

DE LA RESOLUTION DES EQUATIONS ALGEBRIQUES A L'EMERGENCE DU CONCEPT DE GROUPE

Martine Bühler

En 1770 et 1771, Lagrange publie dans les *Mémoires de L'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres* de Berlin un important mémoire intitulé *Réflexions sur la résolution algébrique des équations*. Il s'y interroge sur l'échec des mathématiciens dans la résolution des équations de degré supérieur ou égal à 5. La voie semblait pourtant tracée à partir des remarquables succès de Cardan (*Ars Magna* 1545) et Ferrari pour les degrés 3 et 4, qui avaient jusque-là résisté aux efforts. Lagrange ne cherche pas de nouvelles méthodes de résolution : il s'interroge sur les raisons pour lesquelles les méthodes efficaces pour les degrés trois et quatre sont inopérantes pour des degrés plus élevés. Cet article a pour objectif d'étudier en détail de larges extraits du mémoire de Lagrange. Il doit beaucoup au travail remarquable effectué par J.P. Friedelmeyer et je conseille vivement aux lectrices et aux lecteurs que le sujet intéresse de lire la brochure de l'A.P.M.E.P. *Fragments d'histoire des mathématiques III "Emergence du concept de groupe"*, à laquelle j'ai d'ailleurs emprunté le titre de l'atelier. Elles ou ils y trouveront un exposé éclairant et complet de l'histoire de la résolution des équations. Mon objectif ici, plus modeste, est de faire comprendre les idées de Lagrange, en espérant que la lectrice ou le lecteur y trouvera le même plaisir que moi.

Comme Lagrange, nous considérerons que nous savons résoudre une équation polynomiale si des changements de variables ramènent cette résolution à celles d'équations "binômes" du type $Y^n = \alpha$ ou à des équations de degré inférieur déjà "résolues", sans nous poser de questions sur l'extraction algébrique d'une racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre α qui peut être complexe. C'est bien un tel changement de variable qui permet de résoudre la toute simple équation de degré 2 :

$$x^2 + bx + c = 0$$
$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} - c$$

En posant $X = x + \frac{b}{2}$, on se ramène à une équation binôme.

L'introduction du texte présente les progrès de l'algèbre au dix-huitième siècle, mais aussi ses limites.

La théorie des équations est de toutes les parties de l'Analyse celle qu'on eût cru devoir acquérir les plus grands degrés de perfection et par son importance et par la rapidité des progrès que les premiers inventeurs y ont fait ; mais quoique les Géomètres qui sont venus depuis n'aient cessé de s'y appliquer, il s'en faut de beaucoup que leurs efforts aient eu le succès qu'on pouvait désirer. On a à la vérité épuisé presque tout ce qui concerne la nature des équations, leur transformation, les conditions nécessaires pour que deux ou plusieurs racines deviennent égales, ou aient entre elles une relation donnée, et la manière de trouver ces racines, la forme des racines imaginaires, et la méthode de trouver la valeur de celles qui, quoique réelles, se présentent sous une forme imaginaire, etc.

...

A l'égard de la résolution des équations littérales, on n'est guère plus avancé qu'on ne l'était du temps de Cardan, qui le premier a publié celle des équations du troisième et du quatrième degré. Les premiers succès des Analystes italiens dans cette matière paraissent avoir été le terme des découvertes qu'on y pouvait faire ; du moins est-il certain que toutes les tentatives qu'on a faites jusqu'à présent pour reculer les limites de cette partie de l'Algèbre n'ont encore servi qu'à trouver de nouvelles méthodes pour les équations du troisième et du quatrième degré, dont aucune ne paraît applicable, en général, aux équations d'un degré plus élevé.

Je me propose dans ce Mémoire d'examiner les différentes méthodes que l'on a trouvées jusqu'à présent pour la résolution algébrique des équations, de les réduire à des principes généraux, et de faire voir à priori pourquoi ces méthodes réussissent pour le troisième et le quatrième degré, et sont en défaut pour les degrés ultérieurs.

Cet examen aura un double avantage : d'un côté il servira à répandre une plus grande lumière sur les résolutions connues du troisième et du quatrième degré ; de l'autre il sera utile à ceux qui voudront s'occuper de la résolution des degrés supérieurs, en leur fournissant différentes vues pour cet objet et en leur épargnant surtout un grand nombre de pas et de tentatives inutiles.

L'idée fondamentale de Lagrange est que, pour progresser désormais, il ne faut pas chercher des méthodes nouvelles mais commencer par s'interroger sur les méthodes efficaces pour les équations du troisième et du quatrième degré. POURQUOI les changements de variables utilisés dans la résolution de ces équations permettent-ils de résoudre, d'abaisser le degré des équations proposées ? Lagrange effectue ce travail pour toutes les méthodes connues à l'époque ; nous nous contenterons d'examiner en détail la méthode "de Cardan" pour le troisième degré et celle "de Ferrari" pour le quatrième degré, afin de comprendre quelle est la raison profonde de l'efficacité de ces méthodes.

1. Comme la résolution des équations du second degré est très facile et n'est d'ailleurs remarquable que par son extrême simplicité, j'entrerai d'abord en matière par les équations du troisième degré, lesquelles demandent pour être résolues des artifices particuliers qui ne se présentent pas naturellement.

Soit donc l'équation générale du troisième degré

$$x^3 + mx^2 + nx + p = 0 ,$$

et comme on sait qu'on peut toujours faire disparaître le second terme de toute équation en augmentant ses racines du coefficient du second terme divisé par l'exposant du premier, on pourra supposer d'abord, pour plus de simplicité, $m = 0$, ce qui réduira la proposée à la forme

$$x^3 + nx + p = 0.$$

C'est dans cet état que les équations du troisième degré ont été d'abord traitées par Scipio Ferreo et par Tartalea, à qui l'on doit leur résolution ; mais on ignore le chemin qui les y a conduits. La méthode la plus naturelle pour y parvenir me paraît être celle que Hudde a imaginée, et qui consiste à représenter la racine par la somme de deux indéterminées qui permettent de partager l'équation en deux parties propres à faire en sorte que les indéterminées ne dépendent que d'une équation résoluble à la manière de celles du second degré.

Suivant cette méthode on fera donc $x = y + z$, ce qui étant substitué dans la proposée la réduira à celle-ci

$$y^3 + 3y^2z + z^3 + n(y + z) + p = 0,$$

qu'on peut mettre sous cette forme plus simple

$$y^3 + z^3 + (y + z)(3yz + n) + p = 0.$$

Qu'on fasse maintenant ces deux équations séparées

$$y^3 + z^3 + p = 0$$

$$3yz + n = 0$$

on aura

$$z = -\frac{n}{3y}$$

et, substituant dans la première,

$$y^3 - \frac{n^3}{27y^3} + p = 0,$$

c'est-à-dire

$$y^6 + py^3 - \frac{n^3}{27} = 0.$$

Cette équation est à la vérité du sixième degré, mais comme elle ne renferme que deux différentes puissances de l'inconnue, dont l'une a un exposant double de celui de l'autre, il est clair qu'elle peut se résoudre comme celles du second degré. En effet, on aura d'abord

$$y^3 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + \frac{n^3}{27}}$$

et de là

$$y = \sqrt[3]{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + \frac{n^3}{27}}}.$$

Ainsi l'on connaîtra y et z , et de là, on aura

$$x = y + z = y - \frac{n}{3y}$$

2. Il se présente différentes remarques à faire sur cette solution. D'abord il est clair que la quantité y doit avoir six valeurs, puisqu'elle dépend d'une équation du sixième degré ; de sorte que la quantité x aura aussi six valeurs ; mais comme la quantité x est la racine d'une équation du troisième degré, on sait qu'elle ne peut avoir que trois valeurs différentes ; donc il faudra que les six valeurs dont il s'agit se réduisent à trois, dont chacune soit double. C'est aussi de quoi on peut se convaincre par le calcul, en éliminant y des deux équations

$$y^6 + py^3 - \frac{n^3}{27} = 0, x = y - \frac{n}{3y}$$

Le calcul aboutit alors à $(x^3 + nx + p)^2 = 0$

C'est pourquoi x prend "six valeurs qui se réduisent à trois".

On peut également voir comment les six valeurs de x se groupent deux par deux en examinant de plus près la façon dont on les obtient. y étant une racine de $y^6 + py^3 - \frac{n^3}{27} = 0$ (1), on obtient une solution x de l'équation initiale (E) par : $x = y - \frac{n}{3y}$. Or, si y est solution de (1), $z = -\frac{n}{3y}$ en est une autre car

$$\left(-\frac{n}{3y}\right)^6 + p\left(-\frac{n}{3y}\right)^3 - \frac{n^3}{27} = \left(-\frac{n}{3y}\right)^3 \times \frac{1}{y^3} \left[\left(-\frac{n}{3}\right)^3 + py^3 + y^6\right] = 0. \text{ On obtient alors comme solution de (E)}$$

$$z - \frac{n}{3z} = -\frac{n}{3y} - \frac{n}{3\left(-\frac{n}{3y}\right)} = y - \frac{n}{3y}, \text{ c'est-à-dire la même solution que précédemment. Mais Lagrange ne}$$

s'arrête pas là.

5. L'équation du sixième degré

$$y^6 + py^3 - \frac{n^3}{27} = 0$$

s'appelle la réduite du troisième degré, parce que c'est à sa résolution que se réduit celle de la proposée $x^3 + nx + p = 0$.

Or nous avons déjà vu plus haut comment les racines de cette dernière équation dépendent des racines de celle-là ; voyons réciproquement comment les racines de la réduite dépendent de celles de la proposée.

$$\text{Soit } y = \sqrt[3]{-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + \frac{n^3}{27}}}$$

Les autres racines de la réduite sont, avec les notations de Lagrange,

$$y' = \alpha y, y'' = \beta y, z = -\frac{n}{3y}, z' = -\frac{n}{3y'}, z'' = -\frac{n}{3y''} \text{ où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont les racines cubiques de l'unité différentes de 1.}$$

Les trois racines de la proposée sont alors : $a = y - \frac{n}{3y}$, $b = y' - \frac{n}{3y'} = \alpha y - \frac{n}{3\alpha y}$, $c = y'' - \frac{n}{3y''} = \beta y - \frac{n}{3\beta y}$.

Le calcul de $a-b$ et $a-c$ et l'élimination de $\frac{n}{3y}$ entre les expressions obtenues donne : $y = \frac{a + \beta b + \alpha c}{3}$.

Lagrange échange alors les rôles de α et β (il n'a jamais précisé lequel était $e^{\frac{2i\pi}{3}}$) et obtient :

$$y = \frac{a + \alpha b + \beta c}{3}.$$

6. On voit d'abord par cette expression de y pourquoi la réduite est nécessairement du sixième degré ; car comme cette réduite ne dépend pas immédiatement des racines a, b, c de la proposée, mais seulement des coefficients m, n, p , où les trois racines entrent également, il est clair que dans l'expression de y on doit pouvoir échanger à volonté les quantités a, b, c entre elles ; par conséquent la quantité y devra avoir autant de valeurs différentes que l'on pourra en former par toutes les permutations possibles dont les trois racines a, b, c sont susceptibles ; or on sait par la théorie des combinaisons que le nombre des permutations, c'est-à-dire des arrangements différents de trois choses, est 3.2.1 ; donc la réduite en y doit être aussi du degré 3.2.1., c'est-à-dire du sixième.

Il y a plus : la même expression de y montre aussi pourquoi la réduite est résoluble à la manière des équations du second degré ; car il est clair que cela vient de ce que cette équation ne renferme que les puissances y^3 et y^6 , c'est-à-dire des puissances dont les exposants sont multiples de 3 ; en sorte que, si r est une des valeurs de y , il faut que αr et βr en soient aussi à cause de $\alpha^3 = 1$ et $\beta^3 = 1$; or c'est ce qui a lieu dans l'expression de y trouvée ci-dessus. Pour le faire voir plus aisément nous remarquerons que $\beta = \alpha^2$, car, puisqu'on a $\alpha\beta = 1$ et $\alpha^3 - 1 = 0$, on aura aussi $\alpha\beta = \alpha^3$, et de là $\beta = \alpha^2$; de sorte que l'expression de y pourra se mettre sous cette forme

$$y = \frac{a + \alpha b + \alpha^2 c}{3}.$$

d'où, en faisant toutes les permutations possibles des quantités a, b, c , on tire les six valeurs suivantes

$$y = \frac{a + \alpha b + \alpha^2 c}{3}$$

$$y = \frac{a + \alpha c + \alpha^2 b}{3}$$

$$y = \frac{b + \alpha a + \alpha^2 c}{3}$$

$$y = \frac{b + \alpha c + \alpha^2 a}{3}$$

$$y = \frac{c + \alpha b + \alpha^2 a}{3}$$

$$y = \frac{c + \alpha a + \alpha^2 b}{3},$$

qui seront les six racines de la réduite. Maintenant si l'on multiplie la première par α , et ensuite par β ou par α^2 , on aura, à cause de $\alpha^3 = 1$, ces deux-ci $y = \frac{c + \alpha a + \alpha^2 b}{3}$ et $y = \frac{b + \alpha c + \alpha^2 a}{3}$, qui sont la sixième et la quatrième ; et si l'on multiplie de même la seconde par α et par α^2 , on aura $y = \frac{b + \alpha a + \alpha^2 c}{3}$ et $y = \frac{c + \alpha b + \alpha^2 a}{3}$, qui sont la troisième et la cinquième. Il en sera de même si l'on multiplie la troisième et la quatrième, ou la cinquième et la sixième par α et par α^2 , car on aura par là également toutes les autres.

Ainsi donc on comprend pourquoi le changement de variable proposée mène à une réduite qu'on sait résoudre ; en fait, on a augmenté le degré de l'équation, passé de 3 à 6, mais seules les puissances 3 et 6 de y intervenant, on peut résoudre cette réduite à la manière d'une équation du second degré. En analysant les autres méthodes connues pour résoudre les équations du troisième degré, Lagrange s'aperçoit qu'elles reviennent toutes à prendre comme nouvelle inconnue, soit $y = a + \alpha b + \alpha^2 c$,

soit $y^3 = (a + \alpha b + \alpha^2 c)^3$ (ou des quantités proportionnelles à celles-ci). Il conclut (avec un changement de notations: les trois racines a, b, c de la proposée deviennent x', x'', x''') :

20. Telles sont les principales méthodes qu'on a trouvées jusqu'à présent pour résoudre les équations du troisième degré. Par l'analyse que nous venons d'en faire il est visible que ces méthodes reviennent toutes au même pour le fond, puisqu'elles consistent à trouver des réduites dont les racines soient représentées en général par $x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''$, ou par $(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')^3$, ou bien, ce qui est la même chose, par des quantités proportionnelles à celles-ci. Dans le cas où la racine de la réduite est $x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''$, cette réduite est du sixième degré, résoluble à la manière du second parce qu'elle ne renferme que la troisième et la sixième puissance de l'inconnue. Nous en avons donné la raison dans le numéro 6. Dans l'autre cas, où la racine de la réduite est $(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')^3$, cette réduite ne peut être que du second degré, ce qui suit nécessairement du cas précédent, et que nous avons aussi démontré d'une manière directe.

Il faut bien comprendre l'intérêt de cette remarque de Lagrange. Faire un changement de variable, c'est poser $y = f(x', x'', x''')$ où f est une fonction rationnelle des trois racines, à coefficients s'exprimant rationnellement à l'aide des coefficients n et p de l'équation de départ. Lorsqu'on effectue les six permutations possibles des trois racines x', x'', x''' , y prend a priori six valeurs $y_1 = y; y_2; y_3; y_4; y_5; y_6$. Ces six valeurs sont solutions d'une équation du sixième degré dont on sait calculer les coefficients à l'aide de n et p car ces coefficients sont au signe près les fonctions symétriques élémentaires de $y_1; y_2; y_3; y_4; y_5; y_6$, qui sont invariantes par toutes les permutations de x', x'', x''' (étant donnée la génération des y_i) ; ces coefficients, fonctions symétriques de x', x'', x''' , s'expriment donc rationnellement à l'aide des fonctions symétriques élémentaires de x', x'', x''' donc de n et p . Or que se passe-t-il si on choisit $y = (x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')^3$? Cette fois, y

ne prend que deux valeurs y_1, y_2 lorsqu'on effectue les six permutations possibles des trois racines x', x'', x''' , car les six valeurs de $x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''$ sont du type $z, \alpha z, \alpha^2 z, z', \alpha z', \alpha^2 z'$ et $(\alpha^2)^3 = \alpha^3 = 1$. Donc $y_1 + y_2$ et $y_1 y_2$ sont des fonctions symétriques des racines et s'expriment à l'aide de n et p . Donc y est solution d'une équation du second degré puis on obtient la valeur de $x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''$ en résolvant une équation binôme du type $Y^3 = y$. La méthode permet de trouver ensuite x', x'', x''' car ces trois nombres s'expriment à l'aide de Y . Nous reviendrons sur ce point plus loin avec Lagrange.

La section seconde du mémoire est consacrée à l'examen des méthodes de résolution des équations du quatrième degré.

26. On sait que Louis Ferrari, contemporain et même disciple de Cardan, est le premier qui ait trouvé une règle générale pour la résolution des équations du quatrième degré. Sa méthode consiste à partager l'équation en deux membres, et à ajouter à l'un et à l'autre une même quantité telle, qu'on puisse extraire séparément la racine carrée des deux membres de l'équation, en sorte qu'elle soit par là abaissée au second degré.

...

Je suppose d'abord avec Ferrari que l'équation du quatrième degré qu'il s'agit de résoudre soit privée de son second terme, ce qu'on sait d'ailleurs être toujours possible, en sorte que cette équation soit représentée ainsi

$$x^4 + nx^2 + px + q = 0.$$

Qu'on fasse passer dans le second membre tous les termes excepté le premier, et qu'ensuite on ajoute à l'un et l'autre membre la quantité $2yx^2 + y^2$, y étant une indéterminée, on aura

$$x^4 + 2yx^2 + y^2 = (2y - n)x^2 - px + y^2 - q,$$

équation où le premier membre est évidemment le carré de $x^2 + y$, de sorte qu'il ne s'agira plus que de rendre aussi carré le second ; or pour cela il faut, comme on sait, que le carré de la moitié du coefficient du second terme $-px$ soit égal au produit des coefficients des deux autres, ce qui donne cette condition

$$\frac{p^2}{4} = (2y - n)(y^2 - q),$$

laquelle produit l'équation cubique

$$y^3 - \frac{n}{2}y^2 - qy + \frac{4nq - p^2}{8} = 0.$$

Supposant donc la résolution de cette équation en sorte qu'on connaisse une valeur de y , le second membre de la proposée deviendra

$$(2y - n) \left[x - \frac{p}{2(2y - n)} \right]^2 ;$$

donc, tirant la racine carrée des deux membres, on aura

$$x^2 + y = \left[x - \frac{p}{2(2y-n)} \right] \sqrt{2y-n},$$

équation où l'inconnue x ne monte qu'au second degré, et qui n'a par conséquent plus de difficulté.

De la même manière que pour l'équation du troisième degré, Lagrange veut éclaircir les raisons qui rendent le changement de variable efficace. Pourquoi y est-elle solution d'une équation du troisième degré ? Pour cela, nous allons exprimer y à l'aide des quatre racines a, b, c, d de l'équation de départ (E) $x^4 + nx^2 + px + q = 0$. Pour le "bon choix" de y indiqué par Lagrange, on a :

$$(x^2 + y)^2 = \left[x - \frac{p}{2(2y-n)} \right]^2 (2y-n), \text{ c'est-à-dire}$$

$$\left[x^2 + y + \left[x - \frac{p}{2(2y-n)} \right] \sqrt{2y-n} \right] \left[x^2 + y - \left[x - \frac{p}{2(2y-n)} \right] \sqrt{2y-n} \right] = 0 \text{ équivalente à}$$

$$(1) \ x^2 + y + \left[x - \frac{p}{2(2y-n)} \right] \sqrt{2y-n} = 0 \text{ ou } (2) \ x^2 + y - \left[x - \frac{p}{2(2y-n)} \right] \sqrt{2y-n} = 0.$$

Donc parmi les racines a, b, c, d de (E), deux (par exemple a et b) sont racines de (1) et les deux autres (c et d) de (2). Dans les deux cas, on peut obtenir la somme et le produit des racines :

$$\begin{aligned} a+b &= -\sqrt{2y-n} & c+d &= +\sqrt{2y-n} \\ ab &= y - \frac{p}{2\sqrt{2y-n}} & cd &= y + \frac{p}{2\sqrt{2y-n}} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } y = \frac{ab+cd}{2}.$$

Cette valeur de y nous fait voir d'abord pourquoi la réduite en y est du troisième degré. En effet il est visible que la quantité y doit avoir autant de valeurs différentes qu'on en pourra former par toutes les permutations possibles des racines a, b, c, d dans l'expression $\frac{ab+cd}{2}$; on ne peut avoir de cette manière que les trois quantités suivantes

$$\frac{ab+cd}{2}, \frac{ac+bd}{2}, \frac{ad+bc}{2},$$

de sorte que l'équation dont y sera la racine, devra donner chacune de ces trois quantités et, par conséquent, devra être du troisième degré.

On comprend maintenant pourquoi on sait résoudre l'équation en y . Puisque $y = \frac{ab+cd}{2}$ prend seulement trois valeurs $y_0 = y, y_1, y_2$ lorsqu'on effectue les 24 permutations des quatre racines a, b, c, d , alors $y_0 y_1 y_2, y_0 + y_1 + y_2, y_0 y_1 + y_2 y_0 + y_1 y_2$ sont des fonctions symétriques de a, b, c, d et s'expriment donc rationnellement à l'aide des coefficients de l'équation de départ, donc y_0, y_1, y_2 sont racines d'une équation du

troisième degré. Si on sait exprimer a, b, c, d à l'aide de y_0, y_1, y_2 , alors on sait résoudre l'équation de départ. C'est le calcul de Lagrange dans le numéro 31 (avec une nouvelle notation : $u = 2y$).

31. Voyons maintenant comment, en connaissant une des valeurs de u , on pourra trouver les quatre racines a, b, c, d . Puisque :

$$u = ab + cd \text{ et } abcd = q,$$

il est clair que les deux quantités ab et cd seront les racines de cette équation du second degré

$$t^2 - ut + q = 0,$$

de sorte qu'en nommant t' et t'' ces deux racines on connaîtra les deux produits

$$ab = t' \text{ et } cd = t'';$$

de plus on a

$$-p = ab(c+d) + cd(a+b) = t'(c+d) + t''(a+b)$$

Comme $a+b+c+d=0$, on obtient : $a+b = \frac{p}{t'-t''}$ et $c+d = \frac{p}{t''-t'}$, et puisque $ab = t'$ et $cd = t''$, a et b

sont solutions de : $x^2 - \frac{p}{t'-t''}x + t' = 0$ et c et d de $x^2 - \frac{p}{t''-t'}x + t'' = 0$. La connaissance d'une des racines de la réduite permet donc de calculer les quatre racines de la proposée.

Lagrange examine alors les autres méthodes connues de résolution des équations du quatrième degré et conclut :

50. Nous terminerons ici notre analyse des méthodes qui concernent la résolution des équations du quatrième degré. Non seulement nous avons rapproché ces méthodes les unes des autres, et montré leur liaison et leur dépendance mutuelle ; nous avons encore, ce qui était le point principal, donné la raison a priori pourquoi elles conduisent, les unes à des réduites du troisième degré, les autres à des réduites du sixième, mais qui peuvent s'abaisser au troisième ; et l'on a dû voir que cela vient en général de ce que les racines de ces réduites sont des fonctions des quantités x', x'', x''', x^{IV} , telles qu'en faisant toutes les permutations possibles entre ces quatre quantités, elles ne peuvent recevoir que trois valeurs différentes comme la fonction $x'x''+x'''x^{IV}$, ou six valeurs, mais deux à deux égales et de signes contraires, comme la fonction $x'+x''-x'''-x^{IV}$, ou bien six valeurs telles, qu'en les partageant en trois couples et prenant la somme ou le produit des valeurs de chaque couple, ces trois sommes ou ces trois produits soient toujours les mêmes, quelque permutation qu'on fasse entre les quantités x', x'', x''', x^{IV} . Comme la fonction trouvée au numéro 42. C'est uniquement de l'existence de telles fonctions que dépend la résolution générale des équations du quatrième degré.

On commence à voir là changer l'objet d'étude du mathématicien. On ne s'intéresse plus aux racines de l'équation proposée, mais à l'effet des permutations des racines sur une fonction de ces racines. A priori, lorsqu'on effectue les 24 permutations des quatre racines, une telle fonction prend 24 valeurs. On s'intéressera

aux fonctions qui ne prennent pas "trop" de valeurs par ces 24 permutations, sans pour autant être symétriques, car alors on ne saurait pas exprimer a, b, c, d avec elles.

La section troisième consiste en des réflexions sur les changements de variable possibles lorsqu'on cherche à résoudre une équation et leurs chances d'aboutir :

Il serait donc fort à souhaiter que l'on pût juger à priori du succès que l'on peut se promettre dans l'application de ces méthodes aux degrés supérieurs au quatrième ; nous allons tâcher d'en donner les moyens par une analyse semblable à celle dont nous nous sommes servis jusqu'ici à l'égard des méthodes connues pour la résolution des équations du troisième et du quatrième degré.

Enfin, la quatrième section donne la *CONCLUSION DES REFLEXIONS PRECEDENTES, AVEC QUELQUES REMARQUES GENERALES SUR LA TRANSFORMATION DES EQUATIONS, ET SUR LEUR REDUCTION OU ABAISSEMENT A UN MOINDRE DEGRE.*

86. On a dû voir par l'analyse que nous venons de donner des principales méthodes connues pour la résolution de équations, que ces méthodes se réduisent toutes à un même principe général, savoir à trouver des fonctions des racines de l'équation proposée, lesquelles soient telles : 1°) que l'équation ou les équations par lesquelles elles seront données, c'est-à-dire dont elles seront les racines (équations qu'on nomme communément les réduites), se trouvent d'un degré moindre que celui de la proposée, ou soient au moins décomposables en d'autres équations d'un degré moindre que celui-là ; 2°) que l'on puisse en déduire aisément les valeurs des racines cherchées.

L'art de résoudre les équations consiste donc à découvrir des fonctions des racines, qui aient les propriétés que nous venons d'énoncer ; mais est-il toujours possible de trouver de telles fonctions, pour les équations d'un degré quelconque, c'est-à-dire pour tel nombre de racines qu'on voudra ? C'est ce sur quoi il paraît très difficile de pouvoir se prononcer en général.

...

87. Comme jusqu'ici nous n'avons fait que chercher ces sortes de fonctions à posteriori et d'après les méthodes connues pour la résolution des équations, il est nécessaire de faire voir maintenant comment il faudrait s'y prendre pour les trouver à priori et sans supposer d'autres principes que ceux qui suivent immédiatement de la nature même des équations : c'est l'objet que je me propose principalement dans cette Section.

Je donnerai d'abord des règles directes et générales pour déterminer le degré et la nature de l'équation d'où une fonction quelconque proposée des racines d'une équation de degré donné devra dépendre ; quoique cette matière ait déjà été traitée par d'habiles Géomètres, je crois qu'elle peut l'être encore d'une manière plus directe et plus générale, surtout dans le point de vue où nous l'envisageons ici, relativement à la résolution générale des équations.

Je ferai voir ensuite quelles sont les conditions nécessaires pour que l'équation dont il s'agit puisse admettre la résolution en supposant celle des équations des degrés inférieurs à celui de l'équation proposée ;

et je donnerai à cette occasion les vrais principes et, pour ainsi dire, la métaphysique de la résolution des équations du troisième et du quatrième degré.

Je traiterai enfin en peu de mots de la réduction des équations qui peuvent se décomposer en d'autres plus simples à cause de quelque relation particulière qu'il y a entre leurs racines, et je montrerai par quelques exemples comment on peut découvrir ces relations, et abaisser par là les équations proposées à des degrés moindres.

On s'intéresse à l'équation de degré μ : $x^\mu + mx^{\mu-1} + nx^{\mu-2} + \dots = 0$ qui a μ racines $x', x'', x''', x^{IV}, \dots, x^{(\mu)}$. De manière générale, si f est une fonction rationnelle quelconque des racines $x', x'', x''', x^{IV}, \dots, x^{(\mu)}$, on va chercher de quelle équation $f(x', x'', x''', x^{IV}, \dots, x^{(\mu)})$ est solution. Lagrange note $\Theta = 0$ cette équation et il commence par faire le travail pour $\mu=2$, $\mu=3$, $\mu=4$ pour expliquer comment son point de vue lui permet de trouver **à priori** les bons changements de variable.

Lorsqu'on effectue les $\mu!$ permutations des μ racines, $f(x', x'', x''', x^{IV}, \dots, x^{(\mu)})$ prend à priori $\mu!$ valeurs $f_0, f_1, \dots, f_{\mu!}$ et est donc solution d'une équation de degré $\mu!$: $(t - f_0)(t - f_1) \dots (t - f_{\mu!}) = 0$ i.e. $\Theta = 0$, dont les coefficients, étant les fonctions symétriques élémentaires de $f_0, f_1, \dots, f_{\mu!}$ sont symétriques en $x', x'', x''', x^{IV}, \dots, x^{(\mu)}$ et s'expriment donc rationnellement à l'aide des coefficients $m, n, \dots$ de l'équation de départ. Peut-on abaisser le degré de Θ ?

97. Quoique l'équation $\Theta = 0$ doive être, en général, du degré $1.2.3 \dots \mu = \varpi$ $1.2.3 \dots \mu = \varpi$, qui est égal au nombre de permutations dont les μ racines $x', x'', x''', \dots$ sont susceptibles, cependant s'il arrive que la fonction soit telle, qu'elle ne reçoive aucun changement par quelque-une ou quelques-unes de ces permutations, alors l'équation dont il s'agit s'abaissera nécessairement à un degré moindre.

Car supposons, par exemple, que la fonction $f[x', (x''), (x'''), (x^{IV}), \dots]$ soit telle, qu'elle conserve la même valeur en échangeant x' en x'' , x'' en x''' , et x''' en x' , en sorte que l'on ait

$$f[(x'), (x''), (x'''), (x^{IV}), \dots] = f[(x''), (x'''), (x'), (x^{IV}), \dots],$$

il est clair que l'équation $\Theta = 0$ aura déjà deux racines égales ; mais je vais prouver que dans cette hypothèse toutes les autres racines seront aussi égales deux à deux.

Il faut bien comprendre que, lorsque Lagrange dit que la fonction f conserve la même valeur en effectuant une permutation des racines, il s'agit, non pas de conserver la même valeur numérique, mais de conserver la même **fonction** f . Autrement dit, après permutation, on obtient une fonction des racines qui, **en tant que fonction**, est égale à f . Avec des notations plus habituelles, soit $f(X_1, X_2, \dots, X_\mu)$ une fonction rationnelle de μ variables. Pour toute permutation σ de $\{1, 2, \dots, \mu\}$, on obtient une nouvelle fonction de μ variables : $g(X_1, X_2, \dots, X_\mu) = f(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(\mu)})$ $g(X_1, X_2, \dots, X_\mu) = f(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(\mu)})$. On peut noter : $g = \sigma f$. Lorsque σ parcourt l'ensemble Σ_μ de toutes les permutations de $\{1, 2, \dots, \mu\}$, on obtient ainsi -

à priori- $\mu!$ fonctions rationnelles. Supposons que f soit invariante - en tant que fonction - par une permutation σ , c'est-à-dire que $g = \sigma f = f$ (en tant que fonction). Alors, pour toute permutation τ de Σ_μ , $(\tau\sigma)f = \tau(\sigma f) = \tau f$. En particulier : $\sigma^k f = \sigma^{k-1}(\sigma f) = \sigma^{k-1} f = f$. Soit H le groupe engendré par σ : f est invariante par toute permutation de $H = \{\sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{p-1}\}$. Mais alors, on va pouvoir grouper p à p les valeurs prises par f (en tant que fonction) lorsqu'on effectue les $\mu!$ permutations de Σ_μ . En effet, les classes à gauche selon H forment une partition de Σ_μ : $H, \tau H \{\tau\sigma^i, i = 0 \text{ à } p\}, \tau'H$, etc., le cardinal de chaque classe étant égal à $p = \text{card}(H)$ (puisque $\tau\sigma^1 = \tau\sigma^j \Rightarrow \sigma^1 = \sigma^j$). Or, on a déjà vu que f est invariante par toute permutation de H . Il est clair que f prend la même valeur (en tant que fonction) par toutes les permutations de τH car $(\tau\sigma^i)f = \tau(\sigma^i f) = \tau f$. Donc, les valeurs prises par f se groupent en valeurs égales p à p et donc f prend $\frac{\mu!}{p}$ valeurs distinctes lorsqu'on effectue les $\mu!$ permutations de Σ_μ . $f(x', x'', x''', x^{IV}, \dots, x^{(\mu)})$ est donc solution d'une équation de degré $\frac{\mu!}{p}$. Ce n'est bien sûr pas le langage employé par Lagrange, mais l'idée de base est bien celle-ci. Reprenons le texte :

En effet, considérons une racine quelconque de la même équation, laquelle soit représentée par la fonction

$$f[(x^{IV}), (x'''), (x'), (x''), \dots],$$

comme celle-ci dérive de la fonction

$$f[(x'), (x''), (x'''), (x^{IV}), \dots],$$

en échangeant x' en x^{IV} , x'' en x''' , x''' en x' , x^{IV} en x'' , il s'ensuit qu'elle devra garder aussi la même valeur en y en changeant x^{IV} en x''' , x''' en x' et x' en x^{IV} ; de sorte qu'on aura aussi

$$f[(x^{IV}), (x'''), (x'), (x''), \dots] = f[(x'''), (x'), (x^{IV}), (x''), \dots].$$

Donc, dans ce cas, la quantité Θ sera égale à un carré θ^2 , et par conséquent l'équation $\Theta = 0$ se réduira à celle-ci $\theta = 0$, dont la dimension sera $\frac{\varpi}{2}$.

On démontrera de la même manière que, si la fonction

$$f[(x'), (x''), (x'''), (x^{IV}), \dots]$$

est de sa propre nature telle, qu'elle conserve la même valeur en faisant deux, ou trois, ou un plus grand nombre de permutations différentes entre les racines $x', x'', x''', x^{IV}, \dots$, les racines de l'équation $\Theta = 0$ seront égales trois à trois, ou quatre à quatre, ou etc. ; en sorte que la quantité Θ sera égale à un cube θ^3 , ou à un carré-carré θ^4 , ou etc., et que par conséquent l'équation $\Theta = 0$ se réduira à celle-ci $\theta = 0$, dont le degré sera égal à $\frac{\varpi}{3}$, ou égal à $\frac{\varpi}{4}$, ou, etc.

On remarquera que l'interprétation moderne en termes de groupes conduit accessoirement au fait que l'ordre du sous-groupe H divise l'ordre de Σ_μ , cas particulier du "théorème de Lagrange" (l'ordre d'un sous-groupe divise l'ordre du groupe).

Le travail de Lagrange montre qu'il faut s'intéresser à l'effet des permutations de Σ_μ sur les fonctions de μ variables. C'est donc ce que Lagrange va faire dans les paragraphes suivants. Deux fonctions f et g de $X_1, X_2, \dots, X_\mu$ sont dites *semblables* si elles sont invariantes par les mêmes permutations. Nous venons de voir que, dans ce cas, elles prennent le même nombre de valeurs distinctes. Lagrange écrit :

99. *De tout ce que nous venons de démontrer il s'ensuit donc, en général : 1°que toutes les fonctions semblables des racines $x', x'', x''', \dots$ d'une même équation sont nécessairement données par des équations du même degré ; 2°que ce degré sera toujours égal au nombre $1.2.3.\dots\mu$ (μ étant le degré de l'équation donnée), ou à un sous-multiple de ce nombre ; 3°que pour trouver directement l'équation la plus simple $\theta = 0$, par laquelle devra être déterminée une fonction quelconque donnée de $x', x'', x''', \dots$, il n'y aura qu'à chercher toutes les différentes valeurs que cette fonction peut recevoir par les permutations des quantités $x', x'', x''', \dots$ entre elles, et, prenant ces valeurs pour les racines de l'équation cherchée, on déterminera par leur moyen les coefficients de cette équation suivant les méthodes connues et employées déjà plusieurs fois dans ce Mémoire.*

Puis Lagrange démontre des résultats essentiels sur les fonctions de μ variables :

104. *Donc :*

1°Si l'on a deux fonctions quelconques t et y des racines $x', x'', x''', \dots$ de l'équation

$$x^\mu + mx^{\mu-1} + nx^{\mu-2} + \dots = 0,$$

et que ces fonctions soient telles, que toutes les permutations entre les racines $x', x'', x''', \dots$, qui feront varier la fonction y , fassent varier aussi en même temps la fonction t on pourra, généralement parlant, avoir la valeur de y en t et en $m, n, p, \dots$, par une expression rationnelle, de manière que connaissant une valeur de t on connaîtra aussi immédiatement la valeur correspondante de y ; nous disons généralement parlant, car s'il arrive que la valeur connue de t soit une racine double, ou triple, etc., de l'équation en t , alors la valeur correspondante de y dépendra d'une équation carrée, ou cubique, etc., dont tous les coefficients seront des fonctions rationnelles de t et de $m, n, p, \dots$

2°Si les fonctions t et y sont telles, que la fonction t conserve la même valeur par des permutations qui font varier la fonction y , alors on ne pourra trouver la valeur de y en t et en $m, n, p, \dots$ qu'au moyen d'une équation du second degré, si à une même valeur de t répondent deux valeurs de y , ou du troisième degré, si à une même valeur de t répondent trois valeurs différentes de y , et ainsi de suite. Les coefficients de ces équations en y seront, généralement parlant, des fonctions rationnelles de t et de $m, n, p, \dots$, en sorte qu'étant donnée une valeur de t , on aura y par la simple résolution d'une équation du second ou du troisième degré, etc. ; mais s'il arrive que la valeur connue de t soit une racine double ou triple, etc., de l'équation en t , alors

les coefficients des équations dont il s'agit dépendront encore eux-mêmes d'une équation du second ou du troisième degré, etc.

De là on peut déduire les conditions nécessaires pour pouvoir déterminer les valeurs mêmes des racines $x', x'', x''', \dots$, au moyen de celles d'une fonction quelconque des racines ; car il n'y aura pour cela qu'à prendre la simple valeur de x à la place de la fonction y , et à appliquer à ce cas les conclusions précédentes.

Examinons à la lumière de ces résultats la méthode de Ferrari pour résoudre les équations de degré quatre. Nous noterons $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) \end{pmatrix}$ une permutation σ de Σ_4 . Par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ est la permutation σ telle que : $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 1, \sigma(4) = 4$.

Considérons les fonctions suivantes des racines a, b, c, d d'une équation du quatrième degré :

$$f_0(a, b, c, d) = a + b + c + d \quad f_1(a, b, c, d) = ab + cd \quad f_2(a, b, c, d) = ab \quad f_3(a, b, c, d) = a$$

f_0 est symétrique, invariante par toutes les permutations σ de Σ_4 , donc est connue : c'est la somme des racines, nulle dans le cas étudié (résolution de l'équation $x^4 + nx^2 + px + q = 0$).

Les permutations laissant f_1 invariante sont celles de

$$H_1 = \left\{ Id, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

qui est d'ordre 8. Cela signifie que f_1 prend $\frac{4!}{8} = \frac{24}{8} = 3$ valeurs lorsqu'on effectue les 24 permutations de Σ_4 .

Donc f_1 est racine d'une équation de degré trois dont les coefficients s'expriment rationnellement à l'aide des coefficients de l'équation à résoudre (et de f_0 , mais $f_0=0$).

Examinons maintenant l'effet des permutations de H_1 sur f_2 . Parmi les permutations de H_1 , celles qui laissent f_2 invariante sont celles de $H_2 = \left\{ Id, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right\}$, qui est d'ordre 4.

Cela signifie que f_2 prend $\frac{\text{card}(H_1)}{\text{card}(H_2)} = 2$ valeurs lorsqu'on lui applique les permutations de H_1 . Le résultat du

numéro 104 du texte de Lagrange affirme donc que est solution d'une équation de degré 2 dont les coefficients s'expriment rationnellement à l'aide de f_1 et des coefficients de l'équation de départ.

Enfin examinons l'effet de H_2 sur f_3 . Les permutations de H_2 laissant f_3 invariante sont celles de $H_3 = \left\{ Id, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right\}$, qui est d'ordre 2. Cela signifie que f_3 prend $\frac{4}{2} = 2$ valeurs lorsqu'on lui applique les quatre permutations de H_2 . Donc $f_3 = a$ est solution d'une équation de degré 2 dont les coefficients s'expriment rationnellement à l'aide de f_2 et des coefficients de l'équation de départ.

Résoudre une équation, c'est donc trouver une chaîne de fonctions des μ racines telles que la première est symétrique, la dernière est une des racines, chacune d'elles prenant "peu de valeurs" par les permutations qui laissent la précédente invariante. Lorsqu'on veut résoudre une équation de degré quatre, "peu de valeurs" signifie 2 ou 3 afin d'abaisser le degré de l'équation à résoudre. Le fait de terminer par $f_3 = a$ répond au souci de Lagrange de pouvoir déterminer une des racines à l'aide d'une fonction des racines (numéro 104). Lagrange ne

parle qu'en termes de valeurs prises par une fonction des racines lorsqu'on effectue des permutations des racines, mais c'est ce type de réflexions qui mènera Galois à dégager le concept de groupe d'une équation. Il est clair que la résolution de l'équation de degré quatre est liée à l'existence d'une chaîne de sous-groupes de Σ_4 et c'est ce que précisera Galois dans son Mémoire *Sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux* paru en 1846 dans le *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*.

Le travail de Lagrange ouvre de manière remarquable un champ nouveau aux investigations des mathématiciens ; les créateurs du concept de groupe tels Cauchy, Abel, Galois, Gauss ont lu les écrits de Lagrange. Et on peut voir dans ce mémoire l'amorce des changements fondamentaux des objets d'étude de l'algèbre qui, de résolution d'équations numériques, va devenir étude des structures.

Bibliographie

FRIEDELMEYER J.P. *Emergence du concept de groupe à travers le problème de la résolution des équations algébriques*, Fragments d'histoire des mathématiques III . Brochure A.P.M.E.P. n°83. 1991

FRIEDELMEYER J.P. *Recherche inconnue désespérément* in *Histoires de problèmes, histoire des mathématiques*, Ellipses, Paris, 1993.

LAGRANGE *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* (Mémoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, 1770 in *Œuvres de Lagrange* publiées par Serret, Gauthier-Villars, Paris, 1861 (tome 3, p. 205 - 421).

MUTAFIAN *Equations algébriques et théorie de Galois*, Vuibert, Paris, 1980.