

LE CALCUL LITTÉRAL AU COLLÈGE

INTRODUCTION	3
 PARTIE 1 - ÉCLAIRAGE HISTORIQUE : l'algèbre, un domaine ou un langage ?	 5
Des questions	5
Le domaine des équations	6
Le langage universel	10
 PARTIE 2 - L'ACCÈS AU CALCUL LITTÉRAL	 15
2-1 Pourquoi des lettres ?	15
2-2 Les règles de transformation	17
2-2- a Le rôle du signe égal	
2-2- b Les modèles arithmétiques	
2-3 Des situations pour construire les règles	18
 PARTIE 3 - LES CHAMPS D'UTILISATION	 25
3-1 Les démonstrations de propriétés	25
3-2 Les équations	32
3-3 Les fonctions	43
 CONCLUSION : BILAN POUR LES QUATRE NIVEAUX	 53

INTRODUCTION

Les derniers programmes des collèges, mis en application, à partir de la classe de sixième, à la rentrée 1996, mettent l'accent, à tous les niveaux, sur le calcul littéral. L'utilisation des lettres, à titre d'initiation en sixième et en cinquième, puis à travers l'apprentissage des règles du calcul littéral en quatrième, y est toujours associée à la résolution de problèmes, voire à des situations concrètes en sixième et en cinquième.

En sortant de l'école primaire les élèves, dans le domaine numérique, ont une pratique exclusive de l'arithmétique ; les situations concrètes préconisées dans les premières classes du collège vont encore les amener à travailler sur le même champ de problèmes que ceux qu'ils ont déjà rencontrés.

Comment faire en sorte que l'emploi de lettres, dans des situations où ils s'en sont toujours passés prenne un sens pour eux ?

Par quels types d'activités les amener à concevoir et accepter un changement radical dans leurs habitudes ?

Comment construire de nouveaux algorithmes qui ne soient pas seulement pour les élèves, dans le meilleur des cas, des mécanismes bien huilés mais des outils indispensables à la résolution de problèmes nouveaux ?

C'est pour essayer de répondre à ces questions que nous avons rédigé cette brochure. On y trouvera dans la première partie une étude portant sur l'algèbre à travers l'histoire, puis, dans les deux autres parties, d'abord une réflexion sur quelques obstacles, et enfin, des propositions d'activités et de problèmes qui nous semblent pertinents pour essayer de surmonter ces obstacles tout en restant dans la ligne préconisée par les commentaires des programmes.

QU'EST-CE QUE L'ALGÈBRE ? UN DOMAINE OU UN LANGAGE ?

Jean-Paul Guichard, IREM de Poitiers

En regardant les programmes actuels de l'enseignement en France, on peut se demander si l'algèbre existe encore. Pourtant nous avons le sentiment que l'algèbre fait bien partie des mathématiques. Aussi pour essayer de cerner ce qui la caractérise nous examinerons le contenu de deux traités. Puis nous explorerons deux grands axes.

En premier lieu, à partir de l'origine du mot algèbre et du contexte dans lequel il est apparu, nous aborderons le domaine des équations auquel on identifie le plus souvent l'algèbre.

Pour la mise en équation des problèmes, vont peu à peu s'élaborer des notations, qui, telle la désignation par x de l'inconnue, vont servir de critère pour identifier le domaine algébrique.

Pour la résolution des équations se construisent progressivement des techniques purement algébriques, qui vont déboucher sur une théorie des équations.

En second lieu, à partir de la conception usuelle du calcul algébrique comme calcul littéral, nous examinerons la naissance du calcul littéral chez Viète, et son développement, à la suite de Descartes, comme outil de modélisation et de résolution de problèmes.

Comme outil de modélisation, il va envahir tous les domaines des mathématiques et des sciences dont l'algèbre va devenir le langage.

Comme calcul symbolique, il va permettre la définition des structures dites algébriques qui vont devenir l'algèbre moderne.

Nous terminerons en tirant des enseignements pour la classe dans le cadre des programmes actuels.

Des questions

Qu'y a-t-il de commun entre l'*Algebra* de Bombelli (1572), les *Éléments d'Algèbre* de Clairaut (1768) et l'*Algebra* de Lang (1969) ? La comparaison du contenu de ces deux derniers ouvrages est éloquente.

1768. Clairaut. Éléments d'Algèbre.	1969. Lang. Algebra.
1. De la méthode algébrique d'exprimer les problèmes par des équations, et de la résolution des équations du 1 ^{er} degré	1. Groups, Rings, and Modules Groups–Rings–Modules–Homology–Polynomials– Noetherian Rings and Modules
2. Résolution des équations du 2 ^e degré	2. Field theory Algebraic Extensions–Galois Theory–Extensions of Rings–Transcendental Extensions–Real Fields– Absolute Values
3. Principes généraux pour les équations de tous les degrés	3. Linear Algebra and Representation Matrices and Linear Maps–Structure of Bilinear forms–Representation of One Endomorphism– Multilinear Products–Semi-simplicity– representations of Finite Groups
4. Résolution des équations de degré quelconque quand elles n'ont que deux termes	
5. Résolution des équations du 3 ^e et 4 ^e degré	

D'où une première question : comment le mot Algèbre en est arrivé à désigner des contenus aussi différents ?

Si l'on regarde maintenant ce qui se passe au niveau de l'enseignement secondaire, tout du moins en France, on peut constater que l'algèbre est un domaine aux contours incertains qui tend à se dissoudre.

Au collège les mots algèbre et algébrique ont complètement disparu des programmes, même si la partie des programmes intitulée "Travaux numériques" correspond pour une bonne part à celle qui dans les années 1960 s'intitulait "Arithmétique et Algèbre".

Au lycée, en terminale scientifique, le contenu d'un manuel d'algèbre des années 1960 se retrouve dans le manuel d'analyse des années 1990, et le seul chapitre, celui sur les complexes, rescapé du manuel d'arithmétique de 1960, apparaît comme un chapitre d'algèbre dans le manuel de géométrie de 1990!

D'où une deuxième question : pourquoi le mot Algèbre ne désigne-t-il plus, au niveau de l'enseignement secondaire, un ensemble de contenus ?

Il nous semble que des éléments de réponse à ces deux questions peuvent se trouver en considérant l'histoire des mathématiques.

Le domaine des équations

L'origine et l'emploi du mot Algèbre vont nous servir de guide. C'est Al Khwarizmi, mathématicien à Bagdad au 9^e siècle, qui va faire école. En effet, il publie un ouvrage sur les équations du premier et du second degré, avec des applications à des problèmes de géométrie et d'héritages, qu'il intitule *Court traité sur le calcul d'al-jabr et al-muqabala*. Ces deux termes désignent deux transformations de base des équations, al-jabr étant celle qui permet de "restaurer" l'équation en supprimant les soustractions. Le terme Algèbre va dès lors désigner le domaine des équations. Mais il faut remarquer qu'à cette époque le traitement des équations se fait sans aucun symbole. Tout s'exprime dans le langage ordinaire comme on peut en juger par le problème suivant où Al Khwarizmi donne la méthode pour résoudre l'équation $x^2 + a = bx$.

Quant aux carrés et au nombre qui égalent des racines, c'est comme quand tu dis : un carré et vingt et un en nombre égalent dix de ses racines. Cela vaut aussi pour tout bien qui est tel que si on lui ajoute vingt et un dirhams, la somme qui en résulte est égale à dix racines de ce bien.

La méthode de résolution consiste en ceci : prends la moitié des racines, cela fera cinq ; tu la multiplies par elle-même, cela fera vingt-cinq ; tu retranches les vingt et un dont on a dit qu'ils étaient avec les carrés, il restera quatre ; tu prends sa racine qui est deux ; tu la retranches de la moitié des racines qui est cinq. Il restera trois et c'est la racine du carré que tu voulais et le carré est neuf.

كل زاوية من النقصان اثنان ونصف في اثنين ونصف نقصار الذي يحتاج إليه من الزيادة حتى يربع السطح اثنان ونصف في مثله أربع مرات ويبلغ ذلك جميعه خمسة وعشرون . وقد علمنا أن السطح الأول الذي هو سطح المال والأربعة السطوح التي حوله وهي عشرة أجزا هي تسعة وثلاثون من العدد . فإذا زدنا عليها الخمسة والعشرين التي هي المربعات الأربع التي هي على زوايا سطح آب تم تربع السطح الأعظم وهو سطح وهـ وقد علمنا أن ذلك كله أربعة وستون وأحد أضلاعه جذره وهو ثمانية فإذا نقصنا من الثمانية مثل ربع العشرة مرتين من طرفي ضلع السطح الأعظم الذي هو سطح وهـ وهو خمسة بقى من ضلعه ثلاثة وهو جذر ذلك المال . وإنما نقصنا العشرة الأجزاء وضربناها في مثلها وزدناها على العدد الذي هو تسعة وثلاثون ليتم لنا بناء السطح الأعظم بما نقص من زواياه الأربع لأن كل عدد يضرب ربه في مثله ثم في أربعة يكون مثل ضرب نصفه في مثله فاستغنيا بضرب نصف الأجزاء في مثلها عن الربع في مثله ثم في أربعة وهذه صورته .

مربع مجهول الأضلاع وهو المال الذي تريد أن تعرفه وتعرف جذره وهو سطح آب وكل ضلع من أضلاعه فهو جذره وكل ضلع من أضلاعه إذا ضربته في عدد من الأعداد فأبلغت الأعداد فهي أعداد جذور . لكل جذر مثل جذر ذلك السطح فلما قبل أن مع المال عشرة أجزاؤه اخذنا ربع العشرة وهو اثنان ونصف وصيرنا كل ربع منها مع ضلع من أضلاعه السطح فصار مع السطح الأول الذي هو سطح آب أربعة سطوح متساوية طول كل سطح منها هـ مثل جذر سطح آب وعرضه اثنان ونصف وهي سطوح ح ط ك ح أخذت سطح متساوي الأضلاع مجهول أيضا ناقص في زواياه الأربع في

سنة ربيع	ح	سنة ربيع
	ا	ك
سنة ربيع	ط	سنة ربيع

Al Khwarizmi. *Kitab al-Jabr wal-Muqabala*. Résolution de l'équation : $x^2 + 10x = 39$.

Il faut noter qu'Al Khwarizmi démontre la validité de tous ses algorithmes en utilisant la géométrie d'Euclide.

Si son traité marque la naissance d'une nouvelle discipline, est-ce à dire qu'auparavant la notion d'équation était inconnue des mathématiciens ? En fait la recherche d'un nombre ou d'une quantité inconnue se rencontre dès les débuts de l'histoire des mathématiques ; et lorsqu'il s'agit d'équations du second degré on remonte généralement aux babyloniens. Peut-on alors, même s'il y a anachronisme, parler d'algèbre ? Examinons trois types de résolutions différents.

Babylone. Tablette BM 13901 Problème 2. 1800 avant J.C.

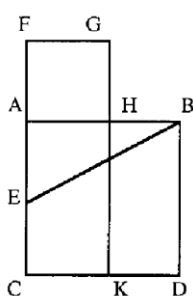
J'ai soustrait de la surface le côté de mon carré : $14'30$. Tu poseras 1, l'unité. Tu fractionneras en deux 1 : $(30')$. Tu croiseras $30'$ et $30' : 15'$. Tu ajouteras à $14'30 : 14'30'15'$. C'est le carré de $29'30'$. Tu ajouteras le $30'$ que tu as croisé à $29'30' : 30$ le côté du carré.



Il s'agit de résoudre une équation du type $x^2 - x = a$. On peut remarquer que l'algorithme qui donne la solution est le même que celui qu'utilise Al Khwarizmi dans le problème voisin que nous avons donné en exemple, et que la présentation de la méthode à suivre est très similaire. C'est pourquoi de nombreux auteurs parlent d'algèbre babylonienne ; ces problèmes babyloniens figurent d'ailleurs toujours dans l'histoire de l'algèbre. Mais quelle est la rupture qu'a introduite Al Khwarizmi, et qui a été reconnue comme telle par ses successeurs dans leur emploi du nom d'algèbre pour leurs traités ? C'est certainement le fait d'avoir inversé l'ordre ancien problèmes-équations, en faisant des équations le point de départ et l'objet d'une étude mathématique. Nous allons pouvoir le vérifier sur deux autres types de résolution.

Euclide. Les Éléments, livre II, proposition 11. 3^e siècle avant J.C.

Couper une droite de telle sorte que le rectangle contenu par la droite entière et l'un des segments soit égal au carré sur le segment restant.



Soit la droite donnée AB. Il faut alors couper la droite AB de telle sorte que le rectangle contenu par la droite entière et l'un des segments soit égal au carré sur le segment restant.

En effet, que le carré ABCD soit décrit sur AB. Et que AC soit coupée en deux parties égales au point E. Que BE soit jointe, et que CA soit conduite jusqu'en F ; et que soit placée EF égale à BE, et que le carré FH soit décrit sur AF ; et que GH soit conduite jusqu'en K. Je dis que AB a été coupée en H de façon à rendre le rectangle contenu par AB, BH égal au carré sur AH.

Il s'agit de résoudre l'équation $cx = (c - x)^2$ qui peut se ramener au type $x^2 + a = bx$ d'Al Khwarizmi. Nous voyons immédiatement que le problème d'Euclide est de construire géométriquement des grandeurs qui sont en fait solutions d'équations, et non de traiter de la résolution des équations. Dans sa démonstration Euclide utilise des transformations d'aires que nous pouvons lire comme des transformations d'expressions algébriques. C'est ce qui a fait dénommer, à la suite de Paul Tannery (19^es.), ces méthodes euclidiennes d'*algèbre géométrique*. D'ailleurs Al Khwarizmi ne s'y est pas trompé : il a su interpréter algébriquement des résultats géométriques d'Euclide, et ainsi pu démontrer la validité de tous ses algorithmes de résolution des équations par des méthodes géométriques puisées dans les Éléments d'Euclide. Le cas de Diophante est différent.

Diophante. Les Arithmétiques, livre I, problème 27. 3^e siècle.

Il s'agit de résoudre le système $x + y = b$ et $xy = a$ qui peut se ramener aussi à l'équation $x^2 + a = bx$ d'Al Khwarizmi. La grande innovation de Diophante est l'utilisation explicite d'"un nombre qui possède en soi une quantité indéterminée d'unités", noté ς , et dénommé "arithme" dans la traduction française de Ver Eecke (1925), et d'un calcul avec cette inconnue, comme on peut en juger dans le texte qui suit. Au début de son ouvrage Diophante explique comment se font les calculs avec l'arithme, son inverse, leurs puissances, leurs produits et les expressions additives et soustractives que l'on peut former avec ces nombres d'une nouvelle espèce. D'autre part les deux règles *d'al-jabr et al-muqabala* d'Al Khwarizmi y figurent comme méthode pour transformer les équations. On comprend que Diophante ait pu être appelé le père de l'algèbre.

Trouver deux nombres tels que leur somme et leur produit forment des nombres donnés.

Proposons que la somme des nombres soit $\text{M} \overline{\text{K}}$ (20 unités), et que leur produit soit $\text{M} \overline{\text{Q}} \overline{\varsigma}$ (96 unités).

Que la différence des nombres soit $\text{S} \overline{\beta}$ (2x). Dès lors, puisque la somme des nombres est $\text{M} \overline{\text{K}}$ (20) si nous la divisons en deux parties égales, chacune des parties sera la moitié de la somme, ou $\text{M} \overline{\text{I}}$ (10). Donc, si nous ajoutons à l'une des parties, et si nous retranchons de l'autre partie, la moitié de la différence des nombres, c'est-à-dire $\text{S} \overline{\alpha}$ (1x), il s'établit de nouveau que la somme des nombres est $\text{M} \overline{\text{K}}$ (20), et que leur différence est $\text{S} \overline{\beta}$ (2x). En conséquence, posons que le plus grand nombre est $\text{S} \overline{\alpha} \text{ M} \overline{\text{I}}$ (1x + 10) donc le plus petit sera $\text{M} \overline{\text{I}} \text{ A} \text{ S} \overline{\alpha}$ (10 - 1x), et il s'établit que la somme des nombres est $\text{M} \overline{\text{K}}$ (20), et que leur différence est $\text{S} \overline{\beta}$ (2x). Il faut aussi que le produit des nombres fasse $\text{M} \overline{\text{Q}} \overline{\varsigma}$ (96). Or le produit est $\text{M} \overline{\rho} \text{ A} \Delta \text{ Y} \overline{\alpha}$ (100 - 1x²), ce que nous égalons à $\text{M} \overline{\text{Q}} \overline{\varsigma}$ (96), et " devient $\text{M} \overline{\beta}$ (2).

En conséquence, le plus grand nombre sera $\text{M} \overline{\text{I}} \overline{\beta}$ (12), le plus petit sera $\text{M} \overline{\eta}$ (8) et ces nombres satisfont à la proposition.

Les biobibliographes arabes, tel Ibn al-Nadim au 10^e siècle, disent de Diophante que c'est "un grec alexandrin qui a écrit un livre sur l'Art de l'Algèbre". La traduction en arabe des *Arithmétiques* de Diophante, au 9^e siècle, par Ibn Luqa a d'ailleurs pour titre *l'Art de l'Algèbre*. Quand à la fin du 16^e siècle l'Europe redécouvre l'œuvre de Diophante, les grands algébristes Bombelli (Italie), Stevin (Flandres), Viète (France), l'intègrent dans leurs traités. Ainsi, si l'œuvre de Diophante marque sans conteste l'avènement de la méthode algébrique en mathématique, son traité n'est pas, comme celui d'Al Khwarizmi, un traité des équations, mais un recueil de problèmes résolus avec cette méthode "pas encore connue". En effet, Al Khwarizmi partage son traité en deux parties. Dans la première il explique ce qu'est le calcul d'al-jabr et al-muqabala, et qu'il porte sur trois classes de nombres : les carrés, les racines et les nombres simples. Il envisage toutes les combinaisons possibles pour les égaliser, et est donc amené à considérer six types d'équations :

Les cas simples	1) Des carrés égaux à des racines	(ax ² = bx)
	2) Des carrés égaux à des nombres	(ax ² = c)
	3) Des racines égales à des nombres	(bx = c)
Les cas combinés	4) Des carrés et des racines égaux à des nombres	(x ² + bx = c)
	5) Des carrés et des nombres égaux à des racines	(x ² + c = bx)
	6) Des racines et des nombres égaux à des carrés	(bx + c = x ²)

À chaque type est consacré un chapitre expliquant sa résolution.

La seconde partie du traité est consacrée à la résolution de problèmes, et montre comment, par al-jabr et al-muqabala, on les ramène à l'une des six formes canoniques. On voit ainsi en quoi le traité

d'Al Khwarizmi inaugure un nouveau point de vue et fonde un nouveau domaine des mathématiques dans lequel vont s'engager les mathématiciens arabes, puis à leur contact les italiens. Cela apparaît clairement dans les réflexions suivantes d'Al Khayyam, tirées de son traité d'Algèbre de 1074 : "L'algèbre est un art scientifique... ce qu'on cherche dans cet art, ce sont les relations qui joignent les données des problèmes à l'inconnue... Ce qu'on trouve dans les ouvrages des algébristes, relativement à ces quatre quantités géométriques, entre lesquelles se forment les équations, à savoir : nombres absolus, côtés, carrés et cubes, ce sont trois équations renfermant le nombre, des carrés et des côtés. Nous allons, au contraire, proposer des méthodes au moyen desquelles on pourra déterminer l'inconnue dans l'équation contenant les quatre degrés... Lorsque l'objet du problème est un nombre absolu, ni moi, ni aucun des savants qui se sont occupés d'algèbre, n'avons réussi à trouver la démonstration de ces équations (et peut-être un autre qui nous succèdera comblera-t-il cette lacune), que lorsqu'elles renferment seulement les trois premiers degrés, à savoir : le nombre, la chose et le carré..."

Cette résolution algébrique des équations du troisième degré, qu'Al Khayyam appelait de ses vœux, ce sont les algébristes italiens du 16^e siècle, Del Ferro, Tartaglia, Cardan, Bombelli, qui vont la réussir, avec en prime celle des équations du quatrième degré. Cette avancée significative est accompagnée d'un progrès du symbolisme, et de calculs sur des nombres nouveaux : négatifs et imaginaires. Ces nombres feront d'ailleurs par la suite partie intégrante des traités d'algèbre. Les relatifs seront tellement perçus comme ayant partie liée avec l'algèbre qu'ils seront dénommés dans les manuels français jusqu'en 1970 nombres algébriques.

Quant aux symboles ce sont surtout des signes d'abréviation. Voici un extrait du calcul sur les binômes figurant dans la sixième partie du *Traité général du nombre et de la mesure* de Tartaglia de 1560.

Del summar de binomi, & residui de dignità Algebratice.



O non te voglio star a narrare particolarmente in parole il sumar de binomi & residui de dignità, perche ve andaria da scriuere assai, ma te ponerò solamente vari, & diuerfi summi in figura, li quali hauendo ben in memoria le operationi delli duoi termini, piu, e men, come di sopra è stato detto facilmente da te le intenderai :

a sumar 13 piu 7 co.
con 12 piu 3 co.

fara 25 piu 10

a sumar 10 men 8 co.
con 13 men 5 co.

fara 23 men 13 co.

a sumar 5 ce. piu 3
con 2 ce. piu 2

fara 7 ce. piu 5

a sumar 12 piu 12 ce.
con 8 men 5 ce.

fara 20 piu 7 ce.

a sumar 9 cu. piu 8 co.
con 3 cu. piu 6 co.

fara 12 cu. piu 14 co.

a sumar 7 cu. men 6 co.
con 3 cu. piu 4 co.

fara 12 cu. men 2 co.

co est l'abréviation de cosa, ce de censo, cu de cubo.

Le dernier des 6 calculs ci-dessus correspond à $(7x^3 - 6x) + (5x^3 + 4x) = 12x^3 - 2x$.

Il est à noter que Nuñez, professeur à Coimbra, utilise, dans son *Libro de algebra* de 1567, les notations de Tartaglia. Mais l'essentiel des explications et des calculs passe par le langage courant. On voit néanmoins apparaître des lettres pour désigner les inconnues comme chez l'allemand Stifel ou le français Peletier.

p. 4^B, seront égales à 124. Voilà nos trois Equacions principales : lesquelles il faut mêler de telle sorte, que nous trouvons les différences des nombres Absoluz, repondantes aux nombres Cossiques.

Disposons donc nos trois Equacions en ceste sorte.

1. 2^B p. 1^A p. 1^B, égales à 64.

11. 1^B p. 3^A p. 1^B, égales à 84.

111. 1^B p. 1^A p. 4^B, égales à 124. Ajoutons la 1^{re}.

Voici, ci-contre, comment Peletier note dans son *Algèbre* de 1544 le système :

$$(1) \quad 2x + y + z = 64$$

$$(2) \quad x + 3y + z = 84$$

$$(3) \quad x + y + 4z = 124.$$

C'est à la fin de ce 16^e siècle, où foisonnent les notations nouvelles et les traités d'algèbre, où l'on redécouvre les auteurs grecs, – en particulier Diophante, pour le domaine qui nous intéresse, dont les *Arithmétiques* sont traduites en latin par Xylander en 1575 –, que va s'opérer un progrès conceptuel décisif.

Le langage universel

L'algèbre littérale de Viète

En quoi consiste ce progrès ? Il s'agit de la création d'un calcul portant uniquement sur des lettres que Viète expose dans un court traité, véritable manifeste édité à Tours en 1591 sous le titre : *Introduction à l'Art analytique ou Algèbre nouvelle*. Il a conscience d'opérer une rupture et d'ouvrir la voie à un progrès important.

"La forme sous laquelle on doit aborder la recherche de l'équation (Zétèse) exige les ressources d'un art spécial, qui exerce sa logique non sur des nombres, suivant l'erreur des analystes anciens, mais au moyen d'une Logistique nouvelle, beaucoup plus heureuse que la Logistique numérale..." (Chapitre I)

"Logistique numérale est celle qui est exposée par des nombres. Logistique spécieuse est celle qui est exposée par des signes ou des figures, par exemple, par des lettres de l'alphabet..." (Chapitre IV)

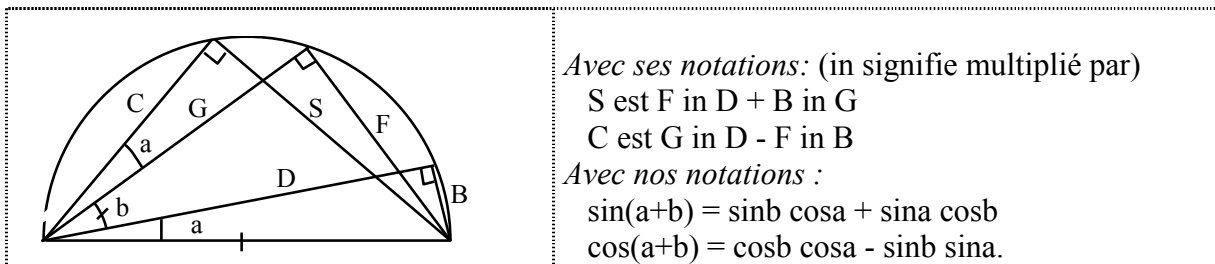
"Diophante a employé la zététique plus ingénieusement que tout autre auteur dans les livres qu'il a écrits sur l'Arithmétique. Cependant il l'a représentée établie par des nombres et non par des espèces, dont cependant il a fait usage, ce qui doit faire admirer davantage sa subtilité et son talent, car les choses qui paraissent plus difficiles et abstruses à celui qui emploie la Logistique numérale, sont familières et immédiatement claires à celui qui emploie l'arithmétique spécieuse." (Chapitre V)

Comme nous l'avons vu, avant lui certains algébristes utilisent des caractères pour désigner l'inconnue et ses puissances et parfois même des lettres. Mais les règles et les méthodes sont exemplifiées avec des coefficients numériques. La grande idée de Viète est d'avoir généralisé l'utilisation de lettres aussi bien pour désigner les quantités inconnues que les quantités connues.

"Afin que cette méthode (la mise en équation) soit aidée par quelque artifice, on distinguera les grandeurs données des grandeurs inconnues et cherchées en les représentant par un symbole constant, invariable et bien clair, par exemple, en désignant les grandeurs cherchées par la lettre A ou par toute autre voyelle E, I, O, U, Y, et les grandeurs données par les lettres B, C, D ou par toute autre consonne." (Chapitre V)

Viète se trouve donc en possession d'un calcul littéral, sa logistique spécieuse. Dans quel but ? La dernière phrase de son court traité nous donne la clé : "NULLUM NON PROBLEMA SOLVERE", résoudre tout problème. En effet un certain nombre de problèmes des géomètres grecs étaient toujours non résolus. Parmi les plus célèbres : la duplication du cube, la quadrature du cercle, la trisection de l'angle, la construction de l'heptagone régulier. Pour envisager leur résolution il fallait donc essayer de trouver de nouveaux outils. Viète va s'attaquer victorieusement à certains de ces problèmes grâce à sa logistique spécieuse : l'analyste "résout artificieusement les problèmes les plus fameux appelés jusqu'à présent irrationnels, tels que le problème mésographique, celui de la section d'un angle en trois parties égales, l'invention du côté de l'Heptagone et tous les autres qui tombent dans ces formules d'équations..." Une fois le problème traduit dans la langue de la nouvelle algèbre, la possibilité de faire des calculs sur les expressions littérales obtenues permet alors de trouver des relations entre grandeurs, jusque là inconnues. C'est ainsi, par exemple que Viète, établit de nombreuses formules trigonométriques en particulier pour l'addition et la multiplication des angles.

Alors que les équations envisagées par les mathématiciens étaient au maximum de degré 4, le partage d'un angle en n parties égales conduit à des équations de degré n , n pouvant être très grand. C'est ainsi qu'en 1594 Viète relève un défi mathématique : résoudre une équation de degré 45 ! C'est le fameux problème d'Adrien Romain dont il donne les 23 solutions positives en quelques heures. Si Viète peut résoudre aussi facilement le problème, c'est qu'il lit, derrière l'équation particulière du 45° degré qui lui est proposée, un problème général de géométrie : Comment partager un angle en 45 parties égales ? Ce problème est du même type que le fameux problème de la trisection de l'angle : Comment partager, à la règle et au compas, un angle en trois parties égales ? Viète avait mis à l'épreuve son algèbre nouvelle sur ce problème de géométrie, comme il l'avait d'ailleurs fait sur les problèmes arithmétiques de Diophante. Son «Art» étant général, il avait abordé le partage de l'angle pour tous les cas possibles dans son ouvrage *La section des angles* qui contient la liste des équations correspondant à chacun des cas, ainsi que les formules trigonométriques de base, énoncées pour la première fois sous forme générale. Voici, en exemple et en abrégé, son théorème 2 :



Les clés de sa réussite, il les doit à son algèbre littérale qui lui permet :

- d'acquérir une puissance de calcul encore inégalée : des substitutions et des développements, tels que ceux utilisés pour l'identification de l'équation d'Adrien Romain, étaient impensables auparavant. Cette utilisation de l'algèbre littérale pour transformer et résoudre des équations va lui permettre de faire avancer leur théorie. Il en fait un traité intitulé *Revue et transformation des équations* qui se termine par un théorème donnant les relations entre les coefficients et les racines d'une équation, théorème qui aura une grande importance par la suite. Même sa résolution numérique des équations, dont il a fait également un traité, utilise des résultats littéraux établis dans ses *Premières notes*, traité qui fait suite à l'*Introduction à l'art analytique* ;
- de traduire sous forme d'équations et de formules des problèmes généraux de géométrie et d'arithmétique. Cette utilisation de la méthode analytique et de l'algèbre littérale pour modéliser des situations, Descartes va la reprendre et la développer.

Il est clair que pour Viète l'algèbre est un outil au service d'une méthode de résolution de problèmes : l'analyse. Mais leurs rôles étant tellement imbriqués, une confusion va s'installer entre algèbre et analyse, qui est déjà présente dans le titre même que Viète a choisi pour son manifeste : *Introduction à l'Art analytique ou Algèbre nouvelle*.

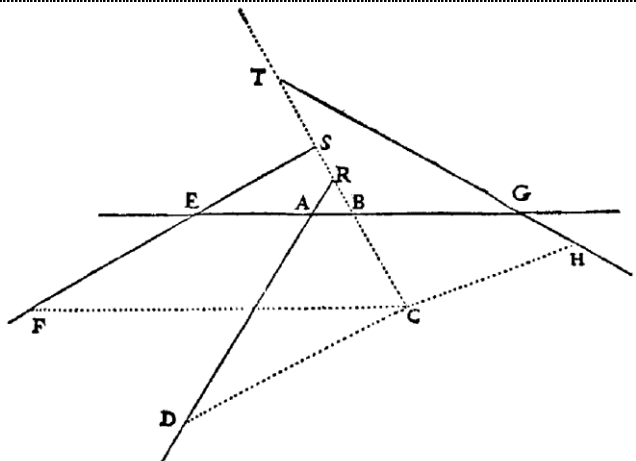
L'outil de la méthode cartésienne

"Par la méthode dont je me sers, tout ce qui tombe sous la considération des Géomètres, se réduit à un même genre de Problèmes, qui est de chercher la valeur des racines de quelque Equation.". Par cette phrase de son traité de 1637, *La Géométrie*, Descartes se fait l'initiateur d'une méthode à laquelle son nom va rester attaché : l'algébrisation de la géométrie. Il faut noter que Descartes ne limite pas sa méthode à la géométrie, et que s'il l'utilise à l'occasion pour résoudre des problèmes arithmétiques, dès le début de ses recherches, il l'a voulue universelle pour "résoudre généralement toutes les questions qui peuvent se présenter en n'importe quel genre de quantité aussi bien continue que discrète."

Les caractéristiques de la méthode cartésienne sont bien connues. Voici comment Descartes lui-même la décrit dans sa *Géométrie* : "Ainsi voulant résoudre quelque problème, on doit le considérer comme déjà fait, et donner des noms à toutes les lignes, qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celle qui sont inconnues, qu'aux autres. Puis sans considérer aucune différence entre ces lignes connues, et inconnues, on doit parcourir la difficulté, selon l'ordre qui montre le plus naturellement de tous en quelle sorte elles dépendent mutuellement les unes des autres, jusqu'à ce qu'on ait trouvé moyen d'exprimer une même quantité en deux façons : ce qui se nomme une Equation."

Si la première étape de la méthode relève de ce que, depuis les Grecs, on appelle l'analyse, c'est aussi un des principes de l'algèbre.

Les deuxième et troisième étapes, inaugurées par Viète, prennent chez Descartes une extension capitale ; en effet la mise en lettres permet la modélisation de problèmes de toutes sortes : constructions géométriques, construction des tangentes, ensembles de points, problèmes d'optique.... Ces problèmes complexes comportant plusieurs inconnues et de nombreux paramètres confrontent immédiatement son utilisateur à une quantité de calculs sans commune mesure avec celle gérée par les algébristes du siècle précédent. Pour en avoir une idée, examinons le problème que Descartes prend pour exemple dans sa *Géométrie*.

	Énoncé : Trouver C tel que $\frac{CB \times CF}{CD \times CH} = \text{constante}$ Données : - les droites (AB), (DA), (FE), (GT); - les angles de projection de C sur ces droites, soit : $\widehat{CBA}$, $\widehat{CDA}$, $\widehat{CFE}$, $\widehat{CHG}$.
---	---

Mise en équation :

2 inconnues : $AB=x$, $CB=y$

9 paramètres : $AE=k$, $AG=l$, $\frac{AB}{BR} = \frac{z}{b}$, $\frac{CR}{CD} = \frac{z}{c}$, $\frac{BE}{BS} = \frac{z}{d}$, $\frac{CS}{CF} = \frac{z}{e}$, $\frac{BG}{BT} = \frac{z}{f}$, $\frac{TC}{CH} = \frac{z}{g}$

4 distances : $CB=y$, $CF = \frac{ezy + dek + dex}{zz}$, $CD = \frac{czy + bcx}{zz}$, $CH = \frac{gzy + fgl - fgx}{zz}$

L'équation : $yy = \frac{(-dekzz + cflz)y + (-dezzx - cglx + bcgx)y + (bcflx - bcfgxx)}{ezzz - cgzz}$

Équation qu'il écrit, après de nombreux changements de paramètres :

$$y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}.$$

Il étudie alors cette équation générale sous cette forme pour identifier la courbe, lieu des points C. Ce qui lui permet de prouver que cette équation est l'équation générale d'une conique. On assiste là à la naissance d'un nouveau champ de recherches : être capable de connaître un ensemble de points à partir de son équation.

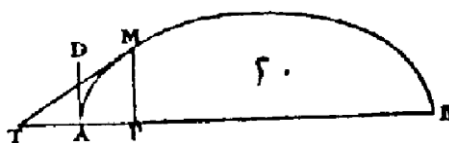
Dans le cas présent, grâce à l'étude des diverses expressions littérales intervenant dans la mise en équation du problème, Descartes peut dire des choses sur le lieu du point C quand, au lieu de la donnée de 4 droites, on en donne 5, 6, 7... ou quand certaines droites sont parallèles. C'est là un des intérêts du calcul littéral. En effet chaque distance s'exprime linéairement en fonction de x et y, et on peut donc connaître le degré de l'équation en x et y. Reste, à partir de ce degré, à connaître la nature de la courbe. C'est ce travail qu'inaugure Descartes dans sa *Géométrie*.

Cet exemple permet de mesurer l'avancée et les transformations opérées par Descartes dans le champ de l'algèbre. Tout d'abord le domaine des équations s'élargit et s'enrichit de nouvelles questions et de nouvelles méthodes : étude des équations à deux variables, nombre et signe des racines des équations, méthode des coefficients indéterminés.... Mais surtout l'algébrisation des problèmes va donner une importance croissante au calcul littéral, et faire de cette méthode et de ce calcul l'essence de l'algèbre, comme en témoigne l'article *Algèbre* de l'*Encyclopédie Méthodique* de Diderot et D'Alembert 150 ans plus tard : "Science du calcul des grandeurs considérées généralement... Quelques Auteurs définissent l'Algèbre, l'art de résoudre les problèmes mathématiques ; mais c'est là l'idée de l'Analyse ou de l'art analytique plutôt que de l'Algèbre... L'Algèbre a proprement deux parties : 1° la méthode de calculer les grandeurs, en les représentant par les lettres de l'alphabet ; 2° la manière de se servir de ce calcul pour la solution des problèmes..." On voit la mutation qui s'opère : l'algèbre devient un langage avec ses règles, langage qui permet de résoudre les problèmes par le calcul. Ainsi Condillac, en 1798, dans sa *Langue des calculs*, peut-il dire : "Les mathématiques sont une science bien traitée dont la langue est l'algèbre".

Le domaine des structures

Très vite les mathématiciens se saisissent de l'outil et de la méthode cartésienne pour traiter tous les problèmes au moyen du langage et du calcul algébriques, et vont ainsi faire de nombreuses découvertes. En l'espace de peu de temps, le langage algébrique est omniprésent.

En voici un exemple, extrait du traité du Marquis De l'Hospital : *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (1696, p. 13), dans lequel il s'agit de tracer la tangente à une ellipse.



12. SOIT une ligne courbe AMB telle que $AP \times PB$
 $(x \times a - x) \cdot PM^2 (yy) :: AB (a) \cdot AD (b)$. Donc $\frac{ayy}{b} = ax$
 $- xx$, & en prenant les différences, $\frac{2ay dy}{b} = adx - 2x dx$,
d'où l'on tire $PT \left(\frac{y dx}{dy} \right) = \frac{2ayy}{ab - 2bx} = \frac{2ax - 2xx}{a - 2x}$, en met-
tant pour $\frac{ayy}{b}$ sa valeur $ax - xx$; & $PT = AP$ ou AT
 $= \frac{ax}{a - 2x}$.

Le texte montre bien la modélisation du problème avec le langage algébrique (chaque longueur est désignée par une lettre, ou exprimée en fonction de celles déjà utilisées) et l'utilisation du calcul algébrique pour trouver la distance AT qui permettra la construction de la tangente. Mais pointons deux faits importants qui apparaissent ici.

D'abord, les lettres qui interviennent dans le calcul représentent des grandeurs géométriques (x , y , a , b), mais aussi des grandeurs infinitésimales (dx , dy) : le calcul algébrique est donc susceptible de traiter toutes sortes de grandeurs. Cette idée va faire son chemin. Après le calcul sur les différences de Leibniz, on voit apparaître au 19^e siècle toutes sortes de calculs portant sur les objets les plus divers : les congruences de Gauss (1801), le calcul barycentrique de Möbius (1827), les couples (1837) et les quaternions (1853) de Hamilton, le calcul vectoriel de Grassmann (1844), le calcul des substitutions de Cauchy (1846), les lois de la pensée de Boole (1854), les matrices de Cayley (1858)...

Le deuxième fait important est que les lettres x , y ne désignent plus des quantités inconnues, mais des quantités variables, donc susceptibles de prendre une infinité de valeurs. Or en substituant aux lettres des valeurs familières (nombres positifs entiers, fractionnaires ou irrationnels), les expressions algébriques restituent des valeurs étranges : négatives, imaginaires. Ce qui amène à penser que les lettres du calcul algébrique peuvent représenter toutes sortes de nombres. Ainsi pour Euler, dans son *Introduction à l'Analyse infinitésimale* de 1748, une quantité variable "comprend tous les nombres tant positifs que négatifs, les nombres entiers et fractionnaires, ceux qui sont rationnels, irrationnels et transcendants ; on ne doit pas même en exclure zéro, ni les nombres imaginaires. On peut lui substituer tous les nombres imaginables". D'autant que les combinaisons entre quantités variables et constantes s'étendent sans cesse au delà des opérations classiques de l'algèbre : addition, soustraction, multiplication, division, puissances et extractions des racines. Il faut y ajouter, aux dires mêmes d'Euler, "les transcendentes : comme les exponentielles, les logarithmiques, et d'autres sans nombre, que le Calcul Intégral fait connaître". Là aussi, après les négatifs et les complexes, on va voir apparaître au 19^e siècle des calculs sur toutes sortes de nombres : les entiers de Gauss (1801), les nombres idéaux de Kummer (1844), les nombres algébriques de Dedekind (1871) ...

Les nombreux résultats obtenus par la manipulation de plus en plus formelle du calcul littéral, et par la substitution de toutes sortes de nombres dans les expressions symboliques obtenues, amènent les algébristes anglais du 19^e siècle à envisager une algèbre symbolique, où les lettres peuvent représenter des objets quelconques ; et sur lesquelles on peut faire toutes les opérations possibles a priori. Les mathématiciens vont alors concentrer leur attention non plus sur les objets, mais sur les opérations. Ainsi Boole écrit-il en 1847 : "La mathématique traite des opérations considérées en elles mêmes indépendamment des matières diverses auxquelles elles peuvent être appliquées", et De Morgan deux ans plus tard : "...aucun mot ou signe de l'arithmétique ou de l'algèbre n'a une parcelle de signification à travers tout ce chapitre dont l'objet est précisément les symboles et leurs lois de combinaison, donnant une algèbre symbolique qui peut désormais devenir la grammaire d'une centaine d'algèbres distinctes".

C'est cette étude d'ensembles abstraits munis d'une ou plusieurs opérations qui va désormais porter le nom d'algèbre, dont les objets vont s'appeler groupes, anneaux, corps, matrices, espaces vectoriels... Nous assistons à la deuxième métamorphose de l'algèbre et à la naissance de l'algèbre moderne, celle de l'*Algebra* de Lang : un domaine où l'on étudie des structures, nouveau langage des mathématiques qui unifie des domaines très divers et permet leur modélisation.

PARTIE 2 - L'ACCÈS AU CALCUL LITTÉRAL

2-1 Pourquoi des lettres ?

Si l'on observe le libellé des programmes, on y trouvera les réponses suivantes :

- pour schématiser un calcul dans des situations concrètes, aires, périmètres ... (en sixième),
- pour énoncer des propriétés, écrire des formules d'aires, de volumes (en cinquième),
- pour écrire et résoudre des équations (en quatrième).

Pour LAPLACE (Leçons de Mathématiques à l'École Normale de l'an III - Dunod), l'utilisation des lettres procède d'une généralisation de l'arithmétique. Il s'agit de construire des "formules" ou "expressions générales" de façon à "embrasser tous les cas qui se présentent dans les applications de l'analyse". Pour lui, cette utilisation "réduit les raisonnements à des opérations" tout en ayant l'avantage (par rapport à l'arithmétique) de "laisser la trace des démarches".

La considération des nombres, indépendamment de leur valeur, et de tout système de numération, a donné naissance à l'arithmétique universelle, que l'on a désignée sous le nom d'algèbre. Pour rendre cette filiation sensible, supposons que l'on se soit proposé de partager le nombre treize en deux parties, telles que la première surpasse de cinq la seconde ; on aura pu raisonner ainsi. Puisque la seconde partie est égale à la première diminuée de cinq, les deux parties réunies sont égales au double de la première moins cinq : mais la somme de ces parties est égale à treize ; en retranchant donc cinq du double de la première, on aura treize ; et par conséquent, la première, prise deux fois, est égale à treize plus cinq, ou à dix-huit ; cette partie est donc égale à neuf et l'autre à quatre.

En considérant d'autres nombres que treize et cinq, on trouve, par le même raisonnement, les deux parties demandées ; mais, pour ne pas le recommencer chaque fois que l'on considère de nouveaux nombres, on a cherché à exprimer le résultat final, d'une manière indépendante de sa valeur. Pour cela, on a représenté les deux nombres par des caractères généraux, et les plus simples pour nous sous les lettres de l'alphabet.

... / ...

Ces formules ou expressions générales ... / ... sont un des plus grands avantages de l'algèbre ; parce que toutes les fois qu'un problème rentre dans ces formules, il est sur le champ résolu, et l'on n'a pas besoin de recommencer le raisonnement, souvent très compliqué, qui les ont fait découvrir.

... / ...

Un second avantage de l'algèbre, avantage qu'elle doit à la simplicité de son langage, est de faire apercevoir très facilement les rapports des objets. Le résultat que nous venons de trouver, en fournit en exemple. On peut l'exprimer ainsi : "Le plus grand de deux nombres est égal à la moitié de leur somme plus à la moitié de leur différence". Cette égalité ainsi exprimée, exige une attention assez grande pour paraître évidente ; mais étant traduite en langage algébrique, son évidence devient sensible.

On trouve la même idée de simplification, mais concernant les écritures, chez CONDILLAC (Œuvres philosophiques - La langue des calculs). Pour lui, l'algèbre est une langue qui possède sa

grammaire propre. Pour apprendre à maîtriser cette langue, il préconise essentiellement l'analogie au modèle arithmétique tout en précisant que "l'association des deux langues amène nécessairement des expressions contradictoires" mais que, en les confrontant, "nous apprendrions ce qui est particulier à chacune, et nous les parlerions bien toutes les deux".

On ne se propose donc pas d'achever avec l'algèbre la solution d'un problème : on ne fait proprement que l'indiquer. Car $a + b$ est plutôt une addition à faire qu'une addition faite ; et le résultat sera différent suivant la valeur des lettres. On peut même juger, d'après le problème résolu dans le premier livre, que l'objet de l'algèbre est de nous approcher assez de la solution, pour que nous n'ayons plus à faire avec les chiffres que le plus petit calcul possible.

En ce qui nous concerne, qu'est-ce qui peut valider, auprès de nos élèves, l'introduction de lettres dans les calculs ? Comment un élève de sixième peut-il considérer $a + b$ comme une réponse à un problème posé alors que sa seule expérience jusqu'à ce moment l'a toujours amené à formuler une réponse parfaitement déterminée s'exprimant par un nombre "chiffré" ?

Citons encore CONDILLAC :

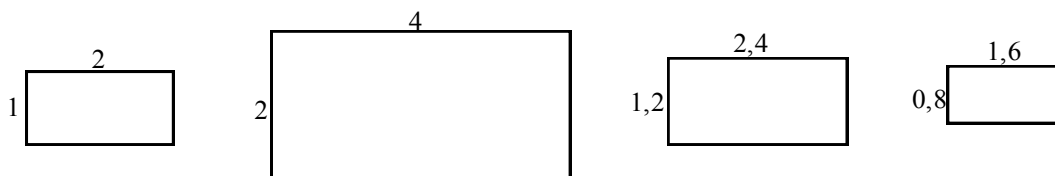
On a vu de quel usage sont les lettres dans la solution d'un problème. Par leur moyen nous avons à la fois sous les yeux plusieurs propositions, que nous ne pourrions nous représenter que par une longue suite de phrases, et nous raisonnons sans avoir besoin de mémoire.

... / ...

Au reste l'algèbre a été dans tous les temps, ce qu'elle est aujourd'hui, je veux dire l'art de substituer, dans le calcul, des signes indéterminés à de longues phrases ... / ... c'est leur indétermination qui constitue l'algèbre.

Nous proposons, pour répondre à ces questions, de travailler dès la sixième sur la rupture arithmétique / algèbre : qu'est-ce que l'on peut faire avec des lettres que l'on ne pourrait pas faire avec l'arithmétique seule ? L'une des réponses possibles est déjà évoquée dans les textes précédents : généraliser. De plus, la question : " Est-ce que ce que je constate est toujours vrai ? " est certainement l'une des questions fondamentales pour la construction des connaissances mathématiques, quel que soit le niveau où l'on travaille.

Prenons un exemple très simple :

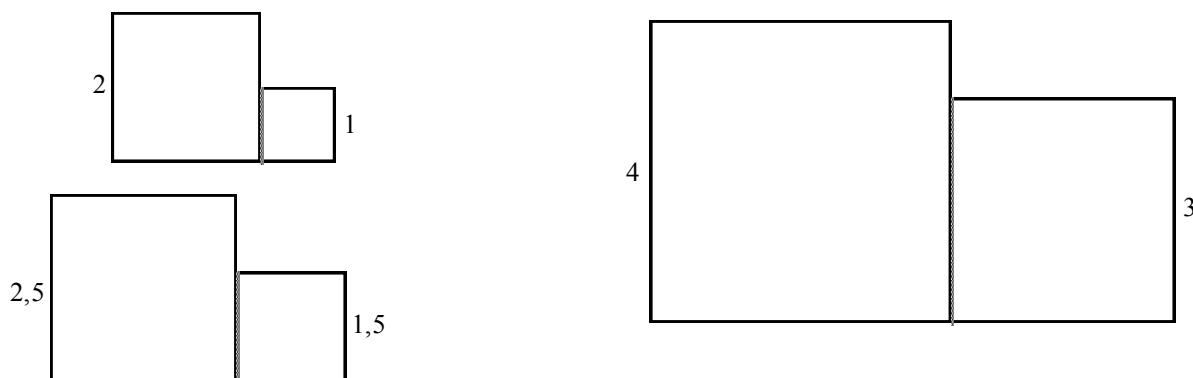


La construction de ces rectangles obéit à une même règle. Écris un message à l'un de tes camarades pour lui indiquer quelle est cette règle.

Pour un élève de sixième, le message peut facilement être rédigé avec des mots. Aucune nécessité ne l'oblige à recourir à l'utilisation de lettres, si ce n'est, éventuellement, une consigne du professeur qui serait sans doute pour l'élève totalement dénuée d'intérêt. Il est sans doute important de mettre en place des situations plus complexes, dans lesquelles la formulation devient beaucoup

plus délicate, pour que l'élève accepte l'utilisation de lettres comme moyen plus économique pour exprimer sa réponse.

On en trouve un exemple dans la brochure "Les débuts de l'algèbre au collège" (INRP) :



Chaque figure est constituée de deux carrés accolés dont les mesures des côtés diffèrent de 1. Il s'agit de trouver une formule qui permette de calculer le périmètre de n'importe laquelle de ces figures.

L'expérimentation de cette situation en classe de cinquième est traitée en détail dans la brochure.

2-2 Les règles de transformation

2-2- a Le rôle du signe égal

Jusqu'en cinquième, le signe = est connu des élèves à travers deux fonctions principales :

- pour indiquer un résultat d'opération ($7 \times 3 = 21$),
- pour indiquer une méthode de calcul (aire = longueur $\times$ largeur).

Dès ce niveau, l'introduction des identités $k(a + b) = ka + kb$, $k(a - b) = ka - kb$ et $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$,

va rendre indispensable l'évolution de ces conceptions, mais nous savons tous, à travers notre pratique, que cette évolution reste un point délicat et ce, bien au-delà de ce niveau : les difficultés des élèves de quatrième face à l'écriture des équations, dans lesquelles, en plus, l'égalité devient conditionnelle, en témoignent.

Nous proposons que, dès la sixième, on entraîne les élèves à manipuler des égalités dans lesquelles les deux membres aient une structure complexe, c'est à dire des égalités qui ne soient pas seulement constituées d'une ou plusieurs opérations avec leurs résultats. Le travail sur l'écriture des nombres peut être un support intéressant pour ce type de d'exercices.

En voici deux exemples très simples et de type ludique :

Complète les cases vides avec le même nombre pour que l'égalité soit vraie : $24 + \bigcirc = 81 : \bigcirc$

Complète les cases vides avec les nombres de ton choix (tu dois proposer au moins trois réponses différentes) : $5 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{1}{100} = \bigcirc \times \bigcirc$

Bien entendu, par la suite, il deviendra important de proposer des activités dans lesquelles le changement d'écriture fait apparaître des propriétés particulières des nombres considérés (multiples, carrés, sommes, produits ...). Il ne s'agit pas, en effet, de manipuler des écritures diverses pour le simple plaisir de la manipulation ; ce n'est pas la dextérité qui est visée. Il est capital de faire ainsi prendre conscience aux élèves que, selon l'utilisation que l'on veut en faire, on aura intérêt à écrire une expression d'une manière plutôt que d'une autre et qu'une écriture est porteuse d'une information qu'il faut décoder. En voici un exemple :

Un rectangle a pour dimensions $2 \times x$ et $8 \times x$. Prouve qu'il existe un carré ayant la même aire que ce rectangle. Quel est la mesure du côté de ce carré ?

De plus, à travers la transformation nécessaire de $(2 \times x) \times (8 \times x)$ en $(4 \times x)^2$, on fait travailler sur la commutativité et l'associativité de la multiplication, propriétés qu'il n'est pas, bien sûr, question de désigner, et qui sont loin d'être maîtrisées par les élèves.

2-2- b Les modèles arithmétiques

Pour une grande majorité des élèves de quatrième, l'égalité $3x + 2x = 5x$ semble "naturelle". Si on demande à nos élèves sur quoi repose leur certitude, ils expriment en général une analogie du type "3 cahiers + 2 cahiers = 5 cahiers", modèle souvent construit par les enseignants eux-mêmes.

Que se passe-t-il ensuite lorsqu'ils sont en présence du calcul suivant : $\frac{3}{2}x + \frac{1}{3}x$? Leur modèle, basé entièrement sur un dénombrement ne fonctionne plus, pas plus que devant $5x - x$ ou bien $5x + 3$.

Le recours à ce modèle est d'ailleurs sans doute considérablement accentué par "la simplification" prématurée des écritures. Le signe de la multiplication, seule trace de l'opération, disparaissant, tout se passe comme si les règles attachées à cette opération disparaissaient aussi. Ne veut-on pas aller trop vite ? Dans tous les livres de cinquième, des expressions telles que $2x$ sont manipulées comme si cela allait de soi pour l'élève.

La simplification des écritures devient une aide lorsque les calculs deviennent plus complexes, pourquoi vouloir l'imposer avant que l'élève ne soit en mesure de la considérer comme nécessaire ? Elle aurait alors une chance d'être utilisée sans que les élèves perdent en même temps le sens de l'expression simplifiée.

Nous proposons donc l'usage prolongé d'écritures non simplifiées, parallèlement à celui d'écritures simplifiées. Ce double usage nous paraît beaucoup plus propice à la construction réfléchie des règles du calcul littéral :

$$5x - 3x = 2x \text{ parce que } 5x - 3x = 5 \times x - 3 \times x = (5 - 3) \times x = 2 \times x = 2x$$
$$\text{et } 5x - x = 4x \text{ parce que } 5x - x = 5 \times x - 1 \times x = (5 - 1) \times x = 4 \times x = 4x$$

Un autre obstacle à une bonne maîtrise du calcul littéral réside bien sûr dans la conception qu'ont les élèves des nombres relatifs : cet aspect est traité de façon détaillée dans une brochure de l'IREM de POITIERS (Les nombres relatifs), c'est pourquoi nous ne nous étendrons pas sur ce vaste sujet ici.

2-3 Des situations pour construire les règles

La construction des premières règles concernant le calcul littéral intervient en cinquième, et, à ce niveau, le programme précise :

- énonciation des propriétés $k(a + b) = ka + kb$ et $k(a - b) = ka - kb$ sous forme littérale mais,
- utilisation de ces propriétés sur des exemples numériques.

De plus les commentaires (colonne de droite des programmes) mettent l'accent sur un point : "La classe de cinquième correspond à une étape importante dans l'acquisition du sens, avec la présentation d'égalités vues comme des assertions dont la vérité est à examiner".

C'est en quatrième, le calcul littéral devenant l'un des objectifs de travail, que vont réellement devoir se développer des compétences de type algébrique. Toutefois, il est clairement annoncé que :

- la résolution de problèmes est l'objectif fondamental et que,
- les activités de développement et de factorisation devront répondre à un objectif précis qu'il conviendra d'explicitier.

On retrouve, dans ces deux derniers commentaires, le souci de donner un sens à toute transformation, souci déjà évoqué à la fin du paragraphe 2-2- a. De plus en plus, même si certains le déplorent, les élèves de collège ont (et auront) entre les mains des machines leur permettant d'éviter pratiquement tout calcul numérique. Cependant, ces mêmes machines nécessitent souvent, pour un

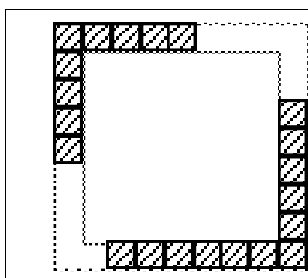
bon emploi, une compréhension des écritures et des transformations préalables des informations données. Actuellement, par exemple, il est possible d'obtenir les solutions d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues sur une calculatrice simple. Mais encore faut-il pour cela être capable d'écrire l'équation sous une forme canonique précise de manière à rentrer les données que sollicite la machine ! À l'avenir, nous pensons que l'intérêt réel du calcul littéral se situe beaucoup plus dans la recherche du sens de ce calcul que dans la recherche de la performance calculatoire, ce qui n'exclut pas, bien au contraire, et les exemples cités l'ont prouvé, un travail approfondi sur les propriétés des opérations utilisées.

Les compétences exigibles en calcul (et nécessaires à la résolution de problèmes) peuvent être classées en deux catégories : les développements / factorisations et les réductions de sommes algébriques.

Voici quelques exemples d'activités permettant de donner du sens à ces transformations.

Les développements / factorisations

(d'après IREM de Poitiers - Calcul littéral au collège)



Le grand carré comporte n petits carrés par côtés.
Les pointillés indiquent l'espace occupé par les autres carrés hachurés.
En utilisant le nombre n , trouver une formule permettant de calculer le nombre de carrés hachurés.

Cette activité, ne nécessitant pas à proprement parler de calcul avec des lettres, peut être proposée en cinquième. Les procédures des élèves reposent sur l'observation de dessins particuliers et s'appuient sur un raisonnement arithmétique. Les propositions sont diverses et c'est l'étude de ces différentes propositions qui constitue l'un des intérêts principaux de l'activité. En effet, dans un premier temps, on peut amener les élèves à s'interroger sur l'égalité des expressions proposées :

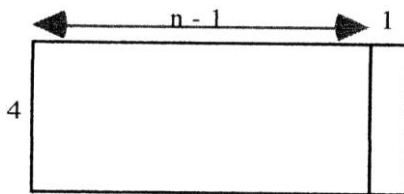
“est-ce que $4 \times n - 4$ est égal à $(n - 2) \times 2 + 2 \times n$ ou encore à $4 \times (n - 1)$? “

Les autres propositions, et parmi elles $n + n + n + n - 4$; $(n + n - 2) \times 2$ ou bien $n - 1 + n - 1 + n - 1 + n - 1$ sont bien entendu également étudiées et le professeur a tout loisir d'organiser cette phase de travail en fonction de sa priorité du moment (réduction ou développement - factorisation).

Généralement, les élèves ayant construit ces expressions à la suite de plusieurs essais numériques, dans des situations où le nombre de carrés par côtés leur est connu, leur certitude concernant la véracité des assertions proposées repose sur une validation par deux ou trois exemples : c'est vrai parce que ça marche quand on a 5 carrés, ou 6, ou ... Le rôle du professeur consiste alors à poser le problème de la généralisation : est-ce qu'on est sûr que ça marche pour n'importe quel nombre de carrés ? La réponse réside ici dans l'observation du dessin (et les propriétés du carré).

On peut prolonger cette activité en demandant de dessiner un rectangle dont l'aire serait $4 \times (n - 1)$ puis un autre ayant pour aire $4 \times n$.

La comparaison des aires de ces deux rectangles (par superposition) permet de retrouver l'égalité $4 \times (n - 1) = 4 \times n - 4 \times 1$.



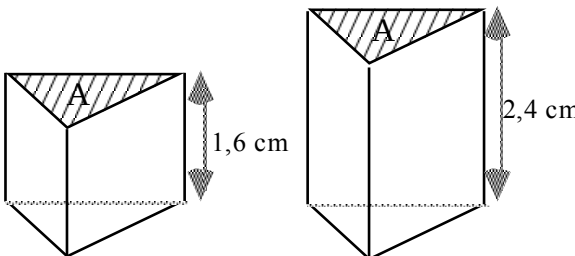
Avant d'institutionnaliser les deux égalités visées ainsi que la simplification d'écriture, il sera bien sûr nécessaire de proposer d'autres situations, à supports variés, soit géométriques (le domaine des aires et des périmètres en fournit de nombreux), soit numériques (on peut en trouver facilement dans la pratique du calcul mental ou réfléchi).

Parmi toutes ces situations, il est important d'en prévoir un nombre assez conséquent dans lesquelles l'égalité doit être utilisée dans le sens de la factorisation car nous savons tous que c'est dans ce sens que l'acquisition est la plus longue.

De plus, pour que la fonction identitaire de l'égalité prenne forme dans l'esprit de nos élèves, nous ne devons pas privilégier un sens plus que l'autre mais travailler les deux simultanément.

Voici un exemple de problème permettant de travailler sur la factorisation.

Première partie



Ces deux prismes ont la même base dont l'aire est A en cm^2 .
 Quelle serait la hauteur d'un prisme de même base, si l'on veut que son volume soit égal à la somme des deux volumes précédents ?

Deuxième partie

- Un prisme P_1 a pour base un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 6 cm et 5 cm. La hauteur du prisme est h_1 .
 - Un prisme P_2 a pour base un parallélogramme dont l'aire mesure 15 cm^2 . La hauteur du prisme est h_2 .
 - Un prisme P_3 a pour base un trapèze dont l'aire est égale à celle du parallélogramme. La hauteur du prisme est 20 cm et son volume est égal à la somme des deux autres.
- Quelles sont les valeurs de h_1 et h_2 ?*

Dans la première partie, la réponse peut être facilement trouvée par superposition des deux solides. L'intérêt est de faire prendre conscience que :

$$2,4 \times A + 1,6 \times A = 4 \times A \text{ parce que } 2,4 \times A + 1,6 \times A = (2,4 + 1,6) \times A$$

Le modèle arithmétique ne suffit plus, puisqu'ici l'addition ne résulte pas d'un dénombrement. L'intérêt de la deuxième partie réside dans le fait que l'élève ne pourra pas formuler toutes les valeurs possibles des hauteurs sans avoir recours à une écriture littérale :

$15 \times h_1 + 15 \times h_2$ doit être transformé en $15 \times (h_1 + h_2)$ pour que l'égalité $h_1 + h_2 = 20$ apparaisse. De plus, l'élève se trouve confronté à un problème qui possède une infinité de solutions liées entre elles par une relation fonctionnelle, ce qui lui permet de construire un nouveau sens au signe égal.

On trouvera d'autres exemples dans la dernière partie de cette brochure.

Les réductions

1- Cas sans parenthèses

L'observation de travaux d'élèves montre que les erreurs les plus fréquentes sont les suivantes (cf. § 2-2- b) :

- 1) $5x + x = 5x$
- 2) $5x + 3 = 8x$
- 3) $5x - x = 5$

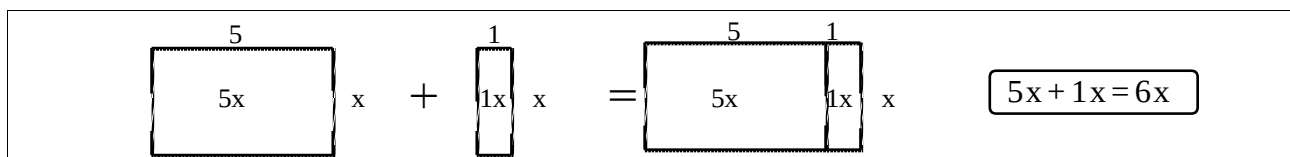
On peut considérer que les 3 cas sont liés : si l'élève avait conscience qu'en écrivant x , en réalité c'est de $1x$ qu'il s'agit, sans doute ne commettrait-il pas d'erreur. Dans ce cas, pourquoi ne pas systématiser, pendant un temps suffisamment long le passage de $5x + x$ ou $5x - x$ à $5x + 1x$ ou $5x - 1x$, voire à $5 \times x + 1 \times x$ ou $5 \times x - 1 \times x$ avant d'effectuer la réduction ?

On peut supposer qu'alors la distinction entre $5x + 3$ et $5x + x$, qui présentent sous cette forme une grande similitude d'écriture, pourra s'opérer plus facilement, $5x + 3$ demeurant une somme de deux termes quelconques, alors que $5x + 1x$ est une somme dont les deux termes sont des produits ayant un facteur commun.

Si l'on écoute les élèves expliquer leurs démarches dans le cas 3), on s'aperçoit que, en plus, l'idée confuse qu'ils ont du sens du signe – est certainement un obstacle majeur (voir à ce sujet la brochure “Les nombres relatifs” – IREM de POITIERS). La plupart du temps, ils en sont restés à l'idée d'une soustraction qui consiste à “enlever”, ou “supprimer”, et dans tous les cas qui “diminue” : pour eux, il est donc logique de “raccourcir” l'écriture proposée en en “supprimant un morceau”.

En ce qui concerne les expressions du premier degré, une illustration peut être proposée qui a l'avantage de bien mettre en évidence la nécessité d'avoir des termes qui peuvent s'écrire sous forme de produits contenant un facteur commun pour que la réduction soit possible.

La situation de base est la suivante :



Il s'agit bien sûr d'une situation modulable à volonté (en changeant la valeur des nombres), et qui permet également de traiter des contre-exemples, c'est-à-dire des cas où l'on ne peut pas réduire. En voici un :

On suppose que x est un nombre plus grand que 1.

- Dessiner un rectangle de côté 5 et ayant pour aire $5x$.
- Dessiner un rectangle ayant pour aire 3.
- Dessiner une figure ayant pour aire la somme des deux aires précédentes.
- Dessiner une figure ayant pour aire la différence des deux aires précédentes.
- Ces figures peuvent-elles être des rectangles dont on pourrait donner les dimensions ?

Le dessin du deuxième rectangle, qui peut être réalisé à partir de l'unité d'aire choisie pour le premier rectangle, va permettre de toute façon d'associer le nombre 3 au produit des deux dimensions quelles qu'elles soient (dans la grande majorité des cas ce sera 3×1). La somme et la différence peuvent sans difficulté être représentées, mais la recherche de rectangles répondant à la dernière question devrait amener l'élève à concevoir que, pour que ce soit possible, il faut que les deux premiers rectangles aient une dimension commune, ce qui ramène le problème de la réduction à la présence d'un facteur commun dans les termes de la somme, ou de la différence, et par conséquent à la condition pour rendre possible une factorisation. Il est impératif qu'à un moment donné (et le plus tôt possible) l'élève prenne conscience que toute réduction s'accompagne de factorisation.

2- Cas avec parenthèses

Le programme de quatrième mentionne, dans les compétences exigibles : “réduire une expression littérale à une variable du type $3x - (4x - 2)$ ”. Que trouve-t-on dans les livres sur le sujet ? Citons HATIER (Collection Pythagore- édition 92), dans la partie cours du livre :

Dans une somme,

- on peut supprimer les parenthèses précédées du signe +
- on peut supprimer les parenthèses précédées du signe - à condition de changer les signes des termes placés dans les parenthèses à supprimer.

Ces règles sont précédées d'une “activité” consistant à observer des calculs disposés en tableau (3 exemples montrant que, dans les cas traités, $a - (b + c) = a - b - c$ et $a - (b - c) = a - b + c$). Aucun

exemple ne correspond à la première règle. La plupart des livres proposent des résumés très semblables à celui-ci.

Que signifie pour un élève “changer les signes des termes” ? Quand on écrit $b+c$, l’élève “voit” un signe, s’il le change, il obtient $b-c$. Que devient le signe - qui se trouve devant la parenthèse ? La règle ne le précise pas. Quelle est cette manipulation magique qui transforme certains signes et pas les autres ? On pourra rétorquer que, dans le cas des écritures littérales ci-dessus, une interprétation plus que douteuse de cette transformation le conduira quand même à une écriture correcte. Qu’en est-il lorsque l’élève se trouve en présence de $3x - (-2 + 4x)$? Il va manipuler les signes, comme on le lui a indiqué, et se retrouvera avec $3x - + 2 - 4x$, ce qui pour lui risque d’être très problématique puisque, à aucun moment, on ne l’a incité à se préoccuper du sens de cette manipulation.

En réalité, le sens de cette réduction n’est jamais traité dans les livres. Pourtant, on retrouve ici l’obstacle majeur lié au sens du signe - dans les calculs. Les règles proposent un algorithme qui ne repose que sur l’affirmation qu’en fait le livre ou le professeur. Peut-on éviter cela ? Nous pensons, que pour y arriver, on ne peut pas faire l’économie du retour au sens de la soustraction avec les relatifs et aux règles déjà connues (associativité et commutativité) de l’addition, même si elles ne sont pas nommées.

- *Cas de $a + (b + c)$*

Les élèves savent que les groupements additifs peuvent se faire et se défaire, et que les termes peuvent être changés de place. Par conséquent, $a + (b + c) = a + b + c$ ou encore $(a + b) + c$ et $(a + c) + b$ etc ...

- *Cas de $a + (b - c)$*

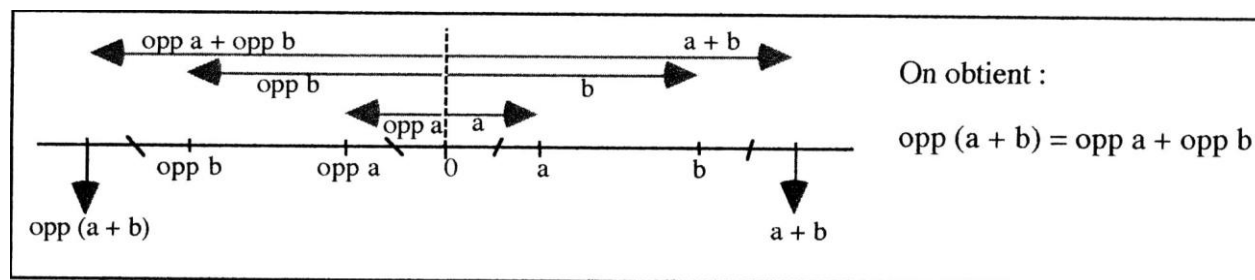
C’est l’occasion de revenir au sens de la soustraction : $b - c = b + \text{opp } c$. L’expression de départ peut donc s’écrire $a + (b + \text{opp } c)$, ce qui nous ramène au premier cas.

- *Cas de $a - (b + c)$*

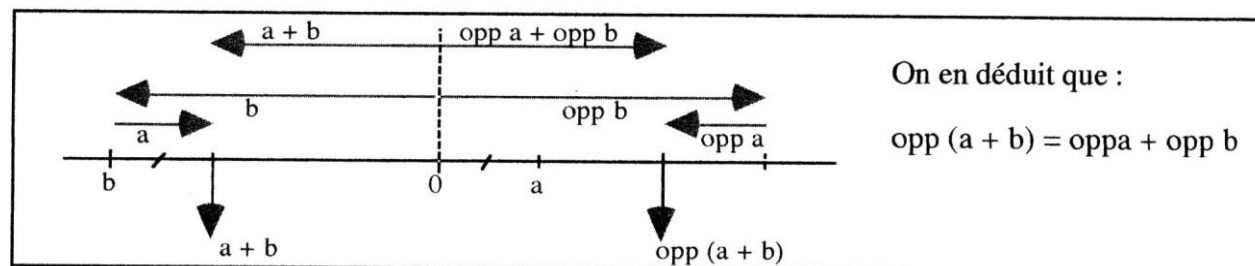
C’est réellement le seul cas vraiment nouveau. La question à régler est : qu’est-ce que l’opposé d’une somme ? Nous pensons que c’est là que se situe la vraie difficulté et qu’il est nécessaire de consacrer du temps à ce problème. Quatre cas sont à étudier et cette étude peut être illustrée par la représentation sur une droite graduée : cas où a et b sont positifs, cas où a et b sont négatifs, cas où a est positif et b négatif avec a plus loin de 0 que b , cas où a est positif et b négatif avec a plus près de 0 que b .

Voici, parmi ces quatre cas, ce que l’on obtient dans les cas 1 et 4.

Cas n° 1



Cas n° 4



En traitant les quatre cas, on peut donc valider la règle : “l’opposé d’une somme est égale à la somme des opposés de chacun de ses termes”.

À partir de là, l’expression $a - (b + c)$ peut s’écrire $a + opp(b + c) = a + (opp b + opp c)$, ce qui nous ramène au premier cas traité.

Est-il nécessaire de s’étendre sur le cas de $a - (b - c)$? A partir du moment où l’élève a compris que $b - c = b + opp c$, l’expression se ramène au cas précédent.

Les nouveaux programmes insistent sur la démonstration ; on trouve ici une occasion d’établir des règles en s’appuyant sur un raisonnement, et il nous semble important que le raisonnement, ou la démonstration, ne se limite pas au domaine géométrique : pourquoi se contenterait-on de constater à partir d’exemples quand il s’agit de calcul, alors qu’on exige un raisonnement construit en géométrie ?

Là où les choses se compliquent, c’est lorsqu’il s’agit de faire fonctionner ces règles : il est bien précisé dans les programmes que tout entraînement au calcul doit se faire dans le cadre de résolution de problèmes, or, si on cherche dans les livres, on trouve beaucoup d’exercices formels mais pas un seul problème. Quelles sont les situations que l’on peut proposer aux élèves pour mettre en pratique cette compétence ? Nous pensons que, puisque les problèmes semblent très rares, voire inexistants, on peut donner au calcul une forme plus attractive : devinettes, murs, carrés magiques ...

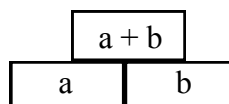
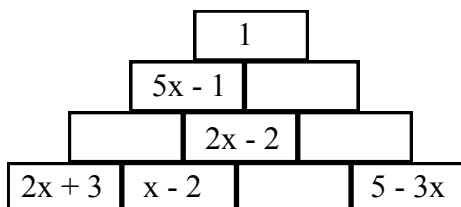
En voici quelques exemples :

- Brochure “Calcul littéral au collège” – IREM de POITIERS

Mon père a 43 ans. Si j’enlève 3 à mon âge et si j’enlève le résultat obtenu à l’âge de mon père, je trouve 30. Quel est mon âge ?

- Quel est le nombre qui est égal à la différence entre son double et son triple augmenté de 4 ?

- Compléter le mur ci-dessous.



- Compléter les cases de façon à obtenir un carré magique (la somme des nombres de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale doit être égale).

$-2 + x$		$-4 + 2x$
$x - 3$		
$2 - 2x$		

PARTIE 3 - LES CHAMPS D'UTILISATION

En calcul littéral, on peut considérer que les lettres peuvent avoir trois statuts différents :

- le statut d'indéterminée dans le domaine des preuves de propriétés numériques, c'est à dire des identités.
- le statut d'inconnue dans les équations,
- le statut de variable dans le domaine des fonctions,

Nous avons choisi de respecter cette classification qui figure dans les commentaires des programmes du cycle central du collège. Le statut de la lettre, c'est à dire son rôle dans les calculs, nous semble en effet être le point central dans le travail sur la résolution de problèmes utilisant le calcul littéral.

L'approche historique contenue dans la première partie de la brochure a montré l'importance capitale qu'a eue l'invention du calcul littéral par Viète sur le développement des mathématiques. L'activité de modélisation à l'aide du langage algébrique a permis l'explicitation de lois, de théorèmes, de propriétés dans le langage de l'algèbre littérale. Il nous semble donc important, dans les travaux proposés aux élèves, de ne pas oublier que c'est la recherche de solution(s) pour un problème donné qui fonde l'utilisation du calcul littéral et non pas l'inverse : les règles seront d'autant mieux mémorisées qu'elles seront associées à des situations dans lesquelles leur emploi permet de résoudre le problème posé. Historiquement, ces situations sont majoritairement géométriques, et nous pensons qu'il est important de ne pas systématiquement associer calcul littéral avec résolution de problèmes numériques, même si, pour faire travailler la modélisation et les propriétés fondamentales, les problèmes numériques sont plus simples à trouver que les problèmes géométriques.

Ceux que nous proposons ont des origines diverses : certains sont de notre cru, d'autres sont repris de publications spécialisées, et, enfin, les derniers sont tirés des manuels que l'on trouve dans le commerce, mais, nous avons toujours privilégié ceux qui permettent de travailler sur le rôle et le sens du calcul littéral. Ce ne sont pas des exercices d'évaluation, et, d'une manière générale, ils sont peu directifs. Le but est de susciter la recherche de l'élève.

Il est bien évident que le niveau indiqué correspond en général au niveau minimum de connaissances nécessaires pour traiter l'exercice. Cependant, chacun d'entre eux peut, bien sûr, être abordé plus tard, avec des exigences différentes.

3-1 Les démonstrations de propriétés

Apprendre à démontrer est l'un des objectifs du collège. À côté de la démonstration de type déductif utilisée en géométrie, on a la possibilité, à partir de la classe de cinquième, de faire démontrer des formules (périmètres, aires, volumes) ou des propriétés (arithmétiques, algébriques ou géométriques).

Dans le cas de formules, il s'agit le plus souvent d'exprimer une grandeur en fonction d'une ou plusieurs autres, c'est pourquoi les problèmes de ce type se trouvent plutôt dans la partie 3-3 (Les fonctions). Quant aux démonstrations de propriétés, particulièrement en géométrie, elles ont été de tout temps, l'un des moteurs du développement du calcul littéral, et nous allons essayer, dans cette première partie, de proposer un échantillonnage de problèmes permettant de construire et d'utiliser les principales règles de ce calcul, ainsi que de donner du sens à son utilisation.

Le calcul littéral permet de généraliser des observations faites sur quelques exemples : on retrouve là l'une des spécificités de l'utilisation des lettres. Quelles que soient les valeurs données aux lettres choisies, la proposition traduite par une égalité, dans le cadre de la situation étudiée, est vraie : il s'agit alors d'une identité. Il est important que peu à peu l'élève réalise que les deux membres de cette identité jouent le même rôle, que l'un peut être, si besoin, remplacé par l'autre. C'est alors que la comparaison des formes (somme, produit, puissances, etc. ...) pourra prendre tout son sens. On ne transforme pas une écriture pour le plaisir de la transformer, on la transforme pour

faire apparaître des propriétés, on choisit la forme qui va correspondre à ce que l'on souhaite prouver.

Prenons un exemple simple qui peut être proposé en cinquième : *“Prouver que la somme de trois nombres entiers consécutifs est un multiple de trois”*. Dans l'énoncé apparaissent clairement les mots somme et multiple : un premier travail consiste donc à trouver des formes claires pour écrire la somme de trois nombres consécutifs ainsi que les multiples de trois (étant bien entendu que des essais préalables sur des exemples auront permis de se convaincre que cette propriété semble bien vraie). Le rôle des signes opératoires est ici capital puisque c'est le sens de l'opération qui va fonder les transformations que peuvent proposer les élèves :

- $n \times 3$ peut être considéré comme $n + n + n$, ce qui permet de dire que si on ajoute 1 en même temps que l'on retranche 1, on ne change pas le résultat, d'où $n \times 3 = (n-1) + n + (n+1)$

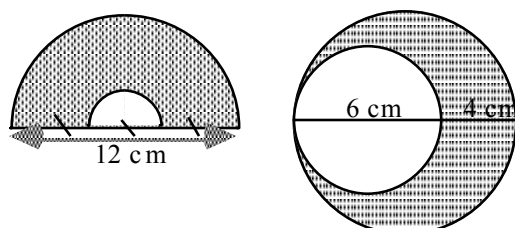
- $n + (n+1) + (n+2)$ peut être considéré comme $n+n+1+n+2$, ou encore comme $n+n+n+3$, c'est à dire $n \times 3 + 3$. Se pose alors le problème très intéressant de savoir si $n \times 3 + 3$ est ou non un multiple de trois. La question ne sera bien sûr pas traitée de la même façon si elle est abordée en cinquième ou en troisième, si elle vient en préambule ou en application de l'étude de factorisations.

Cinquième

1- Démontrer que la somme de deux multiples de sept est un multiple de sept.

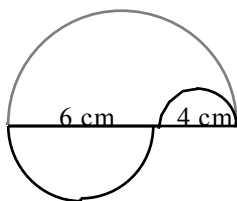
2- Démontrer que la somme de deux nombres impairs est un nombre pair.

3- Démontrer que les deux parties grises ont la même aire.



4- (Hachette-Cinq sur cinq)

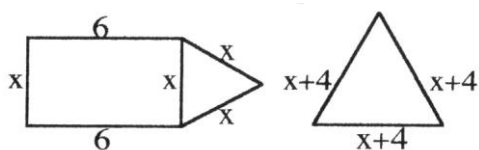
Comparer la longueur de la courbe supérieure (en pointillés) et celle de la courbe inférieure (en traits pleins).



5- (Hachette-Cinq sur cinq)

De combien le produit $5k$ augmente-t-il quand on augmente k de 1 ? de 3 ? de 6,4 ?

6- (Hachette-Cinq sur cinq)



Laura affirme que ces deux figures ont le même périmètre. A-t-elle raison ?

7- (Hatier-Triangle)

Choisir un nombre, retrancher 3, multiplier le résultat par 2, ajouter 6 puis retrancher le double du nombre de départ. Que remarque-t-on ? Est-ce toujours vrai ?

8- (Hatier-Triangle)

On ajoute 1 au numérateur et au dénominateur d'une fraction $\frac{a}{b}$. La fraction obtenue est-elle toujours plus petite que $\frac{a}{b}$?

Développement / factorisation - Codage - (Arithmétique)

Développement / factorisation - Codage - (Arithmétique)

Développement / factorisation - Codage - (Aires)

Cet exercice, ainsi que le suivant permet de travailler sur la nature de la lettre π , ainsi que sur les notions de valeur exacte et de valeur approchée.

Développement / factorisation - Codage - (Périmètres)

Développement / factorisation

On peut généraliser pour arriver à $5x(k+a) = 5xk + 5xa$.

Développement / factorisation - Réduction - (Périmètres)

La comparaison peut se faire sans réduction littérale, mais ce peut être une occasion de travailler sur les différentes écritures possibles d'une expression littérale.

Développement / factorisation - Réduction - Codage - (Jeu)

La nécessité du codage vient ici de la généralisation.

Valeur numérique d'une écriture littérale - Test - (Comparaison de fractions)

Un contre-exemple suffit pour répondre à la question posée.

7- (Hatier-Triangle)

x et y sont des nombres supérieurs à 10. Ranger par ordre croissant les nombres :

$$\frac{x}{y}, \frac{x+5}{y}, \frac{x-5}{y}, \frac{x-10}{y}$$

pour x = 12 et y = 15,
puis pour x = 23 et y = 35.

Cet ordre dépend-il des valeurs données à x et y ? Expliquer la réponse.

8- (d'après Petit x)

Voici une liste de six nombres :

2	3	5	8	13	21
---	---	---	---	----	----

Les deux premiers sont choisis au hasard, les suivants sont obtenus en ajoutant les deux qui précèdent : $2 + 3 = 5$; $3 + 5 = 8$ et ainsi de suite.

En ajoutant ces six nombres, on obtient une somme S : "Cette somme S est égale à 4 fois le 5^{ème} nombre."

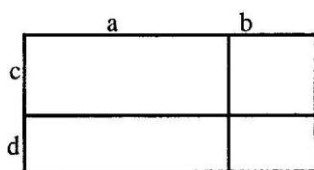
a) Vérifier cette affirmation sur l'exemple proposé.

b) Tester cette égalité avec comme nombre de départ 4 et 7, puis 23 et 41, et enfin avec deux nombres de ton choix.

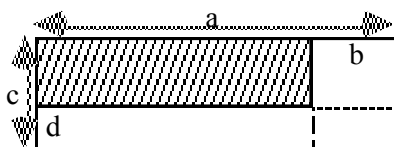
c) Les deux nombres de départ sont a et b. Ecris les six nombres. Calcule S et prouve que l'affirmation est toujours vraie.

Quatrième

1-



Comment s'écrit l'aire du grand rectangle ?
Donner la réponse sous la forme d'une somme de 4 termes et sous la forme d'un produit.



Même question pour le rectangle hachuré.

2- Somme ou produit ?

$3+8 \times 5$ $a+2a$ $a \times a$ $a+7$ $5ab$ $(6+a) \times 5$

Valeur numérique d'une écriture littérale - Test - (Comparaison de fractions)

Développement / factorisation - Réduction - Codage - (Jeu)

Cette activité peut être l'une des premières proposées en cinquième pour aborder le calcul littéral. Elle permet en effet d'introduire des lettres comme outil de travail dans une situation où l'on veut établir une propriété.

De plus, il y a ici une véritable nécessité de transformer une somme en produit pour démontrer l'affirmation proposée.

Double distributivité - (Illustration géométrique)

Reconnaissance de formes - Codage

3- Parmi les expressions ci-dessous, lesquelles représentent le même nombre ?

a ; $a+a$; a^2 ; $a+1$; $1a$; $2+a$; $a \times a$; $2a$

4- Sur chaque ligne, entourer d'une même couleur les expressions qui sont égales.

première ligne :

$2a \times 3b$; $2 \times (3ab)$; $5ab$; $2 \times 3ab$; $6ab$

deuxième ligne :

$(4a) \times (5b)$; $45ab$; $4a5b$; $(4 \times 5)ab$; $2ab \times 10$

troisième ligne :

$6a$; $2a+3$; $2 \times (a+3)$; $2a+6$; $5a$

Troisième

1- En observant le produit suivant : 83×87 , on peut remarquer que le résultat 7221 est composé, si on l'observe de gauche à droite, de 21, produit de 7 par 3 et de 72, produit de 8 par 9 [8+1].

Observer, de la même façon le produit de 42 par 48, puis celui de 65 par lui-même (65^2).

Démontrer que cette remarque est vraie pour tous les produits de deux nombres compris entre 10 et 99, ayant le même chiffre des dizaines et dont la somme des chiffres des unités est 10.

Reconnaissance de formes - Codage

Reconnaissance de formes - Codage

L'intérêt réside ici dans la comparaison des écritures proposées. Le travail de différenciation de ces écritures est l'occasion de faire le point sur les différentes propriétés et les différents codages connus.

Double distributivité - (Ecriture d'un nombre dans le système décimal - Problème à deux inconnues)

La principale difficulté se trouve être la traduction mathématique du problème : sans doute les élèves auront-ils besoin d'être aidés dans ce domaine. Plusieurs voies sont possibles mais on ne peut pas faire l'économie du travail sur la décomposition des entiers.

2- (Règles données par Viète dans ses Zététiques)

Démontre que les affirmations suivantes sont toujours vraies.

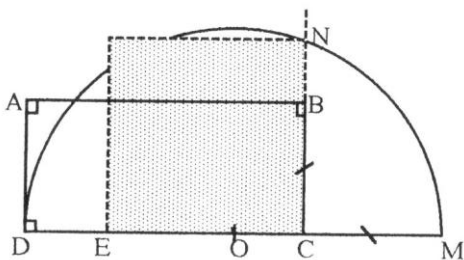
- Le double du produit de deux nombres, ajouté à la somme de leurs carrés est égal au carré de leur somme.
- Le double du produit de deux nombres, soustrait à la somme de leurs carrés est égal au carré de leur différence.
- Le carré de la différence de deux nombres, ajouté à quatre fois leur produit est égal au carré de leur somme.
- Le carré de la somme de deux nombres, diminué de quatre fois leur produit est égal au carré de leur différence.
- Le double de la somme des carrés de deux nombres, diminué du carré de la somme de ces deux nombres est égal au carré de leur différence.
- Lorsqu'on divise la différence des carrés de deux nombres par la différence des nombres, on obtient leur somme.
- Lorsqu'on divise la différence des carrés de deux nombres par la somme des nombres, on obtient leur différence.
- Le carré de la différence des carrés de deux nombres, ajouté au carré du double produit de ces nombres, est égal au carré de la somme de leurs carrés.

3- (D'après Marolois - 1617)

ABCD est un rectangle dont la longueur est a et la largeur b .

Sur la demi-droite [DC) on place M de telle façon que $CM = b$, puis on trace le demi-cercle de diamètre [DM] qui coupe la demi-droite [CB) en N. Le segment [NC] est le côté d'un carré. Démontrer que ce carré a la même aire que le rectangle ABCD.

Indications : Calculer OM, OC puis NC^2 .



Egalités remarquables - (Intérêt historique)

Toutes ces formulations illustrent bien le fait que les écritures littérales sont un moyen beaucoup plus économique que les mots pour énoncer des propriétés. Elles permettent de travailler la distinction entre

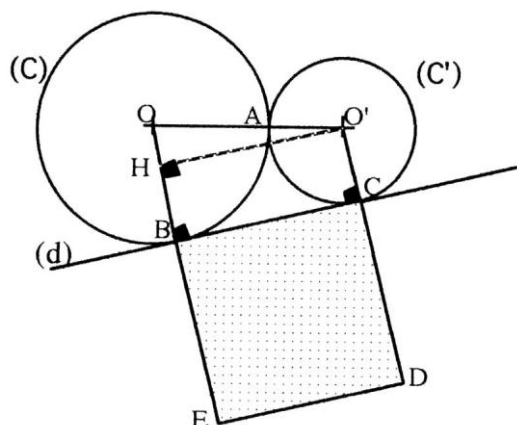
- le carré de la somme de deux nombres,
- la somme des carrés de deux nombres par exemple, et les priorités que ces formulations comportent.

Egalités remarquables - (Intérêt historique - Pythagore - Aires)

L'objectif est la construction d'un carré de même aire qu'un rectangle donné.

La recherche de la démonstration peut être proposée sans indications.

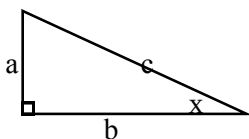
4-



Les cercles (C) et (C') ont pour rayons R et R' ($R > R'$). Ils sont tangents extérieurement en A. La droite (d) est une tangente commune aux deux cercles, et, en utilisant les points B et C, on a tracé le carré BCDE.

Prouver que l'aire de ce carré est égale à quatre fois le produit des rayons.

5-



Démontrer que $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$.

6- Vérifier que les égalités suivantes sont justes :

$$3 \times 4 \times 5 + 4 = 4^3$$

$$8 \times 9 \times 10 + 9 = 9^3$$

$$19 \times 20 \times 21 + 20 = 20^3$$

Si on appelle n le deuxième facteur du produit, écrire en fonction de n la formule générale qui doit toujours être vraie.

Démontre que cette formule est vraie.

Egalités remarquables - (Aires - Propriétés géométriques)

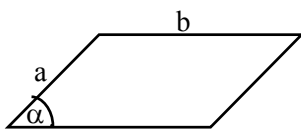
Même si aucune connaissance concernant les cercles tangents n'est au programme, ce problème amène les élèves à se poser des questions concernant les distances, questions qui peuvent être traitées à l'aide de l'inégalité triangulaire.

Démonstration de propriétés du cours - (Trigonométrie - Pythagore - Travail sur les quotients et sur les égalités)

Développement / factorisation - Egalités remarquables

7-

a) Trouver la formule qui donne l'aire d'un parallélogramme en fonction de a , b et α .



b) Trouver la formule qui donne l'aire d'un triangle équilatéral en fonction de son côté.

Recherche de formules

Les élèves pensent souvent que les formules sont issues d'une sorte de "génération spontanée", qu'elles sont données par les livres, par le professeur, mais qu'elles sont indispensables pour faire des calculs.

On peut faire évoluer cette conception en leur demandant d'en construire dans des situations où celles qu'ils connaissent ne fonctionnent pas, pour les amener ainsi à comprendre que les formules toutes faites n'existent pas, qu'elles sont le fruit d'une construction des mathématiciens pour éviter des répétitions fastidieuses dans leur travail.

3-2 Les équations

L'objectif principal des situations proposées est la construction de la notion d'équation comme outil de résolution de problèmes. En sixième et cinquième, cette approche s'appuie sur des essais (tests) successifs qui vont donner du sens au concept de solution d'une équation ou d'une inéquation. En quatrième et troisième, il s'agit davantage de mathématiser le problème sous une forme codée puis de résoudre.

La résolution des équations permet, en quatrième puis en troisième, de mettre en œuvre, de manière très active, les propriétés fondamentales du calcul littéral en plus des règles concernant plus directement la conservation des égalités. Le choix des énoncés est fondamental dans ce domaine : on trouve, par exemple, dans les petits problèmes proposés par Diophante dans ses Livres arithmétiques une variété de situations simples qui permettent d'utiliser ces règles. Etudions l'un d'eux :

"Quel nombre faut-il ajouter à 100 et à 20 pour que le plus grand résultat soit le triple du plus petit ?"

L'équation $100 + x = 3 \times (20 + x)$ devient $100 + x = 60 + 3x$ par développement du deuxième membre, puis $40 = 2x$ par conservation des égalités par addition ou soustraction d'un même nombre aux deux membres et réduction dans les membres, et enfin $20 = x$ ou encore $x = 20$ par conservation des égalités par multiplication ou division des deux membres par un même nombre.

Dans ce deuxième exemple :

"Existe-t-il un nombre qui, ajouté à son tiers fasse 18 ?"

on se trouve, avec $x + \frac{x}{3} = 18$ dans l'obligation de réduire dans un cas où les coefficients de x ne sont pas tous entiers, ce qui permet de retravailler sur le sens de la réduction.

D'une manière générale, on peut considérer que la résolution des équations (du premier degré à une inconnue) peut se décomposer au plus en trois étapes :

› vers une première forme canonique : $ax + b = cx + d$ avec a , b , c , d quelconques et éventuellement nuls, par utilisation des règles de développement, factorisation et réduction,

› vers une deuxième forme canonique : $ex = f$ (ou $f = ex$) par utilisation des règles de conservation des égalités et de la règle de factorisation / réduction,

› vers la solution $x = \frac{f}{e}$ par utilisation des règles de conservation des égalités, ou par définition de la division vue depuis l'école primaire.

Notre choix a été guidé par les critères suivants :

- nécessité d'effectuer des changements d'écritures pour résoudre le problème,
- variété des supports (numériques et géométriques),
- passage du langage naturel au vocabulaire spécifique puis à sa traduction mathématique codée,
- réinvestissement des connaissances sur les nombres et les opérations.

Sixième

Le volume d'un pavé est de 48 cm^3 .

a) Trouve toutes les dimensions possibles sachant que ce sont des nombres entiers de cm.

b) Pour chaque solution, calcule l'aire du pavé.

c) Trouve la troisième dimension du pavé si les autres sont 4 cm et 5 cm, puis 10 cm et 6 cm.

Cinquième

1- À la boulangerie vous achetez des brioches à 4 francs et des croissants à 3, 50 francs.

Si on appelle x le nombre de brioches et y le nombre de croissants achetés, quelle somme vous rendra la boulangère sur un billet de 50 F ?

Quelles sont les valeurs possibles de x et de y ?

2- (Bordas) Caroline mesure 1, 60 m et pèse 49 kg, Cécile mesure 1, 75 m et pèse 54 kg, Christelle mesure 1, 55 m et pèse 47 kg.

On désigne la taille en mètres par x et par y le poids en kilogrammes d'une personne. Ecrire l'égalité qui traduit la phrase : "Le centuple de ma taille en mètres est égal au triple de mon poids en kilogrammes plus 13".

L'une des trois jeunes filles ne peut pas dire cette phrase. Laquelle ?

Multiplication et division - (Aire et volume)

La dernière question permet d'écrire des multiplications "à trous" dont les solutions ne sont pas entières, voire inférieures à 1.

Codage mathématique - Test - (Situation "concrète")

La recherche de toutes les valeurs possibles pour x et y nécessite une organisation rigoureuse du plan de travail, ainsi qu'une grande persévérance.

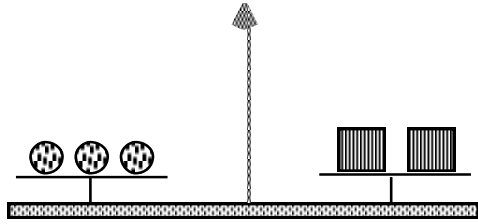
Les solutions sont nombreuses, et l'un des intérêts réside dans le fait que seuls les entiers sont acceptables alors que d'autres nombres vérifient la relation

$$4x + 3,5y < 50$$

Codage mathématique - Test - (Situation "concrète")

Comme dans l'exercice précédent, le travail sur le codage est un premier pas vers la mathématisation d'un problème.

3- (Bordas)

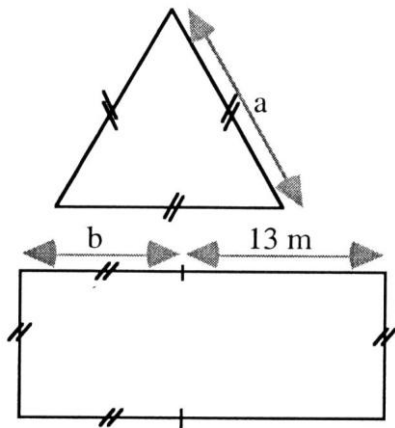


Pour traduire cet équilibre, on écrit :

$$3b = 2c$$

- Peut-on réaliser cet équilibre avec des boules de 75 g et des cubes de 115 g ?
- Si une boule pèse 75 g, quel devrait être le poids d'un cube pour réaliser l'équilibre ?
- Si un cube pèse 165 g, quel devrait être le poids d'une boule pour réaliser l'équilibre ?

4- (Bordas) Observer les figures et répondre aux questions.



- Que représente le calcul $3 \times a$ pour le triangle ?
- Que représente le calcul $4 \times b + 26$ pour le rectangle ?
- On veut que le périmètre du triangle soit supérieur à celui du rectangle.
- Traduire cette situation par une inégalité.
- L'inégalité est-elle vraie :
 - pour $a = 32$ m et $b = 17$ m ?
 - pour $a = 25$ m et $b = 12$ m ?
 - pour $a = 15$ m et $b = 5$ m ?

Multiplication et division – (Situation “concrète”)

Il s'agit de résoudre des équations simples du type $ax = b$, a et b étant connus.

Le choix de b et c ne semble pas très judicieux, d'autant que les écritures $3b$ et $2c$, en ne faisant pas apparaître le signe de la multiplication, conduisent tout naturellement les élèves à considérer que $3b$ et $2c$ sont des raccourcis pour 3 boules et 2 cubes. Il est indispensable que nos élèves comprennent que les lettres représentent des nombres et, pour cela, nous pensons, qu'au moins en cinquième, il est nécessaire de conserver le signe de la multiplication, même si, parallèlement, quand la situation s'y prête, on peut utiliser les deux formes.

Développement / factorisation - Test sur des inégalités - Lecture de codage - (Périmètres)

Il serait intéressant de prolonger ce travail en faisant chercher d'autres valeurs de a et de b qui conviennent, soit dans l'absolu, soit en fixant d'autres contraintes (est-ce que a est toujours plus grand que b , si a est un nombre entier, est-ce que b est obligatoirement un nombre entier ? etc ...)

5- (Hachette-cinq sur cinq) Retrouver pour chaque phrase la bonne valeur de x parmi les suivantes :

2, 75 ; 5, 5 ; - 6, 6 ; 2, 2 ; 2, 5 ; 6, 6 ; 0, 4

Le produit de x par 4, 4 est 11. Le produit de 11 par x est 4, 4. La somme de 4, 4 et de x est 11. La somme de 11 et de x est 4, 4. Le quotient de 11 par x est 4. Le double de x est 11. La somme de 4, 4 et du triple de x est 11. La différence entre 4,4 et 11 est x .

6- (Belin-décimale) Equations bizarres (tirées de Logic-Flip 1993) :

Si $\blacktriangle \blacktriangle \blacktriangle \bigcirc \bigcirc = \blacktriangle \bigcirc \bigcirc$
combien de $\blacktriangle$ vaut un $\bigcirc$?

7- (Nathan - transmath)

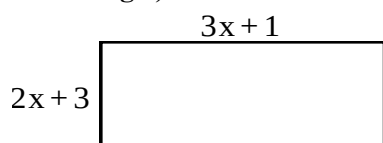
En choisissant les valeurs de k , a et b parmi les nombres 8, 9, 10 ou 11, je trouve 189 en calculant $ka + kb$. Retrouve les valeurs que j'ai choisies pour k , a et b .

8- (Hatier-Pythagore) Audrey dit que :

“ Si $x = \frac{1}{4}$ et $y = 1$, alors $3y = 4x + 2$ ”.
Vrai ou faux ?

“Si $x = \frac{3}{7}$ et $y = \frac{9}{7}$, alors $3y > 4x + 2$ ”.
Vrai ou faux ?

9- (Hatier-triangle)



Prouver que si le périmètre du rectangle est 28, alors, ce rectangle devient carré.

Vocabulaire - Codage - Opérations

Cet exercice demande une grande attention, mais il fait travailler le sens des opérations et c'est une occasion de manipuler des égalités équivalentes, ce qui est un premier pas vers la résolution d'équations

Codage - (Jeu - Observation)

Cet exercice doit pouvoir être abordé en sixième.

Développement / factorisation - Test - (Diviseurs)

Le choix des nombres n'offre qu'une seule possibilité, le seul diviseur de 189 parmi ceux qui sont proposés étant 9.

On peut proposer d'autres données, par exemple :

11 ; 12 ; 13 ; 14 avec 300.

Test - (Fractions)

Le choix des valeurs proposées peut être amélioré de façon à réinvestir plus de connaissances sur les opérations avec les fractions. Par exemple : $x = 1/8$ et $y = 5/6$ ou encore $x = 3/2$ et $y = 7/3$.

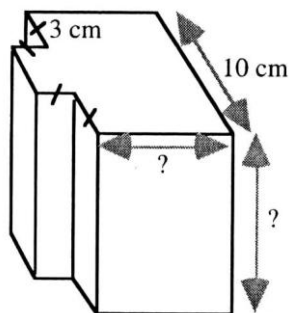
Développement / factorisation - (Périmètre - Propriétés géométriques)

La formulation est très ouverte : la démarche est à construire et place la notion de solution d'une équation au centre du problème. En 5^{ème}, il n'est bien sûr pas question de conduire une résolution d'équation comme en 4^{ème}; la valeur de x peut être trouvée par essais successifs.

On peut aussi changer les données pour rendre la solution moins évidente, par exemple :

$4x + 3$ et $6x - 2$ avec pour périmètre 52.

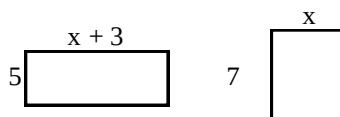
10- (IREM de Poitiers)



Ce pichet peut contenir 1 litre de liquide.
Trouve les dimensions manquantes, sachant que la mesure de la hauteur et de l'aire de la base sont des nombres entiers.

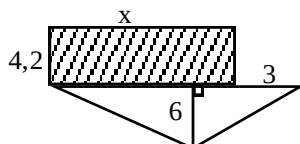
Quatrième

1-



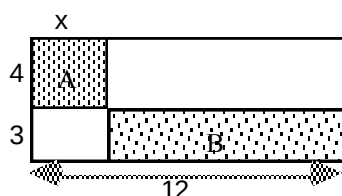
Peut-on trouver x pour que les deux rectangles aient la même aire ?

2-



Peut-on trouver x pour que l'aire du rectangle hachuré soit égale à celle du triangle blanc ?

3-



Quelle valeur faut-il donner à x pour que l'aire du rectangle B soit le triple de l'aire du rectangle A ?

Développement / factorisation - Codage - Test - (Volume)

Deux inconnues pour une équation dont la forme la plus facile à utiliser est :

$$h \times (12 + 10) = 1000$$

Les solutions sont nombreuses et leur recherche nécessite une gestion méthodique du travail qui peut être centrée sur les diviseurs de 1000.

Développement / factorisation - (Aire)

L'équation obtenue contient l'inconnue dans les deux membres.

Développement / factorisation - (Quotient - Aire)

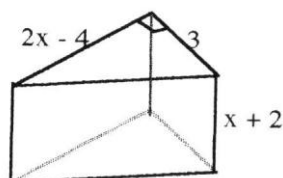
L'équation obtenue est de la même forme que la précédente, avec une difficulté supplémentaire concernant les opérations.

Développement / factorisation - Codage d'information - (Aire)

La principale difficulté réside ici dans l'écriture de l'équation.

On peut jouer sur les opérations et donc sur la variété des règles du calcul littéral mises en jeu.

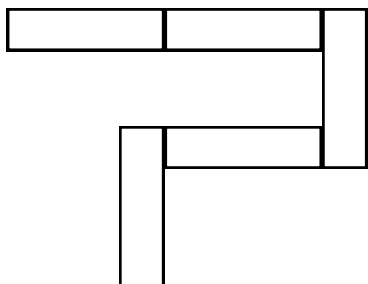
4-



Le nombre x est supérieur à 2. Ce prisme a pour base un triangle rectangle.

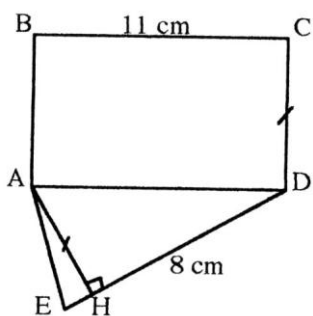
- Quelle est l'aire de ce triangle en fonction de x ?
- Calculer le volume du prisme en fonction de x .
- Quelle doit être la valeur de x pour que ce volume soit égal à 36 ?

5- Toutes les dimensions sont données en cm.



Tous les rectangles de cette figure sont identiques, la mesure de leur largeur est 3. Le périmètre total de la figure est 80. Quelle est la mesure de la longueur des rectangles ?

6-



ABCD est un rectangle.

AH = CD et ED = 8.

On veut que l'aire réelle totale de cette figure soit 138 cm^2 .

Construis, dans ce cas, cette figure à l'échelle $1/2$.

Développement / factorisation - (Volume)

On obtient une équation du second degré qui peut être résolue, soit par essais successifs, soit par un raisonnement sur les opérations.

Les transformations d'écritures facilitent grandement la recherche de la solution.

Développement / factorisation - (Périmètre - Analyse d'une figure)

La solution est décimale, ce qui élimine pratiquement toute chance de réussite par essais. Le codage est une aide efficace et permet d'écrire une équation simple.

Développement / factorisation - (Aire - Construction à l'échelle. Propriétés géométriques)

La mise en équation n'est pas très complexe, à condition d'avoir désigné correctement l'inconnue. En revanche, la construction du triangle est moins évidente pour les élèves. Ils ont plutôt tendance à poursuivre les calculs pour trouver HD, puis AE, pour construire.

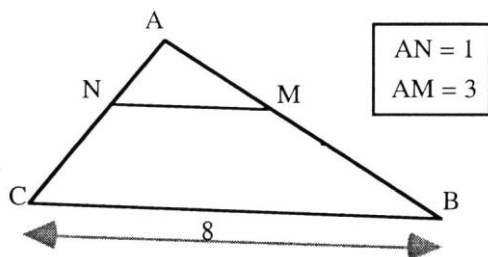
C'est une bonne occasion pour les amener à réfléchir sur le rôle des calculs dans un problème.

7- DIOPHANTE - (Livres arithmétiques - Extraits du livre I)

- Je veux retrancher 100 et 10 à un même nombre, et que le plus grand résultat soit le quadruple du plus petit. Quel nombre faut-il choisir ?
- Même problème avec 100 et 20.
- On veut retrancher un même nombre de 20 et de 100, et que le plus grand résultat soit le sextuple du plus petit. Quel nombre faut-il choisir ?
- On veut ajouter à 20 et retrancher à 100 un même nombre, de façon que le premier résultat obtenu soit le quadruple du second. Quel nombre faut-il choisir ?
- On veut ajouter 20 et retrancher 100 à un même nombre, de façon que le plus grand résultat soit le quintuple du plus petit. Quel nombre faut-il choisir ?

Troisième

1-



Construire, en vraie grandeur (unité : le cm), la figure représentée ci-dessus, sachant que les droites (MN) et (BC) sont parallèles, et que le périmètre du triangle ABC est 17.

Développement / factorisation - Codage (Voir 3-2, introduction sur les équations) - (Vocabulaire)

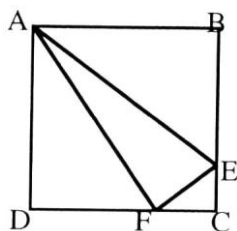
Dans tous ces exercices, aucune difficulté opératoire, mais un travail important est nécessaire sur le codage correct des informations et notamment sur le vocabulaire : retrancher est mal connu des élèves.

De plus, les propriétés fondamentales du calcul littéral sont utilisées en situation et la vérification, rapide, permet de valider ou non la solution.

Système d'équations - (Thalès)

Le choix des inconnues n'est pas guidé par l'énoncé : c'est la nécessité de la construction qui l'impose. ce choix peut conduire à des calculs plus ou moins complexes suivant que l'élève désigne AC et AB ou NC et MB comme inconnues.

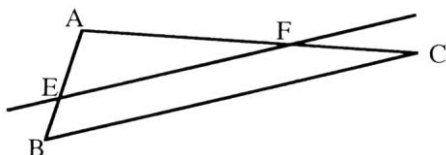
2-



ABCD est un carré de côté 10 cm, et le point F est placé sur le segment [CD] de telle façon que $FC = 2,5$ cm.

Où faut-il placer le point E sur le segment [BC] pour que le triangle AEF soit rectangle ?

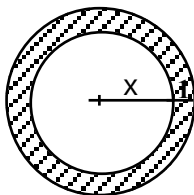
3-



On veut couper le triangle ABC par une parallèle à (BC) de telle manière que les périmètres du triangle AEF et du trapèze EFCB soient égaux.

Comment doit-on tracer cette parallèle ?

4- La couronne



Le rayon du cercle intérieur est x en cm et la largeur de la couronne est 1 cm.

a) Démontrer que l'aire de la couronne peut s'écrire $A = \pi (2x + 1)$.

b) Pour quelle valeur de x l'aire est-elle égale à 6 cm^2 ?

Égalités remarquables - (Pythagore)

Deux possibilités sont à étudier : triangle rectangle en F ou triangle rectangle en E ? Dans le premier cas on obtient une équation du premier degré :

$$20x = 162,5,$$

et dans l'autre une équation du second degré :

$$2x^2 - 20x + 50 = 0$$

qu'il faut factoriser à l'aide des identités remarquables après simplification par 2.

Système d'équations - (Thalès)

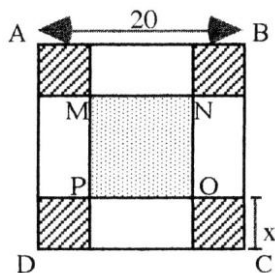
Il s'agit a priori du même type d'exercice que l'exercice 1, mais sans données chiffrées, ce qui complexifie beaucoup le travail. C'est l'occasion de conduire une réflexion sur le rôle des lettres dans les calculs.

On peut imaginer une variante beaucoup plus simple dans laquelle on donnerait les mesures des trois côtés du triangle, ou encore en partant d'un triangle équilatéral (ou isocèle).

Égalités remarquables - (Aire du disque)

Dans la deuxième question, on peut retravailler sur la notion de valeur exacte et de valeur approchée : le nombre π figurant dans la solution, c'est l'occasion de revenir sur la fonction particulière de cette lettre dans les calculs.

5-



ABCD est un carré de côté 20 et les quatre petits carrés hachurés ont pour côté x .

a) Calculer, en fonction de x , l'aire du carré central MNOP.

b) Quelle doit être la valeur de x pour que l'aire du carré MNOP soit égale à la somme des aires des quatre petits carrés ?

6- Ave CESAR

Grand chambardement au camp de Babaorhum : César vient inspecter les troupes. Le centurion veut faire ranger ses légionnaires au carré mais 25 hommes sont en trop ! Il décide donc d'augmenter le côté du carré d'un homme, mais alors il lui en manque 6 ...

Quel est le nombre de légionnaires ?

7- Trouve un nombre tel que le double de son carré soit égal au triple de ce nombre.

8- Trouve deux nombres dont la somme est 35 et la différence de leurs carrés 105.

9- Quel nombre faut-il retrancher au numérateur et au dénominateur d'un quotient $\frac{a}{b}$ (a et b non nuls), pour obtenir son inverse $\frac{b}{a}$?

10- La somme de deux nombres vaut 21 et leur rapport 5. Calcule ces deux nombres.

Égalités remarquables - (Aires)

Cet exercice ne présente aucune difficulté particulière.

Égalités remarquables

Dans cet exercice de forme ludique, le choix de l'inconnue est primordial et pas forcément évident pour les élèves qui le plus souvent choisissent le nombre correspondant à la question posée.

Équation-produit

Égalités remarquables - Système d'équations

Égalités remarquables

Une difficulté : l'utilisation des paramètres a et b . On peut faire précéder cet exercice d'une recherche dans des cas particuliers.

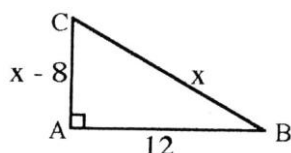
Système d'équations

La seule difficulté est la présence d'un quotient (le mot rapport mal connu des élèves).

11- La différence de deux nombres positifs vaut 12 et leur rapport $2/3$. Trouve ces deux nombres.

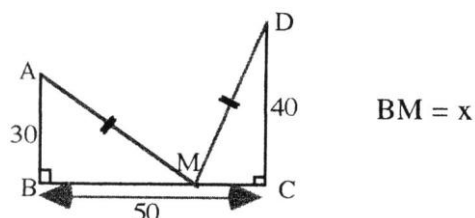
12- Lorsque deux cercles sont tangents intérieurement, la distance de leurs centres est 4. S'ils sont tangents extérieurement, la distance est 15. Quels sont les rayons de ces deux cercles?

13- (Hatier- Pythagore) Trouver x pour que ce triangle soit rectangle en A.



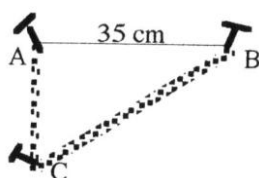
14- (Hatier- Pythagore)

a) Construire la figure ci-dessous en vraie grandeur, en prenant le mm comme unité. Préciser comment on obtient M.



b) Calculer x .

15- (Hatier- Pythagore)



Une ficelle de 49 cm est fixée en A et B à deux clous distants de 35 cm. On la tend pour former un triangle ABC rectangle en A.

Calculer alors AC et AB.

Système d'équations

La deuxième équation est souvent mal écrite. L'élève se trouve ici dans l'obligation de prendre en compte la non-commutativité de la soustraction et de la division.

Système d'équations - (Cercles tangents)

Bien que les propriétés des cercles tangents ne soient plus au programme depuis longtemps, cette situation permet une analyse intéressante de deux figures.

Le système obtenu est très simple.

Égalités remarquables - (Pythagore)

Il est intéressant de profiter de l'exercice pour susciter une réflexion sur la validité d'une solution obtenue par le calcul. Le retour à la situation de départ est trop souvent délaissé, c'est pourtant l'objectif principal des problèmes.

Égalités remarquables - (Médiatrice - Pythagore)

Cet exercice est inspiré d'un problème de Léonard De Pise (1202).

Dans l'histoire des mathématiques, le calcul littéral est le plus souvent un outil pour résoudre des problèmes géométriques (Viète, Descartes etc. ...)

Égalités remarquables - Système d'équation - (Pythagore)

L'une des équations du système est du second degré, ce qui oblige à trouver un moyen pour se tirer d'affaire.

Par substitution, on aboutit à un calcul dans lequel il est nécessaire de développer une égalité remarquable. Sinon, la factorisation de cette équation permet d'obtenir un système plus orthodoxe.

16- (Zététiques de Viète - n° 3, 4, 5 et 6 du livre 3)

• Etant donné un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle et la différence entre l'autre côté et l'hypoténuse, trouve cet autre côté et l'hypoténuse.

Application numérique : 5 et 1.

• Etant donné un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle et la somme de l'autre côté et de l'hypoténuse, trouve cet autre côté et l'hypoténuse.

Application numérique : 5 et 25.

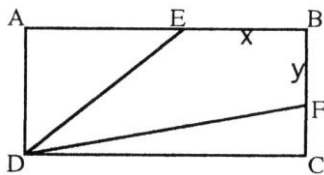
• Etant donné l'hypoténuse d'un triangle rectangle et la différence entre les deux côtés de l'angle droit, trouve les côtés de l'angle droit.

Application numérique : 13 et 7.

• Etant donné l'hypoténuse d'un triangle rectangle et la somme des deux côtés de l'angle droit, trouve les côtés de l'angle droit.

Application numérique : 13 et 7.

17- (Hatier- Pythagore)



ABCD est un rectangle tel que $AB = 72$ mm et $BC = 51$ mm. De plus, $EB = x$ et $FB = y$.

Déterminer x et y pour que les trois parties du rectangle aient la même aire.

18- (Hatier- Pythagore)

Dans un repère orthonormal, on donne :

A (2 ; -1), C (3 ; -4) et D (x ; -8).

a) Trouver les valeurs de x pour lesquelles le triangle ADC est rectangle en A, puis en C.

b) Même question pour que le triangle ADC soit isocèle en A.

Égalités remarquables - Système d'équation - (Pythagore)

Tous ces énoncés représentent une variation autour de situations toutes liées aux longueurs des côtés du triangle rectangle. L'une des difficultés est qu'il y a un paramètre dans chaque cas, mais, c'est justement l'intérêt de ce travail qui permet de mettre l'accent sur les différentes fonctions des lettres dans un problème.

Ces énoncés pourraient figurer également dans les exercices dans la partie fonctions.

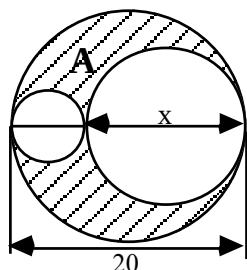
Développements – Système d'équation – (Pythagore)

La principale difficulté est l'écriture du système. Pour les élèves, l'égalité de trois nombres est difficilement vue comme une double égalité.

De plus, la solution la plus facile qui consiste à rajouter à l'égalité des 3 aires celle du tiers du rectangle, qui est une aire connue, et à obtenir ainsi deux équations à inconnues séparées est difficile à percevoir. Et cette séparation des inconnues perturbe les élèves : il semble y avoir pour eux rupture de contrat.

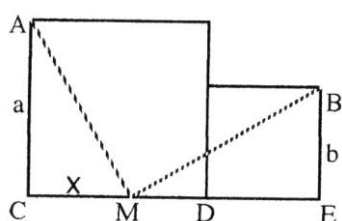
Égalités remarquables - (Pythagore - Distances dans un repère)

19-(Hatier- Pythagore)



Calculer l'aire hachurée $\mathcal{A}$ en fonction de x .
Pour quelle valeur de x l'aire $\mathcal{A}$ est-elle égale à la moitié de l'aire du grand disque ?

20-(Hatier- Pythagore)



La figure est constituée de deux carrés accolés, l'un de côté a et l'autre de côté b .
 M est un point de $[CD]$ tel que $CM = x$.

- 1) Prouver que si $MA = MB$, alors $x = b$.
- 2) Montrer qu'alors le triangle AMB est rectangle en M .

Égalités remarquables - Équation-produit

Les calculs font également fonctionner les règles concernant les puissances.

Il est indispensable de factoriser pour résoudre : la factorisation n'est pas ici un acte gratuit car l'expression sous la forme d'une somme ne permet pas de répondre à la question posée.

Égalités remarquables - Équation-produit - (Pythagore : direct et réciproque)

Il s'agit ici, à partir d'une égalité assez complexe puisqu'elle contient des paramètres ($x^2 + a^2 = b^2 + (b + a - x)^2$), d'exprimer x en fonction de b ce qui nécessite développement et factorisation.

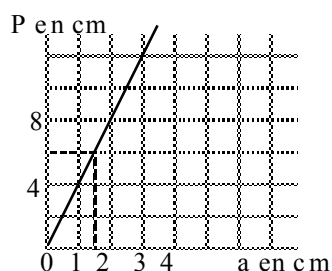
La deuxième question suppose une bonne analyse de la figure, et permet de revenir sur la nécessité d'avoir un triangle rectangle pour calculer AB : les conditions d'utilisation des propriétés sont trop souvent négligées par les élèves et il est important de les mettre en évidence chaque fois que l'occasion se présente.

3-3 Les fonctions

La notion de fonction peut être abordée dès la sixième, en particulier à partir d'exercices sur les périmètres, les aires et même les volumes.

La plupart des problèmes font intervenir également des équations. C'est l'occasion d'amener les élèves, à partir des différentes situations proposées, à prendre conscience que les lettres qu'ils utilisent n'ont pas toujours le même rôle : la distinction entre variable dans une fonction et solution dans une équation peut ainsi prendre corps.

Le registre graphique permet de traduire visuellement cette distinction. Par exemple, le périmètre d'un carré de côté a s'écrit $P = 4a$ en fonction de a ,



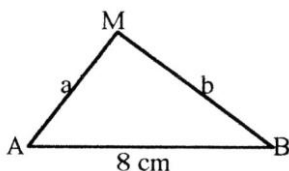
- la droite tracée représente le lien qui unit a et P ,
- la lecture graphique permet de trouver la valeur de a pour laquelle le périmètre est 6 cm, c'est-à-dire la solution de l'équation $4 \times a = 6$.

La construction de courbes à partir d'une équation est une activité importante pour la résolution de nombreux problèmes. De plus, elle permet de saisir progressivement la notion de fonction d'une variable.

Les problèmes de recherche d'ensembles de points et de constructions ont d'ailleurs été à l'origine du développement du calcul littéral : les travaux de Descartes et de Viète peuvent en témoigner (voir à ce sujet la partie 1 de ce fascicule). L'aspect construction donnant plus souvent lieu à un travail sur les équations (on en trouve des exemples dans les pages qui précèdent), nous proposerons principalement dans cette partie des problèmes relevant de la recherche de points, et, même si le registre graphique n'est pas toujours explicitement annoncé dans les énoncés, il peut toujours être utilisé de manière fructueuse pour donner du sens à la relation fonctionnelle.

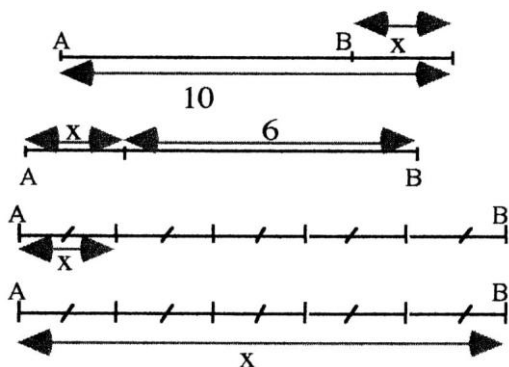
Sixième

1-



- a) Place deux points A et B distants de 8 cm, puis place un point M à 9 cm de A et à 2 cm de B. Combien y a-t-il de possibilités ?
 b) On veut placer d'autres points qui remplissent la condition $MA + MB = 11$ cm. Trouve toutes les longueurs possibles pour MA et MB, puis construis au moins 20 points comme M.

2- (**Hatier - triangle**) Ecrire la longueur AB dans chacun des cas suivants :



Équation à trou - (Construction point par point - Symétrie - Densité des décimaux)

Parmi toutes les solutions numériques, il en existe pour lesquelles la construction est impossible : on a là une première approche de l'inégalité triangulaire.

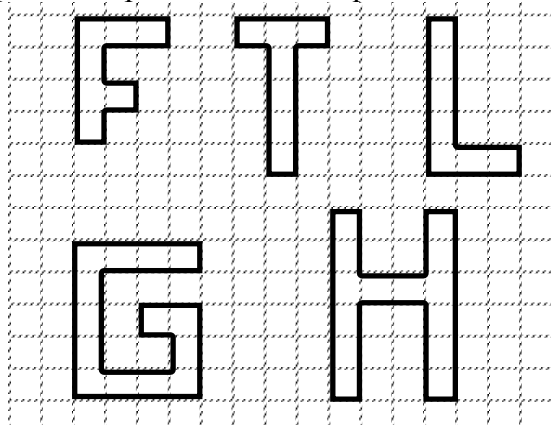
Cette activité a également l'intérêt de faire manipuler le compas de façon très répétitive sans que l'exercice soit fastidieux.

Codage - (Représentation géométrique d'opérations)

On peut prolonger l'exercice en demandant de calculer AB pour des valeurs de x (valeurs entières, fractionnaires ou décimales).

3- a) Calcule l'aire et le périmètre de chaque lettre dans le cas où le côté du carré mesure 5 mm, puis dans le cas où il mesure 1,2 cm.

b) Le côté de chaque carré mesure a. Ecris le périmètre puis l'aire de chaque lettre.



c) Range les figures par ordre croissant de leurs aires. Les périmètres se rangent-ils dans le même ordre ?

d) Quelle doit être la longueur du côté du carreau pour que la somme des périmètres soit 85,6 cm ?

Cinquième

1- La distance d'arrêt d'un véhicule qui freine est donnée par la formule :

$$d = 30xy + x^2 : 2$$

dans laquelle d est la distance d'arrêt du véhicule en cm, x la vitesse du véhicule en km/h et y la durée du réflexe de l'action du conducteur en seconde.

a) Un conducteur en bonne santé a normalement une durée de réflexe de 0,5 s. Calculer la distance d'arrêt à :

10 km/h, 60 km/h, 90 km/h,
110 km/h, 130 km/h.

b) Un conducteur fatigué a une durée de réflexe de 1 s. Calculer sa distance d'arrêt pour les mêmes vitesses.

c) À quelle vitesse maximale un conducteur fatigué peut-il rouler s'il veut s'arrêter à temps pour éviter un obstacle sur la route à 50 m devant lui ?

Équation à trou - (Aire - Périmètre)

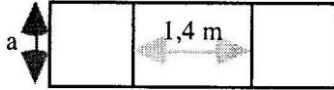
Toutes les occasions de travailler sur la non-dépendance aire / périmètre sont à saisir. La notion de périmètre est loin d'être acquise en sixième et il est important de diversifier les activités sur le sujet.

Utilisation d'une formule - (Gestion de données - Vitesse - Distance - Durée)

La formule est complexe, les unités aussi : une aide peut être prévue au démarrage. Il s'agit d'une situation de non-proportionnalité qui peut être traitée comme telle.

Un encadrement de la réponse à la dernière question peut être trouvé par observation des résultats précédents, puis une valeur plus précise peut être cherchée par essais - tests ou par le graphique.

2- (Hachette - cinq sur cinq)



Toutes les longueurs sont en mètres.
Cette table rectangulaire a deux rallonges carrées.

a) Expliquer pourquoi chacune des formules suivantes donne l'aire de la table avec ses deux rallonges :

$$A = 1,4 \times a + 2 \times a \times a$$

$$A = a \times (1,4 + 2a)$$

b) Vérifier que $A = 2,4 \text{ m}^2$ si $a = 0,8 \text{ m}$.

3- (Didier - dimathème)

Un rectangle a pour dimensions 3 et x en cm.
Parmi les expressions suivantes, quelles sont celles qui représentent, en fonction de x , le périmètre en cm du rectangle ?

$$\begin{array}{ccc} x + 3 + x + 3 & 3x & x + 6 \\ 2x + 6 & 2x(x + 3) & \end{array}$$

4- (Hachette-cinq sur cinq) On s'intéresse à des pavés droits dont la base est toujours un carré de 4 cm de côté et dont la hauteur h est "variable".

a) Reproduire et compléter le tableau.

Hauteur h	1	2	2,5		
Aire totale				96	
Volume					80

b) Montrer que l'aire totale d'un pavé peut s'écrire $32 + 16h$.

c) Montrer que le volume d'un pavé peut s'écrire $16h$.

Développement / factorisation - (Aire)

On peut prolonger cet exercice en cherchant de combien augmente l'aire si on augmente a de 10 cm.

Développement / factorisation - (Périmètre)

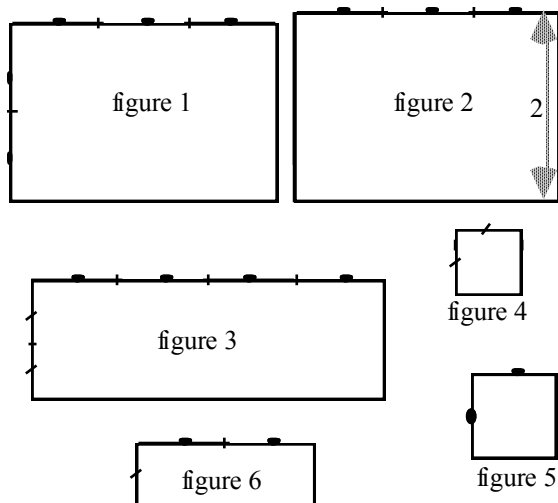
On peut prolonger cet exercice en demandant de calculer le périmètre si on transforme x en $x + 1$.

Développement / factorisation - (Volume - Aire)

On peut prolonger l'exercice par des représentations graphiques et la recherche de valeurs de h satisfaisant des conditions d'aires et de volumes.

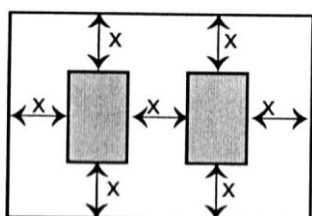
5- (D'après IREM de Lyon)

Les côtés des six rectangles ci-dessous sont formés avec les deux longueurs a et b .



- 1) Écris l'aire et le périmètre de chaque rectangle en fonction de a et de b .
- 2) Les périmètres des rectangles 1 et 3 sont-ils toujours plus grands que celui du rectangle 2 ?
- 3) L'aire de la figure 6 est-elle toujours plus grande que celle des figures 4 ou 5 ?

6- (Belin - décimale)



Dans un massif rectangulaire de 64 m sur 48 m, on a dessiné deux massifs en laissant des allées de même largeur partout.

- a) Exprimer, en fonction de x , la longueur totale des bords des deux massifs (partie quadrillée).
- b) Effectuer le calcul :
pour $x = 0,8$ m puis pour $x = 1,2$ m.
- c) Sachant qu'on a utilisé exactement 278 m de bordures, quelle est la valeur de x ?

Développement / factorisation - (Aire - Périmètre)

La comparaison des différentes écritures proposées permet de travailler sur les changements d'écritures littérales (et éventuellement de valider des règles).

La comparaison des périmètres et des aires doit aider à construire l'idée de variable : que se passe-t-il si on change les valeurs de a ou b ?

Développement / factorisation - (Périmètre)

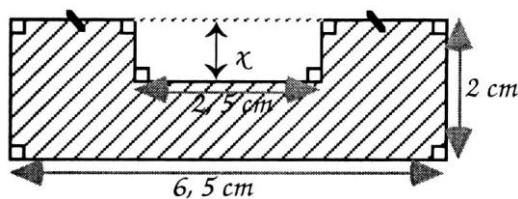
L'analyse du dessin est relativement complexe et les résultats proposés vont être divers : on retrouve le même objectif que dans l'exercice précédent.

La recherche de solution pour la dernière question nécessite une formulation "pratique" du périmètre en fonction de a .

7- (Hatier - triangle) Kelly a tapé une formule sur sa calculatrice puis elle a fait effectuer le calcul pour différents nombres. Retrouver la formule qu'elle semble avoir tapé dans chaque cas :

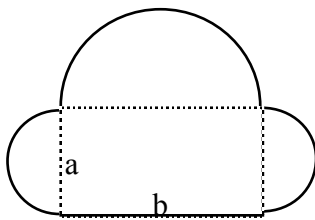
valeur de x	résultat affiché	valeur de x	résultat affiché	valeur de x	résultat affiché
4	12	5	8	3	9
5	15	6	9	4	16
6	18	7	10	5	25
10	30	10	13	10	100

8- (Belin - décimale) Exprimer, en fonction de x , le périmètre P et l'aire A de la surface hachurée.



- Calculer P et A :
pour $x = 0,8$ cm puis pour $x = 1,5$ cm.
- On veut que l'aire de cette plaque hachurée soit plus grande que le triple de sa partie gauche (délimitée par des pointillés). Quelle sera la plus grande valeur possible pour x ?

9- (Hatier - Pythagore)



- Calculer le périmètre de cette figure sachant que $a = 2$ cm et que $b = 3$ cm.
- Exprimer le périmètre p en fonction de a , b et π .
- On double a et on triple b . Calculer le périmètre de la figure ainsi obtenue.

Test - Codage - (Lecture de tableaux - Correspondance fonctionnelle)

La formule sera probablement énoncée de manière diverse (avec des mots ou des codages variés). C'est l'occasion de mettre en évidence l'avantage que procure l'utilisation de lettres dans une situation comme celle-là.

Développement / factorisation - (Périmètre - Aire)

Ce problème, comme d'autres de cette partie, pourrait se placer dans la partie équations. Cependant, si l'on fait une étude graphique pour répondre à la dernière question, on fait bien apparaître la variation des aires en fonction de x , ce qui permet une première approche du lien existant entre équation et tracé de courbes.

Développement / factorisation - (Périmètre)

L'utilisation d'un tableau permet de faire une étude sur quelques exemples. La généralisation du résultat ne pourra être traitée que sous sa forme générale. On retrouve ici l'objectif de la première série d'exercices (démonstration d'une propriété).

Le problème peut être prolongé de façon intéressante en demandant ce que devient le périmètre lorsque b est le double de a : c'est l'occasion de travailler sur l'associativité et la commutativité de la multiplication.

10- Parmi les expressions ci-dessous, lesquelles représentent le même nombre ?

a ; $a + a$; a^2 ; $a + 1$; $1 a$; $2 + a$; $a \times a$; $2a$

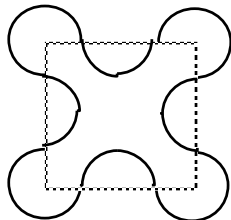
a) Pour chacune d'entre elles, en prenant comme unité le cm, dessine un rectangle dont l'aire a pour valeur cette expression, dans le cas où $a = 2,3$ puis pour $a = 0,7$.

b) Dans chacun des cas range les aires par ordre de grandeur croissante.

c) Représente graphiquement ces aires pour a compris entre 0 et 3.

Quatrième

1-



La serpentine ci-dessus est fabriquée à partir d'un carré de côté a . On appelle p son périmètre et A son aire.

a) Démontre que les formules donnant p et A en fonction de a sont :

$$p = 2,5 \pi a \quad \text{et} \quad A = \left(1 + \frac{\pi}{16}\right) a^2.$$

b) Comment faut-il choisir a pour que la longueur de la serpentine soit de 1 m ?

c) Comment faut-il choisir a pour que l'aire de la serpentine soit de 100 cm^2 ?

Changement d'écritures - Codage - (Représentation géométrique d'écritures littérales)

La comparaison des représentations graphiques permet de faire prendre conscience du rôle de la variable ($a < 1$; $1 < a < 2$; $a > 2$).

Développement / factorisation - (Périmètre - Aire)

La recherche et l'utilisation d'une formule jouent un rôle prépondérant en mathématiques.

Dans cet exemple, les calculs permettent de travailler en plus sur les fractions et les puissances, ainsi que de réfléchir sur la nature de cette "lettre" particulière qu'est π .

2- Les 7 familles

Nous sommes des points et nous habitons dans un rectangle dont les sommets ont pour coordonnées :

$(-7 ; 10)$ $(7 ; 10)$ $(7 ; -10)$ $(-7 ; -10)$

Voici nos adresses :

Famille 1 : notre ordonnée est l'opposé de notre abscisse.

Famille 2 : en divisant notre abscisse par 2 et en retranchant 5 au résultat, on trouve notre ordonnée.

Famille 3 : en multipliant notre abscisse par -3 et en retranchant 7 au résultat, on trouve notre ordonnée.

Famille 4 : notre ordonnée est égale au carré de notre abscisse divisé par 2.

Famille 5 : notre ordonnée est égale au cube de notre abscisse divisé par -4.

Famille 6 : le produit de notre abscisse et de notre ordonnée est toujours égal à 4.

Famille 7 : la somme du carré de notre abscisse et du carré de notre ordonnée est toujours égale à 25.

- Pour chaque famille trouve 4 points.
- Donne l'adresse de chaque famille sous la forme d'une relation qui lie l'abscisse x et l'ordonnée y de chaque point de la famille.
- Représente les 7 familles.
- Pour chaque famille, trouve les coordonnées des points qui habitent sur les bords du rectangle.
- Pour chaque famille, trouve les coordonnées des points qui habitent sur les axes.
- Quels sont les points qui appartiennent à plusieurs familles ?

Représentation graphique - (Opérations avec les relatifs)

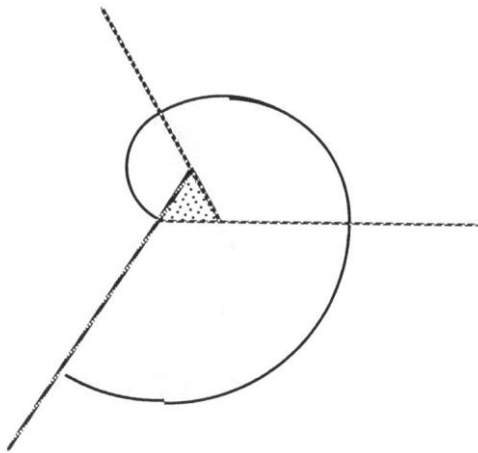
Les courbes sont variées et le cadre limitant le graphique à une fenêtre permet de centrer la recherche de points dans des limites bien précises, ce qui oblige à utiliser d'autres nombres que les entiers.

La notion de variable est ici très présente et l'expression du lien entre la variable et son image est multiple. Les trois aspects sont présents : expression par une phrase, expression par une écriture littérale (équation), représentation graphique.

3- Le triangle équilatéral dont les sommets sont les centres des arcs de cercle a pour côté x en cm.

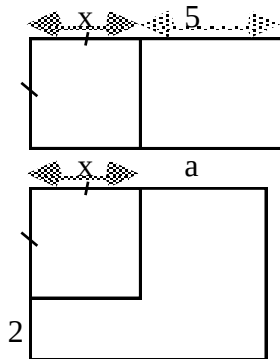
Comparer le périmètre puis l'aire de cette spirale (partie pointillée) avec le périmètre et l'aire d'un disque de rayon $2x$.

Le résultat de cette comparaison dépend-il de la valeur de x ?



Troisième

1- Les dimensions de ces deux rectangles sont données en centimètres.



1) Si $a = 8$, quelle valeur doit-on donner à x pour que la différence des aires des deux rectangles soit de 50 cm^2 ? Vérifie.

2) Toujours pour une différence de 50 cm^2 , trouve les valeurs de x qui correspondent à : $a = 9$, $a = 10$, $a = 20$ et $a = 40$.

3) Même question pour $a = 7$, $a = 5$, $a = 3$ et $a = 1$.

4) Trouve quelles sont toutes les valeurs de a possibles.

5) Trouve la formule générale qui donne x en fonction de a et fais un graphique.

Développement / factorisation - (Périmètre - Aire - Angles et arcs - Puissances)

Le calcul fait également manipuler l'addition des fractions.

On peut à travers cette activité, travailler sur la distinction entre l'expression d'une valeur en fonction de x et l'expression d'une propriété vraie quel que soit x . L'observation de contre-exemples est indispensable pour bien construire une notion.

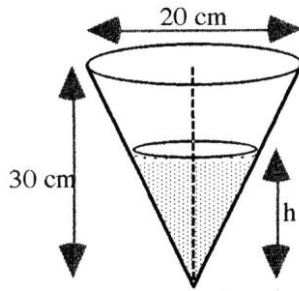
Double-distributivité - (Aire)

L'étude de la variation de a met en évidence un domaine de validité pour la situation donnée.

La représentation graphique permet de vérifier les résultats obtenus par le calcul.

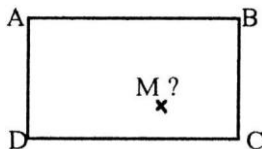
Les calculs de la première partie, très répétitifs, constituent un bon entraînement à l'utilisation de la double-distributivité.

2- Un récipient de forme conique est utilisé pour récupérer de l'eau de pluie. Sa base est horizontale.



- Calculer le rayon R de la surface horizontale de l'eau en fonction de h .
- Calculer le volume d'eau dans le récipient en fonction de h .
- Calculer le volume d'eau pour : $h = 3$, $h = 6$, $h = 10$, $h = 15$ et $h = 20$.
- S'il est tombé 400 cm^3 , la hauteur d'eau dépasse-t-elle la moitié de la hauteur totale ?
- Peut-on trouver la hauteur d'eau correspondant à un volume de 75 cm^3 ?

3-



ABCD est un rectangle.

Où faut-il placer le point M pour que :

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2 ?$$

Non-proportionnalité - (Volume - Thalès)

L'étude des résultats des premières questions permet de donner facilement une réponse à la question d) et une approximation pour la réponse e).

Dans ce dernier cas, la représentation graphique permet d'affiner la réponse dans une situation où la proportionnalité ne fonctionne pas.

Égalités remarquables - (Repérage - Pythagore)

Le choix des variables, et la nécessité d'utiliser des paramètres (indéterminés) rendent le démarrage difficile. Ce choix peut être guidé par un travail préalable sur le repérage.

On peut également rendre le problème plus simple en donnant des valeurs numériques déterminées aux côtés du rectangle.

BILAN POUR LES QUATRE ANNÉES

En sixième et cinquième :

Il s'agit d'une initiation aux écritures littérales, le calcul littéral à proprement parler ne figure pas au programme.

Sixième	Cinquième
- Recherche, dans des <i>situations concrètes</i>, d'un élément manquant dans une addition ou dans une multiplication (il n'est pas nécessaire de désigner cet élément par une lettre). - Schématisation d'un calcul dans des <i>situations concrètes</i> (aires, périmètres ...). - Utilisation des lettres, en les remplaçant à chaque usage par des valeurs numériques.	- Recherche, dans des <i>situations concrètes</i>, d'un élément manquant dans une division. On le désignera éventuellement par une lettre. - Écriture de formules d'aires ou de volumes sous forme littérale, et utilisation de ces formules. - Codage : $3a$ au lieu de $3 \times a$; ab au lieu de $a \times b$. - Test d'égalités $k(a + b) = ka + kb$ et $k(a - b) = ka - kb$ $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$; $k \neq 0$ Énonciation des propriétés sous forme littérale, mais, utilisation de ces propriétés sur des exemples numériques.

En quatrième et troisième :

On aborde la pratique du calcul littéral, MAIS, la résolution de problèmes est l'objectif fondamental, ET, les activités de développement et de factorisation doivent répondre à des objectifs précis qu'il convient d'explicitier.

Quatrième	Troisième
- Développement de $(a + b)(c + d)$. - Réduction d'expressions littérales. - Valeur numérique d'expressions littérales. - Effets de l'addition et de la multiplication sur l'ordre. - Mise en équation de problèmes du premier degré à une inconnue et résolution.	- Mise en équation de problèmes du premier degré à deux inconnues et résolution. - Utilisation d'égalités remarquables pour développer et factoriser. - Traitement de situations relevant des fonctions linéaires et affines.