DANS NOS CLASSES

La quadrature du cercle:

Pappus et la quadratrice d'Hippias

Martine Bühler

Jusqu'à l'année 1997-1998 incluse, le programme de terminale scientifique comprenait l'introduction de la notion de continuité et quelques résultats relatifs à cette notion. Tout ceci disparaît à la rentrée 1998, et on peut lire dans le B.O. hors série n°4 du 12 Juin 1997, page 17 : *« les fonctions étudiées dans le cadre du programme sont dérivables par intervalles. C'est donc au théorème des valeurs intermédiaires énoncé en classe de première que l'on se réfère, notamment pour résoudre une équation du type $f(x) = \lambda$ et pour définir une fonction réciproque. Ces divers travaux seront l'occasion de donner une première approche non formalisée d'une fonction continue sur un intervalle ou d'une fonction discontinue en un point. Mais la notion de continuité demeure en dehors des objectifs du programme. »*

Il nous faut donc, à travers les travaux que nous faisons faire à nos élèves, leur donner une idée de la notion de continuité et de son intérêt, et ce d'autant plus qu'ils en auront besoin pour leur études après le Baccalauréat. C'est dans cet esprit que nous avons élaboré le problème suivant lié à la quadrature du cercle ; il permet d'utiliser les courbes paramétrées (revenues en 1998 dans le giron du programme « obligatoire » de TS) et de faire comprendre la nécessité de prolonger une fonction par continuité pour le résoudre.

Les mathématiciens grecs, plus de trois siècles avant notre ère, s'intéressaient - entre autres - au problème de la quadrature du cercle : il s'agit, un cercle étant donné, de construire à la règle et au compas un carré de même aire que ce cercle. Le problème est entièrement géométrique mais on peut le formuler ainsi : un segment unité étant donné (le rayon du cercle), peut-on construire à la règle et au compas un carré dont l'aire a pour mesure π ? les mathématiciens grecs, tout comme leurs successeurs, échouèrent dans cette construction dont l'impossibilité ne fut prouvée qu'en 1882 ; cette longue quête a laissé des traces jusque dans notre vocabulaire, puisque l'expression «c'est la quadrature du cercle » est communément utilisée pour désigner une tâche très difficile, voire impossible à accomplir. Cependant, les grecs imaginèrent d'autres moyens de « quarrer le cercle », utilisant en particulier des courbes dites « mécaniques », que l'on ne peut tracer à la règle et au compas. C'est ce qu'explique Pappus dans le texte - extrait de la *Collection mathématique* que nous allons étudier.

Pappus d'Alexandrie (fin III^{ème} siècle- début IV^{ème} siècle) a écrit principalement la *Collection mathématique* qui comportait huit livres. Il s'agit d'une compilation de travaux de mathématiciens antérieurs - en particulier Euclide, Archimède, Apollonius, Ptolémée - enrichie de nombreux commentaires et résultats nouveaux. Bien que ne nous soient parvenus qu'une partie du livre II et les six derniers livres, ils nous sont un témoin précieux des mathématiques grecques.

I. Préliminaires sur les fonctions trigonométriques

On définit sur $\mathbb{R}^+$ la fonction φ par $\varphi(t) = \sin t - t + \frac{t^3}{6}$.

1°) Déterminer φ', φ'', φ'''.

2°) a) Etudier le signe de φ''' (t) pour $t \in \mathbb{R}^+$.

b) En déduire les variations de φ'' puis son signe sur $\mathbb{R}^+$.

3°) Etudier de même les variations puis le signe de φ' sur $\mathbb{R}^+$; enfin faites de même pour φ.

4°) En déduire les inégalités, pour $t \in \mathbb{R}^+$,

$$1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos t \leq 1$$
$$t - \frac{t^3}{6} \leq \sin t \leq t$$

5°) a) Rappeler $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin t}{t}$.

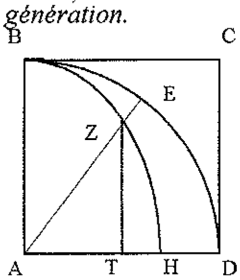
b) Montrer que pour $t \in]0,1]$, $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sin t} \leq \frac{1}{t}\left(1 + \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{30}\right)$.

c) Montrer que pour $t \in]0,1]$, $-\frac{t}{2} \leq \frac{\cos t}{\sin t} - \frac{1}{t} \leq \frac{t}{6} + \frac{t^3}{30}$ et en déduire $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} \left(\frac{\cos t}{\sin t} - \frac{1}{t}\right)$.

II. Définition de la quadratrice

1°) Lire le texte[3] suivant (les "droites" désignent, pour nous, des segments) :

Une ligne qui tire sa dénomination de sa propriété même a été adoptée par Dinostrate, Nicomède et certains autres auteurs récents pour effectuer la quadrature du cercle ; ils l'ont appelée la quadratrice, et voici sa génération.



Posons un carré ABCD et décrivons l'arc BED autour du centre A. Faisons mouvoir la droite AB de telle sorte que, le point A restant fixe, le point B se déplace suivant l'arc BED et que la droite BC, se maintenant toujours parallèle à la droite AD, accompagne le point B qui se déplace suivant la droite AB. De plus, que la droite AB, se mouvant d'une manière uniforme, parcoure l'angle compris sous les droites BA, AD, c'est-à-dire que le point B parcoure l'arc BED dans le même temps que la droite BC se déplace le long de la droite BA, c'est-à-dire que le point B se déplace suivant la droite BA.

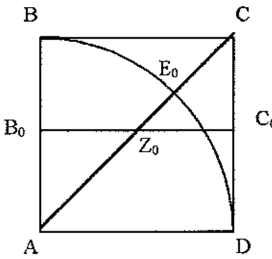
Il se fera évidemment que les droites AB et BC coïncideront simultanément l'une et l'autre avec la droite AD. En conséquence, un tel mouvement ayant lieu, les droites AB, BC se couperont mutuellement en un point qui est continuellement transporté avec elles, lequel décrira une ligne concave d'un même côté, telle que BZH, dans l'espace compris entre les droites BA, AD et l'arc BED ; ligne qui paraît commode pour trouver un carré équivalent à un cercle donné.

---

[3] PAPPUS d'Alexandrie, trad. P. VER EECKE, *La collection mathématique*, Blanchard, 1982, t. I, p. 191.
Dinostrate : géomètre grec, début du IV$^{\text{ème}}$ siècle av. J. C.. Proclus en parle comme d'un frère de Menechme, lui-même élève d'Eudoxe et de Platon. On pense qu'il fut le premier à utiliser la quadratrice pour la résolution de la quadrature du cercle.
Nicomède : géomètre grec, on ne sait rien de sa vie, il vécut aux environs de 250 av. J. C..

Commentaire : le segment [BC] se déplace d'un mouvement de translation uniforme parallèlement à (BA) et le segment [AB] d'un mouvement de rotation uniforme autour de A. Lorsque [BC] prend la position [AD], [AB] la prend également. A chaque instant, les deux segments se coupent en un point Z qui décrit donc une certaine courbe BZH

2°) Traçons quelques points.

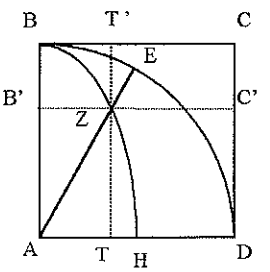


Les deux mouvements étant uniformes, les segments arrivent « à mi-parcours » en même temps ; donc [BC] prend la position [B_0C_0] (avec B_0 milieu de [AB]) en même temps que [AB] prend la position [AE_0] (où (AE_0) est la bissectrice de BAD). Le point Z_0 est donc un point de la quadratrice. Il en est de même pour le quart de parcours (avec B_1 milieu de [B_0B] et (AE_1) bissectrice de BAE_0), les trois-quarts de parcours, les huitièmes de parcours, etc. On peut donc placer une infinité de points de la quadratrice grâce à des bissections successives obtenues à la règle et au compas.

Tracer un carré ABCD ayant 16 cm de côté et placer 7 points de la quadratrice en appliquant la méthode expliquée ci-dessus.

Remarque : en utilisant la règle et le compas on peut placer autant de points que l'on veut par bissections successives ; mais on ne peut pas placer ainsi **tous** les points et donc la quadratrice **n'est pas** constructible à la règle et au compas.

3°) a) Lire la fin du paragraphe XXX.



Du reste, sa propriété principale est telle que, si une droite quelconque AZE est menée transversalement à l'arc, la droite BA sera à la droite ZT comme l'arc entier est à l'arc ED ; car cela résulte manifestement de la génération de la ligne.

b) Commentaire : Pappus énonce là que : $\frac{BA}{ZT} = \frac{\text{arc}(BD)}{\text{arc}(ED)}$, c'est-à-dire que le rapport de proportionnalité entre les longueurs BA et ZT est le même que celui entre les arcs BD et ED.

Justification : la construction précédente permet de comprendre que, si T désigne le temps de parcours de B jusqu'à D sur l'arc BD, et T' le temps de parcours jusqu'en E, alors : $\frac{\text{arc}(BD)}{\text{arc}(BE)} = \frac{T}{T'} = \frac{BA}{BB'}$.

En déduire : $\frac{BA}{ZT} = \frac{\text{arc}(BD)}{\text{arc}(ED)}$.

III. Etude de la quadratrice. Paramétrisation

Le plan est rapporté au repère orthonormal (A, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$). On note t la mesure en radians de l'angle DAZ, t appartenant à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et Z étant un point de la quadratrice.

Z a pour coordonnées (x(t), y(t)), dans le repère (A, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$).

1°) Trouver une relation entre x(t), y(t) et tan t.

2°) Déduire de II 3°) l'expression de y(t) en fonction de t, puis celle de x(t) à l'aide de t, cost, sint.

3°) Voyez-vous un problème apparaître ?

4°) Lire l'extrait suivant :

XXXI.

C'est à juste titre cependant que Sporos n'a pas agréé cette ligne [...]

Ensuite, l'extrémité de la ligne dont certains se servent pour la quadrature du cercle, c'est-à-dire le point où la ligne coupe la droite AD, n'est nullement trouvée. Représentons-nous d'ailleurs les choses que nous avons dites sur la délinéation proposée : lorsque les droites CB, BA mises en mouvement seront stabilisées simultanément, elles s'appliqueront sur la droite AD et ne feront plus section entre elles ; car, la section cesse avant l'application sur la droite AD ; section qui deviendrait, au contraire, l'extrémité de la ligne où celle-ci rencontrerait la droite AD ; à moins qu'on ne dise d'imaginer la ligne comme étant prolongée jusqu'à la droite DA de la manière dont nous établissons les lignes droites.

Commentaire : le problème posé par Pappus - et d'autres avant lui - est que, lorsque les segments [AB] et [BC] terminent leurs mouvements, ils sont tous les deux confondus avec [AD] et donc on ne peut plus déterminer Z.

Question : comment se traduit ce problème dans la paramétrisation de la quadratrice ?

Pappus explique qu'il faudrait « imaginer la ligne comme étant prolongée jusqu'à la droite DA ». Autrement dit, il faut prolonger la quadratrice par la « position-limite » qu'occuperait le point Z lorsque t tend vers 0. C'est ce que nous allons faire pour obtenir le point H.

5°) Déterminer $\ell = \lim_{t \to 0} x(t)$.

6°) On définit alors la fonction f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par :

$$\begin{cases} f(t) = \dfrac{2}{\pi} t \dfrac{\cos t}{\sin t} \text{ pour } t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ f(0) = \ell \end{cases}$$

La fonction f et la fonction x sont-elles les mêmes ou sont-elles différentes ? Pourquoi ?

Remarque : f, définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, coincide avec x sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et vérifie $f(0) = \lim\limits_{t \to 0} x(t)$. On dit que f est le « prolongement par continuité » de x en 0.

7°) La quadratrice Γ est alors définie de la manière suivante :

$$\text{pour } t \in [0, \frac{\pi}{2}],\ Z(t) \text{ a pour coordonnées : } \begin{cases} X(t) = f(t) \\ Y(t) = \dfrac{2}{\pi} t \end{cases}$$

a) Quel est le point de paramètre $\frac{\pi}{2}$?

b) Etablir le tableau des variations simultanées de X et Y sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

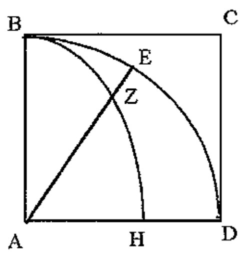
c) Déterminer la tangente à Γ au point de paramètre $\frac{\pi}{2}$.

d) f est-elle dérivable en 0 ? (**Attention** : il faut revenir à la définition de la dérivabilité d'une fonction en un point).

e) Quelles sont les coordonnées du point H de paramètre 0 ? Déterminer la tangente à Γ en ce point.

f) Terminer alors le tracé de la quadratrice commencé au II. 2°).

8°) a) Lire la proposition 26.



PROPOSITION 26.

Ayant un carré ABCD, l'arc BED décrit autour du centre A et la quadratrice BZH étant obtenue comme nous l'avons dit précédemment, il faut démontrer que la droite BA est à la droite AH comme l'arc DEB est à la droite BA.

b) Traduire la conclusion en termes d'égalité de rapports.

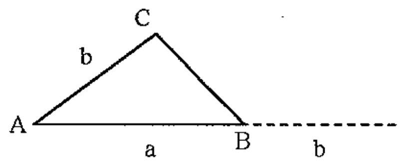
c) Dans le travail que vous avez fait précédemment, quel est le résultat équivalent à celui énoncé par Pappus ? (Vous expliquerez clairement la réponse).

Remarque : Pappus, lui, établit ce résultat en utilisant une méthode démonstrative assez technique, la méthode d'exhaustion ou encore méthode par double réduction à l'absurde. Cette méthode sera utilisée jusqu'au XVII$^{\text{ème}}$ siècle ; Pascal l'appelait « la méthode des Anciens ».

IV. Mais quel est donc le lien avec la quadrature du cercle ?

Soient deux nombres réels non nuls a et b. On appelle « troisième proportionnelle des nombres a et b » le nombre c tel que : $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$.

1°) Deux segments [AB] et [AC] de longueurs a et b étant donnés, construire la troisième proportionnelle de a et b.



2°) Lire la conclusion de la proposition 26 de Pappus , la justifier et la traduire en termes de rapports :

> *Et il est clair que la droite prise comme troisième proportionnelle des droites AH, AB sera égale à l'arc BED, et que le quadruple de cette droite sera égal à la circonférence du cercle entier.*

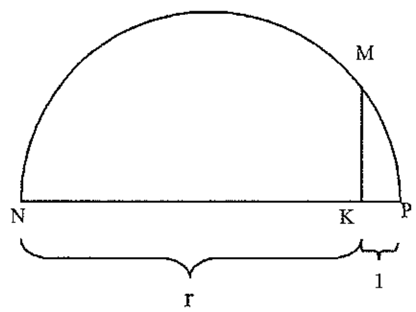
On peut donc construire la longueur de l'arc BED.

3°) Lire la proposition 27 :

> Proposition 27
>
> *Or, la droite égale à la circonférence du cercle étant trouvée, on voit clairement que l'on construira facilement le carré équivalent au cercle.*

Cette proposition affirme que si l'on sait « rectifier » le cercle (i.e. construire un segment ayant pour longueur le périmètre du cercle), alors on sait le « quarrer ».

Expliquer comment on peut construire à la règle et au compas un carré d'aire r, un segment de longueur unité et un segment de longueur r étant donnés.

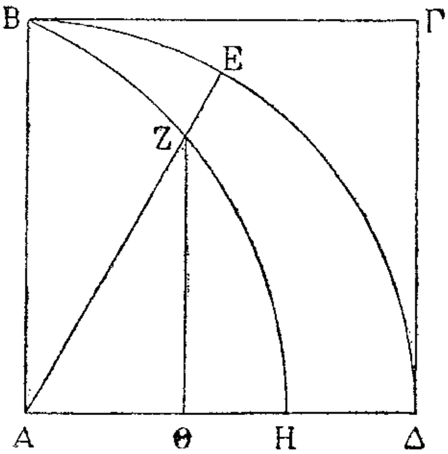


Calculez MK.

XXX.

Une ligne qui tire sa dénomination de sa propriété même a été adoptée par Dinostrate, Nicomède et certains autres auteurs récents pour effectuer la quadrature du cercle ; ils l'ont appelée la quadratrice (1), et voici sa génération.

Posons un carré ΑΒΓΔ et décrivons l'arc ΒΕΔ autour du centre Α. Faisons mouvoir la droite ΑΒ de telle sorte que, le point Α restant fixe, le point Β se déplace suivant l'arc ΒΕΔ, et que la droite ΒΓ, se maintenant toujours parallèle à la droite ΑΔ, accompagne le point Β qui se déplace suivant la droite ΑΒ. De plus, que la droite ΑΒ, se mouvant d'une manière uniforme, parcoure l'angle compris sous les droites ΒΑ, ΑΔ, c'est-à-dire que le point Β parcoure l'arc ΒΕΔ dans le même temps que la droite ΒΓ se déplace le long de la droite ΒΑ, c'est-à-dire que le point Β se déplace suivant la droite ΒΑ. Il se fera évidemment que les droites ΑΒ et ΒΓ coïncideront simultanément l'une et l'autre avec la droite ΑΔ. En conséquence, un tel mouvement ayant lieu, les droites ΑΒ, ΒΓ se couperont mutuellement en un point qui est continuellement transporté avec elles, lequel décrira une ligne concave d'un même côté, telle que ΒΖΗ, dans l'espace compris entre les droites ΒΑ, ΑΔ et l'arc ΒΕΔ ; ligne qui paraît commode pour trouver un carré équivalent à un cercle donné. Du reste, sa propriété principale est telle que, si une droite quelconque ΑΖΕ est menée transversalement à l'arc, la droite ΒΑ sera à la droite ΖΘ comme l'arc entier est à l'arc ΕΔ ; car cela résulte manifestement de la génération de la ligne (2).



1. τετραγωνίζουσα γραμμή, la ligne tétragonisante ou quadratrice.

2. Le texte exprime d'une manière un peu confuse que, si une droite ΒΓ se meut uniformément et parallèlement à elle-même le long du rayon ΑΒ et, qu'en même temps qu'elle part du point Β, le rayon ΒΑ tourne uniformément autour du centre Α, vers le point Δ, de manière qu'il se confonde avec ΑΔ au moment où la droite ΒΓ s'y confondra aussi, on aura, par l'intersection continuelle de ces deux lignes, une courbe ΒΖΗ, appelée quadratrice de Dinostrate, mais dont l'invention remonte probablement au sophiste Hippias d'Elis qui vécut dans la seconde moitié du cinquième siècle avant J.-C. L'équation cartésienne de

PAPPUS D'Alexandrie, trad. P.VER EECKE, La collection mathématique, Blanchard, t.I, p.191–196.

XXXI.

C'est à juste titre cependant, que Sporos [1] n'a pas agréé cette ligne, parce qu'on y assume d'abord comme hypothèse ce à quoi elle semble pouvoir être utilisée [2].

En effet, si deux points commencent à se mouvoir à partir du point B, comment pourront-ils se stabiliser en même temps, l'un au point A suivant une droite, l'autre au point Δ suivant un arc, sans connaître au préalable le rapport de la droite AB à l'arc BEΔ ? [3] Car, il faut nécessairement que les vitesses des mouvements soient dans le même rapport. Dès qu'on use de vitesses non ordonnées, comment ces points se stabiliseront-ils ainsi simultanément, à moins que cela n'arrive par hasard ? Or, cela n'est-il pas déraisonnable ? Ensuite, l'extrémité de la ligne dont certains se servent pour la quadrature du cercle, c'est-à-dire le point où la ligne coupe la droite AΔ, n'est nullement trouvée. Représentons-nous d'ailleurs les choses que nous avons dites sur la délinéation proposée : Lorsque les droites ΓB, BA mises en mouvement seront stabilisées simultanément [4], elles s'appliqueront sur la droite AΔ et ne feront plus de section entre elles ; car,

---

cette courbe est: $x = \frac{y}{\text{tang.}\, \frac{\pi}{2}\frac{y}{r}}$; mais son équation polaire: $\rho \sin \varphi = R \frac{\varphi}{\frac{1}{2}\pi}$ est l'expression la plus simple qui corresponde à la définition qui en est donnée par Pappus.

1. Sporos de Nicée est mentionné comme commentateur (Σπόρος ὁ ὑπομνηματιστής) par quelques auteurs, notamment dans le petit traité : *Sur la Sphère d'Aratus*, dû au mécanicien Léontius, au sixième siècle après J.-C. Paul Tannery a cherché à établir l'existence d'une compilation intitulée : *Le Rucher Aristotélique* (Ἀριστοτελικὰ κηρία) qui aurait été composée par Sporos vers la fin du troisième siècle après J.-C., laquelle contenait des extraits mathématiques sur la quadrature du cercle et sur la duplication du cube, et a pu être utilisée par Pappus. Voir : PAUL TANNEY, *Sur Sporos de Nicée*, dans *Archives de la Faculté des Lettres de Bordeaux*, n° 3, 1882, t. IV, pp. 257-267, ou bien : *Mémoires scientifiques de Paul Tannery*, vol. I, pp. 178-184.

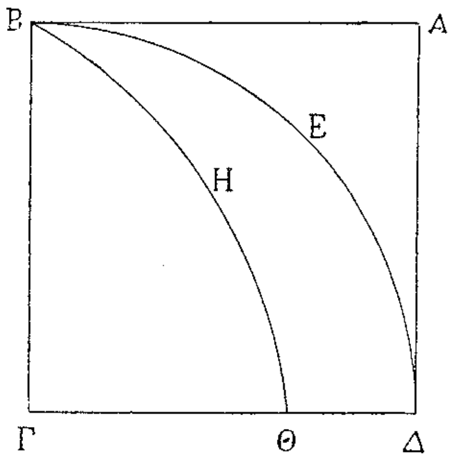
2. Si l'on pose : $y = 0$ dans l'équation cartésienne de la note avant-précédente, on a : $x = AH = \frac{2AB}{\pi}$, d'où : $\pi = \frac{2AB}{AH}$. La critique de Sporos vise la difficulté de calculer π au moyen d'un rapport en l'absence d'un procédé mécanique permettant de tracer la courbe d'un mouvement continu, et de déterminer par conséquent le point H.

3. C'est-à-dire sans connaître le rapport de la circonférence au rayon.

4. C'est-à-dire lorsque les droites ΓB, BA seront arrivées en fin de course.

la section cesse avant l'application sur la droite ΑΔ ; section qui deviendrait, au contraire (1), l'extrémité de la ligne où celle-ci rencontrerait la droite ΑΔ ; à moins qu'on ne dise d'imaginer la ligne comme étant prolongée jusqu'à la droite ΔΑ de la manière dont nous établissons les lignes droites (2). Or, cela ne répond pas à ce qui a été supposé au début, notamment que le point Η soit pris en ayant pris au préalable le rapport de l'arc à la droite. D'ailleurs, à moins que ce rapport ne soit donné, il ne convient pas que, se confiant à la réputation des hommes qui l'ont inventée, l'on admette une ligne qui soit en quelque sorte trop mécanique [et utile aux mécaniciens pour beaucoup de problèmes] (3). Mais, exposons d'abord le problème qui se démontre au moyen de cette ligne (4).

Proposition 26. — Ayant un carré ΑΒΓΔ, l'arc ΒΕΔ décrit autour du centre Γ et la quadratrice ΒΗΘ étant obtenue comme nous l'avons dit précédemment, il faut démontrer que la droite ΒΓ est à la droite ΓΘ comme l'arc ΔΕΒ est à la droite ΒΓ.

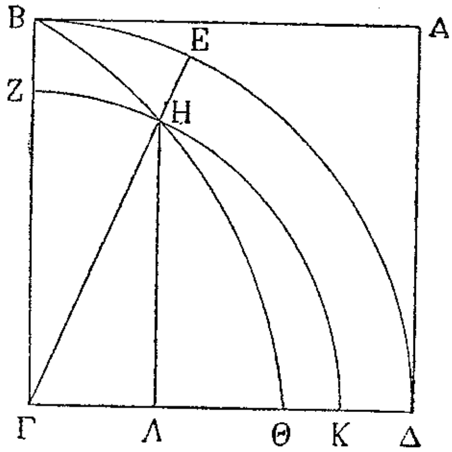


En effet, s'il n'en est pas ainsi, la droite ΒΓ sera à une droite plus grande ou plus petite que la droite ΓΘ (5).

Qu'elle soit d'abord, si possible, à une droite plus grande ΓΚ. Décrivons, autour du centre Γ, l'arc ΖΗΚ qui coupe la ligne (6) au point Η ; menons la perpen-

1. C'est-à-dire d'après les protagonistes de la quadratrice.
2. C'est-à-dire à moins de considérer la ligne courbe comme étant prolongée à partir du dernier point de section de la même manière que l'on prolonge une ligne droite.
3. Hultsch considère ce membre de phrase comme ayant été interpolé (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 254, l. 24). S'il s'agit cependant d'une interpolation très ancienne, la phrase peut avoir été puisée dans l'ouvrage de Sporus, et indiquer que des équerres en forme de quadratrices étaient utilisées dans la pratique.
4. Voir le problème dont il est question au début du chap. XXX.
5. Sous-entendu : comme l'arc ΔΕΒ est à la droite ΒΓ.
6. C'est-à-dire la quadratrice ΒΗΘ.

diculaire HΛ et prolongeons la droite de jonction ΓH jusqu'au point E. Dès lors, puisque la droite BΓ, c'est-à-dire la droite ΓΔ, est à la droite ΓK comme l'arc ΔEB est à la droite BΓ (1), et que l'arc BEΔ est à l'arc ZHK comme la droite ΓΔ est à la droite ΓK (car une circonférence de cercle est à une circonférence comme le diamètre de ce cercle est au diamètre) (2), il est clair que l'arc ZHK est égal à la droite BΓ. Et puisque, en raison de la propriété de la ligne, la droite BΓ est à la droite HΛ comme l'arc BEΔ est à l'arc EΔ, il s'ensuit que la droite BΓ est aussi à la droite HΛ comme



l'arc ZHK est à l'arc HK. Or, on a démontré que l'arc ZHK est égal à la droite BΓ ; donc, l'arc HK est aussi égal à la droite HΛ ; ce qui est absurde. En conséquence, la droite BΓ n'est pas à une droite plus grande que la droite ΓΘ comme l'arc BEΔ est à la droite BΓ (3).

XXXII.

Mais, je dis qu'elle n'est pas non plus à une droite plus petite (4).

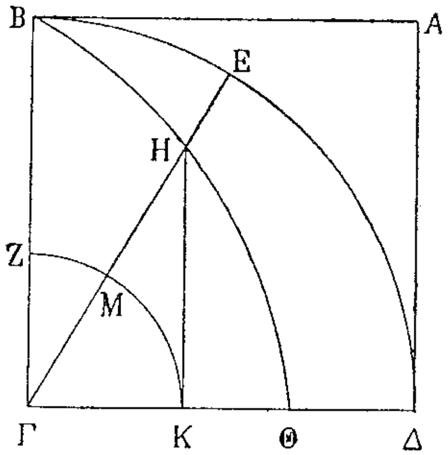
1. Par hypothèse.

2. Théorème démontré par Euclide, dont Pappus donnera deux démonstrations à sa manière, l'une à la proposition 11 du livre V, l'autre à la proposition 22 du livre VIII ; et il admet donc ici tacitement que les arcs qui mesurent des angles égaux sont entre eux comme les rayons des cercles auxquels ils appartiennent.

3. Cette démonstration apagogique se déroule comme suit. On a, par hypothèse : $\frac{B\Gamma}{\Gamma K > \Gamma\Theta} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma K} = \frac{\text{arc } \Delta EB}{B\Gamma}$. Or, $\frac{\text{arc } \Delta EB}{\text{arc } ZHK} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma K}$; donc : $\frac{\text{arc } \Delta EB}{\text{arc } ZHK} = \frac{\text{arc } \Delta EB}{B\Gamma}$, d'où : arc ZHK = droite BΓ. Or, la propriété de la quadratrice (voir chap. XXX, *in fine*) donne : $\frac{B\Gamma}{H\Lambda} = \frac{\text{arc } BE\Delta}{\text{arc } E\Delta}$, tandis que l'on a : $\frac{\text{arc } BE\Delta}{\text{arc } E\Delta} = \frac{\text{arc } ZHK}{\text{arc } HK}$; donc : $\frac{B\Gamma}{H\Lambda} = \frac{\text{arc } ZHK}{\text{arc } HK}$; d'où en présence de l'égalité : arc ZHK = BΓ, il vient : arc HK = droite HΛ ; ce qui est impossible.

4. C'est-à-dire que l'on n'a pas non plus : $\frac{B\Gamma}{K\Gamma < \Gamma\Theta} = \frac{\text{arc } BE\Delta.}{\text{droite } B\Gamma}$

En effet, qu'elle soit, si possible, à une droite ΚΓ. Décrivons l'arc ΖΜΚ autour du centre Γ ; menons, à angles droits sur la droite ΓΔ, la droite ΚΗ qui coupe la quadratrice au point Η, et prolongeons la droite de jonction ΓΗ jusqu'au point Ε. Dès lors, pareillement à ce que nous avons écrit précédemment, nous démontrerons que l'arc ΖΜΚ est égal à la droite ΒΓ, et que la droite ΒΓ est à la droite ΗΚ comme l'arc ΒΕΔ est à l'arc ΕΔ, c'est-à-dire comme l'arc ΖΜΚ est à l'arc ΜΚ. D'après cela, il est clair que l'arc ΜΚ sera égal à la droite ΚΗ ; ce qui est absurde. En conséquence, la droite ΒΓ ne sera pas à une droite plus petite que la droite ΓΘ comme l'arc ΒΕΔ est à la droite ΒΓ (1). Or, on a démontré qu'elle n'est pas à une droite plus grande ; donc, elle est à la droite ΓΘ même.



Et il est clair aussi que la droite prise comme troisième proportionnelle des droites ΘΓ, ΓΒ sera égale à l'arc ΒΕΔ, et que le quadruple de cette droite sera égal à la circonférence du cercle entier.

PROPOSITION 27. — Or, la droite égale à la circonférence du cercle étant trouvée, on voit clairement que l'on construira facilement le carré équivalent au cercle.

En effet, le rectangle compris sous le périmètre du cercle et le rayon est le double du cercle, comme Archimède l'a démontré (2).

---

1. Cette démonstration apagogique se déroule comme dans la note avant-précédente.
2. Pappus énonce en d'autres termes la proposition I du traité *De la Mesure du Cercle* d'Archimède : « Tout cercle équivaut au triangle rectangle pour lequel on a le rayon égal à l'un des côtés adjacents à l'angle droit et le périmètre égal à la base ». Voir *Œuvres d'Archimède*, trad. de P. Ver Eecke, p. 127.