

## **CAHIER DE DIDIREM**

### **DEA DE DIDACTIQUE DES DISCIPLINES DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES**

#### **LE RAPPORT DES ÉLÈVES À LA FACTORISATION EN FIN DE TROISIÈME**

Par Caroline BARDINI  
JUIN 2000

**DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES**  
**UNIVERSITÉ PARIS 7 – DENIS DIDEROT**



Université Paris VII Denis-Diderot

**DIPLOME D' ETUDES APPROFONDIES DE DIDACTIQUE  
DES MATHÉMATIQUES**

Le rapport des élèves à la factorisation en fin de  
Troisième

par Caroline BARDINI



# Sommaire

|                                                                                                   |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Introduction.....                                                                                 | 3  |
| I – Cadre théorique.....                                                                          | 4  |
| I.1 – Quelques approches théoriques développées en Didactique de l’Algèbre.....                   | 4  |
| I.2 – La question de la factorisation au sein des recherches en Didactique des Mathématiques..... | 11 |
| I.3 – Cadre théorique adopté.....                                                                 | 16 |
| II – Méthodologie.....                                                                            | 18 |
| III – Les rapports institutionnel et personnel.....                                               | 21 |
| III.1 – Le rapport institutionnel.....                                                            | 21 |
| 1. Les programmes officiels.....                                                                  | 21 |
| 2. Les manuels scolaires.....                                                                     | 23 |
| 3. Les annales du brevet 2000.....                                                                | 43 |
| 4. Conclusion.....                                                                                | 47 |
| III.2 – Le rapport personnel.....                                                                 | 48 |
| 1. Analyse a priori du questionnaire.....                                                         | 49 |
| 2. Analyse a posteriori du questionnaire.....                                                     | 57 |
| Conclusion.....                                                                                   | 83 |
| Bibliographie.....                                                                                | 88 |



# Introduction

La factorisation polynomiale, notion introduite en classe de Quatrième, est reprise en Troisième où une place importante lui est accordée parmi les concepts algébriques étudiés. En effet, 84%<sup>1</sup> des exercices proposés sous le titre de « travaux numériques et gestion de données » du Brevet des Collège 2000 (soit 43% de l'ensemble des exercices) présentent des problèmes de factorisation.

Vu son importance dans les pratiques algébriques (surtout en fin de Collège) mais aussi vu les difficultés de son apprentissage, la factorisation a fait objet de diverses recherches en Didactique des Mathématiques et plus précisément en Didactique de l'Algèbre.

L'objectif de notre étude est, en prenant compte les écrits didactiques développés dans ce domaine, d'étudier le rapport à la factorisation développée par les élèves français actuels lors de la résolution de problèmes ayant trait à la factorisation au travers de l'analyse de leur rapport à ce concept en fin de Troisième. Pour ce faire, nous avons réparti notre étude en trois parties. Après avoir analysé quelques travaux existants en Didactique de l'Algèbre (et plus précisément ceux concernant l'enseignement de la factorisation), nous présenterons la méthodologie adoptée dans notre recherche pour ensuite développer la question du rapport institutionnel à la notion de factorisation en classe de Troisième par le biais de l'analyse du Programme Officiel ainsi que celle des manuels et des exercices du Brevet 2000. Puis nous étudierons le rapport personnel des élèves au travers de données recueillies à un questionnaire mené auprès de deux classes de Troisième pour ensuite tirer les conclusions de ces analyses.

---

<sup>1</sup> Soit 58 exercices sur 69.



# **Chapitre I – Cadre théorique**

## **I.1 - Quelques approches théoriques développées en didactique de L'Algèbre**

Les recherches menées en Didactique de l'Algèbre se révèlent de natures différentes : plusieurs ont un caractère psychologique, d'autres visent une modélisation cognitive à applications informatiques et d'autres encore se penchent sur l'évolution historique de l'enseignement de l'Algèbre. Dans les écrits didactiques, nous avons retenu trois grandes idées qui nous guideront au long de notre recherche.

Nous présenterons la théorie soutenue par Kieran [Kieran, 1992] et Sfard [Sfard, 1991] concernant le clivage de l'algèbre en deux niveaux (procédural et structural selon Kieran et opérationnel et structural selon Sfard), puis aborderons le point de vue de Chevallard [Chevallard, 1987] en ce qui concerne le calcul formel et fonctionnel présent dans l'enseignement pour ensuite aborder le débat portant sur la théorie de l'algèbre en tant qu' « arithmétique généralisée », par le biais du discours de Gascon [Gascon, 1994].

La deuxième partie de ce chapitre sera consacrée à l'analyse d'études menées à propos de l'enseignement de la factorisation au Collège pour ensuite présenter, dans la dernière partie, le cadre théorique adopté.

### **1. L'Algèbre procédurale et l'Algèbre structurale**

Selon Kieran [Kieran, 1992], quelques processus cognitifs présents dans l'apprentissage de l'Algèbre élémentaire trouvent leurs origines dans le développement historique de l'Algèbre en tant que système symbolique. Elle effectue le découpage de cette évolution en trois grandes périodes :

- Le stade de l'Algèbre rhétorique
- Le stade de l'Algèbre syncopée
- Le stade de l'Algèbre symbolique

Le premier stade correspond à la période antérieure à Diophante caractérisée par l'usage de la langue naturelle lors de la résolution de problèmes, les inconnues n'étant pas à ce moment là représentées par des symboles ou signes.

La seconde période fut marquée par la représentation, introduite par Diophante, de quantités inconnues par des lettres. Cependant, les algébristes de cette époque (et jusqu'au XVIème siècle) ne se souciaient pas d'exprimer le général ; les 189 problèmes proposés dans *Arithmetica* furent d'ailleurs tous résolus par des méthodes différentes. Il convient de souligner que le symbolisme syncope introduit par Diophante resta pratiquement inchangé jusqu'au XVIIème siècle : à part l'adoption de quelques abréviations (telles  $p$  pour plus et  $m$  pour moins), il n'y eut pas de grandes avancées symboliques.

Influencé par les travaux de Diophante (traduits en latin dans le XVIème siècle), Viète marqua la troisième grande période de l'histoire de l'Algèbre en créant une notation extrêmement condensée. Il a ainsi profondément changé le caractère de l'Algèbre : ce qui était naguère perçu comme étant un simple outil procédural acquit une dimension structurale. Les symboles mis en place acquièrent dès lors un statut d'objet et furent employés en tant que tels.

Après avoir effectué une analyse de manuels scolaires américains, Kieran [Kieran, 1992] suggère que l'Algèbre qui y est enseignée est le reflet de ce caractère structural (notamment lorsque l'accent est mis sur les tâches telles que simplifier et factoriser des expressions ou encore résoudre des équations en appliquant la même opération aux deux membres de celles-ci) : « les objectifs implicites de l'Algèbre élémentaire sont de nature structuraux »<sup>2</sup>. Toutefois, son enseignement passe (tout comme l'évolution historique présentée antérieurement) d'abord par le caractère procédural pour ensuite aboutir au caractère structural. Autrement dit, l'approche adoptée par la plupart des manuels se veut caractérisée par une introduction à l'Algèbre faite au travers, d'une part, d'exercices mettant en jeu des substitutions de valeurs numériques dans des expressions algébriques et d'autre part de la présentation de plusieurs techniques arithmétiques aboutissant à la résolution d'équations algébriques : « (...) most algebra textbooks attach a façade of procedural approaches onto their introduction to algebraic objects by providing a few exercises involving numerical substitution in algebraic expressions and various arithmetical techniques for solving algebra » [Kieran, 1992]. Une fois cette introduction faite, les représentations algébriques sont immédiatement traitées comme des objets sur lesquels on peut opérer (c'est ce qui correspond alors au volet structural de l'Algèbre).

---

<sup>2</sup> *The learning and teaching of school algebra*, Carolyn Kieran, p.392.

Rejoignant cette dialectique de l'Algèbre procédurale et structurale, Sfard [Sfard, 1991] décompose les notions mathématiques en deux niveaux : le niveau opérationnel (les concepts sont alors considérés comme étant des processus) et le niveau structural (comme des objets) en identifiant la conception opérationnelle des notions mathématiques comme étant - pour la plupart des apprenants - la première étape de l'acquisition de nouvelles connaissances mathématiques. Elle souligne également le fait que le passage du caractère « processus » au caractère « objet » d'un concept mathématique ne se fait ni rapidement ni sans difficultés et présente une modélisation de cette transition répartie en trois phases : l'intériorisation, la condensation et la réification.

De façon analogue au développement historique de l'Algèbre qui, nous avons vu, se présente comme un cycle procédural-structural, l'apprentissage de l'Algèbre élémentaire peut être interprétée comme une série d'accommodations de type « processus-objets » que les élèves doivent entreprendre afin de saisir son caractère structural. A ce propos, Tall [Tall, 1989] affirme qu' : « avant qu'un élève ne soit capable de concevoir une expression algébrique comme un objet mathématique plutôt qu'un processus, la manipulation algébrique peut s'avérer être source de conflit ».

Il est certes important, comme nous le souligne Tall, de « libérer » l'élève du caractère procédural de l'algèbre enseignée afin qu'il puisse mieux dominer les manipulations algébriques auxquelles il fera face. Nous nous demandons toutefois comment s'effectue le passage du volet procédural au structural. Du fait que les objectifs implicites de l'algèbre élémentaire seraient de nature structuraux (comme le suggère Kieran), ne passerions-nous pas trop rapidement de l'un à l'autre ? De plus, l'aspect procédural doit-il être uniquement développé en guise d'introduction d'une notion algébrique ? Mettant l'accent sur le caractère structural, ne nous éloignerions-nous pas en quelque sorte du sens que nous pourrions donner aux manipulations algébriques ?

Les rapports existants entre le caractère structural et procédural sont plus complexes et dialectiques que ces présentations ne le laissent supposer mais ils mettent l'accent sur une double dimension des objets algébriques qui nous semble importante à retenir pour notre analyse.

## **2. Calcul formel versus calcul fonctionnel**

Tandis que Kieran présente une évolution historique de l'Algèbre basée sur l'évolution du rapport au symbolisme, Chevallard [Chevallard, 1987] s'intéresse à la dialectique arithmétique/algèbre qui, selon lui, a toujours été présente tout au long de cette évolution (jusqu'au XIX<sup>ème</sup> siècle). Chevallard étaye son argumentation en résumant l'évolution de l'algèbre savante en trois grandes périodes : « Il y a eu au départ un corpus, traditionnel et à évolution lente, de problèmes arithmétiques. (...) Sur ce corpus vient alors s'établir la première algèbre (au sens où nous usons ce mot), celle des algébristes du IX<sup>ème</sup> siècle. Le surgissement de cette algèbre entraîne un vaste remaniement, étalé sur plusieurs siècles, du domaine numérique, lequel s'étend alors par l'apparition des négatifs, puis des décimaux (...), puis plus tard encore, des imaginaires »<sup>3</sup>.

Contrairement aux caractéristiques historiques de l'algèbre présentées ci-dessus, cette dialectique de l'algébrique et du numérique, selon Chevallard, n'est pas présente dans l'enseignement. Bien au contraire : la loi de topogénèse impose une séparation nette entre le numérique et l'algébrique. Tandis que celui-là est laissé à la charge des élèves, celui-ci est versé au lieu de l'enseignant.

Cependant, les élèves ont bien un rapport avec l'algébrique. Mais quelle est exactement sa nature ?

Chevallard soutient l'idée d'une algèbre enseignée dénouée de son caractère utilitaire et reprend les termes de calcul formel et calcul fonctionnel de G. Brousseau pour mieux expliquer ce phénomène.

Il utilise l'exemple suivant: A la consigne « Simplifier  $(2a+1) + (2a+3)$  », la réponse attendue est probablement  $4a + 4$ . Or cette expression peut être présentée d'une autre façon, notamment sous sa forme factorisée :  $4(a+1)$  – réponse attendue à la question : « Montrer que la somme de deux entiers impairs successifs est multiple de quatre ». Pourquoi privilégier une forme plutôt que l'autre ? Telle est la différence entre le calcul formel et calcul fonctionnel. Dans la mesure où la question fait preuve d'une pauvreté de consignes (telles que calculer, factoriser, développer, etc.), la réponse est donnée non plus suivant une motivation intra-mathématique (caractéristique des calculs fonctionnels) mais plutôt guidée par ce que Chevallard définit comme étant un « code de bonne conduite du calcul algébrique ». Un calcul est formel dans la mesure où il n'apparaît pas comme faisant partie de la construction d'une solution à un problème extérieur comme tel au calcul.

---

<sup>3</sup> *La dialectique entre études locales et théorisation : le cas de l'algèbre dans l'Enseignement du 2<sup>nd</sup> degré*, Yves Chevallard.

Chevallard suggère que l'enseignement du calcul algébrique au niveau du Collège est essentiellement formel et affirme que c'est à partir de la classe de Seconde que sa fonctionnalité est véritablement explorée, mettant en oeuvre des pratiques éloignées de celles antérieurement apprises.

Notre recherche et plus spécialement la conception du questionnaire sera teintée du discours soutenu par Chevallard. Notre expérience dans l'enseignement semble montrer qu'il y a, en effet, une prépondérance du calcul formel en détriment du calcul fonctionnel en ce qui concerne notamment l'enseignement de la notion de factorisation en Troisième. Il nous paraît donc primordial d'effectuer l'analyse des manuels ainsi que celle des réponses des élèves aux questions que nous leur avons posées prenant compte de cette caractéristique, ce qui permettra ainsi de rejeter ou confirmer l'hypothèse que notre expérience nous suggère.

### **3. L'Algèbre : une arithmétique généralisée?**

Il est très fréquent, dans les écrits de Didactique de l'Algèbre, de voir soulignée l'idée de rupture existante entre l'arithmétique et l'algèbre, et le rôle joué par cette rupture dans les difficultés d'accès au champ conceptuel de cette dernière. Les recherches didactiques soulignent aussi le fait que l'enseignement prend peu en compte ces ruptures accroissant ainsi ces difficultés. Kieran [Kieran, 1992] pointait déjà, nous l'avons vu, que l'introduction de l'Algèbre élémentaire se faisait - dans la plupart des manuels - au travers d'exercices qui se voulaient en correspondance avec l'arithmétique, les expressions algébriques étant considérées comme simples généralisations des opérations effectuées en arithmétique (c'est ce qu'elle appelle le caractère procédural de l'Algèbre).

De manière générale, dans les recherches didactiques, même si les ruptures entre arithmétique et algèbre sont soulignées, l'algèbre est d'abord vue dans ses rapports avec l'arithmétique. C'est ce que critique Gascon [Gascon, 1994] à travers sa censure du modèle de l'« *identification de l'algèbre élémentaire à une arithmétique généralisée* ». Selon lui, ce modèle « met l'accent sur le symbolisme algébrique et l'oppose à un supposé langage arithmétique que le premier est censé élargir et généraliser »<sup>4</sup>. Gascon met en évidence cinq pratiques (parmi d'autres) qui caractérisent ce modèle :

---

<sup>4</sup> *Un nouveau modèle de l'Algèbre élémentaire comme alternative à l' « arithmétique généralisée »*, Josep Gascon, p.45.

- L' « arithmétique généralisée » ne caractérise pas un seul type de problème : nous y trouvons la résolution d'équations, la manipulation de fonctions élémentaires, l'application de formules, etc.
- A contrario des problèmes solubles par l'arithmétique (qui utilisent notamment la technique de résolution à rebours), les dits « problèmes algébriques » doivent être traités autrement ; les techniques qui s'avéraient efficaces pour la résolution de ceux-là pouvant se révéler inapplicables pour ceux-ci<sup>5</sup>.
- Tandis qu'en arithmétique le but est le plus souvent de trouver un nombre comme résultat au problème posé, les pratiques algébriques aboutissent fréquemment à une relation entre deux grandeurs.
- Les symboles présents en Algèbre peuvent être interprétés différemment suivant le contexte où ils se situent, contrairement à la nature inchangée des « nombres concrets » invoqués en arithmétique. Les lettres peuvent être traitées en tant que « nombres inconnus spécifiques » (c'est le cas des symboles présents dans les équations), en tant que « nombre généralisés » ou encore en tant que « variables » (notamment présentes dans les formules).
- Les signes ou symboles qui sont en jeu dans les activités algébriques ne présentent pas du tout le même sens que lorsqu'ils se trouvent dans des contextes arithmétiques. Notamment, tandis que le signe « = » a une connotation d'action dans le monde arithmétique (où la symétrie et la transitivité de ce signe ne sont pas prises en compte), l'Algèbre lui octroie une dualité : il peut être non seulement interprété comme une action mais aussi comme une équivalence.

Selon Gascon [Gascon, 1994], cette définition de l'Algèbre élémentaire comme une « arithmétique généralisée » présente plusieurs limitations notamment le fait qu'elle ne peut expliquer certains phénomènes didactiques : « Etant donné que ce modèle caractérise l'algèbre élémentaire en prenant compte comme donnée l'arithmétique, les phénomènes visibles de ce point de vue (y compris, en premier lieu, les différents types de difficultés scolaires rencontrées lors de l'acquisition du « langage algébrique »), ainsi que les tentatives d'explication proposées, seront toujours enfermées dans un *cadre arithmétique de*

---

<sup>5</sup> Kieran illustre (*The learning and teaching of school algebra*, Carolyn Kieran, p.393) ce propos à l'aide de l'exemple suivant : "The Westmount Video Shop offers two rental plans. The first plan costs \$22.50 per year plus \$2.00 per video rented. The second plan offers a membership for one year but charges \$3.25 per video rented. For what number of rental videos will these two plans cost exactly the same? "

référence »<sup>6</sup>. C'est en outre le cas du phénomène d'arithmétisation de l'Algèbre qui montre non seulement que « l'arithmétique enseignée n'a pas été absorbée par l'algèbre enseignée, mais encore qu'elle a subsisté en tant que savoir enseigné en empruntant des instruments de travail typiquement algébriques ( symboles = , + , - , etc.)<sup>7</sup> ».

De plus, les travaux menés par Chevallard ainsi que ceux de Piaget et Garcia semblent montrer que ce modèle d' « arithmétique généralisée » selon lequel il y aurait une « continuité et une dépendance exclusive de l'Algèbre vis-à-vis de l'arithmétique » peut s'avérer infructueux si considéré en tant qu'instrument didactique ou même en tant qu'instrument d'exploitation historique relatif à la genèse de l'Algèbre : « les travaux de Piaget et Garcia ainsi que ceux de Chevallard montrent qu'il se produit, aussi bien dans la genèse historique que dans la genèse didactique de l'algèbre, un changement *qualitatif* dans le développement du savoir mathématique »<sup>8</sup>.

C'est dans ce contexte que Gascon nous présente un modèle alternatif de l'Algèbre élémentaire « qui permet de formuler des phénomènes nouveaux et reformuler les anciens selon une perspective plus large »<sup>9</sup>, que nous nous contentons à peine de mentionner.

Il nous semble à présent important de retenir les points essentiels des théories que nous venons de décrire.

Il s'agit tout d'abord de souligner que, bien que Kieran mette en évidence une certaine continuité entre l'arithmétique et l'algèbre (rappelons qu'elle suggère que l'arithmétique sert le plus souvent de point de départ pour la présentation des notions algébriques), elle pointe aussi une rupture entre les deux, notamment lorsqu'elle affirme : « The cognitive demands involved in operating on algebraic expressions as objects with operations (...) are quite unlike the operations of arithmetic (...) »<sup>10</sup> tout en insistant sur la différence entre l'algèbre procédurale (à côté de laquelle l'arithmétique se situe : « Procedural refers to arithmetic operations carried out on numbers to yield numbers »<sup>11</sup>) et structurale.

Le discours soutenu par Gascon, nous l'avons vu, se veut essentiellement une critique du modèle d'arithmétique généralisée notamment développé par Kieran (« Algebraic

---

<sup>6</sup> *Un nouveau modèle de l'Algèbre élémentaire comme alternative à l' « arithmétique généralisée »*, Josep Gascon, p.46.

<sup>7</sup> Idem, p.47.

<sup>8</sup> *Un nouveau modèle de l'Algèbre élémentaire comme alternative à l' « arithmétique généralisée »*, Josep Gascon, p.47.

<sup>9</sup> Idem.

<sup>10</sup> *The learning and teaching of school algebra*, Carolyn Kieran, p.392.

representations are treated as generalized statements of the operations carried out in arithmetic »<sup>12</sup>). Il propose un modèle alternatif de l'algèbre élémentaire tout en insistant sur les différences et ruptures existantes entre l'arithmétique et l'algèbre.

Finalement, nous pouvons dire que la théorie de Chevallard que nous avons retenu dans cette partie de notre analyse ne tranche pas ce débat, même si Gascon le cite en affirmant que « Chevallard a montré en outre que l'algèbre enseignée n'est pas à proprement parler une arithmétique généralisée (...) ». Il s'intéresse plutôt à la fonctionnalité des exercices de calcul algébrique proposés aux élèves de Collège et Lycée, suggérant une prédominance de ce qu'il appelle « calcul formel » au détriment du « calcul fonctionnel », surtout au niveau du Collège. Ce point de vue, comme nous l'avons déjà souligné, sera une caractéristique que nous développerons tout au long de notre recherche et qui guidera nos analyses.

## **I.2 - La question de la factorisation au sein des recherches en Didactique des Mathématiques**

Après avoir étudié quelques théories générales développées en Didactique de l'Algèbre, nous nous penchons à présent sur les recherches concernant plus précisément l'enseignement de la notion de factorisation. Nous commencerons notre analyse en situant notre objet de recherche dans le contexte des écrits de Didactique de l'algèbre, puis nous présenterons les travaux de J. F. Nicaud [Nicaud, 1994] ainsi que ceux de J. Tonnelle [Tonnelle, 1979] pour ensuite aboutir à une conclusion et dégager quelques hypothèses.

### **1. L'influence de la Didactique de l'Algèbre**

Nous avons présenté, dans le chapitre précédent, quelques théories qui sont à la base des recherches en Didactique de l'algèbre. Parmi celles que nous avons exploitées, nous retiendrons essentiellement la question introduite par Chevallard [Chevallard, 1987] de la prédominance du calcul formel au détriment du calcul fonctionnel dans l'enseignement secondaire (et surtout au Collège).

---

<sup>11</sup> *The learning and teaching of school algebra*, Carolyn Kieran, p.392.

Au cours de notre expérience dans le milieu de l'enseignement (au Collège et au Lycée) nous nous sommes, à maintes reprises, heurtés à ce phénomène en faisant notamment face à des exercices relevant du domaine algébrique dénués de sens (intra ou extra-mathématique). Ceci nous a d'autant plus paru flagrant en classe de Troisième, où les élèves s'initient à des démarches plus complexes en mathématiques (démonstrations dans le domaine géométrique, mise en équation et résolution d'équations tout en interprétant la solution dans le contexte du problème posé, résolution d'un problème dans différents cadres mathématiques, etc.). Si d'un côté le programme de la classe de Troisième exige l'acquisition de nouvelles pratiques de la part des élèves, il ne conserve pas moins des problèmes aux consignes classiques (développe, factorise, calcule, etc.). Présenter un exercice où le sens intra-mathématique (par exemple) est peu exploité ne détermine pas forcément l'échec des élèves tentant d'y répondre. Mais que retiennent-ils de la notion en jeu ?

La notion de factorisation d'expressions algébriques introduite en classe de Troisième nous semble étayer la particularité ci-dessus décrite et c'est cette hypothèse que nous allons essayer de soutenir tout au long de notre travail. Notre expérience semble montrer que cet « outil » mathématique, qui a son importance dévoilée à partir de la classe de Seconde, reste peu exploité en classe de Troisième et n'apparaît pour la plupart du temps que sous la forme d'exercices aux consignes dites classiques. Quel rapport les élèves entretiennent-ils avec cette notion ? Sont-ils guidés, comme le suggère Chevallard, par un « code de bonne conduite » des calculs algébriques ?

Plusieurs recherches en Didactique des Mathématiques se sont déjà penchées sur la question de l'enseignement de la factorisation dans l'enseignement secondaire exploitant des critères autres que ceux de la fonctionnalité. Nous allons, dans les paragraphes suivants, présenter les principaux résultats qui guideront notre travail.

## **2. Les différents niveaux sémantiques d'une expression algébrique**

Plusieurs chercheurs en Didactique des Mathématiques ont déjà établi, nous l'avons vu, une modélisation cognitive en algèbre : Sfard [Sfard, 1991] propose une modélisation des différentes étapes du développement conceptuel (intérieurisation, condensation et réification) tandis que Kieran [Kieran, 1992] suggère une division de l'algèbre en deux catégories

---

<sup>12</sup> *The learning and teaching of school algebra*, Carolyn Kieran, p.392

(procédurale et structurelle), soutenant l'idée que l'algèbre élémentaire enseignée se veut essentiellement structurelle.

Drouhard défend la thèse que l'on ne peut comprendre les écritures symboliques algébriques sans prendre en compte tout un ensemble de caractéristiques qui leur sont propres : leur *syntaxe*, leur *dénotation*, leur *sens*, leur *interprétation* et leur *connotation*.

Par *syntaxe* il entend non seulement les conventions liées à l'écriture des expressions algébriques (le rôle des parenthèses, de la barre de fraction, etc.) mais aussi les transformations formelles portant sur les expressions associées aux règles algébriques portant sur les nombres.

Lorsque Drouhard définit le concept de *dénotation*, il le fait en s'appuyant sur la distinction entre sens et dénotation établie par G. Frege. Un objet mathématique peut être représenté de plusieurs façons différentes (dont l'intérêt d'usage diffère selon le contexte) mais aura une unique dénotation : c'est l'exemple du nombre 8 qui peut s'écrire comme  $4 \times 2$ ,  $2^3$ ,  $16/2$ , etc. Toutes ces écritures différentes ont la même dénotation car se réfèrent au même nombre.

Si toutefois les expressions  $(2a+1)+(2a+3)$ ,  $4a+4$  et  $4(a+1)$  ont la même dénotation, elles ont des *sens* différents puisqu'elles ne révèlent pas du même point de vue. Privilégier une écriture au détriment de l'autre dépendra de leur sens et ce choix peut s'avérer difficile pour de nombreux élèves.

L'*interprétation* que l'on donne à une expression algébrique dépend essentiellement du cadre dans lequel elle intervient. Par exemple, l'expression  $5x+3$  a pour interprétation dans le cadre des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  la fonction :  $x \longrightarrow 5x+3$ .

Finalement, Drouhard prend en compte le côté subjectif de l'interprétation d'une expression algébrique et définit la *connotation*. Chaque élève est un sujet cognitif unique et ce sont ses expériences scolaires et les situations qu'il a rencontré tout au long de son cursus qui détermineront la connotation qu'il donnera à une expression algébrique. La notion de connotation est une perception subjective essentiellement liée à l'histoire personnelle de l'élève.

J.F. Nicaud [Nicaud, 1994], dans le cadre du développement du système EIAO nommé APLUSIX, propose l'existence d'autres niveaux sémantiques qui se situeraient à la suite de ceux décrits ci-dessus pour des classes de problèmes d'algèbre et qui permettraient une meilleure analyse de l'évolution du sens du calcul algébrique.

Nicaud définit un domaine algébrique de problèmes comme étant un ensemble d'objets  $D$  appelé domaine et des fonctions de  $D^k$  dans  $D$  ainsi que d'un ensemble de formes

symboliques (expressions) servant à représenter les objets. Ces expressions constituent la composante syntaxique. Le domaine D constitue le premier niveau sémantique : donner du sens à une expression c'est, à ce niveau, donner des valeurs aux variables et calculer un élément de D. La transformation d'une expression en une expression équivalente (c'est à dire la même fonction de  $D^k$  dans D) à partir d'inférences constitue le deuxième niveau sémantique. Prenons un exemple de factorisation<sup>13</sup> : On demande de factoriser  $x^2 - (2x-1)^2$ .

Le terme  $x^2 - (2x-1)^2$  s'apparie au membre droit de l'identité  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$  avec la substitution  $\{ a \rightarrow x, b \rightarrow 2x-1 \}$ . Le terme peut être remplacé par  $[x+(2x-1)][x-(2x-1)]$ , d'où l'égalité  $x^2 - (2x-1)^2 = [x+(2x-1)][x-(2x-1)]$ .

Finalement, le troisième niveau sémantique (considéré par J.F. Nicaud comme essentiel à l'activité algébrique) est constitué de connaissances stratégiques telles que des classes de règles de transformation syntaxique qui permettent de transformer les expressions algébriques.

Nous retrouverons la théorie développée par Nicaud tout au long de notre travail (plus particulièrement lors de l'analyse de manuels scolaires). Nous nous appuierons aussi sur les conclusions des travaux<sup>14</sup> de J. Tonelle présentés dans le paragraphe suivant.

### 3. Le monde clos et fragile de la factorisation au premier cycle

J. Tonelle [Tonelle, 1979], au travers de questionnaires et entretiens menés avec des élèves de Troisième dans le cadre de son mémoire de DEA, nous révèle quelques particularités de l'enseignement de la factorisation au premier cycle que nous tenterons de confronter aux résultats issus de notre recherche.

Il soutient l'idée qu'un modèle de comportement de l'élève se développe au fur et à mesure qu'un certain nombre de situations lui sont présentées de façon répétitive. Ses réponses aux exercices présentés sont alors guidées par un double discours de l'enseignant : ce n'est pas seulement la définition de factorisation (le discours officiel de l'enseignant) qui détermine les schèmes d'action mis en oeuvre par l'élève ; c'est surtout le discours ostensif (ce qui est montré à travers des exercices d'entraînement, de contrôle, etc.) qui le guidera vers un chemin plutôt que vers un autre. « La fréquence avec laquelle tel type d'exercices se présente est

<sup>13</sup> Exemple emprunté de Brigitte Grugeon développé dans sa thèse de doctorat (1995).

<sup>14</sup> *Le Monde Clos de la factorisation au premier cycle*, J. Tonelle (rapport de mémoire de DEA de didactique des mathématiques - 1979)

souvent bien plus importante que ce que le professeur en a dit »<sup>15</sup>. Tonnelle ajoute de plus que l'élève est contraint de lire les situations proposées au travers d'une grille d'analyse personnelle qu'il se forge au gré des exemples. Le mode de résolution mis en oeuvre correspond alors à la reconnaissance d'un « code implicite » engendré par le système didactique.

Ce trait considéré par Tonnelle comme caractéristique de l'enseignement de la factorisation (mais pas exclusif à cet objet mathématique) nous a semblé un bon point de départ pour nos recherches. Les réponses des élèves face à des problèmes mettant en jeu la factorisation sont-elles toujours guidées par ce code issu des situations rencontrées au préalable?

Afin de tester la prégnance de ce code lors des résolutions d'exercices de factorisation, Tonnelle a analysé le comportement d'élèves face à des exercices « non-standards » tels : « transforme les expressions suivantes en produits de facteurs :

(...) 2)  $x^4 - 256$

3)  $t^6 - 12$

4)  $\pi t^3 - \pi t$

(...) »<sup>16</sup> pour lesquels étaient complexifiées certaines variables. Après avoir analysé les réponses des élèves et plus particulièrement après les entretiens menés avec ceux-ci, Tonnelle affirme que, pour que la mise en oeuvre du modèle d'action de l'élève « soit réalisée de manière correcte, il est nécessaire de maintenir à un niveau assez bas la complexité des expressions proposées » [*Le monde clos de la factorisation*, pg.79]. Nous retrouvons également l'idée que « même en domaine standard, l'outil mis entre les mains de l'élève apparaît peu fiable : il est rendu rapidement inefficace par une augmentation, même assez faible de la complexité informationnelle de la situation de factorisation. Le monde clos de la factorisation est aussi un monde fragile ».

C'est ainsi, dans le but de confirmer le discours soutenu par J. Tonnelle et afin d'éclaircir le rapport personnel des élèves de Troisième à la factorisation que nous leur avons proposé quelques exercices eux aussi considérés « non-standards » .

#### 4. Conclusion générale et hypothèses

---

<sup>15</sup> *Le Monde Clos de la factorisation au premier cycle*, J. Tonnelle (rapport de mémoire de DEA de didactique des mathématiques - 1979), p. 30

<sup>16</sup> Idem, p. 45

L'étude de l'introduction de la notion de factorisation en classe de Troisième exige la prise en compte de plusieurs paramètres.

En ce qui concerne le rapport institutionnel à ce concept, et d'après les résultats issus des travaux de J.F. Nicaud, il nous semble essentiel d'analyser le degré de complexité des expressions proposées aux élèves. A quel niveau sémantique se situent la majorité des exercices ? Conduisent-ils tous à un même schème d'action comme le suggère Tonnelle ou, au contraire, leur complexité présente-t-elle une variété assez large ? Selon Tonnelle, rappelons-le, c'est le discours ostensif plutôt que le discours officiel de l'enseignant qui détermine les décisions prises par les élèves. Existe-t-il donc un écart important entre le concept de factorisation institutionnalisé et les activités proposées ? Une minutieuse analyse des manuels s'impose.

En ce qui concerne le rapport personnel à la factorisation, il nous semble intéressant de retenir la notion de sens donnée par Drouhard. Les élèves privilégient-ils une écriture plutôt qu'une autre selon les types d'exercices ? Quelles nous semblent-elles les raisons de ce choix ? Les exercices proposés les guident-ils dans leur prises de décisions ?

Finalement, d'après les travaux que nous venons d'explorer, il paraît que l'enseignement de la factorisation en Troisième ne prend pas en compte toutes les complexités liées à ce concept. Les exercices proposés ont un niveau de complexité bas et n'explorent pas la fonctionnalité qui leur peut être associée. Les élèves font face à des problèmes pour la majorité dits standards qu'ils résolvent avec des méthodes moulées par leur expérience. L'analyse des manuels ainsi les résultats issus du questionnaire proposé nous guideront, il nous semble, vers le rejet ou la confirmation de ces hypothèses qui se veulent très locales aux situations particulières de notre recherche. Nous détaillerons dans le paragraphe suivant le cadre théorique qui servira de base à notre travail.

### **I.3 – Cadre théorique adopté**

Notre objet d'étude se portant sur le rapport des élèves à la factorisation, nous ne nous pencherons pas sur la question de l'écologie de ce savoir (qui mériterait pourtant d'être analysée), c'est-à-dire des conditions de naissance et survie du concept dans le système d'enseignement, nous plaçant plutôt dans le cadre théorique correspondant à l'approche anthropologique dans le sens employé par Chevallard. Sous cette perspective, Chevallard

suggère qu'un même objet d'enseignement n'est pas perçu de la même façon par tous les acteurs du système; les différents rapports pouvant s'avérer très éloignés les uns des autres. L'objectif de l'enseignement serait donc justement celui de tenter minimiser cet écart de façon à superposer les différents points de vue. Notre questionnement se veut alors clivé en deux niveaux : quel est le rapport institutionnel à la factorisation et en quoi diffère-t-il du rapport personnel des élèves? Nous nous intéressons ainsi au dernier maillon de la transposition didactique: le savoir enseigné. Il serait certes fort intéressant d'analyser de plus près toutes les transformations subies par la factorisation afin de mieux comprendre, par exemple, les différences existantes entre son domaine d'application dans le monde « savant » et dans celui de l'enseignement. Notre cible est cependant autre: admettant l'existence de ce savoir à l'intérieur du système d'enseignement, nous nous demandons dans quelle mesure l'objectif visé par la noosphère est atteint en ce qui concerne l'apprentissage de la factorisation en classe de Troisième.

Pour répondre à ces questions, nous proposons une double analyse : celle du rapport institutionnel et celle du rapport personnel à la factorisation en classe de Troisième. Afin d'aborder la première partie de l'étude, nous nous sommes penchés sur la lecture des programmes officiels de la classe de Troisième en vigueur au long de l'année scolaire 1999-2000 suivie de l'analyse de quelques manuels scolaires. Il est évident que nous n'avons pas effectué une étude exhaustive de tous les manuels employés dans l'enseignement, ne retenant ainsi que ceux qui nous semblaient plus représentatifs. L'objectif de ce paragraphe étant la présentation du cadre théorique, nous détaillerons les critères adoptés pour cette étude lors de l'analyse méthodologique de notre travail.

En ce qui concerne le rapport personnel à la factorisation, nous avons choisi de faire passer un questionnaire (présenté en annexe) auprès d'élèves en fin de Troisième pour essayer de mieux comprendre leurs conceptions à propos de la notion de factorisation. A nouveau, les justifications des questions posées seront présentées au long du chapitre concernant la méthodologie adoptée.

Nous avons, dans le paragraphe précédent, mis en évidence les théories issues de travaux en Didactique de l'algèbre qui nous guideront dans notre travail. Nous ferons cependant appel à d'autres notions didactiques afin de mieux cibler notre objet d'étude. L'analyse des exercices proposés aux élèves prenant en compte, par exemple, la notion de jeux de cadres développée par R. Douady.

## Chapitre II – Méthodologie

Il s'agit à présent de faire le lien entre les différentes théories explorées dans le chapitre précédent et les particularités de notre travail. Nous présenterons, dans une première partie, les choix portés sur l'analyse du rapport institutionnel à la notion de factorisation (à savoir les manuels étudiés et la grille d'analyse adoptée lors de l'exploration des exercices proposés) pour ensuite décrire la mise en oeuvre du questionnaire. Nous avons choisi de ne pas présenter l'analyse a-priori du questionnaire dans ce chapitre : il nous a paru plus judicieux de le faire au moment où nous explorerons les données recueillies (chapitre III, paragraphe III-2).

### II.1 – Le rapport institutionnel

#### 1. Les trois volets institutionnels

Nous avons choisi trois éléments pour nous guider vers une analyse du rapport institutionnel à la factorisation en classe de Troisième.

Nous nous sommes tout d'abord intéressés aux propositions officielles concernant ce concept en analysant ainsi que le programme officiel de classe de Troisième dans le domaine numérique (c'est là que nous retrouvons la notion de factorisation). Dans le chapitre suivant, nous décrirons le contenu prévu à ce niveau ainsi que les compétences exigibles tout en soulignant les commentaires qui les accompagnent.

Face à ce qui est proposé par le Ministère de l'Education, il s'agit de savoir ensuite ce qui est retenu dans les manuels scolaires et pour ce faire nous avons choisi trois exemplaires qui nous semblent assez représentatifs : *Triangle*, *Cinq-sur-cinq* et *Pythagore*. Nous développerons plus en détail les caractéristiques analysées dans chaque manuel au long du paragraphe suivant.

Finalement, puisque l'objet de notre étude porte sur l'enseignement de la factorisation en Troisième, il nous a semblé important d'analyser ce qui fut proposé aux élèves aux examens du Brevet du Collège en 1999 (prenant également en compte les sujets complémentaires ainsi

que les exercices dits préparatoires à la classe de Seconde). La grille d'analyse choisie est la même que celle adoptée pour les exercices des manuels scolaires (développée dans le paragraphe suivant) afin de permettre une meilleure comparaison entre les deux.

## 2. Les manuels scolaires

Comme nous l'avions déjà annoncé, l'analyse des manuels scolaires s'est faite en deux parties : nous nous sommes intéressés, dans un premier temps, à l'introduction de la notion de factorisation en nous penchant essentiellement sur l'institutionnalisation de ce concept. Ainsi, notre regard s'est plutôt porté sur les chapitres intitulés « Retenir » ou « Essentiel » qui se voulaient un résumé des concepts / méthodes que l'élève était supposé retenir. Ce découpage nous semblait le plus approprié pour permettre une comparaison entre le rapport institutionnel et le rapport personnel à la factorisation, celui-ci étant l'objet de notre recherche.

Nous avons choisi de cliver l'analyse des exercices présentés dans chaque manuel en quatre niveaux :

- Le type d'exercices proposés (nous avons essayé de catégoriser au mieux les énoncés) ainsi que le niveau d'autonomie requis de l'élève.
- Prenant en compte le discours soutenu par Chevallard à propos du calcul fonctionnel et formel, nous avons étudié la fonctionnalité de la factorisation dans chaque exercice (il s'agit de savoir si les exercices proposés présentent une fonctionnalité de la factorisation ; dans ce cas, nous précisons sa nature).
- Les cadres<sup>17</sup> présents dans chaque exercice.
- La complexité des expressions en jeu dans chaque exercice ainsi que le niveau sémantique du problème posé. En ce qui concerne la complexité des expressions, nous nous sommes appuyés sur les travaux de J. Tonnelles et nous avons analysé cinq variables présentes dans chaque expression algébrique traitée dans les exercices : le degré des exposants des inconnues, la nature des coefficients numériques (fractions, entiers, irrationnels, etc.), le choix des lettres désignant les inconnues, le nombre de termes/facteurs de l'expression et finalement le degré de difficulté à reconnaître le facteur commun (le cas où le facteur est apparent, lorsqu'il est sous forme de carré, les exercices correspondant à la factorisation d'une expression utilisant une identité remarquable sans calculs intermédiaires ou encore les expressions faisant intervenir des calculs préalables à la factorisation pour y aboutir –

---

<sup>17</sup> Dans le sens employé par R. Douady

développer une partie de l'expression, par exemple ne peuvent pas tous être considérés comme équivalents au niveau de leur complexité).

Nous rappelons que cette grille servira à l'analyse des exercices proposés au Brevet des Collèges.

## **II.1 – Le questionnaire**

Nous allons, dans ce paragraphe, décrire la mise en oeuvre du questionnaire, l'analyse a priori des questions proposées étant effectuée dans le chapitre concernant le rapport personnel à la factorisation.

Le questionnaire que nous avons élaboré (repris en annexe), a été présenté à deux classes de Troisième ayant déjà étudié la notion de factorisation (les élèves de la première classe ont répondu au questionnaire en Mars et ceux de la deuxième classe fin Avril), qui ont été invités à y répondre en une heure et 10 minutes dans leur salle habituelle et en présence du professeur (et du chercheur dans l'un des cas).

Un lycée et un Collège ont participé à notre recherche : le Lycée Georges Brassens (en banlieue parisienne Ville-Neuve-Le-Roy) et le Collège Saint-Exupéry (situé dans le 14<sup>ème</sup> arrondissement de Paris). Nous avons recueillis 15 réponses pour le premier lycée et 24 réponses pour le deuxième.

Nous nous sommes penchés sur trois aspects du rapport des élèves à la notion de factorisation : la reconnaissance de formes factorisées (questions n°1, 2 et 7), la production – c'est-à-dire la factorisation d'expressions (questions n° 5 et 6) et la reconnaissance de la fonctionnalité de la factorisation – c'est-à-dire la reconnaissance de la factorisation comme outil dans la résolution d'équations ou de calculs (questions n°3, 4, 5 et 7).



## **Chapitre III – Les rapports institutionnel et personnel**

Nous allons nous intéresser, dans ce chapitre, à l'étude du rapport institutionnel à la factorisation afin de le comparer à celui des élèves en fin de Troisième.

En ce qui concerne l'analyse du rapport institutionnel à la factorisation, nous aborderons en premier lieu le programme officiel, puis analyserons les trois manuels (tant l'introduction de la notion de factorisation que les exercices proposés dans chacun) pour ensuite explorer les problèmes posés au Brevet des Collèges.

Cette étude sera suivie de l'analyse a priori du questionnaire proposé qui sera ensuite confrontée aux données recueillies dans les deux classes.

### **III. 1 - Le rapport institutionnel**

#### **1. Les programmes officiels**

D'après le Bulletin Officiel n°10 (15 Octobre 1998 – programme en vigueur en 1999), « le programme de la classe de Troisième, dans le domaine numérique, a pour objectif de permettre :

- d'assurer la maîtrise des calculs sur les nombres rationnels
- d'amorcer les calculs sur les radicaux
- de faire une première synthèse sur les nombres avec un éclairage historique et une mise en valeur des processus algorithmiques
- de compléter les bases du calcul littéral et d'approcher le concept de fonction ».

Plus précisément, en ce qui concerne les Travaux Numériques développés en classe de Troisième, le Bulletin précise que « pour le calcul littéral, un des objectifs à viser est qu'il s'intègre aux moyens d'expression des élèves, à côté de la langue usuelle, de l'emploi des nombres ou des représentations graphiques. C'est en développant notamment des activités où le calcul littéral reste simple à effectuer et où il présente du sens, que le professeur permettra au plus grand nombre de recourir spontanément à l'écriture algébrique lorsque celle-ci est pertinente ».

A propos de cette présentation générale du programme de la classe de Troisième et avant d'amorcer la description des compétences exigibles, nous aimerions faire quelques observations.

Tout d'abord, il s'agit de souligner que le calcul littéral est classé parmi les Travaux Numériques, ce qui paraît étayer la continuité arithmétique/algèbre étudiée dans les travaux de Didactique d'Algèbre cités au cours du chapitre précédent.

Ensuite, l'explicitation des contenus en classe de Troisième nous semble quelque peu vague : qu'entend-on par « calcul littéral simple à effectuer » ou encore « où il présente du sens » ? Il nous paraît toutefois qu'il y a ici une volonté de redonner à l'Algèbre le caractère fonctionnel dont elle a été trop longuement privée, en particulier au niveau du Collège. Nous essayerons, dans la suite de notre travail, d'analyser comment ces commentaires ont été interprétés dans les manuels scolaires, notamment au travers des exercices proposés.

Le programme de la classe de Troisième en vigueur au cours de l'année scolaire 1999-2000 présente également quelques compétences exigibles suivies des commentaires reproduits ci-après :

| Contenus                                      | Compétences exigibles                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Commentaires                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|-----------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Écritures littérales ; identités remarquables | <p>Factoriser des expressions telles que :<br/> <math>(x+1)(x+2)-5(x+2)</math> ; <math>(2x+1)^2+(2x+1)(x+3)</math></p> <p>Connaître les égalités : <math>(a+b)(a-b)=a^2-b^2</math> ;<br/> <math>(a+b)^2=a^2+2ab+b^2</math> ; <math>(a-b)^2=a^2-2ab+b^2</math><br/> et les utiliser sur des expressions numériques ou littérales simples telles que:<br/> <math>101^2 = (100+1)^2 = 100^2 + 200 + 1</math> ;<br/> <math>(x+5)^2 - 4 = (x+5)^2 - 2^2 = (x+5+2)(x+5-2)</math></p> | <p>La reconnaissance de la forme d'une expression algébrique faisant intervenir une identité remarquable peut représenter une difficulté qui doit être prise en compte. Les travaux s'articulent sur deux axes :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- utilisation d'expressions littérales pour calculs numériques</li> <li>- utilisation du calcul littéral dans la mise en équation et résolution de problèmes.</li> </ul> <p>Les activités viseront à assurer la maîtrise du développement d'expressions simples ; en revanche, le travail sur la factorisation qui se poursuivra au lycée ne vise à développer l'autonomie des élèves que dans des situations très simples.</p> <p>On considérera les compétences en matière de calcul sur les puissances, notamment sur les puissances de 10.</p> |

C'est après la description des compétences exigibles que l'on a un meilleur aperçu de ce qui est attendu des élèves face aux exercices de factorisation : les exemples proposés exploitent les cas où le facteur commun est apparent  $((x+1)(x+2)-5(x+2))$  mais aussi lorsque celui-ci est présent sous forme de carré  $((2x+1)^2+(2x+1)(x+3))$ .

Les commentaires qui accompagnent la description du programme nous laissent croire que les exercices réservés à la factorisation conservent un caractère simple, que ce soit dans le choix des variables intervenant dans les expressions ou dans les situations où ils sont proposés. Nous verrons par la suite, lors de l'analyse des manuels scolaires, si cette hypothèse est confirmée.

L'utilisation des écritures littérales, d'après le programme officiel, présente deux objectifs en Troisième :

- permettre d'effectuer des calculs numériques dits « simples » ( tels que  $101^2 = (100+1)^2 = 100^2 + 200 + 1$ )
- permettre la mise en équation et la résolution de problèmes.

Il convient cependant de souligner que le programme prévoit également (lors de la description des compétences exigibles concernant « la résolution de problèmes du premier degré ou s'y ramenant ») l'exploitation de la résolution d'équations mises sous la forme  $A.B=0$  où A et B désignent deux expressions du premier degré de la même variable, pour lesquelles la factorisation peut intervenir comme outil (on pourrait alors interpréter ce type de situation comme étant une troisième application de l'utilisation d'expressions littérales).

## **2. Les manuels scolaires**

Il s'agit à présent de comparer ce qui est proposé dans les programmes et ce qui est retenu dans quelques manuels scolaires. Nous répartirons notre étude en deux niveaux : nous commencerons par décrire la présentation de la notion de factorisation en soulignant les méthodes et techniques privilégiées pour ensuite aboutir à l'analyse des exercices présentés dans chaque manuel.

### **A) Introduction de la notion de factorisation**

#### **A.1) Cinq-sur-Cinq**

Ce manuel est divisé en deux parties : « Travaux numériques – gestion de données » et « Travaux géométriques – gestion de données ». La factorisation est présentée dans le deuxième chapitre de la première partie, sous le titre « Identités remarquables – Equations-produits ». Nous ne présenterons pas ici les activités proposées en début de chapitre : nous limiterons notre étude à l'analyse de la partie intitulée « Retenir », c'est-à-dire à ce qui concerne le cours proprement dit.

La définition de factoriser une expression algébrique est présentée comme étant le fait de « l'écrire sous la forme d'un produit de facteurs ». Deux méthodes de factorisation sont alors proposées :

- factoriser avec la règle de distributivité
- factoriser avec les identités remarquables

La théorie est suivie d'une série d'exemples. Les deux premiers exemples concernent la reconnaissance d'un facteur commun : lorsque celui-ci est apparent et lorsqu'il est présenté sous forme d'un produit (ce qui nous renvoie aux exemples suggérés par le programme officiel). Les trois autres exemples sont consacrés à la reconnaissance du développement d'une identité remarquable (un exemple pour chaque identité).

### ● Reconnaître un facteur commun

**Exemple 1** Factoriser l'expression  $A$  :

$$A = (x - 4)(x + 2) + 3(x + 2)$$

$(x + 2)$  est le facteur commun

$$A = (x + 2)[(x - 4) + 3]$$

$$A = (x + 2)(x - 1)$$

**Exemple 2** Factoriser l'expression  $B$  :

$$B = (2x + 1)^2 - (2x + 1)(x + 3)$$

$$B = (2x + 1)(2x + 1) - (2x + 1)(x + 3)$$

$(2x + 1)$  est le facteur commun

$$B = (2x + 1)[(2x + 1) - (x + 3)]$$

$$B = (2x + 1)(x - 2)$$

### ● Reconnaître le développement d'une identité remarquable

**Exemple 3** Factoriser l'expression  $C$  :  $C = (x + 5)^2 - 4$

de la forme «  $a^2 - b^2$  », avec  $a = x + 5$  et  $b = 2$

$$C = [(x + 5) + 2][(x + 5) - 2]$$

$$C = (x + 7)(x + 3)$$

**Exemple 4** Factoriser l'expression  $D$  :

$$D = x^2 + 6x + 9$$

de la forme «  $a^2 + 2ab + b^2$  »,  
avec  $a = x$  et  $b = 3$

$$D = (x + 3)^2$$

**Exemple 5** Factoriser l'expression  $E$  :

$$E = x^2 - 16x + 64$$

de la forme «  $a^2 - 2ab + b^2$  »,  
avec  $a = x$  et  $b = 8$

$$E = (x - 8)^2$$

Après avoir abordé la question de la résolution d'une équation-produit, ce manuel présente une application de la factorisation : « savoir factoriser pour résoudre une équation ». Il propose alors un exercice résolu dans lequel l'élève est face à quelques équations qu'il doit résoudre après les avoir transformées en équations-produit. C'est à ce moment qu'il est explicité aux élèves l'intérêt d'une factorisation en deux facteurs du premier degré pour la résolution d'une équation du second degré.

**Énoncé** Résoudre chacune des équations proposées après l'avoir transformée en une équation-produit.

①  $4x^2 = 5x$

②  $(x+6)(3x-5) + x+6 = 0$

③  $16x^2 = (3x-7)^2$

④  $25x^2 - 10x + 1 = 0$

**Solution**

①  $4x^2 = 5x$

$4x^2 - 5x = 0$

on transforme pour que le second membre soit nul

$x$  est le facteur commun

$x(4x-5) = 0$  (équation-produit)

$x = 0$  ou  $4x - 5 = 0$

$x = 0$  ou  $x = \frac{5}{4}$

D'où les deux solutions :  $\boxed{0}$  et  $\boxed{\frac{5}{4}}$ .

②  $(x+6)(2x-5) + x+6 = 0$

$x+6$  est le facteur commun,  
car  $x+6 = (x+6) \times 1$

$(x+6)[(2x-5) + 1] = 0$

$(x+6)(2x-4) = 0$  (équation-produit)

$x+6 = 0$  ou  $2x-4 = 0$

$x = -6$  ou  $x = 2$

D'où les deux solutions :  $\boxed{-6}$  et  $\boxed{2}$ .

③  $16x^2 = (3x+7)^2$

$16x^2 - (3x+7)^2 = 0$

second membre nul

de la forme «  $a^2 - b^2$  »,  
avec  $a = 4x$  et  $b = (3x+7)$

$[4x + (3x+7)][4x - (3x+7)] = 0$

$(7x+7)(x-7) = 0$

$7(x+1)(x-7) = 0$  (équation-produit)

$x+1 = 0$  ou  $x-7 = 0$

$x = -1$  ou  $x = 7$

D'où les deux solutions :  $\boxed{-1}$  et  $\boxed{7}$ .

④  $25x^2 - 10x + 1 = 0$

de la forme «  $a^2 - 2ab + b^2$  »,  
avec  $a = 5x$  et  $b = 1$

$(5x-1)^2 = 0$  (équation-produit)

$(5x-1)(5x-1) = 0$

$5x-1 = 0$  (deux fois)

$x = \frac{1}{5}$

D'où une seule solution (« double ») :  $\boxed{\frac{1}{5}}$ .

### Méthode

Ces quatre exercices montrent l'importance et l'intérêt d'une factorisation en deux facteurs du 1<sup>er</sup> degré pour ensuite résoudre « facilement » une équation-produit. En effet, ces quatre équations sont du second degré, et, en classe de 3<sup>e</sup>, on ne sait les résoudre qu'en effectuant une factorisation préalable.

C'est pour cela que, dans de nombreux exercices, on demande :

1° de factoriser l'expression  $E$ ; 2° de résoudre l'équation  $E = 0$ .

Observons que l'application de la factorisation dans le calcul d'expressions numériques n'a pas été citée dans cette partie d'institutionnalisation, elle a été cependant traitée en guise d'activité à propos des égalités remarquables sous le titre « Calcul mental ».

### A.2) Pythagore

Ce manuel est présenté en deux parties : « Travaux géométriques et gestion de données » (sic) et « Travaux géométriques ». Le thème de la factorisation apparaît dans le deuxième chapitre de la première partie, intitulé « Égalités remarquables ».

La définition de la factorisation est donnée lors de la présentation d'un exercice intitulé « factoriser à l'aide d'un facteur commun » dans la partie initiale du chapitre, c'est-à-dire celle réservée aux activités. L'exercice consiste à déterminer, parmi une série d'expressions, celles qui sont factorisées. La définition, suivie d'une série de trois exemples, est présentée comme suit: « On dit qu'une expression est factorisée lorsqu'elle est sous la forme d'un produit de facteurs ».

### INFORMATION

On dit qu'une expression est factorisée lorsqu'elle est sous la forme d'un produit de facteurs.

#### Exemples

- L'expression  $7x \times (x + 2)$  est factorisée.
- $(x - 1)^2$  l'est aussi, car une puissance est un produit.
- Mais  $4x + 3$  et  $x^2 - 5x$  ne sont pas factorisés.

Parmi les expressions suivantes, indiquer celles qui sont factorisées.

A:  $(x+2)(x-3)$

B:  $x^2-7$

C:  $(x-4)^2$

D:  $2(x-1)+3x-3$

E:  $(5x-2)^2$

F:  $6(8-x)$

G:  $(2x-3)^2$

H:  $x^2-6x+9$

I:  $(x+1)(x-1)$

J:  $3(2x-1)x$

K:  $x(x+10)+25$

L:  $7x(x+2)+5(x+2)$

M:  $4x(x+3)+9$

N:  $4x^2+3(4x+3)$

O:  $3x^2+7x$

Le manuel explicite ensuite un des intérêts de la factorisation au cours de l'exercice « factoriser pour résoudre des équations » en précisant qu' : «entre autres choses, factoriser permet de résoudre des équations », proposant par la suite une série d'exercices concernant la résolution d'équations se ramenant à des équations-produits.

## Factoriser pour résoudre des équations

Entre autres choses, factoriser permet de résoudre des équations.

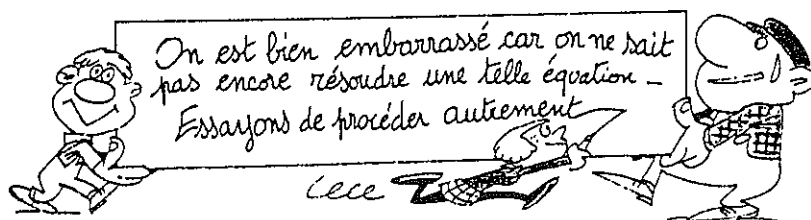
### A. Premier exemple

Soit à résoudre l'équation  $7(x - 1) + (x - 1)(x + 8) = 0$ .

#### 1. Une tentative malheureuse

Il est tentant de développer et de réduire le premier membre.

Montrer que l'équation devient alors  $x^2 + 14x - 15 = 0$ .



#### 2. Une méthode efficace

Au lieu de développer le premier membre, factorisons-le.

- Montrer que l'équation devient alors  $(x - 1)(x + 15) = 0$ .
- En utilisant la propriété du produit nul, calculer les deux valeurs pouvant être solutions de cette équation.
- Vérifier que les deux valeurs trouvées sont solutions de l'équation.

### B. Autres exemples

Résoudre les équations suivantes avec la méthode de la question A.2.

- $2x(x + 1) + 3x(x - 1) = 0$
- $2x(x + 3) - 3(x + 3) = 0$
- $(x - 4)^2 - (x - 4) = 0$ .

Deux méthodes de factorisation d'une somme sont présentées :

- Faire apparaître un facteur commun
- Utiliser une égalité remarquable

Le manuel propose deux exercices résolus (un pour chaque méthode) et passe ensuite aux exercices après avoir rappelé la propriété du produit nul.

### ÉNONCÉ

Factoriser les expressions suivantes.

$$A = (x^2 - 1) + 5(x - 1) + (x^2 - 2x + 1) \quad B = (x - 4)^2 - (2x - 1)^2.$$

#### Situation

Pour  $A$ , on utilise deux égalités remarquables pour faire apparaître un facteur commun dans la somme.

Pour  $B$ , on reconnaît la forme  $a^2 - b^2$ .

#### Solution

$$\begin{aligned} A &= (x - 1)(x + 1) + 5(x - 1) + (x - 1)^2 \\ &= (x - 1)[(x + 1) + 5 + (x - 1)] \\ &= (x - 1)(x + 1 + 5 + x - 1) \\ &= (x - 1)(2x + 5) \\ \text{Donc } A &= (x - 1)(2x + 5). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (x - 4)^2 - (2x - 1)^2 \\ &= [(x - 4) - (2x - 1)] \times [(x - 4) + (2x - 1)] \\ &= (x - 4 - 2x + 1) \times (x - 4 + 2x - 1) \\ &= (-x - 3)(3x - 5) \\ \text{Donc } B &= (-x - 3)(3x - 5). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= x^2 - 1^2 \\ &= (x - 1)(x + 1). \\ x^2 - 2x + 1 &= x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2 \\ &= (x - 1)^2. \end{aligned}$$

### A.3) Triangle

Ce manuel est composé de quatre parties : « Travaux numériques », « Travaux littéraires », « Travaux géométriques et de mesure » et « Révisions ». La factorisation est abordée dans le premier chapitre de la deuxième partie : « Calcul littéral et identités remarquables ».

A contrario des autres manuels, on ne parle plus de factorisation d'une expression, mais d'une somme ; dans le sous-chapitre « Connaissances », on retrouve la définition de la factorisation : « factoriser une somme, c'est la transformer en produit ».

Deux méthodes de factorisation sont présentées :

- La distributivité « simple » (le manuel renvoie l'élève à des connaissances acquises en classe de Quatrième)
- Les identités remarquables

Ces méthodes sont étayées par deux exemples commentés (un pour chaque méthode). Le premier concerne l'identification du facteur commun dans une somme (l'exemple traite le cas

où le facteur commun est apparent) tandis que le second exploite la reconnaissance d'une identité remarquable (dans ce cas, c'est l'identité  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$  qui est en jeu).

## Factoriser une expression littérale

### Méthode 1

*Identifier les termes d'une somme et utiliser la distributivité*

**Exemple :** factoriser l'expression :  $A = (4x + 3)(8x + 5) - (4x + 3)(5x - 2)$ .

$$A = (4x + 3)(8x + 5) - (4x + 3)(5x - 2) \quad A \text{ est une somme de deux produits.}$$

$$A = (4x + 3)[(8x + 5) - (5x - 2)] \quad (4x + 3) \text{ est un facteur commun.}$$

$$A = (4x + 3)(8x + 5 - 5x + 2) \quad \text{Attention aux signes !}$$

$$A = (4x + 3)(3x + 7)$$

### Méthode 2

*Identifier un membre de l'une des identités remarquables*

**Exemple :** factoriser l'expression :  $B = (2x - 1)^2 - 9$ .

$$B = (2x - 1)^2 - 9 \quad \text{On identifie } a^2 - b^2 \text{ avec } a = (2x - 1) \text{ et } b = 3.$$

$$B = (2x - 1 + 3)(2x - 1 - 3) \quad \text{On écrit } (a + b)(a - b).$$

$$B = (2x + 2)(2x - 4)$$

Remarque : si les méthodes 1 et 2 ne sont pas immédiatement utilisables, commencer par développer permet parfois d'aboutir.

Le manuel attire l'attention de l'élève en lui faisant remarquer que l'utilisation d'une de ces deux méthodes peut ne pas toujours s'avérer efficace : il suggère que « commencer par développer permet parfois d'aboutir ».

La fonctionnalité de la factorisation n'est cependant pas exploitée dans cette partie du cours, que ce soit pour le calcul d'expressions numériques ou pour la résolution d'équations-produits (la résolution d'équations-produits est traitée dans le chapitre « Inéquations et équations »). On remarque toutefois que des exercices de « calcul mental » ont été proposés en guise d'activités au début du chapitre, sous le titre « Résoudre des problèmes ».

### A.4) Conclusion

Les trois manuels analysés nous montrent que l'introduction de la notion de factorisation en classe de Troisième ne diffère pas beaucoup d'un manuel à l'autre. Tant pour la définition que pour les méthodes employées, les manuels renvoient les élèves à des situations assez

semblables. En effet, les méthodes de factorisation les renvoient aux situations proposées dans le programme officiel : il s'agit de factoriser des expressions en mettant en évidence un facteur commun ou encore mettant en oeuvre une des identités remarquables. Nous pouvons étayer notre hypothèse à l'aide du tableau suivant :

|                          | Définition                                                                                         | Méthodes                                                                                                                                                                          | Exemples                                                                                                             | Commentaires                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|--------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Cinq-sur-cinq            | « Factoriser une expression algébrique, c'est l'écrire sous forme d'un produit de facteurs »       | 1. Factoriser avec la règle de distributivité<br>2. Factoriser avec les identités remarquables                                                                                    | 1. $A = (x-4)(x+2)+3(x+2)$<br>$B = (2x+1)^2-(2x+1)(x+3)$<br>2. $C = (x+5)^2-4$<br>$D = x^2+6x+9$<br>$E = x^2-16x+64$ | “Ces quatre exercices <sup>18</sup> montrent l'importance et l'intérêt d'une factorisation en deux facteurs du 1 <sup>er</sup> degré pour ensuite résoudre « facilement » une équation-produit. En effet, ces quatre équations sont du second degré, et, en classe de 3 <sup>ème</sup> , on ne sait les résoudre qu'en effectuant une factorisation préalable”. |
| Pythagore                | « On dit qu'une expression est factorisée lorsqu'elle est sous la forme d'un produit de facteurs » | 1. Faire apparaître un facteur commun<br>2. Utiliser une égalité remarquable                                                                                                      | 1. $A = (x^2-1) + 5(x-1) + (x^2-2x+1)$<br>2. $B = (x-4)^2 - (2x-1)^2$                                                | “Entre autres choses, factoriser permet de résoudre des équations. Soit à résoudre $7(x-1) + (x-1)(x+8) = 0$ . Il est tentant de développer et réduire le 1 <sup>er</sup> membre. On est bien embarrassé car on ne sait pas encore résoudre une telle équation. Au lieu de développer, factorisons.”(...)                                                       |
| Triangle Factorisation : | « Factoriser une somme, c'est la transformer en produit »                                          | 1. Identifier les termes d'une somme et utiliser la distributivité.<br>2. Identifier un membre de l'une des id. remarquables.                                                     | 1. $A = (4x+3)(8x+5) - (4x+3)(5x-2)$<br>2. $B = (2x-1)^2-9$                                                          | “Si les méthodes 1 et 2 ne sont pas immédiatement utilisables, commencer par développer permet parfois d'aboutir”.                                                                                                                                                                                                                                              |
| Eq.-produit              |                                                                                                    | 1. Si l'inconnue n'est pas au carré, appliquer la méthode vue en classe de 4 <sup>ème</sup> .<br>2. Cas échéant, on factorise l'exp. puis appliquons la propriété du produit nul. | 1. $(x+7) + (2x-3) = 0$<br>2. $(3x-11)(x+12) - (3x-11)(7-3x) = 0$                                                    | “Dans certains cas, pour factoriser ou pour éliminer les termes contenant l'inconnue au carré, il est nécessaire de développer”.                                                                                                                                                                                                                                |

En ce qui concerne la fonctionnalité de la factorisation (la résolution d'équations du second degré), elle est explicitée dans les trois manuels et, à l'exception du manuel *Triangle*, les exercices sont exploités dans le même chapitre que celui réservé aux factorisations.

<sup>18</sup> « Résoudre chacune des équations proposées après l'avoir transformée en une équation-produit.  
1)  $4x^2=5x$       2)  $(x+6)(3x-5)+x+6=0$       3)  $16x^2 = (3x-7)^2$       4)  $25x^2-10x+1 = 0$  »

Lors de l'analyse des trois manuels, nous nous sommes aperçus de l'importance consacrée à l'application de méthodes de factorisation. Il nous semble qu'un passage trop précipité de la définition de factorisation à son application pourrait troubler la compréhension des élèves qui pourraient, dans ce cas, confondre définition et méthodes. L'analyse du questionnaire mené auprès des élèves en fin de Troisième pourra éventuellement éclaircir ce propos, plus précisément au travers de l'analyse de la dernière question (« D'après vous : Qu'est-ce factoriser une expression ? A quoi sert la factorisation? »).

Après avoir analysé l'introduction de la notion de factorisation dans chaque manuel, nous en venons à l'analyse des exercices. Elle sera suivie d'une description des exercices retenus dans les annales du brevet de l'année 2000 (se reportant donc aux exercices de l'année 1999) permettant ainsi de faire le lien entre ce qui est proposé par les manuels et ce qui leur est exigé en fin de Troisième.

## **B) Analyse des exercices proposés**

### **B.1) Cinq-sur-cinq (37 exercices concernant la factorisation)**

#### **1. Type d'exercices**

Nous pouvons dire qu'il existe cinq catégories principales d'exercices proposés.

i) **9 exercices** où la consigne est « **factoriser chaque expression algébrique proposée** ».

Parmi ces 9 exercices :

- 5 exercices précisent : « en reconnaissant le développement d'une identité remarquable »

- 4 exercices précisent : « en reconnaissant le facteur commun »

ii) **8 exercices** concernant la **résolution d'équations-produits**. Parmi ces 7 exercices :

- 2 exercices sont présentés sous la consigne : « résoudre les équations-produits »

- 5 exercices sont présentés sous la consigne : « résoudre les équations proposées après les avoir transformées en équations-produits »

- 1 exercice où il s'agit de résoudre une équation après avoir complété l'égalité entre l'expression en jeu (sous forme développée) et sa forme factorisée

iii) **5 exercices** où, pour une expression  $E$  donnée, il s'agit de **développer et réduire  $E$ , de factoriser  $E$  puis de résoudre  $E = 0$** . Parmi ces 4 exercices :

- 2 exercices : la forme factorisée de  $E$  est fournie

- 1 exercice : la consigne est : « résoudre  $E=0$  »

- 1 exercice précise la méthode à utiliser : « en utilisant la question précédente (factoriser E) » )

- 1 exercice présente une complexité plus grande : on demande à l'élève de choisir entre les deux écritures de E (développée ou factorisée) pour résoudre deux équations (l'exercice est du même type que la question n°5 du questionnaire que nous avons proposé).

iv) 3 exercices où la consigne est « **calculer de tête** ». Ces exercices sont répartis comme suit : la moitié des exercices proposent des calculs numériques se ramenant à celui d'expressions du type  $(a+b)^2$  ou  $(a-b)^2$  et l'autre moitié des exercices concernent des produits de deux nombres pour lesquels il s'agit de reconnaître la forme  $(a+b)(a-b)$ .

v) 7 exercices où, après avoir donné une des consignes ci-dessus décrites (i à iv), est présenté un **problème qui se veut une application directe** de la solution trouvée<sup>19</sup>, faisant souvent intervenir des changements de registres.

Les principales catégories d'exercices ont été présentées ci-dessus ; il nous est cependant resté 5 problèmes pour lesquels nous n'avons pas trouvé de spécificité qui permettrait de les classer sous une autre catégorie. Ils concernent tous l'application d'identités remarquables pour résoudre des problèmes de calcul mental.

Parmi tous les exercices proposés, nous avons décelé quatre niveaux d'autonomie requis des élèves, selon le type de tâche à effectuer:

| Exercices de factorisation |                   | Exercices de résolution d'équation                                 |                                      |
|----------------------------|-------------------|--------------------------------------------------------------------|--------------------------------------|
| Méthode précisée<br>13     | Non précisée<br>8 | Méthode de rés. d'éq.<br>précisée mais factorisation<br>libre<br>6 | Méthode de rés.<br>d'éq. libre<br>10 |

Il nous semble que le partage en ce qui concerne le degré de liberté de l'élève lors de la mise en oeuvre de la factorisation est équitable : il y a à peu près le même nombre d'exercices donnant des indices de la méthode à adopter que ceux laissant ce choix à la charge de l'élève. Si nous prenons en compte les exercices menant à la résolution d'équations du second degré, nous observons que dans tous les cas la méthode de factorisation n'est pas indiquée ; le fait de résoudre une équation en factorisant l'expression au préalable étant indiquée dans presque la moitié des cas.

<sup>19</sup> Par exemple :« 1) Résoudre les deux équations ci-dessous après les avoir transformées en équations-produits :  $x-2x^2=0$  ;  $2x-x^2=0$ .

2) Trouver un nombre non nul égal au double de son carré ; trouver un nombre non nul égal à la moitié de son carré ».

## 2. Fonctionnalité des exercices

Il s'agit ici de déterminer le nombre d'exercices pour lesquels la factorisation intervient en tant qu'outil de résolution pour un problème donné. Nous pouvons résumer nos données dans le tableau suivant :

| Pas de fonctionnalité | Fonctionnalité                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|-----------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>11</b> (i, iii)    | <b>24</b> (ii, iii, iv, v, 5 exercices sans catégorie)<br>ii, iii,: fonctionnalité se rapporte à la résolution d'équations-produits.<br>v : exercices où la résolution d'équations-produits intervient pour résoudre des problèmes géométriques (calcul d'aires) ou pour modéliser un problème arithmétique (trouver un nombre entier tel que...).<br>iv : la factorisation intervient comme outil pour effectuer des calculs mentaux |

Obs. : La somme des deux effectifs n'est pas égal au total du nombre d'exercices car deux exercices (faisant partie du ii) concernent la résolution d'équation-produits déjà présentées sous forme factorisée.

Nous observons un effort de situer la factorisation dans un contexte où ce calcul a du sens (comme le suggère le programme officiel), cependant la fonctionnalité reste majoritairement liée à la résolution d'équations du second degré malgré la présence de quelques exercices de calcul mental.

## 3. Cadres présents dans chaque catégorie d'exercice

| Algébrique                 | Numérique     | Algébrique, Géométrique                        | Algébrique, Numérique                        |
|----------------------------|---------------|------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| <b>18</b> (i,ii, 1 du iii) | <b>3</b> (iv) | <b>7</b> (v : 3 algébriques et 4 géométriques) | <b>9</b> (iii et 5 exercices sans catégorie) |

Il nous semble important de souligner que, malgré la diversité de cadres que ce tableau peu laisser sous-entendre, les problèmes sont pour la plupart posés dans un cadre purement algébrique. Lorsque nous décelons l'intervention du cadre numérique dans les problèmes (dernière colonne du tableau), c'est parce qu'il s'agit de questions où on demande à l'élève de calculer l'expression donnée pour une valeur de  $x$ . La troisième colonne du tableau correspond aux problèmes posés dans le cadre géométrique (ou algébrique) pour lesquels la résolution se fait dans le cadre algébrique.

Nous retenons donc que les différents cadres ne sont pas beaucoup explorés. Nous nous demandons si ce choix fait par les auteurs du manuel peut être influencé par les problèmes proposés au Brevet, étant donné que une grande partie des exercices est interprétée comme étant préparatoires à cet examen. L'analyse des exercices qui y sont présentés nous permettra de renforcer (ou, au contraire, d'affaiblir) notre hypothèse, même si elle ne pourra pas trancher le débat.

#### **4. Complexité des expressions**

- Exposants : le degré maximum est 2.
- Sur la totalité des exercices (excepté ceux de calcul mental), seul un exercice fait intervenir des coefficients fractionnaires. L'écrasante majorité utilise des nombres entiers compris entre 1 et 10.
- Les inconnues sont le plus souvent libellées par la lettre  $x$ , puis quelques exercices font intervenir la lettre  $n$  (surtout pour les problèmes demandant de trouver un nombre entier), ou  $r$  (pour la résolution de problèmes géométriques). Moins fréquemment, nous retrouvons les lettres  $y$ ,  $t$  ou  $z$  dans les expressions proposées.
- Le nombre de termes de l'expression à factoriser varie entre 2 et 3. Les expressions sont à deux termes lorsque la factorisation se fait par reconnaissance du facteur commun (application de la règle de distributivité) et sont à deux ou trois termes lorsque la factorisation se fait en appliquant les identités remarquables (elles sont à deux termes lorsqu'elles se présentent sous la forme  $a^2-b^2$  et à trois termes pour  $a^2+b^2\pm 2ab$ ).
- Le niveau de difficulté de reconnaissance du facteur commun dans chaque expression est assez bas : la majorité des exercices proposent des expressions où le facteur commun est apparent ou sous forme de carré (comme le proposait d'ailleurs le programme officiel). Lorsqu'il s'agit de reconnaître une identité remarquable, l'expression à factoriser présente des coefficients numériques entiers carrés parfaits. Aucun exercice ne met en jeu des calculs intermédiaires permettant d'aboutir à la factorisation : celle-ci se fait en effet en très peu d'étapes.

Conclusion : Les exercices proposés dans ce manuel semblent suivre de très près les suggestions émises par le programme officiel. En grande majorité, les exercices se veulent très simples que ce soit en ce qui concerne la mise en oeuvre des méthodes à appliquer (les exercices étant répétitifs) ou en ce qui concerne la complexité des expressions à factoriser.

Malgré le grand nombre d'exercices présentant une pauvreté de consignes (i, ii, iii et iv), un effort est effectué dans le sens de diversifier le contexte dans lequel ceux-ci apparaissent.

## B.2) *Pythagore (68 exercices concernant la factorisation)*

### 1. Type d'exercices

Nous pouvons répartir les exercices en cinq catégories différentes :

i) **21** exercices où la consigne est de « **factoriser les expressions suivantes** ». Parmi ces 21 exercices :

- 9 exercices explicitent que « le facteur commun est apparent »
- 6 exercices proposent d'appliquer les égalités remarquables
- 6 exercices indiquent une factorisation « par tous les moyens »

ii) **15** exercices où, pour une expression  $E$  donnée, il s'agit de **développer et réduire  $E$ , de factoriser  $E$ , de résoudre  $E = 0$  puis éventuellement de calculer  $E$  pour une valeur de  $x$  donnée**. Parmi ces 15 exercices :

- 6 exercices : la forme factorisée de  $E$  est fournie
- 7 exercices : la consigne donnée est « résoudre  $E=0$  »)

Obs. : Deux exercices ne demandent pas de résoudre  $E = 0$ .

iii) **16** exercices où, pour une expression  $E$  donnée, il s'agit de **factoriser  $E$ , de résoudre  $E$**  (parmi les 16 exercices 14 énoncent simplement « résoudre  $E=0$  ») puis **calculer  $E$  pour une valeur de  $x$  donnée** (éventuellement).

iv) **5** exercices pour lesquels on demande de **résoudre des équations du second degré** (sans méthode précisée).

v) **6 problèmes** dont 1 de modélisation (montrer des propriétés d'un entier) et 5 géométriques.

Il nous reste à nouveau quelques exercices pour lesquels nous n'avons pas trouvé de catégorie :

- **3** exercices où il s'agit de compléter des égalités afin de pouvoir écrire l'expression sous forme d'un carré.
- **2** exercices où il s'agit de calculer la différence entre deux carrés.

Nous nous sommes intéressés par la suite au degré d'autonomie requis de l'élève. Nous résumerons nos données dans le tableau suivant :

| Exercices de factorisation |                   | Exercices de résolution d'équation     |                                      |
|----------------------------|-------------------|----------------------------------------|--------------------------------------|
| Méthode précisée<br>15     | Non précisée<br>8 | Méthode de rés. d'éq.<br>précisée<br>9 | Méthode de rés.<br>d'éq. libre<br>31 |

Obs. : Comme nous l'avions constaté lors de la catégorisation des exercices, il y a 5 exercices où il ne s'agit pas directement de factoriser une expression. Pour cette raison, leur effectif n'apparaît pas dans ce tableau.

Parmi tous les exercices aboutissant à la résolution d'une équation, seul un suggère une méthode particulière de factorisation (un exercice à plus grande complexité que nous détaillerons par la suite), tous les autres laissant libre le choix de l'élève.

Nous constatons que le degré d'autonomie des élèves diffère selon le type d'exercices. Lorsqu'il s'agit de factoriser une expression (sans résolution d'équation), le manuel guide le plus souvent les élèves en leur indiquant la méthode à appliquer. D'un autre côté, lorsqu'il s'agit de résoudre des équations du second degré, c'est à l'élève de s'apercevoir que la factorisation lui servira d'outil pour aboutir à la réponse. De plus, aucune de ces factorisations (excepté pour un exercice) n'a une méthode indiquée.

## 2. Fonctionnalité

| Pas de fonctionnalité                                       | Fonctionnalité                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|-------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>26</b> (i, 2 du ii, 3 premiers exercices sans catégorie) | <b>42</b> (ii, iii, iv, v, 2 derniers exercices sans catégorie)<br>- ii, iii, iv : la fonctionnalité se rapporte à la résolution d'équations-produits.<br>- v : exercices où la factorisation intervient lors de la résolution de problèmes géométriques ou de modélisation.<br>- 2 exercices sans catégorie : applications numériques. |

De façon analogue à la fonctionnalité analysée pour les exercices du manuel *Cinq-sur-cinq*, nous constatons que sa nature est majoritairement liée à la résolution d'équations du second degré. Seuls deux exercices présentent une application numérique à la factorisation. Il nous paraît cependant important de souligner que les exercices sont le plus souvent proposés dans un contexte où ce calcul a du sens, la diversité de ce sens pouvant être, à notre avis, d'avantage explorée.

### 3. Cadres

Si d'un côté la fonctionnalité de la factorisation est souvent apparente dans les exercices, la diversité des cadres en jeu n'est pas importante :

| Algébrique                                 | Algébrique, Numérique                    | Algébrique, Géométrique |
|--------------------------------------------|------------------------------------------|-------------------------|
| 40 (i, ii, iv, 3 exercices sans catégorie) | 22 (iii, ii, 2 exercices sans catégorie) | 6 (v)                   |

En analysant de plus près la deuxième colonne de ce tableau, nous nous apercevrons que l'effectif nous renvoyant au cadre numérique est trompeur : il s'agit là de problèmes posés demandant aux élèves de calculer la valeur de l'expression fournie pour une valeur de  $x$  donnée. Nous rejoignons ainsi le cas des exercices posés dans le manuel *Cinq-sur-cinq* pour lesquels le cadre algébrique est le contexte privilégié.

### 4. Complexité des expressions

- Exposants : le degré maximum est 2.
- Parmi les 68 exercices, seuls 2 exercices présentent des expressions algébriques ayant pour coefficients numériques des fractions. L'écrasante majorité fait intervenir des coefficients entiers inférieurs à 10.
- La lettre la plus employée pour désigner les inconnues dans les expressions algébriques est  $x$ . On retrouve toutefois également les lettres  $y$ ,  $t$ ,  $z$ ,  $b$ ,  $a$ ,  $m$ ,  $n$  (cette dernière lors du traitement de problèmes de recherche de propriétés d'entiers).
- Le nombre de termes de l'expression à factoriser varie de 2 à 3 termes, comme dans le manuel précédent. Nous observons toutefois une différence : alors que dans *Cinq-sur-cinq*, les exercices pour lesquels il s'agissait de reconnaître le facteur commun (application de la distributivité) n'avaient pas plus de 2 termes, Pythagore en propose quelques-uns à 3 termes, complexifiant ainsi la tâche de l'élève. Les expressions intervenant dans chaque exercice (dont deux sont des sujets complémentaires issus du Brevet) sont les suivantes :  $D=4x^2-81+(x-3)(2x+9)$  ;  $E = (1-3x)-(1-9x^2)+3/2(3x-1)$  ;  $F =(2x+3)(-x+4)-(4x-6)(2x-1)+(3-2x)(3x+8)$ . Pour  $D$ , le manuel indique qu'il faut « factoriser  $4x^2-81$  » avant de factoriser  $D$  tandis que pour les deux autres exercices aucun indice n'est donné.
- De la même façon que pour le manuel *Cinq-sur-cinq*, le niveau de difficulté de reconnaissance du facteur commun dans les expressions reste assez bas. Parmi les exercices intitulés « vu au brevet », la grande majorité propose des expressions où le facteur commun

est sous forme de carré, tandis que ceux posés par le manuel soit présentent des expressions où le facteur commun est évident soit proposent des expressions développées d'identités remarquables (où les nombres qui interviennent sont des carrés parfaits afin de permettre une application directe de l'identité). Il y a toutefois un plus grand nombre d'exercices faisant intervenir des calculs intermédiaires permettant d'aboutir à la factorisation. Deux types de calculs intermédiaires sont requis et nous les illustrerons par deux exemples (un pour chaque type).  $A = (3x-2)(x+5)-(x^2-25)$ , où il s'agit de transformer  $(x^2-25)$  en  $(x+5)(x-5)$ .  $B = (3x+8)(3-x)+(2x+1)(x-3)$ , où l'élève doit reconnaître que  $x-3 = -(3-x)$ . Ces exercices sont toutefois une exception parmi ceux proposés, se trouvant toujours sous la rubrique de « sujets complémentaires du brevet ».

Conclusion : Tandis que le manuel *Cinq-sur-cinq* présente une diversité de cadres et un grand nombre d'exercices où la factorisation intervient en tant qu'outil pour la résolution d'équations du second degré, *Pythagore* semble avoir choisi d'explorer la complexité des expressions proposées. Même si le nombre d'exercices pour lesquels l'on exige des étapes intermédiaires afin de factoriser une expression reste minoritaire, leur proposition nous semble importante dans la mesure où elle contribue à l'élargissement de la conception des élèves à la factorisation.

### B.3) *Triangle ( 57 exercices concernant la factorisation)*

Il s'agit ici d'analyser séparément les exercices proposés dans le chapitre 5 : « Calcul littéral et identités remarquables » de ceux du chapitre 7 : « Inéquations et équations » car, nous le rappelons, le traitement de problèmes concernant la résolution d'équations-produits ne se fait pas dans le même chapitre réservé à l'introduction de la notion de factorisation.

#### B.3.a) *Chapitre 5 : « Calcul littéral et identités remarquables » (37 exercices)*

##### 1. Type d'exercices

Nous avons classé les exercices proposés en cinq catégories différentes :

i) 18 exercices où la consigne est « **factoriser les expressions suivantes** ». Parmi ces 18 exercices :

- 4 exercices : « En utilisant la distributivité »
- 6 : « En utilisant une identité remarquable »
- 4 : « En choisissant la méthode adaptée »
- 1 : « En commençant par développer »

- 3 : sans indication de méthode à suivre
- ii) 3 exercices où, pour une expression E donnée, il s'agit de **développer et réduire E, écrire E sous forme de produit de deux facteurs** (parfois avec la consigne de « factoriser E ») **puis calculer E pour une valeur de x donnée.**
- iii) 3 exercices où il s'agit de **reconnaître la forme factorisée** d'expressions données.
- iv) 3 exercices où la factorisation intervient pour effectuer des **calcul mentaux.**
- v) 4 **problèmes** dont 3 concernent la modélisation d'un problème numérique (recherche d'un nombre entier tel que...) et 1 où la factorisation intervient pour résoudre un problème géométrique.

Décrivons à présent les six exercices restants :

- 3 exercices pour lesquels on demande de compléter des égalités ou identités remarquables.
- 1 exercice où il s'agit d'apparier chaque expression fournie avec l'identité remarquable développée correspondante.
- 1 exercice où il s'agit d'associer chaque phrase énoncée en français à sa formule mathématique correspondante.
- 1 exercice pour lequel on demande de faire correspondre des aires d'un carré à une formule mathématique qui les décrit.

Parmi les exercices ci-dessus décrits, la majorité n'indique pas la méthode à appliquer pour factoriser l'expression donnée. Seuls 11 exercices précisent lorsqu'il s'agit d'employer les identités remarquables ou d'appliquer la distributivité.

## 2. Fonctionnalité

Nous pouvons regrouper nos données dans le tableau suivant :

| Pas de fonctionnalité                              | Fonctionnalité                                                                                                                                          |
|----------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>30</b> (i, ii, iii, 6 exercices sans catégorie) | <b>7</b> (iv, v)<br>- iv : exercices où la factorisation intervient comme un outil pour le calcul mental<br>- v : problèmes géométriques ou algébriques |

Ces effectifs nous semblaient prévisibles dans la mesure où l'analyse des exercices concernant la factorisation proposés dans ce manuel s'est faite en deux parties ; les problèmes liés à la résolution d'équations du second degré (qui est, nous l'avons vu dans les manuels précédents, la plus grande fonctionnalité attribuée à la notion de factorisation) n'étant pas pris en compte dans cette première étude.

### 3. Cadres

| Algébrique                                        | Numérique | Algébrique, Numérique | Algébrique, Géométrie                    |
|---------------------------------------------------|-----------|-----------------------|------------------------------------------|
| 26 (i, iii, 5 premiers exercices non catégorisés) | 3 (iv)    | 3 (ii)                | 5 (v, 1 exercice restant non catégorisé) |

Malgré une plus grande diversité des cadres intervenants dans les exercices, c'est à nouveau le cadre algébrique qui sert de contexte dans la grande majorité des problèmes posés, rejoignant ainsi les conclusions portées sur les deux manuels précédents.

### 4. Complexité des expressions

- Exposants : le degré maximum est 2.
- Parmi les 37 exercices, 7 exercices présentent des expressions algébriques ayant pour coefficients numériques des fractions, 1 exercice fait intervenir des expressions à coefficients décimaux et 1 exercice propose des expressions à coefficients irrationnels. L'écrasante majorité fait intervenir des coefficients entiers inférieurs à 10.
- La lettre la plus employée pour désigner les inconnues dans les expressions algébriques est  $x$ . On retrouve toutefois également les lettres  $y$ ,  $b$ ,  $R$ ,  $a$ ,  $m$ ,  $n$ .
- Le nombre de termes de l'expression à factoriser varie de 2 à 3 termes, comme dans le manuel *Cinq-sur-cinq*. Un exercice échappe cependant à la règle en demandant aux élèves de mettre deux expressions sous la forme d'un produit de 4 facteurs (exercice unique en son genre si nous tenons compte des problèmes jusqu'alors proposés). Les expressions sont :  $A = (17x^2 - 29)^2 - (8x^2 + 20)$  et  $B = (17x^2 + 26x + 10)^2 - (8x^2 + 14x + 6)^2$ .
- Le niveau de difficulté de reconnaissance du facteur commun ne diffère pas des autres manuels, à l'exception d'une minorité d'exercices pour lesquels des étapes intermédiaires sont nécessaires afin d'aboutir à la factorisation. Dans ces cas, l'exercice prévoit toujours une question intermédiaire qui guide l'élève dans la résolution du problème (lorsqu'il s'agit notamment de développer avant d'effectuer la factorisation, ou encore de factoriser un des termes de l'expression au préalable). Sous la rubrique « devenir un champion », ces indices ne sont plus indiqués et l'élève doit factoriser des expressions en faisant lui-même les choix pertinents. C'est le cas par exemple de l'expression  $A = 25x^2 - 9 + (5x - 3)(7x + 8)$  où il s'agit de reconnaître que  $25x^2 - 9 = (5x - 3)(5x + 3)$  ou encore le cas de  $B = (4x - 6)(3x + 7) + (2x - 3)(8x + 3)$  pour laquelle l'élève doit identifier l'égalité :  $4x - 6 = 2(2x - 3)$ .

Conclusion : Ce manuel nous semble explorer d'avantage la complexité des expressions ainsi que la diversité de la nature des exercices. Nous devons tenir compte du fait qu'un nombre non négligeable d'exercices (justement ceux pour lesquels nous n'avons pas trouvé de catégorie) propose l'intervention de plusieurs registres et cadres lors de sa résolution, ce à quoi nous nous n'avons pas encore été confrontés.

### B.3.b) Chapitre 7 : « Inéquations et équations » (20 exercices concernant la factorisation)

Puisque l'objet de notre étude se rapporte à la factorisation, nous n'avons analysé uniquement les exercices où celle-ci intervient comme outil de résolution d'équations du second degré, sans considérer par exemple ceux où l'équation est déjà fournie sous forme d'équation-produit.

#### 1. Type d'exercices

Nous avons classé les exercices proposés en quatre catégories différentes :

- i) 7 exercices présentés sous la consigne : « **Résoudre les équations suivantes** ».
- ii) 6 **problèmes** (3 du domaine géométrique et 3 autres où il s'agit de trouver un nombre entier ayant une certaine propriété) se ramenant à la résolution d'équations-produits.
- iii) 4 exercices où, **pour une expression E donnée sous forme de produit de deux facteurs**, on demande de **développer et réduire E**. Il s'agit ensuite de **résoudre un problème** pour lequel la mise en équation revient à considérer une expression F correspondante à la forme développée de l'expression E. On demande finalement de résoudre  $F=0$ .
- iv) 2 exercices où, **pour une expression E donnée**, on demande de **développer et réduire E, de factoriser E puis de résoudre  $E=0$** .

Finalement, le manuel présente 1 exercice pour lequel il s'agit de factoriser une expression E pour ensuite résoudre des problèmes géométriques où la mise en équation correspond à retrouver l'expression donnée. L'exercice se termine en demandant de résoudre  $E=0$ .

La méthode de factorisation à employer n'est jamais précisée. Cependant, pour les exercices iii, il est sûr que donner l'expression sous forme factorisée au départ peut servir de guide pour la résolution du problème.

#### 2. Fonctionnalité

Tous les exercices proposés dans ce chapitre font intervenir, nous l'avons vu, la factorisation en tant qu'outil de résolution d'équations du second degré par le biais de la

résolution d'équations-produits. Nous pouvons donc dire qu'ils présentent tous la même fonctionnalité.

### 3. Cadres

Nous retrouvons deux cadres dans les exercices présentés: le cadre algébrique et le cadre géométrique. La répartition n'est pas équitable, comme le montre le tableau suivant :

| Algébrique                                    | Algébrique, Géométrique |
|-----------------------------------------------|-------------------------|
| 14 (i, iii, iv, 1<br>exercice sans catégorie) | 6 (ii)                  |

Nous ne retrouvons pas ici d'exercices de modélisation conduisant à la résolution d'équations du second degré rencontrés à maintes reprises dans les manuels précédents. Le cadre algébrique reste dominant dans l'ensemble des exercices.

### 4. Complexité des expressions

- Exposants : le degré maximum est 2.
- Parmi les 20 exercices proposés, seulement deux font intervenir des coefficients numériques fractionnaires et décimaux ; la majorité présentant des coefficients entiers inférieurs à 10.
- $x$  est la lettre la plus employée pour désigner la variable des expressions. Un seul exercice la désigne par les lettres  $T$  ou  $m$ .
- Le nombre de termes de l'expression à factoriser varie entre 2 et 3. Les expressions sont à deux termes lorsque la factorisation se fait par reconnaissance du facteur commun (application de la règle de distributivité) et sont à deux ou trois termes lorsque la factorisation se fait en appliquant les identités remarquables (elles sont à deux termes lorsqu'elles se présentent sous la forme  $a^2-b^2$  et à trois termes pour  $a^2+b^2\pm 2ab$ ).
- Les exercices proposés sont en majorité de deux types : soit les expressions à factoriser possèdent un facteur commun apparent soit le présentent sous forme de carré, laissant ainsi un niveau de difficulté de reconnaissance du facteur commun assez bas. Seuls deux exercices nécessitent l'application de transformations / calculs intermédiaires pour aboutir à la factorisation des expressions données : dans le premier, l'expression fournie est  $A = (x-2)(3x-5) + 9x^2-25$  pour laquelle il s'agit de transformer  $9x^2-25$  en  $(3x-5)(3x+5)$ . L'autre exercice donne  $B = (x^2-4) - (x+2)(3x+5)$ , exigeant de l'élève la reconnaissance de l'égalité  $x^2-4 = (x+2)(x-2)$ .

Conclusion : La pauvreté des consignes ainsi que la faible complexité des expressions proposées sont le contrepoids de l'effort fait dans l'intention de diversifier le type d'exercices présentés. Le manuel garde cependant un atout qui à notre avis ne peut être négligé : la nature des exercices se veut différente de celle rencontrée jusqu'alors, contribuant ainsi à la construction par les élèves du champ conceptuel de cette notion.

### 3. Annales du Brevet 2000

Nous retrouvons trois types de sujets dans les annales du Brevet : ceux qui ont été proposés lors des épreuves de l'année scolaire 1999-2000 (type I), les sujets complémentaires (type II) et les sujets préparatoires à la classe de seconde (type III). Après avoir analysé tous les exercices présentés dans chaque catégorie, nous regrouperons nos données dans une conclusion comparative.

#### 3.1 Sujets type I (25 exercices concernant la factorisation)

##### 1. Type d'exercices

Nous pouvons classer les exercices en cinq catégories différentes :

i) 17 exercices où, pour une expression  $E$  donnée, il s'agit de développer et réduire  $E$ , factoriser  $E$ , résoudre  $E=0$  (parmi les 17 exercices,  $E$  est donnée sous forme factorisée dans 16 exercices) puis calculer  $E$  pour une valeur de  $x$  donnée.

ii) 3 exercices où il s'agit de factoriser une expression donnée (après avoir – éventuellement- demandé de la développer et réduire).

iii) 1 exercice où pour une expression  $E$  donnée, on demande de développer et réduire  $E$ , factoriser  $E$  puis calculer  $E$  pour une valeur de  $x$  donnée.

iv) 1 exercice où il s'agit de factoriser  $E$  puis donner (sans calcul) la valeur de  $E$  pour une valeur précise de  $x$  ( $x$  est racine de  $E=0$ ).

v) 3 problèmes répartis en deux catégories :

- 2 problèmes où, pour une expression  $F$  donnée, on demande de factoriser  $F$ , de résoudre  $F=0$  (la forme factorisée de  $E$  étant fournie), puis de résoudre un problème géométrique représentant la situation  $F=0$  ou un problème de modélisation (programme de calcul) se ramenant à  $F=0$ .

- 1 problème géométrique où il s'agit de représenter une situation géométrique par une expression factorisée (c'est cependant la forme développée qui sera utile à la résolution du problème).

Pour tous les exercices de ces cinq catégories différentes aucune méthode de factorisation n'est suggérée, laissant ainsi tous les choix à la charge des élèves.

## 2. Fonctionnalité

Si d'un côté la fonctionnalité est présente dans la plupart des exercices, sa diversité n'est pas pour autant explorée. C'est ce que nous résumons dans le tableau suivant :

| Pas de fonctionnalité | Fonctionnalité                                                                                            |
|-----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5 (ii, iii, iv)       | 20 (i, v)                                                                                                 |
|                       | Dans tous les cas la factorisation intervient comme outil pour la résolution d'équations du second degré. |

## 3. Cadres

| Algébrique | Algébrique, Numérique | Algébrique, Numérique, Géométrique |
|------------|-----------------------|------------------------------------|
| 3 (iii)    | 19 (i, iii, iv)       | 3 (v)                              |

La présence du jeu de cadres algébrique/numérique est due au grand nombre d'exercices demandant le calcul de la valeur de l'expression proposée pour une valeur de  $x$  donnée, laissant ainsi une fausse impression de diversité de cadres.

## 4. Complexité des expressions

- Les exposants ont pour degré maximum 2.
- Tous les coefficients numériques sont des entiers compris entre 1 et 10.
- La désignation des inconnues se fait par la lettre  $x$ , même pour les problèmes géométriques ou de modélisation numérique.
- Toutes les expressions à factoriser sont des sommes de deux termes.
- La complexité de reconnaissance du facteur commun n'est pas très variée. En effet, les expressions fournies sont réparties en deux catégories : celles du type  $A^2-B^2$  pour lesquelles il s'agit de les factoriser en appliquant l'identité remarquable  $A^2-B^2 = (A+B)(A-B)$  et celles sous la forme  $A^2 \pm AB$ , où le facteur commun est sous forme de produit. Ce dernier type d'expression est le plus fréquemment présenté parmi les sujets de type I.

### 3.2 Sujets type II (7 exercices concernant la factorisation)

#### 1. Type d'exercices

Nous pouvons classer les exercices en quatre catégories différentes :

i) **3** exercices où, pour une expression  $E$  donnée, on demande de **développer et réduire  $E$ , factoriser  $E$  puis résoudre  $E=0$**  (pour cette question,  $E$  n'est pas donnée sous sa forme factorisée).

ii) **2** exercices où pour une expression  $E$  à trois termes donnée, on demande de **factoriser  $E$**  (1 exercice propose une étape intermédiaire) **pour ensuite résoudre  $E=0$**  ( $E$  n'est pas donnée sous forme factorisée).

iii) **1** exercice où, pour une expression  $E$  donnée, il s'agit de **factoriser  $E$ , calculer  $E$  pour une valeur de  $x$  puis résoudre  $E=0$**  ( $E$  n'étant pas donnée sous sa forme factorisée).

iv) **1** exercice où il s'agit de **résoudre une équation du second degré** sans méthode précisée.

De la même façon que pour les sujets du type I, aucune méthode de factorisation n'est suggérée aux élèves.

#### 2. Fonctionnalité

Tous les exercices proposés font intervenir la factorisation comme outil de résolution d'équations du second degré.

#### 3. Cadres

Les cadres majoritairement présents dans les exercices sont les cadres algébriques et numériques.

#### 4. Complexité des expressions

- Exposants : le degré maximum est 2.
- Parmi les 7 exercices, seul 1 exercice présente des expressions algébriques à coefficients numériques fractionnaires (le reste fait intervenir des nombres entiers).
- L'inconnue est désignée par la lettre  $x$  dans tous les exercices proposés.
- Nous observons qu'il n'y a pas de différence majeure entre la complexité des expressions des sujets du type I et de celles des sujets complémentaires. Nous ne pouvons cependant pas négliger le fait que, pour ceux-ci, il est proposé (dans deux exercices) aux élèves la factorisation d'expressions à trois termes (ce qui n'était pas le cas jusqu'à présent)

ainsi que la résolution d'équations données sous la forme de produit de trois facteurs (les élèves ne traitaient que des équations données sous la forme de produit de deux facteurs).

- A contrario des expressions fournies dans les sujets du type I, celles relatives aux sujets complémentaires présentent une grande hétérogénéité en ce qui concerne la difficulté de reconnaissance du facteur commun. Les expressions à deux termes peuvent soit être du type  $A^2-B^2$ , soit  $A^2\pm AB$  ou encore  $AB\pm AC$ , soulignant cependant le fait que le niveau de difficulté reste toujours assez bas. Lorsque l'exercice présente une expression à trois termes, un indice est donné afin de guider l'élève à travers la factorisation (ils suggèrent la factorisation préalable de l'un des termes).

### 3.3 Sujets type III (6 exercices concernant la factorisation)

#### 1. Type d'exercices

Nous pouvons classer les exercices en quatre catégories différentes :

i) **2** exercices où, pour une expression  $E$  donnée et  $F$  une sous expression de  $E$ , on demande de **développer et réduire  $E$**  (éventuellement), **factoriser  $F$** , **factoriser  $E$** , **résoudre  $E=0$**  puis **calculer  $E$  pour des valeurs données de  $x$** .

ii) **1** exercice pour lequel il s'agit de **résoudre des équations du second degré**.

iii) **2** exercices où l'on demande de factoriser une expression  $E$  à trois termes en demandant de factoriser préalablement chaque terme pour ensuite résoudre  $E=0$ .

iv) **1** exercice où, pour une expression  $E$  donnée, il s'agit de factoriser  $E$  puis résoudre  $E=0$ .

A nouveau, aucun exercice ne précise la méthode à adopter permettant d'aboutir à la factorisation de l'expression fournie.

#### 2. Fonctionnalité

Tous les exercices proposés font intervenir la factorisation dans le but de résoudre des équations du second degré, alors transformées en équations-produits.

#### 3. Cadres

Deux cadres sont présents :

| Algébrique     | Algébrique, Numérique |
|----------------|-----------------------|
| 5 (i, iii, iv) | 1 (ii)                |

#### 4. Complexité des expressions

- Le degré maximum des exposants est 4.

- Les coefficients numériques sont de trois natures différentes : fractions (3 exercices), entiers (2 exercices) et racine carrée (1 exercice).
- Toutes les inconnues en jeu sont désignées par la lettre  $x$ .
- Parmi les 6 exercices proposés, 4 font intervenir des expressions à 3 termes, présentant ainsi un degré de difficulté de résolution du problème beaucoup plus élevé que les exercices vus précédemment.
- La tâche est d'autant plus complexifiée que sont plus fréquemment exigés des calculs intermédiaires afin d'aboutir à la factorisation. Lorsque le facteur commun n'est pas apparent (c'est le cas de deux exercices), toutes les étapes et méthodes à suivre sont indiqués (les sujets précisent notamment le facteur commun à faire apparaître dans chaque terme).

Conclusion : Nous ne retrouvons pas de différences essentielles en ce qui concerne le type d'exercices proposés dans les trois catégories. En effet, ils se veulent tous très pauvres en consignes et explorent rarement le jeu de cadres. De plus, la seule fonctionnalité attribuée à la notion de factorisation est celle liée à la résolution d'équations du second degré. Ce qui varie cependant d'une catégorie à une autre, est la complexité des expressions. Ce qui est exigé en fin de Troisième (posé aux élèves en 1999) fait preuve d'une complexité très faible tandis que les sujets du type II et du type III présentent une complexité croissante, laissant supposer que ce qui sera exigé en classe de Seconde (d'après les exercices du type III) est très éloigné des pratiques de la Troisième.

#### **4. Conclusion**

Après avoir procédé à l'analyse des exercices suggérés dans les manuels ainsi que ceux proposés par le Brevet des Collège, nous en venons à quelques conclusions.

Nous avons observé que la complexité des exercices proposés dans les deux cas (nous ne considérons pas pour le moment les sujets complémentaires ni ceux préparatoires à la classe de Seconde) est équivalente. Le nombre de termes des expressions, le type de méthode à appliquer, les coefficients intervenants dans l'expression et la reconnaissance du facteur commun restent tous à un niveau très simple. Ce fait rejoint les suggestions du programme officiel : « (...) le travail sur la factorisation qui se poursuivra au lycée ne vise à développer l'autonomie des élèves que dans des situations très simples (...) ».

Si d'un côté les manuels et le brevet présentent des exercices ayant le même degré de complexité, il n'en est pas de même en ce qui concerne la nature des exercices proposés. Les manuels semblent présenter (même étant une minorité) des problèmes qui échappent au traditionnel « développer/réduire, factoriser, résoudre », proposant une plus grande diversité de cadres et applications. La factorisation est cependant en grande majorité vue (aussi bien dans les manuels que dans le brevet) en tant qu'outil de résolution d'équations du second degré : les manuels et le brevet n'explorent pas « l'utilisation du calcul littéral pour calculs numériques », comme le prévoyait le programme officiel.

Si nous considérons maintenant les sujets complémentaires ainsi que ceux préparatoires à la classe de Seconde, le tableau que nous venons de dresser se modifie complètement : la nature des exercices reste très différente pour les deux cas mais la complexité des expressions change également. Des expressions qui présentaient au maximum deux termes acquièrent un terme supplémentaire et la factorisation ne se fait plus directement : la reconnaissance du facteur commun exige des étapes intermédiaires (quelque fois suggérées). Mais si d'un côté la complexité est augmentée, le contexte dans lequel les exercices sont proposés reste très pauvre ne faisant intervenir aucun cadre autre que l'algèbre.

Nous venons maintenant à la dernière partie de notre étude : après avoir analysé ce qui est attendu des élèves de Troisième, nous nous penchons sur leur conception de la notion de factorisation en essayant de dresser une comparaison entre les rapports institutionnel et personnel à ce concept.

### **III. 2 - Le rapport personnel**

Afin de mieux définir le rapport personnel des élèves à la factorisation en fin de Troisième et dans le but de le comparer aux résultats issus de l'analyse du rapport institutionnel décrits dans le chapitre précédent, nous avons proposé à deux classes de Troisième un questionnaire<sup>20</sup> concernant des exercices de factorisation.

Avant de procéder à l'analyse des réponses des élèves, nous effectuerons une analyse a-priori du questionnaire.

---

<sup>20</sup> Voir annexe

## 1. Analyse a priori du questionnaire

Il s'agit à présent de justifier le choix des questions proposées ainsi que de prévoir quelques réponses des élèves face à celles-ci. Nous n'avons cependant pas tenu compte des erreurs de calcul qui peuvent se produire lors de la résolution des exercices étant donné la grande variété de fautes qui peuvent être commises, ne retenant que les réponses « catégorisables » révélant un intérêt pour notre recherche en cours.

### Question n°1

**Peut-on factoriser l'expression  $A = 5x^2 - 15$ ? Justifiez votre réponse.**

Comme nous l'avons observé lors de l'analyse des exercices proposés dans les manuels, une grande majorité fait intervenir des expressions du type  $A^2 - B^2$  pour lesquelles la méthode de résolution à appliquer est d'utiliser l'identité remarquable  $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ . Nous avons donc choisi une expression de ce type, mais pour laquelle la résolution en appliquant la méthode ci-dessus décrite peut poser des problèmes aux élèves (les coefficients numériques n'étant pas des carrés parfaits). Nous nous demandions ainsi quelle importance les élèves accordent à cette méthode, c'est-à-dire s'ils privilégieraient l'application d'une identité remarquable plutôt que la distributivité compte tenu de la forme de l'expression.

Voici les réponses attendues :

Oui :

- $5(x^2-3)$
- $(\sqrt{5x}-\sqrt{15})(\sqrt{5x}+\sqrt{15})$
- $5(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

Non :

Car A est du type  $a^2 - b^2$  mais 5 et 15 ne sont pas des carrés parfaits.

Nous pensons qu'il y aura un grand nombre de réponses négatives si l'application de l'identité remarquable est fort importante pour les élèves. Dans le cas contraire, la première réponse est celle qui nous semble la plus attendue de part sa simplicité.

### Question n°2

a) Pour l'expression  $A = x^2 + 6x + 9$ , Amandine a proposé la factorisation suivante:

$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 3(2x + 3)$ . A-t-elle raison? Justifiez votre réponse.

Nous nous sommes ici intéressés à la reconnaissance que les élèves font d'une forme factorisée. Nous proposons donc une factorisation partielle d'une expression qui, nous pensons, sera le plus souvent vue comme étant une factorisation de l'expression du départ compte tenue de la légitimité de l'égalité. Nous pensons que le souci majeur des élèves sera de vérifier l'égalité, ceci les conduisant à une réponse affirmative. Nous observons que ce type de question est inhabituel pour la majorité des élèves, à qui leur sont posés des questions de production. Nous décrivons les réponses attendues par la suite:

Oui :

- Les élèves ne se soucient que de la légitimité de l'égalité et développent le second membre. Puisque l'égalité est vraie, ils répondent qu'Amandine a raison.
- Les élèves considèrent que l'expression est factorisée puisqu'il y a une mise en facteur (même étant partielle).

Non :

Car la réponse n'est pas un produit de facteurs.

**b) Pour l'expression  $B = 4x^2 + 16x + 16$ , Benoît a proposé la factorisation suivante:**

**$4x^2 + 16x + 16 = 4(x^2 + 4x + 4)$ . A-t-il raison? Justifiez votre réponse.**

Cette question rejoint la précédente dans le sens où nous proposons une égalité vraie. Nous nous sommes cependant intéressés ici à l'importance accordée à la règle de « factoriser au maximum », déjà perçue par J. Tonnelles. Nous nous demandons si lorsqu'une expression n'était pas factorisée au maximum, elle était toutefois considérée comme étant factorisée. Nous nous attendons à ce que les élèves reconnaissent que l'expression fournie est en effet factorisée tout étant gênés par le fait qu'elle ne le soit pas au maximum. Nous avons regroupés les réponses attendues des élèves comme il suit :

Oui :

Car 4 est commun aux 3 termes et le résultat est donné sous forme de produit de facteurs.

Non :

- Car on peut factoriser :  $B = (2x+4)^2$
- Car on peut factoriser :  $B = 4(x+2)^2$

**c) Pour l'expression  $C = 9x^2 - 18x$ , Claire a proposé la factorisation suivante:  
 $9x^2 - 18x = x(9x - 18)$ . A-t-elle raison? Justifiez votre réponse.**

A nouveau, nous sommes face à une égalité légitime. La question est de savoir si les élèves reconnaîtront la forme factorisée du second membre de l'égalité. Nous avons à nouveau joué sur le fait que l'expression n'a pas été factorisée au maximum, en modifiant sa forme (la question précédente était du type  $a^2+b^2+2ab$  et l'antérieure du type  $a^2-b^2$ ). Nous attendons à peu près les mêmes réactions des élèves que pour la question précédente, c'est-à-dire reconnaître cette expression comme étant factorisée, tout en étant déstabilisés par le fait qu'elle ne le soit pas au maximum.

Oui :

Car  $x$  est commun aux deux termes et la réponse est un produit de facteurs.

Non :

- Car on peut factoriser :  $C = 3x(3x-6)$
- Car on peut factoriser :  $C = 9x(x-2)$  (ou bien car ce n'est pas factorisé au maximum)
- Car 18 n'est pas un carré parfait et il donc est impossible d'appliquer la formule  $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$ .

**d) Pour l'expression  $D = (x-3)(x+3) + (x+2)(x+3) + (x+2)(2x-1)$ , Didier a proposé la factorisation suivante :**

**$(x-3)(x+3) + (x+2)(x+3) + (x+2)(2x-1) = (x-3)(x+3) + (x+2)(3x+2)$ . A-t-il raison ? Justifiez votre réponse.**

Cette expression a été empruntée de J.F. Nicaud et présente un double intérêt. Tout d'abord elle se veut atypique par rapport à celles que les élèves ont l'habitude de rencontrer puisqu'elle est une somme de trois facteurs. Ensuite, nous devons souligner le fait que le facteur commun n'est pas apparent dans les trois termes (l'élève pouvant considérer  $x+3$  ou  $x+2$  comme étant le facteur commun). De plus, sa factorisation exige une étape intermédiaire, à savoir le développement du second terme après factorisation par  $(x+3)$ . Ainsi, la tâche y est extrêmement complexifiée. Nous avons choisi de proposer aux élèves la réponse issue de la factorisation de l'expression par  $x+2$  en nous demandant s'ils tiendraient compte de la présence d'une somme pour affirmer que cette expression n'est pas factorisée ou s'ils vérifieraient tout simplement l'égalité pour répondre à cette question. Du fait que cette expression est très particulière, nous ne pouvons pas dire exactement ce que nous estimons être les réponses les plus fréquemment données par les élèves. Nous pensons surtout qu'ils

seront déstabilisés du fait que cette expression comporte trois termes et nous nous attendons à un taux de réussite relativement bas.

Oui :

Les élèves développent le second membre (souci de l'égalité) et affirment que la réponse de Didier est juste puisqu'elle correspond au résultat de la factorisation de D avec (x+2) en facteur.

Non :

- Car la réponse n'est pas un produit de facteurs
- Car il faut mettre (x+3) en facteur et obtenir  $B = \dots = (2x-1)(2x+5)$
- Car il n'y a pas de facteurs communs aux trois termes ; la factorisation est donc impossible.

### Question n°3

**Résoudre, si possible, les équations suivantes:**

Cette question ne relève plus du domaine de reconnaissance d'une forme factorisée. Il s'agit ici de savoir si la fonctionnalité de la factorisation la plus explorée dans les manuels (à savoir l'utilisation de la factorisation dans la résolution d'équations du second degré) est perçue par les élèves. Nous avons choisi de ne donner aucun indice pour cette question, laissant tous les choix à effectuer à la charge des élèves (tant l'utilisation de la factorisation pour résoudre l'équation proposée que la méthode de factorisation à adopter). Seule une équation (c) n'est pas résoluble par les moyens disponibles aux élèves en classe de Troisième ; c'est pour cette raison que nous avons choisi d'ajouter « si possible » à la question.

a)  $4x^2 = 5x$

Pour cette équation, à part les erreurs de calcul (ou erreurs relevant une mise en place de théorèmes-en-acte faux) qui peuvent être commises, nous n'avons pas trouvé de réponse autre que celle que nous espérions :

$$4x^2 = 5x$$

$$4x^2 - 5x = 0$$

$$x(4x-5)=0, \text{ d'où } x = 0 \text{ ou } x = 5/4$$

Nous nous demandons toutefois si le manque d'indications peut être un obstacle à la résolution de cette équation, qui ne présente pas de grande complexité au niveau de son expression.

b)  $(x+2)(x-3) = 0$

Cette question est une application directe de la propriété du produit de facteur nul. Etant donné que l'équation fournie est déjà sous forme d'une équation-produit et que les variables en jeu ne présentent pas une grande complexité, nous pensons que le taux de réussite se voudra assez élevé. Nous attendons donc la réponse (hormis les fautes de calcul) :

$$(x+2)(x-3) = 0$$

$$x=-2 \text{ ou } x=3$$

c)  $(x+5)(x-3) = 1$

Cette question, qui n'est pas résoluble au niveau de la Troisième a été posée dans l'intention de voir si les élèves transposent la résolution d'équations-produits du type  $A.B=0$  au cas où  $A.B=1$ . Etant donné que l'équation n'est pas résoluble, nous nous attendons à des réponses assez mitigées, confirmant toutefois l'impossibilité de résolution de l'équation.

Nous regroupons les réponses attendues comme il suit :

- $(x+5)(x-3) = 1$ , d'où soit  $x+5=1$  soit  $x-3=1$  ; c'est-à-dire soit  $x=-4$  soit  $x=4$ .
- $x^2+2x-16 = 0$ . Impossible de résoudre cette équation.
- Impossible de résoudre l'équation car le produit n'est pas égal à 0.

d)  $49x^2 + 42x = -9$

Nous sommes face à une équation du type  $a^2+b^2+2ab=0$  qui n'a cependant pas tous ses termes regroupés dans le premier membre. Il s'agit donc de voir tout d'abord si les élèves reconnaîtront la nécessité de les regrouper dans le premier membre pour pouvoir résoudre l'équation. Nous nous demandons ensuite s'ils utiliseront la factorisation en tant qu'instrument de résolution d'équation du second degré, tout en analysant la méthode adoptée. Il nous semble que les réponses seront majoritairement divisées en deux catégories : ceux pour qui la résolution semble impossible et ceux qui feront intervenir la factorisation afin de résoudre l'équation proposée :

- $49x^2+42x+9 = 0$

$$(7x+3)^2 = 0$$

$$x = -3/7$$

- Impossible de résoudre cette équation.

e)  $(2x+3)(4x+2) + (7x-6)(2x+3) = 0$

Cette question nous semble indiquer plus facilement la méthode à employer pour résoudre l'équation proposée, puisque l'expression en jeu est une somme de deux facteurs où le facteur commun est apparent. Nous nous attendons donc à un nombre supérieur de réponses exactes qu'à la question précédente, tout en considérant la possibilité que les élèves développent l'expression pour ensuite essayer de la résoudre.

- $(2x+3)(11x-4) = 0$ , d'où  $x = -3/2$  ou  $x = 4/11$
- Les élèves développent l'expression, et face au résultat  $22x^2 + 21x - 12 = 0$ , disent que l'équation est impossible à résoudre.

#### Question n°4

**Calculez mentalement et expliquez vos résultats.**

Cette question met en épreuve l'autre fonctionnalité de la factorisation suggérée par le programme officiel : son utilisation dans des calculs numériques. Après avoir remarqué que ce volet de la factorisation était peu explorée par les manuels, nous nous demandons ce que les élèves en ont retenu. Pour cela, nous avons choisi deux calculs à effectuer mentalement :

a)  $A = 105 \times 95$

Etant donné qu'aucune indication de méthode à appliquer n'a été fournie, il nous semble plus probable que les élèves ne s'aperçoivent pas de l'utilité de la factorisation pour résoudre l'exercice posant ainsi plus fréquemment l'opération ou employant une autre méthode de calcul ne faisant pas intervenir la factorisation.

- L'élève pose l'opération et calcule
- $A = (100+5)(100-5) = 100^2 - 5^2 = 9975$

b)  $B = 105^2 - 95^2$

De part la forme de cette expression (elle est du type  $A^2 - B^2$ ), il nous semble que l'utilité de la factorisation sera d'autant plus visible. Nous nous attendons donc à un taux de réussite plus élevé que pour la question précédente, même si nous considérons d'autres réponses possibles.

- L'élève pose l'opération et calcule

- $A = 105^2 - 95^2 = (105+95)(105-95) = 200 \times 10 = 2000$
- $A = 105^2 - 95^2 = (100+5)^2 - (100-5)^2 = [(100+5)+(100-5)][(100+5)-(100-5)] = 200 \times 10 = 2000$
- $A = 105^2 - 95^2 = (100+5)^2 - (100-5)^2 = 100^2 + 5^2 + 10 \times 100 - (100^2 + 5^2 - 10 \times 100) = 1000 + 1000 = 2000$

#### Question n°5

Soit  $E = (x-4)(2x+1) + (x^2-16)$

a) Développer et réduire E

b) Factoriser E

c) Vous voulez résoudre l'équation  $(x-4)(2x+1)+(x^2-16)=0$ . Quelle écriture de E choisissez-vous ? Résolvez l'équation. Vous voulez résoudre l'équation

$(x-4)(2x+1)+(x^2-16)=-20$ . Quelle écriture de E choisissez-vous? Résolvez l'équation.

Nous avons choisi ici une question présentant un début familier à l'élève : d'après l'analyse des manuels que nous avons effectué, ce type de question est fréquemment proposé aux élèves. Nous devons cependant souligner deux différences qui nous semblent non négligeables.

Tout d'abord la complexité de l'expression fournie n'est pas la même que celle majoritairement rencontrée dans les exercices proposés dans les manuels ou encore parus au Brevet des Collèges. Afin de la factoriser, l'élève doit effectuer une transformation intermédiaire : il s'agit de reconnaître que  $x^2-16 = (x-4)(x+4)$  pour rendre apparent le facteur commun.

Ensuite la dernière question relève du troisième niveau sémantique défini par Nicaud, à savoir que l'on demande non plus aux élèves de mettre en oeuvre des stratégies de transformation d'expressions mais on lui demande de choisir la forme d'expression plus adéquate pour résoudre l'équation proposée. A nouveau, cette question se veut inhabituelle pour les élèves et pour cette raison nous pensons qu'ils auront plus de mal pour y répondre que pour résoudre les deux items précédents.

Nous résumons les réponses attendues comme il suit :

a)  $E = \dots = 3x^2 - 7x - 20$ . Nous nous attendons à un taux de réussite assez élevé pour cette question.

b)

- $E = (x-4)(2x+1)+(x-4)(x+4) = (x-4)[(2x+1)+(x+4)] = (x-4)(3x+5)$

- $E = (x-4)(2x+1) + (x-4)^2 = (x-4)[(2x+1) + (x-4)] = (x-4)(3x-3)$

c) Les élèves choisissent la forme factorisée pour la première question et trouvent les solutions étant  $x = 4$  ou  $x = -5/3$ . Ils choisissent la forme développée pour la deuxième équation et trouvent les solutions étant  $x = 0$  ou  $x = 7/3$ .

### Question n°6

**Factorisez les expressions suivantes en justifiant vos réponses.**

Il s'agit à présent de trois questions de production, c'est-à-dire que nous nous sommes intéressés à étudier la mise en oeuvre par les élèves de méthodes de factorisation. En aucun cas la méthode n'a été suggérée, laissant ainsi une autonomie totale aux élèves.

a)  $A = (2x+3)(x-2) + (x-2)$

Cette expression est du type  $AB+AC$ , où  $C=1$ . Il nous semble que puisque le second facteur du deuxième terme de l'expression n'est pas « visible », nous devons nous attendre à un nombre non négligeable d'élèves qui considéreront  $C=0$  donnant ainsi majoritairement la première réponse :

- $A = (x-2)(2x+3)$
- $A = (x-2)[(2x+3)+1] = (x-2)(2x+4)$

b)  $B = (x+5)(x+3) + (3x+9)(3x-7)$

La complexité de l'expression est autre: le facteur commun n'est pas apparent et il est nécessaire d'effectuer une transformation avant de le rendre apparent. Nous nous demandons si les élèves, ne voyant pas de facteur commun apparent, appliqueront la méthode attendue.

- $B = (x+5)(x+3) + 3(x+3)(3x-7) = (x+3)[(x+5) + 3(3x-7)] = (x+3)(10x-16)$
- $B = (x+5)(x+3) + (x+3)^2(3x-7) = (x+3)[(x+5) + (x+3)(3x-7)] = (x+3)(4x^2+2x-16)$

c)  $C = (2x+7)(x+3) - (x+3)^2$

Cette forme d'expression est déjà plus fréquemment présentée aux élèves ; il n'est pas rare en effet de la rencontrer parmi les exercices de brevet proposés. Nous espérons ainsi retrouver un taux assez élevée de réponses attendues parmi celles données par les élèves. Nous considérons toutefois une autre réponse :

- $C = (x+3)[(2x+7)-(x+3)] = (x+3)(x+4)$
- $C = (x+3)[(2x+7) - 2] = (x+3)(2x+5)$

### Question n°7

Après avoir étudié la reconnaissance et la fonctionnalité de la factorisation à travers les exercices proposés, nous analysons ces deux caractéristiques à travers un questionnaire direct. Nous avons fait ce choix car nous avons tenu compte de la différence entre le savoir-faire et le savoir-dire.

Nous n'avons pas fait d'analyse a-priori de la dernière question étant donnée qu'elle est ouverte. Nous classerons les réponses des élèves suite à l'analyse a-posteriori.

## **2. Analyse a posteriori du questionnaire**

### **2.1 Lycée Georges Brassens**

#### Question n°1

Nous avons réparti les réponses en trois catégories : oui, on peut factoriser (sans tenir compte de la légitimité de la démonstration) ; non, on ne peut pas factoriser et les non-réponses.

| OUI                                                                        | NON | NON REP. |
|----------------------------------------------------------------------------|-----|----------|
| 12.<br>Dont 8 réponses<br>justes <sup>21</sup> et 1 sans<br>justification. | 2   | 1        |

Classifions à présent les justifications donnés par les élèves.

#### OUI

- 8 : par le calcul
- 1 : par le calcul et ajoutent que « c'est un produit »
- 1 : par le calcul et ajoutent qu' « il y a un facteur commun qui est 5 »
- 1 : A est du type  $ka+kb$  donc on factorise  $k(a+b)$
- 1 : sans justification

#### NON

- 1 : « car 15 n'est pas un carré »
- 1 : sans justification

---

<sup>21</sup> Nous considérons comme juste la réponse étayée par le calcul :  $5(x^2-3)$ . Les réponses fausses relevaient des erreurs de calcul:  $5(x^2-3.5)$ ,  $5x(5x-15)$  et  $5(5x^2-3)$ .

Conclusion : Ce qui était attendu ne s'est pas produit : ces élèves (sauf un) ne privilégient pas la méthode d'application de l'identité remarquable pour factoriser l'expression donnée. Malgré la forme de l'expression, ils affirment en majorité que l'expression est factorisable et montrent (pour la plupart) le calcul attendu. Nous voyons de part la réponse d'un élève, que la définition de factorisation lui est claire : il justifie son calcul en affirmant que c'est un produit. Nous retrouverons cette définition dans sa réponse à la dernière question du questionnaire (« qu'est-ce factoriser une expression ? »).

#### Question n°2a)

Nous avons réparti les réponses en trois catégories : oui, Amandine a raison (sans tenir compte de la légitimité de la démonstration) ; non, Amandine n'a pas raison et les non-réponses.

| OUI | NON | NON REP. |
|-----|-----|----------|
| 8   | 6   | 1        |

#### OUI

- 7 : Vérifient l'égalité en développant le deuxième membre
- 1 : « car dans tous les cas 3 est facteur »

#### NON

- 4 :  $x^2+3(2x+3)$  n'est pas un produit
- 1 : « On ne peut pas factoriser car il n'y a pas de facteurs communs dans chaque opération »
- 1 : sans justification

Conclusion : Ce que nous attendions a été confirmé par les réponses des élèves : un grand nombre s'est soucié de vérifier l'égalité sans tenir compte du fait que l'expression du second membre est une somme. Seul presque un tiers de la classe a remarqué le fait que la factorisation partielle n'est pas une factorisation.

#### Question n°2b)

Suivant la même catégorisation que la question précédente, nous pouvons regrouper nos données dans le tableau suivant :

| OUI | NON | NON REP. |
|-----|-----|----------|
| 11  | 1   | 3        |

OUI

- 4 : Vérifient l'égalité
- 3 : 4 est facteur dans les trois termes
- 3 : Vérifient l'égalité et en plus remarquent que c'est un produit
- 1 : Remarque que c'est un produit

NON

- 1 : Développe avec des erreurs de calcul

Conclusion : Malgré le grand nombre de réponses affirmant que l'expression est bien une factorisation, nous devons souligner qu'une bonne partie de ces élèves justifient leur réponses par le développement du second membre de l'égalité. Ils ne remettent donc pas en question la définition d'une factorisation (excepté pour un élève qui remarque que c'est un produit après avoir vérifié l'égalité). Seuls 4 élèves sur 11 justifient leur réponses faisant intervenir la définition de factorisation (lorsqu'ils remarquent que c'est un produit). Nous soulignons également qu'aucun élève ne s'est penché sur la question de factorisation au maximum d'une expression.

Question n°2c)

| OUI | NON | NON REP. |
|-----|-----|----------|
| 7   | 6   | 2        |

OUI

- 2 : Vérifient l'égalité
- 2 : remarquent que c'est un produit et que le facteur commun est x
- 1 : remarque que c'est un produit
- 1 : remarque que le facteur commun est x
- 1 : tautologie

NON

- 1 : Ce n'est pas factorisé au maximum
- 1 : « On ne peut pas transformer des  $x^2$  en x »
- 1 : « Car  $9x^2 - 18x = 0$  alors que  $3(3x^2 - 6x) = -9x$  »
- 1 : Car n'a pas factorisé B par 3

- 1 : « car  $x \cdot 9x \neq 9x^2$  si  $x=1$  :  $1 \cdot 9x = 9x \neq 9x^2$  »
- 1 : Sans justification

Conclusion : Il est intéressant de remarquer qu'un grand nombre d'élèves ne considèrent pas cette expression comme étant factorisée. Les justifications ne correspondent cependant pas tout à fait à ce que nous avons prévu dans l'analyse a priori du questionnaire : seul un élève considère qu'une expression n'est factorisée que lorsqu'elle l'est au maximum. Pour cette question, le souci de l'égalité n'est plus très important, la définition de factorisation étant beaucoup plus requise. Nous concluons en disant que peu d'élèves ont été déstabilisés par le fait qu'elle n'est pas factorisée au maximum, les réponses négatives étant justifiées de façon très hétérogène.

Question n°2d)

| OUI | NON | NON REP. | ? <sup>22</sup> |
|-----|-----|----------|-----------------|
| 3   | 7   | 4        | 1               |

OUI

- 3 : Vérifient l'égalité en développant

NON

- 3 : Car ce n'est pas un produit
- 3 : Proposent une autre factorisation (ou autre calcul), mais erroné(e)
- 1 : Il n'y a pas de facteur commun

?

- 1 : « Pourquoi on passe de  $(2x-1)$  à  $(3x+2)$  ? »

Conclusion : Observons tout d'abord que nous avons recueilli presque un tiers de non-réponses. Ceci peut être dû à la trop grande complexité de l'expression. Nous pouvons dire qu'il y a un partage équitable entre ceux qui pensent que c'est une forme factorisée et ceux qui ne le pensent pas (si nous ne considérons pas les réponses où interviennent des erreurs de calcul). Soulignons le fait que l'argument de ceux qui affirment que c'est une expression

<sup>22</sup> Ceci correspond à un élève qui n'a ni répondu oui ni non.

factorisée est lié au souci de l'égalité qui prime sur la définition de factorisation. Le taux de réussite est ainsi assez bas (un cinquième des élèves), comme prévu.

### Question n°3a)

Nous avons réparti les réponses en quatre catégories : les réponses justes<sup>23</sup>, celles qui sont fausses (pour toutes raisons), ceux qui jugent que l'équation n'est pas résoluble et les non réponses. Après avoir présenté le tableau regroupant les données, nous justifierons les réponses considérées comme « fausses ».

| JUSTE | FAUX | IMPOSSIBLE                    | NON REP. |
|-------|------|-------------------------------|----------|
| 2     | 6    | 3 (toutes sans justification) | 4        |

### FAUX

- 1 : N'a pas terminé le calcul
- 1 : Rassemble les x et les nombres sans tenir compte des opérations
- 1 : Transforme  $4x^2$  en  $2x$  puis résout l'équation du premier degré
- 1 : Elimine  $x^2$  en transformant  $4x^2$  en 4
- 2 : Sans catégorie

Conclusion : Nous n'avons pas, lors de l'analyse a priori du questionnaire, détaillé les réponses inexactes. Et pour cause : leur justification est très mitigée, la plupart provenant d'erreurs de calculs ou mise en oeuvre de méthodes incorrectes. Nous devons de plus souligner le faible taux de réussite ainsi que le taux élevé de non-réponses, qui seront comparés aux réponses de la question suivante.

### Question n°3b)

Suivant la même catégorisation, nous obtenons les résultats suivants<sup>24</sup> :

| JUSTE | FAUX | IMPOSSIBLE | NON REP. |
|-------|------|------------|----------|
| 11    | 2    | 0          | 2        |

### FAUX

- 1 : Développe et se retrouve avec  $x^2 - x = 6$

<sup>23</sup> C'est-à-dire les élèves qui ont trouvés les solutions  $x=0$  ou  $x=5/4$  à l'équation proposée.

<sup>24</sup> Est considérée comme juste la réponse :  $x = -2$  ou  $x=3$

- 1 : regroupe nombres et inconnues sans tenir compte de la multiplication

Conclusion : Comme prévu dans l'analyse a priori du questionnaire, cette question présente un taux de réussite beaucoup plus élevé que celui correspondant à la question précédente. Nous émettons l'hypothèse que ceci est dû au fait que l'équation à résoudre est déjà sous forme d'équation-produit, les élèves n'ayant alors qu'à appliquer la règle du produit de facteurs nul.

Question n°3c)

| JUSTE <sup>25</sup>          | FAUX | NON REP. |
|------------------------------|------|----------|
| 4(dont 1 sans justification) | 6    | 5        |

FAUX

- 3 : Transposent la résolution de l'équation produit  $AB=0$  à l'équation  $AB=1$
- 2 : Développent avec des erreurs de calcul menant souvent à une équation du premier degré qu'ils résolvent
- 1 : Sans catégorie

Conclusion : Le taux de réponses fausses et de non-réponses attirent notre attention pour cette question en particulier. Ce que nous avons voulu vérifier (la transposition de la résolution de l'équation produit  $AB=0$  à l'équation  $AB=1$ ) s'est produit dans la moitié des réponses fausses. La question de non-résolubilité d'une équation étant peu explorée en Troisième, il nous semble correct qu'un grand nombre d'élève ne sache pas comment s'y prendre.

Question n°3d)

| JUSTE <sup>26</sup> | FAUX | IMPOSSIBLE | NON REP. |
|---------------------|------|------------|----------|
| 1                   | 6    | 2          | 6        |

FAUX

- 2 : « Suppriment »  $x^2$  ou le transforment en  $x$
- 2 : Factorisent par 7 ou tentent de factoriser

<sup>25</sup> Revient à dire que l'équation ne peut pas être résolue (même si l'élève ne conclut pas).

<sup>26</sup> La réponse est considérée comme juste lorsque l'élève a trouvé la solution  $x=-3/7$  à l'équation proposée.

- 1 : Se ramène à  $49x^2+42x+9=0$
- 1 : Sans catégorie

Conclusion : Presque un tiers des élèves n'ont pas répondu à cette question. D'après les données recueillies, nous pouvons conclure que peu d'élèves ont repéré l'identité remarquable dans l'expression fournie, même après avoir regroupé tous les termes dans un seul membre de l'égalité. Il aurait été intéressant de demander aux élèves de factoriser la même expression dans un autre contexte afin d'émettre plus d'hypothèses concernant les difficultés éprouvées lors de la résolution de l'équation proposée.

#### Question n°3e)

| JUSTE <sup>27</sup> | FAUX | IMPOSSIBLE | NON REP. |
|---------------------|------|------------|----------|
| 1                   | 6    | 1          | 7        |

#### FAUX

- 2 : Développent et ne savent plus continuer ou font des erreurs de calcul
- 2 : «  $(2x+3)=0$  ou  $(4x+2)=0$  ou  $(7x-6)=0$  ou  $(2x+3)=0$  » donc trouvent 4 solutions
- 1 : «  $(2x+3)(4x+2)=0$  ou  $(7x-6)(2x+3)=0$  »
- 1 : Développe chaque terme et se retrouve avec  $A+B=0$  et affirme ou «  $A=0$  ou  $B=0$  »

Conclusion : Les données recueillies sont surprenantes, ou tout du moins inattendues. Nous avons considéré dans l'analyse a priori que cette question aurait un taux de réussite assez élevé vu la faible complexité intervenante dans l'expression. Nous observons toutefois un très grand nombre de non-réponses ainsi qu'un grand nombre de réponses inexactes. Soulignons également le fait que les erreurs commises ne sont pas pour la plupart des erreurs de calcul, relevant en grande majorité des lacunes théoriques plus profondes.

#### Question n°4a)

Nous avons choisi de regrouper les résultats sous quatre catégories différentes : les réponses justes (c'est-à-dire le résultat correct) obtenu par la méthode attendue<sup>28</sup> ou par un autre calcul, les fausses, les non réponses ainsi que les résultats sans trace de calcul.

<sup>27</sup> La réponse est considérée comme juste lorsque l'élève a trouvé les solutions  $x=-3/2$  et  $x=4/11$  à l'équation proposée.

| JUSTE        |          | FAUX | SANS TRACE | NON REP. |
|--------------|----------|------|------------|----------|
| 8            |          | 2    | 2          | 3        |
| Réponse att. | Non att. |      |            |          |
| 1            | 7        |      |            |          |

#### REPONSES JUSTES NON ATTENDUES

- 2 :  $(100+5)(90+5)$  puis développe
- 2 : Calcule  $100.95+5.95$
- 2 : Pose l'opération
- 1 : Sans catégorie

#### FAUX

- 1 : Pose l'opération et commet des erreurs de calcul
- 1 : «  $A=100 \times 90 + 5 \times 5 = 9000 + 25 = 9025$  »

Conclusion: La factorisation n'est pas perçue en tant qu'outil pour l'écrasante majorité des élèves, qui adoptent d'autres méthodes aboutissant au résultat correct. Il nous semble également important de souligner le fait que nous ne tenons pas en compte dans cette conclusion les résultats laissés sans trace, ne sachant pas comment ils ont été obtenus. Leur effectif étant minoritaire, nous pouvons cependant garder l'hypothèse émise au départ.

#### Question n°4b)

Nous avons considéré comme justes les réponses qui présentaient le résultat correct ayant appliqué la méthode attendue<sup>29</sup> ou une autre. Voici les données recueillies :

| JUSTE         |          | FAUX | NON REP. |
|---------------|----------|------|----------|
| 5             |          | 5    | 5        |
| Réponses att. | Non att. |      |          |
| 0             | 5        |      |          |

#### REPONSES JUSTES NON ATTENDUES

- 5 : Posent l'opération (c'est-à-dire  $105 \times 105$  et  $95 \times 95$ )

<sup>28</sup> C'est-à-dire 9975 obtenu en appliquant la formule  $(a+b)(a-b)$

FAUX :

- 2 :  $(100+5)(100+5) - (90+5)(90+5)$  puis développent mais commettent des erreurs de calcul

- 1 :  $(100^2 + 5^2) - (90^2 + 5^2) + 5^2 + 5^2$

- 1 : « trop difficile »

- 1 :  $(100+5)(100+5) - (100-5)(100-5)$

Conclusion : Les réponses à cette question se veulent très hétérogènes. Cependant, si d'un côté nous avons recueilli un tiers de résultats exacts, il est fondamental de souligner qu'aucun n'a été obtenu à travers la méthode attendue. Il est en outre intéressant de remarquer qu'un effort a été fait dans le sens de factoriser l'expression donnée, a contrario des résultats de la question précédente. Nous pouvons émettre l'hypothèse que la forme de l'expression aurait pu entraîner les élèves vers ce choix, comme nous l'avions prédit lors de l'analyse a priori.

#### Question n°5a)

| JUSTE <sup>30</sup> | FAUX | NON REP. |
|---------------------|------|----------|
| 6                   | 7    | 2        |

La majorité des réponses fausses sont dues à des erreurs de calcul lors du développement de l'expression.

Conclusion : Les données recueillies semblent confirmer nos attentes : la majorité des élèves s'est senti à l'aise pour répondre à cette question (2 non-réponses) et hormis les fautes de calcul, elle a été bien traitée.

#### Question n°5b)

| JUSTE <sup>31</sup> | FAUX | NON REP. |
|---------------------|------|----------|
| 1                   | 10   | 4        |

FAUX

- 7 : Considèrent  $(x^2-16)$  comme  $(x-4)^2$

<sup>29</sup> C'est-à-dire  $(105+95)(105-95) = 2000$ .

<sup>30</sup>  $3x^2-7x-20$

- 2 : Effectuent la factorisation partielle de la forme développée en a)
- 1 : Développe puis factorise avec erreurs de calculs

Conclusion : Complexifier l'expression fournie a posé des problèmes pour un grand nombre d'élèves, qui n'ont pas repéré la bonne transformation à effectuer, produisant fréquemment ainsi un résultat prévu par l'analyse a priori du questionnaire.

#### Question n°5c)

Pour cette question, nous avons considéré justes les élèves qui ont choisi la forme factorisée pour résoudre la première équation, la forme développée pour résoudre la seconde équation (nous avons tenu compte du fait que la réponse à cette question dépend du résultat des deux précédentes et que les fautes commises antérieurement peuvent entraîner des résultats faux).

| JUSTE         |          | FAUX | NON REP. |
|---------------|----------|------|----------|
| 6             |          | 3    | 5        |
| Réponses att. | Non att. |      |          |
| 0             | 6        |      |          |

#### REPONSES JUSTES NON ATTENDUES

6 : Choissent la bonne forme pour les deux équations mais ne trouvent pas les bonnes solutions puisqu'ils ont commis des erreurs en a) et b)

#### FAUX

- 2 : Choissent la forme développée dans les deux cas et commettent des erreurs de calcul
- 1 :  $(x-4)=0$  ou  $(2x+1)=0$  ou  $(x^2-16)=0$
- 1 : Choisit la forme factorisée pour les deux cas

Conclusion : Même si répondre à ce genre de question ne fait pas partie des habitudes des élèves, presque la moitié de la classe a bien repéré les utilités différentes des formes factorisée et développée d'une même expression, les erreurs commises étant pour la totalité des erreurs de calcul.

---

<sup>31</sup>  $(x-4)(3x+5)$

Soulignons toutefois que cette question a rendu mal à l'aise un nombre non-négligeable d'élèves qui ne l'ont pas traitée.

Question n°6 a)

| JUSTE <sup>32</sup> | FAUX | NON REP. |
|---------------------|------|----------|
| 4                   | 8    | 3        |

FAUX

- 2 : Ont développé l'expression
- 2 :  $(x-2)(2x+3)$
- 1 :  $(2x+3)(x-2)^2$
- 1 :  $(x-2)[(2x+3)(x-2)]$
- 1 :  $(x-2)[(x-2)+(2x+3)]$
- 1 :  $(x-2)-(2x+3)$

Conclusion : Les réponses données par les élèves à cette question sont assez diversifiées. Nous ne pouvons pas cependant dire qu'il y a prépondérance du cas où les élèves considèrent  $C=0$ <sup>33</sup>, comme nous l'avions prévu. Le taux d'échec reste néanmoins non négligeable, ce qui ne nous surprend pas étant donné la complexité de l'expression déjà soulignée lors de l'analyse a priori.

Question n°6 b)

| JUSTE <sup>34</sup> | FAUX | NON REP. |
|---------------------|------|----------|
| 2                   | 6    | 7        |

FAUX

- 2 : Développe puis factorise partiellement
- 1 : « Il n'y a pas de facteur en commun donc on ne peut pas factoriser l'expression »
- 1 : Réécriture de B
- 1 : Interprète  $(3x+9)$  comme  $(x+3)^2$
- 1 : Sans catégorie

---

<sup>32</sup>  $(x+2)(2x+4)$

<sup>33</sup> Se reporter à l'analyse a priori du questionnaire

Conclusion : Le fort taux de non-réponses laisse suggérer le fait qu'effectuer des transformations sur les expressions dans le but de les factoriser n'est pas pratique commune des élèves, qui ne voyant pas de facteur commun apparent se décourageraient de s'engager dans des calculs. Observons que la technique de développer avant de factoriser une expression est prise en compte par quelques élèves.

Question n°6 c)

| JUSTE <sup>35</sup> | FAUX | NON REP. |
|---------------------|------|----------|
| 6                   | 5    | 4        |

FAUX

- 2 :  $(x+3)[(x+3)-(2x+7)]$
- 1 :  $(x+3)[(2x+7)-(x+2)]$
- 1 :  $(x+3)[(2x+7)(x+3)]$
- 1 : A développé l'expression

Conclusion : Cette question présente un taux de réussite supérieur aux deux précédentes, confirmant les hypothèses que nous avons émises. Parmi les résultats incorrects, les méthodes employées y aboutissant se veulent assez hétérogènes ne nous permettant pas d'analyser plus profondément les productions des élèves.

Question 7

a)

- 5 : C'est transformer en produit
- 4 : C'est reconnaître/regrouper un facteur commun
- 2 : C'est simplifier /réduire son écriture
- 1 : « C'est avantageux pour résoudre une équation qui est par exemple  $=0$  »
- 3 Non réponses

b)

- 5 : Sert à simplifier/écrire plus court/réduire/réduire au maximum une expression

---

<sup>34</sup>  $(x+3)(10x-16)$

- 2 : C'est plus facile lorsqu'il faut remplacer  $x$  par une valeur
- 1 : Sert à transformer l'expression en un produit
- 1 : Sert à résoudre une « équation du premier degré avec deux inconnues et dont le produit est égal à 0 »
- 1 : Sert à simplifier la vie

Conclusion : Nous constatons une difficulté de la part des élèves à bien discerner la définition de la factorisation de son utilité. Le tiers des élèves semble avoir bien saisi sa définition, sa fonctionnalité étant cependant repérée par un seul élève (et encore de façon très confuse). Observons également qu'il y a une confusion entre la définition de la notion de factorisation et la méthode employée (repérer un facteur commun) de même que l'association factorisation et simplification est très présente pour la plupart des élèves.

Conclusion générale : Il nous semble, tout d'abord, que la définition de factorisation n'est pas claire pour la plupart des élèves : une factorisation partielle est souvent considérée comme étant une factorisation. Ensuite, en ce qui concerne sa fonctionnalité, elle paraît plutôt liée à la résolution d'équations du second degré lorsque les élèves répondent à la dernière question (« A quoi sert la factorisation ? »), mais ce discours est rarement soutenu par leurs actions : lorsqu'il s'agit de résoudre des équations du second degré, la factorisation est rarement utilisée en tant qu'outil. De plus, les élèves ne font aucune mention à la fonctionnalité de la factorisation liée aux calculs numériques (très peu d'élèves ont d'ailleurs effectué les calculs de la question n°4 - « Calculez mentalement et expliquez vos résultats:  $A = 105 \times 95$  ;  $B = 105^2 - 95^2$  » - en utilisant la factorisation). Nous observons finalement qu'une augmentation du niveau de complexité des expressions est immédiatement un obstacle pour la résolution de problèmes de factorisation pour ces élèves.

## 2.1 Collège Saint Exupéry

### Question n°1

---

<sup>35</sup>  $(x+3)(x+4)$

| OUI                                                                                                | NON | NON REP. | ?                                    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|----------|--------------------------------------|
| 23.<br>Dont 2 réponses<br>fausses <sup>36</sup> et 2<br>réponses : $A = 5(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$ | 0   | 0        | 1 : « $A = (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ » |

OUI

- 14 : Par calcul
- 8 : Par calcul et en affirmant que « c'est un produit »
- 2 : « car il y a un facteur commun qui est 5 »

Conclusion : Excellent taux de réussite. Notre hypothèse développée dans l'analyse a priori n'étant pas confirmée, il paraît que les élèves ont bien saisi la définition de factorisation.

#### Question n°2a)

| OUI | NON | NON REP. |
|-----|-----|----------|
| 15  | 8   | 1        |

OUI

- 9 : Vérifient l'égalité ou s'aperçoivent que 3 est facteur commun de  $6x$  et 9
- 3 : « On ne peut pas plus factoriser » et proposent  $x(x+6)+9$
- 3 : oui, mais proposent  $x(x+6)+9$  ou  $(x+3)^2$  comme étant une meilleure réponse

NON

- 5 : Donnent la bonne réponse
- 1 : reconnaît la factorisation partielle et propose  $(x+3)^2$
- 1 : sans justification
- 1 : Développe

Conclusion : Allant à l'encontre de la conclusion que nous avons faite concernant la question précédente, nous nous apercevons que la notion de factorisation n'est pas claire pour un grand nombre d'élèves. Comme pour le Lycée G. Brassens, les élèves privilégient la vérification de l'égalité au détriment de celle de la notion de factorisation.

<sup>36</sup>  $x(5x-15)$  ;  $5(x^2+3)$

Il est intéressant d'observer que tout en connaissant la « bonne » réponse, les élèves continuent d'affirmer que l'expression proposée est bien une factorisation, la factorisation partielle étant donc considérée comme factorisation.

Question n°2b)

| OUI | NON | NON REP. |
|-----|-----|----------|
| 20  | 3   | 1        |

OUI :

- 7 : « 4 est facteur commun aux trois termes »
- 4 : développent
- 2 : « 4 est facteur commun aux trois termes » et développent
- 2 : sans justification
- 2 : « oui, mais n'a pas utilisé  $(a+b)^2$  »
- 1 : « 4 est facteur commun aux trois termes » mais ne finit pas son opération
- 1 : « on ne peut pas utiliser d'identité remarquable
- 1 : oui, mais «  $B = (4x+4)^2 = 4(x+1)^2$  »

NON

- 2 :  $B = 4(x+2)^2$
- 1 : c'est l'identité remarquable  $(a+b)^2$

Conclusion : Le fait que l'expression proposée n'a pas été factorisée au maximum ne semble pas avoir gêné la plupart des élèves qui en grande majorité ont fait appel à la définition de factorisation pour étayer leur réponses. Nous observons également qu'une justification très fréquemment utilisée consiste à la simple vérification de l'égalité (comme nous l'avons prévu) ne remettant pas en question la validité de la factorisation.

Question n°2c)

| OUI | NON | NON REP. | ?                                                                |
|-----|-----|----------|------------------------------------------------------------------|
| 12  | 9   | 1        | 2 : « Claire a raison?<br>elle n'a pas factorisé au<br>maximum » |

OUI

- 3 : « car x est facteur commun »
- 3 : développe
- 2 : sans justification
- 1 : Oui, mais « peut trouver mieux :  $9x(x-2)$  »
- 1 : « car x est facteur commun » et développe
- 1 : « car on ne peut pas utiliser d'identité remarquable »
- 1 : oui, « mais il fallait  $C = (a+b)^2$  »

NON

- 5 : « Il faut encore factoriser :  $9x(x-2)$  »
- 2 : « Il faut encore factoriser :  $3x(3x-6)$  »
- 2 : sans justification

Conclusion : Contrairement à la question précédente, le fait de ne pas avoir factorisé l'expression proposée au maximum semble avoir troublé grand nombre d'élèves qui ont répondu négativement à la question posée. La majorité des élèves a cependant repéré qu'il s'agissait d'une forme factorisée, n'argumentant toutefois pas toujours de façon à démontrer leur reconnaissance de la définition de ce concept (quelques uns privilégient la vérification de l'égalité).

Question n°2d)

| OUI | NON | NON REP. | ?                                                                              |
|-----|-----|----------|--------------------------------------------------------------------------------|
| 8   | 12  | 3        | 1 : « Il n'a pas factorisé au maximum et a oublié les identités remarquables » |

OUI

- 4 : sans justification
- 2 : montre les étapes de Didier jusqu'à obtenir le résultat de l'énoncé
- 1 : développe
- 1 : propose aussi :  $(3+x)(2x-1)+(x+2)(2x-1)$

NON

- 4 : montrent le résultat attendu
- 3 : développent puis factorisent trouvant un autre résultat

- 2 : trouvent une erreur entre D et sa forme factorisée en la développant
- 1 : D n'est pas factorisable car « il n'y a pas de facteur commun aux trois termes et il n'est pas possible d'utiliser les identités remarquables »
- 1 : « Didier n'a pas distingué le facteur commun et s'est trompé ». Propose  $(x+3)(x+2)[(x-3)+(2x-1)]$
- 1 : car « il n'y a pas de facteur commun aux trois termes »

Conclusion : Parmi ceux qui ont répondu que Didier avait raison, la moitié n'a pas justifié leur réponse nous laissant ainsi dans l'impossibilité d'analyser plus en détail leur conception de la notion de factorisation. La majorité des élèves ont repéré qu'il ne s'agissait pas d'une forme factorisée mais aucun n'a étayé son argumentation en utilisant directement la définition d'une factorisation (remarquant que l'expression suggérée est une somme, par exemple) ; seul un huitième de la classe a présenté le résultat attendu. Le bas taux de résultats justes nous semble justifié par le haut niveau de complexité de l'expression proposé.

#### Question n°3a)

| JUSTE | FAUX | IMPOSSIBLE                   | NON REP. |
|-------|------|------------------------------|----------|
| 3     | 12   | 5. Toutes sans justification | 4        |

#### FAUX

- 4 : Erreurs de calculs. Trouvent  $x=0$  et  $x=-5/4$
- 3 : trouvent une solution :  $x=5/4$
- 2 : s'arrêtent à  $x(4x-5)=0$
- 1 : affirme que l'équation n'a pas de solution
- 1 : trouve une solution :  $-5/4$
- 1 : sans catégorie

Conclusion : Si nous ne considérons pas les erreurs de calcul comme faisant partie des résultats « faux » (nous devons reconnaître que dans ce cas l'élève a tout de même saisi l'intérêt de l'usage de la factorisation en tant qu'outil de résolution), nous pouvons affirmer que la fonctionnalité de la notion de factorisation est présente pour un quart de l'effectif de la classe. La grande majorité d'erreurs est due à une mauvaise méthode d'application de la règle

du produit de facteurs nul pour lesquelles la fonctionnalité de la factorisation reste cependant acquise.

Question n° 3b)

| JUSTE | FAUX | IMPOSSIBLE | NON REP. |
|-------|------|------------|----------|
| 16    | 7    | 0          | 1        |

FAUX

- 2 : erreurs de calculs. Trouvent  $x = -2$  et  $x = -3$
- 1 : affirme que l'on ne peut pas factoriser l'expression donnée
- 1 : trouve «  $x+2=0$  ou  $x-3=0$  » mais ne continue pas
- 1 : trouve une solution  $x = -2$
- 1 : développe et ne sait pas résoudre
- 1 : «  $-6x = 0$  »

Conclusion : Comme nous l'avons prévu, le taux de réussite de cette question est supérieur à celui de la question précédente compte tenu du fait qu'il s'agit essentiellement d'appliquer la règle du produit de facteurs nul. Nous observons alors que cette méthode est bien acquise par la plupart des élèves.

Question n°3c)

| JUSTE <sup>37</sup> | FAUX | NON REP. |
|---------------------|------|----------|
| 11                  | 9    | 4        |

JUSTE

- 4 : sans justification
- 3 : développe juste, ne sait plus continuer mais ne conclut pas
- 1 : développe juste et affirme « car elle a deux inconnues »
- 1 : développe faux et affirme « car  $x^2$  et  $x$  sont deux facteurs différents »
- 1 : développe juste, ne sait plus continuer et conclut
- 1 : développe faux, ne sait plus continuer et conclut

<sup>37</sup> Revient à dire que l'équation ne peut pas être résolue.

FAUX

- 3 : développe faux et trouve une valeur pour x
- 2 : développe faux et ne sait plus continuer
- 2 : transpose la résolution de  $A.B=0$  pour  $A.B=1$
- 1 : répond au problème comme si la question était de résoudre  $A.B=0$
- 1 : trouve  $x=5,12$  mais ne justifie pas

Conclusion : La transposition attendue de la résolution de  $A.B=0$  pour  $A.B=1$  ne se fait pas pour l'écrasante majorité des élèves. Ceux-ci, ne sachant que faire, choisissent en grand nombre d'effectuer le développement de l'expression fournie partant ainsi sur la bonne voie. Nous ne pouvons pas négliger le taux de réussite qui se veut assez élevé considérant le fait que cette question est inhabituellement posée aux élèves dans leur cursus.

Question n°3d)

| JUSTE | FAUX | IMPOSSIBLE                                                         | NON REP. |
|-------|------|--------------------------------------------------------------------|----------|
| 1     | 9    | 8. Dont une justification : « car il n'y a pas de facteur commun » | 6        |

FAUX

- 3 : factorise  $7x(7x+6)+9=0$  mais ne sait pas continuer
- 1 : factorise  $7(7x^2+6x)=-9$  mais ne sait pas continuer
- 1 : factorise  $7x(7x+6)+9=0$  et applique  $A.B=0$  pour  $7x$  et  $7x+6$
- 1 : factorise  $7x(7x+6)=-9$  et transpose la résolution de  $A.B=0$  pour  $A.B=-9$
- 1 : factorise  $7x(7x+6)=-9$  mais commet des erreurs et trouve une autre valeur pour x
- 1 : trouve une autre factorisation (fausse) pour l'expression et donc aboutit à une conclusion fausse
- 1 : sans catégorie

Conclusion : La factorisation de cette expression ne se fait pas naturellement pour la plupart des élèves. Ceux-ci ne remarquant pas la possibilité d'utiliser l'identité remarquable  $a^2+b^2+2ab = (a+b)^2$  sont amenés à tenter d'autres factorisations de l'expression. Nous estimons que le fait d'avoir mis dans un membre de l'égalité les termes faisant intervenir des coefficients multiples de 7 a conduit les élèves à la tentative de factoriser l'expression par ce

nombre, n'aboutissant ainsi pas à la solution attendue. Il serait intéressant d'analyser si, dans un autre contexte, cette expression est factorisée par la plupart des élèves.

Question n°3e)

| JUSTE | FAUX | IMPOSSIBLE | NON REP. |
|-------|------|------------|----------|
| 4     | 13   | 3          | 4        |

**FAUX**

- 3 : développent et ne savent plus continuer, mais ne concluent pas
- 3 : commettent des erreurs de calcul et trouvent d'autres solutions
- 2 : factorisent mais ne savent plus continuer
- 1 : s'arrête aux égalités : «  $2x+3=0$  ou  $11x-4=0$  » mais ne continue pas
- 1 : trouve  $x=1,5$  mais ne justifie pas
- 1 : applique la règle si  $AB+CD=0$  alors  $A=0$  ou  $B=0$  ou  $C=0$  ou  $D=0$ , trouvant ainsi quatre solutions
- 1 : développe avec des erreurs puis factorise avec des erreurs
- 1 : développe et ne sait plus continuer. Conclut que l'équation n'a pas de solution

**IMPOSSIBLE**

- 1 : « il y a des produits de facteurs mais aussi addition de facteurs »
- 1 : développe et ne sait plus continuer
- 1 : sans justification

Conclusion : Malgré le bas niveau de complexité intervenant dans l'expression, l'écrasante majorité des élèves n'utilisent pas la factorisation afin d'aboutir à la solution. Nous en concluons donc de sa fonctionnalité ne semble pas être claire pour la plupart des élèves.

Question n°4a)

| JUSTE        |          | FAUX | SANS TRACE                     | NON REP. |
|--------------|----------|------|--------------------------------|----------|
| 12           |          | 3    | 5 (toutes les réponses justes) | 4        |
| Réponse att. | Non att. |      |                                |          |
| 11           | 1        |      |                                |          |

**FAUX**

- 1 : développe  $(100+5)(90+5)$  avec des erreurs de calcul
- 1 : affirme que  $A = 100 \times 100 - 10$  et trouve ainsi un résultat faux

- 1 : applique la factorisation attendue mais commet des erreurs de calcul

#### REPONSE JUSTE NON ATTENDUE

Calcule  $100 \times 90 + 5 \times 5 + 100 \times 5 + 90 + 5$

Conclusion: A contrario des résultats obtenus par le Lycée G. Brassens, un grand nombre d'élèves a fait intervenir la factorisation pour résoudre ce calcul. Observons toutefois que nous ne pouvons pas élargir cette conclusion pour les cinq élèves n'ayant pas laissé de trace de leur calcul.

#### Question n°4b)

| JUSTE             |               | FAUX | SANS TRACE                     | NON REP. |
|-------------------|---------------|------|--------------------------------|----------|
| 12                |               | 3    | 3 (toutes les réponses justes) | 6        |
| Réponse att.<br>9 | Non att.<br>3 |      |                                |          |

#### FAUX

- 1: Applique la factorisation attendue mais ne continue pas
- 1 :  $(100+5)^2 - (100-5)^2$  mais ne continue pas
- 1 :  $105^2 - 95^2 = 10^4$  (ajoute les puissances et soustrait :  $105 - 95$ )

#### REPONSES JUSTES NON ATTENDUES

- 2 : calcule  $(100+5)^2 - (100-5)^2$
- 1 : effectue un autre calcul

Conclusion : Il nous semble qu'en effet la forme de l'expression fournie entraîne les élèves vers une tentative de factorisation. Nous devons souligner que, bien que le taux de non-réponse soit très élevé, la plupart des élèves perçoivent la fonctionnalité de la factorisation pour résoudre des problèmes de calculs numériques.

#### Question n°5a)

| JUSTE | FAUX | NON REP. |
|-------|------|----------|
| 14    | 9    | 1        |

FAUX

- 5 : erreurs de calcul
- 1 : développe le premier terme et ne continue pas
- 1 : développe le premier terme, factorise le second et ne continue pas
- 1 : interprète  $(x^2-16)$  comme  $(x-16)^2$
- 1 : interprète  $(x^2-16)$  comme  $(x-4)^2$

Conclusion : Cette question de développement d'une expression ne semble pas poser de problème aux élèves qui pour la plupart y répondent correctement (si nous ne considérons pas les erreurs de calcul). Nous observons également un des plus bas taux de non-réponses, ce qui semble étayer notre hypothèse.

Question n°5b)

| JUSTE | FAUX | NON REP. |
|-------|------|----------|
| 9     | 8    | 7        |

FAUX

- 3 : factorise la forme développée trouvée au a)
- 2 : interprète  $(x^2-16)$  comme  $(x-4)^2$
- 1 : factorise le second terme
- 1 : bonne mise en facteur mais commet des erreurs de calcul
- 1 : développe le premier terme et le factorise

Conclusion : Les résultats présentés par les élèves se veulent assez hétérogènes. Il s'agit tout d'abord d'observer un taux de non-réponse assez élevé mais également de réponses inexactes, laissant ainsi un peu moins d'un tiers des élèves ayant produit la réponse attendue. La transformation en jeu permettant d'aboutir à la conclusion a posé problème pour deux élèves qui n'ont pas appliqué la règle attendue renvoyant ainsi un taux de réussite relativement bas comme nous l'avions prévu lors de l'analyse a priori tenant compte du fait que nous présentons ici une expression où intervient une complexité rarement rencontrée par les élèves au travers d'exercices de manuels.

Question n°5c)

| JUSTE             |                      | FAUX | NON REP. |
|-------------------|----------------------|------|----------|
| Réponse att.<br>1 | 11<br>Non att.<br>10 | 7    | 6        |

FAUX

- 4 : choisissent la forme factorisée dans les deux cas
- 1 : trouve la solution  $x=1,6$  et  $x=0$  dans le premier et deuxième cas respectivement
- 1 : choisit la forme développée pour résoudre la première équation
- 1 : choisit la forme développée pour résoudre la deuxième équation

#### REPONSES JUSTES NON ATTENDUES

10 : choisissent la bonne écriture dans les deux cas mais commettent des erreurs de calcul, ne trouvent pas toutes les solutions ou encore ne résolvent pas les équations.

Conclusion : Les données recueillies que nous présentons ici ne nous paraissent pas surprenantes. Tout d'abord, nous pensons que le fait d'être une question rarement posée aux élèves a laissé un grand nombre mal à l'aise ne sachant quoi répondre. Ensuite, il est intéressant de voir la prédominance du choix de la forme factorisée au détriment de la forme développée pour la plupart des réponses fausses (nous nous demandons si le fait que ce questionnaire se porte exclusivement sur des problèmes de factorisation a influencé les élèves dans ce choix). Malgré ceci, presque la moitié des élèves ont distingué les différents intérêts d'usage des formes développée et factorisée d'une expression selon la tâche à accomplir.

#### Question n°6a)

| JUSTE                                     | FAUX | NON REP. |
|-------------------------------------------|------|----------|
| 10. Dont<br>2 réponses :<br>$2(x+2)(x-2)$ | 10   | 4        |

FAUX

- 3 :  $(x-2)(2x+3)$
- 2 : développent puis factorisent
- 2 :  $(x-2)[(2x+3)+(x-2)]$

- 1 : développe
- 1 : commence à développer
- 1 : sans catégorie

Conclusion : Les résultats prévus dans l'analyse a-priori sont confirmés : la plupart des élèves (ayant commis des erreurs) considèrent  $C=0$ <sup>38</sup>. La complexité de cette expression (qui, à notre avis, ne révèle pas un niveau très élevé) a déstabilisé un grand nombre d'élèves entraînant ainsi un taux de réussite équivalent au taux d'échec répartissant de cette manière les effectifs de la classe en deux.

Question n° 6b)

| JUSTE                                     | FAUX | NON REP. |
|-------------------------------------------|------|----------|
| 6. Dont<br>3 réponses :<br>$2(x+3)(5x-8)$ | 6    | 12       |

FAUX

- 2 : factorisent  $(x+3)[(x+5)+3+(3x-7)]$  puis réduisent
- 1 : applique la bonne factorisation mais ne continue pas
- 1 : développe puis factorise
- 1 : développe mais ne continue pas
- 1 : sans catégorie

Conclusion : C'est pour cette question que nous retrouvons le plus haut taux de non-réponses (serait-ce dû à la complexité de l'expression ?). Nous soulignons le fait que, de même que pour d'autre cas, le développement intervient comme méthode fréquemment utilisée lorsque les élèves sont face à une expression pour laquelle toute autre méthode de factorisation (selon eux) s'avère inefficace.

Question n°6c)

| JUSTE | FAUX | NON REP. |
|-------|------|----------|
| 10    | 7    | 7        |

<sup>38</sup> Se reporter à l'analyse a priori de cette question

## FAUX

- 4 : bonne mise en facteur mais commettent des erreurs de calcul
- 1 : développe le second terme puis factorise l'expression trouvée
- 1 : factorise  $(x+3)[(x+5)(2x+7)]$  puis continue le calcul
- 1 : sans catégorie

Conclusion : Si nous considérons le fait que plus de la moitié des élèves ayant produit une réponse inattendue ont effectué la bonne factorisation de l'expression il nous semble correct d'affirmer que les hypothèses émises lors de l'analyse a priori de cette question sont confirmées. Il paraît en effet que la transformation à être mise en oeuvre pour aboutir à la factorisation de l'expression fournie est plus fréquemment traitée par les élèves (ce qui est confirmé par l'analyse des exercices proposés dans les manuels ainsi que de ceux posés au Brevet des Collèges).

## Question n°7

a)

- 7 : c'est chercher/trouver un facteur commun
- 7 : c'est simplifier/réduire/rendre l'expression la plus courte possible
- 7 : c'est transformer une somme en produit
- 1 : c'est « mettre le nombre au carré x plus entre parenthèse »
- 1 : c'est « mettre plusieurs unités en union »
- 1 non réponse

b)

- 8 : sert à simplifier les calculs/à aller plus vite
- 6 : sert à réduire/rendre l'expression plus simple/plus claire
- 5 : sert à résoudre une équation-produit/une équation du second degré
- 2 : sert à rendre l'expression plus facile à résoudre
- 1 : sert à transformer une addition ou soustraction en produit
- 2 non réponses

Conclusion : A peu près un tiers des élèves soumis à ce questionnaire présentent la définition de factorisation suggérée par les manuels (produit de facteurs). Nous retrouvons à nouveau un grand nombre d'élèves pour lesquels cette définition se confond avec la méthode employée (trouver un facteur commun) ainsi que l'idée de factorisation synonyme de

simplification d'une expression. C'est d'ailleurs cette idée qui est reprise pour argumenter la fonctionnalité de la factorisation. Nous estimons que ceci est dû au fait que la majorité des calculs à effectuer (remplacer  $x$  par une valeur donnée dans l'expression fournie) sont suggérés en fin d'exercice (pour ceux du type « développer, réduire, factoriser, résoudre ») et que ces calculs concernent le plus souvent la racine des équations à résoudre et pour cela sont plus facilement effectués lorsqu'ils font intervenir la forme factorisée de l'expression. Observons que la résolution d'équation du second degré est perçue pour un nombre non négligeable d'élèves, mais que le calcul littéral ne présente pas, pour la totalité des élèves, d'utilité lors de la résolution de problèmes de calculs numériques.

## Conclusion

La factorisation polynomiale est un concept algébrique présent dans l'écrasante majorité des exercices proposés au Brevet des Collèges intitulés « travaux numériques et gestion de données » (84% de ce type d'exercices proposés au Brevet des Collèges de 2000 impliquaient la mise en facteur d'expressions).

Non seulement son enseignement occupe une place non-négligeable parmi les notions mathématiques étudiées en classe de Troisième mais son apprentissage ne se fait pas sans difficultés ; en effet, la factorisation a fait objet de diverses recherches en Didactique des Mathématiques (et plus précisément en Didactique de l'Algèbre).

Vu l'importance de la factorisation dans les pratiques algébriques (surtout en fin de Collège) mais aussi vu les difficultés de son apprentissage, tout en nous appuyant sur les écrits déjà parus dans ce domaine, nous avons voulu analyser quelques aspects de l'enseignement de la factorisation en fin de Troisième, prenant en compte non seulement les complexités de son enseignement mais aussi celles relatives à son apprentissage. En d'autres mots, ce travail se repose essentiellement sur le rapport personnel des élèves à la factorisation et tente de répondre aux questions telles que : qu'est ce qu'un élève entend par « factoriser une expression » ? y voit-il un intérêt mathématique ? comment factorise-t-il les expressions algébriques ? pour quel(s) type(s) d'expressions la factorisation lui pose-t-elle problème ? etc.

Ces questions ne peuvent cependant pas être posées isolément. Le rapport personnel à la factorisation dépend (entre autres) du rapport institutionnel à cette notion ; autrement dit, le savoir enseigné (ce qui est retenu par l'élève) est en quelque sorte fruit du savoir à enseigner (ce qui est proposé dans les manuels, l'approche adoptée par l'enseignant, les exercices fournis aux élèves, etc.). Notre questionnement se veut alors clivé en deux niveaux : quel est le rapport institutionnel à la factorisation et en quoi diffère-t-il du rapport personnel des élèves ?

Pour répondre à ces questions, nous proposons une double analyse : celle du rapport institutionnel et celle du rapport personnel à la factorisation en classe de Troisième. Afin d'aborder la première partie de l'étude, nous nous sommes penchés sur la lecture des programmes officiels de la classe de Troisième en vigueur au long de l'année scolaire 1999-2000 suivie de l'analyse de quelques manuels scolaires et des examens du Brevet du Collège de 1999. En ce qui concerne le rapport personnel à la factorisation, nous avons choisi de faire passer un questionnaire (présenté en annexe) auprès d'élèves en fin de Troisième ayant déjà

étudié la notion de factorisation pour essayer de mieux comprendre leurs conceptions relatives à ce domaine.

Cette double analyse se repose, comme nous l'avons déjà dit, sur les écrits didactiques de l'enseignement de l'algèbre et plus précisément sur ceux relatifs à la factorisation. Il nous semble à présent important de reprendre quelques éléments parmi ceux qui ont guidé notre travail.

L'enseignement de la factorisation polynomiale en classe de Troisième se présente à la fois comme un exemple et une exception de quelques théories développées en Didactique de l'algèbre. Nous retrouvons notamment dans le discours de Kieran [Kieran, 1992] l'idée que l'algèbre élémentaire enseignée passe d'abord par le caractère procédural pour ensuite aboutir au caractère structural. Autrement dit, les notions algébriques sont introduites aux élèves dans un contexte numérique/arithmétique (où ils sont notamment face à des exercices mettant en jeu des substitutions de valeurs numériques dans des expressions algébriques ou encore face à des techniques arithmétiques aboutissant à la résolution d'équations algébriques) pour ensuite être traitées comme des objets sur lesquels on peut opérer. Nous ne retrouvons pas cette « transition » de volets dans l'enseignement de la factorisation : en fait, cette notion est présentée aux élèves uniquement au niveau structural. Empruntant la terminologie de Sfard [Sfard, 1991] qui soutient un discours rejoignant cette dialectique de l'algèbre procédurale et structurale, nous pouvons dire que la conception opérationnelle (qui, selon Sfard, est pour la plupart des apprenants la première étape de l'acquisition de nouvelles connaissances mathématiques) de la factorisation est inexistante étant donné que ce concept est d'emblée traité comme « objet ».

C'est, entre autres, pour cette raison que la factorisation illustre très bien la théorie du calcul fonctionnel / calcul formel développée par Chevallard [Chevallard, 1987]. Dans la mesure où la factorisation est immédiatement traitée en tant qu'objet et qu'elle est dans la plupart du temps dénouée de tout caractère utilitaire (même intra-mathématique), son enseignement est essentiellement formel tout comme, toujours d'après Chevallard, le calcul algébrique au niveau du Collège.

Autrement dit, si pour Kieran le caractère structural est propre à la factorisation, Chevallard soutient l'idée selon laquelle, au contraire, le structural est général dans l'algèbre enseignée.

Il nous semble à présent important d'étayer les propos que nous venons de tenir en dégagant les principales conclusions issues de l'analyse des manuels scolaires.

Dans les trois manuels analysés, la notion de factorisation est introduite de façon analogue : après avoir rappelé la définition d'une expression factorisée, les auteurs décrivent deux méthodes permettant la factorisation (utiliser la distributivité et utiliser les identités remarquables) puis suggèrent quelques exemples qui étayent ces deux méthodes. La fonctionnalité de la factorisation est ensuite abordée (et quelquefois explicitée) à travers des exercices de résolution d'équations du second degré, les ramenant à des équations-produits. Cette première partie d'introduction de la notion de factorisation est fidèle à ce qui est suggéré par le programme officiel, à savoir que les exemples traités sont le plus souvent des cas « simples » de factorisation (où le facteur commun est apparent lors de l'utilisation de la première méthode, l'identité remarquable la plus souvent employée  $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ), pour lesquels le niveau de complexité se veut assez bas.

Le niveau de complexité des exercices proposés aux élèves par ces manuels ne diffère pas beaucoup de ceux présentés en guise d'introduction du concept de factorisation. En effet, à part quelques exceptions, les sujets proposent la mise en oeuvre de méthodes simples qui exigent rarement des transformations ou calculs intermédiaires à effectuer. De plus, il convient de souligner que le jeu de cadre est peu développé. Cependant, un effort est fait dans l'intention de proposer des contextes différents de ceux présentés usuellement (explorant des problèmes de programmation ou encore des problèmes géométriques). Nous sommes ainsi face à des exercices qui se ressemblent en grande majorité, surtout ceux proposés au Brevet des Collèges pour lesquels la pauvreté des tâches est plus flagrante.

Nous avons présenté ci-dessus quelques caractéristiques du savoir à enseigner en rapport à la factorisation en classe de Troisième. Il s'agit à présent de s'intéresser au savoir enseigné afin de dégager quelques éléments qui nous permettraient de répondre aux questions qui ont guidé notre travail. Pour ce faire, nous avons élaboré un questionnaire nous penchant essentiellement sur trois aspects du rapport des élèves à la notion de factorisation : la reconnaissance de formes factorisées (en demandant, par exemple : « Pour l'expression  $B = 4x^2 + 16x + 16$ , Benoît a proposé la factorisation suivante:  $4x^2 + 16x + 16 = 4(x^2 + 4x + 4)$ . A-t-il raison? Justifiez votre réponse »), la production – c'est-à-dire la factorisation d'expressions (notamment à travers la question : « Factorisez les expressions suivantes en justifiant vos réponses :  $A = (2x + 3)(x - 2) + (x - 2)$  ») et la reconnaissance de la fonctionnalité de la factorisation en tant qu'outil dans la résolution d'équations ou de calculs (en demandant aux élèves, par exemple : « Calculez mentalement et expliquez vos résultats:  $A = 105 \times 95$  » ou encore « D'après vous, à quoi sert la factorisation ? »).

L'analyse des réponses donnée par les élèves nous permettent de dégager trois idées principales.

Il s'agit tout d'abord d'observer que la définition de la factorisation n'est pas toujours claire, la méthode utilisée se confondant très souvent à la définition (notamment lorsque les élèves, à la question « qu'est-ce factoriser une expression ? », répondent : « c'est trouver un facteur en commun »). La notion de factorisation est aussi souvent liée à l'idée de « simplifier / réduire » l'expression qui, à notre avis, est dû au grand nombre d'exercices demandant de calculer la valeur de l'expression donnée pour une valeur de  $x$  (qui est, dans la plupart des cas, la racine de l'expression). Nous pouvons regrouper ces deux informations et dire que, pour ces élèves, la factorisation est essentiellement perçue sous son volet procédural.

La fonctionnalité de la factorisation mise en exergue par les manuels scolaires -à savoir la factorisation en tant qu'outil de résolution d'équations du second degré) est souvent repérée par les élèves mais est rarement mise en oeuvre. Il est notamment intéressant d'observer que, malgré que les élèves affirment bien souvent que « factoriser sert à résoudre une équation-produit/ une équation du second degré », ils ne savent pas, pour la plupart, résoudre l'équation  $49x^2 + 42x = -9$ . Factoriser semble être un « savoir-dire » plutôt qu'un savoir faire.

Dans le but de mieux comprendre la relation qu'il existe entre le rapport institutionnel et le rapport des élèves au concept de la factorisation en fin de Troisième, voici deux exercices extraits des annales du Brevet.

Au Brevet des Collèges 1990, était présenté l'exercice suivant :

« Soit  $f(x) = (x-9)(2x-5) + 4x^2 - (2x-5)^2 - 25$

- a) Développer, réduire et ordonner  $f(x)$ .
- b) Écrire  $f(x)$  sous forme d'un produit de facteurs.
- c) Calculer  $f(-3/2)$  puis  $f(2\sqrt{2})$ . Donner la valeur exacte.
- d) Résoudre l'équation  $f(x) = 0$ . »

Une dizaine d'années plus tard, au Brevet des Collèges 1999, un exercice semblable était proposé :

« On pose  $B = 4x^2 - 25 - (2x+5)(3x-7)$

- a) Développer et réduire  $B$ .
- b) Factoriser  $4x^2 - 25$ .
- c) En déduire une factorisation de  $B$ .
- d) Résoudre l'équation  $(2x+5)(2-x) = 0$ . »

Il nous semble important d'analyser en quelques lignes la différence existante entre ces deux exercices. Hormis le fait que les expressions ne sont pas présentées de la même

façon (on passe d'une fonction à une expression), la complexité de leur contenu est largement différente. Dans la première, il s'agit d'une somme de trois termes à factoriser tandis que l'expression B n'en contient que deux. Les premiers et second termes de la fonction  $f$  décrite dans le premier exercice sont ceux qui définissent l'expression B, avec quelques différences. Tout d'abord il s'agit d'observer que dans B, les termes sont « regroupés » de façon à faciliter la tâche de l'élève à la reconnaissance du produit  $4x^2-25 = (2x-5)(2x+5)$  tandis que dans le premier exercice  $4x^2-25$  est mis de part et d'autre de  $(2x-5)^2$ . Ensuite, le premier terme de la fonction  $f$  est modifié légèrement mais sans augmentation ou diminution de la complexité de la tâche (de  $(x-9)(2x-5)$  l'on passe à  $(2x+5)(3x-7)$ ). Notre intérêt n'est pas ici de comparer terme par terme les deux expressions, mais de comparer leur niveau de difficulté. Le nombre de termes de chaque expression ayant déjà fait objet d'analyse, passons donc au degré d'autonomie laissé à la charge des élèves. La consigne de développer, réduire (et ordonner dans le premier cas) reste la même dans les deux exercices ; c'est la tâche de factorisation qui révèle une différence. En 1990, l'on attendait des élèves qu'ils sachent factoriser, sans aucune aide supplémentaire (pas de sous-problèmes) cette expression à trois termes. En 1999, l'on facilite la tâche non seulement en réduisant le nombre de termes de l'expression et en les regroupant mais également en détaillant la méthode à employer en créant des sous-buts (voire item c)). Enfin, la fonctionnalité explorée dans les deux exercices est la même : la résolution d'équations du second degré, toutefois les consignes données ne sont pas équivalentes. A contrario du premier exercice, l'équation du second degré est déjà mise sous forme de produit, fournissant ainsi la réponse et la question de sa factorisation ne se posant pas. Les élèves doivent résoudre une équation-produit, sans souvent faire le lien avec les étapes précédentes.

Une dizaine d'années après l'étude menée par J. Tonnelle, il nous semble que ses conclusions restent toujours valables. Les productions des élèves sont le reflet des exercices qui leur ont été proposés au long de l'année (éclairés par l'exemple traité ci-dessus), ce qui explique le désarroi de la plupart des élèves face à l'augmentation du niveau de complexité des expressions rencontrés dans les exercices que nous leur avons présenté. Après la brève analyse comparative faite des deux exercices ci-dessus décrits, nous nous posons la question de l'évolution de l'enseignement du concept de factorisation. J. Tonnelle nous en donne quelques indices, mais une future recherche pourrait éclairer nos hypothèses. Une étude basée sur l'écologie du savoir serait donc nécessaire, complétant ce travail plutôt axé sur l'économie du savoir.



## Bibliographie

- Chevallard Y. – *La dialectique entre études locales et théorisation : le cas de l'Algèbre dans l'Enseignement du second degré* ; Didactique et acquisition des connaissances scientifiques, p.305-324, La pensée Sauvage (ed.) 1987.
- Gascon J. – *Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'« arithmétique généralisée »* ; Petit x n°37, p.43-63. Année 1994-1995.
- Kieran C. – *The learning and teaching of school algebra* ; Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning. Douglas A. Grows (ed.), p. 390-419, New York Macmillan. 1992.
- Nicaud, J.F. – *Modélisation en EIAO, les modèles d'APLUSIX*; RDM 14/1.2, p.67 – 112. 1994.
- Sfard, A. – *On the dual nature of mathematics conception : Reflections on processes and objects as different sides of the same coin* ; Educational Studies in Mathematics Vol. 22, p. 1-36. 1991.
- Tonnelle, J. – *Le monde clos de la factorisation au premier cycle*; Rapport de mémoire - Université d'Aix-Marseille II, Université de Bordeaux I. 1979.



# QUESTIONNAIRE

## Question n°1

Peut-on factoriser l'expression  $A = 5x^2 - 15$ ? Justifiez votre réponse.

---

---

---

---

---

---

---

---

## Question n°2

a) Pour l'expression  $A = x^2 + 6x + 9$ , Amandine a proposé la factorisation suivante:  
 $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 3(2x + 3)$ . A-t-elle raison? Justifiez votre réponse.

---

---

---

---

---

---

---

---

b) Pour l'expression  $B = 4x^2 + 16x + 16$ , Benoît a proposé la factorisation suivante:  
 $4x^2 + 16x + 16 = 4(x^2 + 4x + 4)$ . A-t-il raison? Justifiez votre réponse.

---

---

---

---

---

---

---

---

c) Pour l'expression  $C = 9x^2 - 18x$ , Claire a proposé la factorisation suivante:  
 $9x^2 - 18x = x(9x - 18)$ . A-t-elle raison? Justifiez votre réponse.

---

---

---

---

---

---

---

d) Pour l'expression  $D = (x-3)(x+3) + (x+2)(x+3) + (x+2)(2x-1)$ , Didier a proposé la factorisation suivante :

$(x-3)(x+3) + (x+2)(x+3) + (x+2)(2x-1) = (x-3)(x+3) + (x+2)(3x+2)$ . A-t-il raison ? Justifiez votre réponse.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Question n°3

Résoudre, si possible, les équations suivantes:

a)  $4x^2 = 5x$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

b)  $(x+2)(x-3) = 0$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

$$c) (x+5)(x-3) = 1$$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

$$d) 49x^2 + 42x = -9$$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

$$e) (2x+3)(4x+2) + (7x-6)(2x+3) = 0$$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Question n°4

Calculez mentalement et expliquez vos résultats:

a)  $A = 105 \times 95$

b)  $B = 105^2 - 95^2$

[illegible]

### Question n°5

Soit  $E = (x-4)(2x+1) + (x^2-16)$

a) Développer et réduire E.

[illegible]

b) Factoriser E.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

c) Vous voulez résoudre l'équation  $(x-4)(2x+1)+(x^2-16)=0$ . Quelle écriture de E choisissez-vous ? Résolvez l'équation.

[illegible]

Vous voulez résoudre l'équation  $(x-4)(2x+1)+(x^2-16)=-20$ . Quelle écriture de E choisissez-vous? Résolvez l'équation.

[illegible]

### Question n° 6

Factorisez les expressions suivantes en justifiant vos réponses :

a)  $A = (2x+3)(x-2) + (x-2)$

---

---

---

---

---

---

b)  $B = (x+5)(x+3) + (3x+9)(3x-7)$

---

---

---

---

---

---

---

---

c)  $C = (2x+7)(x+3) - (x+3)^2$

---

---

---

---

---

---

---

---

Question n°7

D'après vous :

- a) Qu'est-ce factoriser une expression ?
- b) A quoi sert la factorisation?

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM

Vous pouvez soit :

- Consulter notre site WEB

<http://www.irem-paris7.fr.st/>

- Demander notre catalogue en écrivant à

**IREM Université Paris 7  
Case 7018  
2 Place Jussieu  
75251 Paris cedex 05**

**TITRE :**

Le rapport des élèves à la factorisation en fin de troisième

**AUTEUR :**

Caroline BARDINI

**RESUME :**

La factorisation polynomiale, notion introduite en classe de Quatrième, est reprise en Troisième où une place importante lui est accordée parmi les concepts algébriques étudiés. En effet, 84 % des exercices proposés sous le titre de « travaux numériques et gestion de données » du Brevet des Collège 2000 (soit 43 % de l'ensemble des exercices) présentent des problèmes de factorisation. Vu son importance dans les pratiques algébriques (surtout en fin de Collège) mais aussi vu les difficultés de son apprentissage, la factorisation a fait objet de diverses recherches en Didactique des Mathématiques et plus précisément en Didactique de l'Algèbre.

L'objectif de cette étude est, en prenant compte les écrits didactiques développés dans ce domaine, d'étudier le rapport à la factorisation, développé par les élèves français actuels en fin de Troisième. Ce travail repose sur une double analyse : celle du rapport institutionnel à la factorisation (à travers l'analyse des programmes officiels et de quelques manuels scolaires) et du rapport personnel (à travers l'analyse de quelques productions d'élèves). Les conclusions issues de ce travail sont sous-tendues par une analyse de travaux déjà parus en algèbre et plus précisément ceux relatifs à la factorisation, présentés dans la première partie de cet ouvrage. Il est plus particulièrement discuté dans ce travail l'absence de fonctionnalité (au sens de Chevallard) que présente la majorité des exercices de factorisation proposés aux élèves de Troisième, de même que le bas niveau de complexité, entraînant pour la plupart du temps une incapacité de la part élèves à résoudre des problèmes qui se veulent « inhabituels ».

**MOTS-CLES :**

Didactique – algèbre – factorisation – analyse institutionnelle

**Editeur : IREM**  
**Université PARIS 7-Denis Diderot**  
**Directeur responsable de la**  
**publication : M. ARTIGUE**  
**Case 7018 - 2 Place Jussieu**  
**75251 PARIS Cedex 05**  
**Dépôt légal : Février 2001**  
**ISBN : 2-86612-255-0**