INSTITUT
DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT
DES MATHEMATIQUES

89
Juillet 2000

UNE INTRODUCTION DES SUITES RECURRENTES UTILISANT MAPLE (DEUG 1)

JACQUELINE MAC ALEESE
ALINE ROBERT

UNIVERSITE DENIS DIDEROT PARISVII

UNE INTRODUCTION DES SUITES RECURRENTES UTILISANT MAPLE (DEUG 1)

JACQUELINE MAC ALEESE
ALINE ROBERT

UNE INTRODUCTION DES SUITES RECURRENTES EN DEUG UTILISANT MAPLE

J. MAC ALEESE ET A. ROBERT

Première édition : le texte qui suit n'a pas été expérimenté avec des étudiants, une deuxième édition est donc prévue après expérimentation en vraie grandeur (étudiants de Deug). D'autre part, nous n'avons indiqué aucune référence bibliographique car n'importe quelle source peut convenir pour compléter les parties classiques de ce texte.

Introduction

Trois idées directrices ont orienté notre travail:

1) Nous voulons intégrer l'utilisation du logiciel Maple dans l'activité mathématique des élèves, et non simplement travailler sur Maple, comme un but en soi. De ce fait nous donnons aux étudiants soit des graphiques tout faits, soit des procédures leur permettant d'obtenir tous les graphiques utiles.

Cette utilisation du logiciel est donc essentiellement graphique, mais demande une certaine familiarisation spécifique : notamment certains graphiques, pour être intéressants, ne sont pas produits dans un repère orthonormé ; leur lecture nécessite de ce fait une adaptation des habitudes anciennes (la droite d'équation $y = x$ n'est pas toujours la droite à laquelle on s'attend, si le repère est orthogonal mais pas orthonormé).

De plus les possibilités spécifiques du logiciel permettent d'interroger graphiquement, plus complètement que les ressources manuelles, une situation donnée, mais cela demande aussi une familiarisation pour pouvoir interpréter rapidement les courbes fournies.

Enfin les ressources de calcul et calcul formel de Maple seront aussi utilisées, mais cela nous semble en continuité avec ce que fait une calculatrice évoluée.

2) Nous pensons que cette utilisation du logiciel peut renouveler l'étude des suites récurrentes en DEUG, en centrant d'emblée les problèmes sur la question des points fixes et de leur nature.

Cela pourrait éviter ces exercices classiques très répandus où une première étude, éventuellement laborieuse, est menée en utilisant un théorème des suites monotones bornées, puis reprise implicitement, mais pour étudier la vitesse de convergence seulement, en utilisant la formule des accroissements finis (c'est à dire en prenant le point de vue « nature du point fixe » sans le dire).

3) Un des avantages potentiels de l'utilisation de Maple est la possibilité d'introduire très facilement un travail sur trois cadres en interaction : le cadre graphique (fourni par le logiciel), le cadre formel de l'analyse et le cadre numérique. Nous considérons qu'une utilisation adéquate de cette interaction peut aider les apprentissages des étudiants. Plus précisément il s'agit de provoquer chez les étudiants des activités où ils s'appuient sur le graphique pour émettre des conjectures, le numérique leur servant à valider leurs interrogations, et, réciproquement, de les habituer à interroger une situation en la traduisant graphiquement, de différentes manières, avant de se lancer dans les justifications et calculs.

I Les procédures Maple proposées

Nous avons écrit quatre procédures qui permettent d'obtenir des graphiques.

1) Graphe pour repérer la nature d'un point fixe.

La première procédure (*inter*) permet de représenter simultanément, dans une même fenêtre, à choisir, pour une fonction f (à choisir), 4 graphes associés à un point fixe de f situé dans la fenêtre : le graphe de la fonction f, le graphe de la droite y = x (première bissectrice des axes s'ils sont orthonormés), le graphe de la parallèle menée par le point fixe à la droite y = -x (deuxième bissectrice des axes s'ils sont orthonormés), et le graphe de la tangente à f au point fixe.

Ce point fixe est évidemment un point d'intersection du graphe de f et de la droite y = x – autrement dit un point dont l'abscisse et l'ordonnée (égales) appartiennent aux intervalles de l'axe des x et de l'axe des y fixés pour la fenêtre.

Cela permet de comparer visuellement à 1 la valeur absolue de la dérivée en ce point fixe (sauf lorsque cette valeur est trop proche de 1 ou –1). D'ailleurs les valeurs approchées des coordonnées du point fixe et de la dérivée apparaissent aussi sur l'écran (comparaison numérique possible).

Si la dérivée est positive, et si la tangente est « au dessus » de la droite y = x à droite du point fixe, cette dérivée est plus grande que 1 ; si la dérivée est négative, et si la tangente est « au-dessus » de la parallèle à y = -x à gauche du point fixe, la dérivée est en valeur absolue plus grande que 1.

Les points attractifs et répulsifs sont ainsi repérables graphiquement (sauf pour des valeurs de la dérivée trop proches de 1 ou –1).

Si on commence par localiser les points fixes d'une fonction f, cela permet de tracer ces 4 graphes autour de chaque point fixe, grâce à un choix convenable de la fenêtre pour chacun.

Attention : les graphiques ne sont pas toujours représentés dans un repère normé, cela oblige à interpréter les données visuelles en tenant compte de cette donnée.

Texte de la procédure et exemples de sorties:

Procédure "*inter*" permettant de tracer les graphes de la fonction, de la "1ere bissectrice", de la tangente et de la parallèle à la "2ème bissectrice" au point fixe:

```
inter := proc(f, a, b)
local s, r, oi, p, vr, voi, vp, fprime, eqtg, b2, gt, gb1, gb2, gf;
  s := [solve(x - f(x) = 0)];
  r := op(1, s);
  vr := evalf(op(1, s));
  fprime := unapply(diff(f(x), x), x);
  p := fprime(r);
  vp := evalf(fprime(r));
  oi := f(r);
  voi := evalf(f(r));
  print(vr, voi, vp);
  eqtg := unapply(p*(x - r) + oi, x);
  gt := plot(eqtg, a .. b, color = black);
  gb1 := plot(x -> x, a .. b, color = blue);
  b2 := unapply(-x + r + oi, x);
```

```
    gb2 := plot(b2, a .. b, color = yellow);
    gf := plot(f, a .. b, color = red);
    display(gt, gf, gb1, gb2)
end
```

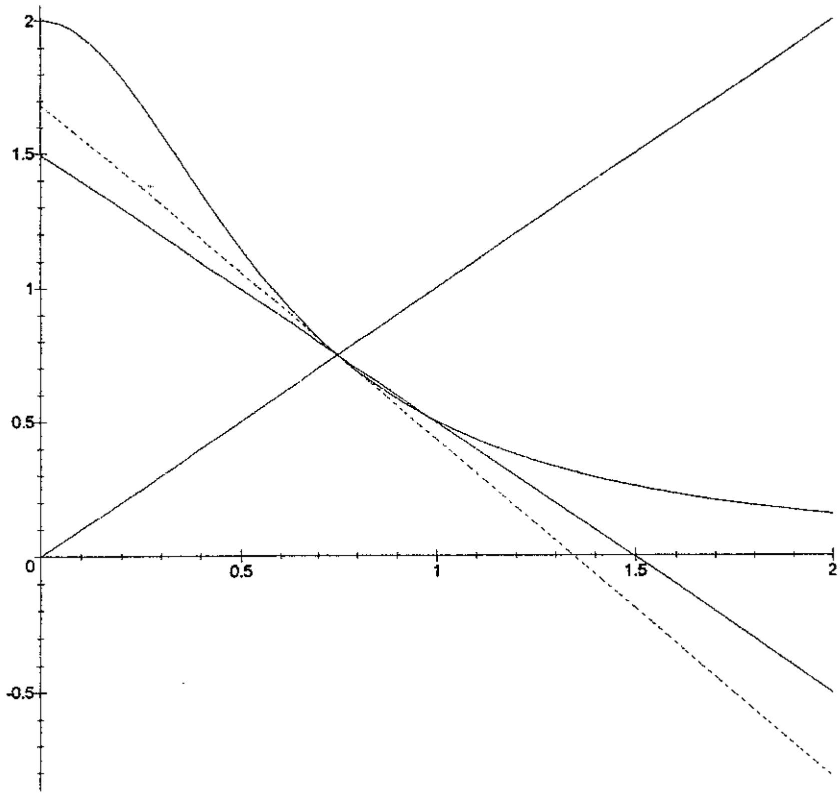
Dans l'appel de cette procédure, le premier paramètre à donner est la fonction f, les 2 suivants sont les abscisses extrêmes de la fenêtre observée.

ATTENTION : dans cette brochure, la tangente est en trait noir pointillé et toutes les autres courbes sont en trait noir plein; sur l'écran, en revanche ; le graphe de f est en rouge, la "1ère bissectrice" en bleu, la seconde en jaune et la tangente en noir.

Exemple 1: $f(x) = 2/(1+3\,x^2)$ sur [0,2]

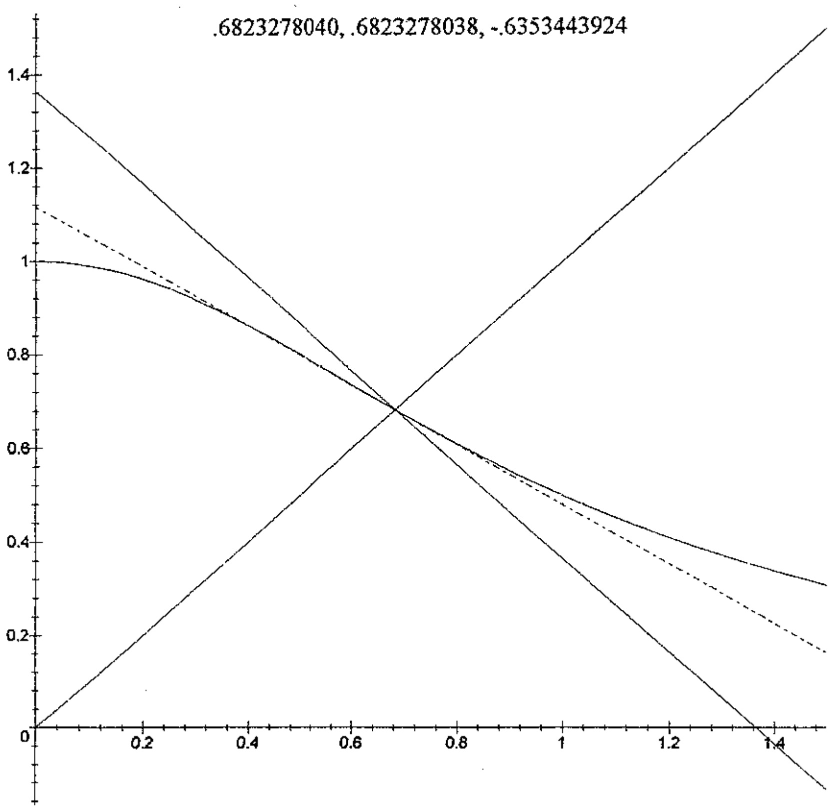
On lit que f est décroissante, a un point fixe α tel que $|f'(\alpha)| > 1$.

.7474152502, .7474152506, -1.252584750



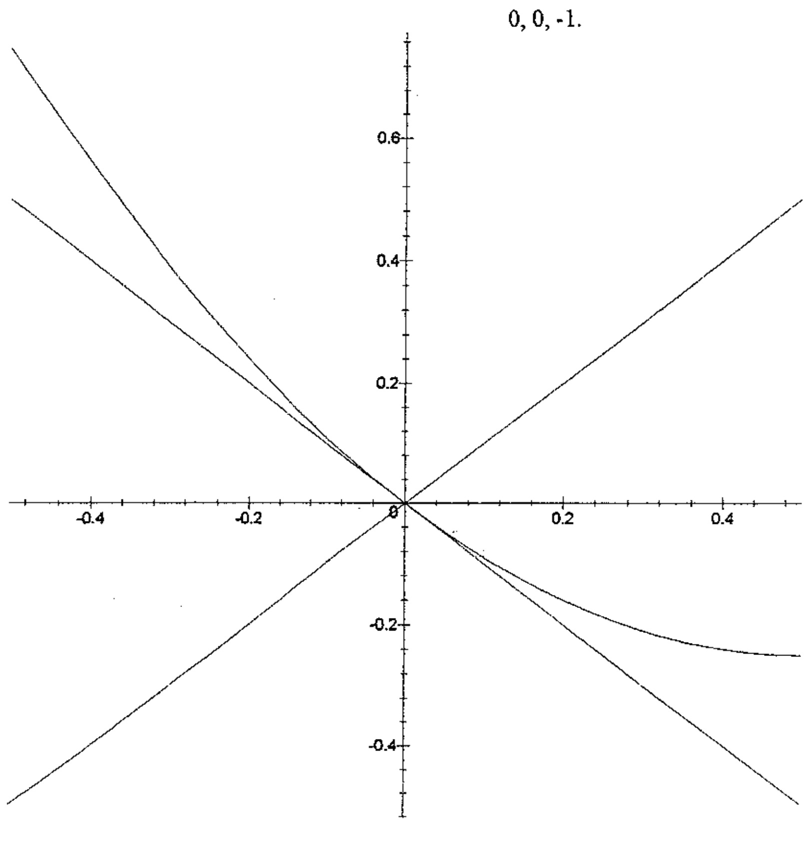
Exemple 2: $f(x) = 1/(1+x^2)$ sur [0,1.5]

On lit que f est décroissante, a un point fixe α tel que $|f'(\alpha)| < 1$.



Exemple 3 : $f(x) = x^2 - x$ sur [-0.5,0.5]

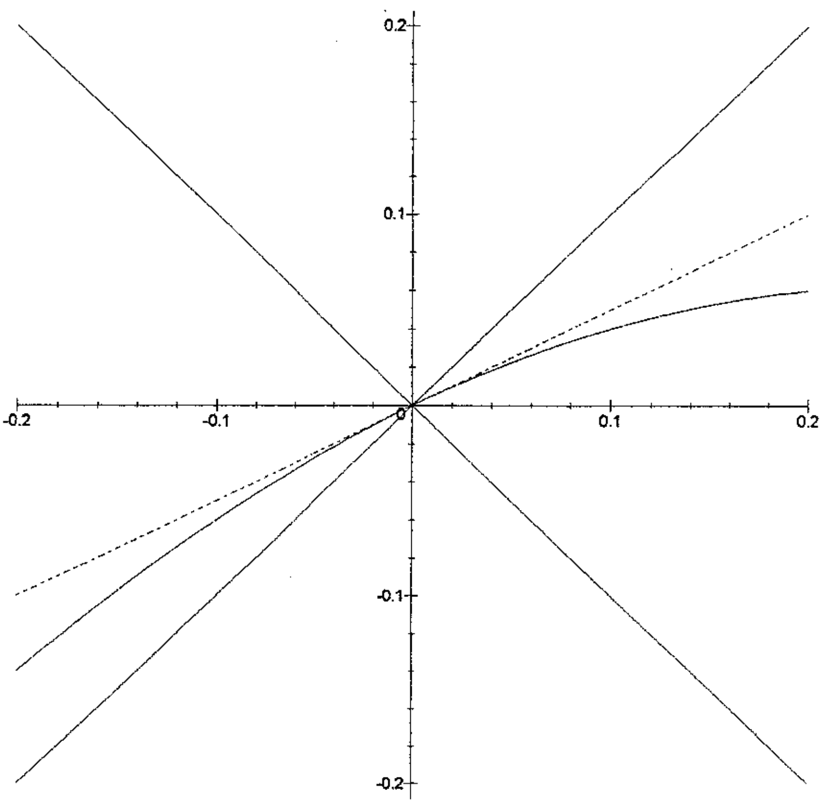
On lit que f est décroissante, a un point fixe 0 tel que $f'(0) = -1$.



Exemple 4 : $f(x) = 0.5\, x - x^2$ sur $[-0.2,0.2]$

On lit que f est croissante, a un point fixe 0 tel que $0 < f'(0) < 1$.

0, 0, .5



2) Graphe pour étudier la stabilité d'une fonction f autour d'un point fixe.

La deuxième procédure (*boite*) permet de dessiner une boîte (c'est à dire un carré aux côtés parallèles aux axes) autour d'un point fixe : on représente dans une fenêtre (à choisir) le graphe de f (à choisir), le graphe de la droite y = x, qui coupe le précédent puisqu'on travaille autour d'un point fixe, et la boîte dont on choisit la largeur.

Ceci permet de visualiser le fait que l'intervalle correspondant à la largeur de la boîte est stable ou non. Ainsi cet intervalle est stable par f si et seulement si le graphe de f « sort » de la boîte (à droite et à gauche) par les côtés verticaux.

Attention : les graphiques ne sont pas toujours représentés dans un repère normé, cela oblige à interpréter les données visuelles en tenant compte de cette donnée. Le carré peut être représenté par un rectangle par exemple.

Texte de la procédure et exemples de sorties:

Procédure "boite" permettant de tracer un carré autour de la limite éventuelle:

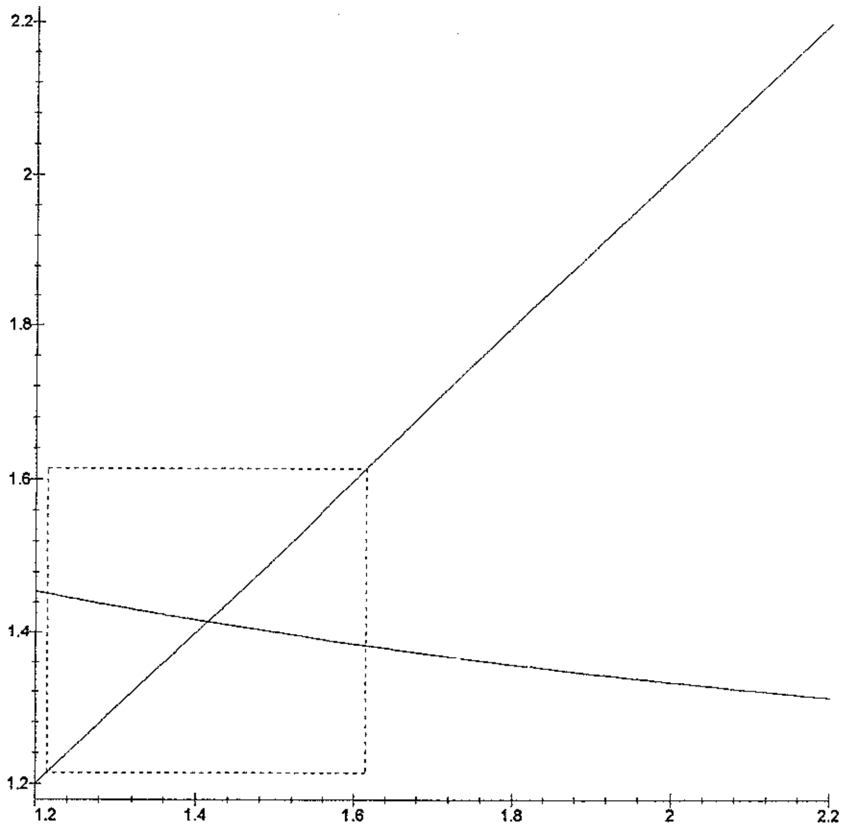
```
boite :- proc(f, a, b, l)
local s, r, bo, gbo, gb1, gf, c, d;
   s := [solve(x - f(x) = 0)];
   r := op(1, s);
   c := r - l;
   d := r + l;
   bo := [[c, c], [c, d], [d, d], [d, c], [c, c]];
   gbo := plot(bo, a .. b, color = green);
   gb1 := plot(x -> x, a .. b, color = blue);
   gf := plot(f, a .. b, color = red);
   display(gf, gb1, gbo)
end
```

Dans l'appel de cette procédure, le premier paramètre à donner est la fonction, les 2ème et 3ème les extrémités de la fenêtre et le dernier la demi- largeur L de la boîte tracée autour du premier point fixe de f trouvé dans la fenêtre.

ATTENTION : dans cette brochure, la boîte est en trait noir pointillé, le graphe de f et la "1ère bissectrice" sont en trait noir plein; sur l'écran ; en revanche, le graphe de f est en rouge, la "1ère bissectrice" en bleu, la boîte en vert.

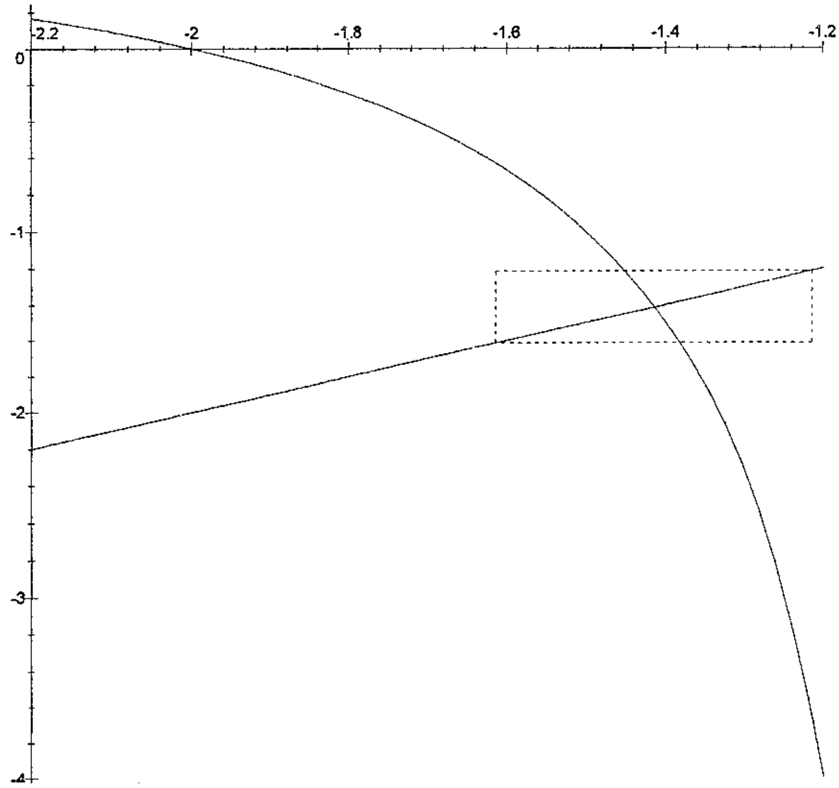
Exemple 1 : f(x) = (2+x)/(1+x) sur [1.2,2.2], L = 0.2

On lit que f est décroissante, a un point fixe dans l'intervalle et que celui-ci est stable.



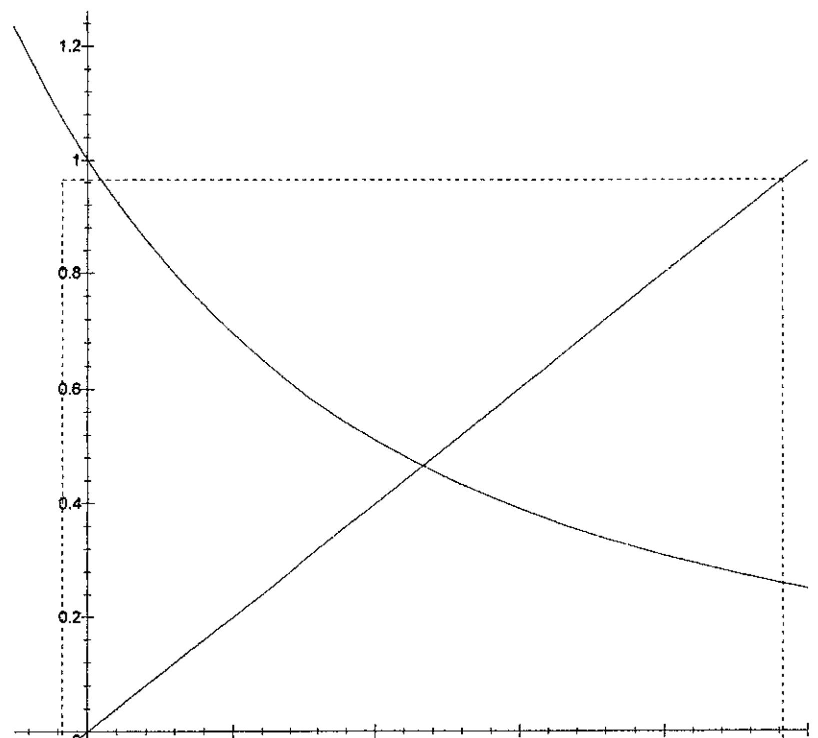
Exemple 2 : f(x) = (2+x)/(1+x) sur [-2.2,-1.2], L = 0.2

On lit que f est décroissante, a un point fixe dans l'intervalle et que celui-ci est non stable.



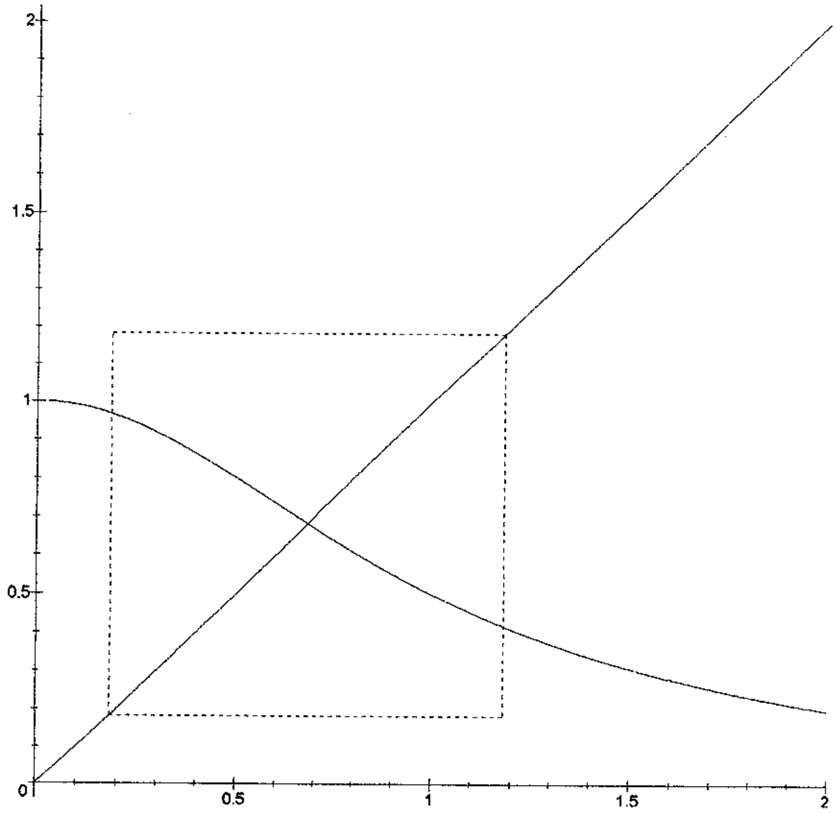
Exemple 3 : $f(x) = 1/(1+x)^2$ sur [-0.1,1], L = 0.5

On lit que f est décroissante, a un point fixe dans l'intervalle et que celui-ci est non stable.



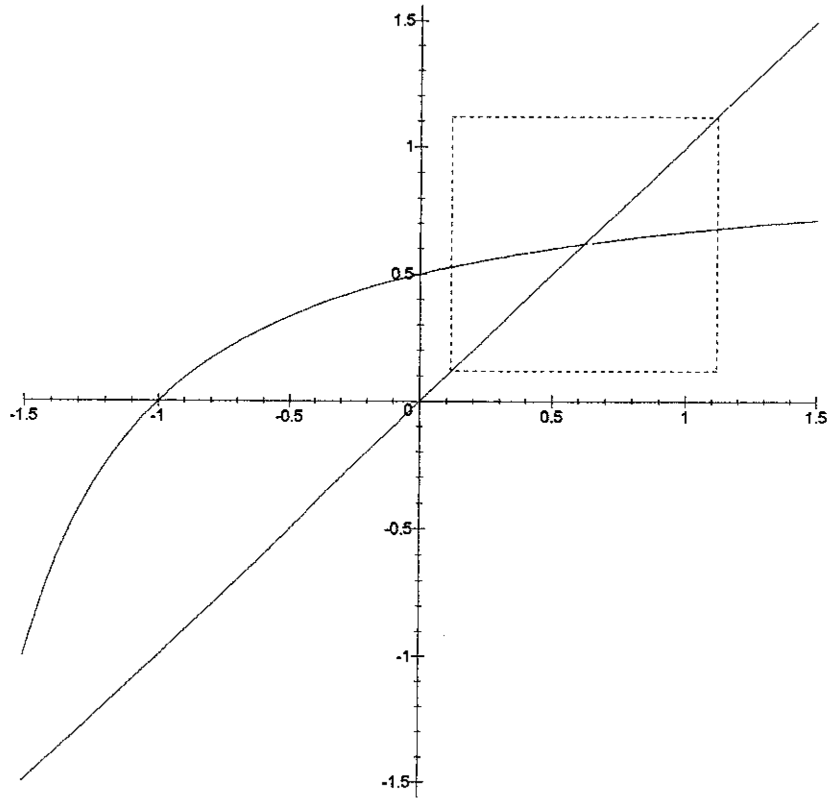
Exemple 4 : $f(x) = 1/(1+x^2)$ sur [0,2], L= 0.5

On lit que f est décroissante, a un point fixe dans l'intervalle et que celui-ci est stable.



Exemple 5 : $f(x) = (1+x)/(2+x)$ sur [-1.5,1.5], L = 0.5

On lit que f est croissante, a un point fixe dans l'intervalle et que celui-ci est stable.



Nous terminons la présentation de ces 2 premières procédures par une suggestion d'exercice : compléter les 4 premiers exemples par une étude de stabilité et les 5 suivants par une étude de la valeur de la dérivée au point fixe.

3) Graphe pour étudier une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$.

La troisième procédure (*sirecu*) permet de représenter à partir d'un terme initial u_o (à choisir) les n termes suivants (n à choisir), sous forme de points (u_n, u_{n+1}).

On dessine, dans une fenêtre calculée par l'ordinateur à partir des données, le graphe de la fonction f (à choisir), le graphe de la droite y = x, et alternativement, à partir de u_i, le segment horizontal $[y = u_i]$, entre la courbe et la droite y = x, et le segment vertical $[x = u_{i+1}]$, entre la droite y = x et la courbe.

La fenêtre est un rectangle ; les extrémités de sa projection sur l'axe des abscisses sont calculées à partir des valeurs u_i demandées, comme l'inf et le sup de celles-ci.

Ceci permet de visualiser les escaliers ou colimaçons convergeant vers les points fixes de f ou divergeant.

Attention : les graphiques ne sont pas toujours représentés dans un repère normé, cela oblige à interpréter les données visuelles en tenant compte de cette donnée.

<u>Texte de la procédure et exemples de sorties</u>:

Procédure "sirecu" permettant de tracer la suite (u_n, u_{n+1}):

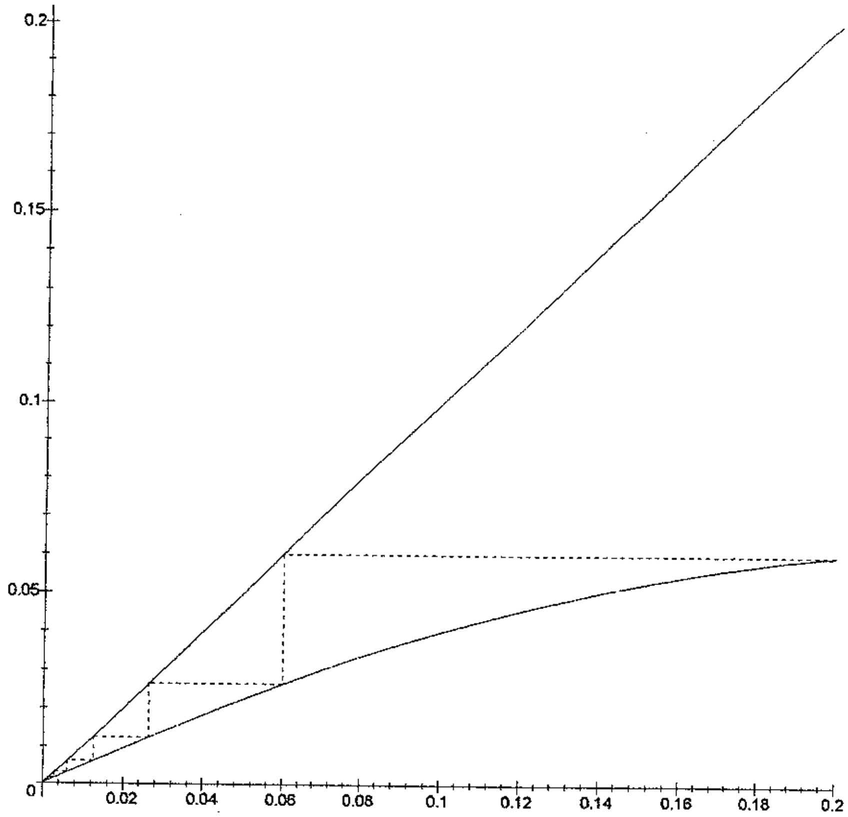
```
sirecu := proc(g, u, n)
local i, j, a, b, M, N, L, H, GF, GL, GB;
   x.0 := u;
   for i to n do x.i := g(x.(i - 1)) od;
   for j to n do
      M.j := [x.(j - 1), x.j];
      N.j := [x.j, x.j];
      L.j := [M.j, N.j]
   od;
   L := [seq(op(L.j), j = 1 .. n)];
   H := [seq(op(1, M.j), j = 1 .. n)];
   a := min(op(H));
   b := max(op(H));
   GF := plot(g, a .. b, color = red);
   GB := plot(x -> x, a .. b, color = blue);
   GL := plot(L, a .. b, color = green);
   display(GL, GF, GB)
end
```

Dans l'appel de la procédure, le premier paramètre à donner est la fonction, le second le terme initial u_0 et le dernier le nombre de termes à calculer.

ATTENTION : dans cette brochure, les escaliers et les colimaçons sont en trait noir pointillé, le graphe de f et la "$1^{ère}$ bissectrice" sont en trait noir plein ; sur l'écran, en revanche, le graphe de f est en rouge, la "$1^{ère}$ bissectrice" en bleu, les escaliers et les colimaçons en vert.

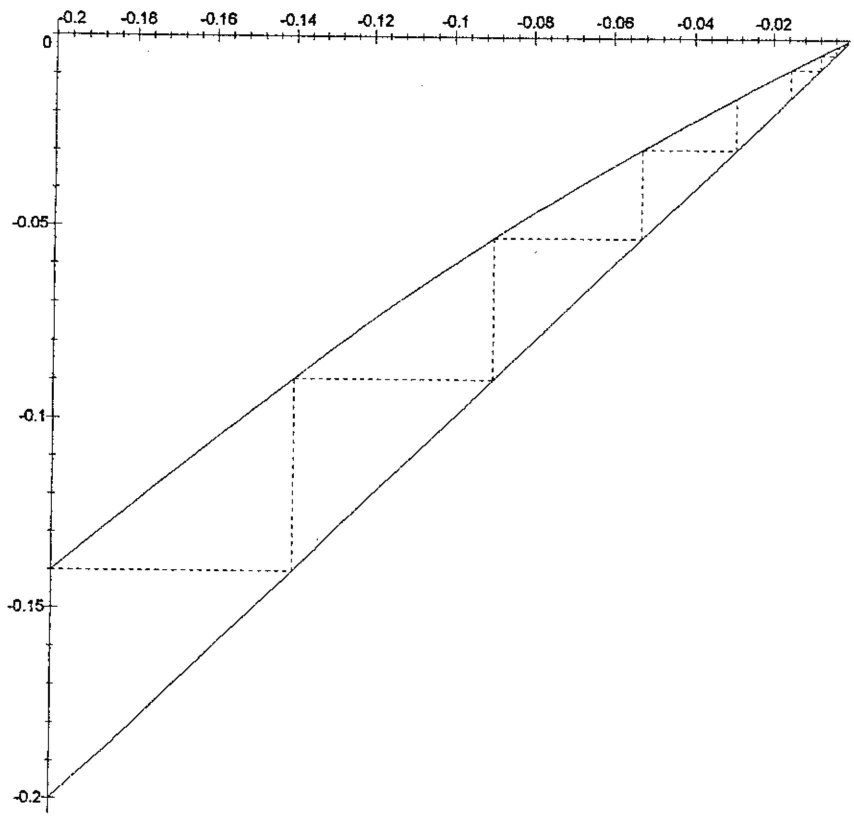
Exemple 1 : $f(x) = 0.5\,x - x^2$, à partir de 0.2, 10 termes

On voit une fonction croissante sur l'intervalle et un escalier " descendant".



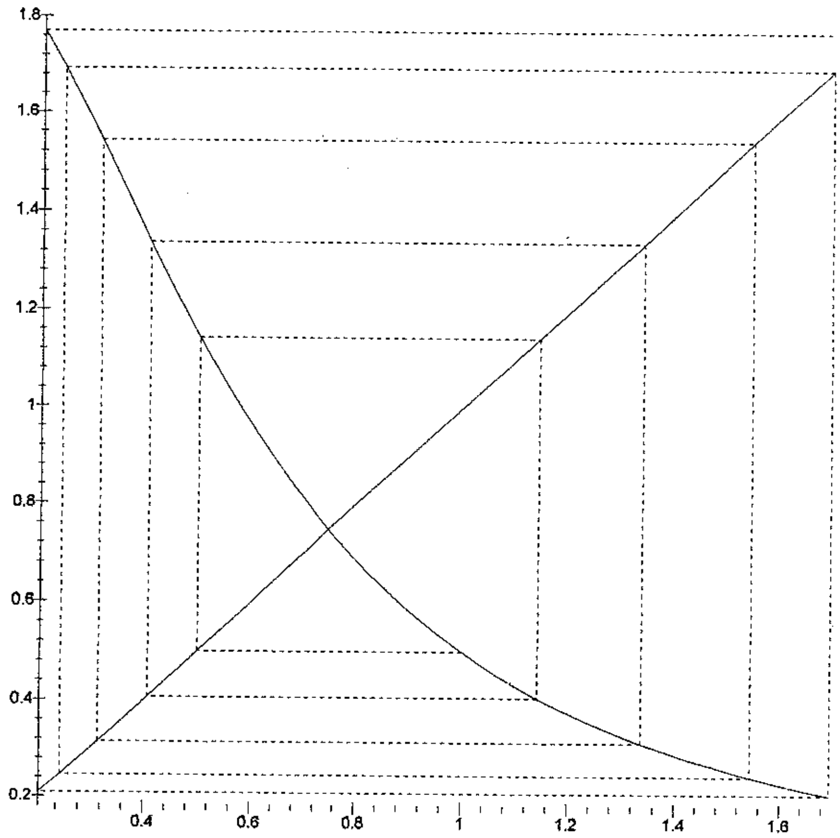
Exemple 2 : $f(x) = 0.5\,x - x^2$, à partir de - 0.2, 10 termes

On voit une fonction croissante sur l'intervalle et un escalier "montant".



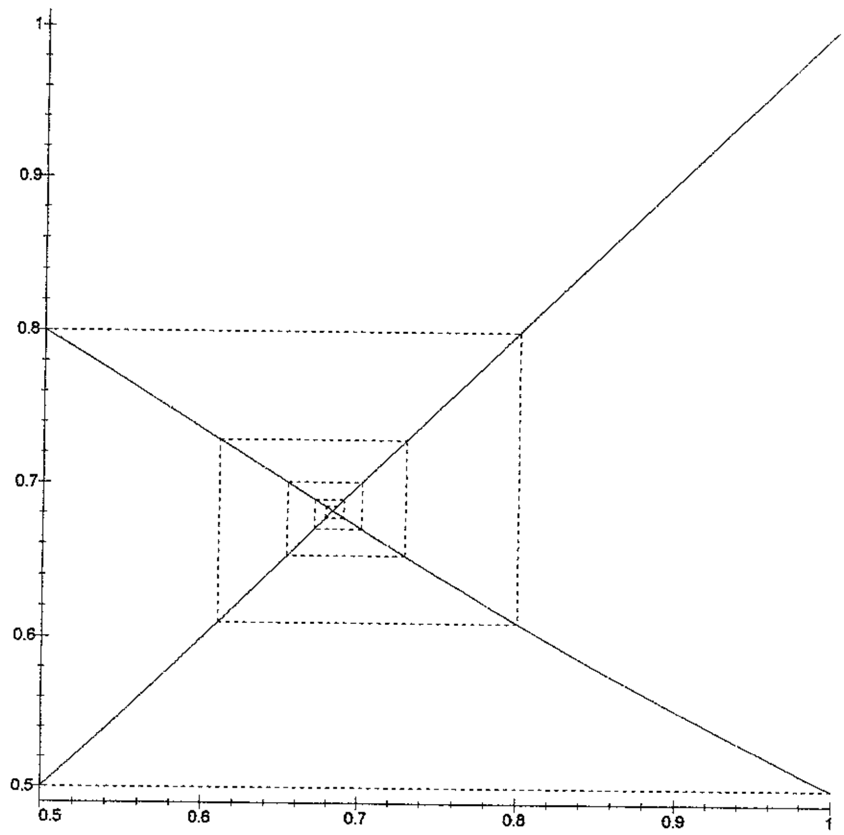
Exemple 3 : $f(x) = 2/(1+3x^2)$, à partir de 1, 10 termes

On voit une fonction décroissante sur l'intervalle et un colimaçon "déroulant".



Exemple 4 : $f(x) = 1/(1+x^2)$, à partir de 1, 10 termes

On voit une fonction décroissante sur l'intervalle et un colimaçon "enroulant".



Remarque : on pourra déjà mettre en relation pour ces 4 exemples les divers renseignements obtenus par les procédures précédentes.

4) Autre représentation possible d'une suite u_n

Nous avons écrit une quatrième procédure qui permet de représenter la fonction qui à n associe u_n: l'axe des abscisses est celui des n et sur celui des ordonnées on lit la valeur de u_n. C'est la procédure *bande*, qui trace d'une part trois droites horizontales: y = Lim + e, y = Lim - e et y = Lim, où Lim est la limite éventuelle et e l'écart à cette limite et d'autre part les points (n,u_n). Cela permet de visualiser très nettement le comportement de la suite et sa convergence ou non convergence, monotone ou non, vers cette limite suspectée. Il n'y a pas ici de problème d'échelle : celle de l'axe des abscisses dépend du nombre de termes calculés, celle de l'axe des ordonnées des valeurs prises par la suite.

Texte de la procédure et exemples:

Procédure "*bande*" traçant la suite (n,u_n):

```
bande := proc(f, u, n, l, e)
local h, b, i, M, GP, GH, GB, GM, k, m;
   h := unapply(l + e, x);
   b := unapply(l - e, x);
   x.0 := u;
   m := unapply(l, x);
   for i to n do x.i := f(x.(i - 1)); M.i := [i, x.i] od;
   M.0 := [0, x.0];
   M := [seq(M.k, k = 0 .. n)];
   GP := plot(M, x = 0 .. n, style = point, symbol = cross,
      color = red);
   GH := plot(h, 0 .. n, color = green);
   GB := plot(b, 0 .. n, color = green);
   GM := plot(m, 0 .. n, color = blue);
   display(GP, GH, GB, GM)
end
```

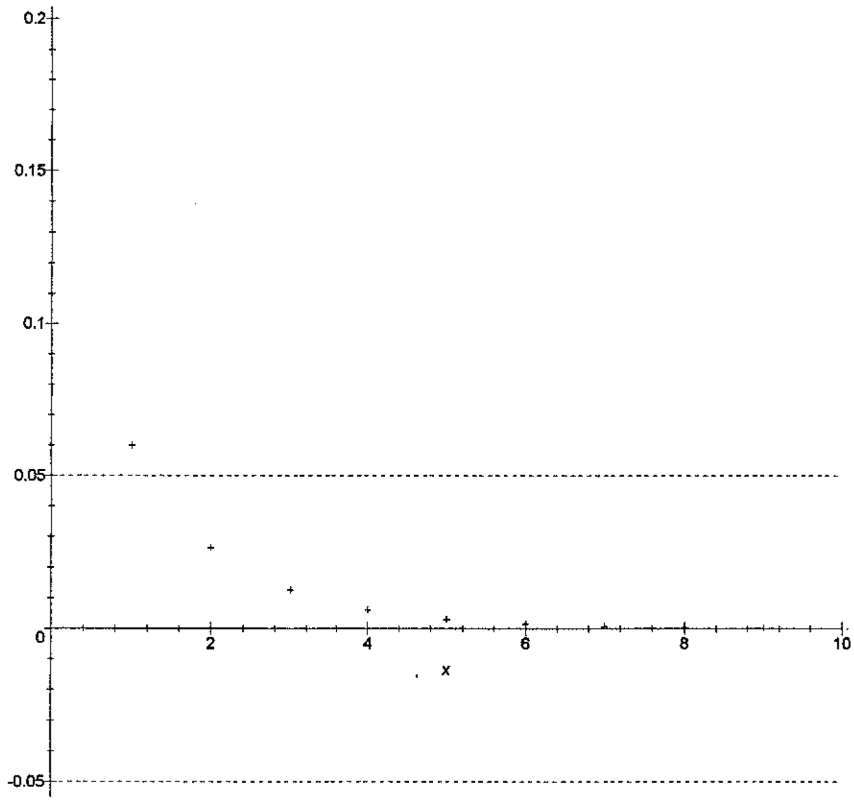
Dans l'appel de cette procédure, il faut donner, dans l'ordre, la fonction, le premier terme, le nombre de termes à calculer, la limite éventuelle Lim et enfin la demi - largeur de la bande, e.

ATTENTION : dans cette brochure, les droites extrêmes sont en trait noir pointillé, la droite médiane est en trait noir plein et les points sont des croix noires ; sur l'écran, en revanche, les droites extrêmes sont en vert, la droite médiane en bleu et les points sont rouges.

On comparera les 4 exemples suivants aux 4 précédents.

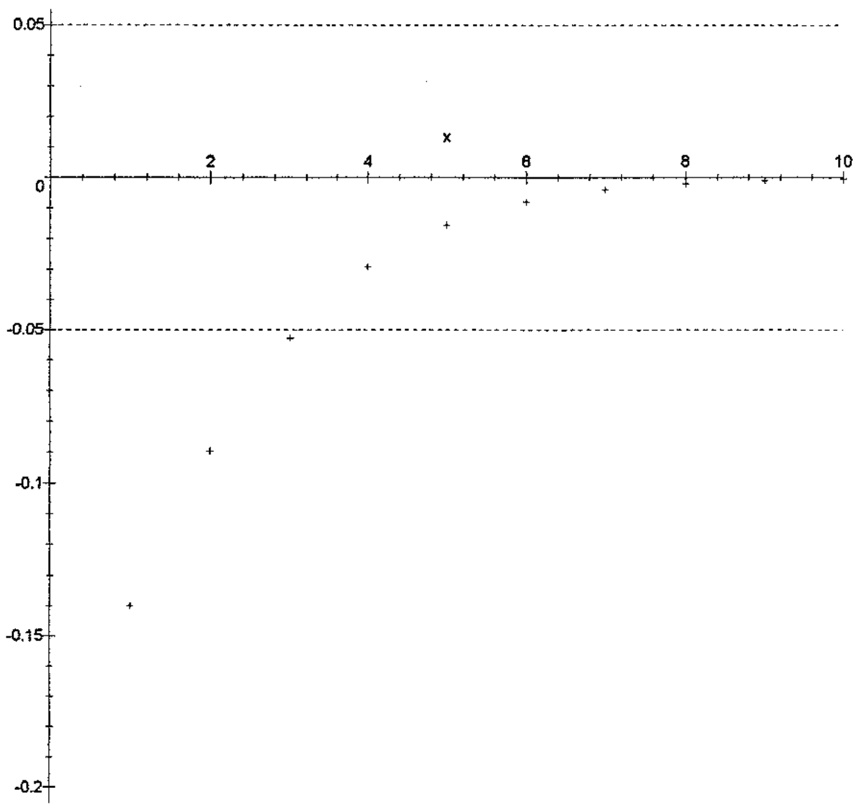
Exemple 1 : $f(x) = 0.5\,x - x^2$, à partir de 0.2, 10 termes, Lim = 0 et e = 0.05

On voit une suite décroissante qui "a l'air" de rester dans la bande.



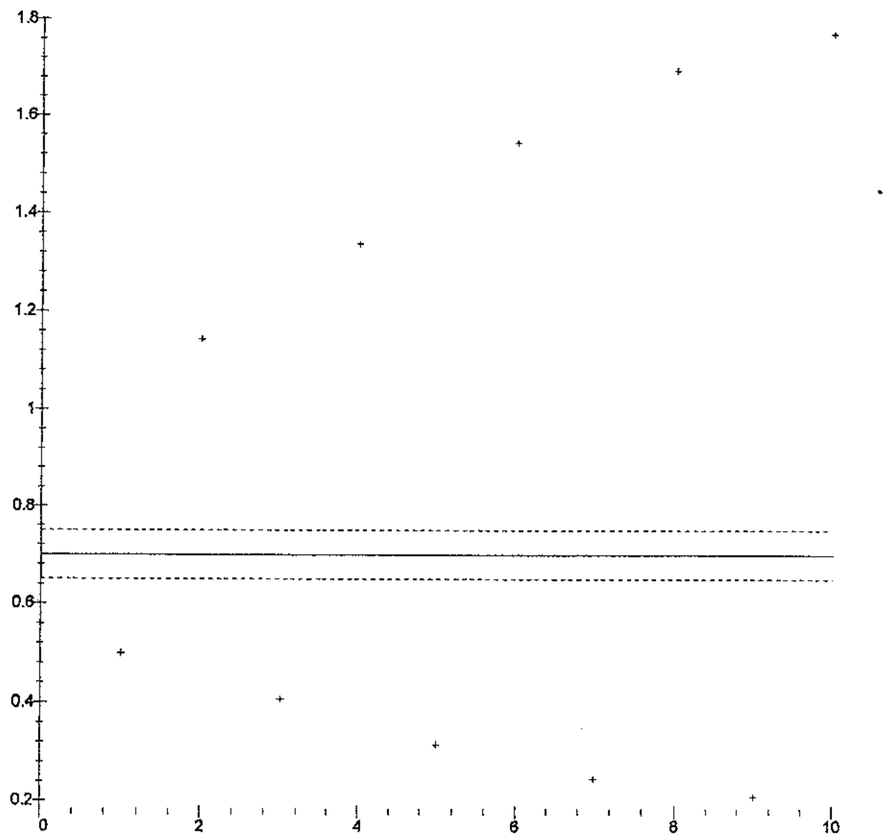
Exemple 2 : $f(x) = 0.5\,x - x^2$, à partir de - 0.2, 10 termes, Lim = 0 et e = 0.05

On voit une suite croissante qui "a l'air" de rester dans la bande.



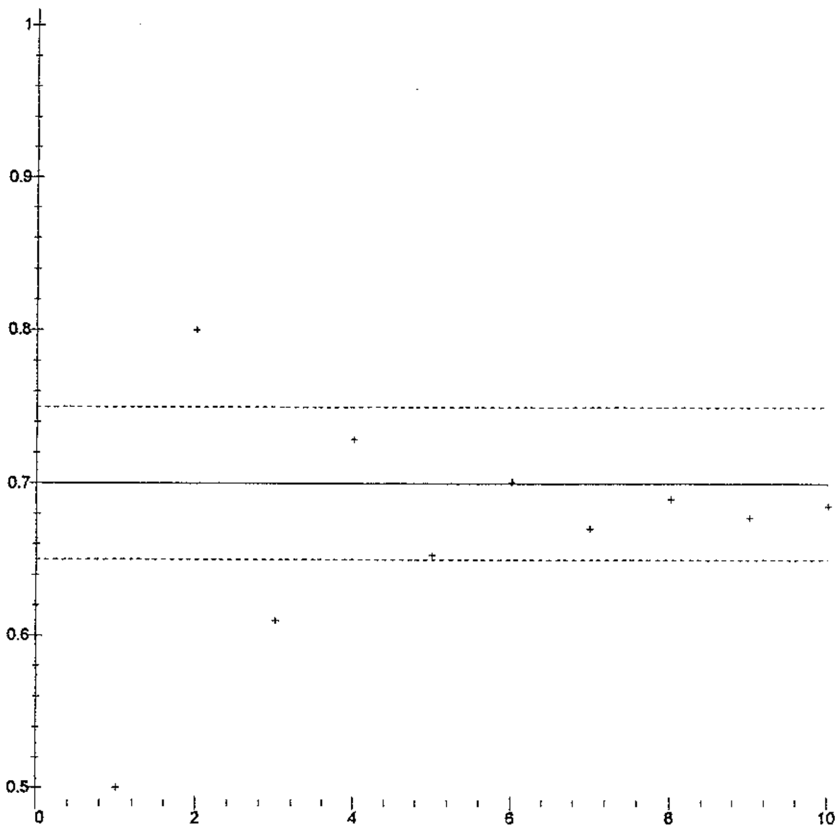
Exemple 3: $f(x) = 2/(1+3\,x^2)$, à partir de 1, 10 termes, Lim= 0.7 et e = 0.05

On voit une suite formée de 2 sous-suites monotones et qui "ont l'air" de ne pas rester dans la bande.



Exemple 4: $f(x) = 1/(1+x^2)$, à partir de 1, 10 termes, Lim = 0.45, e = 0.05

On voit une suite formée de 2 sous-suites monotones et qui "ont l'air" de rester dans la bande.



II Convergence, divergence des suites récurrentes ($u_n = f(u_{n-1})$) et points fixes de f.

Nous proposons une séquence de cinq séances comprenant soit essentiellement des exercices soit principalement une exposition de connaissances. Ces cinq séances prévues sont les suivantes : les deux premières utilisent des graphes tracés grâce à Maple, et ont pour objectif de faire faire aux étudiants des conjectures à partir des graphiques sur les relations entre les points fixes de f (existence, nature) et la nature de la suite (selon le premier terme) ; la troisième séance permet les mises au point théoriques (théorèmes et démonstrations), la quatrième séance est une mise au point méthodologique et la dernière séance propose des études de suites récurrentes variées (on étudie en particulier le cas où f est affine, et certains aspects du cas où f est homographique). Nous indiquons pour les premières séances les idées générales et leurs mises en œuvre (scénarii, exemples de feuilles de TD).

A) Convergence , divergence et existence de point fixes pour une fonction f continue

Les idées générales (objectifs à atteindre) sont les suivantes :

- donner divers exemples, dessinés par Maple (grâce à la troisième procédure *sirecu*), de suites ($u_n = f(u_{n-1})$) qui convergent ou non, et faire expliciter, quand f est continue, le rapport entre la convergence de la suite et l'existence d'un point fixe de la fonction f.

L'image dynamique fournie par la procédure *sirecu* doit être explicitée, la convergence est associée visuellement dans cette représentation à un tassement des points (u_{n-1}, u_n) autour d'un point fixe (modèle dynamique).

On s'arrange pour avoir des colimaçons et des escaliers convergents, ce qui permet de ne pas cantonner les représentations à des convergences monotones.

Objectif complémentaire : enrichir le stock des images des étudiants, les amener à associer, dans le cas des suites récurrentes, point fixe et limite.

- puis faire trouver à partir de graphiques (et démontrer par la suite) que, si f est continue et sans point fixe, toute suite ($u_n = f(u_{n-1})$) diverge, quel que soit le premier terme (cela donne une condition nécessaire de convergence pour les fonctions continues).
- Donner un exemple de convergence pour une fonction non continue sans point fixe.

Objectif complémentaire : distinguer « idée », « représentation » et « démonstration » (nécessaire).

La définition formalisée de la convergence d'une suite doit être rappelée pendant ce temps-là, avec utilisation simultanée d'une représentation graphique différente, en termes de bande autour de la limite (procédure *bande*).

On aborde certaines démonstrations, mais en indiquant qu'on y reviendra juste après, pour introduire des moyens spécifiques pour un certain nombre de ces suites.

Une illustration : un exemple (scénario et feuille de TD)

a) Le scénario

i) Une première partie « qualitative », pour introduire l'idée et le rôle des points fixes, rappeler la définition formalisée et arriver aux démonstrations.

- Faire réfléchir les étudiants aux représentations graphiques possibles des premiers termes d'une suite récurrente : on trace sur une droite (u_n), dans le plan (n, u_n), enfin (u_n, u_{n+1}).
- S'assurer du sens de la représentation graphique choisie (par exemple tracer les lignes intermédiaires à l'envers, ou obliques et demander si c'est encore utile).
- Donner un certain nombre de graphiques (obtenus avec la procédure « *sirecu* ») de suites récurrentes convergentes et divergentes, monotones ou non, et demander de caractériser la limite des suites qui « ont l'air » de converger en utilisant la fonction f (avec le point fixe).

On présente des exemples de types variés :

- suite convergente monotone, escaliers, f continue, deux exemples : $f(x) = 0.5\ x + 1$, $f(x) = 1 - 1/(1+(x+1)^2)$
- suite convergente, colimaçon, f continue, un exemple : $f(x) = 1/(1+x^2)$
- suite divergente, f continue avec point fixe, un colimaçon et un escalier : $f(x) = 2/(1+3\ x^2)$ et $f(x) = 0.5\ x^3-1$
- suite divergente, f continue sans point fixe : $f(x) = 1+x^{3/2}$
- suite convergente, f non continue, f sans point fixe : $f(x) = 0.5\ (x + E(x) + a)$, avec a = 0, 1 ou 2

- Rappeler la définition formalisée de la convergence, illustrer graphiquement en terme de bande (à la main, puis sur l'ordinateur, avec une autre représentation graphique).

ii) Une deuxième partie, comportant des démonstrations : rappeler que les représentations aident mais ne démontrent pas.

- Une condition nécessaire pour une fonction continue : l'existence d'un point fixe. Démontrer que si f est continue et n'a pas de point fixe, toute suite récurrente ($u_n = f(u_{n-1})$) diverge (on traitera avant ou après le cas particulier ci-dessus).
- Faire établir que la condition n'est pas suffisante (démontrer que la suite ci-dessus illustrant ce cas converge) : suites convergentes définies à l'aide d'une fonction non continue avec ou sans point fixe.
- Reprendre une à une les autres suites introduites dans la première partie et démontrer ce qui se fait facilement, ou qu'on ne pourra pas faire autrement que directement, en indiquant justement qu'il y a des moyens spécifiques pour économiser le travail dans certains cas, moyens qui vont être vus ensuite.

b) Feuille de TD 1: **1er travail sur les suites récurrentes: diverses représentations et mise en évidence du rôle de l'existence des points fixes.**

A. Comment représenter graphiquement les premiers termes d'une suite récurrente définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$? Réfléchir à partir de l'exemple $f(x)= 0.5\ x + 1$, $u_0 = 0$ et $n = 10$.

B. Etude d'exemples (voir Annexe 1) :
On donne les graphes de 10 fonctions numérotées de 1 à 10 et des représentations graphiques de suites récurrentes obtenues à partir de ces fonctions avec plusieurs choix du premier terme, numérotés 1a, 1b,...2a, 2b ...(représentations réalisées grâce à la procédure Maple *sirecu).* Sauf cas particuliers, on a demandé les 10 premiers termes. Attention aux échelles en abscisse et en ordonnée: les repères, orthogonaux, ne sont pas toujours normés !

1.	$f(x) = 0.5\ x + 1$	1a : $u_0 = 0$;	1b : $u_0 = 1$;	1c : $u_0 = 3$	
2.	$f(x) = 1-1/(1+(1+x)^2$	2a : $u_0 = 0$;	2b : $u_0 = 2$;	2c : $u_0 = -1.5$	
3.	$f(x) = 1/(1+x^2)$	3a : $u_0 = 0$;	3b : $u_0 = 1$;	3c : $u_0 = -1$	
4.	$f(x) = 0.5\ x^3-1$	4a : $u_0 = 0.5$;	4b : $u_0 = 1$;	4c : $u_0 = 1.5$	4d : $u_0 = 1.8$
		4e : $u_0 = 1.7$	4f : $u_0 = 1.75$	4g : $u_0 = 1.77$	
5.	$f(x) = 1.5\ x-1$	5a : $u_0 = 1$;	5b : $u_0 = 3$		
6.	$f(x) = 2/(1+3x^2)$	6a : $u_0 = 0.5$;	6b : $u_0 = 1$		
7.	$f(x) = 1+x^{3/2}$	7a : $u_0 = 0$;	7b : $u_0 = 3$		
8.	$f(x) = 0.5\ (x + E(x)+1)$	8a : $u_0 = 4$;	8b : $u_0 = 4.5$		
9.	$f(x) = 0.5\ (x + E(x)+2)$	9a : $u_0 = 4$;	9b : $u_0 = 4.5$		
10.	$f(x) = 0.5\ (x + E(x))$	10a : $u_0 = 4.5$;	10b : $u_0 = 3.9$		

1. Retrouvez le mode de représentation choisie.
2. Donnez une description des fonctions et des suites, en précisant vos critères. Lorsque ces suites "ont l'air" de converger, essayez de caractériser la limite à l'aide de la fonction f.
3. On reprend les exemples 7:
   a. Essayez de dégager une propriété qui explique la situation.
   b. Propriété générale à démontrer (donnée par l'enseignant).
   c. Vérifiez que l'exemple 7 relève bien de cette propriété.
   d. Cette condition est-elle suffisante ? (revenir aux exemples).
4. Etudiez les exemples 8, 9, 10. (travail sur la continuité).

C. On complète les graphiques déjà donnés (voir Annexe 1bis).
1. Quel est ce nouveau mode de représentation ?
2. Etudiez systématiquement les exemples 1 à 6 : dans le cas où les graphes permettent de faire une conjecture, essayez de trouver des idées de preuves de la convergence ou de la divergence des suites.

D. Bilan:

Ecrire une condition nécessaire de convergence pour des fonctions continues.

Ecrire la définition formalisée de la convergence d'une suite et faire une liste des démonstrations possibles de convergence.

L'idée est de trouver des critères spécifiques de convergence.

B) Convergence, divergence et nature des points fixes de la fonction f (continue, ou même dérivable)

Les idées générales et les objectifs sont les suivants :

- Faire associer visuellement convergence, intervalle de stabilité et point fixe attractif (valeur absolue de la dérivée plus petite que 1). Même chose avec point fixe répulsif.

Les procédures *inter* et *boite* permettent d'étudier un point fixe (valeur de la dérivée avec *inter*, stabilité avec *boite*). La procédure *sirecu* permet d'avoir une idée de la convergence (avec le problème résolu par le prof du choix du premier terme).

- Donner des exemples de fonctions croissantes et décroissantes, et associer la nature probable des suites à ce caractère de la fonction.

Une illustration : un exemple de scénario et de feuille de TD (n°2).

a) Scénario:

La première question permet de rappeler les résultats précédents, et de remettre en mémoire les graphes déjà étudiés.

La deuxième question, qui est très importante dans la démarche suivie, doit amener les étudiants à associer visuellement convergence (ou divergence), intervalle de stabilité (grâce à la boîte autour du point fixe), valeur de la dérivée au point fixe (on peut comparer à 1 la valeur absolue de la dérivée grâce aux dessins des bissectrices des axes).

La troisième question est un premier travail un peu systématique (généralisant ce qui vient d'être fait) autour de la nature des points fixes, qui mélange les deux points de vue graphique et numérique.

b) Feuille de TD 2 **: convergence d'une suite récurrente définie par $u_{n+1}= f(u_n)$ et nature des points fixes de la fonction f.**

1) On reprend les exemples 1 à 6 du TD1:

1.f(x) = 0.5 x + 1	1a : $u_0 = 0$;	1b : $u_0 = 1$;	1c : $u_0 = 3$	
2.f(x) = 1-1/(1+(1+x)^2	2a : $u_0 = 0$;	2b : $u_0 = 2$;	2c : $u_0 = -1.5$	
3.f(x) = 1/(1+x^2)	3a : $u_0 = 0$;	3b : $u_0 = 1$;	3c : $u_0 = -1$	
4.f(x) = 0.5 x^3-1	4a : $u_0 = 0.5$;	4b : $u_0 = 1$;	4c : $u_0 = 1.5$	4d : $u_0 = 1.8$
	4e : $u_0 = 1.7$	4f : $u_0 = 1.75$	4g : $u_0 = 1.77$	
5.f(x) = 1.5 x-1	5a: $u_0 = 1$;	5b: $u_0 = 3$		
6.f(x) = 2/(1+3x^2)	6a: $u_0 = 0.5$;	6b: $u_0 = 1$		

Montrez que ce sont des fonctions continues qui admettent un ou des points fixes.

2) a) Pour l'exemple 4 et l'exemple 6, voici des représentations de la fonction au voisinage d'un point fixe obtenues à l'aide de 2 procédures Maple : *inter* qui trace quatre courbes (le graphe de f, la "1ère bissectrice", la parallèle à la "2ème bissectrice" passant par le point fixe et la tangente au graphe de f en ce point fixe), *boite* qui dessine le graphe de f, la "1ère bissectrice" et une boîte carrée autour du point fixe dont une diagonale est portée par la "1ère bissectrice" (attention : le carré peut ne pas l'être en raison des échelles différentes sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées). (voir annexe 2)

Quelles propriétés de f au point fixe pouvez-vous lire sur ces représentations en terme de dérivée et d'intervalle de stabilité ?

b) On donne ces mêmes représentations pour les autre exemples.(voir annexe 2) Cherchez s'il y a un lien apparent entre convergence, divergence et allure du graphe de f au voisinage du point fixe. Quelles conjectures pouvez-vous faire ?

3) On définit les notions de point fixe attractif et de point fixe répulsif pour une fonction continue f :

Un réel α est un *point attractif* pour f s'il existe un voisinage $V(\alpha)$ tel que pour tout u_0 de $V(\alpha)$ la suite récurrente $u_{n+1}= f(u_n)$ de premier terme u_0 converge vers α.

Un réel α est un *point répulsif* s'il existe un voisinage $V(\alpha)$ tel que, pour tout u_0 de $V(\alpha)$ différent de α, il existe un rang p tel que le terme u_p de la suite récurrente $u_{n+1}= f(u_n)$ de premier terme u_0 ne soit pas dans ce voisinage $V(\alpha)$.

a) Montrez que si le point fixe α est répulsif, la suite $u_{n+1}= f(u_n)$ ne peut converger vers α sauf si elle est stationnaire et égale à α à partir d'un certain rang.

b) Réécrire les conjectures précédentes avec ce vocabulaire.

c) Faire le graphe d'une fonction continue croissante ayant 2 points fixes : peut-on deviner la nature de ces points fixes ?

d) Même question pour une fonction continue croissante ayant 3 points fixes ?

e) Peut-on donner la nature de 2 points fixes consécutifs pour une fonction quelconque ?

f) Tout point fixe est-il attractif ou répulsif ?

4) **Bilan:** si une fonction continue a des points fixes dont on connaît la nature, on peut conclure sur la convergence des suites récurrentes issues de points d'un certain voisinage de ces points fixes.

C) Mises au point théoriques et méthodologiques

Les deux séances suivantes consistent à revenir systématiquement sur ce qui a déjà été fait, tant sur le plan des théorèmes (et de leurs démonstrations) que sur le plan méthodologique. La première de celle-ci peut être conçue comme un complément de cours. Pour la deuxième en revanche, ce sont les étudiants qui sont chargés de mettre au point une méthode d'étude pour ce type de suites, en intégrant les graphiques que Maple peut leur fournir. Cette dernière séance est très importante dans la démarche suivie, pour permettre une appropriation de ce qui a été fait.

a) Feuille de TD 3 : **Théorèmes sur la détermination de la nature des points fixes d'une fonction f réelle au moins continue**

1) Conditions suffisantes d'existence de point fixe attractif sur un intervalle.

Théorème 0. Si f est une fonction réelle continue, définie sur un intervalle I <u>fermé</u> <u>borné</u> <u>stable</u>, si de plus f est <u>croissante</u>, alors il existe des points fixes de f dans I et toute suite récurrente $u_{n+1}= f(u_n)$ de premier terme dans I est convergente.

Remarque: il peut y avoir des points fixes répulsifs dans I.

Ce théorème résulte du théorème des valeurs intermédiaires et de celui sur les suites monotones bornées. Attention : une suite $u_{n+1}= f(u_n)$ peut être décroissante, si $u_0 > u_1$.

Théorème 1. Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I <u>fermé</u> <u>stable</u>, sur lequel elle est <u>contractante</u> de rapport k (k<1). Alors il existe un unique point fixe de f dans I et ce point est attractif. Toute suite récurrente $u_{n+1}= f(u_n)$ de premier terme dans I converge vers ce point fixe.

MAIS en général on ne connaît pas I.

L'existence, l'unicité et la convergence résultent par exemple du caractère contractant de f ,qui permet de montrer que la suite (u_n) est de Cauchy en la comparant à une suite géométrique.

Théorème 2. Soit f définie sur un intervalle I <u>fermé</u> <u>borné</u> <u>stable</u> sur lequel f vérifie , pour tout x et tout y de I, $|f(x)-f(y)| < |x-y|$. Alors il existe un unique point fixe et ce point est attractif. Toute suite récurrente $u_{n+1}= f(u_n)$ de premier terme dans I converge vers ce point fixe.

MAIS en général on ne connaît pas I.

L'existence résulte du théorème des valeurs intermédiaires, l'unicité de l'inégalité stricte et la convergence est due à la compacité de l'intervalle I.

2) Conditions suffisantes d'attractivité pour un point fixe sur un intervalle

Théorème 3 . Soit f une fonction réelle de classe C_1 sur un intervalle I, ayant un point fixe α dans I tel que $|f'(\alpha)| < 1$. Alors αest un point fixe attractif de f.

Il existe un voisinage (inconnu) de α tel que toute suite récurrente $u_{n+1}= f(u_n)$ de premier terme dans ce voisinage converge vers α.

Théorème 4 .(dû à D. Perrin) Soit f une fonction réelle de classe C1, monotone, définie sur [a,b] et α un point fixe de f dans [a,b]. On suppose que $|f'| < 1$ sur ce même intervalle. Alors on peut déterminer un intervalle stable I autour de α : si f est croissante, I = [a,b] et si f est décroissante, I = [a,f(a)] ou bien I = [f(b),b].

C'est le seul cas où on explicite un intervalle stable.

3) **Liens entre ces théorèmes**:

a) La CS du théorème 3 implique que les hypothèses du théorème 1 sont vérifiées.

b) Comparer les hypothèses des théorèmes 1 et 2.

c) Réfléchir aux moyens d'obtenir les hypothèses du théorème 1.

d) Reprendre les exemples 1 à 6 du TD1 en essayant d'utiliser les théorèmes précédents.

e) Peut-on toujours déterminer la nature des points fixes d'une fonction f dérivable ?

4) **Exploration de certains cas où la dérivée au point fixe vaut 1 ou –1.**

a) Cas où la dérivée au point fixe vaut 1 :

Il y a quatre possibilités de graphes au voisinage d'un tel point fixe α :

Exemple 1 : $f(x) = x\,(1-x)$ ou encore $f(x) = x\,e^{-x}$, $\alpha = 0$.

Exemple 2 : $f(x) = e^{x} - 1$, $\alpha = 0$.

Exemple 3 : $f(x) = \sin x$, $\alpha = 0$.

Exemple 4 : $f(x) = x^3 + x$, $\alpha = 0$.

b) Cas où la dérivée au point fixe vaut –1 :

Il est difficile d'énumérer tous les cas possibles !

Exemple 1 : $f(x) = x\,(x-1)$, $\alpha = 0$

Exemple 2 : $f(x) = 2/(1+x^2)$, $\alpha = 1$.

Exemple 3 : $f(x) = x^3 - b\,x^2 + x$, où b est un paramètre (0 et b sont des points fixes)

5) **Bilan :** a) Si tous les points fixes sont répulsifs, aucune suite ne peut converger sauf les suites stationnaires.

b) S'il existe un seul point attractif, les suites qui convergent ne peuvent converger que vers ce point attractif. Mais comment choisir le premier terme de la suite $u_{n+1}=f(u_n)$ pour que la suite converge : le problème est de déterminer le domaine d'attraction de ce point attractif.

b) Feuille de TD 4: **mise au point d'une méthode d'étude des suites récurrentes.**

L'idée de cette séance est de laisser les étudiants sans directive et de rassembler les différentes productions pour en tirer des éléments de méthode. On s'attend à voir proposer au moins : une étude graphique et numérique de la fonction f (points fixes et nature de ces points fixes), une exploration pour trouver des intervalles de stabilité autour des points fixes attractifs, si f est croissante une utilisation du théorème sur les suites monotones bornées…

D) *Applications de ce qui précède*

Le but de cette séance est de mettre en œuvre les éléments de méthode élaborés précédemment.

Feuille de TD 5 : **exploration systématique**

On peut penser proposer l'étude de suites récurrentes particulières comme $u_{n+1} = \exp(u_n)$ ou $u_{n+1} = a / (1 + \exp(b\, u_n))$... ou bien proposer quelques études plus systématiques comme le cas des suites définies par des fonctions affines ou des fonctions homographiques.

Le cas des fonctions affines s'explore totalement de plusieurs façons (en utilisant le théorème 4 ou par des méthodes élémentaires pour se ramener à des suites géométriques).

Dans le cas des suites homographiques, on peut faire établir plusieurs résultats : par exemple, si on écrit $f(x) = (a\,x + b) / (c\,x + d)$, demander de trouver une CNS sur les coefficients (a, b, c, d) pour que f ait 2 points fixes distincts α et β, montrer qu'alors $f'(\alpha)\, f'(\beta) = 1$, en déduire qu'en général un des points fixes est attractif et l'autre répulsif, étudier l'ensemble K des valeurs réelles à partir desquelles la suite de premier terme dans K n'est pas définie, montrer que si u_0 n'est pas dans K la suite (u_n) converge vers le point fixe attractif...

Une autre idée est de faire étudier les suites définies à partir de la famille de fonctions du second degré $f(x) = a\,x\,(1 - x)$, où a est un paramètre qui selon sa valeur va permettre une première rencontre avec le "chaos" (voir l'exemple 1 du paragraphe 5a du TD 3).

Enfin, on peut aussi étudier des suites provenant de modélisations physiques. Par exemple, des relations de récurrence, issues d'une modélisation de circuits électriques formés de n cellules où on calcule la résistance globale du circuit, fournissent des suites du type suivant :

$R_{n+1} = a + 1/((1/b)+(1/R_n))$ ou $R_{n+1} = 1/((1/b)+(1/\ a+R_n\ ))$

$R_{n+1} = a/2 + 1/((1/b)+(1/(a/2\ +R_n)))$ ou encore $R_{n+1} = 1/((1/2b)+(1/\ (a+\ 1/((1/2b)+(1/R_n)))))$...

III Vitesse de convergence : quelques pistes

a) Les idées générales

1) En s'aidant cette fois-ci d'un tableau de nombres établi avec Maple, donner une idée de ce qu'est une vitesse de convergence en comparant les valeurs des termes successifs de suites (non récurrentes) de limite nulle.

2) Retour aux suites récurrentes : reprendre des graphes précédents, avec des suites monotones convergentes, et essayer de mettre en rapport vitesse de convergence et « hauteur » des marches de « l'escalier » dessiné par *sirecu*, donc vitesse de convergence et valeur de $|f'(a)|$ où a est le point fixe limite.

b) *Feuille de TD 6* : **étude de la vitesse de convergence des suites $u_n = g(n)$ et des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$.**

1) Exemples de vitesse avec des suites de la forme $u_n = g(n)$.

a) Voici des fonctions simples qui ont pour limite 0 quand la variable tend vers ∞:
$g_0(x) = 1/x^2$, $g_1(x) = 1/\mathrm{Ln}(x)$, $g_2(x) = 1/\sqrt{x}$, $g_3(x) = 1/\mathrm{Ln}(\mathrm{Ln}(x))$, $g_4(x) = 1/x$,
$g_5(x) = 1/(x\ \mathrm{Ln}(x))$, $g_6(x) = 0.1^x$, $g_7(x) = 0.9^{2x}$, $g_8(x) = e^{-x}$, $g_9(x) = 0.9^x$, $g_{10}(x) = 0.1^{2x}$.
Vérifiez cette assertion.

b) On donne des tableaux des valeurs prises par ces fonctions pour des n allant de 2 à 100 éventuellement. Comparez les valeurs de n pour lesquelles ces fonctions sont inférieures à $10^{-3}, 10^{-4}$...

c) Classez ces fonctions d'après le critère de rapidité de convergence vers 0.

2) Exemples de vitesse de convergence de suites $u_{n+1} = f(u_n)$ qui se ramènent à des suites $u_n = g(n)$ (exemples dus à M. Rogalski)

a) Pour les fonctions suivantes, vérifiez que 0 est un point fixe, calculez explicitement u_n en fonction de n et en déduire la vitesse de convergence, c'est à dire comparez avec les fonctions g du paragraphe précédent:

$f_0(x) = x/(1+x)$; $f_1(x) = x/2$; $f_2(x) = x^2/2$; $f_3(x) = 2^{(-1/x)}$ si $x \neq 0$ et 0 si $x = 0$;
$f_4(x) = x/(1+x^{(1/\alpha)})^{\alpha}$ où $\alpha > 0$; $f_5(x) = 1/\mathrm{Ln}(1+e^{(1/x)})$ si $x \neq 0$ et 0 si $x = 0$.

Ces 6 exemples sont immédiats et motivent des conjectures ou des réflexions sur les 3 cas: $f'(0) = 0$, $0 < |f'(0)| < 1$ et $|f'(0)| = 1$.

b) Voici encore deux exemples, plus difficiles :

$f_6(x) = x/\ln(1/x)$ si $x > 0$ et 0 si $x = 0$: $f'(0) = 0$ mais $f''(0)$ n'existe pas. Encadrez u_n par des suites de la forme $(1/n^n)^{\alpha}$.

$f_7(x) = x - \exp(-\exp(1/x))$: u_n décroît vers 0 mais, pour tout $\alpha > 0$, on peut minorer u_n par $c_\alpha/(\mathrm{Ln}\ n)^{\alpha}$ où $c_\alpha > 0$.

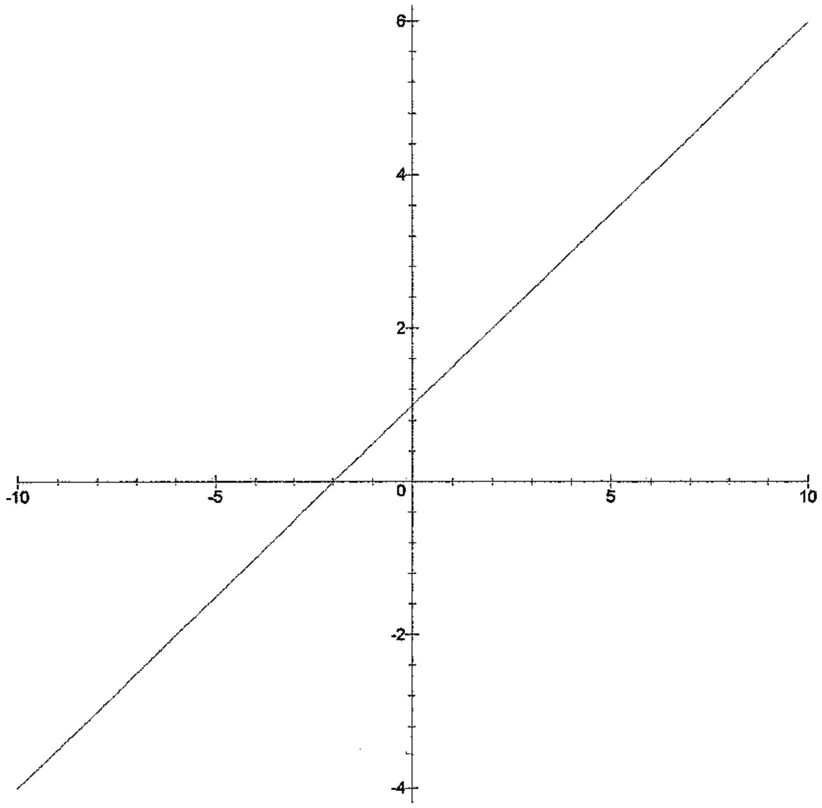
3) Vers un peu de théorie et une idée d'accélération de convergence.

On peut compléter le théorème 1 du TD 3 par la vitesse de convergence en k^n, utiliser les développements de Taylor au voisinage du point fixe pour préciser la vitesse, évoquer la méthode d'Aïtken pour accélérer la convergence ...

ANNEXE 1

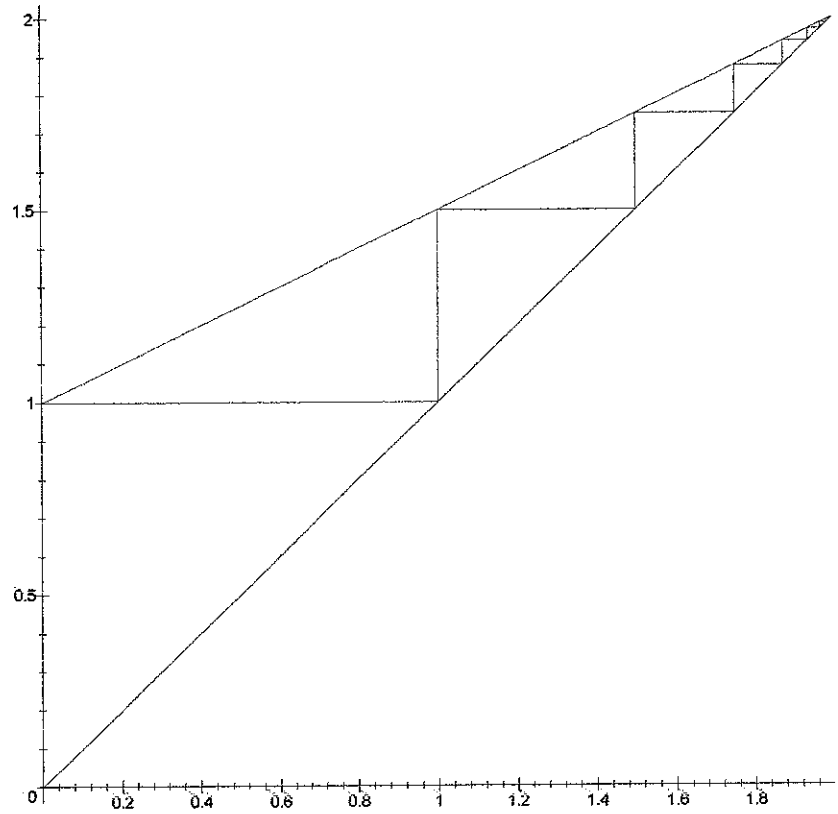
Exemple 1

```
STUDENT > plot(x->0.5*x+1,-10..10,color=red);
```



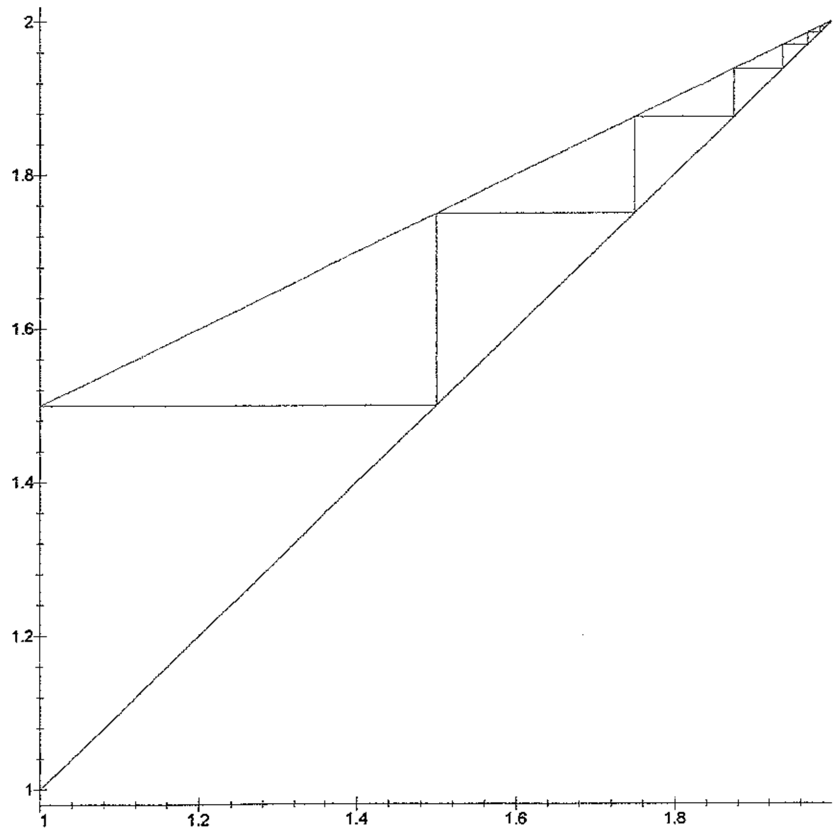
Exemple 1a

STUDENT > sirecu(x->0.5*x+1,0,10);



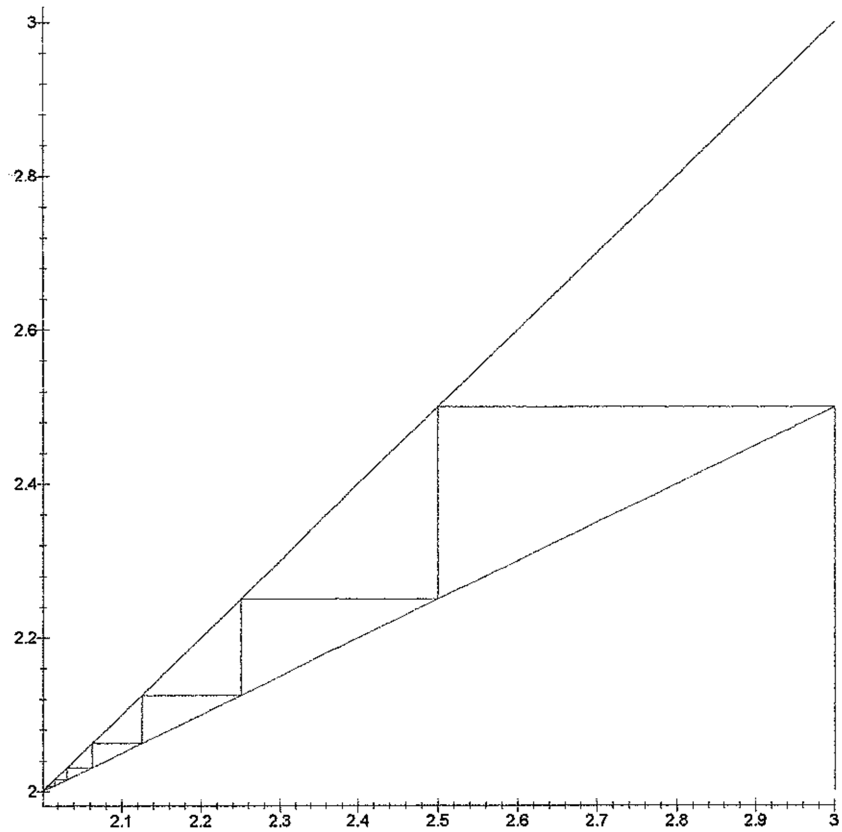
Exemple 1b

STUDENT > sirecu(x->0.5*x+1,1,10);



Exemple 1 c

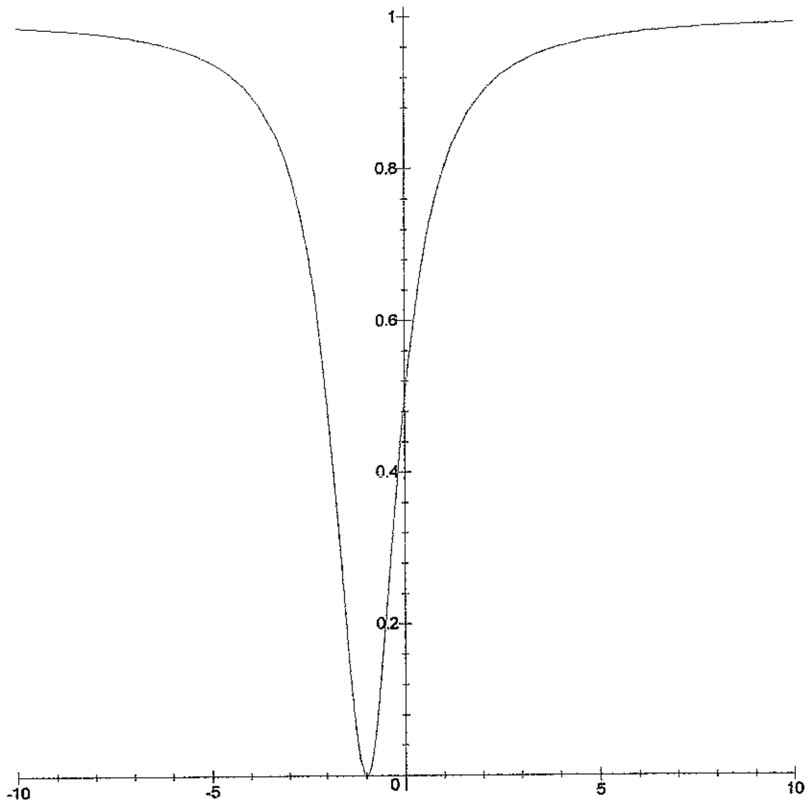
```
STUDENT > sirecu(x->0.5*x+1,3,10);
```



ANNEXE 1

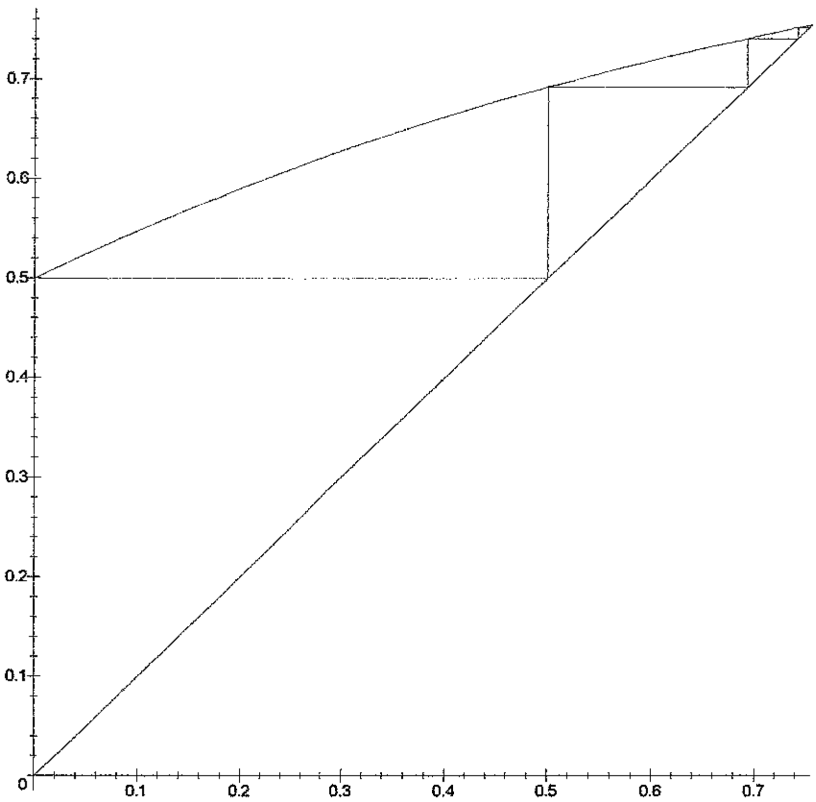
Exemple 2

```
STUDENT > plot(x->1-1/(1+(x+1)^2),-10..10,color=red);
```



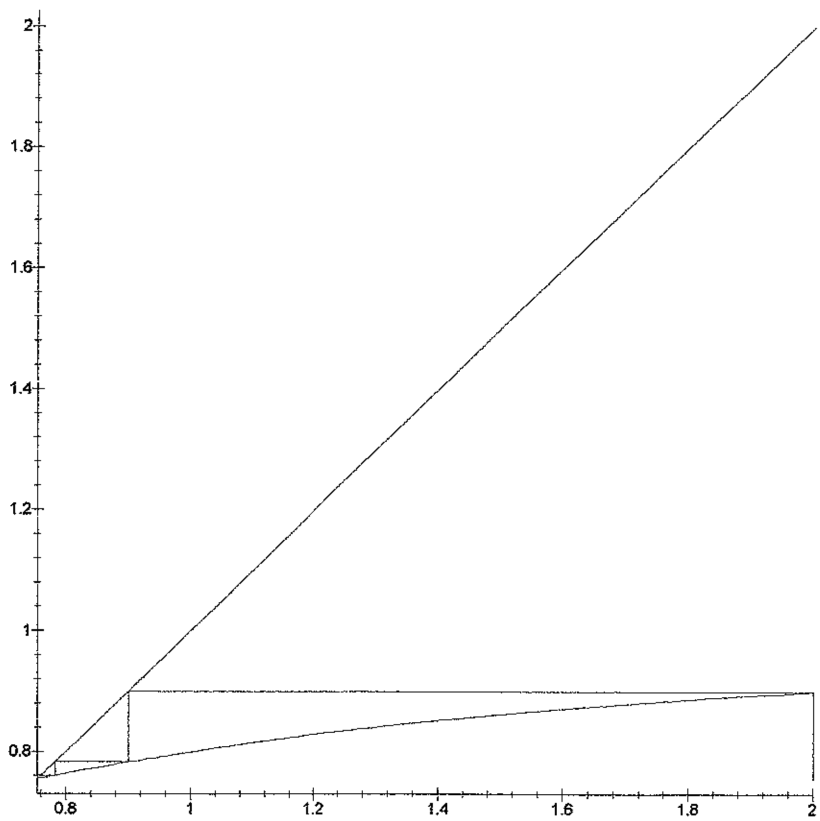
Exemple 2a

```
STUDENT > sirecu(x->1-1/(1+(x+1)^2),0,10);
```



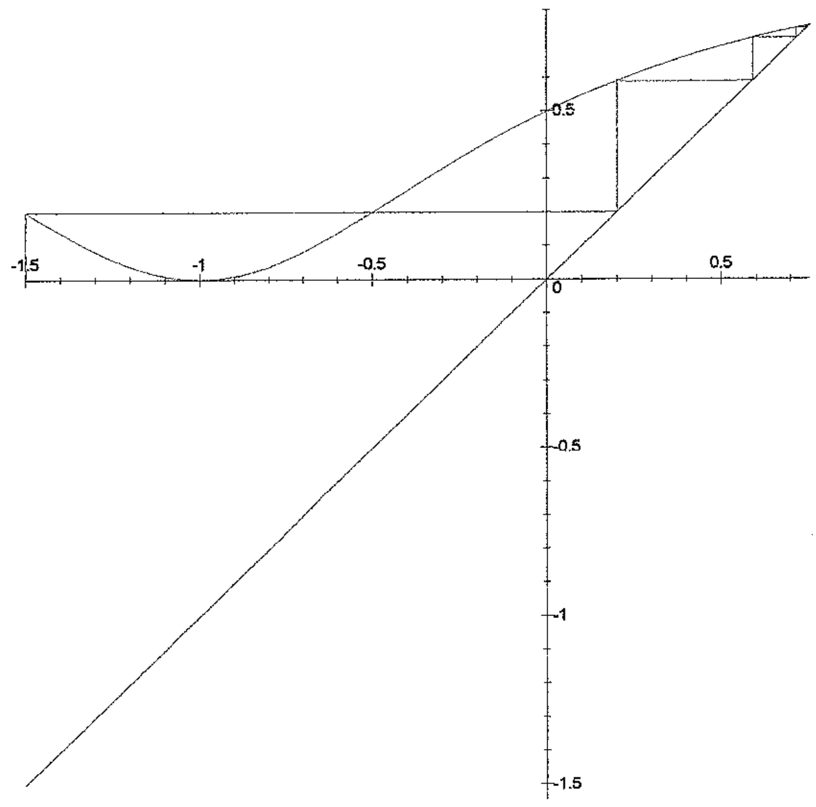
Exemple 2b

```
STUDENT > sirecu(x->1-1/(1+(x+1)^2),2,10);
```



Exemple 2c

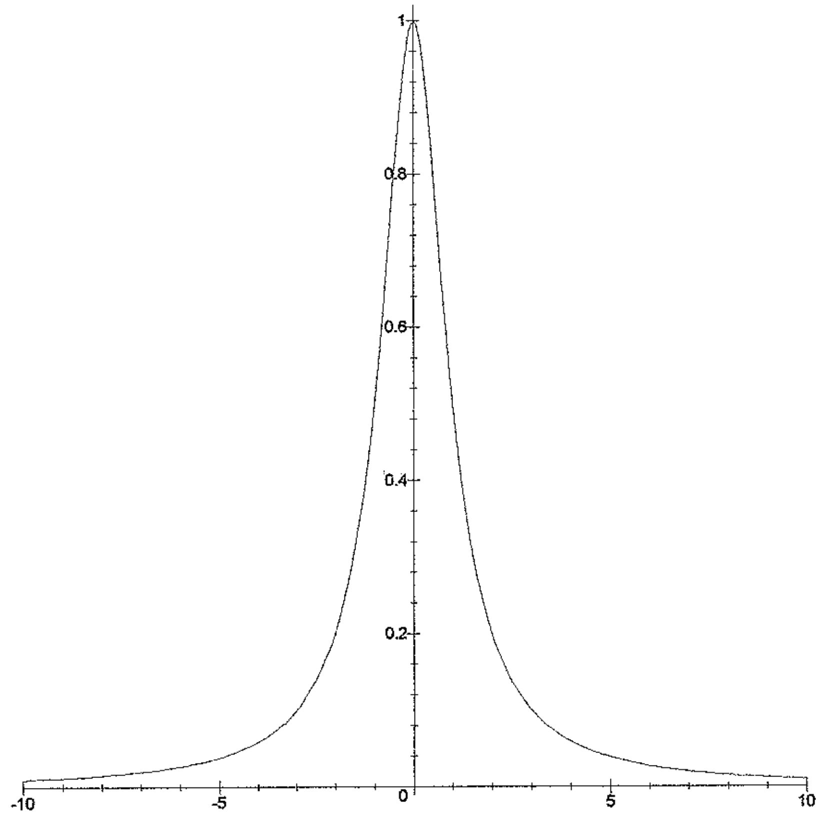
```
STUDENT > sirecu(x->1-1/(1+(x+1)^2),-1.5,10);
```



ANNEXE 1

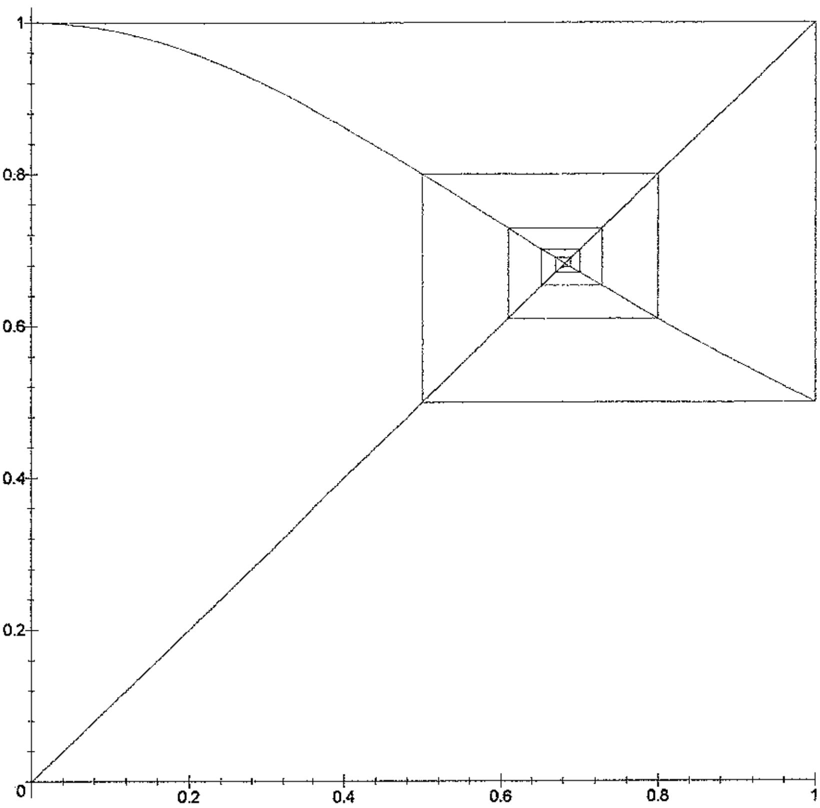
Exemple 3

```
STUDENT > plot(x->1/(1+x^2),-10..10,color=red);
```



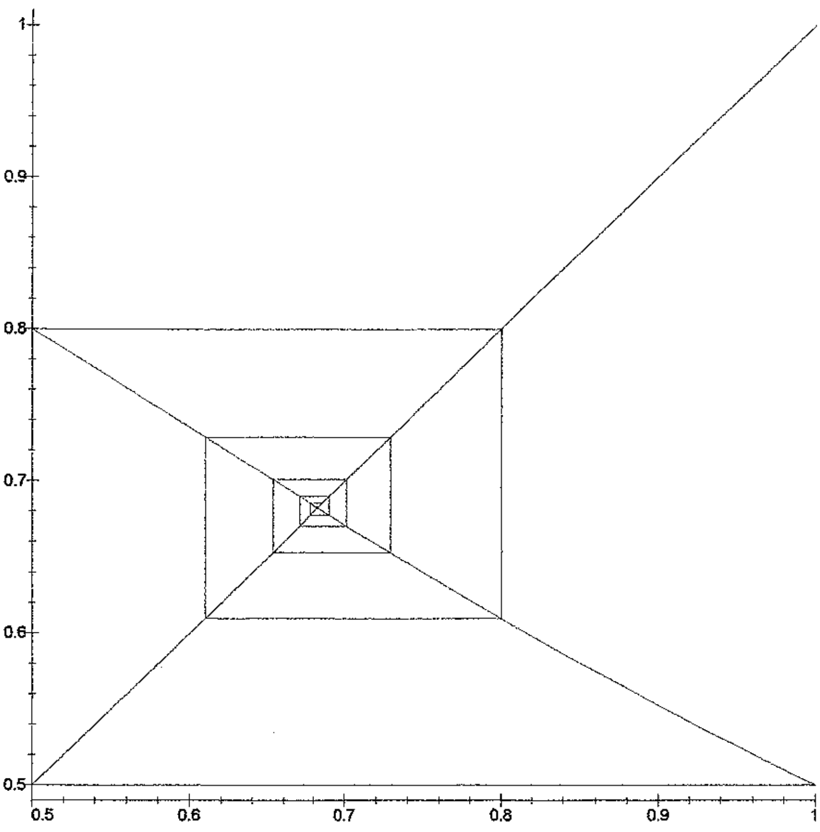
Exemple 3a

```
STUDENT > sirecu(x->1/(1+x^2),0,10);
```



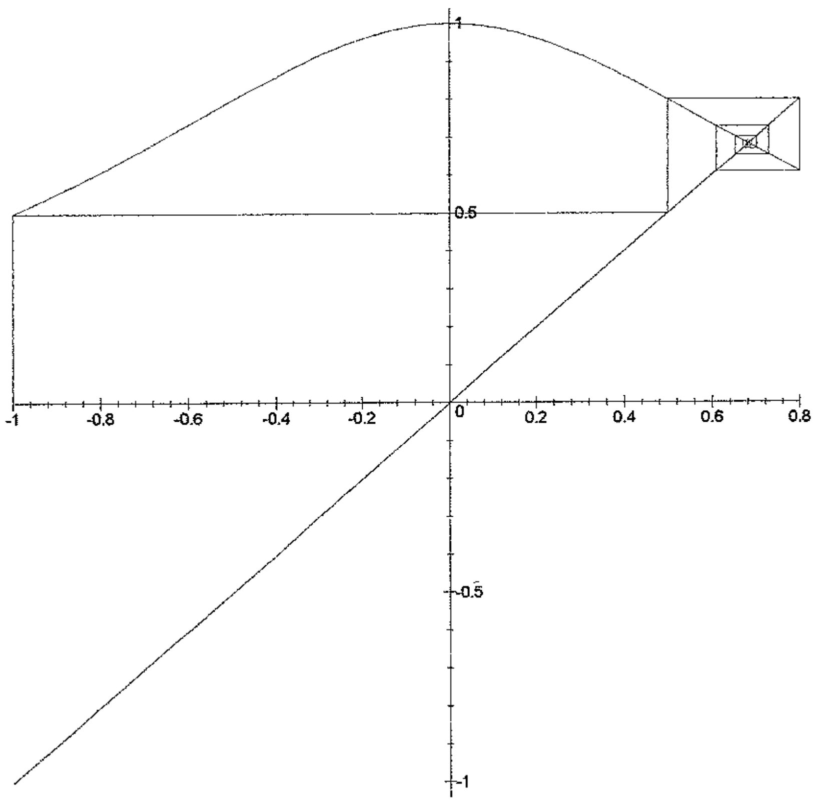
Exemple 3 b

```
STUDENT > sirecu(x->1/(1+x^2),1,10);
```



Exemple 3c

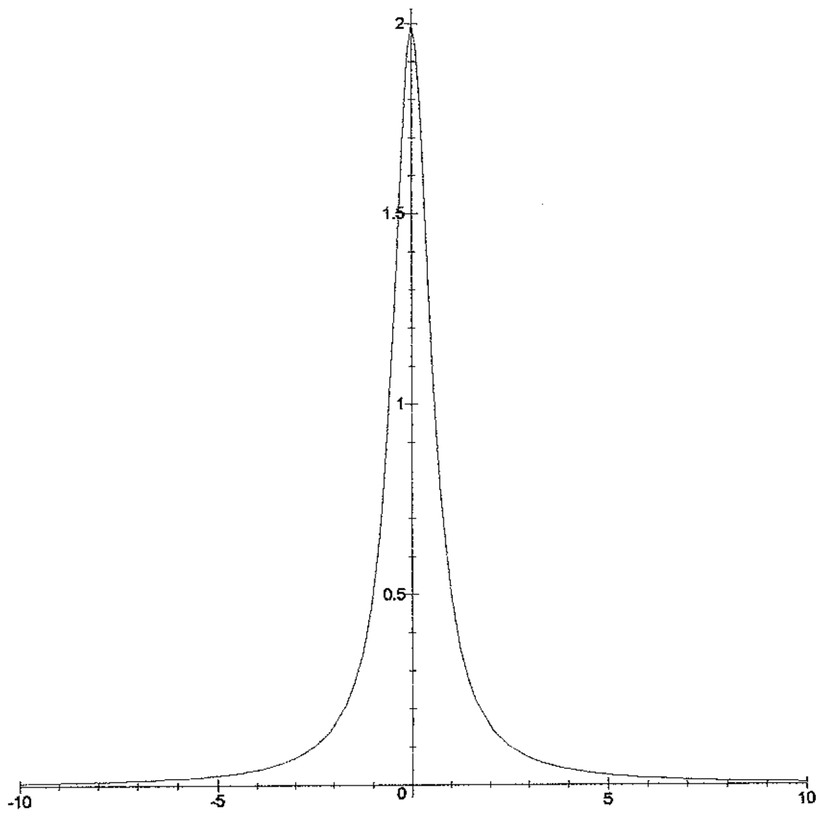
```
STUDENT > sirecu(x->1/(1+x^2),-1,10);
```



ANNEXE 1

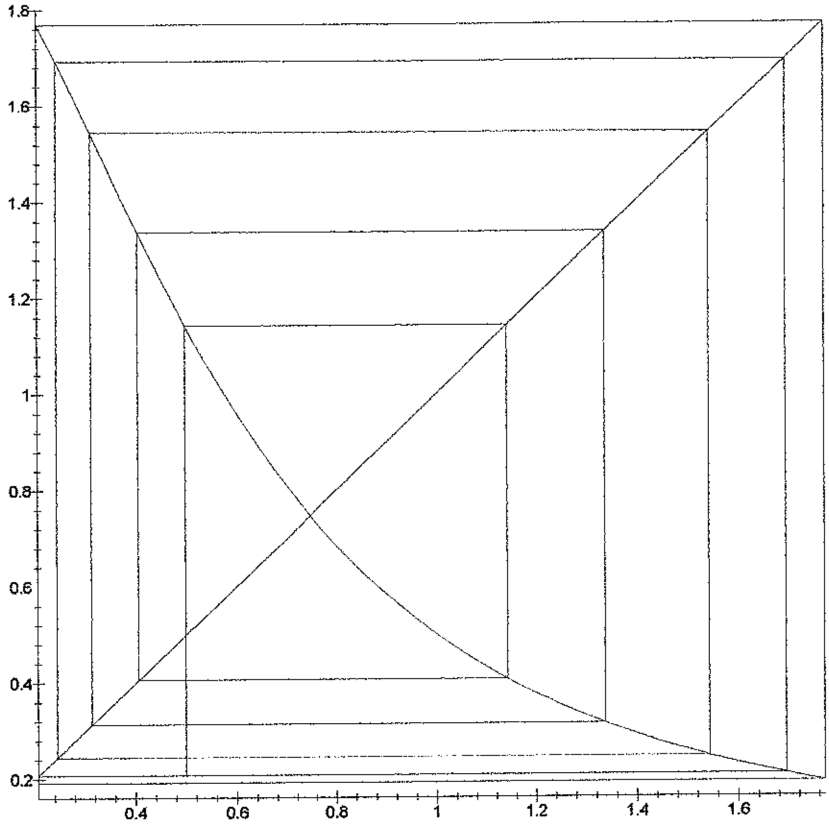
Exemple 6

```
STUDENT > plot(x->2/(1+3*x^2),-10..10,color=red);
```



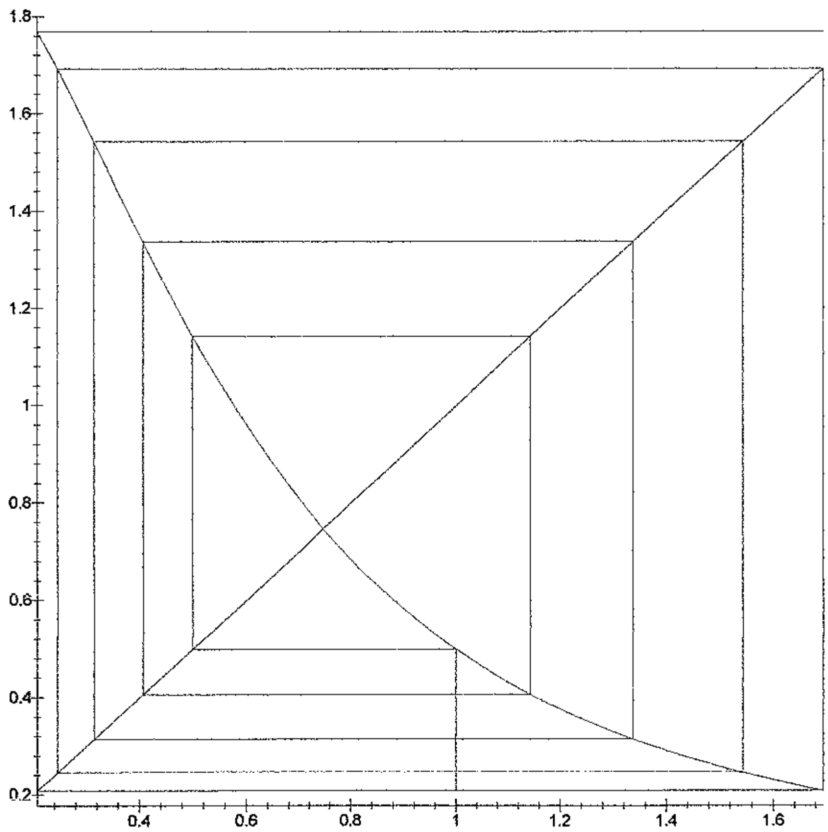
Exemple 6 a

```
STUDENT > sirecu(x->2/(1+3*x^2),0.5,10);
```



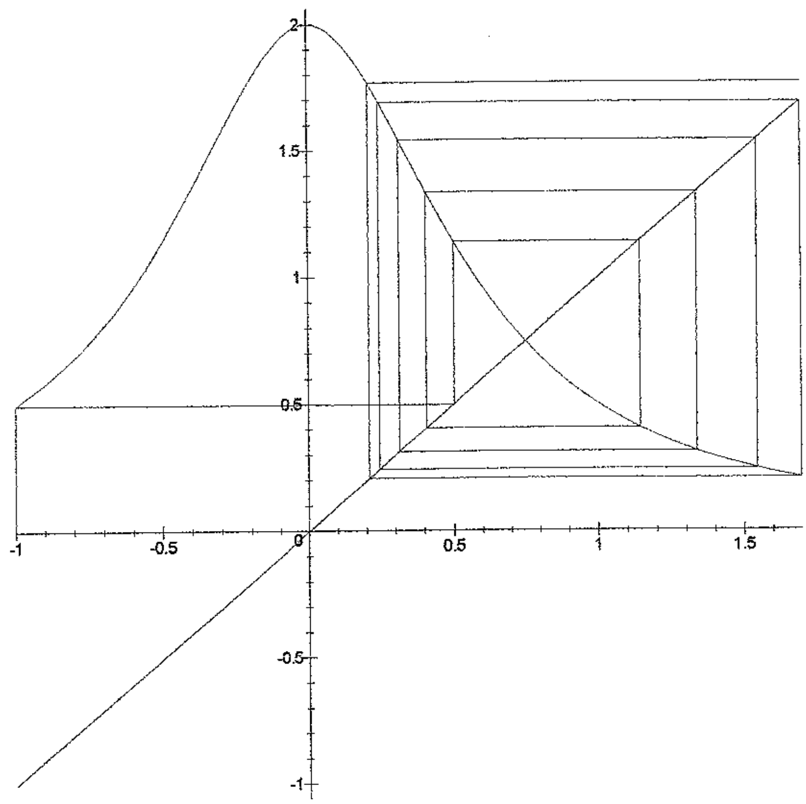
Exemple 6 b

```
STUDENT > sirecu(x->2/(1+3*x^2),1,10);
```



Exemple 6c

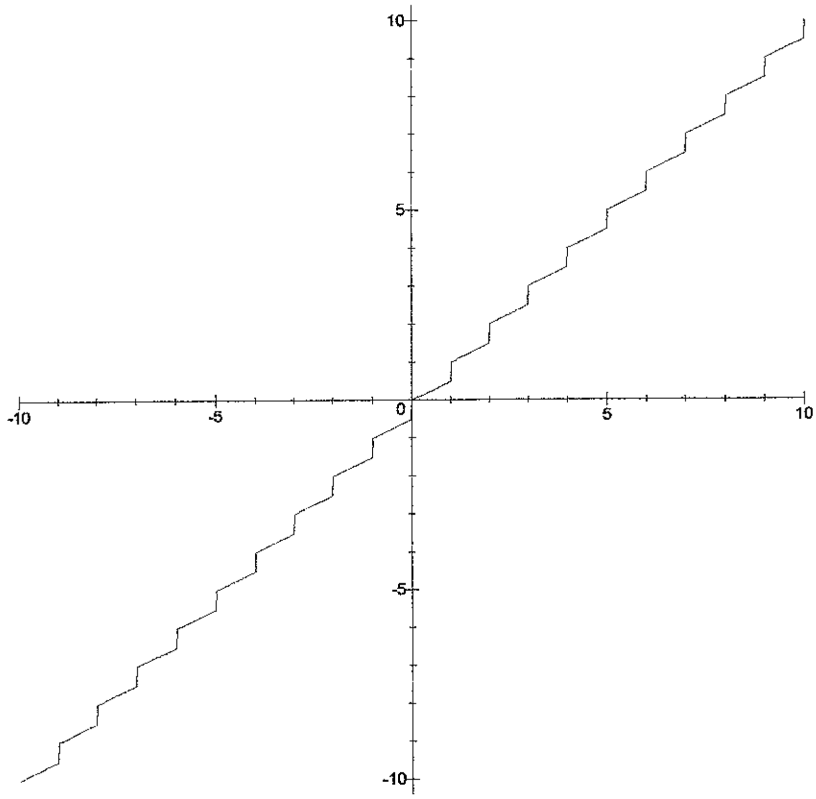
```
STUDENT > sirecu(x->2/(1+3*x^2),-1,10);
```



ANNEXE 1

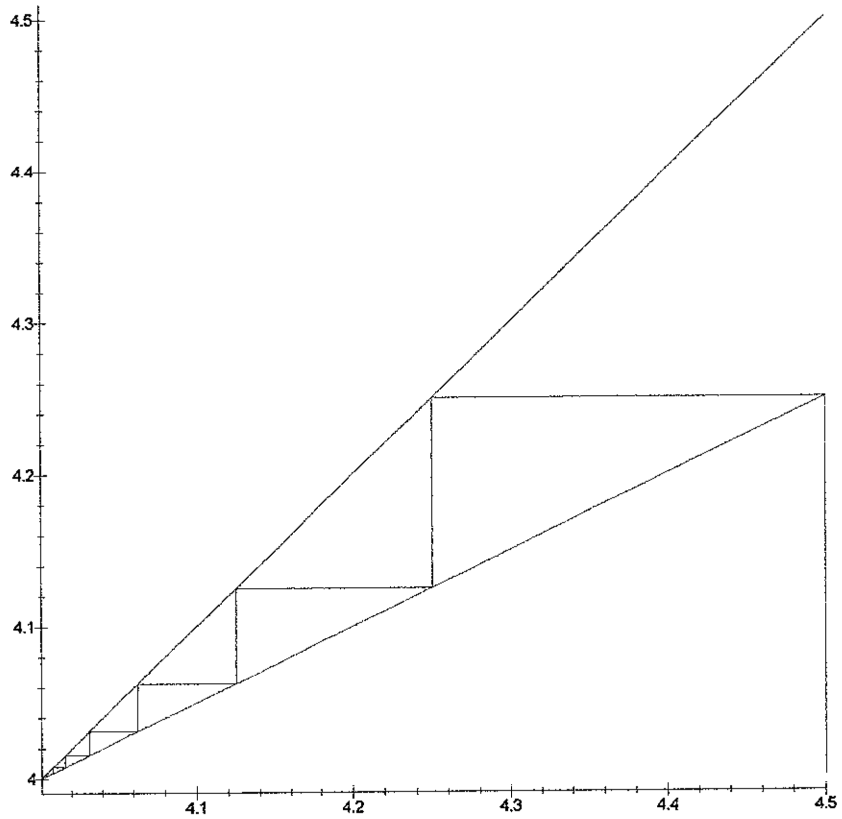
Exemple 10

```
STUDENT > plot(x->0.5*(x+floor(x)),-10..10,color=red);
```



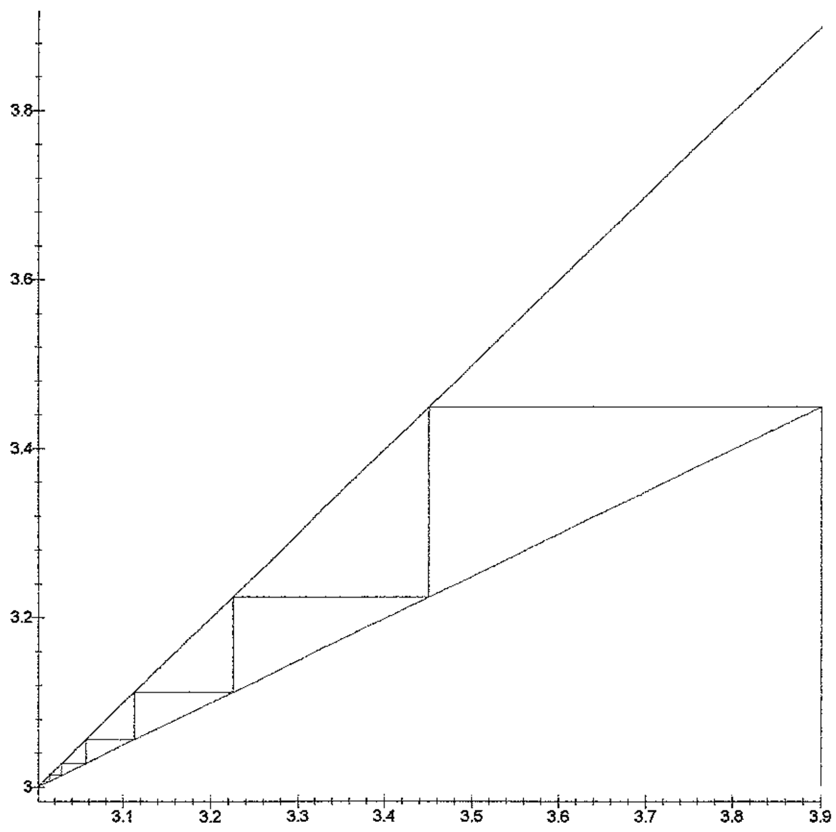
Exemple 10a

```
STUDENT > sirecu(x->0.5*(x+floor(x)),4.5,10);
```



Exemple 10b

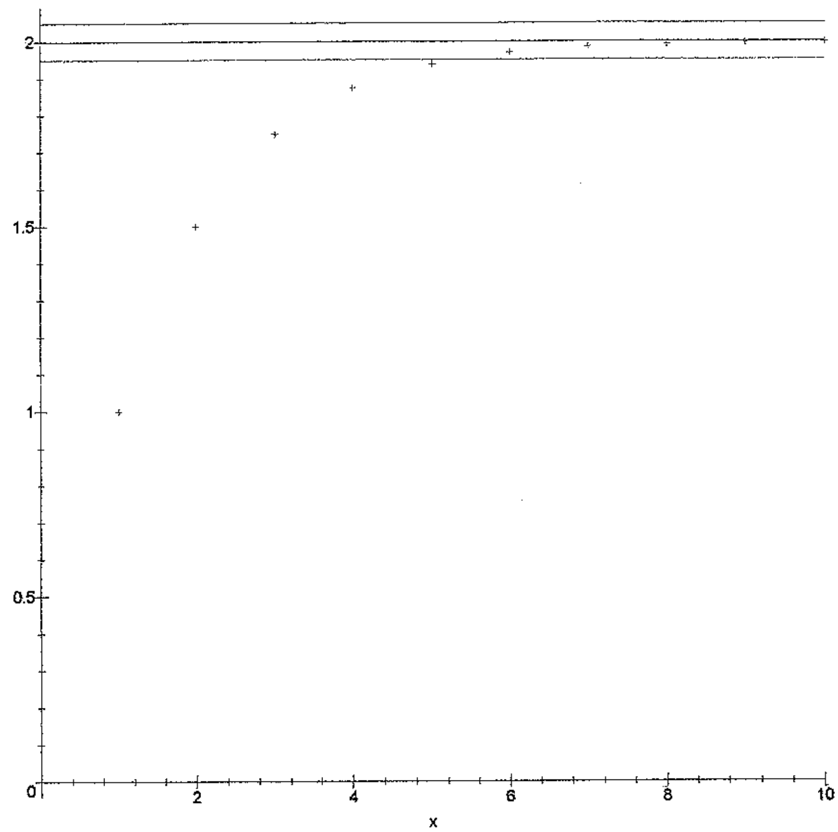
```
STUDENT > sirecu(x->0.5*(x+floor(x)),3.9,10);
```



ANNEXE 1 bis

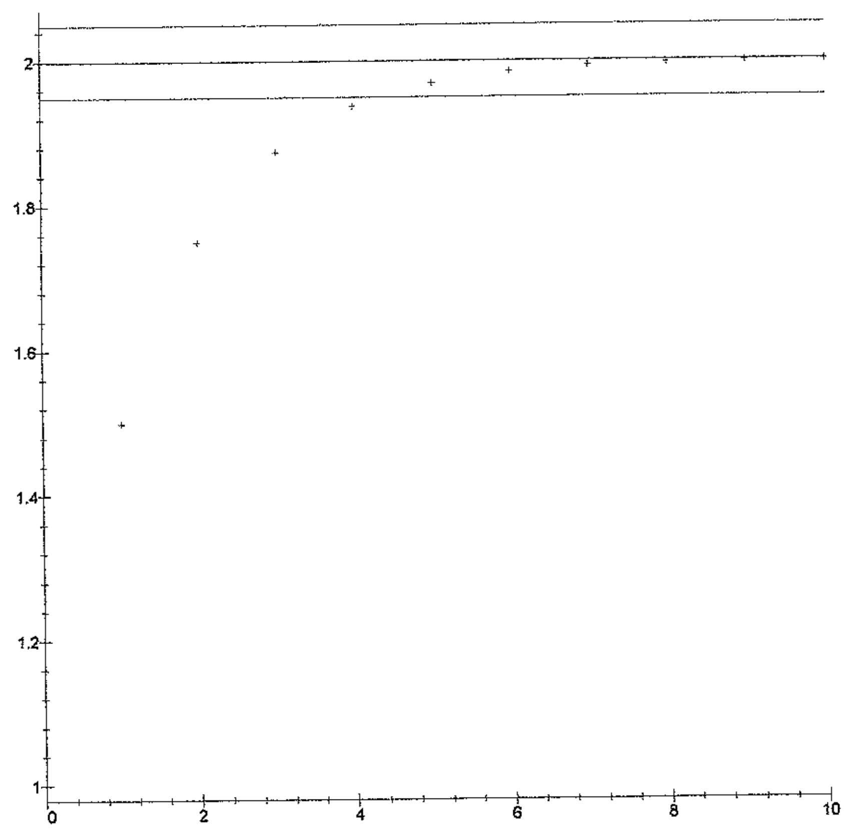
Exemple 1a

```
STUDENT > bande(x->0.5*x+1,0,10,2,0.05);
```



Exemble 1b

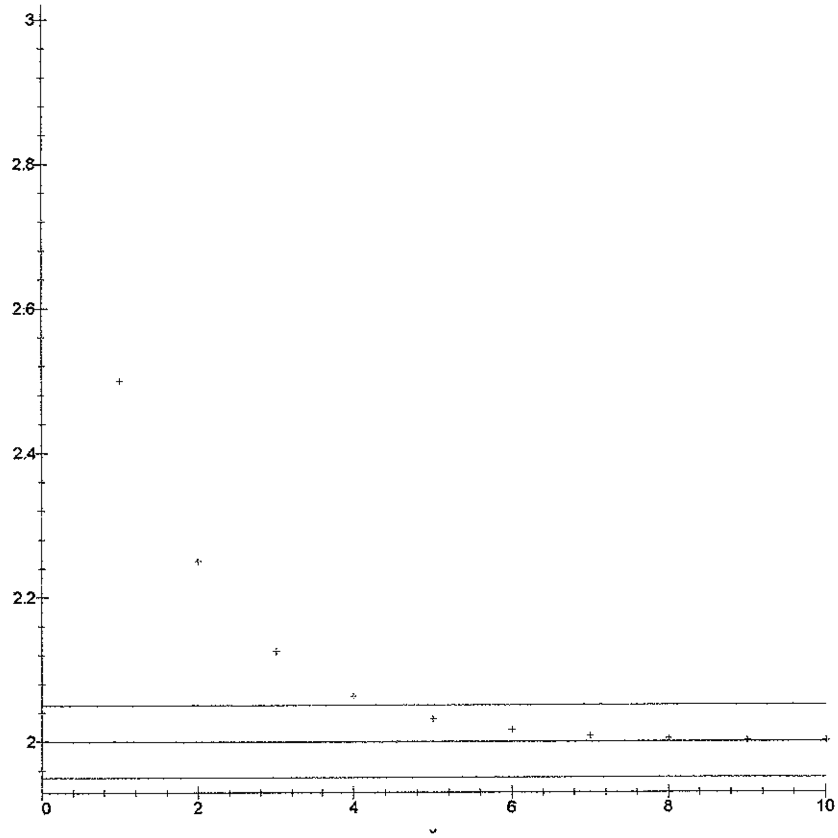
```
STUDENT > bande(x->0.5*x+1,1,10,2,0.05);
```



I bis 1

Exemple 1c

```
STUDENT > bande(x->0.5*x+1,3,10,2,0.05);
```

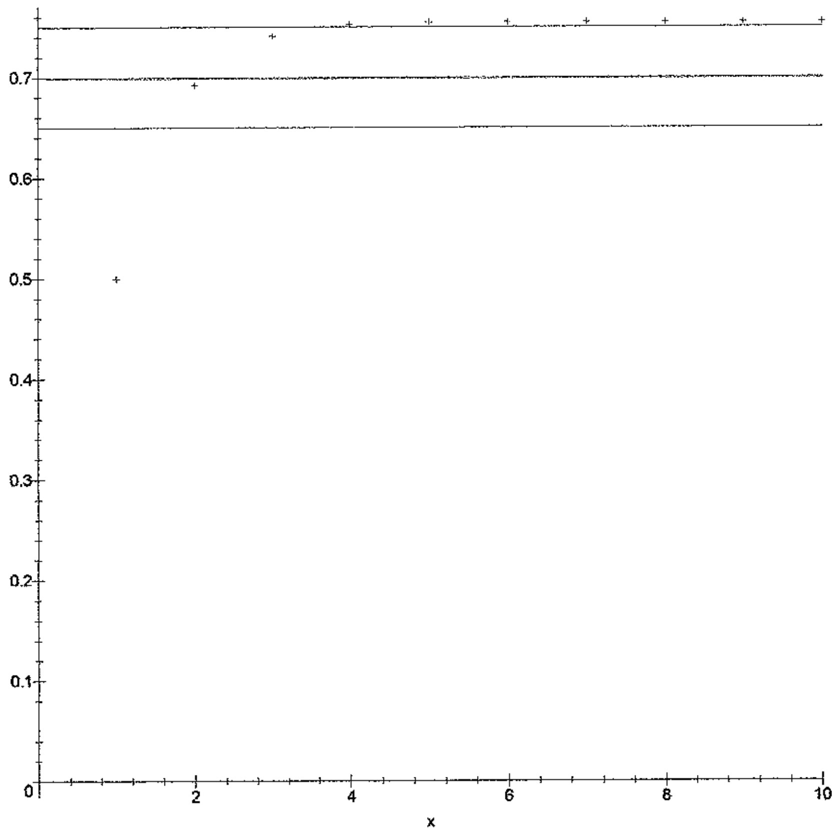


I bis 2

ANNEXE 1 bis

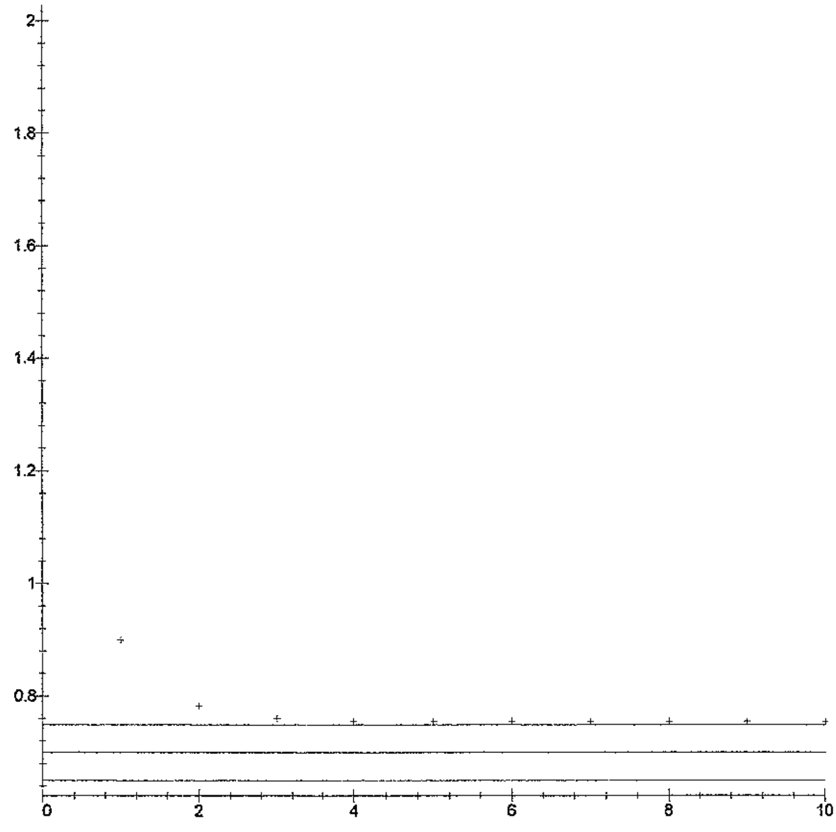
Exemple 2a

```
STUDENT > bande(x->1-1/(1+(x+1)^2),0,10,0.7,0.05);
```



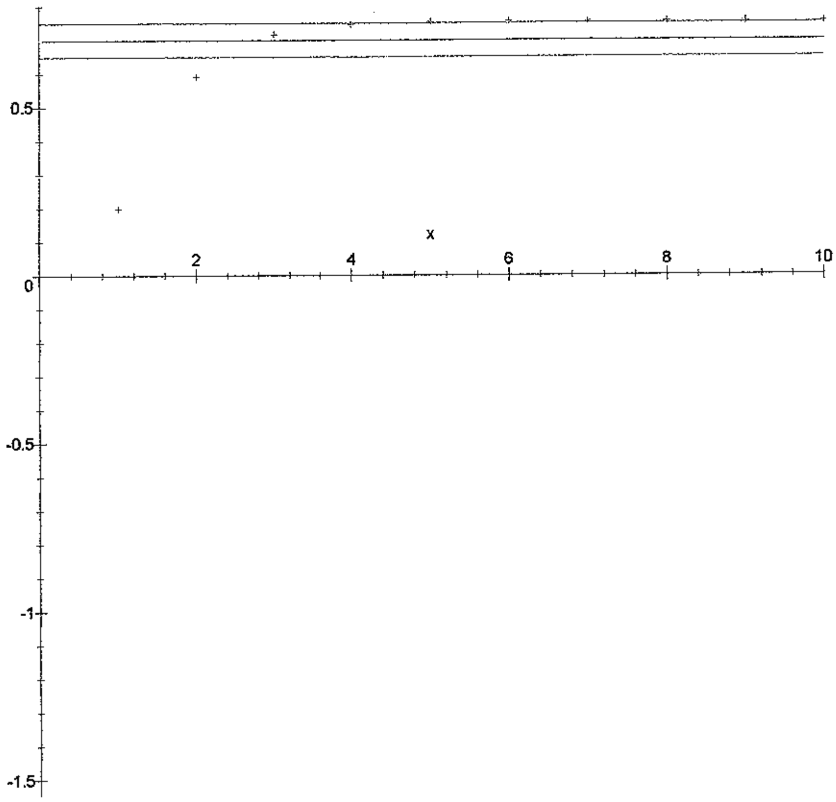
Exemple 2b

```
STUDENT > bande(x->1-1/(1+(x+1)^2),2,10,0.7,0.05);
```



Exemple 2c

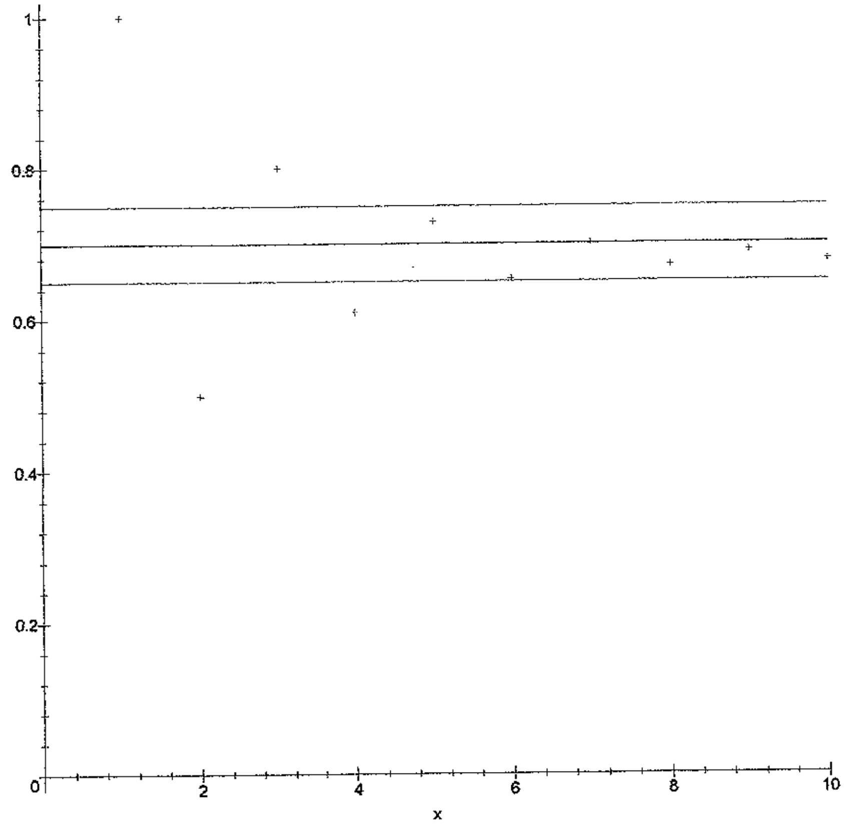
```
STUDENT > bande(x->1-1/(1+(x+1)^2),-1.5,10,0.7,0.05);
```



ANNEXE Ibis

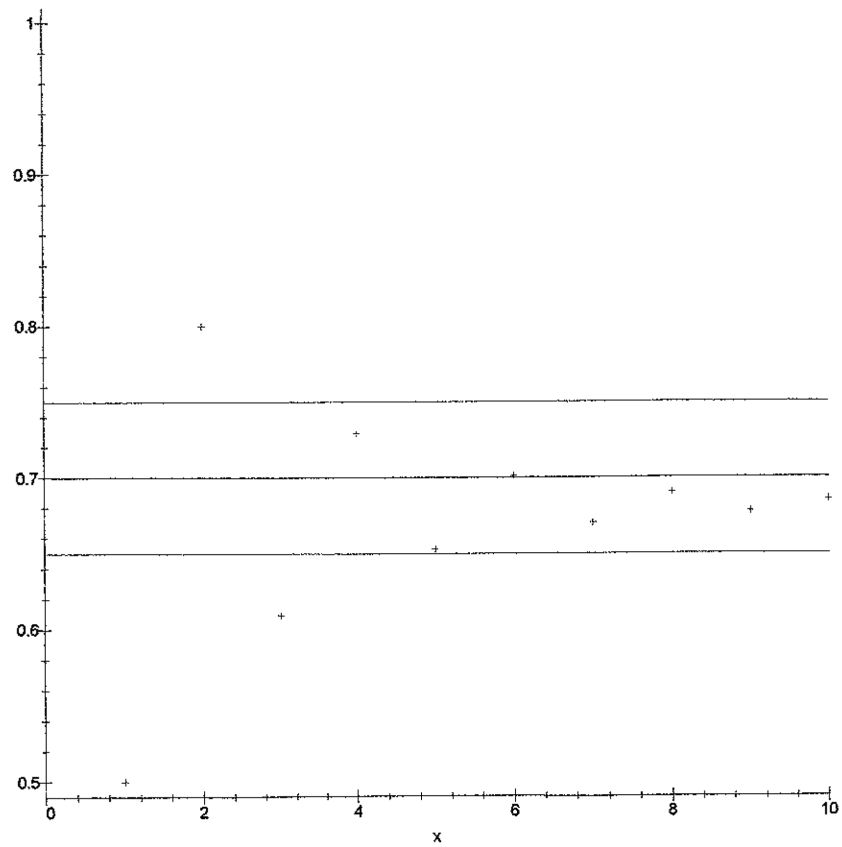
Exemple 3a

```
STUDENT > bande(x->1/(1+x^2),0,10,0.7,0.05);
```



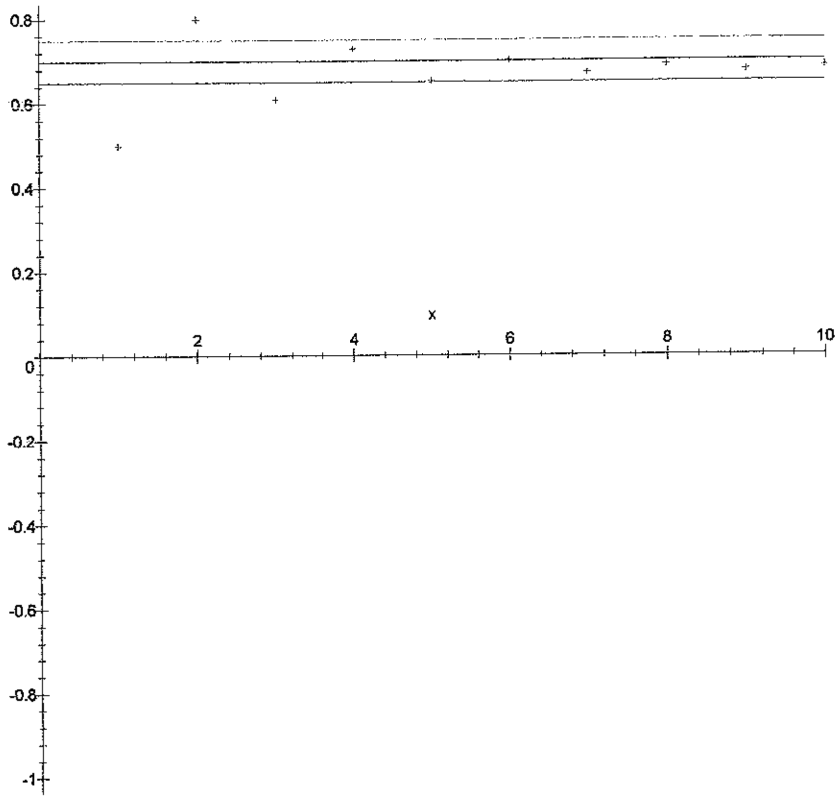
Exemple 3b

```
STUDENT > bande(x->1/(1+x^2),1,10,0.7,0.05);
```



Exemple 3c

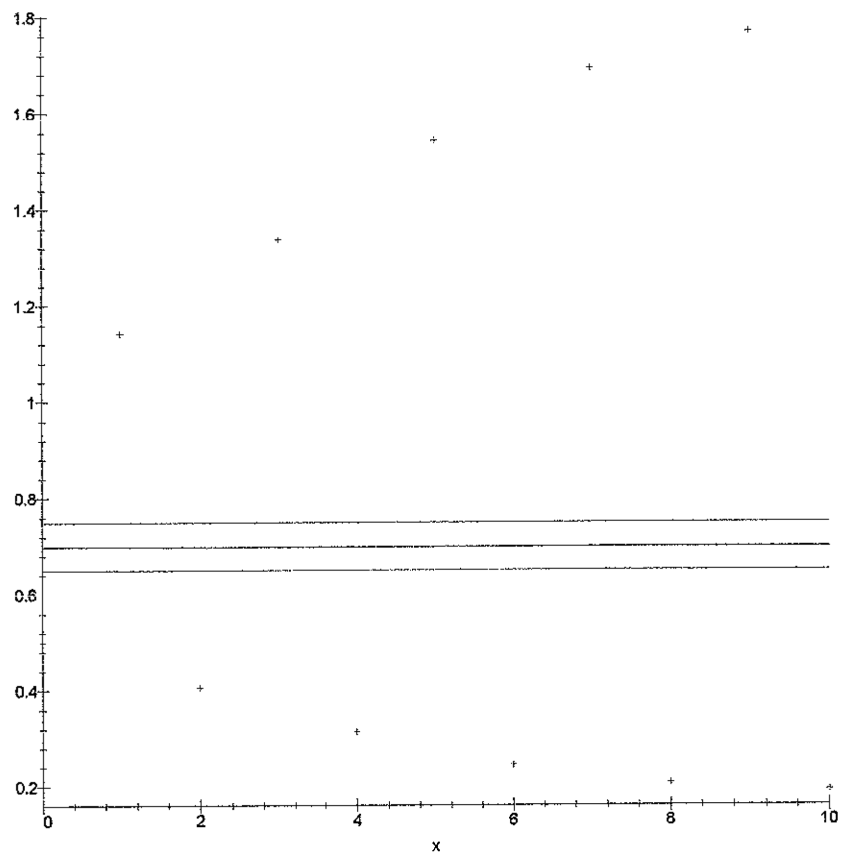
```
STUDENT > bande(x->1/(1+x^2),-1,10,0.7,0.05);
```



ANNEXE 1 bis

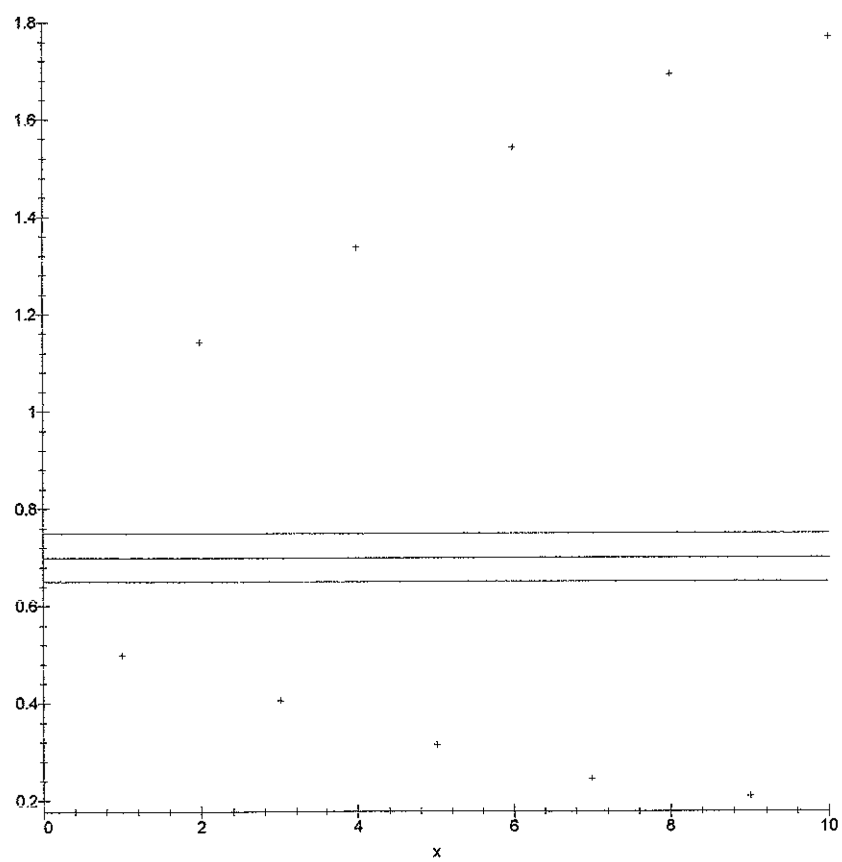
Exemple 6a

```
STUDENT > bande(x->2/(1+3*x^2),0.5,10,0.7,0.05);
```



Exemple 6 b

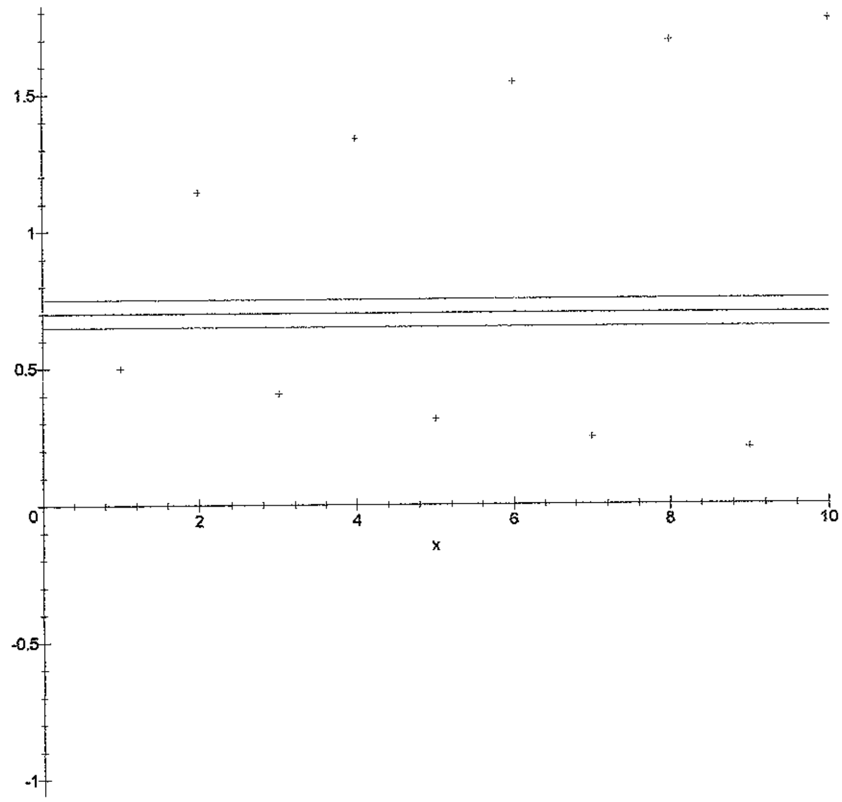
```
STUDENT > bande(x->2/(1+3*x^2),1,10,0.7,0.05);
```



I bis 7

Exemple 6 c

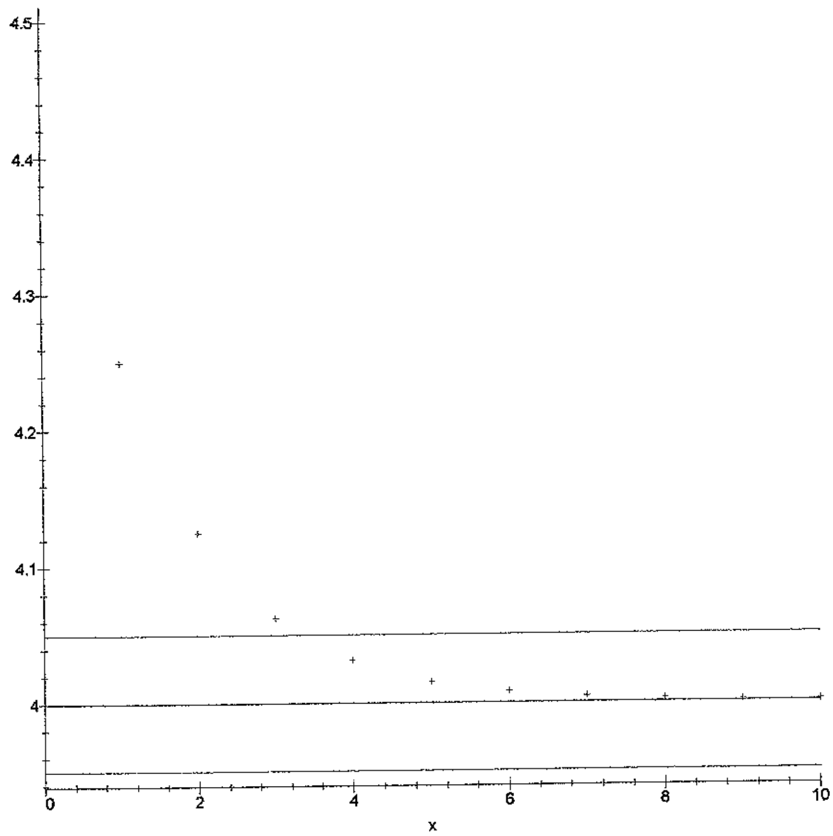
```
STUDENT > bande(x->2/(1+3*x^2),-1,10,0.7,0.05);
```



ANNEXE 1 bis

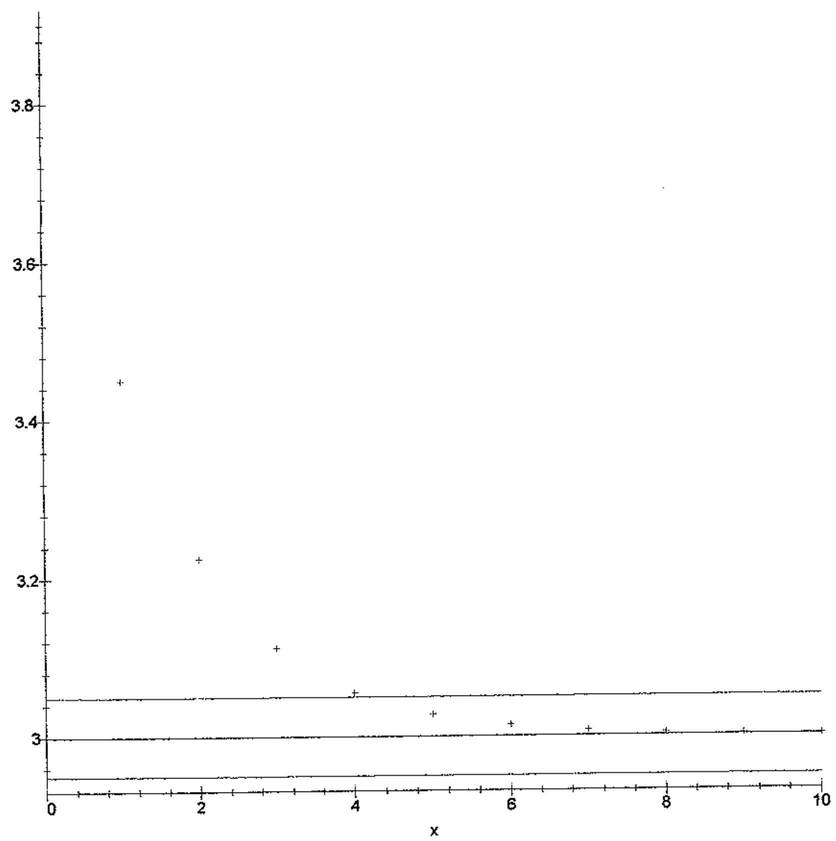
Exemple 10a

```
STUDENT > bande(x->0.5*(x+floor(x)),4.5,10,4,0.05);
```



Exemple 10b

```
STUDENT > bande(x->0.5*(x+floor(x)),3.9,10,3,0.05);
```

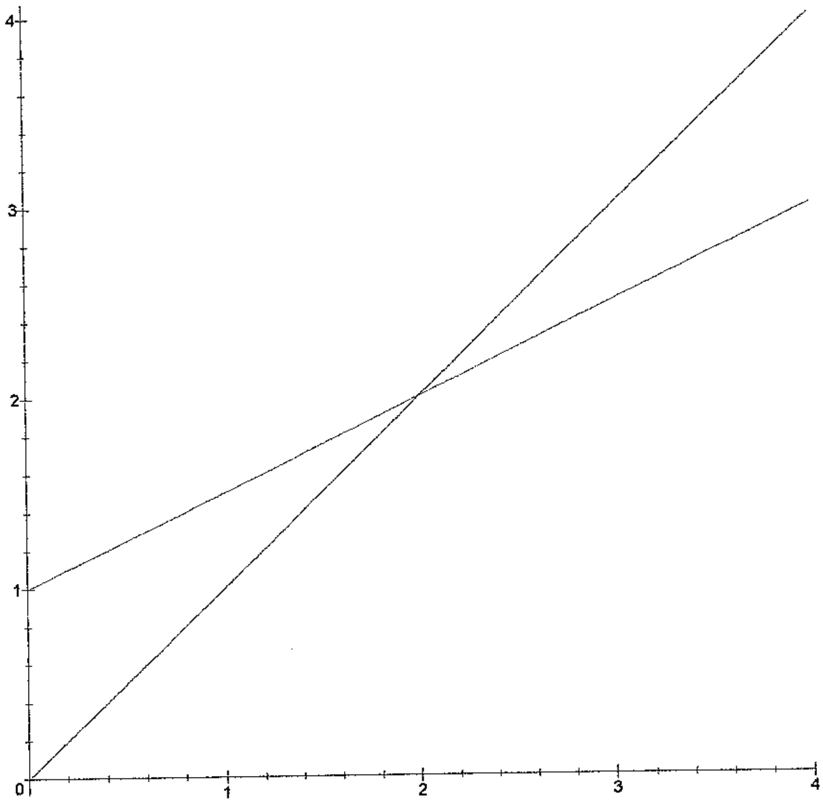


ANNEXE 2

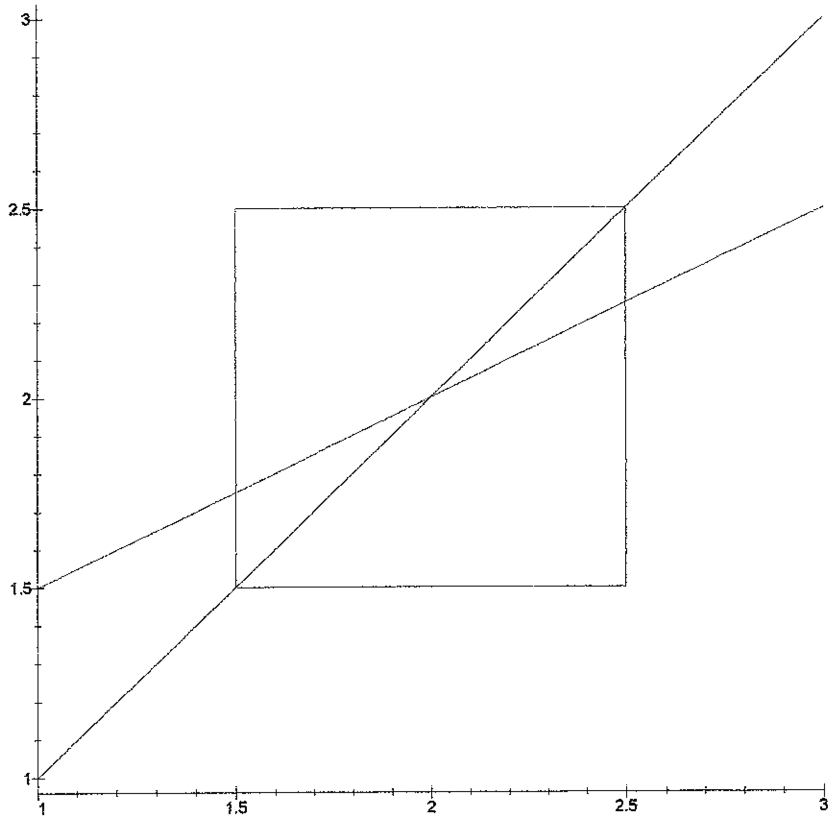
Exemple 1

```
STUDENT > inter(x->0.5*x+1,0,4);
```

2., 2.0, .5




```
STUDENT > boite(x->0.5*x+1,1,3,0.5);
```



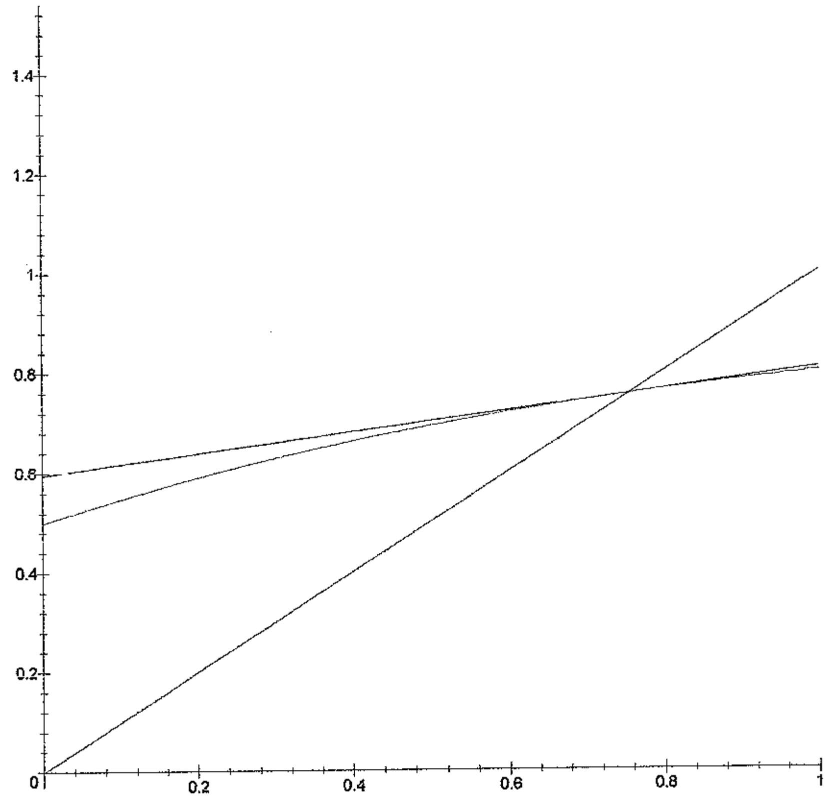
II 1

ANNEXE 2

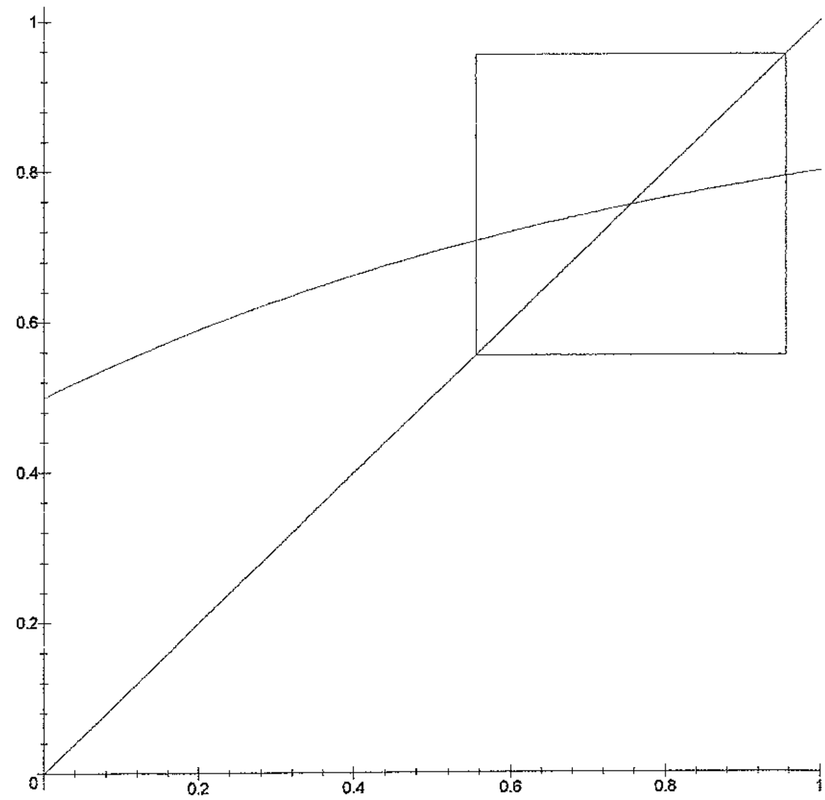
Exemple 2

```
STUDENT > inter(x->1-1/(1+(x+1)^2),0,1);
```

.7548776667, .7548776664, .2108835032




```
STUDENT > boite(x->1-1/(1+(x+1)^2),0,1,0.2);
```



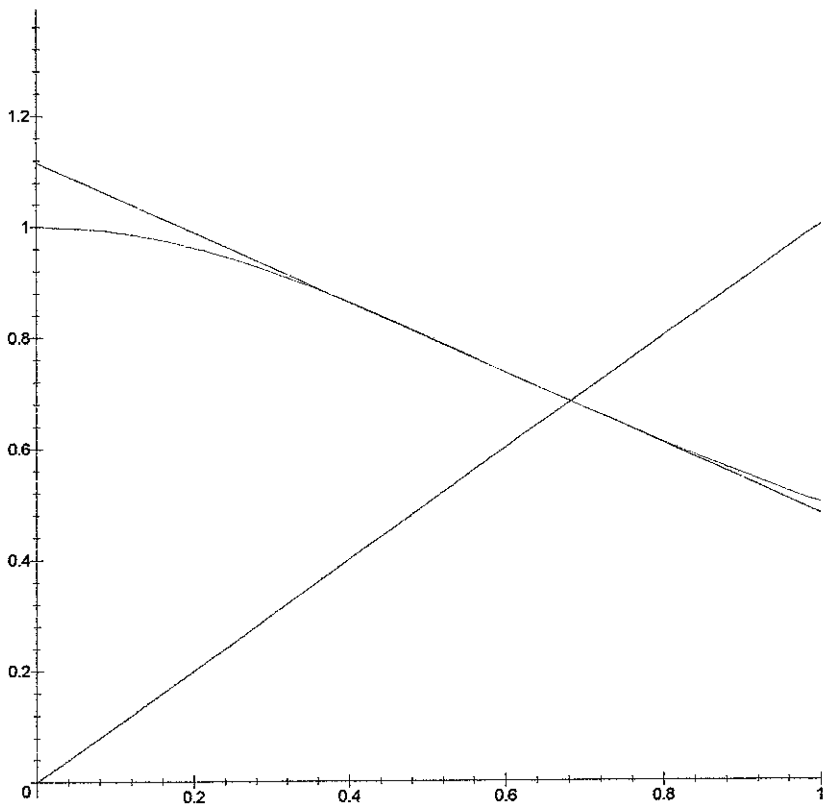
II 2

ANNEXE 2

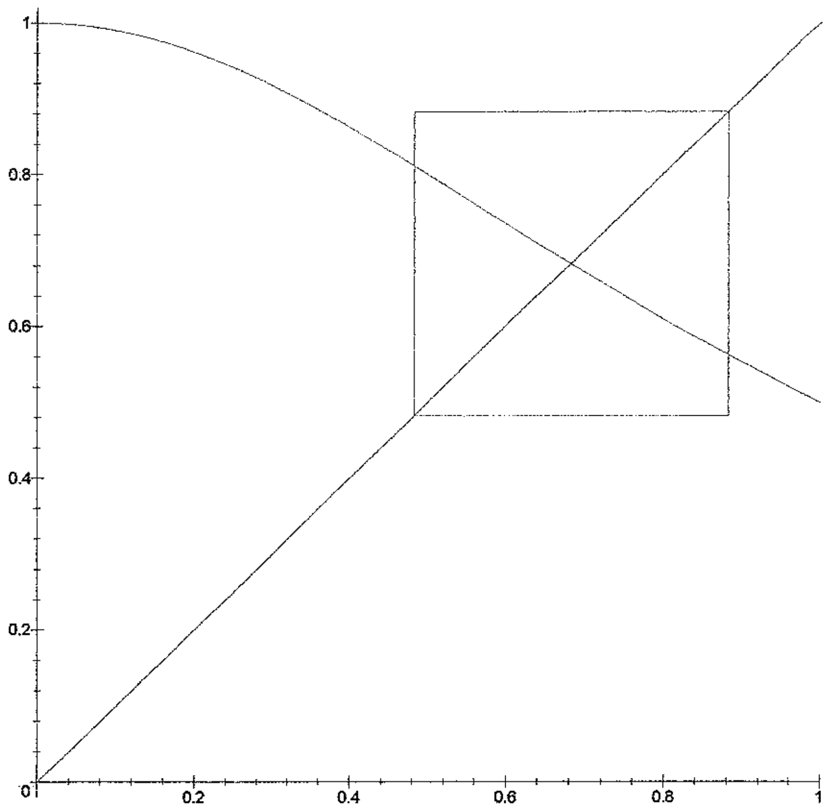
Exemple 3

```
STUDENT > inter(x->1/(1+x^2),0,1);
```

.6823278040, .6823278038, -.6353443924




```
STUDENT > boite(x->1/(1+x^2),0,1,0.2);
```

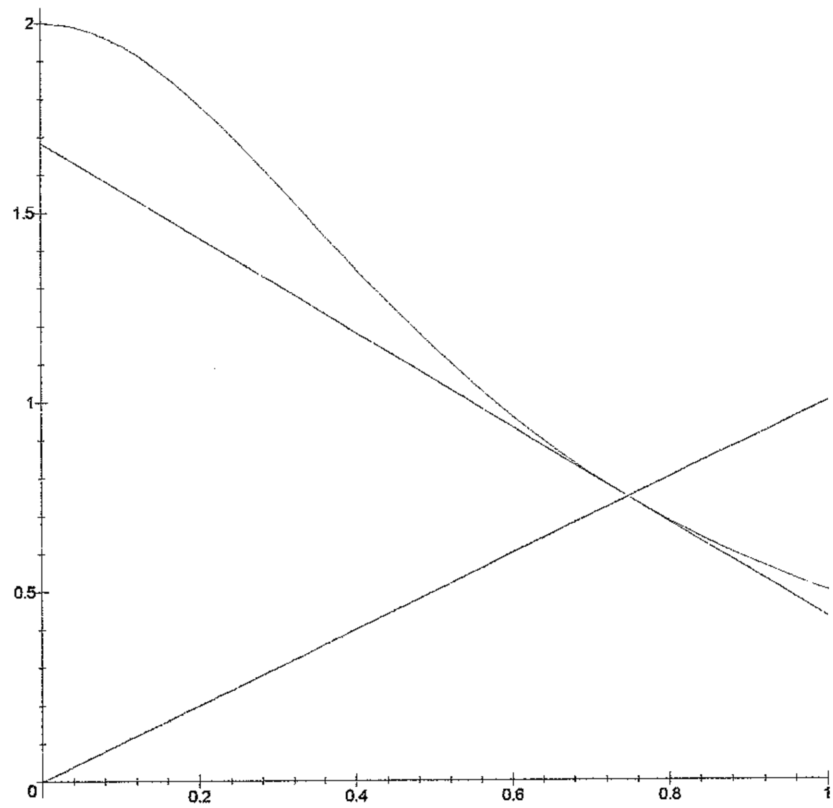


ANNEXE 2

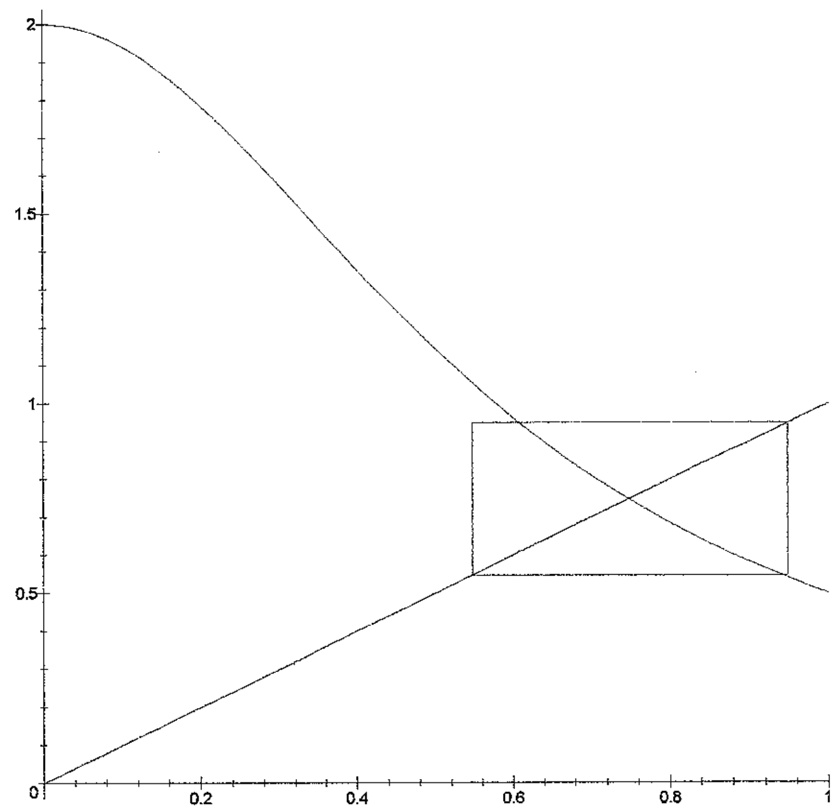
Exemple 6.

```
STUDENT > inter(x->2/(1+3*x^2),0,1);
```

.7474152502, .7474152506, -1.252584750




```
STUDENT > boite(x->2/(1+3*x^2),0,1,0.2);
```

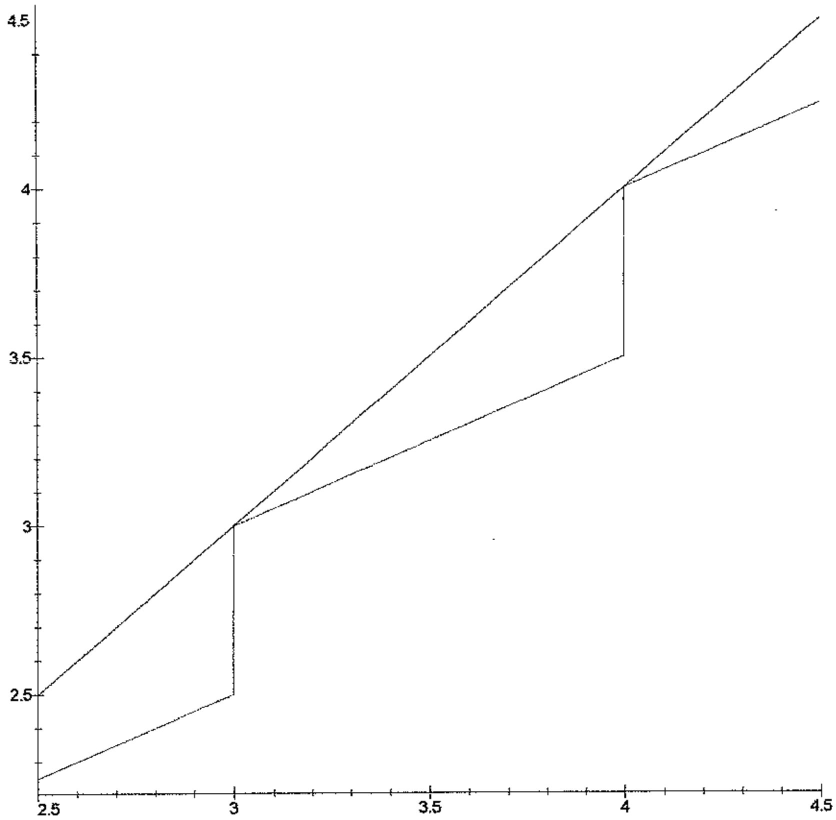


ANNEXE 2

Exemple 10

```
STUDENT > inter(x->0.5*(x+floor(x)),1.5,4.5);
Error, (in floor) floor is not differentiable at x+I*y, x+-y integral
```

```
STUDENT > boite(x->0.5*(x+floor(x)),2.5,4.5,0.2);
```



I.R.E.M
Université Paris 7
Denis Diderot
Case 7018
2, place Jussieu 75251 PARIS CEDEX 05

Tel : 01 44 27 81 85
ou 01 44 27 53 83
Télécopie : 01 44 27 56 08

AVRIL 2000

Nous vous indiquons le prix des brochures sans le port, le poids et le tarif postal pour calculer le coût du port

Poids jusqu'à	Ordinaires
20 g	3,00 F
50 g	4,50 F
100 g	6,70 F
250 g	11,50 F
500 g	16,00 F
1 000 g	21,00 F
2 000 g	28,00 F
3 000 g	33,00 F

PUBLICATIONS DE L'I.R.E.M PARIS 7

BROCHURES

Nº	Titre	Prix	Poids
4	Groupe Français-Mathématiques (Tome 1)	56F	490 gr
7	Pavages et coloriages	27F	170 gr
15	Groupe Français-Mathématiques (Tome 2)	52F	440 gr
16	Les jeux du "Club des Cordelières"	58F	420 gr
27	Nombre d'or	74F	640 gr
38	Conceptions du cercle chez les élèves de l'école élémentaire	50F	430 gr
48	Mesure des longueurs et des aires	40F	340 gr
59	"Et si la descriptive servait à quelque chose" (2 tomes).	35F	140 gr
61	Mathématiques : Approche par des textes historiques	50F	450 gr
62	Liaison Ecole-Collège, Nombres décimaux	59F	520 gr
64	Une année de Géométrie en Terminale C	29F	230 gr
68	Problèmes Ruraux - de marins - d'argent - de durée - de grandeurs - de graduations - farfelus - de certificat d'études	49F	440 gr
69	Situations d'apprentissage en géométrie 6ème - 5ème	50F	440 gr
71	Activités géométriques en Terminale C	24F	180 gr
72	De la géométie analytique à l'algèbre linéaire	24F	190 gr
73	Angles de couples et rotations	32F	280 gr
74	Procédures différentielles dans les enseignements de mathématiques et de physique au niveau du premier cycle universitaire	45F	380 gr
75	La géométrie au lycée	49F	420 gr
76	Questionnaire de travail sur les différentielles	31F	240 gr
77	Une recherche menée dans le cadre du projet Euclide	49F	410 gr
78	Calcul mental	43F	400 gr
79	Mathématiques : Approche par des textes historiques - Tome 2 -	60F	530 gr
80	Travaux d'étudiants en temps non limité (niveau licence, présentés par A. Robert)	55F	530 gr
81	La pratique de mémoires étudiants en Deug SSM première année L'expérience de Lille 1	48F	420 gr
82	Les mythes historiques, sociaux et culturels des mathématiques : leur impact sur l'éducation	31F	270 gr
83	Recherche de spécificités dans l'enseignement à distance des mathématiques en licence-maîtrise à l'université P. et Marie Curie (Paris).	25F	210 gr
84	Modules - TD en Seconde Leur apport dans l'apprentissage des Mathématiques	42F	360 gr
85	La calculatrice en 1ère et Terminale Scientifique	38F	310 gr
86	La calculatrice au lycée	28F	220 gr
87	Pourquoi pas des mathématiques à l'école maternelle ?	24F	180 gr
88	Comment élaborer des énoncés en mathématiques ? L'exemple d'un enseignement de licence de mathématiques sur ce thème	41F	365 gr

LES CAHIERS DE DIDACTIQUE

Nº	Titre	Auteur(s)	Prix	Poids
2	Quelques éléments de théorie piagétienne et.... didactique des Mathématiques	J. Rogalski	6F	90 gr
3	Rapport enseignement apprentissage : Dialectique outil-objet, jeux de cadre	R. Douady	6F	90 gr
6	De la didactique des Mathématiques à l'heure actuelle	R. Douady	6F	90 gr
8	Modélisation et reproductibilité en didactique des Mathématiques	M. Artigue	11F	130 gr
19	Introduction de la multiplication à l'école primaire : histoire, analyses didactiques, manuels actuels	D. Butlen	28F	290 gr
20	A propos de l'enseignement de la proportionnalité	M. Pezard	4F	70 gr
21	Les réels : Quels modèles en ont les élèves ?	J. Robinet	13F	150 gr
22	Une séquence d'enseignement sur l'intégrale en DEUG A première année	D. Grenier, M. Legrand, F. Richard	24F	260 gr
24	Représentation des fractions et des nombres décimaux chez des élèves de CM2 et du collège	M.J Perrin	15F	180 gr
26	L'histoire de l'enseignement des Mathématique comme sujet de recherches en didactique des Mathématiques	G. Schubring	9F	130 gr

34	Quelques réflexions sur l'utilisation des jeux en classe de mathématique........	J. Robinet	3F	60 gr
36	Eléments de bibliographie sur la relation entre origine sociale et réussite ou échec scolaires........	M.J Perrin-Glorian	17F	200 gr
37	Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane	R. Douady M.J Perrin-Glorian	14F	170 gr
38	Enseigner des méthodes........	A. Robert J. Rogalski R. Samurçay	8F	110 gr
39	Dévolution d'un problème et construction d'une conjecture Le cas de "La somme des angles d'un triangle........	N. Balacheff	10F	130 gr
41	Apprendre des Mathématiques et comment apprendre des mathématiques : Premiers éléments pour une étude des représentations des élèves de l'enseignement post-obligatoire de l'accès au savoir mathématique........	E. Bautier A. Robert	13F	170 gr
47	De quelques spécificités de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement postobligatoire (EPO)........	A. Robert	8F	120 gr
48	Représentation plane des figures de l'espace........	J. Boudarel F. Colmez B. Parzysz	8F	120 gr
50	Une introduction à la didactique des Mathématiques........	A. Robert	17F	210 gr
51	Réflexions sur l'analyse des textes d'exercices des manuels........	A. Robert	23F	260 gr
52	Un aperçu des travaux de VYGOTSKI . LEONTIEV et BRUNER, Disciples de VYGOTSKY....	F. Boschet	17F	200 gr

CAHIERS DE DIDIREM

1	Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement	A. Robert J. Robinet	20F	160 gr
2	La genèse du calcul algébrique (Une esquisse)	J. Robinet	14F	100 gr
3	Epistémologie et didactique	M. Artigue	16F	120 gr
4	Enoncés d'exercices de manuels de seconde et représentations des auteurs de manuels	A. Robert J. Robinet	28F	240 gr
5	Une expérience d'enseignement des mathématiques à des élèves de 6ème en difficulté	M.J Perrin-Glorian D. Butlen M.Lagrange	21F	170 gr
6	Analyse dans le suivi de productions d'étudiants de DEUG A (*) en algèbre linéaire. (*) Premier cycle scientifique des universités françaises	J.L Dorier C. Lavergne	48F	420 gr
7	Analyse historique de l'émergence des concepts élémentaires d'algèbre linéaire	J.L Dorier	35F	290 gr
8	Innovation pédagogique et représentations des étudiants Présentation et analyse des résultats du dépouillement d'un questionnaire sur l'enseignement des mathématiques en DEUG SSM Première année	P. Jarraud	25F	200 gr
9	Un projet long d'enseignement (algèbre et géométrie - licence en formation continuée)	A. Robert	36F	290 gr
10	Analyse du discours des enseignants : A) Apports de 2 ouvrages récents de linguistique par C.M Chiocca B) Méthode de BRONCKART et références bibliographiques complémentaires		19F	150 gr
11	Un enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG A première année	M. Rogalski	27F	230 gr
12	Le pourquoi et le comment d'une ingénierie. (La convergence uniforme)	J. Robinet	15F	120 gr
13	Une expérience d'enseignement de mathématiques à des élèves de CE2 en difficulté	D. Butlen M. Pezard	29F	250 gr
14	Illustrer l'aspect unficateur et simplificateur de l'algèbre linéaire	J.L Dorier	21F	170 gr

15	Quatre étapes dans l'histoire des nombres complexes : "quelques commentaires épistémologiques et didactiques"	M.Artigue A.Deledicq	30F	250 gr
16	Analyse du discours des enseignants			
	A) Etude comparée des discours de deux enseignants de mathématiques pendant une même leçon (en 2d).	E. Josse		
	B) Une méthode d'analyse de discours d'enseignant en classe de mathématiques.	C.M. Chiocca E. Josse A. Robert	31F	270 gr
17	Télé enseignement universitaire Les mathématiques dans une section de Deug SSM première année.	C. Cazes	22F	180 gr
18	Les problèmes didactiques de l'enseignement des mathématiques dans l'association AUXILIA	F. Stamon Millet	19F	150 gr
191	L'ingénierie didactique Un moyen pour l'enseignant d'organiser les rapports entre l'enseignement et l'apprentissage.	R. Douady	22F	180 gr
20	"Les oeufs" Entretiens sur la modélisation algébrique en classe de seconde.	E. Hébert	44F	400 gr
21	Prise en compte du méta en didactique des Mathématiques	A. Robert J. Robinet	27F	230 gr
22	Représentations des professeurs de mathématiques et des élèves de terminales des lycées de Conakry sur les mathématiques et leur enseignement	A. Tidjane Diallo	49F	440 gr
231	Changements de cadres à partir des surfaces minimales.	A. et R. Douady	20F	230 gr
Numéro Spécial n° 2 :	Que faut-il savoir en mathématiques en fin de troisième pour "réussir sa seconde" ?	E. Josse	33F	270 gr
25	A propos de l'utilisation des calculatrices au lycée	M. Lattuati I. S. Rodrigues	18F	120 gr
Numéro spécial n° 3 :	Une recherche sur le logiciel Dérive Rapport	Equipe DIDIREM	88F	780 gr
26	Une approche de la formation professionnelle initiale des futurs enseignants de lycée et collège en mathématiques. Un essai de didactique professionnelle	A. Robert	20F	140 gr

27	Rapports entre habileté calculatoire et "prise de sens" dans la résolution de problèmes numériques, étude d'un exemple : impact d'une pratique régulière de calcul mental sur les procédures et performances des élèves de l'école élémentaire.	M. Pezard D. Butlen	27F	200 gr
28	Comment, en didactique des mathématiques, prendre en compte les pratiques effectives, en classe, des enseignants de mathématiques du lycée ? Une approche à travers des analyses de pratiques de quelques enseignants de mathématiques dans des séances d'introduction aux vecteurs en classe de seconde	C. Hache A. Robert	41F	340 gr
29	Pratiques des élèves et des enseignants des mathématiques Rapport de recherche Rôle des gestes de clôture dans l'enseignement des mathématiques Institutionnalisation en classe de seconde : valeur absolue, Intervalles, encadrements, approximations première partie : choix globaux des enseignants et résultats des élèves	A. et R. Noirfalise M.J Perrin	56F	464 gr
30	DEA de didactique des disciplines Didactique des mathématiques Le tableau noir : un outil pour la classe de mathématiques	E. Roditi	42F	350 gr
31	DEA de didactique des disciplines Didactique des mathématiques L'entrée dans le monde de pensée fonctionnel en classe de seconde	D. Pihoue	44F	390 gr
	Numéro spécial n° 4 Intégration de calculatrices complexes dans l'enseignement des mathématiques au lycée	M. Artigue B. Defouad M. Duperier G. Juge J.B Lagrange	114F	1026 gr
32	DEA de didactique des disciplines Didactique des mathématiques Comparaison du discours d'un même enseignant de Mathématiques, effectuant le même cours devant trois classes de sixième d'un même collège	P. Chaussecourte	32F	247 gr
33	Les pratiques des enseignants de mathématiques en classe de seconde Rapport sur le projet de recherche 97-98 (appel d'offres de l'IUFM de Versailles) Avec la participation de P. Beziaud, F. Bourhis-Lainé, D. Dumortier, A. Robert et C. Robert		20 F	134 gr
34	Diagnostic des connaissances de mathématiques des étudiants de CAPES, vers une interprétation cognitive des apprentissages individuels		21 F	122 gr

DOCUMENT DE TRAVAIL POUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

N°	Titre	Auteurs	Prix	Poids
1	Formation en didactique des mathématiques, une expérience en CPR interne	A. Robert	18F	140 gr
2	Formation des moniteurs (Mathématiques)	D. Perrin et A. Robert	13F	100 gr
3	Formation professionnelle initiale des enseignants du second degré en mathématiques Actes de la journée de réflexion organisée le 06/04/1991 à Paris par la Commission Inter-IREM Université et l'équipe DIDIREM		22F	190 gr
4	Un enseignement de didactique des mathématiques à des futurs instituteurs-maîtres-formateurs	D. Butlen et M. Pezard	31F	260 gr
5	Formation à l'enseignement des mathématiques : exemples de pratiques effectives et éléments de réflexion d'un point de vue didactique I Exemples de différentes stratégies de formation (R. Douady et A. robert) II Questions sur la formation, sur l'observation en formation (A. Robert) III Questions sur la formation en didactique des mathématiques (M. Artigue, M. Henry, D. Butlen)		21F	160 gr
6	Une séquence d'enseignement au lycée : Les angles en seconde	C. Jeulin D. Sperandio R. Proteau	13F	90 gr
7	L'isogonologie Un exemple de l'utilisation de l'algèbre linéaire en géométrie.	F. Rideau	14F	90 gr
8	Quelle didactique des mathématiques en formation des maîtres : quelques questions posées par des expériences d'enseignement en formation initiale et continue d'instituteurs, des professeurs de collèges et de lycées.	D. Butlen J. Bolon	27F	220 gr
9	Enseigner la didactique des mathématiques aux futurs professeurs d'école.	D. Butlen M.L Peltier	20F	150 gr
10	IUFM - An 3 * une réflexion sur la formation des PLC2 * une analyse des modules communs mathématiques à l'IUFM de Versailles	A. Robert	21F	140 gr

N°	Titre	Auteurs	Prix	Poids
11	IUFM - An 3 Diversités et points communs des formations des PLC2 en mathématiques en IUFM - comparaison sur 18 IUFM L'avis des stagiaires (une enquête auprès de néo-certifiés et certifiés de l'an 1)	J. Penninckx	26F	190 gr
12	IUFM - An 3 L'observation de classes Réflexion sur la formation à l'observation de classes des stagiaires PLC2 de Mathématiques à l'IUFM de Rouen	E. Hébert P. Tavignot	26F	180 gr
13	IUFM Rouen Maths 2ème année Evaluation 1993/94	J. Borréani E. Hébert G. Le Hir C. Castela P. Tavignot	24F	190 gr
14	Professeurs de mathématiques de collège et lycée : formation professionnelle initiale, ou comment désaltérer qui n'a pas soif ?	A. Robert	22F	156 gr
15	La formation professionnelle initiale des futurs enseignants de mathématiques : exemples de séances organisées à l'IUFM pour les stagiaires de deuxième année (PLC2)	D. Dumortier, M. Lattuati M. Ponticq, C. Perdon, J. Poirier, A. Robert, C. Robert, et E. Roditi	30F	200 gr
16	Formation professionnelle initiale en mathématiques : Tuteurs et stagiaires en collège et lycée	M.C. Audouin	21F	140 gr
17	La racine carrée en troisième Etude d'une activité	E. Roditi	20F	140 gr

BROCHURE THEMATIQUE

1	Revue de documents à propos des calculatrices dans l'enseignement mathématique au collège et au lycée (IUFM Grenoble mathématiques)	14F	90 gr
2	Publications IREM. APMEP. ESM ... Sur l'enseignement des probabilités et des statistiques au collège et au lycée	16F	110 gr
3	Sommaires des bulletins de liaison des IREM	36F	290 gr
4	Répertoire des thèses autour de la didactique des mathématiques	16F	110 gr
5	Informations générales sur le CAPES et l'AGREGATION de mathématiques	50F	480 gr

DIVERS

Questionnaires de travail	E. Saltiel L. Viennot	29F	310 gr
Systèmes différentiels Etude graphique Ed. Cedic	M. Artigue V. Gautheron	50F	360 gr
Mécanique et énergie pour débutants	L. Viennot	40F	330 gr
Les cinq polyèdres réguliers de R^3 et leurs groupes	J.M Arnaudiès	34F	270 gr
Le calcul des variations	M. Gréhant	21F	150 gr
Rapporteurs (plastique)		6F	

Le groupe M : A.T.H
(Mathématiques : Approche par les Textes Historiques)

vous propose :

1. La revue Mnémosyne pour échanger expériences et réflexion à propos de l'histoire et de l'enseignement des mathématiques.

Vous trouverez dans Mnémosyne

- Un article de réflexion sur un thème ou un moment de l'histoire des mathématiques. Les numéros reprennent, entre autres, les exposés du séminaire animé par Jean Luc Verley et du séminaire de l'Union des professeurs de Spéciales, animé par Michel Serfati.

- De "bonnes vieilles pages", extraits d'ouvrages anciens peu répandus, des textes inédits ou difficiles à trouver, des traductions inédites...

- "Les contes du Lundi", qui donneront un aperçu des exposés et des échanges qui ont lieu lors de réunions du groupe M : A.T.H, ouvertes à tous, rassemblant de façon régulière, un lundi par mois à l'IREM, une quinzaine d'enseignants partageant notre passion.

- Des exemples d'activités avec les élèves, des documents divers pour les classes.
- Des comptes rendus de lectures, de conférences...
- Un calendrier des diverses rencontres et manifestations parisiennes et nationales sur l'histoire des mathématiques.

numéro 1 : La démonstration par exhaustion chez les grecs et les arabes	26F	200 gr
numéro 2 : La querelle entre Descartes et Fermat	30F	210 gr
numéro 3 : Fragments d'une étude des systèmes linéaires	30F	220 gr
numéro 4-5 : L'élaboration du calcul des variations et ses applications à la dynamique	40F	300 gr
numéro 6 : Leibniz et l'Ecole continentale	30F	220 gr
numéro 7 : Autour du théorème de Fermat. C. Goldstein	33F	230 gr
numéro 8 : Isaac Newton. Détermination de tangentes à des courbes à l'aide de la méthode de fluxions	33F	250 gr
numéro 9 : Desargues et Pappus. R. Tossut	33F	240 gr
numéro 10 : Le jeu des paradoxes dans l'élaboration de la théorie des séries Anne Michel Pajus	33F	260 gr

numéro 11 :
Des cartes-portulants à la formule d'Eward Wright :
l'histoire des cartes à "rumbs"
Marie-Thérèse Gambin — 33F — 255 gr

numéro 12 :
Histoire de quelques projections cartographiques
Marie Benedittini — 33F — 255 gr

numéro 13 :
Histoire et origine du calcul différentiel — 33F — 210 gr

numéro 14 :
La méthode des pesées chez Archimède
Michèle Bathier-Fauvet — 33F — 214 gr

numéro 15 :
Recherche de deux grandeurs connaissant leur produit
et leur somme ou leur différence — 33 F — 217 gr

Mnémosyne : Numéro spécial
N° 1 : Histoires de Pyramides (M. Grégoire) — 46F — 380 gr

2. Les brochures (déjà citées en 1ère page)

n° 61 : Mathématiques : Approche par des textes historiques - Tome 1 -....... 50 F — 450 gr

n° 79 : Mathématiques : Approche par des textes historiques - Tome 2 - .... 60 F — 530 gr

3. La Reproduction de textes anciens

(Ancienne série) :

I Disme (Simon Stevin).. 14 F — 80 gr

II Géométrie élémentaire (Félix Klein)...................................... 25F — 180 gr

III Dictionnaire Mathématiques (1er fascicule) (M. Ozanam)............... 31F — 250 gr

IV Dictionnaire Mathématique (2ème fascicule) (M. Ozanam).............. 32F — 250 gr

(Nouvelle série) :

N° 1 : Histoire des recherches sur la quadrature du cercle
(J.E Montucla).. 38F — 340 gr

N° 2 : Elémens du calcul des probabilités
(Marquis de Condorcet).. 28F — 240 gr

N° 3 : Traité des Indivisibles
(Gilles-Personne de Roberval)... 32F — 270 gr

N° 4 : Les Porismes d'Euclide
(Michel Chasles)... 35F — 300 gr

N° 5 : Sur la théorie des Ensembles
(Georg Cantor).. 52F — 450 gr

N° 6 : Traité des sections coniques
(M. de La Chapelle).. 42F — 450 gr

N° 7 : Traité élémentaire de calcul des probabilités
(S-F Lacroix).. 37F — 300 gr

N° 8 : Elémens d'algèbre
Alexis-Claude Clairaut... 41F — 350 gr

N° 9 : Recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal
Jean-Frédéric Frénet.. 44F — 384 gr

N° 10 Problèmes pour les arpenteurs
Lorenzo Mascheroni.. 21F — 156 gr

N° 11 Méthode des moindres carrés
Carl-Friedrich Gauss... 36F — 295 gr

N° 12 Traité du calcul différentiel et du calcul intégral
Sylvestre-François Lacroix.. 70 F — 600 gr

N° 13 Géométrie ou de la mesure de l'étendue................................ 52 F — 395 gr

N°14 Algèbre
J. Peletier du Mans — 36 F — 291 gr

COPIRELEM

Actes du XVIIème colloque des Professeurs d'Ecole Normale (Paris - Mai 1990)	61F	650 gr
Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques (Tome I)	56F	470 gr
Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques (Tome II)	55F	630 gr
Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques (Tome III)	45F	360 gr
Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques (Tome IV)	67F	612 gr
Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques (Tome V)	68F	538 gr
Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques (Tome VI)	96F	870 gr
Second concours interne de recrutement des professeurs d'école Choix de sujets 92-93-94-95 Les sujets du concours 1996 19 académies	61F	500 gr
Concours externe de recrutement des Professeurs d'Ecole Mathématiques. Annales 97 (21 sujets et leurs corrigés)	60 F 80 F port compris	810 gr
Concours externe de recrutement des Professeurs d'Ecole Mathématiques. Annales 98 (21 sujets et leurs corrigés)	110 F 131 F port compris	810 gr
Concours externe de recrutement des Professeurs d'Ecole Mathématiques. Annales 99 (21 sujets et leurs corrigés)	110 F 131 F port compris	810 gr
Actes : XXIVEME colloque des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres	70 F	610 gr
Concours externe de recrutement des Professeurs d'Ecole Document formateur	27 F	182 gr
Les cahiers du Formateur Tome 1 Documents pour la formation du professeur d'école en Didactique Des Mathématiques – Séminaire de Perpignan les 10 et 11 déc. 1997	50 F	382 gr
Les cahiers du Formateur Tome 2 Documents pour la formation du professeur d'école en Didactique Des Mathématiques – Séminaire de Tarbes du 17 au 19 nov. 1998	57 F	446 gr

BROCHURES INTER-I.R.E.M

N° 3 : Quelles activités pour quel apprentissage	42F	450 gr
Actes du colloque Inter-IREM Histoire et épistemologie des mathématiques	33F	610 gr
Budapest : Pour une perspective historique dans l'enseignement des Mathématiques	65F	440 gr
Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A - Première Année Principes et réalisations	99F	850 gr
Quelques supports pour des activités dans le cadre des enseignements modulaires en seconde (Réseau national des I.R.E.M)	24F	180 gr
Catalogue des publications des IREM de 1988 à 1991	50F	280 gr
Catalogue des publications des IREM de 1991 à 1994	40F	500 gr
Histoire d'infini (Actes du 9ème colloque Inter-IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques) (Landerneau, 22-23 mai 1992)	160F	790 gr
Apports de l'outil informatique à l'enseignement de la géométrie	60F	365 gr
L'Enseignement des Mathématiques : des Repères entre Savoirs, Programmes et Pratiques	60F	410 gr
Enseigner les probabilités au lycée Commission Inter-IREM Statistiques et probabilités	100 F	788 gr

BULLETINS INTER-I.R.E.M

Activités en Première	35F	310 gr
Images et Maths	47F	410 gr
Liaison collège-seconde (1989-1990)	50F	250 gr
Des chiffres et des lettres au collège 1991/92	50F	360 gr
Maths en seconde : énoncés et scénarios	50F	330 gr
Module en seconde	25F	150 gr
Autour de Thalès	60F	350 gr
Des Mathématiques en sixième	50F	262 gr
Des Mathématiques au Cycle central	60 F	327 gr

THESES

Aline Robert : L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. Divers articles de Mathématiques	1OOF	1410 gr
Jacqueline Robinet : Ingénierie didactique de l'élémentaire au supérieur	70F	770 gr
Michèle Artigue : Contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques	68F	780 gr
(en réd.)	37F	400 gr
Régine Douady : Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des Mathématiques - Une réalisation dans tout le cursus primaire	120F	690 gr
Denis Butlen : Apport de l'ordinateur à l'apprentissage des écritures multiplicatives au cours élémentaire	40F	330 gr
Monique Pezard : Une expérience d'enseignement de la proportionnalité aux élèves instituteurs	50F	460 gr
Françoise Tréhard : Logiciels pouvant impliquer des activités mathématiques à l'école élémentaire : typologie et enjeux didactiques	60F	690 gr
Bernard Parzysz : Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée. Contribution à l'étude de la relation voir /savoir	90F	850 gr
Isabelle Tenaud : Une expérience d'enseignement de la géométrie en Terminale C : enseignement de méthode et travail en petits groupes	130F	1300 gr
Marie-Jeanne Perrin-Glorian : Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6ème	160F	1390 gr
Antoine Dagher : Environnement Informatique et apprentissage de l'articulation entre registres graphique et algébrique de représentation des fonctions	88F	970 gr
Alain Kuzniak : Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré	98F	920 gr
Maha Abboud Blanchard L'intégration de l'outil informatique à l'enseignement secondaire des mathématiques : symptômes d'un malaise. Un exemple : l'enseignement de la symétrie orthogonale au collège	96F	890 gr
Catherine Houdement Projet de formation des maîtres du premier degré en mathématiques : programmation et stratégies	102F	930 gr

Christiane Larere Construction et appropriation de connaissances mathématiques par trois enfants infirmes moteurs cérébraux handicapés de la parole	80F	720 gr
Marie-Lise Peltier Barbier La formation initiale, en mathématiques, des professeurs d'école : "entre conjoncture et éternité" Etude des sujets de concours de recrutement et contribution à la recherche des effets de la formation sur les professeurs stagiaires	100F	924 gr
Brigitte Grugeon Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : BEP et Première G	189F	1600 gr
Jeanne Bolon Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière école-collège	94F	834 gr
Marie-françoise Jozeau Géodésie au XIXème Siècle De l'hégémonie française à l'hégémonie allemande Regards belges Compensation et méthode des moindres carrés	162F	1648 gr
Marlène Alves Dias Les problèmes d'articulation entre points de vue "cartésien" et "paramétrique" dans l'enseignement de l'algèbre linéaire	148F	1322 gr
André Pressiat Aspects épistémologiques et didactiques de la liaison "points-vecteurs"	141 F	1236 gr
Christophe Hache L'enseignant de mathématiques au quotidien : Etude de pratique en Classe de seconde	81 F	718 gr
Danielle Vergne Analyse des effets d'un stage de formation continue en géométrie sur les Pratiques des enseignants de l'école primaire	129 F	1122 gr

TITRE :

UNE INTRODUCTION DES SUITES RECURRENTES
UTILISANT MAPLE (DEUG 1)

AUTEUR :

JACQUELINE MAC ALEESE
ALINE ROBERT

RESUME

Cette brochure présente une introduction des suites récurrentes (au niveau DEUG1). Cinq séances de TD sont proposées, précédées de leurs objectifs développés. Les deux premières séances utilisent divers graphiques obtenus avec Maple (les procédures correspondantes sont indiquées) : tracés du graphe de la fonction concernée, des 2 « bissectrices » des axes, de la tangente au point fixe étudié, d'une boîte autour du point fixe, des escaliers ou colimaçons associés aux points (u_n, f (u_n)) etc...

MOTS CLES

Suites récurrentes
Maple
Tracés de graphiques
DEUG1

Editeur : IREM
Université PARIS VII
Directeur responsable de la
publication : M. ARTIGUE
2 Place Jussieu. Case 7018
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : Juillet 2000
ISBN : 2-86612-192-9