées en propre par les étudiants.

Enfin, le rapport à la généralité reste le plus souvent à construire (on constate des conceptions du type : « *exemple qui confirme la règle* », et des généralisations abusives, telles que : « *toute fonction comportant des valeurs absolues est non dérivable là où elle s'annule* »).

Nonobstant ces observations, il convient d'insister sur le fait que les germes d'adaptation constatées chez les étudiants, offrent des potentialités donnant prise au *travail didactique.*
Force est de reconnaître que les tâches ici proposées, peu de temps après l'obtention du Bac, sont tout à fait inhabituelles pour un élève de lycée, car porteuses de diverses caractéristiques de l'activité mathématique au niveau du supérieur (le degré de généralité est élevé, le monde fonctionnel est en évolution, il y a usage d'un formalisme nouveau...). Ces tâches cognitives complexes semblent peu maîtrisables au niveau du lycée, et devraient donc faire l'objet d'une gestion particulière dans la *transition* entre le lycée et l'université. L'analyse institutionnelle préalablement menée dans notre recherche montre que ce n'est pas le cas actuellement.
Un vide didactique entre ces deux *cultures* très différentes reste donc à combler par un travail spécifique. Ce sont les possibilités de prise en charge de ce problème au moyen d'*ateliers* en petits groupes qui ont été sondées dans la suite de notre recherche.

VII. GESTION DES RUPTURES AU MOYEN D'ATELIERS.

1. Présentation des deux ateliers.

a) L'atelier sur les définitions de la dérivabilité.

Cet atelier consiste en l'étude des relations d'implication existant entre la propriété classique de dérivabilité en un point, ou plus exactement la proposition : « *f est dérivable au point* x_0 », et cinq propositions données qui, en apparence, lui « ressemblent ».
Parmi elles, l'analyse des trois assertions suivantes a occupé l'essentiel du temps consacré à cet atelier en petits groupes, d'une durée de deux heures :

« *Il existe une fonction affine g telle que :* $\lim_{x\to x0} (f\text{-}g)(x) = 0$ »

« *Il existe une fonction affine g telle que :* $f(x) = g(x)$ *au voisinage de* x_0 »

« *Il existe un réel a tel que :* $\lim_{x\to x0} [f(x_0+h)\text{-}f(x_0\text{-}h)] / 2h = a$ »[19]

[19] On retrouve ici le problème, déjà posé dans l'un des exercices du test écrit de septembre 1996, du rapport entre nombre dérivé et nombre dérivé symétrique, mais le pilotage (étude préalable d'un exemple, calculs de nombres dérivés particuliers, mise en relief du problème par des conjectures précises, rappel des définitions du nombre dérivé « utiles » en l'espèce), que l'on trouvait dans le test, est ici absent. Notons, en outre, que les étudiants observés dans les deux cas ne sont pas les mêmes.

L'originalité de cet atelier, par rapport aux tâches ordinairement proposées au lycée, tient non seulement au fait d'avoir à travailler sur des propositions *générales*, mais aussi au *statut* tout à fait inhabituel de la définition mathématique au sein de cet atelier : la notion de dérivabilité en un point est étudiée pour elle-même, fait *l'objet* du travail sollicité, au lieu d'être seulement utilisée comme un *outil* et destinée à la seule application.

b) L'atelier concernant l'étude de la classe des fonctions dites « à croissance forte ».

Cet atelier, programmé sur deux séances d'une durée de deux heures chacune, consiste en une étude des fonctions dérivables sur un intervalle, strictement croissantes ainsi que leur dérivée, sur cet intervalle, ici nommées *« fonctions à croissance forte ».*
La première séance consiste en *l'étude d'exemples* : on demande aux étudiants de rechercher des fonctions de ce type, notamment au sein de familles données de fonctions paramétrées (telles que : $x \rightarrow A.\ln |x-a|$, $x \rightarrow (x-a)^n$, ...etc.). On peut ainsi analyser les difficultés des étudiants dans le travail technique d'adaptation des valeurs de paramètre(s) aux conditions de stricte croissance de ces types de fonctions et de leurs dérivées.
La seconde séance correspond à *l'étude de conjectures* relatives à cette classe de fonctions étudiée (variations de la fonction $x \rightarrow \alpha_0(x) = (f(x)-f(0)) / x$, comparaison avec la dérivée f'). Les étudiants sont successivement amenés à établir ces conjectures dans le cas de la fonction *exponentielle*, puis dans le cas *général*, ce qui ne met pas en jeu le même type de traitement algébrique (étude d'une fonction usuelle dans le premier cas, utilisation d'une propriété des accroissements finis dans le second cas). En outre, l'interaction entre les cadres graphique et algébrique est sollicitée, elle permet de confirmer à chaque fois les résultats obtenus, via deux modes de traitement différents.

c) Choix de ces ateliers et conditions générales de réalisation.

La conception de ces deux ateliers a été influencée par la volonté de proposer aux étudiants des activités répondant à la fois à *deux critères*. D'une part, ces activités se devaient d'être en accord avec le programme et le travail en cours de la première année de DEUG Sciences, et d'autre part, on souhaitait qu'elles ne sollicitent que peu de connaissances spécifiques de ce programme (le théorème des accroissements finis dans le second atelier), l'objectif étant de diagnostiquer et de gérer *d'abord* des microruptures largement indépendantes des contenus.

Ces ateliers ont été menés conjointement, entre les mois de février et de mai de l'année 1997, au sein des universités de Marne la Vallée et d'Orléans. Nous nous sommes attaché à suivre à chaque fois le travail d'un ou deux groupes maximum, de cinq ou six étudiants, en orientant souvent ce travail par des questions plus précises et, dans les situations de blocage, en leur apportant une aide plus substantielle.

2. Résultats généraux inhérents à ces ateliers.

a) L'atelier sur les définitions de la dérivabilité.

Le travail de cet atelier a tout d'abord posé d'importants problèmes de dévolution de la tâche, certains étudiants ayant de grandes difficultés à dissocier, afin de les analyser *séparément*, les caractères *« nécessaire »* et *« suffisant »* (éventuels) des propositions qui leur sont présentées, par rapport à la propriété de dérivabilité au point x_0. Le plus souvent, ces étudiants cherchent plutôt à se prononcer sur le fait que chaque proposition, prise dans sa *globalité*, est *synonyme*, ou non, de la dérivabilité au point x_0.
La seconde grande difficulté éprouvée par les étudiants tient au *choix* du registre d'expression à utiliser pour le travail sollicité, ainsi qu'à la *rigueur* nécessitée par rapport à l'utilisation de ce registre. On constate en effet que, *spontanément*, les étudiants utilisent plutôt le registre de la langue naturelle, voire le registre graphique, alors que le travail formel (algébrique), qui présente le plus de garanties pour des étudiants à l'intuition encore naïve, défaillante, et qui s'avère quasiment incontournable s'agissant de l'item sur la dérivée symétrique, n'est bien souvent enclenché que sur notre conseil. Ce phénomène, assez prévisible compte tenu des difficultés inhérentes à ce travail formel pour un étudiant de DEUG Sciences, montre aussi, selon nous, que le recours aux définitions « originelles », peu usité au lycée, ne fait pas encore partie des pratiques routinières pour l'étudiant à ce stade de la première année de DEUG.

La proposition : *« Il existe une fonction affine g telle que* $\lim_{x\to x_0} (f-g)(x) = 0$ *»* est, des trois assertions présentées ci-dessus, la plus aisément et correctement interprétée par les étudiants. Elle est associée dans le registre de la langue naturelle à l'idée d'un *« rapprochement »* entre la courbe représentative de la fonction f et une certaine droite pour des valeurs d'abscisses *« proches de x_0 »*, aboutissant au point d'abscisse x_0 au « croisement » de cette courbe et de cette droite (certains étudiants effectuent ici des schémas). Pour une majorité d'étudiants, ce rapprochement n'induit pas nécessairement la tangence de la droite et de la courbe c'est-à-dire dire la dérivabilité de la fonction en ce point, et ils pensent, en revanche, que la dérivabilité en x_0 implique cette proposition. Cependant, ils ne reconnaissent pas la propriété de continuité au point x_0 à travers la proposition présentée, et ne cherchent pas d'eux-mêmes à justifier leurs affirmations à l'aide de calculs. Lorsqu'ils tentent de le faire, sur notre demande, ils éprouvent de grandes difficultés techniques, de formalisation du problème, liées à une méconnaissance de la définition de la dérivabilité en un point par approximation affine[20], et à l'impossibilité où ils se trouvent de récupérer cette définition via celle par limite du taux d'accroissement[21]. L'identification de la fonction affine tangente $g : x \to g(x) = f'(x_0).(x-x_0) + f(x_0)$ pose les mêmes problèmes. Ces difficultés les empêchent de prouver rigoureusement qu'une fonction dérivable au point x_0 vérifie forcément l'assertion présentée, mais par contre, bon nombre d'étudiants arrivent à présenter (au moins graphiquement) une fonction non dérivable en x_0, mais satisfaisant l'assertion *« Il existe une fonction affine g telle que : $\lim_{x\to x_0} (f-g)(x) = 0$ ».*

La deuxième proposition, *« Il existe une fonction affine g telle que $f(x) = g(x)$ au voisinage de x_0 »*, fait en général l'objet d'interprétations erronées. La plupart des étudiants estiment que sa signification est : *« Il existe une fonction affine g telle que $f(x) \approx g(x)$ pour les valeurs de x proches de x_0 »*, tout en admettant que cette dernière formulation reste assez floue. Quand on leur demande d'être plus précis, ils en viennent vite à affirmer que cela a encore le sens de : « $\lim_{x\to x_0} (f-g)(x) = 0$ », donc que les deux premières propositions présentées sont finalement synonymes l'une de l'autre. Il s'avère alors nécessaire de solliciter de leur part une définition précise (donnée en cours[22]) d'un voisinage d'un point réel x_0, définition qu'ils ont en général bien des difficultés à retrouver. En outre, on s'aperçoit qu'ils n'accordent pas à la proposition *« telle propriété (P) est vérifiée **sur un** voisinage de x_0 »*, le même sens qu'à la proposition *« telle propriété (P) est vérifiée **au** voisinage de x_0 »*, jugée plus vague et incertaine. Cet item illustre donc bien toutes les difficultés et les pièges liés à une utilisation exclusive du registre de la langue naturelle pour traiter un problème, et le manque de familiarisation des étudiants

[20] Introduite en classe de première, mais marginale dans la pratique des exercices, et totalement absente de l'enseignement relatif à la notion de dérivée en classe de terminale.
[21] Il faut utiliser « l'astuce » de formalisation consistant à réécrire l'égalité : $\lim_{x\to x_0} (f(x)-f(x_0))/(x-x_0) = f'(x_0)$ sous la forme : $(f(x)-f(x_0)) / (x-x_0) = f'(x_0) + \varepsilon(x)$, avec $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.
[22] On appelle « voisinage d'un point réel x_0 », tout intervalle ouvert du type $]\, x_0-\alpha, x_0+\alpha[$, où $\alpha>0$ est donné.

au langage de l'expert surtout lorsque les termes employés ont déjà pour eux une connotation particulière.

Notons enfin que lorsque le sens correct de la proposition a été restitué (c'est-à-dire : *« la fonction f s'identifie sur tout un intervalle ouvert, centré au point* x_0*, à une fonction affine »*), certains étudiants ne reconnaissent pas là une situation de tangence au point x_0, phénomène déjà observé par C.Castela[23].

Enfin, la troisième proposition, *« Il existe un réel a tel que* $\lim_{x\to x0} [f(x_0+h)-f(x_0-h)]/2h = a$ *»*, est souvent assimilée à la dérivabilité de *f* au point x_0. Certains étudiants font bien remarquer que l'on n'a pas affaire ici au « taux d'accroissement habituel », mais d'autres leur rétorquent qu'il s'agit malgré tout d'un taux d'accroissement au point x_0, et que cela ne va rien changer. Là encore, il nous incombe de solliciter de la part des étudiants un travail de raisonnement formel plus rigoureux que les considérations a priori qu'ils tiennent, toutes aussi recevables les unes que les autres, en apparence.

Ce travail passe parfois par un stade de *repérage formel* du taux d'accroissement symétrique sur un schéma, qui ne s'effectue pas sans certaines difficultés ; avec notre aide, ils finissent par tracer une courbe, placer les points d'abscisses x_0, x_0-h et x_0+h, et tracer la corde joignant les points d'abscisses x_0-h et x_0+h. Cependant, ayant tracé une courbe « bien ronde », sans angulosité, ils ne voient pas en quoi le passage à la limite « géométrique » pour cette corde peut, dans le cas d'un point anguleux, donner un résultat différent de celui obtenu pour la corde joignant les points d'abscisses x_0 et x_0+h. Ils sont alors décidés une nouvelle fois à conclure à l'équivalence entre la proposition donnée et la dérivabilité de la fonction *f* au point x_0 en se fiant à leur intuition graphique, sans tenter d'effectuer une démonstration formelle.

Avec notre aide[24], ils arrivent à établir formellement (non sans mal) qu'une fonction dérivable en un point x_0 admet nécessairement une dérivée symétrique en ce point. En ce qui concerne la proposition réciproque, nous nous sommes systématiquement trouvé dans l'obligation de

[23] Dans son article « Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures – un exemple concret : celui de la tangente », R.D.M, vol 15.1, 7-47, 1995.

[24] Nous leur conseillons notamment d'écrire la (ou les) définition(s) du nombre dérivé qu'ils connaissent et qui fait (ou font) intervenir un taux d'accroissement, nous leur demandons s'il y a possibilité de substituer –h à h dans l'expression « $\lim_{h\to 0} (f(x_0+h)-f(x_0))/h$ » et ce qu'elle devient alors, etc...

leur demander de tester la fonction $x \rightarrow |x|$ en zéro, tant leur certitude que cette réciproque est vérifiée s'avère forte[25].

Pour conclure, disons que l'intérêt de cet atelier réside, selon nous, dans les possibilités de modes de fonctionnement par ajustements, et de mise en œuvre *flexible* des divers registres, de la langue naturelle, du graphique, et du travail algébrique formel, cette flexibilité étant favorisée par *l'interaction* entre étudiants et entre l'enseignant et les étudiants. L'expérience faite dans ce contexte des erreurs commises, nombreuses, peut faciliter selon nous, chez les étudiants, une véritable prise de conscience de ce qui différencie un *vague argument* basé sur l'intuition d'une preuve *rigoureuse* ; ce point nous paraît être au cœur de cet atelier, et des problèmes de transition institutionnelle entre terminale S et DEUG Sciences.

b) L'atelier concernant l'étude de la classe des fonctions dites « à croissance forte ».

La première séance, consacrée à la *recherche d'exemples* de fonctions à croissance forte sur *R*, ou à défaut sur un intervalle de *R*, est destinée à une première familiarisation des étudiants avec cette classe de fonctions. Ils n'ont aucun mal à citer la fonction $x \rightarrow e^x$ comme exemple de fonction à croissance forte sur *R*, mais généralisent parfois abusivement cet exemple à la famille des exponentielles de base *a*, avec $a>0$. Lors d'une préexpérimentation, des étudiants ont également affirmé que la fonction $x \rightarrow x^3$ et, plus généralement, que les fonctions $x \rightarrow x^n$ pour tout n, entier naturel impair, sont à croissance forte sur *R*.
La raison de ces erreurs, comme de quelques autres du même type, tient à ce que ces étudiants se fient souvent à leur seule intuition personnelle, voire à des connaissances erronées sur les fonctions de référence. Ainsi, l'expression de *« fonctions à croissance forte »* leur inspire bien des associations d'idées (dont ils nous font part à l'oral) ne respectant pas la définition de ces fonctions, donnée dans l'énoncé : *« fonctions dérivables, strictement croissantes, ainsi que leur dérivée première »*. Ce type de considérations les amène le plus souvent à se prononcer sur le problème, sans effectuer aucun calcul. Les autres étudiants se limitent en général au calcul de la dérivée première de la fonction, ce qui, en soi, pourrait suffire pour des fonctions de référence, à condition d'invoquer des propriétés correctes concernant ces fonctions ; ce

[25] Surtout après la preuve qui vient d'être effectuée du fait que la dérivabilité en un point implique l'existence d'une dérivée symétrique en ce point : bon nombre d'étudiants voient en l'égalité de nature purement algébrique utilisée pour cette preuve, entre $(f(x_0+h)-f(x_0-h))/h$ et la somme $(f(x_0+h)-f(x_0))/h + (f(x_0)-f(x_0-h))/h$, un élément décisif pour l'équivalence des deux propositions.

n'est souvent pas le cas ici. En outre, l'idée d'étudier le signe de la dérivée *seconde* pour vérifier des affirmations relatives à la stricte croissance de la dérivée première ne leur vient jamais spontanément. C'est un fait qu'il est intéressant d'observer, puisque ce type de démarche est plus spécifique de la *pratique de l'analyse* à l'université, tandis qu'utiliser des connaissances générales sur les fonctions de référence est un trait davantage propre à la *culture* du lycée.

Le travail technique réalisé sur des familles de fonctions *paramétrées*, d'adaptation de valeurs de paramètres en vue d'obtenir des fonctions à croissance forte ne s'avère pas plus aisé, et une certaine « naïveté » s'exprime parfois à travers les modèles simplificateurs proposés par les étudiants (exemple : *« La fonction* $x \to A.\ln(|x-a|)$ *est toujours à croissance lente, comme l'est le logarithme népérien, donc elle ne peut jamais être une fonction à croissance forte »*).

Dans cette première séance, on demande aussi aux étudiants de définir des critères de natures algébrique (dérivée seconde strictement positive) et graphique (stricte croissance des pentes) pour qu'une fonction soit *« à croissance forte »*. Leurs propositions sont parfois inattendues (la fonction doit vérifier $f(x) \geq x$ pour tout réel x, la fonction $g : x \to g(x) = f(x)-x$ doit être positive et strictement croissante, ...etc.), mais souvent vraisemblables. La conséquence de cela est, qu'en général, les divers groupes d'étudiants n'arrivent pas à se prononcer sur la validité d'une proposition effectuée par l'un d'eux, parce que leur expérience de l'analyse et leur culture du lycée ne les a pas préparés à construire *eux-mêmes* des contre-exemples quand ces derniers ne se trouvent pas là, « à portée de la main », comme c'est le cas des fonctions de référence (exemple : la fonction valeur absolue comme cas de non-dérivabilité).

Mais l'activité des étudiants, leurs nombreuses propositions attestent dans certains groupes, en dépit de ces difficultés de validation ou de rejet d'un modèle, d'une bonne implication dans le travail de recherche. Une évolution de leur *rapport* à la preuve et à la généralité est également perceptible. Cela étant, ces difficultés posent à l'enseignant qui a en charge le groupe un réel problème de *gestion de l'atelier*, le poussant à de fréquentes interventions, comme dans le cas du premier atelier. Cette observation et cette gestion pas à pas de l'atelier nous permettent souvent de mettre à jour chez les étudiants des lacunes que l'on n'imaginait pas forcément encore présentes à ce niveau d'apprentissage. Ainsi certains étudiants estiment que la fonction $x \to x^3$ n'est pas strictement croissante sur R en raison du « faux-plat » de la courbe observable au voisinage de zéro, et quand on leur demande de prouver cette stricte croissance par une étude du signe de x^3-y^3 selon x et y, on constate qu'ils restent très embarrassés.

La seconde séance, consacrée à l'étude des variations de la fonction $x \to \alpha_0(x) = (f(x)-f(0))/x$, et à l'étude du signe de la quantité $\alpha_0(x) - f'(x)$ sur R^*, pour une fonction f à croissance forte sur R, permet de confirmer l'amalgame persistant, supposé, des étudiants entre les quantités $\alpha_0(x)$ et $f'(x)$, à $x \neq 0$ fixé ; ils ont ainsi beaucoup de difficultés à distinguer *graphiquement* ces termes, et encore bien davantage à les faire varier « mentalement » sur un tracé, celui de la courbe exponentielle, afin de percevoir leur évolution selon les valeurs de x. La dévolution du jeu d'aller-retours entre *registres graphique* et *algébrique*, les résultats conjecturés dans le premier de ces cadres étant ensuite destinés à être démontrés dans le second, s'avère délicate, justement du fait du différentiel existant entre le niveau de rigueur des considérations réalisées dans l'un et l'autre de ces deux cadres. Le travail de démonstration dans le cadre algébrique induit, là encore, des microruptures d'ordre *technique* par rapport aux pratiques du lycée, que ce travail concerne le cas général des fonctions dites « à croissance forte » ou même celui de la seule fonction exponentielle. Dans le cas général, il convient d'appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction f, ce qui permet d'écrire pour $x>0$, $\alpha_0(x) = f'(c)$ où $c \in]0,x[$, et pour $x<0$, $\alpha_0(x) = f'(c)$ où $c \in]x,0[$, et de conclure, étant donné la stricte croissance de f', sur le signe de la quantité $\alpha_0(x) - f'(x)$ selon x. On remarque que les étudiants restent ici souvent « bloqués » du fait qu'ils ne pensent pas à situer c par rapport à x, et certains estiment pouvoir déduire directement de la stricte croissance de f et des égalités précédentes le fait que α_0 est strictement croissante sur R^*_+ et R^*_- (ils postulent la croissance de c selon x).

Ce sont là des difficultés liées au théorème des accroissements finis (existence d'un « c » *qu'on ne peut déterminer, en général,* et qui est lui-même une fonction *implicite* de la variable x), qui sont bien spécifiques du post-bac, tout comme celle que représente la dérivation de α_0 dans le cas général[26], la dérivée de $x \to f(x)-f(0)$ étant $x \to f'(x)$ et non $x \to f'(x)-f'(0)$ comme l'affirment certains. Dans le cas particulier (étudié préalablement) de la fonction exponentielle les étudiants sont confrontés à un autre obstacle, celui de l'étude des variations de la fonction $x \to (e^x-1)/x$, dont la dérivée se trouve être la fonction $x \to (xe^x-e^x+1) / x^2$. Il convient ici de considérer la fonction $u : x \to u(x) = xe^x-e^x+1$, et d'étudier son signe par

[26] En vue de prouver la stricte croissance de la fonction α_0 à partir du signe de $\alpha_0(x)$-f '(x) selon x, attendu que la dérivée de $\alpha_0(x)$ est : $(\alpha_0)'(x) = (f'(x)-\alpha_0(x)) / x$.

re-dérivation[27], ce qui demande encore une prise d'initiative importante pour des étudiants en cours de première année de DEUG Sciences, comme le montrent nos expérimentations.

Pour conclure, il faut dire que ces ateliers permettent d'observer *davantage* de microruptures cachées que les tests écrits, et de prendre la mesure des difficultés réelles des étudiants, de les *désamalgamer*. Leur gestion restant souvent délicate en raison de ces difficultés, ces ateliers restent, selon nous, *à reconstruire*. A cette fin, ils doivent faire selon nous l'objet d'un *cahier des charges* pour une meilleure viabilité. D'autre part, ces ateliers peuvent donner lieu à des prolongements utiles et intéressants (fiches de synthèse rédigées par les étudiants, reprises en cours : par exemple, concernant le second atelier, le lien avec la convexité peut être effectué).

VIII. CONCLUSIONS : PROLONGEMENTS ET PERSPECTIVES.

1. Des prolongements à cette recherche, au niveau didactique.

Cette recherche a dévoilé un *très grand nombre* de microruptures dans la transition entre le lycée et l'université, bon nombre de ces microruptures devant être gérées individuellement ou sur le *long terme*, comme l'a bien montré le travail effectué lors des ateliers en petits groupes. Des choix sont alors à effectuer parmi ces microruptures, en vue de déterminer celles d'entre elles qui méritent d'être gérées *en priorité*, car le temps dont on dispose en DEUG Sciences ne permet sûrement pas de *toutes* les gérer. Lesquelles doit-on privilégier à l'université dans l'optique d'un apprentissage de l'analyse en DEUG Sciences – première année ? Pour quelles raisons et comment s'y prendre ? Voilà autant de questions qui constituent des pistes de recherche à explorer.

Par ailleurs, il convient sans doute, au terme de cette recherche, de *nuancer* les résultats qui concernent la partie de notre étude institutionnelle relative au lycée. En effet, les tâches issues d'un manuel de première S ou de terminale S ne sont pas toutes traitées en classe, donc une analyse prenant en compte la globalité de ces tâches peut être en décalage avec la *réalité* de cette classe. Notre *hypothèse* est ici que notre étude risque de s'avérer optimiste par rapport à cette réalité, car le choix de l'enseignant, selon nous, se porte plutôt vers des tâches standards

[27] Certains étudiants finissent par re-dériver la fonction $x \rightarrow (xe^x-e^x+1) / x^2$, ce qui ne résout rien, l'expression obtenue étant trop complexe pour que son signe soit aisément décelable. Cette démarche, bien que maladroite, constitue cependant un signe d'évolution par rapport aux seuls automatismes acquis au lycée.

(notamment en vue de la préparation à l'examen du Baccalauréat), que vers des tâches plus complexes, nécessitant une certaine réflexion, donc aussi plus marginales.
Une enquête, menée auprès d'enseignants de première S et de terminale S, visant à déterminer quels exercices, au sein de divers manuels de lycée, sont réellement travaillés en classe, nous permettrait ici d'affiner notre diagnostic des *pratiques effectives* du lycée. Il faut d'ailleurs s'attendre, en l'espèce, à de grandes disparités d'un établissement à l'autre.

Du côté des enseignants de DEUG Sciences (première année), on pourrait envisager, comme prolongement intéressant de cette recherche, de leur présenter un échantillon de tâches plutôt complexes, susceptibles d'être proposées à ce niveau d'enseignement, en leur demandant dans quelles conditions ils soumettraient ces tâches à leurs étudiants, et de quelles indications ils les assortiraient.

2. Un réinvestissement pédagogique pour ce travail de recherche : le système de tutorat mis en place à l'université de Marne-la-Vallée.

A l'université de Marne la Vallée, un système de tutorat, mis en place il y a trois ans, est proposé au mois de *septembre* aux étudiants entrant en première année de DEUG Sciences, officiellement pour un travail de révisions avant le début des cours. Fondé sur la correction d'exercices qui ont été fournis aux néo-étudiants à leur inscription à l'université, au mois de juillet, ce tutorat (facultatif) est assumé par quelques uns de leurs aînés, déjà titulaires d'une licence ou d'une maîtrise dans la discipline concernée, et encadrés au niveau pédagogique par un enseignant unique (nous-même pour ce qui est des mathématiques).

En mathématiques, le travail porte sur des exercices théoriquement réalisables avec les seules connaissances de terminale S, mais déjà situés, selon nous, à la transition des deux cultures, du lycée et de l'université, en raison de difficultés *transversales* telles que celles décrites dans notre recherche. L'objectif est de montrer aux nouveaux étudiants l'évolution qualitative des pratiques mathématiques à laquelle ils doivent s'attendre en DEUG Sciences, en dehors de toute considération de *contenus* (complexité des tâches et du degré d'autonomie sollicités, en hausse, difficulté nouvelle des problématiques soulevées, ...etc.).
En fait, la banque d'exercices est subdivisée en *deux listes* (exercices standards de terminale/ exercices d'approfondissement), et d'une liste à l'autre, des associations entre deux exercices,

a priori similaires, sont envisageables, ce qui facilite la *comparaison* entre les pratiques des deux institutions, comparaison que les tuteurs doivent orchestrer en faisant travailler ces nouveaux étudiants. Les intentions pédagogiques qui sont les nôtres, exercice par exercice, inspirées par ce principe, sont préalablement signalées aux tuteurs, oralement et par écrit.

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

Artigue, M., 1996a : Teaching and Learning Elementary Analysis, in C. Alsina & al. (eds), *8th International Congress on Mathematical Education*, SAEM Thalès, 15-29.

Artigue, M., 1996b : *L'enseignement des débuts de l'analyse, problèmes épistémologiques cognitifs et didactiques*, J.A Dorta, Diaz et alii (eds), La Universidad de la Laguna, Tenerife, 27-53.

Artigue, M., 1998 : L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 18.2, La Pensée Sauvage, Grenoble, 231-261.

Aymes, J., 1996 : Bac : Passage ou rupture ? *La gazette des mathématiciens, n°70*, 3-28.

Castela, C., 1995 : Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures – un exemple concret : celui de la tangente, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 15.1, 7-47.

Chevallard,Y., 1989 : Le concept de rapport au savoir, rapport personnel, institutionnel, officiel, *Actes du séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*, CNRS-IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble, 211-236.

Chevallard, Y., 1992 : Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 12.1, La Pensée Sauvage, Grenoble, 73-112.

Cornu, B., 1983 : *Apprentissage de la notion de limite : conceptions et obstacles*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble I.

Deledicq, A., 1996 : Est-il possible d'enseigner l'analyse aujourd'hui ? *Repères-Irem vol 24*, 79-99.

Douady, R. 1986 : Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 7.2, 5-31.

Dubinsky, E., 1991 : Reflective abstraction in Advanced Mathematical Thinking, in *Advanced Mathematical Thinking*, D. Tall (ed.), Dordrecht: Kluwer, 95-123.

Duval, R., 1993 : Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences cognitives, vol 5*, IREM de Strasbourg, 37-65.

Hauchart, C., Schneider, M., 1996 : Une approche heuristique de l'analyse, groupe A.H.A, *Repères-Irem vol 25*, 35-62.

I.C.M.I., 1997 : On the Teaching and Learning of Mathematics at University Level, Discussion Document, in M. Niss (ed.), *ICMI Bulletin*, n°43, 3-13.

Legrand, M., 1996 : A la recherche de la pierre philosophale pour enseigner l'analyse, *Repères-Irem vol 24*, 9-10.

Perrin-Glorian, M.J., 1999 : La tangente est-elle vraiment la droite qui approche le mieux la courbe au voisinage d'un point ? *Repères-Irem vol 34*, 5-12.

Praslon, F., 1994 : *Analyse de l'aspect méta dans un enseignement de DEUG A concernant le concept de dérivée et étude des effets sur l'apprentissage*, Mémoire de DEA, Université de Paris 7.

Robert, A., Rogalski, J., Samurçay, R., 1987 : Enseigner des méthodes, *Cahier de Didactique des Mathématiques, n°38*, IREM Paris 7.

Robert, A., 1998 : Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 18.2, La Pensée Sauvage, Grenoble, 139-190.

Rogalski, M., 1994 : Les concepts de l'E.I.A.O sont-ils indépendants du domaine ? L'exemple de l'enseignement de méthodes en Analyse, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 14.1.2, 43-66.

Rogalski, M., 1996 : Le nouveau public en sciences : quels choix stratégiques ? *Gazette de la SMF n°69*, 13-43.

Rogalski, M., 1998 : Analyse épistémologique et didactique des connaissances à enseigner à l'université, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 18.2, Editions La pensée sauvage, Grenoble, 135-137.

Schneider, M., 1991a : Un obstacle épistémologique soulevé par des découpages infinis de surfaces et de solides, *Recherches en Didactique des mathématiques*, vol 11.2/3, 241-294.

Schneider, M., 1991b : Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente, *Repères-Irem vol 5*, 65-81.

Schneider, M., 1992 : A propos de l'apprentissage du taux de variation instantané, *Educational Studies in Mathematics*, vol.23, 317-350.

Sfard, A., 1991 : On the dual nature of mathematical conceptions : reflections on process and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36.

Tall, D. (ed), 1994 : A versatile theory of visualisation and symbolisation in mathematics, *Invited plenary lecture at the CIAEM Conference*, Tome I, Toulouse, France, 15-26.

Tall, D., 1996 : Functions and Calculus, in A.J.Bishop et al (eds), *International Handbook of Mathematics Education*, 289-325, Kluwer Academic Publisher.

Trouche, L., 1999 : Variations sur la dérivation. *Repères Irem vol 34*, 111-126.

Annexe

Le calcul des limites ; un exemple du travail de distanciation, de capitalisation et de réorganisation des connaissances à mener dans la transition terminale S / DEUG Sciences.

Concernant la détermination de limites de fonctions usuelles, diverses questions se posent à propos des savoir-faire de l'élève au sortir de terminale S. En particulier, quelles techniques est-il capable d'appliquer de manière autonome ? D'appliquer avec indications ? Quel est son niveau de *« distanciation »* par rapport à ces techniques : sait-il identifier les situations où il faut appliquer telle ou telle technique ? Quelles *restructurations* des connaissances seraient nécessaires à ce sujet en DEUG Sciences ?

On recense au lycée trois techniques élémentaires (factorisation par le terme prépondérant, utilisation des quantités conjuguées, reconnaissance d'un taux d'accroissement) constamment utilisées et susceptibles d'être sollicitées sans indications, ainsi que deux types de théorèmes pouvant être à utiliser avec indications (le théorème de composition des limites, les théorèmes d'encadrement). La technique du changement de variable, forme opérationnelle du théorème de composition des limites n'est pas exigible au lycée. Celle du « passage au logarithme népérien », qui permet de calculer des limites de produits ou de fonctions du type $u(x)^{v(x)}$ et de dénouer de nouvelles formes indéterminées (non mentionnées au lycée, notamment du type *« 1^{∞} »*) n'est pas dans les objectifs du programme de terminale S.

Le travail de distanciation à réaliser au sujet de ces différentes techniques peut être cerné assez précisément : apprendre ce que l'on peut attendre de telle ou telle technique, distinguer ainsi des techniques qui relèvent d'une simple *transformation algébrique* (factorisation par le terme prépondérant, utilisation des quantités conjuguées) de celles qui touchent davantage au *champ de l'analyse* (utilisation de théorèmes d'encadrement, reconnaissance d'un nombre dérivé), comprendre que les deux changements de variables : $u = x-x_0$ (translation) et $u = 1/x$ (inversion) peuvent permettre de ramener un calcul de limite en n'importe quel point réel ou en l'infini mais que, par nature même, un changement de variable ne peut aider à lever une indétermination (il peut seulement la déplacer), ...etc.

Il y a bien là quelques avancées possibles, non seulement dans la connaissance de techniques de calcul, mais aussi dans la *prise de recul* vis à vis de ces techniques. Ces avancées s'inscrivent dans la continuité de l'enseignement du lycée et pourraient légitimement prendre place en première année de DEUG. La nécessité de situer le *rôle* des développements limités, qui constituent une notion emblématique de la transition avec le lycée, dans le calcul de limites, par rapport à des techniques plus anciennes, le justifierait également ; il n'y a pas lieu de faire « table rase » de ces techniques apprises en terminale S, les développements limités constituant un outil puissant qui les *complète* sans toutefois s'y substituer totalement.

Toutes ces avancées sont dans l'ensemble assez peu travaillées de façon *explicite* en DEUG Sciences, l'effort principal de l'enseignement portant en général davantage sur ce qui est plus spécifiquement *nouveau* ; les ruptures conceptuelles fortes occultent, en quelque sorte, ces microruptures d'ordre technique. Sans doute cette « distanciation » évoquée plus haut est-elle considérée aussi comme relevant du travail privé de l'étudiant qui, sous la pression de calculs de limites techniquement plus délicats (et moins aidés) qu'au lycée, est censé s'adapter à cette situation, porteuse en germes de nouvelles microruptures.

SITUATIONS A DIMENSION ADIDACTIQUE ET PARADIGMES D'ENSEIGNEMENT DANS LE SECONDAIRE : LA NOTION DE FONCTION

Isabelle Bloch[28]
DAEST - Université Bordeaux 2

Je présente dans cet exposé une partie de mon travail de thèse, celle qui a trait à la construction de situations d enseignement / apprentissage de l analyse dans le secondaire. Ce travail m'a conduite à préciser la notion de situation à dimension adidactique, et, partant, à étudier la notion de milieu dans la théorie des situations, tant d'un point de vue théorique que du point de vue de la construction de situations effectives. Une de ces situations sera détaillée, et les connaissances et savoirs qu'elle permet seront étudiés.

I. INTRODUCTION

On s'accorde généralement à reconnaître que l'enseignement de l'analyse au lycée a subi, depuis trois décennies environ, d'importants bouleversements, et ceci plusieurs fois de suite : à chaque changement de programme (1966, 1971, 1982, 1985, 1991), des remaniements non négligeables ont été opérés dans les contenus d'analyse figurant dans le programme des classes scientifiques (Première et Terminale), avec d'éventuelles retombées sur les autres sections (économique, littéraire). Ces variations ont été pointées dans des travaux récents (Artigue, 1993 ; Artigue, 1996 ; Trouche, 1996 ; Artigue 1998). Il semble qu'il soit difficile à l'institution scolaire de dégager une dialectique raisonnable pour l'enseignement de l'analyse : en témoignent ces turbulences.

L'analyse a d'ailleurs toujours été considérée comme d'enseignement difficile, introduisant à des ruptures en terme de preuve, de conceptualisation, et de méthodes de travail. La complexité de ce domaine, et les difficultés rencontrées pour construire des situations didactiques pertinentes, ont conduit certains chercheurs à affirmer l'impossibilité d'enseigner l'analyse autrement que par ostension, tandis que d'autres cherchaient une entrée par la modélisation de phénomènes physiques (Legrand 1991 ; Di Martino 1992), par la

[28] isabelle.bloch@aquitaine.iufm.fr

problématique des grandeurs (Groupe AHA), ou par l'analyse non standard (Lutz, Makhlouf, Meyer 1996). De nombreux travaux ont également été menés sur l'enseignement instrumenté de l'analyse (Trouche 1996, Artigue, Drouhard, Lagrange 1994).

J'ai choisi, dans un premier temps de mon travail de thèse, d'interroger la notion de situation fondamentale de l'analyse en m'appuyant sur les questions posées par Marc Legrand (Legrand 1991), ce qui m'a amenée à étudier les milieux possibles pour l'introduction de la notion de fonction ou de limite ; puis à chercher quelle articulation des connaissances et des savoirs était envisageable dans ce milieu, en particulier où articuler les savoirs relatifs à la validation, savoirs que toutes les recherches signalaient comme problématiques. L'étude des connaissances et savoirs conduit enfin à réinterroger la notion d'adidacticité (situation adidactique ou à dimension adidactique) et le travail du professeur dans une telle situation. Sur ce dernier point je renvoie le lecteur à l'article paru dans RDM 19/2 (Bloch 1999).

Dans une première partie, j exposerai donc comment j ai été amenée à m'appuyer sur la problématique connaissances / savoirs pour étudier l'enseignement de l'analyse dans le secondaire. La prise en compte de la problématique connaissances / savoirs suppose la construction d un milieu propre à l'enseignement de concepts de l'analyse par des situations au moins partiellement a-didactiques. J'essaierai de dégager les caractéristiques d un tel milieu, d'un point de vue épistémologique comme du point de vue de l'apprentissage.

Je présenterai ensuite un exemple de situation à dimension adidactique visant l'enseignement du conept de fonction, et montrerai, en liaison avec la structuration du milieu, comment les situations construites tentent de prendre en compte les trois niveaux d'organisation du savoir : action / connaissances, formulation / ostensifs, validation / savoir, et ce qu'il est nécessaire de modifier, si l'on veut parvenir à faire exister ces différents niveaux, dans les activités présentées habituellement aux élèves.

En conclusion, j'examinerai quels types de connaissances sont travaillées dans les situations expérimentales, et :

1) en quoi elles diffèrent des connaissances habituellement présentes dans l'enseignement secondaire ;

2) quel lien elles présentent avec les connaissances travaillées dans l'enseignement supérieur.

II. PROBLÉMATIQUE

1. L'enseignement de l'analyse dans le secondaire

a) Les évolutions

Lorsqu'on étudie les évolutions de l'enseignement du concept de limite depuis les années 1970, date de la réforme des " maths modernes ", on peut pointer quelques étapes :

- en 1970 : les suites et les limites sont introduites par des définitions et preuves formelles ;
- en 1986 , les programmes tentent de réintroduire une problématique de majoration par des suites de référence. On obtient alors un traitement des limites dont voici un exemple (Mathématiques Première S et E, Gautier et Thiercé, Hachette 1986, p. 129) :

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \quad \text{DONC} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

MAIS comme on ne peut pas majorer directement on écrit

$$\frac{1}{n-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}-1}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)$$

ET

$$\frac{1}{\sqrt{n}+1} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

OR

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

De plus

$$\frac{1}{\sqrt{n}-1} < 1 \quad \text{dès que } n \geq 4,$$

DONC

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n-1} = 0$$

Ceci conduit donc :

— à traiter de façon très différente deux exemples qui sont exactement de même nature, du point de vue des phénomènes de limite ;

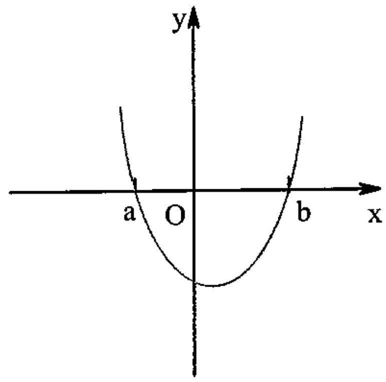
— à avoir besoin d'une inflation de connaissances algébriques, pour traiter des exemples élémentaires ;

— à ne pas pouvoir instituer ces connaissances en savoirs, étant donné que ces connaissances sont à renouveler pour chaque exemple.

- dans les années 90 :

L'enseignement organise le travail en conformité sur des objets supposés représentatifs. Ainsi les propriétés sont illustrées par un calcul, un graphique, un tableau numérique, " données à voir " sans justification de leur nécessité ni outils de validation ou d'invalidation. Cette illustration des propriétés est supposée s'appuyer sur l'intuition graphique. Elle ne questionne pas le rapport graphique / fonction, supposé transparent : les élèves sont supposés *voir* dans le dessin - graphique ce qu'y voit le professeur, c'est-à-dire un ostensif de fonction numérique.

Exemple : fonction minorée



Le graphique est donné aux élèves, avec :
- soit un minorant placé sur l'axe des ordonnées, et le commentaire : " la fonction est minorée sur l'intervalle (a,b) par ... "
- soit, la consigne : " montrez que la fonction est minorée " (le nombre candidat à être un minorant étant alors fourni ou laissé à la charge des élèves).

b) La nature du travail mathématique

Le travail proposé dans les années 70 était essentiellement formel : le sens était supposé issu du formalisme, puisque celui-ci était tenu pour la quintessence des mathématiques. Dans les années 80, les réformes avaient pour but de réintroduire la notion d'approximation en analyse ; dans les faits cela s'est traduit par une inflation du travail algébrique sur les majorations, minorations, sans que le temps didactique puisse avancer suffisamment pour permettre d'introduire des tâches pertinentes du point de vue de l'analyse (pour des développements et précisions, cf. Artigue 1993).

La présentation ostensive des propriétés, privilégiée depuis la dernière réforme, est supposée plus " intuitive ". Dans les faits, le travail proposé ne permet pas aux élèves de disposer d'outils pour déterminer des **savoirs** de l'analyse. Ainsi, dans le cas de l'exemple ci-dessus :

— quelles sont les fonctions ou les classes de fonctions qui sont majorées, minorées ;

— quelle est l'utilité de la notion ainsi introduite ;

— comment cette notion se distingue des autres notions relatives à l'ordre, concernant les fonctions (croissance, extrema) ;

— quelles sont les fonctions ou les classes de fonctions qui ne sont pas majorées, minorées ;

— quelle est, pour une fonction, la propriété contraire d'être majorée, c'est-à-dire : la propriété " p " étant connue, comment s'énonce la propriété " non p " ?

Autrement dit, cet enseignement ostensif ne permet pas aux élèves de travailler sur des critères mathématiques. En effet c'est le propre des énoncés mathématiques que de pouvoir dire quelle propriété ils déterminent, quels sont les objets mathématiques qui vérifient ces propriétés, et quels sont ceux qui ne les vérifient pas. Or le fait de ne pas disposer d'outils de validation relatifs à une propriété entraîne une incapacité à opérer avec cette propriété ; un énoncé mathématique est également déterminé, en ce sens que le connaître permet de connaître son contraire, ce qui n'est pas possible ici.

Dans ces conditions, on peut s'interroger sur la capacité des élèves à voir vraiment dans les tâches proposées un travail sur les concepts mathématiques visés. On voit là les limites de l'ostension basée sur " l'intuition ".

c) L'équilibre connaissances / savoirs

Ces phénomènes peuvent être analysés en termes de savoirs et de connaissances présents dans l'enseignement. En effet :

- les années 70 tentent d'organiser l'enseignement autour de la présentation formelle du savoir, en supposant ce savoir suffisant pour traiter les problèmes qui en relèveraient, et en négligeant la construction nécessaire de connaissances relatives à ces problèmes ;
- l'enseignement des années 80 quant à lui, présente des problèmes à traiter avec très peu de savoirs institués, mais chaque cas nouveau nécessite la mise en œuvre de connaissances importantes relatives à l'algèbre et aux majorations ; ces connaissances sont trop locales pour être instituées facilement afin de pouvoir être ensuite décontextualisées et réinvesties ;

- l'enseignement actuel, sous couleur de baser l'approche de l'analyse sur l'intuition graphique, ne donne à l'élève aucun outil lui permettant de traiter des cas différents de ceux qui lui sont présentés. On pourrait dire qu'il tente de se baser sur des connaissances, mais ces connaissances, si elles se construisent effectivement (ce qui resterait à prouver) sont de l'ordre des connaissances privées et non opérationnelles dans le travail mathématique.

On pourrait donc analyser ces variations comme un problème de L'EQUILIBRE CONNAISSANCES / SAVOIRS

J'ai donc été amenée à étudier la problématique des connaissances et savoirs (C/S) , afin de déterminer s'il était possible de construire à ce niveau des situations qui puissent être porteuses à la fois de connaissances et de savoirs de l'analyse.

2. Connaissances et SAVOIR [29]

" Enseigner, c'est travailler le savoir, pour induire dans un cadre situationnel choisi, un processus cognitif supportant l'apprentissage, dont le produit sera en retour institué en savoir ".

Conne, 1992 : " Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique ", *Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 12- 2/3, La Pensée Sauvage éd.*, Grenoble.

Il s'agit donc d'induire des connaissances dans une situation à partir du savoir, mais ces connaissances doivent pouvoir retrouver le savoir à terme.

a) Connaissance

" Les connaissances sont les moyens transmissibles (par imitation, initiation, communication, etc.), mais non nécessairement explicitables, de contrôler une situation , et d'y obtenir un certain résultat conformément à une attente et à une exigence sociale. "

(Brousseau & Centeno 1991, note p.176, " Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant ", *Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 11- 2/3, La Pensée Sauvage éd.*, Grenoble).

[29] Pour une étude bibliographique plus complète de connaissances et savoirs, cf. Bloch 1999.

- Ce qui départage connaissance et savoir, c'est leur rôle dans la situation :

" La situation n'est pas seulement le cadre de l'action du sujet, elle en est la condition, elle est donc étroitement associée aux connaissances en jeu. De ce fait, une partie de la situation va devoir entrer comme partie intégrante des savoirs correspondants. Cette partie, cachée peut-être, mais essentielle, sert de **référence** *au savoir et* **d'objet** *à la connaissance. "* (Brousseau, 1990, " Le contrat didactique : le milieu " *Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 9- 3, La Pensée Sauvage éd.*, Grenoble).

Les connaissances ont à voir avec la transformation des situations, et avec la possibilité d'évolution vers le savoir ; elles sont donc reliées à la diffusion possible des savoirs :

CONNAISSANCE :
transformation de la situation ← → diffusion de savoirs

Se pose alors le problème de la reconnaissance des connaissances, reconnaissance liée à leur utilité (on **reconnaît** les connaissances, et **qu'en faire** ?)

- Une connaissance est reconnue en ce qu'elle agit sur la situation (interaction sujet / milieu)
- quand je dis qu'elle est reconnue, je postule d'emblée une

INTERACTION DE CONNAISSANCES

- ce qui suppose du SAVOIR : le savoir est un repère pour reconnaître la connaissance, en situation, à propos d'une action
- la connaissance est reconnue par le *professeur*, ce qui suppose que cette reconnaissance a pour celui-ci une fonction dans la situation (en dehors de sa fonction pour l'élève, qui est bien sûr de permettre à ce dernier de réussir la tâche proposée, le jeu mis en scène dans la situation) : cette fonction c'est de permettre l'évolution (pilotée par le professeur) du contrat didactique. En effet, dans une situation où les connaissances s'expriment, le contrat ne peut rester stable, puisqu'il s'agit que ces connaissances évoluent pour pouvoir à terme être institutionnalisées en savoirs.

b) Savoir

" Le savoir est le produit culturel d'une institution qui a pour objet de repérer, d'analyser et d'organiser les connaissances afin de faciliter leur communication, leur usage sous forme de connaissance ou de savoir, et la production de nouveaux savoirs. "

(Brousseau & Centeno 1991, note p.176, " Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant ", *Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 11- 2/3, La Pensée Sauvage éd.*, Grenoble).

- Un savoir est ce qui CONTRÔLE la situation
- Un savoir est une connaissance IDENTIFIEE PAR LE SUJET
- C'est une CONNAISSANCE UTILE (utilisable, par exemple pour poursuivre l'interaction de connaissances)

c) Savoirs pragmatiques et savoirs savants

Suivant Conne (1992), je distinguerai les savoirs pragmatiques et les savoirs savants ; les premiers comprennent les savoir-faire et les savoirs réfléchis :

- Les savoir-faire sont des savoirs en situation, qui se suffisent du résultat de l'action
- les savoirs réfléchis sont des savoirs explicitables (pourquoi l'action a été efficace : pourquoi ça marche ?)
- Les savoirs savants sont des savoirs SUR LES SITUATIONS

La question est alors de déterminer quelles situations sont favorables à la manifestation et à la construction de connaissances, et comment construire ces situations, c'est-à-dire :
QUEL MILIEU PERMET LA PRODUCTION, L'EXISTENCE, DE CONNAISSANCES ?
COMMENT CONSTRUIRE ET ETUDIER UN MILIEU ADEQUAT ?

III. LE MILIEU

La détermination d'un milieu théorique relatif à un savoir donné, et la construction effective d'une situation basée sur ce milieu, sont fondées sur l'étude des DEUX QUESTIONS THÉORIQUES SUIVANTES :

1) Comment construire un milieu (une famille de milieux) relatifs à un concept donné ?
2) Comment structurer le milieu (analyser la situation, les connaissances) de façon à ce que la situation soit jouable et produise, à chacun des niveaux de milieu considérés, les comportements, procédures, connaissances, attendues.

Liés à ces deux questions, il y a DEUX NIVEAUX DE MODELES :

— un modèle de milieu théorique de l'enseignement d'un concept (dans ma thèse j'ai étudié le milieu théorique d'introduction des fonctions et des limites). La possibilité de construire théoriquement un tel milieu ne dit rien sur les réalisations effectives envisageables de telles situations, lesquelles situations, pour être réalisables obéissent à d'autres contraintes (chronogénétiques par exemple, ou de compatibilité avec les savoirs institutionnels)

— un modèle de milieu spécifié : celui qui permet de prévoir une situation adidactique effective, et de rendre compte de la contingence, c'est-à-dire le milieu relatif à une situation construite / donnée.

Les deux concepts sont bien évidemment théoriques, mais ils ne remplissent pas la même fonction.

1. La fonction des deux milieux théoriques et leur construction

a) Le milieu théorique relatif à l'enseignement d'un concept est celui qui détermine les jeux possibles relativement à ce concept : il se détermine d'un point de vue épistémologique (point de vue des jeux possibles du savoir) et cognitif (point de vue des jeux possibles de l'élève). Il détermine donc aussi les variables didactiques à prendre en compte.

b) Le modèle de milieu spécifié est celui où les variables didactiques prennent des valeurs, et le jeu est défini du fait de la fixation des variables didactiques : il s'agit alors d'étudier les possibilités théoriques de la situation ainsi déterminée, en vue de la construction de connaissances et de savoirs relatifs au concept (analyse a priori de la situation).

La construction du premier type de milieu, nous l'avons dit, se fait par des considérations épistémologiques et cognitives : pour l'exemple de telles constructions, se reporter à Bloch 2000, chapitre 3 (la notion de fonction), C. et R. Berthelot 1983 repris dans Bloch 2000 (la notion de limite), Brousseau 1988 (rationnels et décimaux), Berthelot et Salin 1992 (la géométrie).

Pour ce qui est du deuxième type, les nombreuses situations adidactiques construites dans la théorie des situations fournissent des exemples analysés rigoureusement.

Trois remarques :

- Construire un milieu adidactique ne peut se faire en respectant l'organisation du savoir, sinon on retrouve celui-ci ;
- Donc cette construction se fera en mettant au premier plan des considérations sur les possibilités d'action, les agrégations de connaissances, la facilité d'entrée dans la situation ;
- Ce qui sera déterminant sera la possibilité reconnue d'existence de PROCESSUS de production de connaissances, c'est-à-dire de possiblités pour l'élève de mettre en place des procédures conduisant à l'échec ou à la réussite, ces procédures recevant ensuite des rétroactions du milieu, le milieu matériel / objectif étant seul à l'origine des rétroactions ou des apports du professeur étant également nécessaires. Dans ce dernier cas il restera à examiner dans quelle mesure l'adidacticité de la situation est ou non préservée.

2. Structuration du milieu

On veut étudier :

— ce qui va être produit (analyse a priori)

— ce qui est effectif (comprendre la contingence)

en termes de fonctionnement (actions, procédures, régulations) et donc de connaissances : quelles connaissances peuvent être en jeu à quelles phases de la situation, et d'adidacticité : dans quelle mesure l'élève est-il en relation avec un milieu qui lui envoie des rétroactions.

La question de l'ADIDACTICITE est en effet à relier à celle de l'étude du milieu et des connaissances :

— le critère de l'adidacticité est la production et l'interaction de connaissances ;

— il n'y a pas adidacticité des *objets* de la situation mais des PROCESSUS issus des actions et des procédures des élèves (évolution de la situation).

La structuration du milieu est donc nécessaire car le milieu EVOLUE, c'est dire que dans une situation adidactique, **le contrat n'est pas stable**.

Je me réfère au modèle de structuration du milieu proposé par Margolinas, et que je rappelle ci-dessous (modifié (Bloch 1999) pour rendre plus explicite le travail du professeur) :

M3: M-de construction		P3: P-noosphérien	S3: situation noosphérienne	sur
M2: M-de projet		P2: P-constructeur	S2: situation de construction	didac
M1: M-didactique	E1: E-réflexif	P1: P-projeteur	S1: situation de projet	tique
M0: **M d'apprentissage**	**E0:** **Elève**	**P0:** **Professeur-pour-l'élève**	**S0:** **situation didactique**	
M-1: M-de référence	E-1: E-apprenant	P-1: Professeur en action	S-1: situation d'apprentissage	a-
M-2: M-objectif	E-2: E-agissant	P-2 : P- observateur	S-2: situation de référence	didac
M-3: M-matériel	E-3: E-objectif		S-3: situation objective	tique

Remarquons que dans ce schéma, la situation d'élaboration du milieu théorique du concept pourrait se situer aux niveaux 2-3, c'est-à-dire la situation de construction.

Les niveaux adidactiques permettent de rendre compte de l'évolution du contrat didactique, c'est-à-dire :

- de ce qui est attendu de l'élève à chaque étape de la situation ;
- du type d'interaction avec le milieu et le professeur, et donc de ce que le professeur est amené à faire pour piloter la situation.

3. Construction de situations pour l'enseignement de l'analyse

L'étude des travaux de didactique amène à constater qu'il n'existe que peu de situations de résolution de problèmes pour les concepts de l'analyse. Citons cependant les projets qui peuvent être proches de la démarche de construction d'un milieu pour l'enseignement de l'analyse : :

- Les travaux de Legrand, Pintard, Di Martino (modélisation par la situation du pétrolier) ;

- Les travaux du Groupe AHA : Approche Heuristique de l'Analyse. Le groupe AHA utilise explicitement la problématique des grandeurs, et celle des infinitésimaux, pour construire des situations d'enseignement des concepts de fonction, limite, tangente, intégrale. Quel que soit l'intérêt de cette démarche, je n'ai pu en reprendre les éléments, pour des raisons de temps essentiellement : le projet AHA est un projet long.

a) Construction d'un milieu effectif

Cette construction obéit à des impératifs relatifs au savoir :

- il est nécessaire de pouvoir INSTITUER EN SAVOIR le produit des interactions dans la situation
- il faut que l'action, les connaissances produites et formulées soient INTELLIGIBLES et UTILISABLES pour le savoir.

Quelles sont les conditions minimales de réalisation pour être sûr que l'on est bien dans une situation de résolution de problème de l'analyse ?

Le savoir est " d'emblée enseignable " ; quels détours sont : légitimes, efficaces, nécessaires ????

HYPOTHESE : on fait de l'analyse si l'on peut disposer de CRITERES DE VALIDITE des propriétés, permettant l'entrée dans la théorie mathématique " analyse "

Ces critères peuvent être pris dans un répertoire assez large, mais ils doivent être mis en rapport avec le savoir, dans une perspective au moins temporelle.

b) Nécessité de prendre en compte la validation

Ceci rejoint l'analyse faite de l'enseignement actuel : ostension sans possibilité de valider ou même de disposer d'énoncés " complets " (un théorème dit ce qu'est une propriété, il permet de prouver quels sont les objets qui la vérifient et quels sont ceux qui ne la vérifient pas).

La prise en compte de la nécessité de valider impose alors une étude des questions didactiques liées à la validation :

- A l'entrée dans une théorie nouvelle complexe comme l'analyse, l'on ne dispose pas du système servant à valider, et le système de preuve de l'analyse est en rupture avec celui de l'algèbre:

  les formulations des preuves de l'analyse apparaissent comme une " boîte fermée ", p.ex. : $\forall \varepsilon$, $|a - b| < \varepsilon$ Il n'est pas " transparent " qu'en ouvrant la boîte on trouvera $a = b$

- Faut-il laisser vivre des modes de validation provisoires ? (légitimité, durée)
- Problème de l'adaptation ultérieure
- Analyser les différents modes d'accès au répertoire de la validation :

1. du point de vue des objets et des problèmes

Lien avec les validations empiriques (prise en compte de la problématique des grandeurs) ou utilisation des fonctions comme base de questions mathématiques. J'ai choisi la deuxième solution, pour des raisons de compatibilité avec l'institution et de durée de mon projet (possibilité d'avoir les élèves durant un an seulement).

2. du point de vue des registres de représentation utilisés dans le milieu

INFINI mais : pour la dévolution pas pour des règles opératoires à ce niveau

ALGEBRIQUE (règles de simplification , ...)

GRAPHIQUES

NUMERIQUE (représentant par un système de voisins, cf. Bloch 2000, chapitre 3)

Il est donc nécessaire d'étudier les registres de représentation du point de vue des tâches qui peuvent être associées à l'utilisation d'un registre (cf. Bloch 2000, chap 4), et cf. II.4)

3. du point de vue des choix didactiques concernant les critères de validation

   Prévoir ce qui sera explicite ou implicite dans l'utilisation des critères de validation (par ex. axiome d'Archimède, propriété des intervalles emboîtés, algèbre des limites, règles " opératoires " sur l'infini...)

Les CRITERES de validation sont du côté du SAVOIR ; les moyens de validation utilisés spontanément (ou sous l'influence du jeu dans la situation) par les élèves sont du côté des CONNAISSANCES.

4. Milieu objectif et ostensifs

a) Registres et ostensifs

Un préalable à la construction d'un milieu est l'étude des registres disponibles pour les notions d'analyse, et des tâches afférentes. La définition d'une **tâche** est celle de Leontiev : un but à atteindre, et des conditions données ; ces conditions peuvent jouer comme des contraintes ou des aides.

Il s'agit de :

➔ récupérer :

- des connaissances des élèves (y compris des obstacles et des conceptions)
- des moyens de travail ET de validation

➔ analyser

- des tâches possibles

➔ augmenter

- les capacités de fonctionnement (de nombreuses tâches trouvées dans l'analyse a priori ne figurent pas dans les tâches routinières de l'enseignement secondaire, cf. Bloch 2000, chapitre 4).

b) Registre réducteur / producteur

L'analyse des registres doit prendre en compte les notiosn de registre réducteur (un représentant d'un concept, dans un registre, ne peut montrer qu'une partie des propriétés de ce concept) et producteur (un représentant permet de voir des propriétés parasites (qui ne sont pas celles du concept) car spécifiques de la représentation.

- GRAPHIQUE

— un graphique est majoré, minoré ; il est discret : le continu devra être induit.

— un graphique permet de faire apparaître une fonction comme objet ; on verra donc des propriétés (y compris fausses).

- ALGEBRIQUE

— courbe, valeurs, racines ne sont pas apparentes

— la nature de la fonction est perceptible, du moins dans les cas simples (polynômes par exemple)

- GEOMETRIQUE

— ex: le parallélogramme articulé est-il un bon représentant de la fonction " sinus " ?

c) Installation d'un milieu matériel / objectif

- Les ostensifs ne suffisent pas à définir la situation MAIS ils sont indispensables au niveau secondaire et supérieur pour installer un milieu matériel, qui doit déjà être constitué de représentants de concepts mathématiques.
- C'est la **question posée** qui détermine le milieu objectif :

→ Quel jeu est possible ? → Quelles connaissances ?

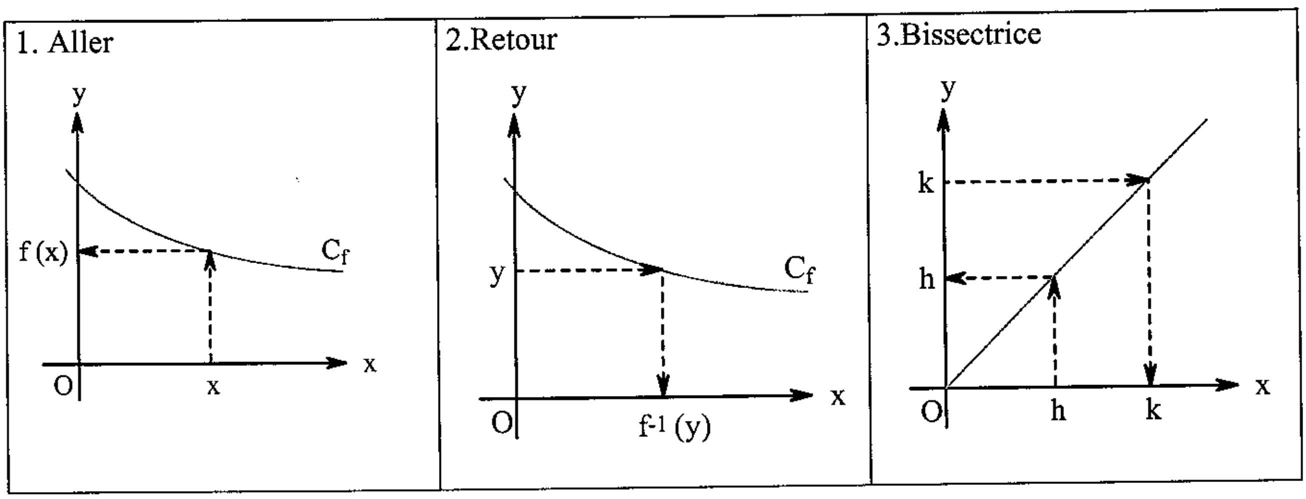
IV. LA SITUATION " GRAPHIQUES ET CHEMINS "

La situation construite, à partir de cette analyse, pour l'enseignement de la notion de fonction dès la classe de Seconde (10ème classe) est due à **Pedro Alson**, qui l'a mise en place à l'Université Centrale du Venezuela pour des étudiants abordant le Calculus tout en disposant d'un petit bagage algébrique.

1. Le milieu " matériel " et objectif

- repères du plan et graphiques fonctionnels
- données de fonctions ou de contraintes amenant à construire des RGC (représentations graphiques cartésiennes) de fonctions, ou à répondre à des questions relatives aux propriétés des RGC construites.
- moyens de validation : CHEMINS ET GRAPHIQUES

Les trois chemins fondamentaux:



Les graphiques et les chemins font partie du milieu pour l'action :

- sur les repères ou graphiques, l'élève peut tracer des RGC, placer et coder des points ;
- avec les chemins, il peut contrôler des images, des antécédents, contrôler qu'une RGC est bien une RGC de fonction ;
- il peut contrôler des propriétés des fonctions ;

il peut associer des RGC par une transformation ou une opération, i.e. opérer globalement sur les RGC

2. La situation (le jeu)

a) Composante " fonctions "

Le but du jeu est de :

- disposer d'un certain nombre de RGC de fonctions, et pouvoir dire si ces fonctions possèdent, ou non, certaines propriétés.
- construire un stock de fonctions sur lesquelles tester les propriétés énoncées.
- ce stock de fonctions sera assimilé, dans le milieu prévu, à un stock de RGC, ce qui permettra de le faire en grande partie construire par les élèves.

b) Composante " contraintes "

- disposer d'un stock de contraintes, et d'y éprouver les RGC soit données, soit construites ;
- produire des contraintes, ou des théorèmes sur les contraintes.

c) Validation

Dans les deux composantes de la situation, le but de la validation (et l'état final gagnant) est le même : être capable de dire si la contrainte est réalisée.

Les moyens de cette validation :

- moyens graphiques / formels avec les RGC et les chemins;
- éventuellement moyens numériques, algébriques si les données (le choix des variables) le permettent.

La situation comporte une dimension a-didactique si :

- des questions nouvelles, sur les fonctions, ou sur les contraintes, peuvent émerger à partir des contraintes identifiées

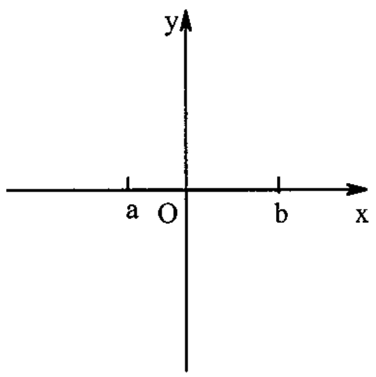
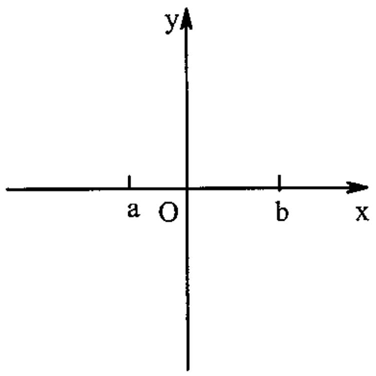
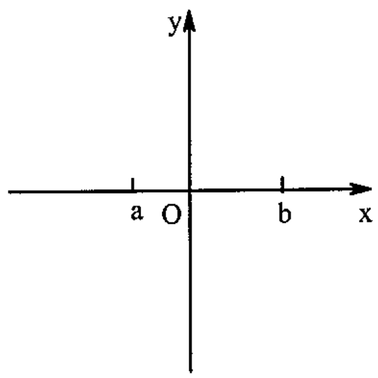
- le milieu fournit une rétroaction à ces questions
- il y a INTERACTION DE CONNAISSANCES :

  — ELÈVE / MILIEU — PROFESSEUR / ELEVE

LES FONCTIONS : EXEMPLES DE FICHES

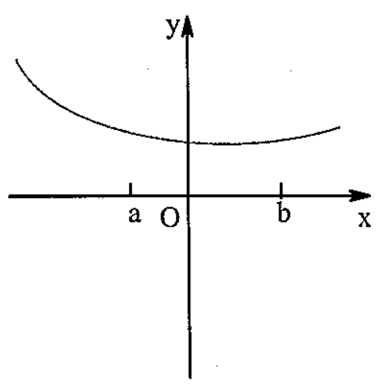
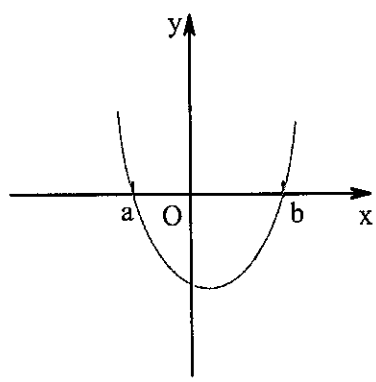
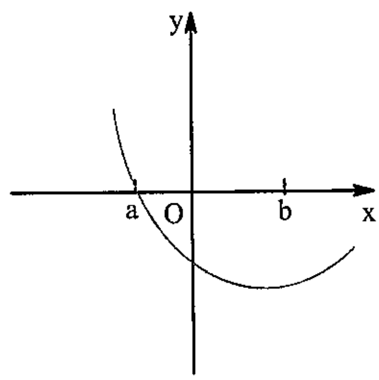
Dans tous les cas, la consigne est : “ Dessine la RGC (Représentation Graphique Cartésienne) d’une fonction f vérifiant les conditions énoncées ”.

1 : Recherche de fonctions sous contrainte d’inegalites:

 $\forall x \,/\, x < a$ ou $x > b$, $f(x) < f(b)$ et $\forall x \,/\, a < x < b$, $f(a) > f(x) > f(b)$	 $\forall x \,/\, a < x < b$, $f(a) > f(x) > f(b)$	 $\forall x \,/\, x > b$, $f(a) > f(x) > f(b)$ $\forall x \,/\, x < b$, $f(x) > f(b)$

Commencer par placer f(a) et f(b).

2 : Compléter dans chacun des cadres ci-dessous par une condition sur x, vérifiée pour la RGC tracée

 $f(x) > f(a)$ si x	 $f(x) > f(a)$ si x	 $f(x) < f(a)$ si x ....

1 : Quel travail sur cette consigne ?

Quelles connaissances ?

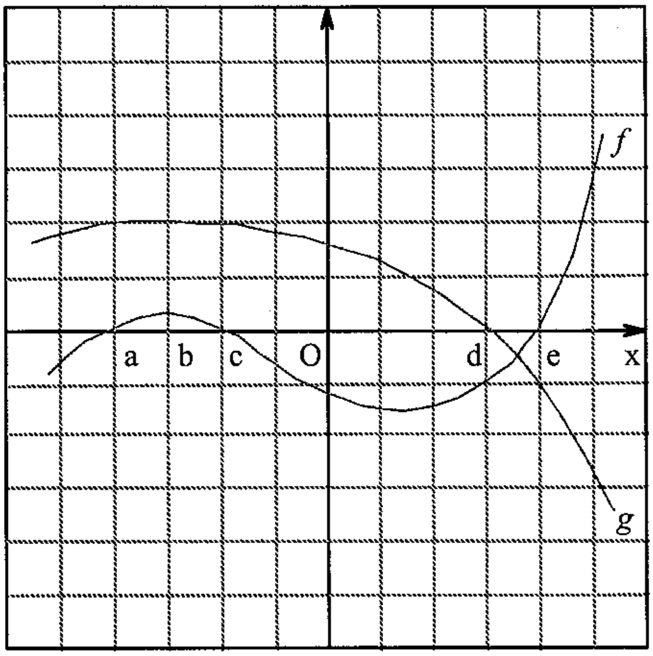
1) Fonction discontinue : est-ce une fonction ?

Les chemins sont un outil pour répondre. Le milieu graphique permet donc de construire, par le jeu des contraintes, des fonctions nouvelles (non encore rencontrées) et de valider des réponses à des questions concernant ces nouvelles classes de fonctions.

2) $\forall$ x / a < x < b , f(a) > f(x) > f(b) est, ou non, une condition équivalente à " f décroissante sur [a , b] " ?

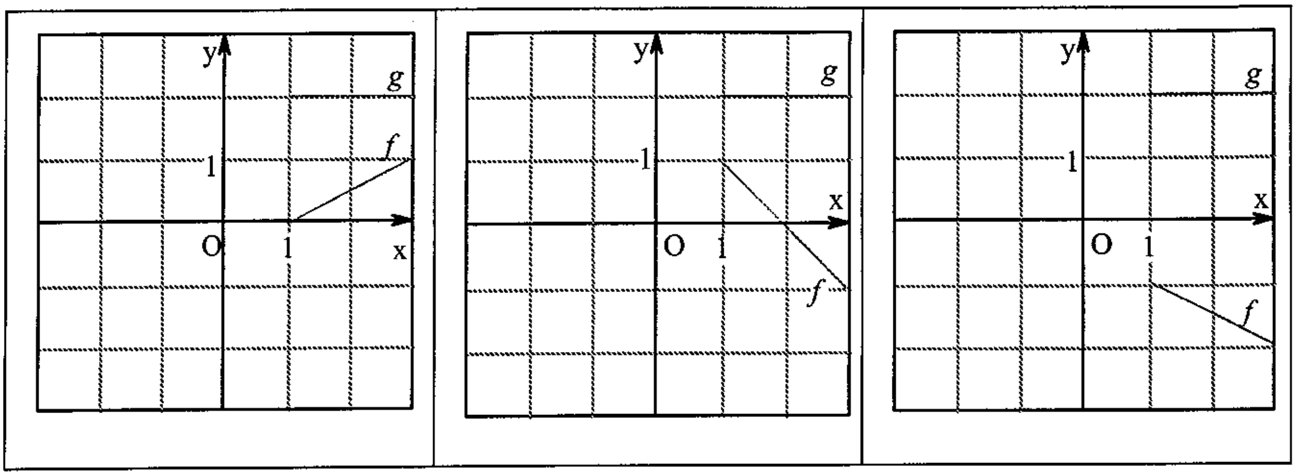
→ TRAVAIL SUR LE SENS ET LA NECESSITE DES QUANTIFICATEURS

2. Somme et produit de fonctions



Ci-dessus : dessinez la fonction somme et la fonction produit de f et g, en utilisant les points d'abscisse a, b, c, d, e. Quelles règles peut-on énoncer quant au tracé de la RGC de f + g et de f × g à partir des RGC de f et de g ? Enoncez des théorèmes lorsque f et g sont des fonctions connues (par exemple constante, affine...)

Dans chacun des cadres ci-dessous, représentez la RGC de la fonction produit f × g (varier f et g)



Les élèves retravaillent dans cette tâche les connaissances numériques, en particulier tout ce qui concerne la somme et le produit de nombres réels : les rapports au zéro et à l'unité sont redécouverts dans un environnement différent.

Il en résulte que les élèves sont en terrain non familier, et que les premiers essais de sommes, par exemple, sont peu assurés : les élèves tracent la somme de deux fonctions affines point par point, en n'osant pas affirmer qu'il s'agit bien d'une droite. Il est nécessaire de passer au mode algébrique pour en être sûr, étant donné les propriétés du graphique. Ce passage s'avère non évident ; ainsi le fait que l'algébrique puisse être un mode de validation pour le graphique est **une connaissance à construire**, et non pas spontanée.

Par contre pour le produit les élèves énoncent que le produit de deux fonctions affines est une fonction affine … mais là, le graphique invalide très facilement cette proposition.

Comment rendre l'utilisation des connaissances NECESSAIRES : RETOURNER LA SITUATION (cf. Bloch 2000 b, Dédidactification et retournement de situations, communication au colloque Guy Brousseau, juin 2000).

Les consignes consistent à énoncer des propriétés de $f \times g$, et à chercher dans quels cas f et g peuvent conduire au résultat cherché :

— $f \times g$ coupe l'axe Ox en telle abscisse ;

— $f \times g$ est négative sur l'intervalle [a, b] ;

— $f \times g$ est une fonction affine ;

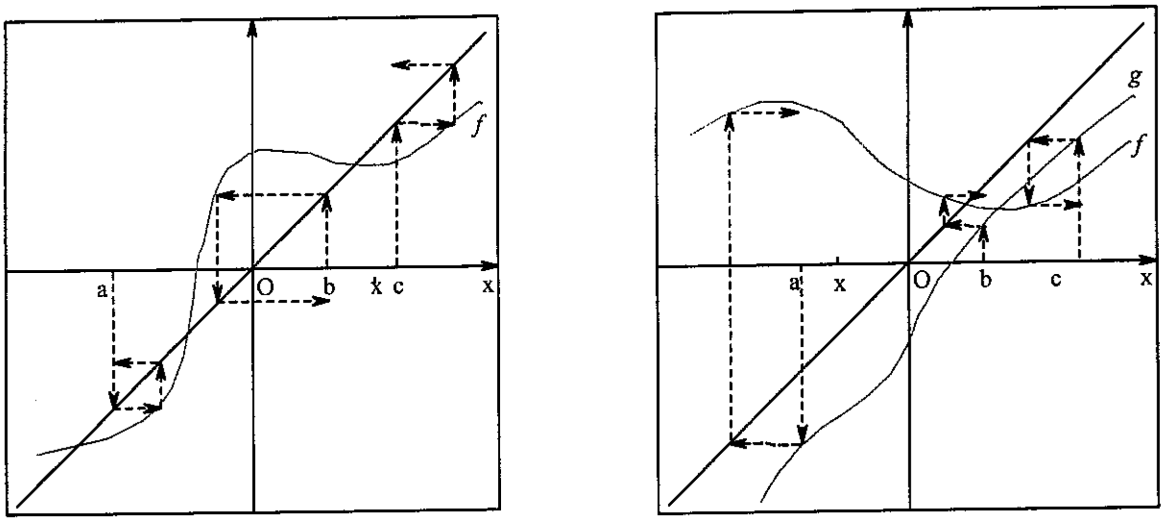
— $f \times g$ est une fonction du second degré, et l'abscisse du sommet de la parabole est a ;

— $f \times g$ est du second degré, et sa RGC ne coupe pas l'axe Ox ;

— $f \times g$ est du second degré, et a un maximum ; $f \times g$ est du second degré, a pour maximum zéro ;

— $f \times g$ est du troisième degré, et n'est pas monotone ; ....

<u>Les fonctions : le chemin de la réciproque et de la composée</u>



Ce travail vise à :

- Faire énoncer des propriétés sur la réciproque (condition nécessaire et suffisante d'existence, propriété de symétrie par rapport à la bissectrice) ;
- Faire retravailler la notion de racine carrée d'un point de vue fonctionnel ; les élèves trouvent sans difficulté les deux réciproques de la fonction " carré ". Le travail graphique met aussi en évidence de façon particulièrement claire qu'un nombre négatif ne peut avoir d'antécédent.
- Donner aux élèves une expertise graphique par la maîtrise des outils d'anticipation sur la composition des fonctions. Ce point est particulièrement bien investi par les élèves.

3. Les variables didactiques des situations

a) La nature des fonctions intervenant dans les graphiques

➔ fonctions constantes, fonctions affines ;

➔ fonctions quelconques

b) La nature des données numériques ou littérales présentes dans certains graphiques

➔ nombres entiers ou rationnels facilement repérables, ou nombres irrationnels ;

➔ par exemple pour la somme et le produit, signe des valeurs prises par f et g ; pour le produit, comparaison avec l'unité ;

➔ valeurs repérées sur l'axe des x ou des y, mais indiquées par une lettre

➔ recours obligatoire aux quantificateurs.

c) La nature et la complexité des consignes (contraintes) demandées

➔ identification et validation de propriétés de fonctions dont le RGC est donnée ;

➔ ou tracé de RGC de fonctions avec des contraintes données.

LA DIFFICULTE DU PROBLEME A RESOUDRE TIENT ALORS A PLUSIEURS MODALITES :

➔ la nature du travail demandé (travail sur une courbe déjà tracée ou tracé à réaliser) ;

➔ le nombre de conditions (contraintes) demandées ;

➔ le fait que les conditions soient données sous forme d'égalités ou d'inégalités, ce qui peut entraîner l'obligation de quantifier ;

➔ les valeurs : numériques ou valeurs "quelconques" repérées par des lettres, sur les axes ou dans les contraintes imposées ; valeurs quantifiées (variables) ou non ;

➔ les conditions globales ou locales

d) La possibilité ou non de fonctionnement autonome du graphique/formel (nécessité de contrôle numérique / algébrique ou non).

➔ La variable algébrique est commandée par les éléments présents dans la consigne

➔ La variable numérique est commandée par la présence ou l'absence d'un quadrillage sur les graphiques

e) La présence ou l'absence de transformations

➔ connaissant une transformation géométrique, transformer une RGC déjà construite

➔ connaissant une RGC déduite d'une autre, identifier la transformation effectuée

➔ possibilité d'associer des équations

4. Les obstacles prévus

a) Fonctions déjà connues

Les fonctions linéaires et affines sont prégnantes au début de l'apprentissage de la notion de fonction. On récupère donc des connaissances, mais aussi des " théorèmes-élèves " comme " le produit de deux fonctions affines est ne fonction affine ".

b) Contrat classique associé au graphique

➔ le graphique est vu dans ce contrat classique comme l'aboutissement d'une suite d'opérations algorithmiques et non comme un outil de preuve ou de construction ;

➔ le graphique peut être vu également comme une " photographie " de la fonction ou comme un idéogramme, ce qui peut amener à accorder à la fonction des propriétés qui sont en fait celles du dessin ;

➔ le traitement dans le contrat classique est essentiellement ponctuel. Or le fonctionnement ponctuel, non seulement n'induit pas le fonctionnement global mais plus encore, il peut se constituer en obstacle au fonctionnement global.

c) Expertise graphique

➔ le registre graphique est porteur, comme tout autre, d'un certain nombre de spécificités de fonctionnement qui doivent être enseignées / apprises et qui, dans le contrat classique, ne font pas partie des connaissances publiques de la classe.

d) Etablissement du nouveau contrat et connaissances des élèves

➔ le contrat classique : dans ce contrat, le produit de deux fonctions affines étant donné, le professeur fera effectuer le produit algébrique, constater que l'on obtient une fonction du second degré, et trouver éventuellement la correspondance entre les paramètres de la parabole associée et les paramètres de départ des fonctions affines (milieu allié)

➔ Théorème- élève : le produit de deux " segments " est un " segment "

➔ le registre algébrique permet de désigner une fonction sans ambiguité ; le fonctionnement consiste donc à identifier une fonction, puis à décliner, sur cette fonction, un certain nombre de propriétés

➔ dans le milieu graphique, on procède plutôt par accumulation d'informations sur la fonction, mais les informations recueillies restent en tout état de cause significatives d'une classe de fonctions, et non d'une fonction unique (à moins bien entendu que l'on ne dispose d'une information supplémentaire de type algébrique).

➔ rupture avec le contrat habituel ; rupture aussi au niveau des moyens de validation disponibles pour les élèves, et au niveau des questions qu'ils sont amenés à prendre en charge

5. Effets de la situation « graphiques et chemins »

a) Changement de contrat

La preuve par la RGC est à la charge des élèves et non plus du ressort du seul professeur. Le graphique fonctionne comme élément interactif non algorithmisé (Lacasta). il y a un RAPPORT EFFECTIF avec le graphique.

b) Modification des objets problématiques

Le graphique n'est plus le but rituel d'un travail qui se passe dans un autre registre. Il est devenu outil de preuve dans un questionnement où les objets problématiques sont des concepts : fonctions et propriétés des fonctions.

c) Création d'un milieu fonctionnel

Cette situation contribue à créer un milieu fonctionnel pour poser des questions d'analyse, un " herbier " de fonctions plus riche que les fonctions de référence algébriques.

V. ETUDE DANS L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

Etude de transcriptions de cours et de copies d'élèves.

1. Les transcriptions

Deux cours de maths sup. PCSI (professeurs A et B) portant sur les propriétés de R,, les limites ...

a) Du côté du professeur

- expression du savoir, avec identification de ce savoir et des formes sous lesquelles il intervient
- expression de la façon d'utiliser le savoir, ou de commentaires sur le savoir

- augmentation / diminution de l'incertitude de la situation (gestes de clôture ou d'ouverture), par exemple questions sur le savoir pour créer de l'incertitude
- type d'argumentation : formulation, explicitation, validation (en restant dans le même registre ou en changeant de registre)

b) Du coté des élèves

réponses, questions, du savoir, calculs (par ex. au tableau), indications de procédures ou opinions

2. Les connaissances publiques

1. un premier type correspond à des connaissances relatives à des procédures, à l'instanciation des théorèmes, et aux conséquences sur les objets mathématiques envisagés
2. un autre type de connaissances correspond à des synthèses (ou bilans de connaissances) locales
3. remarques sur l'heuristique

➔ Deux types de connaissances émergent de façon dominante :

- **les connaissances relatives à la validité des énoncés et à leur champ d'application**
- **les connaissances relatives aux énoncés eux-mêmes**

3. Articulation secondaire / supérieur

Parmi les connaissances nécessaires pour aborder l'analyse dans l'enseignement supérieur, certaines peuvent être travaillées dans l'enseignement secondaire : la situation " Graphiques et chemins " donne des possibilités pour ce travail, sans aborder directement le formalisme, et en s'appuyant sur des connaissances des élèves.

VI. RESULTATS

La situation " Graphiques et chemins " et la situation du flocon de von Koch (introduction de la notion de limite) ont été expérimentées dans une classe de Première Scientifique.

1. Profil des élèves

L'évaluation des connaissances des élèves s'est faite, d'une part, par le relevé des connaissances travaillées dans la situation ; d'autre part, un questionnaire a été élaboré et donné à quatre classes de Première Scientifique, dont la classe expérimentale (Bloch 2000, chapitre 7).

a) Connaissances travaillées dans les situations

- Connaissances sur les fonctions comme objets, par l'intermédiaire des graphiques + fonctions " quelconques "
- Connaissances sur les fonctions répondant à des spécifications (contraintes, énoncé de propriétés)
- Connaissances sur les énoncés et leur :
  — champ d'application
  — domaine de validité
- Connaissances relatives à l'utilisation de symboles formels dans les validations et démonstrations

b) Questionnaire

Un questionnaire a permis d'établir :

- que les élèves de la classe expérimentale ont des connaissances plus dispersées que ceux des classes témoins, mais ne sont pas pénalisés
- que ces élèves sont moins dépendants des exercices classiques de la classe de Première Scientifique, et généralisent plus facilement
- que, dans les classes témoins, les bons élèves sont capables des mêmes raisonnements sur les fonctions que les élèves de la classe expérimentale

dans la classe expérimentale, la différence élèves moyens / bons est nettement moins marquée

2. Lien secondaire / supérieur

Les connaissances associées aux savoirs de l'analyse sont actuellement manquantes dans l'enseignement secondaire , donc les professeurs de niveau post-bac n'ont actuellement d'autre ressource que d'introduire simultanément :

- les objets de la théorie
- les modes de raisonnement
- les preuves et le formalisme
- les questions sur la validité des énoncés,

d'où un échec massif des étudiants.

L'expérimentation menée prouve qu'il existe des situations permettant de faire travailler, dans le secondaire, les connaissances nécessaires à la transition avec le supérieur.

3. Milieu et adidacticité

- Les situations expérimentées sont bâties à partir d'un milieu antagoniste, c'est-à-dire pouvant fournir des rétroactions au travail de l'élève
- Les éléments nécessaires à la validation étant en rupture avec les moyens de preuve antérieurement connus des élèves, il est néanmoins nécessaire de prévoir des apports de connaissances et savoirs du professeur
- Il est alors essentiel d'étudier les INTERACTIONS DE CONNAISSANCES professeur / élève afin d'analyser la situation (y compris dans l'analyse a priori) tout en sachant que les élèves peuvent entraîner le professeur plus loin que ce qu'il avait prévu (cf. Bloch 1999).

BIBLIOGRAPHIE

AHA (Groupe Approche Heuristique de l'Analyse) (1996) Une approche heuristique de l'analyse. *in Repères IREM, n°25, Topiques éditions*, Metz

ALLIOT J.F, LIEGAULT S. (1998) Etude de l'enseignement des fonctions au lycée : utilisation par les élèves de registres de représentation. *Mémoire professionnel, sous la direction de Marc Rogalski*, IUFM Nord - Pas de Calais.

ALSON P. (1987) Metodos de graficacion. *Université de Caracas*, Venezuela.

ALSON P. (1991) A qualitative approach to sketch the graph of a function. in *School science and Mathematics*

ARTIGUE M (1992) Functions from an algebraic and graphic point of view : cognitive difficulties and teaching practices. *Mathematical Association of America, Notes Series, n° 25.*

ARTIGUE M. (1993) Enseignement de l'analyse et fonctions de référence. *Repères IREM*, n°11. *Topiques éditions*, Metz.

ARTIGUE M. (1995) Un regard didactique sur l'utilisation des outils de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques. *Repères IREM, n°19.* Editions Topiques, Metz.

ARTIGUE M. (1996) L'enseignement des débuts de l'analyse : problèmes épistémologiques, cognitifs et didactiques. *Colloque, Université de La Laguna, Tenerife,* Espagne.

ARTIGUE M. (1998) L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 18 / 2, *La Pensée Sauvage*, Grenoble.

BERTHELOT C., BERTHELOT R. (1983) Quelques apports de la théorie des situations à l'étude de l'introduction de la notion de limite en classe de Première A. *DEA, université de Bordeaux I.*

BLOCH I. (1999) L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève : un exemple dans l'enseignement de l'analyse en Première scientifique. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol.19/ 2, *La Pensée Sauvage*, Grenoble.

BLOCH I. (2000) L'enseignement de l'analmyse à la charnière lycée / université : connaissances, savoirs, et conditions relatives à la validation. *Thèse*, Université Bordeaux 1.

CHAUVAT G. (1999) Courbes et fonctions au collège. *Petit x, n° 51*, IREM de Grenoble.

CORNU B. (1992) Limits, in *Advanced Mathematical Thinking, D.Tall, éd., Kluwer*, Dordrecht.

COSTE-ROY M.F. (1988) Transition secondaire / post-secondaire : en France, la rénovation des premiers cycles scientifiques. *Rapport à ICME 6, Budapest 1988. Publié dans " L'enseignement des mathématiques au niveau universitaire "*, commission INTER-IREM " Université ".

DELEDICQ A. (1996) Est-il possible d'enseigner l'analyse aujourd'hui ? *in Repères IREM, n°24, Topiques éditions*, Metz.

DIEUDONNE J. (1980) Calcul infinitésimal. *Hermann, éd.1997*. Paris.

DIGNEAU J.M (1989) Une étude des connaissances sur les nombres à l'entrée de la Seconde. *IREM de Bordeaux, Université Bordeaux I.*

DI MARTINO H. (1992) Analyse du contrôle épistémologique d'une situation didactique : la situation du pétrolier. *DEA, Université Joseph Fourier*, Grenoble.

DI MARTINO H., LEGRAND M., PINTARD D. (1995) Modélisation et situations fondamentales. *Actes de la VIIIème Ecole d'Eté de didactique des mathématiques*, IREM de Clermont-Ferrand.

DUVAL R. (1994) Les représentations graphiques : fonctionnement et conditions de leur apprentissage. *Actes du colloque CIEAEM, éd. Antibi, université Paul Sabatier*, Toulouse.

FUNRIGHETTI F., SOMAGLIA A. (1994) Functions in algebraic and graphical environments. *Actes de la 46ème rencontre CIEAEM, éd. A. Antibi*, Toulouse.

HAUCHART C. , SCHNEIDER M. (1996) Une approche heuristique de l'analyse. *in Repères IREM, n° 25, Topiques éditions*, Metz.

HAUCHART C. , KRYSINSKA M. (1993) Réflexions épistémologiques à propos du concept de tangente à une courbe. *in Actes de la première université d'été européenne " Histoire et épistémologie des mathématiques ", éd. IREM*, Montpellier.

HAUCHART C., ROUCHE N. (1985) Suites et séries géométriques. *Bulletin APMEP n° 348,* APMEP éditeur, Paris.

IREM de Poitiers (199 ?) Limites et infini au lycée.

IZORCHE M.L (1977) Les réels en classe de Seconde. *Mémoire de DEA, Université Bordeaux I.*

LEGRAND M. (1991) Groupe des situations fondamentales et métaphore fondamentale. Réflexions autour de la recherche d'une situation fondamentale au sujet du concept de limite : la situation du pétrolier. *Séminaire Dida Tech n° 131, Université Joseph Fourier*, Grenoble.

LEGRAND M. (1996) La problématique des situations fondamentales. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 16 / 2, *La Pensée Sauvage*, Grenoble.

LEGRAND M. (1997) La problématique des situations fondamentales. *Repères IREM, n°27,Topiques éditions* , Metz.

LONGO G. (1999) L'infini mathématique et les preuves. *CNRS et Département de mathématiques et informatique, Ecole Normale Supérieure*, Paris. Disponible sur le site : http ://www.dmi.ens.fr/users/longo

MASCHIETTO M. (1998) Fonctionnalité des représentations graphiques dans la résolution de problèmes d'analyse mathématique. *Mémoire de DEA*, Université Paris VII.

PECAL M. , SACKUR C. (1996) (Groupe IREM " Liaison lycée — DEUG ") Quelle rupture et quelle continuité dans l'enseignement des mathématiques au lycée et à l'université. *Bulletin APMEP n° 410, Journées nationales Albi 1996.* APMEP éditeur, Paris.

PERRIN M.J (1999) La tangente est-elle vraiment la droite qui approche le mieux la courbe au voisinage d'un point ? *in Repères IREM, n°34, Topiques éditions*, Metz.

ROBERT A. (1982) L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 3.3.

ROGALSKI J. (1984) Représentations graphiques dans l'enseignement : concepts et méthodes d'analyse appliqués au graphe de fonctions. *Signes et discours dans l'éducation et la vulgarisation scientifique, Sixièmes journées internationales sur l'éducation scientifique, Giordan et Martinand éd.*, Chamonix.

ROGALSKI M. (1990) Graphiques et raisonnements : visualiser des fonctions. *in "Audi-math" n°2, dossier de l'enseignant de mathématiques, Centre National de Documentation Pédagogique, Ministère de l'Education Nationale*, Paris.

ROGALSKI M. (1994) Les concepts de l'EIAO sont-ils indépendants du domaine ? L'exemple de l'enseignement de méthodes en analyse. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol.14-1 / 2.

RUIZ HIGUERA L. (1993) Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la nocion de funcion : analisis epistemologico y didactico. *Thèse, Université de Grenade*, Espagne.

SCHNEIDER M. (1991) Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente. *in Repères IREM, n°5, Topiques éditions*, Metz.

SCHNEIDER M. (1992) A propos de l'apprentissage du taux de variation instantané. *in Educationnal Studies in Mathematics, n° 23, Kluwer Academic Publishers*, Pays - Bas.

SIERPINSKA A. (1985) Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 6.1.

SIERPINSKA A. (1992) On understanding the notion of function. *in MAA Notes n° 25 (The concept of function : aspects of epistemology and pedagogy),* p. 25-58. Mathematical Association of America.

SCHWARZ B. , DREYFUS T. (1995) New actions upon old objects : a new ontological perspective on functions. *Educationnal studies in Mathematics, n° 29, p. 259 - 291. Kluwers Academic Publishers*, Nederlands.

TALL D. (1994) A versatile theory of visualisation and symbolisation in Mathematics. *Conférence plénière, 46ème rencontre de la CIEAEM*, Toulouse.

TALL D. (1996) Functions and calculus. *in Bishop et alii, (eds) International Handbook of Mathematics Education, Kluwer* ; Dordrecht.

THIENARD J.C. (1991) Pour une approche de l'enseignement de l'analyse par le calcul infinitésimal. *IREM de Poitiers*.

TOWARDS A CALCULUS AS AN "ARSENAL OF TECHNIQUES": COGNITIVE AND PEDAGOGICAL ISSUES

Elena Nardi[30]

University of East Anglia, UK

I. INTRODUCTION[31]

Before one embarks on a sampling of studies on the teaching and learning of Calculus in the UK, a cautionary remark is perhaps due. 'Anglosaxon works' in the field, belonging to an area that can be described as Research in the Teaching and Learning of Mathematics at University Level, are at times diverse and strong but definitely very disperse. For example: there is a number of colleagues who would subscribe to the community and PME discussion group of Advanced Mathematical Thinking but there are others with a background in secondary education or teacher education who see their involvement with university mathematics as a natural extension of their activity in these other fields. The baggage of these people is distinctly different and their work has different flavours. Certain specific examples follow below.

With relief and perhaps with a little bit of cunning, this paper will not serve the complex task of representing the field in the UK. Instead, after a rough, non-exhaustive and non-comprehensive sketch of some work within the UK, I will proceed with examples from a series of projects that I have been involved with as part of my research as a doctoral student, a post doctoral researcher and now as a lecturer. I will exemplify three of these projects and close with a few references to work that is now in development.

[30] *http://www.uea.ac.uk/~m011 and e.nardi@uea.ac.uk*

[31] I would like to offer my thanks to the organisers of the National Seminar, and Michèle Artigue, for the invitation. Opportunities to converse with French colleagues, despite the very small geographical distance between France and the UK, are rare and I do hope that this may mark a beginning for such conversations.

II. A SHORT ACCOUNT OF RELEVANT WORK IN THE UK: ALERTED SENSIBILITIES TO THE COMPLEXITY OF UNIVERSITY MATHEMATICS

As stated above this short account of relevant work in the UK is non-exhaustive and non-comprehensive. In fact I will merely address here a theme which seems to be a serious concern for a number of researchers in the UK: the transition from informal to formal mathematics as this is materialised in the transition from secondary education to university studies in mathematics.

This parallel is not drawn carelessly: it is based on curriculum dichotomies that have determined for at least the last 15-20 years the nature of the learners' mathematical experiences at school level. And this experience has been informal, intuitive, minimally symbolic and nearly non-logical. Because the National Curriculum (1999) for secondary education is now in a state of change and because a degree of formalisation is now on its way back into the routine of school mathematics, research on this transition has now become much more widely relevant to mathematics educators in the UK.

Apart from a number of research projects, recently funded in the area, this interest is also reflected in the works presented at BSRLM and BCME:

- BSRLM is the British Society for Research into the Learning of Mathematics. The Society convenes three times a year on a Saturday and there are discussion groups that often follow from the Advanced Mathematical Thinking Group discussions at PME or have ad-hoc themes such as curricular changes specific to the UK. The next two meetings are in November 18 in London and March 3 in Manchester. In recent years there have been efforts to combine one of the meetings with corresponding French events as an attempt to improve communication about developments in the two countries.

- BCME is the British Congress on Mathematics Education. It convenes every two years for three days. The next meeting is in Keele University, July 5-7, shortly before PME25 in Utrecht. The theme for this conference is Removing Boundaries. A part of the conference devoted to removing the boundaries between secondary and university mathematics and to involving a wider range of participants including, crucially, mathematicians is now under way.

As it will become obvious in the samples of studies on the teaching and learning of undergraduate mathematics cited here, no discourse on the transition can take place in the absence of mathematicians. In fact this lack of collaboration has had detrimental effects and has caused often unforgivable delays. To exemplify this rather strong statement, I will mention only one serious repercussion of this lack of collaboration that is now tormenting the British mathematics education community: as research into primary and secondary mathematics education developed in the last 20 years in complete disproportion to research in higher education, curriculum, teaching methods etc. at these levels shifted towards more learner-centred, participatory, practice-based learning environments in school mathematics. At the same time university teaching methods and curricula remained aloof, sometimes unaware and indifferent to these changes and often missed the change in their students' learning persona. One result of this is that mathematical studies at university level appeared to students increasingly difficult and alien (Burton & Nickson, 1992; HEFCE, 1996; London Mathematical Society, 1995).

The departments of mathematics started catching up only when the numbers of new students started falling dramatically. Their response had mainly to do with curricular changes and, recently and in some places, with enriching the beginning months of Year 1 with sessions on formal mathematical reasoning or, for example, preliminary problems that prepare the students for more formal approaches to new concepts. Here is an example of the latter: this is a question from the first problem sheet given to Year 1 students at the School of Mathematics at the University of East Anglia in their first week. Presumably it intends to smoothen the route to the formal definition of supremum, infimum and limit as well as start whispering about the use of quantifiers and other notation:

Let $x \in \Re$ have the properties that $x \geq 0$ and $\forall n \in \aleph$, $x < 1/n$. What is x?

This intention to facilitate the students' encounter with formalism and abstraction is a product of the shock of falling recruitment numbers described above (a more rounded account of these mostly curricular changes can be found in (Kahn & Hoyles, 1997)). Needless to say, another repercussion of this fall in numbers is another extremely urgent situation: the hugely decreased interest in the profession of mathematics teaching. It has now become very difficult to recruit mathematicians, let alone ones with strong degrees, to teacher training courses. But this is an issue not to be dealt with here.

Changes at university level have been restricted largely on the syllabus. Changes on teaching approaches have been slower. And my proposition is that these are the changes that can only take place as collaborative initiatives develop between mathematics educators and mathematicians. Here is an example: closer to the spirit of action research within mathematics departments, and largely as a result of the work in the longstanding, lively Advanced Mathematical Thinking community of the Education department there, in 1997 Warwick university mathematics department radically changed its presentation of first year, first term Analysis. Instead of attending a lecture course, the 253 students were divided into smaller classes and required to work in groups through a structured series of problems leading them to prove the majority of the results of the course for themselves. A standard format lecture course was run in parallel and the comparison is now being further analysed by members of the team - for further information: http://fcis1.wie.warwick.ac.uk/~MERC/ and in particular the work of Tall, Gray, and Simpson and their numerous doctorate students.

In fact the three projects exemplified here could easily stand as a metaphor for the current importance of this collaboration: Project 1 was a study of undergraduate mathematical learning where involvement of the teachers was minimal and rather of secondary importance. Project 2 shifted the attention to their perceptions of their students' difficulties observed in Project 1 and asked them to reflect on these difficulties. Finally, Project 3 was purely on these reflections and on the enactment of certain pedagogical practices. And, in the now developing Project 4, crucially the research is carried out by a mathematician and a teacher to the undergraduates herself. For subsequent projects it is intended that a larger numbers of mathematicians is involved.

Before proceeding with exemplifying the above studies, I close this section with a few more examples of the interest that the transition from school to university mathematics has stirred in the UK:

In a recent report (1999) Sutherland and Dewhurst suggest an alert to the inadequacy of the mathematical knowledge that school graduates have when they enter university studies, actually, in a number of disciplines other than mathematics. Their evidence results from a juxtaposition of the contents of the 16-19 curriculum and the requirements of the various science and mathematics departments in the country.

Similarly well-known work in the area of mathematics as a discipline that is used as a tool in other disciplines is produced by Celia Hoyles and Richard Noss and their associates at the Institute of Education in London - for more information: http://www.ioe.ac.uk/ms/index.html. Finally, for a stronger emphasis on Analysis the Electronic Newsletter on the Teaching and Learning of Undergraduate Mathematics at http://www.bham.ac.uk/ctimath/talum/newsletter/ is also a useful resource.

The above roughly sketched picture is one of alerted sensibility to the problems of the transition from school to university mathematics in the quarters of mathematics education mostly, but also slowly but gradually, in the quarters of mathematics too. In the following I zoom in from this macro picture to a micro one and exemplify the three projects I mentioned above.

III. PROJECT 1 : THE NOVICE MATHEMATICIAN'S ENCOUNTER WITH MATHEMATICAL ABSTRACTION[32]

This doctorate (1996) was a psychological study of first-year mathematics undergraduates' learning difficulties. For this purpose twenty first-year mathematics undergraduates at Oxford were observed in tutorials (weekly one-to-one sessions in which the student discusses lecture-based mathematical problems with a professional mathematician, the tutor) for two terms. Tutorials were tape-recorded and field-notes kept during observation. The students were also interviewed at the end of each term of observation. The recordings of the observed tutorials and the interviews were transcribed and submitted to an analytical process of filtering out Episodes that illuminated the novices' cognition. An analytical framework consisting of cognitive and socio-cultural theories on learning, as well as literature in the area of Advanced

[32] Projects 1 and 3 were funded by the Economic and Social Research Council and Project 2 by the Wingate Foundation. Project 4 is funded by the Nuffield Foundation

Mathematical Thinking (Tall, 1991) was applied on sets of Episodes within the mathematical areas of Foundational Analysis, Calculus, Topology, Linear Algebra and Group Theory. This topical analysis was followed by a cross-topical synthesis of themes that were found to characterise the novices' cognition. The findings were arranged in themes relating to the novices' difficulties regarding their image construction of new concepts as well as their adoption of formal mathematical practices.

The study espoused a notion of enculturation that departs from what is commonly thought in cultural psychology and anthropology as transmission of cultural practices (Bishop, 1991). Contemporary cultural theories move critically beyond a simplistic transmissive perspective. Within the culture of university mathematics, and in order to describe the systemic conventions of mathematical culture — semantic, linguistic and logical — as major determinants of a learner's cognition, this research employed Sierpinska's (1994) use of the cultural theories of E T Hall (1981/1959) and Michel Foucault; in particular, Foucault's *épistémê* and Hall's *cultural triad*. Because of its relevance to the particular aspects of the research reported here, I cite briefly the latter.

Hall recognises 'three types of consciousness, three types of emotional relations to things': the 'formal', the 'informal' and the 'technical'. In the context of mathematical culture the 'technical' level is the level 'of mathematical theories, of knowledge that is verbalised and justified in a way that is widely accepted by the community of mathematicians. At the 'formal' level, our understanding is grounded in beliefs; at the 'informal' level — in schemes of action and thought; at the 'technical' level — in rationally, justified explicit knowledge'.

Central to the purposes of the research reported here are processes taking place within the informal level of Hall's triad. This is, in Sierpinska's words, 'the level of tacit knowledge, of unspoken ways of approaching and solving problems. This is also the level of canons of rigour and implicit conventions about how, for example, to justify and present a mathematical result'. A novice's enculturation is seen here as taking place at the informal level: through the accumulation of mathematical experience shared with the expert and in the process of appropriation by an internalising imitation of the expert's cultural practices.

The themes on advanced mathematical cognition that emerged in this study can be concisely described here as features of the novice's encounter with mathematical abstraction. This encounter is seen as an enculturation/cognitive process. The new culture is Advanced Mathematics and it is introduced by an expert mathematician, the tutor. The themes around which the analysis revolved relate to

A. the novices' concept-image construction seen as

- interaction with the concept definitions and
- attempts for the construction of meaningful metaphors and raisons-d'-être of the new concepts and the new reasoning,

B. the tension between the informal-intuitive-and-verbal and formal-abstract-and-symbolic modes of thinking reflecting

- the tension between verbal and formal/symbolic language and
- the tension between informal and formal modes of reasoning.

The difficulties in formalising have been identified to be

- difficulties with the mechanics of formal mathematical reasoning , as well as,
- difficulties of applying the mechanics of formal mathematical reasoning in a well-integrated and contextualised manner.

The focus of the study was on the above outlined enculturation/mental process. Here I exemplify B. For this purpose, I cite evidence from a mathematical topic, Calculus, where the tensions between rigour and intuition were particularly vividly demonstrated. In particular, I cite a characteristic Episode, and an Interpretive Account of it (see Figure 1 before reading the Interpretive Account), from the part of the course on Series and Sequences, towards the end of February and the beginning of March of Year 1.

An Interpretive Account of the Episode: The Contrast Between Novice and Expert Approaches to Mathematical Reasoning in the Context of Convergent Series

The Novices' Finitist Attitudes Towards Infinite Sums. In this Episode, Cliff's and Cathy's attitude towards infinite sums is, in brief, to treat them as finite sums. The students subsequently apply a wide range of arithmetical operations on these finitised infinite sums:

- Cliff 'splits up' $1/r(r+k)$ as $(1/kr - 1/k(r+k))$.
- Cathy 'breaks' the (-)-(+) sum in two: (-)-0 and 0-(+). Then she removes || and calculates the two infinite sums.
- Cathy on $r^2/3^r$: $r^2=r^2-1+1=(r-1)(r+1)+1$ and breaks the infinite sum accordingly. Since $1/3^r=1/2$, she turns to calculating $(r-1)(r+1)/3^r$ which she rewrites as the sum of its term at zero plus the sum from 1 to . Breaking the infinite sum once more leads her to obtaining 1/3 $r^2/3^r$ on the right hand side of the equation. Finally by calculating $2r/3^{r+1}$ she reaches the result 3/2.

The students' treatment of the infinite sums, which are limits, as finite quantities is illustrative of the students' attitude towards and the ease with which they use the notion of rearrangement. Didactically, the danger of the overextended use of the 'right to rearrange' can be proved to the novices via exposure to the large number of cases where it does not hold. As seen in cases like continuity and differentiability, the novices' impression that infinite sums can be broken, rearranged etc. reflect their finitist views of infinity. It also reflects culturally and epistemologically embedded conceptions, or primary mathematical intuitions, about certain mathematical properties, such as the differentiability of all continuous functions, that permeate through the history of mathematics. Teaching, which is oriented towards the overcoming of these epistemological obstacles, can influence the novice's mathematical growth away from these conceptions. On the contrary, the novices' constant and biased exposure to sums that can be broken and rearranged, such as the ones in this Episode, is likely to result in the perpetuation of these conceptions.

The Contrast Between the Expert's Embedded and Sophisticated Approach and the Novice's Decontextualised Technique. Cathy's way of evaluating the sum in SS7.1iv is a refreshing, back-to-arithmetical basics approach. It is not terribly elegant (a few of her 'moves' are repetitive and circular such as writing r^2 as r^2-1+1, moving 1/3 inside and outside the several times, etc.) but it is pragmatic and straightforward. It has the feel of handy arithmetic and does show skill and imaginative capacity. I note however that only ostensibly Cathy's solution is basic and arithmetical (the only piece of previous knowledge she explicitly employs is that $1/3^r=1/2$). This is a deceptive appearance since, behind Cathy's rearrangements, lies the theory that makes them possible. What Cathy seems to be doing here is unconsciously reducing infinity to the finite rules of a game she knows well, namely manipulating algebraic quantities.

On the other hand the tutor's approach is a formal and elegant shortcut in resonance with the material the students have been taught at lectures and the techniques they will need. It is, in other words, a contextualised choice of technique which is generalisable to a large number of infinite sums. It has the benefit of hindsight and of globality. It shows an expert handling, an informed awareness of the facilities available to the craftsman ($x^r=1/1-x$, letting $f(x)$ be 1/1-x, calculating f' and f'' and noting that f'' can be written in terms of f and f') as opposed to Cathy's decontextualised, hence slightly primitive approach.

None of the above is meant to diminish Cathy's efficient approach which (the dangers of naive rearrangement of the terms in a series aside) yields the correct answer. It only aims at highlighting the inclination of the novice to resort to familiar (here: handling of algebraic expressions) modes of operating at the expense of adopting new, potentially more contextualised and efficient ones.

A conclusion: In this Episode, the novices' inclination to treat infinite sums as finite quantities was demonstrated and attributed to deeply embedded epistemological beliefs and to the novices' biased exposure to infinite sums that can be harmlessly evaluated with finite techniques. Moreover two approaches to the evaluation of an infinite sum were juxtaposed:

- the novice's basic and arithmetical finitist one, and
- the expert's contextualised, concise and sophisticated and, possibly generalisable to a number of cases, one.

The novice's attitude was attributed to a habitual regression to familiar modes of thinking (manipulation of algebraic quantities) despite the novel experiences of alternative, newer techniques.

In the above, there are brief references to a pedagogy that could be employed towards modifying the novices' decontextualised approaches. In the samples from Projects 2 and 3, the tutors' reflections and actions on this and other relevant issues are examined. In this sense Projects 2 and 3 signify a logical shift: as Project 1 has highlighted certain approaches in the students' learning, these projects concern the teachers' interpretation as well as pedagogical action regarding these approaches.

Figure 1

Example of Project 1: **A Characteristic Episode**

Context: *This is the beginning of the tutorial for students Cathy and Cliff. They are discussing SS7, that is the 7th problem sheet on Series and Sequences to be dealt with in this term. Here they discuss the first question, SS7.1:*

SS7.1

From an old Mods paper.) Evaluate the following infinite sums, giving reason or your answers:

$$(i)\ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r(r+k)},\ \text{where } k \text{ is an integer, } k \geq 1,$$

$$(ii)\ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r(2r+1)}, \qquad (iii)\ \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{-|x+r|}\ (0 \leq x \leq 1), \qquad (iv)\ \sum_{r=1}^{\infty} r^2/3^r$$

The Episode:

The session begins with SS7.1. Cliff had problems with SS7.1iv and the tutor promises to come back to it once they have worked on i and ii. So he invites Cliff to present SS7.1i. Cliff 'splits up' *$\Sigma 1/r(r+k)$ as $\Sigma(1/kr - 1/k(r+k))$ and subsequently calculates the infinite sum. The* *tutor agrees but suggests the more* 'formally acceptable' *way of doing the same not on the infinite sum, but the finite sums and then taking the limit. SS7.1ii was similar.*

The tutor then asks Cathy to outline what she did in SS7.1iii: she broke the (-∞)-(+∞) sum in two: (-∞)-0 and 0-(+∞). Then she removed || and calculated the two infinite sums. The tutor agrees and asks Cathy to present SS7.1iv (left column of the following table). The tutor agrees and illustrates an alternative way (right column of the following table).

Cathy's Way	*The Tutor's Way*
$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{r^2}{3^r} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r^2-1+1}{3^r}$ $= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(r+1)(r-1)}{3^r} \qquad S_\infty = \frac{1}{2}$	*Note that if* $f(x) = \sum_1^\infty x^r = \frac{1}{1-x}$ then $f'(x) = \sum_1^\infty r x^{r-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ and
$= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(r+1)(r-1)}{3^r} + \frac{1}{2}$ $= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{r(r+2)}{3^r} + \frac{1}{2}$ $= \frac{1}{3} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r(r+2)}{3^r} + \frac{1}{2}$ $= \frac{1}{3} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r^2}{3^r} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2r}{3^r} + \frac{1}{2}$	$f''(x) = \sum_1^\infty r(r-1)x^{r-2}$ Then by writing f'' in terms of f' and f, and for $x = \frac{1}{3}$, it turns out that $\sum \frac{r^2}{3^r} = \frac{3}{2}$
$\frac{2}{3} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r^2}{3^r} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2r}{3^{r+1}} + \frac{1}{2}$ $= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{3r}{3^{r+1}} - \frac{r}{3^{r+1}} + \frac{1}{2}$ $= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r}{3^r} - \frac{r}{3^{r+1}} + \frac{1}{2}$ $= (\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{2}{9} - \frac{2}{27} + \frac{3}{27} \cdots) + \frac{1}{2}$ $= (\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} \cdots) = \frac{1}{2}$ $+ \frac{1}{2}$	
so $\sum \frac{r^2}{3^r} = \frac{3}{2}$	

The same technique, continues the tutor, which allows us to differentiate an infinite sum term by term applies to another question from the same sheet, on power series.

IV. PROJECT 2 : THE TUTOR'S PERCEPTIONS OF THE NOVICE MATHEMATICIAN'S LEARNING DIFFICULTIES

In a small-scale follow-up to Project 1 the tutors were invited to reflect and comment upon samples of data and analysis from the doctorate for the following primary aims: to provide feedback to the tutors who participated in the doctorate and enrich its findings by including the participant tutors' point of view; to introduce a pedagogical dimension in the psychological discourse developed in the doctorate; and to inaugurate a collaboration between mathematicians and mathematics educators involved in a subsequent larger-scale project (Project 3) in the development of discourse and methodology. For these purposes, three tutors who participated in the doctorate were invited to participate in a series of semi-structured interviews. This choice resides theoretically in the methodological considerations, in particular regarding the interviewing of the students, in (Nardi, 1996) and in the literature regarding the teachers' reflections on their own pedagogical practices (e.g. Brown & McIntyre, 1993). The study espouses Schon's (1990) claim that we 'can learn from a careful examination of artistry, that is, the competence by which practitioners actually handle the indeterminate zones of practice - however this competence may relate to technical rationality':

> 'The central problem inherent in examining artistry in any profession stems from the fact that it is very difficult for an observer of the artist at work to "see" exactly how the artist acts and reasons; neither is the artist usually able to articulate in detail what underpins his thought and action.'

This is Polanyi's (1967) 'tacit knowledge'. Moreover Schon (1990) asserts that

> '[through] countless acts of attention and inattention, naming, sense-making, boundary setting and control, [practitioners] make and maintain the worlds matched to their professional knowledge and know-how. They have .. . a particular professional way of seeing their world and a way of constructing and maintaining the world as they see it.'

A major consideration here was that 'when teachers plan and prepare their teaching much of what they do is subconscious and draws upon knowledge that has become internalised over the years' (Jennings and Dunne, 1994). In these interviews the tutors were asked to 'bring to consciousness these areas of knowledge by examining their teaching in a structured way' (Jennings and Dunne, 1994). Thus it was intended that tacit 'processes and reasoning that underlie their practice' would become explicit.

Prior to the interviews the tutors were presented with samples of the data, transcribed extracts from the tutorials, and the analysis, presented in the doctorate. The samples were deliberately chosen to trigger tutors' reflection upon the students' learning processes, their own teaching actions as well as their response to the analysis in (Nardi, 1996). The interviewees were informed of this agenda in a note covering the samples of data and analysis that were to be discussed. Here I exemplify one theme that emerged from the analysis of the interviews (more details can be found in (Nardi, 1999)): ***the students' confusion about what knowledge they are allowed to assume.***

A School - University Conflict. An issue which was quite prevalent in the analysis in (Nardi, 1996) regarding what constitutes the transition from school to university mathematical thinking problematic was, not only the students' lack of awareness of what necessitates and constitutes proof in mathematics, but also, their confusion as to what part of the mathematics they learnt in school they are still allowed to use. While, especially in the first term, still struggling with the idea of building up mathematical ideas on axiomatic reasoning and deduction, the students develop a sensitivity about their previous knowledge which often leads them to take their tutors' cautionary comments to extremist approaches such as 'wipe out all previous knowledge of maths'. The students seem to be totally at sea at this stage:

> *Tutor 2:* Even later as well. And it's still a problem with me: certainly when you are presented with a school's question and you think 'well, where am I supposed to start?'.
>
> *Interviewer:* How do you cope with that?
>
> *Tutor 2:* You just have to make your best guess. What seems, what actually producing in an answer that you think is going to be appropriate.

Interviewer: Em, how would you cope with a student who said something like 'can I assume the existence of the irrational numbers?' or [...] when they say 'can we use the algebra of limits? Isn't it imprecise?' even though they have seen the proofs in the Continuity course but they don't accept ...

Tutor 2: ...that it's going to work in general. [...] They certainly do em, I mean, in the questions I set them, I try to make clear to them what they can assume, or what they can't, or make it clear from the context where it is they are working from. Em, but you can still get misunderstandings where they thought they had to prove something which was originally there for them to use.

The tutors, even though they acknowledged that they were occasionally troubled by the issue, were not as keen to elaborate. As more generally with regard to clarifying the rules of the formal mathematical game, this is an area where a reconsideration of teaching practices seemed impertinent.

An Inter-University Course Conflict Conflicting perceptions of mathematical validity do not only occur between school and university mathematics; they also occur between different first-year courses. In the case of this study these courses were Continuity-and-Differentiability and Analytical-and-Numerical-Methods: in the former the students are allowed to assume and use only theorems that have been proved; in the latter they use mathematical methods regardless of prior rigorous establishment. The tutors acknowledge this problem unanimously. For example:

Tutor 2: ...they wouldn't know what no... yeah. And again I think it's due to the difference between pure maths and applied maths. Em, ... *[pause]* I hope we do make it clear that in the applied areas we are really talking about the methods, it's the method we are worried about, the method we are applying and not justifying it, [that there are] different approaches to the different subjects.

And:

Tutor 3: [It is] interesting that there is another game they have to learn: to play some subjects by different rules than others as far as standard of rigour it goes and so on. And yes, certainly I have students who have difficulty with that.

But also they add that making the distinction explicit is part of their standard tutoring role:

Tutor 1: ... I am trying to give them methods for evaluation of what is em, better, that is say giving them a critical apparatus, giving them a way of evaluating that these arguments are more satisfying than those because they can be taken back to First Principles, they are much more quicker and so on. Em,...

And:

Tutor 3: Oh, I think it should be explained to them. Quite openly. That there are quite different sets of rules. Otherwise how are they supposed to guess that?

Beyond an articulate acknowledgement of the problem and also expressing a willingness to make these 'rules of the game' explicit, the tutors were less inclined to talk about transforming this necessary help to their students in more institutional ways.

An Intra-University Course Conflict. The tutors touched upon inconsistencies analogous to the School - University and the Inter - University Course ones even within the same course:

Tutor 3: And the same phenomenon appears even within a given course that different parts are played with different rules. For instance you might be discussing continuity and differentiability and the Mean Value Theorem in very rigorous terms but then on some examples you maybe using the sine function, say, which you've never defined, and you're still going to assume properties like what the derivative of it is and so on. For the purposes of illustration, you have to learn also ... so that's another business where the rules vary according the different topics or aspects of the same course even.

The tutors agreed that these varying rules ought to be clarified as they seem to contribute to the piling 'fuzziness' (Briginshaw, 1987) about the rules of the formal mathematical game that their students need to adjust to. However they didn't seem to have an explicit agenda of how this clarification takes place in their tutorials and there was little evidence of it in their tutorials (Nardi, 1996). Project 3 sought more evidence on this crucial issue.

V. PROJECT 3 : THE UNDERGRADUATE MATHEMATICS TEACHING PROJECT

UMTP, the Undergraduate Mathematics Teaching Project, was a one-year clinical partnership with university mathematics teachers at Oxford which aimed at examining current thinking and practices in mathematics teaching at first-year undergraduate level. As in Project 1, tutorials to the first year mathematics undergraduates were observed and, as in Project 2, these observations were followed by semi-structured interviews with the tutors. In addition, and as part of the clinical-partnership methodology espoused in this project (Wagner, 1997), partners' meetings were held where various stages of analysis were discussed with the tutors. More details of this methodology can be found at: http://users.ox.ac.uk/~heg/esrc/ and in the team's various publications: in brief, this methodology consists of a filtering out of Episodes from the interviews with the tutors, episode coding and a multi-level episode characterisation. For example, here I exemplify one level of episode characterisation that is dealt with in (Nardi, Jaworski & Hegedus, in preparation). In this characterisation process, a spectrum of *pedagogic awareness*, or *development* detailed in four 'levels' emerged. These four levels can be described as follows:

I Naive and Dismissive: acknowledging ignorance of pedagogy; recognition of student difficulties with little reasoned attention to their origin or to teaching approaches that might enable students to overcome difficulty.

II Intuitive and Questioning: Implicit and hard to articulate but identifiable pedagogic thinking; recognition of student's difficulties with intuition into their resolution, and questioning of what approaches might help students.

III Reflective and Analytic: Evidence of awareness; starting to articulate pedagogic approaches; reflection enables making strategies explicit; clearer recognition of teaching issues related to students' difficulties and analysis of possibilities in addressing them.

IV Confident and Articulate: Considered and developed pedagogic approaches designed to address recognised issues; recognition and articulation of students' difficulties with certain well-worked-out teaching strategies for addressing them; recognition of issues and critiquing of practice.

The term 'spectrum' is used to indicate a sense of continuum, with sharp points. Episodes might fit neatly into a category but, more typically, characteristics would shade between categories. These are not categories of teacher or tutor. They reflect particular teaching events or approaches: different tutors exhibited different characteristics at different times. The nature of the research, in asking tutors about their teaching, encouraged (or maybe even required) tutors to reflect on their teaching. Research has shown that such encouragement leads to teachers taking a more questioning, enquiring and articulate attitude to their teaching (Jaworski, 1994). It is possible, therefore, that this pedagogic articulation and development is to some extent outcomes of the research itself. In the following I offer extracts from the Episodes to illustrate the four levels in the above spectrum.

Example of Level 1. The new habitat of mathematics: enculturation versus construction. When a tutor had demonstrated a certain arrested acknowledgement of the students' difficulty, s/he was often similarly apprehensive about the role of teaching in overcoming this difficulty. In an Episode that was collected early during fieldwork, the tutor's claims that proving in Analysis and in Abstract Algebra requires two very different mindsets (subtle manipulation of heavy new notation versus 'silly little tricks') are followed by statements of helplessness on how to teach these differences:

> *Tutor F:* I still just don't know how to teach it because a lot of this group theory is going to be manipulations of symbols and silly little tricks. And I now understand this. I mean the fact that you just conjugate things and stick a sigma on one side and a sigma inverse on the other makes a lot of sense to me but they still have changed bases on a matrix in, you know, in any course and, and that's so absolutely fundamental and it's going to underlie so much of what they do.

And of exasperation with the little time he has for such a demanding task:

Tutor F: You know, really I should just take an hour and explain that to them. Um 'cause you know I inevitably can't explain it very well in five minutes. All I can do is try and convince them it's a natural thing to do and that they shouldn't worry about it and that they will see it a lot. Just be happy with it.

In the first quotation the tutor offers the example of conjugation as an illustration of what aspects of Abstract Algebra the students' cognitive infrastructure may not yet be ready to sustain. This observation is juxtaposed with his acquired ease. However a further step of this juxtaposition - could re-evoking the way he acquired this ease suggest such a way for his students? - is not taken. Nevertheless coming from a tutor who often attributes lack of understanding to indifference or lack of innate ability (in data omitted here) this attitude of concern and alert responsibility is refreshing and promising.

In the second quotation traces of a pedagogical strategy are evident where the significance of the learning difficulty is acknowledged as having to be matched by proportionate explaining time. What is unsettling though is the resort to a perception of this mode of thinking in Abstract Algebra as 'natural', temporarily inexplicable and acquired only by habit (as opposed to acquired by understanding). Later on in the Episode, in a passage omitted here, he exemplifies the above suggestion with an illustration of quotient groups in diagrammatic form. At Stage I, the tutor's role is described mostly in terms of enculturation of the students into what is perceived by the tutors to be the natural habitat of mathematics.

In sum, at Level 1, the teachers acknowledge student difficulty. However their attempts to analyse this difficulty amount to generalisations that evade the specificity of the difficulties (e.g. students' lack of sufficient effort in the particular course; contamination from previous insufficiently rigorous school mathematical experiences). Moreover these attempts are often characterised by a somewhat fatalistic belief in a natural, non transferable procession of learning.

Example of Level 2. The role of 'tricks' in mathematics. Various tutors in this study have discussed the issue of using 'tricks' in mathematics. Some show disdain for the word, others use it more flexibly. For example, Tutor D explained in one Episode how one trick actually can be viewed as an algebraic technique in Analysis as it is transferable to other situations (what differentiates a trick from a technique is this transferability). In that Episode the mathematical problem concerned two functions f and g which are continuous at a, and the question asked whether the max $\{f, g\}$ is continuous at a. The tutor used the expression:

$$\max\{f,g\} = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}$$

He called its use 'a sneaky trick' when it was first used, but then called it a formula after its use. He acknowledged the students' difficulty, as this is a less than 'natural' or immediate expression relating to the concept of maximum. Naturality is often associated by the tutors with ease of understanding: in fact what is a mathematical trick often becomes a pedagogical one, namely how to overcome the alienation that the abrupt introduction of such an expression may cause to the students. This is a case, often encountered in these tutorials of the difficulties of Chevallard's didactical transposition (or more in terms of the analytical tools used in this project: the difficulties of constituting pedagogical content knowledge ((Even, 1993)) and is a major issue in undergraduate mathematics teaching where the introduction of such expressions is necessary hence very common. Picking a suitable epsilon when proving limits is another example of this.

'Developing an arsenal of techniques' is the pedagogical aim that this and other tutors mentioned in this context as a major aspect of their role. Tutor D explained that after he had introduced this expression and exemplified its utility as an analytic expression it might then be stored by the student (in a 'toolbox' or repertoire of techniques/expressions advocated by this and other tutors) and retrieved when necessary again. The tutor acknowledges the students' difficulties and is also aware that his teaching style might have appeared a little forced from the perspective of the students. He believes though, that even if the expression does appear to have been utilised without any formal introduction, it is his responsibility to increase the students' mathematical awareness with *techniques* and *tricks* such as these. He explains how they would not have been shown this expression *per se* in an Analysis course or, even if they had, have had a recollection to use it - 'it isn't the natural way you see it when you see the maximum of f and g'.

It appears that the tutor believes he must not only introduce them to certain useful formula which have a variety of applications but that he must highlight the necessity to operate flexibly with such expressions in a variety of mathematical contexts. The tutor operates in this manner because he believes that the students would not initially think in this manner, at this stage.

In sum, at Level 2, the tutors acknowledge student difficulty and engage with attempts to analyse this difficulty. These attempts demonstrate a sensitivity to the cognitive strain that the complexity of certain mathematical actions may incur (for example the introduction of 'tricky' expressions that have the appearance of a *deus-ex-machina* in a proof). The analysis does not always move a great deal beyond a sensitive acknowledgement (e.g. of the students' limited capacity for identifying elegant solutions that bypass routine but longwinded applications of definitions; or of the students' view of proof as a redundant activity for intuitively obvious statements) but sometimes it seems to lead to a reconsideration of their role: so, for example, unpacking these 'tricky expressions', highlighting swifter, more elegant solutions to the ones offered by the students, stressing the centrality of proof. Juxtaposed to the incidents at Level 1, here there is at least an intent to focus and dissect the specific difficulty. What seems to be missing is the sharpness and depth of this dissection.

Example of Level 3. Coping with the students' reluctance to apply formal definitions. Evident mostly in the context of Analysis where the students are less keen on applying the formal definition of limit in order to explore the continuity of a function than quoting the algebra of limits, this poses a challenge to the tutors for whom the ability to apply these definitions is indispensable.

An example is offered in an Episode, where the tutor attempts to demystify the use of a particular 'trick' (picking $\varepsilon/2$ in proving the infimum of the set $S+T$) by alluding to its repeated use, e.g. in proving that if f and g are continuous then $f+g$ is also continuous. Before suggesting $\varepsilon/2$ however he tries in vain to 'get it out of them'. Failing that, he decides to 'drag them through' it. Later he attributes the difficulty with eliciting this from the students to their reluctance to employ δ-ε definitions. From an uncompromising 'getting it out of them' to a more realistic 'dragging through', the tutor finally attempts to make the latter smoother by embedding it to previous experience.

Tutor 4 accepts that once manipulation of the logical propositions in the definitions is understood, then there is a small number of associated tricks (picking $\varepsilon/2$ instead of ε, so that in the final accumulation of parts of the inequality the total sum is a whole ε, is one of them) one needs to master. He cites 'a lot of practice' as the way to acquire this skill. And, even though he accepts that demonstrating these tricks is part of his role, he nevertheless makes a distinction based on the students' own ability with regard to when this understanding 'clicks'.

A discrepancy can perhaps be traced in this tutor's words: whereas his pedagogical priorities with regard to his students' understanding of the picking-$\varepsilon/2$ trick ('getting it out of them', embedding in previous experience) seem to be quite constructivist in the particular practice, his final comments with regard to his students' attitude towards δ-ε definitions in general are more pedagogically passive. A significant element in this discrepancy is that it is more frequently encountered in reverse order: tutors express more liberal intentions than their actual practice indicates.

In sum, at Level 3, the attempts at the enculturation exemplified in the incidents at Levels 1 and 2, begin to resemble more a process of facilitating the students' construction of mathematical meaning than an induction process. The consideration of the students' needs is clear and informs directly pedagogical practice.

To promote further the tutors' inclination towards the formulation of solid pedagogical approaches, one might consider what such an expert pedagogic approach might look like. Take for example the above Episode: this 'getting it out' process could include the following steps:

> a. what happens when $\varepsilon/2$ is used? Demonstrate and discuss (students are invited to articulate their observations).
> b. what happens if another $f(\varepsilon)$ is chosen? Students are asked to work on this idea jointly and find out what happens.
> c. how can one see originally that $\varepsilon/2$ is an appropriate choice? Students are invited to discuss and an awareness of the usefulness of this method is built up.

a-c form a pedagogical approach that makes use of a number of pedagogical strategies (demonstrate, facilitate discussion, require articulation, facilitate joint work etc.). Educational theory demonstrates that these approaches lead to the development of the students' awareness and cognitive restructuring - in other words, learning.

Example of Level 4. On disentangling misconceptions. Having identified 'common misconceptions' and having decided to tackle them in the tutorials, the tutors in Episodes that were characterised as being at Level 2, for example, plainly caution the students against those (sometimes with resolute interventions that 'knock [the misconception] on the head before it persisted' as Tutor F proposed in oe such Episode). Often however the tutors' strategy involves a greater degree of devolving responsibility for disentangling misconceptions to the students themselves and invite them to do so by reflecting on their own thought processes.

An example is offered in an Episode where Tutor D discussed the students' finitist attitudes towards series. In this, the tutor contends that mere demonstration of a misconception will not be sufficient for its overcoming by the student if not coupled with a self-reflective attitude and with an accumulation of an 'arsenal' of appropriate examples and techniques:

> *Tutor D:* ... and if they actually took a step back and thought about it, they'd probably realise that and things that they know like, you say to them, 'Well it's not enough to check, check the term tends to zero for an infinite series', they say, 'Oh, yes, of course, we know sigma one over n and yet all through their work *[laughs]* is that just checking the term tends to zero. Er, in some ways it's getting them to handle better, getting them to have an overview of what they know and of what they ought to know but you don't know... [...] once you've developed the arsenal to attack these problems, er, they're much easier but the thing is you come into it cold with no ... no example, not really many examples and it's really developing the example.

The above expression of pedagogical intentions has materialised in the tutorials of Tutor D variably: certainly this tutor has been observed to avoid the direct instruction he seems to object to in the above; less clear however is how he has been facilitating his students in accumulating this 'arsenal' of techniques and examples.

A clearer statement on this matter is obtained by Tutor F who advocates an arsenal of counterexamples that 'encapsulate the issue' (here 'a repertoire of horrible functions' such as

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \Re \setminus Q \\ -1 & \text{if } x \in Q \end{cases}$$

that encapsulate a visual understanding of discontinuity). These 'horrible' images, he contends, can 'make your naive pictures go' and he cites the above examples on discontinuity as well as examples from Linear Algebra where to convince that there is no unique complement of a subspace he uses three different one dimensional subspaces of $\Re^2$.

In sum, at Level 4, the pedagogical strategies regarding the enculturation exemplified in the incidents at previous stages are supplemented by a clear attempt to engage the students with their own learning; to make them active participants in the construction of new mathematical meaning. These strategies included elaboration on the following issues: the construction of new concepts; proving; disentangling misconceptions; contextualising the use of analytical tools optimally; highlighting the transferability of a technique rather than dwelling on mastering its execution; overcoming the inefficiency of a compartmentalised view of mathematics; devolving responsibility for learning; employing empathetic methods (pretend ignorance of sophisticated methods) to achieve consideration of students' needs; genetic decomposition. Engaging the students in this process is implied in their intentions and also substantially, if not totally, enacted.

VI. PROJECT 4 : ONWORS / THE FUTURE

I close with a short reference to developments from Projects 1-3 that are currently in progress

Project 4: This is a small-scale study of the transition from informal (school) to formal (university) mathematical writing and will discuss a set of foci of caution and action for the teacher of mathematics at undergraduate level which have resulted from a scrutiny of 60 first-year UEA undergraduates' written responses to proving tasks in Analysis and Linear Algebra. This project commenced in October 2000.

The Proof 2000 Project: This study integrates the findings from the previous studies at Oxford University (Projects 1-3) on the first-year undergraduates' learning difficulties in the encounter with the abstractions of advanced mathematics and on their teachers' responses to and interpretations of these difficulties - in which the students' problematic transition to formal mathematical reasoning and proof at university level was partly attributed to their limited relevant experiences at school level - into a pedagogical investigation of the reasserted presence of formal mathematical reasoning and proof in the National Curriculum and the Advanced Level Syllabus due for implementation in secondary schools from September 2000.

An Investigation Into the Continuing Shortage of Mathematics and Science Teachers: the Role of Pupil Experiences of Mathematics and Science in School in Choosing a Career as a Mathematics or Science Teacher. Response regarding the funding of this project will be known in mid-November 2000. Following relevant research carried out previously in the University of East Anglia, the proposed study will investigate *how, if at all, the pupils' experiences of mathematics and science teaching in school influence the pursuit of further studies and a career in mathematics or science teaching.* In the first instance the investigation will be conducted by means of a literature review that highlights aspects of this influence. A questionnaire will then be designed and administered to Year 9-13 pupils, mathematics and science undergraduates, PGCE students and school and university teachers. It is intended that the subsequent data analysis will illuminate directions which can be taken in order to attract more candidates for the teaching profession in mathematics and science. The proposed research will utilise the participating researchers' and consultants' strong and wide network of contacts with secondary schools in the counties of Norfolk and Suffolk and with the mathematics and science Schools of this University. Moreover, if awarded a grant for a second phase, this investigation will be extended to an application and evaluation of the recommendations for action suggested in the first phase.

For more information on Elena's work:

http://www.uea.ac.uk/~m011 and e.nardi@uea.ac.uk

REFERENCES AND FURTHER INFORMATION

The International Group of Psychology in Mathematics Education - Discussion Group on Advanced Mathematical Thinking. http://members.tripod.com/~IGPME/

Department for Education and Employment. 1999. The National Curriculum for England. *DfEE and QCA*

BSRLM is the British Society for Research into the Learning of Mathematics. We convene three times a year for a Saturday and there are discussion groups that often follow from the Advanced Mathematical Thinking Group discussions at PME or have ad-hoc themes such as curricular changes specific to the UK. The next two meetings are in November 18 in London and March 3 in Manchester.

BCME is the British Congress on Mathematics Education. We convene every two years for three days. The next meeting is in Keele University, July 5-7, just before PME in Utrecht.

Burton, L. & Nickson, M. 1992. Access to Mathematics for Higher Education. *Report of the synonymous project. University of Birmingham.*

HEFCE. 1996. Mathematics Learning and Assessment: Sharing Innovative Practices . London: Arnold

London Mathematical Society. 1995. Tackling the Mathematics Problem. *London, LMS.*

Kahn, P. E. & Hoyles, C. 1997. 'The Changing Undergraduate Experience: a Case Study of Single Honours Mathematics in England and Wales'. Higher Education *22 (3), 349-362.*

The Warwick University Mathematics Education Research Centre: http://fcis1.wie.warwick.ac.uk/~MERC/

Sutherland, R. & Dewhurst, H. 1999. Mathematics Education Framework for Progression from 16-19 to Higher Education. *University of Bristol Graduate School of Education.*

The London Institute of Education Group on mathematics education research into higher Education: http://www.ioe.ac.uk/ms/index.html

The Electronic Newsletter on the Teaching and Learning of Undergraduate Mathematics: http://www.bham.ac.uk/ctimath/talum/newsletter/

Nardi, E. 1996. The Novice Mathematician's Encounter With Mathematical Abstraction: Tensions in Concept-Image Construction and Formalisation (University of Oxford, Unpublished doctoral thesis).

Tall, D. 1991. Advanced Mathematical Thinking *(Dordrecht / Boston / London, Kluwer Academic Publishers).*

Bishop, A. J. 1991 Mathematical Enculturation *(Dordrecht / Boston / London, Kluwer Academic Publishers).*

Sierpinska, A. 1994. Understanding in Mathematics *(London / Washington D.C., The Falmer Press).*

Hall, E. T. 1981/1959. The Silent Language *(New York, Anchor Press, Doubleday).*

Nardi, E. 1999. 'The Challenge of Teaching First-Year Undergraduate Mathematics: Tutors' Reflections on the Formal Mathematical Enculturation of Their Students'. In Nordic Studies in Mathematics Education *(7, 2) p.29-53.*

Brown, S. & McIntyre, D. 1993. Making Sense of Teaching *(Buckigham, Philadelphia, Open University Press).*

Schon, D. 1990. Educating the reflective practitioner: towards a new design for teaching and learning in the professions (Oxford, Jossey-Bass).

Polanyi, 1967. The Tacit Dimension *(New York, Doubleday and Co).*

Jennings, S. & Dunne, R. 1994. Training teachers of mathematics: the role of the mathematics subject tutor, Teaching Mathematics and Its Applications, *13 (2), pp.57-67.*

Briginshaw, A. 1987. Myth and reality in teaching undergraduate mathematics, International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, *18 (3), pp. 327-334.*

Wagner, J. 1997. 'The Unavoidable Intervention of Educational Research: A Framework of Reconsidering Researcher-Practitioner Cooperation.', Educational Researcher, *26 (7). 13-22*

The UMTP Website: http://users.ox.ac.uk/~heg/esrc/

Nardi, E., Jaworski, B. and Hegedus, S. [working title: From 'natural' but 'silly little tricks' to 'arsenal of techniques': A Spectrum of Pedagogical Development for the Teaching of Undergraduate Mathematics]. To be submitted to the International Journal of Mathematics Teacher Education *in 2000.*

Jaworski, B. 1994. Investigating Mathematics Teaching: a Constructivist Enquiry *(London / Washington D.C., The Falmer Press).*

Even, Ruhama. 1993. 'Subject-Matter Knowledge and Pedagogical Content Knowledge: Prospective Secondary Teachers and the Function Concept'. Journal for Research in Mathematics Education *24, 2. 94-116*

L'ENTREE DANS LE CHAMP CONCEPTUEL DE L'ANALYSE : REFORMES CURRICULAIRES, RECHERCHES DIDACTIQUES, OÙ EN EST-ON ?

Michèle Artigue[33]
DIDIREM, Université Paris 7

I. INTRODUCTION

L'enseignement des débuts de l'analyse est aujourd'hui un secteur d'enseignement déstabilisé, en crise, partout dans le monde, en dépit des différences institutionnelles et culturelles. Le symposium organisé à Genève en octobre 2000, pour commémorer les cent ans de la revue « l'Enseignement Mathématique », qui a consacré une demi-journée de ses travaux à cet enseignement, retraçant son histoire au fil du siècle et essayant de penser ses perspectives futures, l'a bien mis en évidence[34].

En quoi les connaissances didactiques acquises dans ce champ nous aident-elles à analyser et comprendre cette déstabilisation, à penser des futurs possibles pour cet enseignement ? C'est à ces questions qu'est consacré ce texte. Elles en induisent immédiatement d'autres : quelles sont, au vu, tant de l'évolution des recherches didactiques que des questions que nous renvoie le système éducatif, les questions cruciales dans le champ de la didactique de l'analyse ?

Dans ce texte, après avoir en quelque sorte planté le décor, en resituant la déstabilisation actuelle dans une histoire de l'enseignement des débuts de l'analyse, nous essaierons de pointer, dans une seconde partie, ce qu'apportent les recherches didactiques à la réflexion sur les questions qui se posent. Nous évoquerons ensuite, dans une troisième partie, les liens entre recherche didactique et réformes curriculaires, en prenant un exemple étranger : celui des USA, où le mouvement de réforme du Calculus, au niveau collégial, a eu une ampleur toute particulière. Nous essaierons enfin, en conclusion, de pointer un certain nombre de questions

[33] artigue@gauss.math.jussieu.fr
[34] On pourra se référer sur ce point aux actes de ce symposium qui seront publiés dans un numéro spécial de la revue l'Enseignement Mathématique.

qui nous semblent aujourd'hui des questions clefs pour la recherche didactique dans ce domaine.

II. UNE DESTABILISATION QUI EST LE PRODUIT D'UNE HISTOIRE

Pour comprendre la situation actuelle de l'enseignement des débuts de l'analyse, il nous semble nécessaire de percevoir l'enseignement actuel comme le produit d'une histoire et de s'intéresser donc à son évolution. C'est à travers cette histoire, qui est marquée par des caractéristiques culturelles et institutionnelles particulières, que se sont en particulier forgées des valeurs pour cet enseignement, au fil des continuités et des ruptures. Ce sont des valeurs qui nous sont, partiellement au moins, devenues transparentes, qui se sont naturalisées, mais pour comprendre la situation actuelle, pour penser des futurs possibles, il est nécessaire de les considérer comme des objets problématiques. Le regard historique va nous y aider, comme le fera, dans un registre différent, le regard sur d'autres cultures et d'autres choix d'enseignement que nous développerons, à travers l'exemple des réformes aux USA.

Lorsque l'on se penche sur l'histoire de l'enseignement des débuts de l'analyse en France, on ne peut manquer d'être frappé par le contraste saisissant entre la situation du début du siècle, que nous qualifierions volontiers d'idyllique, et la situation actuelle. C'est ce contraste que nous allons interroger, en distinguant dans l'histoire de l'enseignement au cours du siècle quatre périodes principales : la période qu'amorce la réforme de 1902 et qui couvre toute la première moitié du siècle, la période de la réforme des mathématiques modernes qui s'amorce avec la réforme des années 60, la contre-réforme des années 80 et, enfin, la situation actuelle.

1. La situation idyllique du début du siècle : l'entrée du calcul différentiel et intégral (CDI) dans l'enseignement secondaire

C'est en effet avec la réforme de 1902, et son ambition de fonder des humanités scientifiques à égalité de statut avec les humanités littéraires qui, traditionnellement, assuraient la formation des élites de la nation (Belhoste, 1996) que l'enseignement du CDI se généralise en France au niveau secondaire. Cette introduction est un succès comme l'attestent la stabilité des programmes ainsi que les nombreux textes et rapports publiés (Artigue, 1996). Ceci n'est pas un phénomène isolé. L'étude internationale lancée sur ce thème par la CIEM en 1911, dont le rapport, connu sous le nom de rapport Beke (Beke, 1914) est publié en 1914 par l'Enseignement Mathématique, le montre à l'évidence, tout en nous aidant à comprendre les ressorts de ce succès.

L'entrée du CDI est tout d'abord une entrée modeste dans un enseignement où la géométrie règne en maître. Il ne fait pas l'objet d'une rubrique séparée dans les programmes, étant intégré à la partie d'algèbre, et, par exemple, dans le programme de terminale scientifique, cette partie n'occupe qu'une page sur huit. Le CDI se veut essentiellement un calcul efficace pour faire face aux besoins tant des mathématiques, dont l'enseignement inclut à l'époque, rappelons-le, mécanique, cinématique et astronomie, que des autres disciplines scientifiques, notamment la physique. C'est un enseignement qui, sans déstabiliser le curriculum, apporte un progrès évident. Il permet de se libérer de techniques ad hoc auparavant utilisées dans un certain nombre de calculs, de proposer des méthodes simples et unifiées, libérées de la métaphysique des infinitésimaux. Ces méthodes rencontrent les canons de rigueur de l'époque. Priorité est donnée à l'outil CDI, les ambitions théoriques sont clairement limitées et cette limitation est soutenue par les mathématiciens influents de l'époque comme par exemple H. Poincaré. Ces derniers d'ailleurs produisent des ressources pour les enseignants, allant au-delà des seuls manuels du secondaire. Des ouvrages comme ceux des frères Tannery, de C. Bourlet ont un retentissement international. Cet enseignement d'une analyse algébrisée, que la culture géométrique, cinématique et mécanique aide à motiver et prendre sens, est à l'évidence un enseignement qui marche. Les pionniers qui se sont investis dans l'aventure récoltent les fruits de cet investissement et ont tout lieu de se déclarer pleinement satisfaits.

Rappelons pour compléter la description de ce contexte que cet enseignement s'adresse à une petite élite, tant côté élève que côté enseignant.

2. Le tournant du milieu du siècle : des ambitions nouvelles pour l'enseignement de l'analyse

Avec le tournant du milieu du siècle, et l'évolution du champ mathématique, l'équilibre ancien se rompt. L'enseignement de l'analyse se dote de nouvelles ambitions. Il ne s'agit plus pour lui de mettre en place un calcul fonctionnel algébrique efficace, il s'agit d'approcher le champ de l'analyse comme champ théorique où les valeurs d'approximation jouent un rôle essentiel. L'évolution s'amorce dès la réforme du début des années soixante mais, dans un contexte très marqué par la culture ancienne. Même si des définitions formelles sont introduites, il n'y a pas alors de bouleversement spectaculaire. Dans la culture ancienne, toujours dominante au lycée, des îlots se construisent où commencent à vivre les nouvelles valeurs. L'analyse des manuels des années soixante, dans leur diversité, est ici particulièrement instructive. La réforme des mathématiques modernes, au début des années 70, par sa radicalité, crée la véritable rupture, même si l'analyse est loin d'être une de ses priorités. Les exigences de rigueur, de formalisation, la centration sur les questions de fondements en sont le moteur, un moteur d'autant plus puissant qu'il transcende le champ de l'analyse. L'enseignement de l'analyse ne connaît pas cependant de crise. Il s'adresse toujours à une petite proportion de la classe d'âge et la séparation entre filières dès le début du lycée favorisent la viabilité des ambitions théoriques de la filière C, conçue par ailleurs comme filière d'excellence. La part de l'analyse, excepté en terminale C, reste d'ailleurs limitée dans des programmes où les structures algébriques tiennent le haut du pavé.

3. La contre-réforme des années 80 ou l'analyse triomphante

Si elle rejette les valeurs de la réforme des mathématiques modernes, ses ambitions théoriques et ses excès de formalisation, la contre-réforme des années 80, contrairement à ce que l'on pourrait penser, ne rejette pas l'ambition de fonder dès le lycée le champ de l'analyse comme champ de l'approximation, bien au contraire. L'effondrement de l'algèbre des structures, la disparition des éléments de théorie des ensembles, non contrebalancée par l'introduction de nouveaux champs, offre de plus à l'enseignement de l'analyse un espace où se déployer. L'analyse l'occupe effectivement et sa part relative, dans les programmes augmente substantiellement. Les valeurs de l'approximation sont fortement présentes et ce, dès la classe de seconde, soit un avant que ne débute officiellement l'enseignement de l'analyse. En témoignent les extraits suivants du programme de 1982 :

« *c) Comportement local :*

Exemple d'études au voisinage de zéro : $x \to (1+x)^2$, $x \to (1+x)^3$, $x \to 1/1+x$, $x \to \sqrt{1+x}$

Exemples d'approximation locale par une fonction affine : utilisation de majorations dans le calcul approché des valeurs d'une fonction et le calcul d'erreurs.

On entraînera ici encore les élèves à trouver des conditions suffisantes pour la mise en place de majorations, par exemple : $0 \leq \frac{1}{1+x} - (1+x) \leq 2x^2$ *sous la condition suffisante* $|x| \leq ½$. »

La progression dans ce champ de l'approximation, l'évolution des moyens pour l'étude des problèmes emblématiques de l'analyse que sont les problèmes de variation et d'optimisation, les problèmes d'approximation de nombres, organisent un paysage mathématique que l'on ne cherche plus à structurer suivant l'organisation « logique » des notions. L'analyse est ainsi, en quelque sorte triomphante, face à une géométrie qui cherche à reconstruire ses valeurs.

4. Le déclin et la crise

Les ambitions épistémologiques que s'est données la contre-réforme en analyse sont ambitieuses. Comme c'est souvent le cas, la réflexion épistémologique n'a pas été suffisamment accompagnée d'une réflexion de nature plus économique et écologique, cherchant à étudier les coûts, les conditions de viabilité des choix effectués comme nous l'avons montré par ailleurs (Artigue, 1993). L'opposition entre concepts et techniques qui se développe, dans le cadre d'un constructivisme mal compris, n'aide d'ailleurs pas à oser correctement les problèmes et en particulier à s'interroger sur le coût réel de l'opérationalisation souhaitée des techniques d'approximation. La massification rapide de l'enseignement au lycée, la réduction des horaires sur toute la scolarité secondaire, la disparition de la filière C, rendront les ambitions initiales de plus en plus irréalistes et le déclin s'amorcera inéluctablement.

La situation qui en résulte aujourd'hui est une situation de crise. Cette crise n'est pas, comme nous l'avons souligné dès le départ, un phénomène isolé et ce, même si l'évolution française que nous venons de retracer très sommairement présente des spécificités indéniables. De nombreux pays, par exemple, n'ont pas connu le phénomène de contre-réforme que nous avons vécu, la réforme des mathématiques modernes ayant été dans peu d'endroits aussi radicale que chez nous. Dans d'autres, l'enseignement de l'analyse au lycée, souvent optionnel, est resté essentiellement enseignement de calcul, au sens initial du terme, les ambitions théoriques étant réservées aux enseignements universitaires. Pourtant, quelles que soient les évolutions, le sentiment de crise est uniformément ressenti. Plusieurs raisons contribuent à l'expliquer, comme l'a montré L. Steen au Symposium de Genève déjà cité, se renforçant mutuellement par leurs interactions et nous en retiendrons ici plus particulièrement trois :

a) La place qu'occupe l'analyse dans les curricula.

Nous avons souligné l'accroissement important de la part relative de l'analyse dans les curricula au cours du $20^{\text{ème}}$ siècle. Le maintien de cette position ne va en rien de soi. Reflète-t-elle le rôle que joue l'analyse dans les mathématiques actuelles ? Reflète-t-elle les besoins sociaux et culturels de la formation en mathématiques ? Répond-t-elle aux besoins professionnels en mathématiques au sens large ? Sur tout le siècle passé, l'organisation du curriculum du lycée s'est posée en termes d'équilibres entre algèbre, géométrie et analyse. On perçoit bien les limites actuelles d'une telle organisation. Au fil du siècle, de nouveaux domaines mathématiques ont pris leur essor. L'évolution de l'informatique, celle du calcul scientifique créent des besoins mathématiques nouveaux. Les probabilités, encore marginales en mathématiques au début du siècle, sont aujourd'hui un des moteurs clefs du développement mathématique dans les domaines les plus divers. De plus en plus, on considère une familiarisation certaine avec les raisonnements mettant en jeu l'aléatoire, avec les notions statistiques, comme une composante incontournable de la formation du citoyen, s'il veut prendre la part qui lui revient dans les débats actuels de société. Peut-on en dire autant de la capacité à calculer des dérivées et intégrales ? L'analyse doit aujourd'hui justifier la place qu'elle occupe dans les curricula.

b) L'évolution technologique

Que l'enseignement de l'analyse soit resté simple calculus ou qu'il se soit donné des ambitions plus théoriques, force est de constater que, dans la plupart des pays, ce qui est réellement appris, ce qui est évalué, ne va guère au-delà d'une analyse algébrisée. C'est justement cette analyse algébrisée que les logiciels de calcul symbolique prennent en charge aujourd'hui, des logiciels implantés même sur des calculatrices. Ceci ne peut que renforcer l'idée que l'enseignement de l'analyse pourrait être drastiquement réduit sans que cela induise une réduction substantielle des compétences des élèves. Les choses sont bien sûr moins simples, mais le poids de tels arguments dans et surtout à l'extérieur de l'institution scolaire contribue à fragiliser l'enseignement de l'analyse et renforce le sentiment de crise.

c) La massification de l'enseignement au lycée

La massification de l'enseignement au lycée, l'hétérogénéité qui en résulte, l'injonction qui est faite aujourd'hui à l'Ecole d'assurer la réussite de tous les élèves, accroissent bien sûr la déstabilisation Nous n'insisterons pas plus sur cette dimension de la crise qui est sans doute celle à laquelle le monde éducatif est le plus sensible.

Aujourd'hui donc, il semble impossible d'éviter une réflexion approfondie sur :

- La place à accorder à un enseignement de l'analyse au lycée,
- les valeurs épistémologiques que l'on veut faire vivre à travers un tel enseignement,
- les différenciations nécessaires dans les ambitions et moyens de l'enseignement, suivant les profils et besoins des élèves,
- la façon de prendre en compte l'évolution technologique et d'en tirer profit,
- les moyens d'assurer la viabilité des choix curriculaires,

en n'oubliant pas, dans cette réflexion, de tirer les leçons du passé mais aussi prenant en compte le fait que le passé est révolu, que les problèmes qui sont à résoudre aujourd'hui, les contraintes et les possibilités qui conditionnent les futurs possibles, même s'ils nous paraissent par certains aspects très proches de ceux du passé, sont en fait profondément différents.

Le débat a déjà commencé, hors de la communauté des didacticiens, remontant même jusqu'aux hautes sphères de l'académie des sciences. Que peuvent apporter les recherches didactiques déjà menées à cette réflexion ? Permettent-elles une approche cohérente de ces questions ? C'est ce que nous examinerons dans la seconde partie de ce texte.

III. LES RECHERCHES DIDACTIQUES : POTENTIALITES ET LIMITES DE LEURS APPORTS

Nous ne pouvons effectivement manquer de nous interroger sur ce que les recherches didactiques menées dans ce domaine depuis plus de vingt ans ont à offrir à la réflexion. Elles ont certainement beaucoup à offrir, elles ont aussi des limites évidentes. Précisons que la vision présentée ici est toute personnelle et les points de vue développés prêtent sans doute largement à discussion. Espérons simplement qu'ils pourront contribuer à une réflexion tout à fait indispensable et à laquelle les didacticiens ne sauraient se soustraire.

Nous nous appuierons dans cette partie sur le cours que nous avions fait, il y a quatre ans, à l'école d'été de didactique sur l'évolution des problématiques en didactique de l'analyse (Artigue, 1998) ainsi que sur la synthèse sur les acquis de la recherche didactique dans l'enseignement supérieur présentée dans (Artigue, 2001). Il n'est bien sûr pas question ici de reprendre ces textes mais plutôt de chercher en quoi ils peuvent nous aider dans la réflexion.

Nous intègrerons aussi quelques travaux de recherche plus récents qui illustrent bien, selon nous, l'évolution actuelle du travail didactique dans le secteur.
Le cours à l'école d'été était structuré autour de la distinction entre trois grandes catégories d'approches : les approches épistémologiques et cognitives, les approches systémiques situationnelles, les approches institutionnelles et anthropologiques. Nous reprendrons ici cette distinction, même si elle peut paraître un peu artificielle, de nombreux travaux rentrant à des degrés divers dans chacune de ces catégories. Nous essaierons en particulier de pointer les principales convergences qui se dessinent à travers des recherches menées avec des approches didactiques distinctes, d'autre part d'éventuelles divergences.

1. Approches épistémologiques et cognitives

Une convergence évidente des résultats obtenus suivant ces approches est la reconnaissance générale de la complexité des savoirs en jeu et de la diversité des rapports que l'on peut nouer avec le champ de l'analyse.
La différenciation des rapports s'inscrit dans un certain nombre de catégorisations qui varient suivant les auteurs. Ainsi en est-il de la distinction faite entre des analyses qualifiées respectivement « d'intuitive », « d'algébrique » et de « formelle », entre « calculus » et « analyse ». Ces catégorisations restent cependant relativement floues. A quoi correspond par exemple exactement ce qui est souvent qualifié d'analyse intuitive, d'analyse algébrique ? Les critères sont rarement explicités. Les distinctions que nous avons mentionnées restent proches du langage commun. Certains chercheurs ont néanmoins vont au-delà de ce langage commun. C'est le cas pour ceux qui se situent dans le cadre des théories de la réification, dont l'APOS theory, initiée par E. Dubinsky (1991), est sans aucun doute la version la plus exploitée aujourd'hui (cf. Dubinsky & Mc Donald, 2001), car deux types de rapports aux concepts mathématiques y sont fondamentaux : des rapports de type processus et des rapports de type objet. Tall (1996), tout en se situant globalement dans ce type d'approche processus/objet, distingue, quant à lui, entre des rapports de type « enactive », qui seraient en première approximation à rapprocher de la composante intuitive, des rapports de type « manipulative », plutôt du côté processus, mais sans que cela implique réduction à des processus algébriques, et des rapports « formels », lorsque les objets sont assujettis à des définitions formelles comme celles de la notion de limite et quand le système de preuve est assujetti à ses définitions. La différenciation des rapports trouve aussi à s'exprimer dans le long cheminement qui sépare les « objets mentaux » des concepts construits, par exemple dans les

travaux du Groupe AHA à Louvain la Neuve, en Belgique (Groupe AHA, 1999). Elle peut s'exprimer aussi via la distinction entre différents statuts des concepts. C'est par exemple le cas dans les travaux de A. Robert, où est introduite la notion de concepts unificateurs, généralisateurs, formalisateurs, exploitée à la fois en analyse et en algèbre (cf. par exemple la synthèse (Robert, 1998).

Cette différenciation des rapports possibles, quelle que soit la forme qu'elle prend, sert à mettre en évidence des discontinuités, ruptures, reconstructions nécessaires à l'apprentissage, auxquelles l'enseignement est généralement trop peu sensible et les difficultés résistantes qui en résultent pour les élèves et étudiants. Elle sert aussi à nourrir des stratégies d'enseignement qui visent à permettre, mieux que les pratiques usuelles, les constructions et reconstructions nécessaires, dans un paradigme globalement constructiviste. Il y a donc là des convergences évidentes. Mais, si l'on s'intéresse aux ingénieries ou « designs » didactiques (pour ne pas hypothéquer une quelconque utilisation de la théorie des situations didactiques à la base du concept d'ingénierie didactique) qui en résultent, on ne peut manquer d'être frappé par la disparité des objets construits. Les constructions didactiques issues de l'APOS theory, par exemple, sont fondées sur une décomposition génétique des concepts cherchant à identifier les processus sous-jacents et les mécanismes d'encapsulation qui permettent l'accession au statut d'objet. Elles définissent et organisent la succession des tâches proposées aux élèves et étudiants en fonction de décompositions élaborées a priori pour tel ou tel concept puis raffinées en fonction des résultats de leur confrontation au « réel », tout en se situant dans une organisation didactique générale d'enseignement coopératif (Dubinsky, Mathews, Reynolds, 1997). Quels rapports peut-on établir avec des constructions didactiques globales comme celles du groupe AHA, fondées sur la notion d'objet mental, l'identification d'obstacles épistémologiques, le recours à des problèmes complexes souvent issus de l'histoire même du champ ? Quels rapports avec des stratégies didactiques exploitant le levier « meta » pour permettre de mettre en place des rapports satisfaisant à des concepts unificateurs et formalisateurs, l'hypothèse étant faite que ces caractéristiques empêchent une entrée essentiellement a-didactique ? Quels rapports enfin avec des stratégies didactiques qui visent la réalisation des constructions et reconstructions nécessaires dans le cadre de la théorie des situations didactiques, et la recherche de situations fondamentales, même si il est reconnu qu'un fonctionnement purement a-didactique est ici inaccessible et que les limitations des interactions avec le milieu nécessitent des médiations spécifiques de l'enseignant, complexifiant le jeu entre a-didactique et didactique, comme le montre I. Bloch dans sa thèse (cf. le texte d'I Bloch dans ce volume) ?

Ce que montre cette disparité, c'est, au-delà de la reconnaissance partagée de phénomènes cognitifs essentiels, la diversité et l'incommensurabilité en quelque sorte des visions sur la façon dont se constituent les rapports et de la façon dont ils sont susceptibles d'évoluer. Nous voudrions, à ce point de l'exposé, pointer quelques caractéristiques de cette diversité.

a) Obstacles / Reconstructions

Si tous les chercheurs reconnaissent que l'apprentissage en analyse, comme l'apprentissage mathématique en général, ne peut être purement continu, la façon de théoriser les discontinuités laisse apparaître des différences profondes. La référence à la notion d'obstacle épistémologique renvoie en général aux positions les plus radicales : la connaissance scientifique se construirait par rejets successifs, et par voie de conséquence, dans les constructions didactiques, ce sont les situations qui permettent ces rejets sur lesquelles se focalise l'attention, ce sont elles qui sont tout particulièrement mises en avant et analysées, c'est sur elles que semble devoir se focaliser l'évaluation du processus didactique, le reste du travail didactique devenant, implicitement, simple affaire d'intendance. L'utilisation du terme « reconstruction » en lieu et place de celui « d'obstacle épistémologique » n'est en rien neutre. La vision n'est pas une vision en terme de rejet, c'est une vision en terme de recomposition nécessaire du paysage mathématique, une recomposition où l'ancien et le nouveau s'inscrivent dans des rapports dialectiques, où l'ancien est revisité, repositionné sans être pour autant rejeté. Il est clair que, même si les deux approches peuvent partager des sources communes au niveau des situations d'enseignement, il n'en résultera pas des constructions didactiques équivalentes.

b) Construction verticale / Construction horizontale des concepts

Parmi les approches que nous avons mentionnées, aucune aujourd'hui ne se situe dans une approche purement verticale de la construction des concepts. Même les théories de la réification, initialement fortement hierarchisées autour de la transition processus / objet et le saut cognitif de l'encapsulation, se sont faites plus dialectiques et donnent aussi aujourd'hui plus de poids aux connections entre concepts (cf. la notion de schéma correspondant au S dans l'APOS theory). Mais, même si c'est le cas, le poids respectif accordé aux deux évolutions : horizontale et verticale, reste suivant les approches très différents. Il en résulte là encore une certaine incommensurabilité des constructions didactiques particulièrement visible dans les travaux exploitant des environnements informatiques, avec d'une part des stratégies didactiques fondées sur l'exploitation de l'environnement pour favoriser des processus d'intériorisation et d'encapsulation via l'écriture de programmes, comme dans les stratégies dérivées de l'APOS theory, et d'autre part des stratégies didactiques fondées sur l'exploitation de l'environnement pour favoriser des processus d'articulation de registres sémiotiques, cette articulation étant perçue comme une composante fondamentale de la conceptualisation (cf. par exemple Borba & Confrey, 1996).

c) Contextualisation – Décontextualisation / Cognition située

Les chercheurs travaillant dans le champ de l'analyse s'accordent certainement pour reconnaître le caractère globalement contextualisé de la cognition, mais au-delà de cette reconnaissance partagée, encore une fois, la façon de percevoir cette contextualisation et les moyens de la dépasser ou, au moins d'en reculer les limites, est loin d'être uniforme. La théorie des situations didactiques met l'accent sur un jeu entre contextualisation et décontextualisation où l'institutionnalisation joue un rôle clef. A travers ce jeu, se joue en fait un jeu entre savoirs et connaissances où les savoirs, comme objets au moins partiellement décontextualisés, sont essentiels. Issus de connaissances contextualisées, ils sont aussi les ponts qui vont permettre le réinvestissement dans d'autres contextes, en se reconvertissant en connaissances. Il est évident que les constructions didactiques qui en seront déduites seront profondément différentes de celles liées à des approches théoriques, proposant des visions beaucoup plus radicales de la contextualisation et envisageant des conversions en quelque sorte horizontales de connaissances, par exemple dans les approches où la notion de métaphore joue un rôle central, comme celle liées à « l'embodied cognition », plus récente et que nous présenterons donc de façon un peu moins allusive.

Ce n'est que récemment que cette approche a commencé à investir le champ de l'analyse, avec notamment les travaux G. Lakoff et R. Nuñez (1997), et nous nous réfèrerons plus précisément ici à la recherche de R. Nuñez, L.D. Edwards et J.P. Matos (1999). « L'embodied cognition » se situe globalement dans les approches qualifiées de « situated learning », postulant qu'il n'existe pas d'activité non située et que « agent, activity and the world mutually constitute each other » » (Lave et Wenger, 1991). Elle ajoute à ces hypothèses le fait qu'il ne suffit pas, pour comprendre la cognition et l'apprentissage, de prendre en compte les facteurs sociaux et contextuels, et les processus inter-individuels qu'ils engendrent, il faut aussi prendre en compte que nous donnons sens au monde qui nous entoure, en fonction de nos déterminants biologiques et de nos expériences physiques individuelles, au rang desquelles les expériences qui mettent en jeu notre corps via le mouvement. Dans cette théorisation, « schémas- images » et métaphores jouent un rôle clef. Les schémas-image sont des primitives perceptivo-conceptuelles qui permettent la structuration d'expériences incluant des relations spatiales, tels par exemple les schémas-images d'équilibre et de verticalité. Des concepts abstraits comme celui d'équilibre sont alors vus comme des extensions conceptuelles du schéma image associé à l'expérience corporelle de l'équilibre, à de nouveaux contextes : équilibres de couleurs dans un tableau, équilibre dans une résolution d'équations.... Ces extensions se produisent grâce à des morphismes conceptuels, impliquant des métaphores conceptuelles. La thèse des auteurs est ainsi que de tels morphismes conceptuels sont à la base de beaucoup de nos connaissances mathématiques et que donc la coordination de significations basées sur un même schéma image et la pensée métaphorique jouent des rôles clefs dans l'apprentissage. Leur recherche interroge de ce point de vue le concept de continuité, un concept dont les recherches didactiques ont souligné la difficulté, en partant de la distinction classiquement opérée entre une vision intuitive de la continuité comme caractérisant un processus sans sauts, ni interruptions (la vision d'Euler d'une courbe continue comme correspondant à un tracé manuel libre sans lever le crayon) et la vision formalisée de la continuité de Cauchy-Weierstrass. En fait, il y a dans la continuité trois idées distinctes : l'idée naturelle de continuité pour une courbe, l'idée de continu liée à la complétude des réels, à « l'absence de trou », pour une courbe ou un ensemble de points et l'idée de préservation de proximité (pour une fonction). Le point de vue naturel est d'abord un point de vue cinématique lié à notre expérience du mouvement. La courbe préexiste ou est créée par le mouvement ; ce n'est pas un ensemble de points mais des points peuvent la jalonner comme les bornes sur une route, des points peuvent s'y déplacer comme un voyageur sur une route. Le langage des étudiants mais aussi celui des mathématiciens est rempli de références à cette vision cinématique de la continuité et les auteurs identifient les métaphores associées qui permettent une première conceptualisation de la notion de continuité de fonction. Les métaphores associées à la notion formelle de continuité existent elles aussi mais sont radicalement différentes. Les points y sont cette fois constitutifs de la ligne et le caractère continu de la ligne qui en résulte, qui s'exprime par « l'absence de trous », non problématique pour la conception naturelle, ne va plus de soi. La continuité d'une fonction se traduit alors par le fait que l'image d'un ensemble continu est un ensemble continu. Les auteurs de l'article cité utilisent ces analyses pour critiquer l'enseignement usuel qui établit une claire hiérarchie entre les conceptions intuitive-cinématique et ensembliste de la continuité et présente la définition en ε, η, comme celle capturant l'essence d'une continuité qui est en fait multiforme.

Ils récusent l'idée que comprendre la notion de continuité consiste à rejeter le point de vue cinématique au profit du point de vue ensembliste, même si celui-ci permet techniquement de résoudre des problèmes que le point de vue cinématique intuitif ne peut prendre en charge, et les stratégies d'enseignement qui en sont usuellement issues. On retrouve donc des débats que nous avons évoqués dans les paragraphes précédents.

L'attention portée aux déterminations biologiques de l'individu, au rôle joué par ses expériences physiques, en particulier celles liées au mouvement, dans l'apprentissage des mathématiques est sans aucun doute plus forte dans les travaux concernant le développement du rapport à l'espace et des connaissances géométriques (cf. par exemple (Longo, 1997)). En analyse, ces approches restent très marginales. Nous voudrions cependant mentionner, pour conclure ce paragraphe, la thèse en cours de M. Maschietto qui porte sur la transition algèbre-analyse (Maschietto, 2001). L'étude est centrée sur une des dimensions de cette transition : le passage d'un regard ponctuel ou global sur les objets fonctionnels, caractéristique du travail algébrique sur les fonctions, antérieur à l'analyse, à un regard local, et l'organisation du jeu dialectique entre local et global, un jeu essentiel en analyse. Ce jeu se combine, sur le plan technique, par une intégration des ordres de grandeur au calcul algébrique. Les différents termes d'une expression ne sont plus dotés d'un poids uniforme, le traitement qui en est fait est fonction des ordres de grandeurs relatifs, et repose sur la notion fondamentale de négligeabilité relative. Le calcul algébrique s'en trouve profondément renouvelé, dans ses techniques, ses modes de pilotage et de contrôle[35]. La thèse aborde ces questions en s'interrogeant en particulier sur les caractéristiques des mouvements graphiques associés au travail algébrique sur les fonctions antérieur à l'analyse et sur l'évolution des mouvements liée à l'entrée dans le champ de l'analyse. Le mouvement de zoom graphique et la métaphore de « micro-linéarité » qui lui est associée pour traduire le comportement local d'une fonction dérivable, constituent, dans l'ingénierie développée suite à ces analyses, le point d'ancrage par rapport auquel se construit le repérage des premiers invariants et s'amorce l'évolution des rapports aux objets fonctionnels. Mais la construction didactique est ici particulièrement sensible aux limites de la perception graphique en matière d'ordres d'approximation et à la nécessité de problématiser la métaphore si l'on veut l'opérationaliser efficacement. Ceci conduit à des formulations algébriques intégrant l'idée de négligeabilité et au développement

[35] Soulignons que nous nous situons ici dans une optique d'enrichissement du calcul algébrique par intégration des ordres de grandeur et d'entrée dans l'approximation via cet enrichissement, sans viser une quelconque formalisation en ε, η.

d'un calcul algébrique enrichi au sens défini plus haut, via une suite de situations dont la construction s'appuie sur les outils de la théorie des situations didactiques.

Les différences qui ont été pointées dans cette partie, on le voit bien, ne sont pas propres au champ de l'analyse même si elles s'y actualisent sous des formes spécifiques. Elles renvoient à des divergences plus fondamentales. Elles sont aussi, indirectement, de bons révélateurs des difficultés que doit affronter celui qui voudrait se fonder sur les résultats des recherches pour légitimer des stratégies d'enseignement, vu la diversité des principes cognitifs qui fondent les réalisations expérimentales et le fait que les validations de ces réalisations ne peuvent être pensées en dehors des systèmes de valeurs qui les fondent.

2. Les approches situationnelles, institutionnelles et anthropologiques

Nous avions souligné dans le cours à l'école d'été précédemment cité, les apports des approches systémiques situationnelles qui, tout en s'appuyant sur ces dernières, avaient permis de dépasser leurs limites évidentes, et la naïveté qui consiste à penser que des théories de l'enseignement sont directement déductibles de théories de l'apprentissage. Nous avions pointé les nombreux produits d'ingénierie qui en étaient issus, dans la didactique française, concernant l'enseignement au début de l'université dans les filières mathématiques. Mais nous soulignions aussi le peu de retombées de ces approches hors de la communauté des chercheurs et nous interrogions sur les conditions de viabilité des dispositifs construits, sur les effets négatifs possibles d'une certaine quête mythique de situations fondamentales. Sur ce point, la thèse d'I. Bloch, que nous avons déjà évoquée, nous semble apporter une avancée substantielle. Elle met bien en évidence en effet les limites dans ce domaine d'un fonctionnement qui se voudrait essentiellement a-didactique, en dehors peut-être de phases que l'on pourrait qualifier de « première rencontre », en reprenant la terminologie des moments d'études introduite par I. Chevallard. Mais elle montre aussi que d'autres voies sont possibles dans lesquelles les insuffisances de l'interaction élève / milieu sont compensables par des médiations appropriées de l'enseignant, sans pour autant que la responsabilité du travail mathématique passe essentiellement à sa charge. Ceci nous conduit à interroger en retour les ingénieries existantes et leurs modes de description. Force est alors de constater d'une part :

- Le poids qu'a fait peser la théorie sur les descriptions élaborées, en conduisant à centrer l'attention, comme nous le mentionnions plus haut, sur les situations les plus susceptibles d'un fonctionnement a-didactique, souvent des situations correspondant à des phases de première rencontre et d'exploration, à minimiser le rôle de l'enseignant et le modéliser de façon bien trop sommaire, à surestimer les responsabilités qui peuvent être accordées à l'élève ou à l'étudiant, en sous-estimant les contraintes de toutes sortes qui pèsent sur les systèmes didactiques et les questions de viabilité des dispositifs construits,

- La rigidité des modes de description pour des produits qui ne peuvent être des produits clefs en mains et que l'utilisateur se devra nécessairement d'adapter à son environnement particulier. Ceci impose des modes de description plus souples et qui outillent l'utilisateur pour ajuster à ses besoins et à son style propre le produit qui lui est proposé, sans pour autant en détruire les potentialités. Sur ce point, depuis plus de dix ans, la recherche didactique, au moins en France, n'a guère progressé.

L'évolution dans les approches systémiques se manifeste plutôt par l'inscription croissante des travaux dans des perspectives plus larges de nature anthropologique. Nous les mentionnions dans le cours à l'école d'été, en soulignant à l'époque, leur caractère récent en didactique de l'analyse. Deux types de travaux récents me semblent bien illustrer les potentialités offertes par ces approches :

- Des travaux sur les transitions institutionnelles en analyse, comme par exemple la thèse de F. Praslon,
- Des travaux sur l'intégration des technologies informatiques à l'enseignement de l'analyse, notamment ceux concernant l'intégration de logiciels de calcul symbolique.

F. Praslon, dans sa thèse (Praslon, 1999), a étudié la transition lycée (filière S) – université (DEUG A), en ce qui concerne la notion de dérivée (la notion centrale dans l'enseignement actuel de l'analyse au lycée) et son environnement immédiat. Il fait dans son travail l'hypothèse d'existence, vis à vis de cet objet, de deux cultures distinctes : la culture du lycée, la culture DEUG et essaie de caractériser chacune d'elles. Il s'agit, à travers cette étude, d'interroger les stéréotypes culturels qui voient dans la transition lycée / université en analyse, simplement la transition entre une analyse intuitive et une analyse formelle. Les outils d'analyse que F. Praslon construit lui permettent de montrer le caractère erroné de ce stéréotype. Les différences entre les deux cultures sont réelles mais non réductibles à une opposition aussi sommaire et, plus que quelques ruptures essentielles, ce que l'on observe, c'est une succession de micro-ruptures dans les rapports à la généralité, à la preuve, dans la complexité technique, dans l'autonomie nécessaire, dans la conception des stratégies et méthodes, dans la routinisation des techniques... qui, toutes combinées, construisent deux environnements profondément différents pour le travail de l'étudiant. Ceci lui permet de construire un éventail de tâches, à la transition de ces deux cultures, qui ne sont prises en charge ni par le lycée, ni par l'université, et constituent un véritable « trou didactique » et à étudier comment des étudiants entrant à l'université se comportent par rapport à elles, puis à construire des ateliers qui se voudraient des moyens de sensibiliser étudiants et enseignants à ces sauts culturels et de permettre de les travailler.

Les travaux sur l'intégration du calcul symbolique à l'enseignement de l'analyse comme (Artigue & Lagrange, 1999), (Guin et Trouche, 1999), (Defouad, 2000) manifestent leurs liens avec une approche anthropologique, de façon sensiblement différente. L'élargissement du regard se traduit ici par :

- D'une part, une approche de l'intégration qui met au premier plan les questions d'écologie des savoirs et de viabilité didactique, en accordant une attention particulière aux contraintes institutionnelles et à la gestion possible de ces contraintes,
- D'autre part, une approche de l'intégration qui, contrairement à beaucoup d'autres travaux portant sur les technologies informatiques, pose la question de l'instrumentation de ces technologies et développe des outils spécifiques pour l'étudier.

Le regard sur l'intégration, l'analyse de ses besoins institutionnels et didactiques s'en trouvent profondément modifiés. Une approche cognitive sur l'intégration conduit très souvent, comme le montre la recherche que nous avons menée, à plusieurs équipes, dans le cadre d'un contrat CNCRE[36], à chercher à faire de la technologie un outil d'apprentissage (de façon compatible avec l'approche de la cognition concernée) par rapport à des buts en termes de connaissances et savoirs qui, eux, sont peu questionnés et des acteurs institutionnels qui, excepté l'apprenant, sont perçus comme transparents. Les travaux cités ci-dessus montrent les limites d'une telle vision de l'intégration et aident à mieux comprendre une résistance du système éducatif dont on ne peut faire mystère. Des travaux sur l'instrumentation, comme la thèse de B. Defouad, qui propose une analyse fine de la genèse instrumentale de la TI92 pour l'étude de problèmes fonctionnels de variation, par des élèves de première S, met à jour un ensemble de questions liées à l'instrumentation et à sa gestion institutionnelle que la réflexion usuelle sur l'intégration ignore le plus souvent : développement des techniques instrumentées

[36] Le rapport consécutif à cette recherche est disponible sur le site web suivant : www. Maths.univ-rennes1. fr/~lagrange/cncre/rapport.htm

et des connaissances mathématiques et informatiques sous-jacentes, gestion institutionnelle des besoins techniques et technologiques correspondants, statut des techniques instrumentées, articulation avec les techniques et technologies associées au travail papier / crayon. La thèse montre bien la complexité des problèmes qui se posent ainsi, par exemple :

➢ la spécificité de certains besoins mathématiques de l'instrumentation de l'étude de la variation et la difficulté de négocier leur temps d'apprentissage dans un système qui, tout en prônant l'utilisation de technologies informatiques, définit ses normes et valeurs par rapport aux besoins d'un travail mathématique dans l'environnement papier / crayon,

➢ la nécessité pour motiver une instrumentation raisonnable de construire des tâches hors normes, les tâches usuelles conçues pour rendre possible et optimiser un apprentissage papier / crayon se révélant notoirement insuffisantes, et d'avoir les moyens d'assurer leur légitimité institutionnelle.

Mais la thèse montre aussi, en comparant les processus institutionnels et personnels d'instrumentation dans une classe de première S, deux années successives, que lorsque ces problèmes sont identifiés et pris en charge, la genèse instrumentale s'en trouve profondément modifiée.

Finalement, que ressort-il de ce qui précède, en termes de potentialités et limites de la recherche didactique menée à ce jour pour penser le futur de l'enseignement des débuts de l'analyse ? Sans aucun doute, sur le plan épistémologique, une meilleure identification des savoirs et connaissances susceptibles d'être engagés dans un tel enseignement, des connections existantes avec les savoirs et connaissances extérieurs au domaine, des différents rapports possibles aux savoirs de l'analyse, et sur le plan cognitif, en relation avec ce qui précède, une connaissance des difficultés majeures que présente pour les élèves et étudiants l'accès à ce nouveau champ de savoir et des outils de diagnostic associés. Sans aucun doute aussi, une meilleure connaissance des mécanismes qui ont gouverné jusqu'à présent les processus de transposition didactique dans ce domaine, du fonctionnement des systèmes didactiques, de leurs modes de réaction privilégiés aux difficultés de cet enseignement et des effets usuels de ces réactions, des contraintes auxquelles ils sont assujettis et des marges de manœuvre qui en résultent. Sans aucun doute aussi, de nombreuses constructions didactiques, en général relativement locales, qui ont été raffinées au cours d'expérimentations successives et semblent avoir permis d'approcher efficacement un certain nombre des questions posées, au moins dans un contexte expérimental. Et, enfin, plus généralement, la mise à jour de questions, de phénomènes didactiques auquel l'enseignement n'est pas ou est peu sensible, renforçant ainsi les difficultés incontournables de l'accès à ce champ. Mais, comme nous avons essayé de le montrer, ces travaux, s'ils peuvent certainement aider la réflexion à mener, ne sauraient suffire à définir une action didactique, rationnelle et contrôlée. Il y a, à cela, différents obstacles. Sans prétendre à une quelconque exhaustivité, nous en citerons trois :

- Tout d'abord, le contexte cognitif dans lequel beaucoup de ces travaux se sont construits et la connaissance claire que nous avons aujourd'hui qu'une théorie de l'apprentissage ne saurait à elle seule fonder une théorie de l'enseignement, sans même revenir sur la diversité et l'incommensurabilité des décisions didactiques auxquelles peuvent conduire les différentes centrations cognitives des travaux en didactique de l'analyse.

- Ensuite, le fait que les travaux didactiques, dans ce domaine comme dans bien d'autres, tout en reconnaissant la diversité des rapports possibles au champ de l'analyse, sont restés largement aveugles à l'analyse de la diversité des besoins, de la diversité des contraintes et des moyens, en privilégiant les filières scientifiques les plus mathématiques, et en oubliant notamment les filières techniques et technologiques.

- Enfin, le fait que la recherche concerne des systèmes dynamiques ouverts, qui évoluent sans cesse, et que les constructions didactiques qui, à un moment donné, dans un contexte donné, semblent pouvoir répondre de façon raisonnable aux questions posées, ne sont souvent plus aussi adaptées, ne serait-ce que quelques années plus tard.

En dépit de ces limites, la recherche didactique a cependant, nous semble-t-il, beaucoup à apporter à une réflexion sur l'enseignement de l'analyse aujourd'hui, au-delà de la seule contribution à l'explication de la crise actuelle. Est-elle pour autant prise en compte, sollicitée quand il s'agit de définir des projets curriculaires, de lancer des mouvements de réforme ? C'est ce que nous allons examiner dans la partie suivante de ce texte, en nous appuyant sur l'étude menée par N. Speer, de l'université de Berkeley, sur le mouvement de réforme du Calculus aux USA (Robert et Speer, 2001).

IV. RECHERCHE ET REFORME DU CALCULUS

Comme chacun sait, les quinze dernières années aux USA ont été marquées par un vaste mouvement de réforme de l'enseignement du calculus au niveau collégial, motivé par le fort taux d'échec des étudiants et la compréhension limitée du domaine attestée par ceux-là même qui réussissaient les examens, et initié par la Sloan Conference en 1986 dont les travaux ont été repris dans la publication du MAA : « A Lean and Lively Calculus » (Douglas, 1986), la même année. L'ambition, exprimée par les mots « lean » et « lively », était claire : un enseignement couvrant moins de thèmes mais de façon plus approfondie et sollicitant un engagement plus actif des étudiants. Au moment où la réforme commence à se développer, la recherche didactique dans ce domaine aux USA est encore peu développée. Les choix didactiques seront divers et le plus souvent pragmatiques. L'examen rapide des options macro-didactiques de quelques uns des projets emblématiques de la réforme le montre clairement, tout en permettant d'identifier des leviers didactiques pour la réforme que l'on retrouve dans la majorité des projets.

Pour le projet CALC, c'est le travail de recherche sur des problèmes du « monde réel », un usage intensif de la technologie, et l'accent mis sur la communication. Pour le projet « Calculus & Mathematica », c'est une approche expérimentale des mathématiques basée sur l'utilisation d'un logiciel, ici Mathematica, et la mise en place de laboratoires de mathématiques. Le projet du Harvard Consortium est un projet qui, contrairement à beaucoup d'autres, ne se contente pas de « nettoyer » les programmes existants mais crée un programme nouveau. Un levier didactique essentiel de cette construction est l'articulation de représentations sémiotiques et points de vue, exprimée via ce qui est appelé : « the rule of three » qui stipule que chaque concept doit être enseigné et compris selon des perspectives algébriques, numériques et graphiques. Il s'agit ainsi de rompre avec un calculus traditionnel dont les pratiques sont essentiellement algébriques. Enfin, le projet C4L (Calculus, Concepts, Computers and Cooperative Learning), à Purdue Université, l'université où enseigne à l'époque E. Dubinsky, est sans aucun doute un de ceux le plus étroitement lié aux recherches existantes, en particulier aux approches constructivistes décrites plus haut en termes de théories de la réification. L'approche constructiviste développée s'appuie sur des activités de laboratoire, l'utilisation de la technologie et des stratégies d'enseignement coopératif.

Ces différents leviers : introduction d'une approche plus expérimentale des mathématiques, exploitation de problèmes considérés comme plus réels, rupture avec une approche essentiellement algébrique, au bénéfice de pratiques numériques et graphiques, s'appuyant sur l'utilisation de technologies informatiques (calculatrices graphiques et logiciels de calcul symbolique essentiellement), dans une vision plus constructiviste de l'apprentissage, associée à des pratiques pédagogiques interactives et à un accent mis sur la communication et l'enseignement coopératif, fédèrent la plupart des projets (Tucker, 1995).

Comme le souligne N. Speer, la mise en place des projets de réforme s'appuya peu sur la recherche didactique existante. D'une part, la recherche au niveau collegial était à l'époque très peu développée aux USA et la recherche extérieure mal connue, d'autre part, les concepteurs de projets curriculaires ne cherchèrent pas à s'appuyer sur les travaux de recherche déjà menés au niveau de l'enseignement secondaire, travaux qui inspiraient le mouvement parallèle de rénovation des standards de l'enseignement secondaire (NCTM, 1989, 1991). Les deux mouvements restèrent isolés. Le développement de la recherche fut plutôt un des effets de la réforme et des difficultés rencontrées à prouver son efficacité. Les premières publications furent essentiellement des descriptions de projets et des textes d'opinion mais très vite, en effet, se posa la question de l'évaluation de l'impact des différents projets sur l'apprentissage des étudiants. Les méthodologies utilisées pour ces évaluations furent externes, basées sur la comparaison des performances d'étudiants ayant suivi un cursus réformé et d'étudiants ayant suivi un cursus standard, sur différentes tâches, avec l'ambition de montrer que les premiers réussissaient mieux, notamment sur les tâches qualifiées de conceptuelles. D'une part, les résultats ne furent pas toujours à la hauteur des espérances ni de l'énergie déployée, d'autre part les biais et limites de ces méthodologies furent progressivement reconnues. Même si elles parvenaient à mettre en évidence des différences statistiquement significatives entre populations, elles ne permettaient pas de les expliquer, de démonter les processus de leur production, d'identifier ce que l'on devait précisément chercher à reproduire. De plus, comparer l'efficacité de projets construits sur des principes différents et développant donc des visions différentes des objectifs à privilégier dans l'apprentissage, confronta les évaluateurs à l'impossibilité de construire une évaluation comparative scientifique, c'est à dire ne faisant pas intervenir des systèmes de valeurs extérieurs à la science (Schoenfeld, 1994). Aujourd'hui, les effets de la réforme sont encore loin d'être clarifiés, son efficacité reste problématique, mais selon N. Speer, on sent une évolution certaine. L'intérêt pour la recherche didactique au niveau collégial croît fortement et les méthodologies des travaux menés évoluent. Parallèlement cette recherche s'institutionnalise : création de l'association RUME[37], organisation de conférences annuelles,

[37] RUME : Research in Undergraduate Mathematics Education

publications avec le MAA mais aussi l'AMS[38], début d'une interaction avec la recherche au niveau secondaire (le fait que J. Ferrini Mundy dont les travaux de recherche dans le domaine du Calculus sont bien connus ait été responsable du projet de rénovation des standards qui vient de s'achever, que des chercheurs comme A. Schoenfeld s'y soient fortement impliqués, n'est sans doute pas sans effet à ce niveau).

La situation que nous venons de décrire n'a sans aucun doute rien d'exceptionnel. Même dans les pays où la recherche didactique sur l'analyse est plus développée, l'impact de cette recherche sur les changements curriculaires reste faible. L'intérêt de cette recherche, souvent très locale au vu des concepteurs de projets, est souvent mal perçu et s'il y a diffusion évidente d'une certaine culture didactique, de certaines idées, de certains concepts, c'est dans un processus qui échappe très souvent à la communauté des chercheurs. Cette communauté elle-même a d'ailleurs du mal à se situer de façon cohérente par rapport à l'action didactique. La connaissance didactique, au fur et à mesure de sa progression, nous montre bien la complexité des systèmes sur lesquels il s'agirait d'agir, et le poids de contraintes qui nous échappent. Elle incite à se méfier de l'effet de propositions didactiques dont le devenir dans le système éducatif est incontrôlable. Mais, dans le même temps, nous voudrions que ces connaissances patiemment élaborées servent effectivement à améliorer le fonctionnement du système éducatif et nous croyons aussi en avoir un peu les moyens... Le dilemme est particulièrement crucial quand il s'agit de penser les réformes curriculaires.

V. EN GUISE DE CONCLUSION, DES QUESTIONS SENSIBLES LARGEMENT OUVERTES

Nous voudrions pour conclure pointer un certain nombre d'interrogations qui ont traversé plus ou moins explicitement ce texte. Ces interrogations sont les suivantes :

- Comment, de façon cohérente, tirer parti d'apports didactiques si divers, se situant dans des approches différentes, qui souvent semblent complémentaires, mais parfois aussi semblent inconciliables ?
- Comment prendre en compte la diversité des rapports possibles aux objets de l'analyse, sans ce laisser piéger par le mythe d'un rapport idéal, peut-être celui auquel nous avons plus ou moins laborieusement accédé, en tout cas celui que la culture et l'épistémologie usuelle de l'enseignement tendent à nous faire voir comme rapport idéal ?

[38] MAA : Mathematic Association of America, AMS : American Mathematical Society

- Comment prendre en compte dans le travail didactique l'évolution des rapports entre l'analyse et les autres secteurs mathématiques, l'évolution des pratiques au sein même de l'analyse ?
- Comment penser aujourd'hui l'entrée dans le champ de l'analyse, la transition algèbre – analyse, les rapports entre analyse algébrique et approximation ?
- Comment dépasser des études locales pour s'attacher au long terme qui, seul, permet d'aborder sérieusement les questions d'écologie et de viabilité ?
- Comment prendre en charge des questions technologiques, sans cesse renouvelées ?
- Comment prendre en charge la mouvance des contextes culturels, sociaux et institutionnels ?

Et nous voudrions aussi, pour terminer, rappeler à quel point il importe pour la recherche didactique, de ne pas limiter ses centres d'intérêt à ce qui lui est le plus familier, la didactique de l'analyse en section S au lycée, dans les filières MIAS et SM à l'université, voire dans la préparation aux concours de recrutement d'enseignants de mathématiques. L'enseignement de l'analyse vit et a à vivre dans bien d'autres contextes institutionnels et l'étroitesse du regard que nous avons développé jusqu'ici est à la fois regrettable et préjudiciable, quand il s'agit de penser le futur.

BIBLIOGRAPHIE

Artigue M. (1993). Enseignement de l'analyse et fonctions de référence. *Repères IREM* n° 11, 115-139.

Artigue M. (1996). Réformes et contre-réformes dans l'enseignement de l'analyse au lycée, in B. Belhoste & al. (eds), *Les sciences au lycée – un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger*, 197-217. Editions Vuibert : Paris.

Artigue M. (1998). L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 18.2, 231-262.

Artigue M., Lagrange J.B. (1999). Instrumentation et écologie didactique de calculatrices complexes : éléments d'analyse à partir d'une expérimentation en classe de première S, in D. Guin (Eds.), *Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des* *mathématiques. Actes du colloque francophone européen de La Grande Motte*, mai 1998. IREM de Montpellier.

Artigue M. (2001). What can we learn from educational research at the university level, in D. Holton & al. (eds), *The teaching and learning of mathematics at university level: an ICMI Study*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers (to appear).

Belhoste B. (1996). Réformer ou conserver ? La place des sciences dans les transformations de l'eseignement secondaire en France (1900-1970), in B. Belhoste & al. (eds), *Les sciences au lycée – un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger*, 197-217. Editions Vuibert : Paris.

Bloch I. (2001). Situations a-didactique et paradigmes d'enseignement dans le secondaire : la notion de fonction, *in* Assude et Grugeon (Eds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, année 2000*, IREM de Paris 7.

Borba M., Confrey J. (1996). A student's construction of transformation of functions in a multiple representational environment. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 31.3, 235-268.

Defouad B. (2000). *Etude de genèses instrumentales liées à l'utilisation de calculatrices symboliques en classe de première S.* Thèse de doctorat. Université Paris 7.

Dubinsky E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, in D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, 95-126. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky E., Mathews D., Reynolds B. (1997). *Cooperative learning for undergraduate mathematics*, MAA notes vol. 44. Washington, DC : The Mathematical Association of America.

Dubinsky E., Mc Donald M. (2001). APOS : a constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research, in D. Holton & al. (eds), *The teaching and learning of mathematics at university level: an ICMI Study*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers (to appear).

Groupe AHA (Eds.) (1999). *Vers l'infini pas à pas. Approche heuristique de l'analyse. Guide méthodologique.* De Boeck Editeur, Bruxelles.

Guin D., Trouche L. (1999). Environnements « Calculatrices symboliques » : nécessité d'une socialisation des processus d'instrumentation – évolution des comportements d'élèves au cours de ces processus, in D. Guin (Eds.), *Calculatrices symboliques et géométriques dans* *l'enseignement des mathématiques. Actes du colloque francophone européen de La Grande Motte*, mai 1998. IREM de Montpellier.

Lakoff G., Nuñez R. (2000). *Where mathematics comes from : how the embodied mind brings mathematics into being.* New York : Basic Books.

Lave J., Wenger E. (1991). *Situated learning : legitimate peripheral participation.* Cambridge University Press, Cambridge.

Longo G. (1997). Géométrie, Mouvement, Espace : Cognition et Mathématiques, *Intellectica* 2, 25.

Maschietto M. (to appear). *The transition from algebra to analysis: the use of metaphors in a graphic calculator environment.* Contribution to the CERME 2 Conference.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA : The National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional standards for teaching mathematics.* Reston, VA : The National Council of Teachers of Mathematics.

Nuñez R., Edwards L.D., Matos J.P. (1999). Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 39, 45-65.

Praslon F. (1999). *Continuités et ruptures dans la transition entre terminale S et DEUG Sciences en analyse. Le cas de la dérivée et de son environnement.* Thèse de doctorat. Université Paris 7.

Robert A., Speer N. (2001). Research on the teaching and learning of calculus / elementary analysis, in D. Holton & al. (eds), *The teaching and learning of mathematics at university level: an ICMI Study.* Dordrecht : Kluwer Academic Publishers (to appear).

Robert A. (1998). Outils d'analyse des contenus à enseigner à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 18.2, 139-190.

Schoenfeld A.H. (1994). Some notes on the enterprise (research in collegiate mathematics education, that is), in E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, J. Kaput (eds), *Research in Collegiate Mathematics Education I*, vol. 4, 1-20. Providence, RI: American Mathematical Society.

Schoenfeld, A. H. (ed.) (1997). *Student assessment in calculus : a report of the NSF working group on assessment in calculus*. MAA notes vol. 43. Washington, DC : The Mathematical Association of America.

Tall D. (1996). Functions and Calculus, in A.J. Bishop al. (eds), *International Handbook of Research in Mathematics Education*, 289-325. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Tucker A. C. (ed.) (1995). *Models that work : case studies in effective undergraduate mathematics programs,* MAA notes vol. 38. Washington, DC : The Mathematical Association of America

Annexes

Programmes des séminaires

*Association pour la **Recherche** en **Didactique** des Mathématiques (ARDM)*
en association avec
DIDIREM et l'IREM de l'Université Paris 7
2 Place Jussieu, Case 7078
75251 Paris cedex 05

e-mail : assude@gauss.math.jussieu.fr
grugeon@amiens.iufm.fr

Fax 01 44 27 78 93

Paris, 01/12/99

Teresa Assude & Brigitte Grugeon
Secrétaires du Séminaire National de Didactique des Mathématiques

Madame, Monsieur,

Nous vous prions de trouver ci-contre le programme du Séminaire National des **15 et 16 janvier 2000** qui se tiendra :
Campus de JUSSIEU, 2 place Jussieu, Paris 5ème
AMPHI 55B.

Nous vous prions de croire, Madame, Monsieur, à l'expression de nos sentiments dévoués.

Teresa Assude & Brigitte Grugeon

Attention ! Il est nécessaire de vous munir de cette convocation et d'une pièce d'identité pour avoir accès à l'amphi le dimanche et également le samedi, en cas de contrôle de sécurité.

Samedi 15 janvier 2000 - MATIN
9h15-10h45 Présentation de travaux
Résolution de problèmes arithmétiques par la mise en équation et méthode de résolution
Adolphe ADIHOU, FAPSE, Université de Genève

11h-12h30 Présentation de thèse
Aspects épistémologiques et didactiques de la liaison "points-vecteurs"
André PRESSIAT, INRP et IUFM d'Orléans-Tours

Samedi 15 janvier 2000 - APRES-MIDI
14h30-16h Comptes rendus de travaux
Entrer dans la culture des théorèmes
Paolo BOERO, Université de Gênes

16h15-17h45 Présentation de thèse
Illustration de la pertinence des mathématiques discrètes pour la modélisation et la distinction condition nécessaire/condition suffisante
Julien ROLLAND, Equipe CNAM, Laboratoire Leibniz INPG – UJF, et IUFM de Grenoble

Dimanche 16 janvier 2000, MATIN
9h-10h15 Sur quoi travaillez-vous actuellement ?
Logique et raisonnement mathématique : Variabilité des exigences de rigueur dans les démonstrations mettant en jeu des énoncés existentiels
Viviane Durand-Guerrier, IUFM de Lyon et LIRDHIST Université Lyon 1
10h15-10h30 Réactions et ouverture d'un débat autour de “ raisonnements, preuves, démonstrations ” par
Michèle ARTIGUE
10h30-11h Débat

☒ DATES DES PROCHAINS SEMINAIRES

25-26 mars 2000, à Jussieu
14-15 octobre 2000

RESUMES DES INTERVENTIONS

Résolution de problèmes arithmétiques par la mise en équation et méthode de résolution

Adolphe ADIHOU, FAPSE, Université de Genève

Dans le canton de Genève l'enseignement des techniques de résolution des équations du premier degré à une inconnue (EQUATION DU TYPE AX + B = C) et des systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues (SYSTEME DE LA FORME AX + BY = C & A'X + B'Y = C') et la résolution de problèmes peuvent être vus sous deux angles différents non symétriques.
1 - L'enseignement des techniques de résolution des équations du premier degré à une inconnue ou des systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues sont deux occasions pour le professeur de résoudre avec les élèves (15-16 ans, 3$^{\text{ième}}$ année du secondaire inférieur) ou d'apprendre à résoudre des problèmes arithmétiques. C'est ce que nous désignons par résolution de problèmes arithmétiques par la mise en équation ou par des techniques algébriques.
2 – La résolution des problèmes est une occasion pour résoudre des équations tout en utilisant des techniques de résolution équationnelles mentionnées ci - dessus.

Pour résoudre ces problèmes le professeur propose aux élèves un canevas de résolution en 6 étapes suivant certainement le modèle classique : Identification de l'inconnue ou des inconnues, mise en équation,…. . Nous désignons ce canevas de résolution par le terme méthode de résolution. Il comprend : une marche à suivre et une technique mathématique (algébrique). Lors de la résolution, la méthode est mise en avant pour que l'élève l'utilise dans la " relation didactique ".

- L'élève n'éprouve pas la nécessité de recourir à un nouveau mode de traitement,
- L'élève ne se rend pas compte des limites de ses anciens modes de traitement même si on pense qu'ils ont rudimentaires et / ou inadaptés pour ces cas de problèmes et / ou inadaptés pour le contrat à instauré.
- On veut apprendre à l'élève à raisonner et / ou à utiliser le raisonnement des mathématiciens.

Il se fait que ce type d'organisation produit des " phénomènes didactiques ", compte tenu des variables intervenant dans les situations de résolutions. Ces phénomènes didactiques sont liés à la situation elle-même. On les retrouve du côté de l'élève, du côté du professeur, du côté élève - professeur, du côté du rapport à la notion mathématique à utiliser.
Peut-on étudier cette situation sous la loupe des concepts de didactiques des mathématiques ?

Notre hypothèse de base est que, dans la relation didactique les erreurs et les difficultés ne renvoient pas à la méthode elle-même. Les erreurs et les difficultés des élèves sont (en partie) un produit conjugué de la méthode et du système qui préconise une telle stratégie de résolution.

Une telle étude nécessite la prise en compte d'un certain nombre de variables :

- la notion ou le concept de problème en classe,
- la résolution des équations comme un modèle de traitement,
- la méthode de résolution comme un outil didactique et / ou comme une heuristique,
- les représentations des élèves et de l'enseignant d'une part et du chercheur d'autre part au sujet des variables,
- l'organisation du travail de résolution par la mise en avant de la méthode de résolution,

…
Comment étudier les phénomènes didactiques liés à la résolution de problèmes arithmétiques par la mise en équation à travers la donnée a priori de la marche à suivre et de la technique (algébrique) ?
Notre recherche a pour but de mettre en évidence l'influence de la mise en avant de la méthode sur les phénomènes didactiques observés (difficultés et erreurs) en nous référant aux concepts de contrat didactique, de transposition de savoirs, de transposition didactique et de mémoire didactique. Elle ne vise pas à légitimer ou ne pas légitimer la méthode comme outils, mais à étudier les phénomènes observés dans une relation didactiques en situant les variables.

Aspects épistémologiques et didactiques de la liaison "points-vecteurs"

André Pressiat, INRP et IUFM d'Orléans-Tours

La présentation porte sur une thèse, soutenue en mai dernier. Son but est d'abord de mettre en évidence le manque d'outils et de techniques vectoriels véritablement efficaces pour traiter les questions de géométrie au lycée en France, d'en analyser ensuite les raisons et enfin de proposer des éléments d'ingénierie curriculaire sur ce thème.

• Le cadre théorique utilisé est celui de la théorie anthropologique du didactique.

• L'étude épistémologique met en évidence l'abondance des interventions du calcul vectoriel en géométrie au niveau technologico-théorique ; l'étude de l'évolution des programmes en France au cours du siècle montre un blocage de la transposition didactique sur les aspects affines (problèmes d'alignement et de concours, par exemple), ainsi qu'une instabilité de cette dernière sur les aspects métriques ("étude de configurations" par des techniques vectorielles).

• Un inventaire des organisations mathématiques, intégrant ces deux types de problèmes, publiées en France et dans quelques pays anglo-saxons, met en évidence deux univers bien différents de pratiques du calcul vectoriello-ponctuel. L'ingénierie curriculaire proposée introduit un ostensif actuellement indésirable en France, le vecteur-position, ce qui modifie les techniques, mais également le contenu et la genèse des organisations mathématiques locales et des organisations didactiques proposées.

Entrer dans la culture des théorèmes

Paolo Boero, Université de Gênes

Entrer dans la culture des théorèmes signifie développer des compétences spécifiques inhérentes à la production de conjectures et à la preuve de ces conjectures en prenant en compte des éléments de savoirs théoriques. Des analyses épistémologiques et cognitives sont nécessaires pour sélectionner les éléments particuliers, essentiels, dans la production et la preuve des conjectures et les théories auxquelles les étudiants seront confrontés dans leur apprentissage. Par exemple, le rôle crucial de l'exploration dynamique (cf. Boero et al, PME-1996; voir aussi Simon, ESM-1996) de la situation problème dans la production et la preuve des conjectures doit être pris en compte; ceci peut aider à la sélection du "champ d'expérience" et des tâches dans lesquelles une telle dynamique est "naturelle" pour les élèves. De plus, ce phénomène d'une continuité (possible) entre la production d'une conjecture et la construction de sa preuve (voir Garuti et al, PME-1996, PME-1998) doit être prise en compte pour sélectionner les situations - problèmes dans lesquelles cette continuité se développera de la meilleure façon. Les théorèmes appartiennent à la culture scientifique (Vygotsky, "Pensée et language", Ch. VI); une médiation appropriée de l'enseignant est donc requise pour tout ces aspects sur lesquels il y a une rupture significative avec la culture du quotidien: la forme des énoncés, la structure des démonstrations comme textes, la nature des raisonnements permis, etc.

Illustration de la pertinence des mathématiques discrètes pour la modélisation et la distinction condition nécessaire/condition suffisante

Julien ROLLAND, Equipe CNAM, Laboratoire Leibniz
INPG – UJF, et IUFM de Grenoble

Si l'on dresse un état des lieux de la présence des mathématiques dans l'enseignement secondaire, le bilan est un peu maigre. De manière provocatrice, nous pouvons même affirmer que le rapport de l'institution scolaire aux mathématiques discrètes est quasiment vide. Pourtant, au-delà du casse-tête qui peut se résoudre sans aucune technique et en deçà du problème de concours dont la solution démontre l'étendue d'une culture et la disponibilité d'un corps de savoirs, nous montrons que certains problèmes de mathématiques discrètes relèvent de techniques mathématiques simples.

Notre travail prend pour point de départ une série d'études sur les savoirs que les problèmes de mathématiques discrètes nécessitent et qu'ils pourraient donc aider à développer, parce qu'ils nourrissent de nombreuses pratiques mathématiques. Une étude empirique relative au " rapport personnel aux mathématiques discrètes " de PLC2. Nous permet de révéler les liens confus entre condition nécessaire (CN) et condition suffisante (CS), la fragilité du rapport à la notion de preuve, l'incapacité à modéliser à nouveaux frais, sans s'appuyer sur des types canoniques " bien connus ".

Nous poursuivons alors en retravaillant la notion de modélisation pour elle-même. Nous montrons en particulier comment l'activité de modélisation, pourtant fondatrice au plan scientifique, se réduit au mieux à un exercice de

" traduction " d'un modèle – dont l'énoncé fournit la description – à un autre, dont l'établissement par " complétion " est seul à la charge de l'élève.
Nous étudions donc également certains outils logiques du travail mathématique et notamment la distinction entre CN et CS, objets très clairement protomathématiques et de ce fait, non seulement jamais objet d'enseignement et rarement objet d'études didactiques. Il apparaît par exemple que, dans la logique effective de nombreux étudiants (les expérimentations concernent principalement le DEUG scientifique), on tient pour valide l'implication $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B)$.
Pour conclure nous montrons en quoi les trois thèmes de recherche que sont les mathématiques discrètes, la modélisation et la distinction CN/CS, ensemble a priori disparate, sont liés. La pratique de la modélisation (par contraste avec la " traduction "), engendrée par l'étude de " situations ouvertes ", active la distinction CN/CS par la nécessaire **gestion de l'information**. C'est en ce point que les mathématiques discrètes prennent leur importance : nous illustrerons, à travers une proposition de séquence didactique, le fait que les problèmes qui en relèvent sont de dévolution facile, en même temps qu'ils engendrent des situations ouvertes appelant une modélisation chaque fois renouvelée.

Logique et raisonnement mathématique : Variabilité des exigences de rigueur dans les démonstrations mettant en jeu des énoncés existentiels

Viviane Durand-Guerrier, IUFM de Lyon et LIRDHIST Université Lyon 1

D'une manière générale, dans les démonstrations mathématiques proposées aux étudiants, on trouve assez peu de références explicites à la logique classique. A contrario, on exige de ces mêmes étudiants un certain niveau de rigueur dans les preuves qu'ils produisent, ceci afin d'en assurer la validité.
Dans les travaux que nous menons avec Gilbert Arsac, nous examinons la question de l'articulation entre logique, rigueur et validité sous deux point de vue. D'une part du côté du praticien des mathématiques dans son rôle de professeur : *par quoi, dans son discours auprès des étudiants remplace-t-il la logique absente* ? D'autre part du côté de l'étudiant en mathématiques : *comment, en tant que novice du domaine mathématique étudié, peut-il satisfaire aux exigences de rigueur qui permettent, en principe, de se prémunir contre les preuves non valides* ?
Pour cette présentation, nous nous intéressons principalement à la première question. Nous appuierons nos réflexions sur un protocole obtenu en soumettant une démonstration de topologie comportant une erreur, proposée par un étudiant, à un certain nombre d'enseignants de mathématiques.

Séminaire National de Didactique des Mathématiques, 25-26 mars 2000

Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM)
en association avec
DIDIREM et l'IREM de l'Université Paris 7
2 Place Jussieu, Case 7018
75251 Paris cedex 05

e-mail : assude@gauss.math.jussieu.fr
brigitte.grugeon@amiens.iufm.fr

Tel / Fax :
01 44 27 78 93

Paris, 01/02/2000

Teresa Assude & Brigitte Grugeon
Secrétaires du Séminaire National de Didactique des Mathématiques

Madame, Monsieur,

Nous vous prions de trouver ci-contre le programme du Séminaire National des **25 et 26 mars 2000** qui se tiendra :
Campus de JUSSIEU, 2 place Jussieu, Paris 5ème

AMPHI 55B.

Nous vous prions de croire, Madame, Monsieur, à l'expression de nos sentiments dévoués.

Teresa Assude & Brigitte Grugeon

Attention ! Il est nécessaire de vous munir de cette convocation et d'une pièce d'identité pour avoir accès à l'amphi le dimanche et également le samedi, en cas de contrôle de sécurité.

Samedi 25 mars 2000 - MATIN

9h15-10h Présentation de travaux
Introduction, pourquoi une étude de pratiques en classe, comment la mener, que peut-on attendre des choix faits, quels manques ?
Aline Robert, DIDIREM (Université de Paris 7)

10h-11h Présentation de thèse
L'enseignant de mathématiques au quotidien, études de pratiques en classe de seconde
Christophe Hache, DIDIREM (Université de Paris 7)

11h15- 12h15 Présentation de thèse
Analyse des effets d'un stage de formation continue en géométrie sur les pratiques d'enseignants de l'école primaire
Danielle Vergnes, IUFM de Versailles

Samedi 25 mars 2000 - APRES-MIDI

14h30- 15h30 ***Assemblée générale de L'ARDM***

15h30- 16h45 Champs connexes
Y a-t-il un pilote dans la classe ? Approche de psychologie ergonomique de l'activité de l'enseignant
Janine Rogalski, Université Paris VIII

17h- 17h30 Débat
Rapports entre la didactique des mathématiques et la psychologie ergonomique

Dimanche 26 mars 2000 - MATIN

9h-10h30 Sur quoi travaillez-vous actuellement ?
Analyser et évaluer des praxéologies didactiques en vue de les développer
Michèle Artaud, IUFM d'Aix-Marseille

10h30-11h15 Débat
Etude des pratiques enseignantes en didactique des mathématiques
Ouverture du débat par *Claire Margolinas, IUFM de Clermont-Ferrand*

⌧ DATE DU PROCHAIN SEMINAIRE : 14-15 octobre 2000

RESUMES DES INTERVENTIONS

Introduction, pourquoi une étude de pratiques en classe, comment la mener, que peut-on attendre des choix faits, quels manques.

Aline Robert
DIDIREM (Université de Paris 7)

La nécessité des recherches sur les pratiques des enseignants en classe est apparue depuis un certain temps en didactique des mathématiques, l'enseignant étant une des " variables " de l'apprentissage des élèves. De plus le développement des IUFM a amené, à partir des interrogations de formateurs, à poser des questions de formation ou de modification de pratiques d'enseignants aux chercheurs.
Deux points de vue (parmi d'autres) peuvent être adoptés pour étudier les pratiques des enseignants en classe (que ce soit dans une problématique de formation ou non) :

- une centration sur les apprentissages des élèves, qui amène à analyser les pratiques des enseignants en classe en étudiant par exemple les activités qu'elles peuvent provoquer chez les élèves en classe,
- une centration sur l'enseignant, dans l'exercice de son métier, qui amène à analyser les pratiques en étudiant les contraintes auxquelles l'enseignant doit faire face, les habitudes, ce qui est facile ou difficile, les représentations.

Les recherches que nous menons depuis 6,7 ans nous ont conduits à juxtaposer puis à imbriquer ces deux points de vue. Nous allons introduire la démarche initiale commune à tous ces travaux
Deux exemples de recherches menées dans ce cadre seront ensuite exposés plus en détail par leurs auteurs, ils insisteront sur les " points forts " de leur méthodologie particulière et leurs résultats.

L'enseignant de mathématiques au quotidien, études de pratiques en classe de seconde.

Christophe Hache
DIDIREM (Université de Paris 7)

Ma recherche étudie le professeur, ses pratiques (vues du premier point de vue ci-dessus), en regardant l'enseignant " par dessus l'épaule de l'élève ". Je m'en expliquerai lors de l'intervention.
On appelle " univers mathématique " la partie des pratiques en classe du professeur dont on pense qu'elle va avoir des effets sur l'apprentissage des élèves. Mon but sera ici de montrer les univers mis à jour dans ma recherche (5 indices de description), la façon dont ils s'organisent (en fonction des professeurs, des notions étudiées...). Je décrirai alors la méthode utilisée, analyse de discours de l'enseignant d'une part et analyses de tâches et activités proposées aux élèves d'autre part.

Analyse des effets d'un stage de formation continue en géométrie sur les pratiques d'enseignants de l'école primaire.

Danielle Vergnes
IUFM de Versailles

Dans ce travail nous cherchons à évaluer les écarts entre le projet des formateurs, redéfini par le chercheur, et ce que fait effectivement l'enseignant de retour dans sa classe.
Pour organiser cette étude du travail de l'enseignant en classe, nous avons utilisé à la fois des concepts définis en psychologie ergonomique, pour " découper " le travail de l'enseignant en classe, et des outils de la didactique des mathématiques, pour étudier les contenus mathématiques en jeu et les activités des élèves correspondant aux découpages.
Les résultats sont exprimés en termes d'écarts qui se situent à divers niveaux de l'activité enseignante.
Nous en décrirons un certain nombre. Nous conclurons en dégageant la diversité des enseignants face à ce stage.

Y a-t-il un pilote dans la classe ? Approche de psychologie ergonomique de l'activité de l'enseignant

Janine Rogalski,
Laboratoire Cognition et Activités Finalisées
Université Paris VIII et CNRS

On analyse l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique particulier : le rapport de l'élève au savoir mathématique. On précisera en quoi ce rapport a une dynamique propre et évolue aussi en dehors de l'action enseignante.
On présentera en quoi cet environnement est ouvert et les conséquences pour l'enseignant. On spécifiera un modèle général de gestion d'environnement dynamique dans le cas de l'enseignement des mathématiques. On proposera un modèle de régulation à plusieurs horizons temporels de l'activité de l'enseignant et du développement de ses compétences.
On discutera la nature de l'objet de l'action : élèves – chacun et tous – ou classe.
En s'appuyant sur les recherches de l'équipe d'Aline Robert, on situera l'approche de psychologie ergonomique par rapport à l'approche anthropologique et on discutera l'articulation avec la théorie didactique des situations.

Analyser et évaluer des praxéologies didactiques en vue de les développer

Michèle Artaud,
Equipe de didactique des mathématiques, IUFM d'Aix-Marseille

Toute activité humaine peut être décrite en termes d'*organisations praxéologiques* ou *praxéologies* : il s'y accomplit des types de tâches T, par la mise en œuvre de techniques déterminées, τ, lesquelles techniques sont justifiées, rendues intelligibles et produites par des technologies, θ, elles-mêmes justifiées, rendues intelligibles et produites par des théories, Θ.

L'objet du travail présenté consiste en l'étude de *praxéologies didactiques*, c'est-à-dire de praxéologies relatives à l'étude ou à la direction d'étude d'organisations de savoir qui sont ici des organisations mathématiques.
Une praxéologie didactique ponctuelle, relative à une organisation mathématique ponctuelle (OMP), c'est-à-dire constituée autour d'un unique type de tâches mathématiques T, doit permettre la survenue de six *moments de l'étude* (ou moments *didactiques*). Le premier moment est celui de la *première rencontre* avec le type de tâches et l'élaboration d'un embryon de technique. Le deuxième moment voit l'*exploration du type de tâches* et l'émergence d'au moins une technique d'étude de ce type de tâches. Dans le troisième moment, il s'agit de *constituer l'environnement technologico-théorique* qui va justifier la ou les technique(s) mises en place. Il s'agira ensuite de mettre en forme l'OMP en construction, ce qui est l'objet du quatrième moment, le *moment de l'institutionnalisation*. Dans un cinquième moment, le *travail de l'organisation mathématique* va permettre notamment de se mettre en main la technique créée et d'accroître la fiabilité de sa mise en œuvre[1]. Le sixième moment, celui de l'*évaluation*, permet d'examiner ce que vaut l'OMP mise en place.

Nous considérerons ces six moments comme autant de types de tâches didactiques qu'un professeur ayant à diriger l'étude d'une OMP doit réaliser en coopération avec les élèves. Nous développerons des analyses de praxéologies didactiques mises en œuvre par des professeurs ainsi que des évaluations d'une partie des praxéologies analysées, en essayant de distinguer leurs aspects génériques de leurs aspects spécifiques. Nous terminerons en explicitant sur l'un des exemples en quoi ce travail permet de contribuer à l'étude du développement des praxéologies didactiques, et donc de la diffusion des connaissances dans la société.

[1] Mais c'est bien du travail de l'OMP dans son ensemble qu'il s'agit.

*Association pour la **Recherche** en **Didactique** des*
Mathématiques (ARDM)
en association avec
DIDIREM et l'IREM de l'Université Paris 7
2 Place Jussieu, Case 7018
75251 Paris cedex 05

e-mail : assude@gauss.math.jussieu.fr
brigitte.grugeon@amiens.iufm.fr

Tel / Fax :
01 44 27 78 93

Paris, 13/09/2000

Teresa Assude & Brigitte Grugeon
Secrétaires du Séminaire National de
Didactique des Mathématiques

Madame, Monsieur,

Nous vous prions de trouver ci-contre le programme du Séminaire National des **14 et 15 octobre 2000** qui se tiendra :
Campus de JUSSIEU, 2 place Jussieu, Paris 5ème

AMPHI 56B.

Nous vous prions de croire, Madame, Monsieur, à l'expression de nos sentiments dévoués.

Teresa Assude & Brigitte Grugeon

Attention ! Il est nécessaire de vous munir de cette convocation et d'une pièce d'identité pour avoir accès à l'amphi le dimanche et également le samedi, en cas de contrôle de sécurité.

Samedi 14 octobre 2000 - MATIN

9h15-10h30 Présentation de travaux
Les modes de fonctionnement du graphique cartésien de fonctions comme milieu : rapports effectifs et fictifs au savoir
Eduardo Lacasta, Université de Navarre

10h45-12h Présentation de thèse
Continuités et ruptures dans la transition terminale S/DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement
Frédéric Praslon, Université Marne La Vallée

Samedi 14 octobre 2000 - APRES-MIDI

14h- 15h ***L'espace de l'ARDM : vie de l'association et questions vives***

15h- 16h15 Présentation de thèse
Situations à dimension a-didactique et paradigmes d'enseignement dans le secondaire : la notion de fonction
Isabelle Bloch, IUFM d'Aquitaine & DAEST (Bordeaux 2)

16h30- 17h45 Présentation de travaux anglo-saxons
Development for the teaching of undergraduate mathematics
Elena Nardi, University of East Anglia (U.K.)

Dimanche 15 octobre 2000 - MATIN

9h-10h30
Les recherches en didactique de l'analyse : évolution des approches et influence sur les réformes curriculaires
Michèle Artigue, DIDIREM, Université Paris7

10h30-11h15 Débat
Quelles perspectives pour l'enseignement de l'analyse ?
Ouverture du débat par Luc Trouche, ERES, Université de Montpellier2

⌧ DATES DES PROCHAINS SEMINAIRES :

13 et 14 janvier 2001 / 24 et 25 mars 2001

RESUMES DES INTERVENTIONS

Les modes de fonctionnement du graphique cartésien de fonctions comme milieu : rapports effectifs et fictifs au savoir

Eduardo Lacasta
Université de Navarre

Le problème posé est celui de l'adidacticité dans les situations institutionnelles de l'analyse, situations pour lesquelles un milieu matériel incluant le Graphique Cartésien des Fonctions (GCF) est incontournable. D'une part le GCF est support d'une évidence graphique, pouvant être un milieu allié à l'enseignant dans l'ostension, d'autre part l'analyse en termes de situation des différents usages du graphique cartésien de fonctions (GCF) donne cinq types de milieu, caractérisés selon les types de rapport au GCF permis - effectifs ou fictifs, opaques ou transparents -, selon le support graphique précisé, leur utilité et leurs limitations. Envisager des ingénieries sur la notion de fonction avec une dimension adidactique, où le GCF est le support d'un milieu antagoniste, avec des rapports effectifs, exige la prise en compte des milieux définis.

Continuités et ruptures dans la transition terminale S/DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement

Frédéric Praslon
Université Marne La Vallée

Les problèmes de transition lycée-université en mathématiques jouent un rôle crucial dans le contexte actuel de la massification de l'enseignement. Cette communication est destinée à présenter une thèse étudiant en analyse et précisément sur la notion de dérivée, diverses *microruptures* intervenant dans la transition, encore peu analysées jusque là. Nous avons tenté ici de mettre en relief des ruptures liées, selon nous, aux systèmes de pratiques différents émergeant des deux cultures bien différentes, du lycée et de l'université. Nous présenterons ainsi notre étude institutionnelle, comparée, d'exercices de manuels de lycée et de feuilles de TD issues de diverses universités. L'étude qui a été réalisée, des rapports personnels à la dérivée d'étudiants entrant en DEUG, via l'analyse de leurs productions à des tests écrits, sera exposée ensuite. Nous verrons notamment comment les tâches sélectionnées, théoriquement réalisables à partir des seules connaissances du lycée, présentent des difficultés transversales qui les situent déjà à la transition des deux cultures, et quels types de comportements les étudiants développent dans ce contexte. L'expérimentation d'ateliers en petits groupes, sur des questions centrales de la transition (statut des définitions, travail sur des situations générales, etc.) complète cette étude et permet de cerner les problèmes de dévolution de tâches complexes et de jauger les possibilités de gestion des microruptures locales. Elle confirme l'existence d'un vide didactique à prendre en charge dans la transition.

Situations à dimension a-didactique et paradigmes d'enseignement dans le secondaire : la notion de fonction

Isabelle Block
IUFM d'Aquitaine & DAEST (Bordeaux II)

Je présente dans cet exposé une partie de mon travail de thèse, celle qui a trait à la construction de situations d'enseignement / apprentissage de l'analyse dans le secondaire.
Dans une première partie, j'exposerai comment j'ai été amenée à m'appuyer sur la problématique connaissances / savoirs pour étudier l'enseignement de l'analyse dans le secondaire ; une question importante étant celle des savoirs liés à la validation.
La prise en compte de la problématique connaissances / savoirs suppose la construction d'un milieu propre à l'enseignement de concepts de l'analyse par des situations au moins partiellement a-didactiques. J'essaierai de dégager les caractéristiques d'un tel milieu, d'un point de vue épistémologique comme du point de vue de l'apprentissage.
Je présenterai ensuite un exemple de situation sortant du paradigme du contrat classique, et montrerai, en liaison avec la structuration du milieu, comment ces situations tentent de prendre en compte les trois niveaux d'organisation du savoir : action / connaissances, formulation / ostensifs, validation / savoir, et ce qu'il est nécessaire de modifier, si l'on veut parvenir à faire exister ces différents niveaux, dans les activités présentées habituellement aux élèves.

En conclusion, j'examinerai quels types de connaissances sont travaillées dans les situations expérimentales, et :
1) En quoi diffèrent-elles des connaissances habituellement présentes dans l'enseignement secondaire ?
2) Quel lien présentent-elles avec les connaissances travaillées dans l'enseignement supérieur ?

Development for the teaching of undergraduate mathematics

Elena Nardi
University of East Anglia, UK

After a brief reference to current research on the teaching and learning of Calculus in the UK, Elena will introduce *UMTP* - the Undergraduate Mathematics Teaching Project, now nearing completion at the University of Oxford. This one-year research project, funded by the British Economic and Social Research Council, followed Elena's doctoral and postdoctoral qualitative studies of first-year undergraduates' learning difficulties in their encounter with the abstractions of advanced mathematics within a tutorial-based pedagogy at Oxford. *UMTP* regards current conceptualisations of teaching at university level as reflected in practice. During eight weeks of intensive, minimally participant observation, six tutors' responses to and interpretations of their students' difficulties in Calculus and Abstract Algebra were studied in semi-structured interviews. The tutors'

1. conceptualisations of their students' difficulties with regard to

   - enculturation into formal mathematical reasoning, and,
   - construction of new mathematical concepts

2. accounts of the strategies they employ in order to facilitate their students' overcoming of these difficulties, and,

3. self-evaluative reflective statements regarding their teaching practices

were analysed in terms of *SPD*, a four-stage spectrum of pedagogical development. In this presentation Elena will exemplify 1-3 but emphasise 2, and, in particular, the tutors' accounts of the strategies they employ in order to facilitate the students' overcoming of their difficulties in the context of Calculus. *SPD* will then be proposed as a descriptor of advanced mathematics teaching where the professional development of undergraduate mathematics teachers is seen as a gradual and continuous shift from Stage I to Stage IV in the above mentioned three areas.

Les recherches en didactique de l'analyse : évolution des approches et influence sur les réformes curriculaires

Michèle Artigue
DIDIREM (Université de Paris 7)

Les recherches en didactique de l'analyse (ou du Calculus) se sont largement développées internationalement au fil des vingt dernières années. Les approches ont été diverses, tant du fait de la diversité des cultures didactiques dans lesquelles elles s'inséraient que de l'évolution des approches et problématiques au sein d'une culture donnée. Parallèlement, divers projets de réformes curriculaires ont vu le jour, à plus ou moins grande échelle, dans des conditions institutionnelles et culturelles tout aussi diverses. Dans cet exposé, après avoir présenté quelques caractéristiques de ce champ de recherche et de sa dynamique, je souhaiterais aborder la question des rapports entre recherche et réformes curriculaires en m'appuyant sur deux exemples : celui des réformes récentes de l'enseignement secondaire de l'analyse en France et celui du Calculus project, aux Etats Unis et, pour ce qui concerne ce dernier, sur l'étude menée par Natasha Speer de l'université de Berkeley.

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM,

Vous pouvez soit :

Consulter notre site WEB

http://www.ccr.jussieu.fr/iremParis7/welcome.html

Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7
Case 7018
2 place Jussieu
75251 Paris cedex 05

TITRE :

ACTES DU SÉMINAIRE NATIONAL DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES. ANNÉE 2000

AUTEUR (S) :

Teresa ASSUDE et Brigitte GRUGEON (EDS)

RESUME :

Ces actes recouvrent la plupart des textes correspondant aux communications données lors des 3 séances du séminaire national de didactique des mathématiques qui ont eu lieu à Paris au cours de l'année 2000. Ils abordent essentiellement les thèmes suivants :

- preuves et raisonnements,
- pratiques de l'enseignant,
- enseignement et apprentissage de l'analyse.

MOTS CLES :

Didactique des mathématiques
Logique, preuve, raisonnement mathématique
Pratiques de l'enseignant
Didactique de l'analyse
Enseignement de la géométrie vectorielle

Editeur : IREM et ARDM
Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la
publication : M. ARTIGUE
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : Mars 2001
ISBN : 2-86612-209-7