

Les RELATIFS au Collège

Introduction

Partie 1 : Eclairage historique

- 1 - Une longue histoire
- 2 - Des enseignements pour la classe
- 3 - Des propositions pédagogiques

Partie 2 : L'apprentissage des relatifs

- 1 - L'introduction des relatifs
- 2 - Les quatre opérations
- 3 - Les transformations d'écritures

Partie 3 : Les contextes d'utilisation

- 1 - Les équations
- 2 - Le repérage
- 3 - Les jeux

Conclusion : Bilan pour les quatre niveaux

- Que faire en 6^{ème} ?
- Que faire en 5^{ème} ?
- Que faire en 4^{ème} ?
- Que faire en 3^{ème} ?

Introduction

Si l'introduction des nombres négatifs pour pouvoir se repérer sur une droite par rapport à une origine, comme on le fait sur un thermomètre, ne pose guère de problèmes, en revanche faire des opérations avec ces nouveaux nombres en pose plusieurs ; mais ont-ils, pour nos élèves, le statut de nombres ?

1) Les opérations sur l'ensemble des anciens nombres et des nouveaux – mais peut-on les mettre ensemble, ou en faire un ensemble ? – sont souvent introduites de façon purement formelle. Le lien avec les anciennes opérations n'est pas évident et est rarement montré. L'élève se retrouve d'emblée confronté à un ensemble de règles qui lui semblent arbitraires, qui n'ont aucun caractère de nécessité. Et du coup souvent l'image des maths en prend un...(coup).

→ *Retrouver le pourquoi de ces règles et faire percevoir aux élèves leur caractère de nécessité nous semble important pour leur formation mathématique et la représentation qu'ils pourront se faire des mathématiques.*

2) Les programmes, à juste titre, répètent d'année en année, que la résolution de problèmes doit être à la base de l'activité mathématique des élèves dans la classe, et qu'il ne s'agit pas de faire du calcul pour le calcul. Or, sur le calcul avec des relatifs, on ne trouve guère dans les manuels que des calculs pour des calculs, pour savoir les faire, sans savoir pourquoi c'est utile de savoir les faire.

Dans quels problèmes les relatifs interviennent-ils ?
Quels problèmes permettent-ils de résoudre ?

→ *Trouver des réponses à ces questions nous semble important pour mettre en cohérence les objectifs du programme et les contenus à enseigner, ainsi que pour faire percevoir aux élèves l'importance et les sens des notions que nous leur enseignons.*

3) Pour les enseignants de nombreux problèmes d'écritures et de notations se posent : quand doit-on abandonner l'écriture $(+5)$ pour l'écriture simplifiée 5 ? Une écriture telle que $-3 + 5$ désigne-t-elle $(-3) + (+5)$ avec le signe opératoire + sous entendu ou désigne-t-elle $(-3) + (+5)$ avec l'écriture 5 au lieu de +5 ?

Les choix faits par les uns et les autres amènent à des points de vue inconciliables qui bloquent rapidement toute discussion.

D'autre part en y regardant de plus près, un certain nombre de règles se construisent dans l'implicite sur la base de confusions principalement à propos du signe - qui désigne aussi bien un nombre négatif, un opposé ou une soustraction.

→ *Il nous semble donc que de mettre à plat tous ces problèmes et d'essayer de les clarifier est une tâche urgente pour essayer de rapprocher les points de vue des enseignants ou du moins les rendre moins tranchés, ce qui ne peut être que bénéfique pour les élèves qui sont ballotés de l'un à l'autre.*

C'est pour avancer dans ces trois directions que nous vous proposons ce document dans lequel vous trouverez :

- quelques éléments d'histoire des mathématiques qui peuvent nous permettre de retrouver le sens et l'intérêt de ces nombres ;
- des analyses des opérations, règles et conventions sur les relatifs ;
- des exemples d'activités d'introduction des relatifs et des opérations, ainsi que des problèmes pour les utiliser, et cela à chaque niveau du collège.

PARTIE 1 : Eclairage historique

- 1 – Une longue histoire.
- 2 – Des enseignements pour la classe.
- 3 – Des propositions pédagogiques.

Une longue histoire diverse, lacunaire et tourmentée

• Manipulation ou inexistance.	1 ^{er} siècle 14 ^e siècle	Des obstacles et une rupture épistémologique
• Utilisation avec réticence ou déni de statut : racines fausses...	15 ^e siècle 17 ^e siècle	
• Utilisation sans scrupule ni théorisation.	18 ^e siècle 19 ^e siècle	
• Théorisation : construction formelle	Fin du 19 ^e siècle	

1 . Une longue histoire

	<i>Contexte</i>
1.1 Des précurseurs. - Les Chinois (à partir du 1^{er} siècle) - Diophante (Alexandrie, 3^e siècle) - Les Indiens (à partir du 7^e siècle)	Résolution de problèmes via les équations
1.2 Leur apparition en Europe (15^e - 16^e) - Chuquet (1484) - Ecole italienne : Cardan - Bombelli (1550) - Stevin - Girard (1629)	Résolution des équations Calcul algébrique sur les grandeurs
1.3 Trois siècles de troubles et de débats (17^e - 19^e) - Descartes - Pascal - Arnauld - D'Alembert - Euler - Carnot - Cauchy - Duhamel	Algèbre. Analyse. Géométrie analytique
1.4 Epilogue : 1867 - Hankel : "Théorie du système des nombres complexes"	Théorique : construction des ensembles de nombres
→ <i>L'utilisation précède la définition : outil pour...</i> → <i>Rupture avec la perspective "réaliste" de découverte : construction formelle -invention.</i>	

1 . 1 . Les précurseurs.

LES CHINOIS

On peut dater du 1^{er} siècle, en Chine, la première apparition de nombres négatifs.

Il faut noter que dans le contexte chinois, ces nombres ont une existence propre comme opposés des positifs (ou peut-être mieux comme leurs complémentaires, comme le yin et le yang) :

– sur les tables à calculs (échiquiers), les baguettes à calculer étaient distinguées soit par la couleur (rouge pour les positifs, noire pour les négatifs), soit par la section (triangulaire ou carrée), soit par leur position (droite ou de travers),

– dans les écrits on utilise des noms spécifiques pour nombre négatif et nombre positif (fu et zhung, ou yi et cong), et on note un négatif en barrant l'un des chiffres de son opposé (24 : =IIII -24 : =IIII).

Mais il faut noter qu'ils n'apparaissent que comme des *auxiliaires de calcul* : il n'y a jamais de négatifs dans les énoncés de problèmes, qui sont le plus souvent concrets ou géométriques, et il n'y en a jamais non plus dans les réponses.

Pour comprendre ce qui a pu amener les chinois à utiliser des nombres négatifs, nous allons étudier le premier problème du *Miroir de Jade des quatre inconnues* (1303), qui utilise des connaissances et des procédés supposés connus du lecteur, et fait donc référence implicitement à des textes mathématiques chinois bien plus anciens.

Texte chinois du premier problème

一 气 混 元

今有 黄方 乘 直积 得 二十四 步

只云 股 弦和 九步

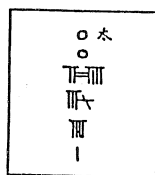
问句几何

答曰 三步

草曰 立 天元一 为句

如积求之

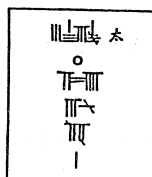
得一百六十二个 黄方乘直积式



0	tài
0	
729	
-81	
-9	
1	

以 一百六十二 乘原积 相消

得开方式



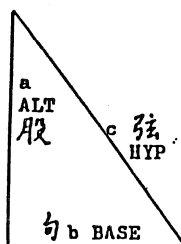
-3888	tài
0	
729	
-81	
-9	
1	

四乘 方开之

得句三步

Traduction en langage symbolique moderne

Problème à une inconnue



Soit $d(ab) = 24$,

et $a + c = 9$.

Trouver b .

Réponse: 3.

Suggestion: Soit b l'inconnue x .

Appliquer la méthode des "accumulations égales".

Obtenir $162d(ab) = 729x^2 - 81x^3 - 9x^4 + x^5$.

Soustraire $162d(ab)$.

Obtenir $-3888 + 729x^2 - 81x^3 - 9x^4 + x^5 = 0$.

Résoudre l'équation à cinq degrés.

Obtenir $b = 3$.

On remarque que les nombres négatifs qui apparaissent (-81; -9; -3888) sont des coefficients de polynômes. Et c'est en manipulant ces coefficients que l'on pourra résoudre des équations, ou des systèmes d'équations. On voit ainsi comment une écriture de type matriciel amène à utiliser des négatifs, alors qu'une écriture de type algébrique conserve la trace des opérations + et -. Soustraire x^2 à $9x$ par exemple s'écrit "naturellement" en langage algébrique $9x - x^2$. Alors que si on raisonne en termes de polynômes, il s'agit de soustraire $0 + 0x + 1x^2$ à $0 + 9x + 0x^2$. Il s'agit donc de calculer $0 - 1$ pour connaître le nombre de x^2 du polynôme résultat, et $9 - 0$ pour le nombre de x .

Voyons comment peuvent s'opérer les opérations sur les relatifs à partir de l'explicitation de la mise en équation du problème.

Données : $d \times ab = 24$ et $a + c = 9$. (où d est le diamètre du cercle inscrit dans le triangle rectangle d'hypoténuse c et de côtés a et b).

L'inconnue cherchée est b : il s'agit de transformer la première égalité en une équation à une inconnue, en exprimant d et a en fonction de b .

Expression de d en fonction de b .

Dans un triangle rectangle on sait que $d = b - (c - a)$

et que $c - a = \frac{b^2}{c+a}$ (Théorème de Pythagore).

Or $c + a = 9$ donc $9(c - a) = b^2$.

Donc au lieu de d on considère $9d$:

$9d = 9b - 9(c - a) = 9b - b^2$.

Sur l'échiquier :

ligne des constantes	0	0	0	0
ligne de l'inconnue	1	0	9	9
ligne de son carré	0	1	0	-1
ligne des cubes				
Traduction actuelle	b	b^2	$9b$	$9b - b^2 = 9d$

Expression de a en fonction de b .

$2a = (c + a) - (c - a) = 9 - (c - a)$.

On connaît $9(c - a)$, donc au lieu de $2a$ on va considérer $18a$

$18a = 81 - 9(c - a) = 81 - b^2$.

Sur l'échiquier :

81	0	81	0
0	0	0	81
0	1	-1	0
			-1
81	b^2	$81 - b^2 = 18a$	$18ab$

D'où le calcul, sur l'échiquier, de $9d \times 18ab = 162d \times ab$ qui doit être égal à $162 \times 24 = 3888$

0	0	0	-3888
9	81	0	0
-1	0	729	729
	-1	-81	-81
		-9	-9
		1	1
9d	18ab	162d×ab	162d×ab-3888

On voit bien les opérations qu'il est nécessaire de faire pour écrire l'équation sur l'échiquier :

9×1 ; 9×0 ; $0 - 1$; 9×81 ; $9 \times (-1)$; $(-1) \times 81$; $(-1) \times (-1)$; $0 - 3888$...

On voit également qu'il s'agit de manipulations dans un cadre algébrique (écriture d'une équation et sa résolution) qui font intervenir des négatifs.

 *Pour en savoir plus.*

[1] MARTZLOFF Jean-Claude. *Histoire des mathématiques chinoises*, Masson 1988.

[2] HOE John. *Les systèmes d'équations polynômes dans le Siyuan Yujian* (1303), Institut des Hautes Etudes Chinoises 1977, diffusion PUF (d'où est extrait le problème précédent que l'on trouve aussi dans [3]).

[3] IREM de Poitiers. *Actes de l'Université d'Eté sur l'histoire des Mathématiques*, La Rochelle 1988.

DIOPHANTE (Alexandrie, 3^e siècle)

On voit souvent dans son œuvre majeure, *Les Arithmétiques*, un calcul sur les relatifs à cause de ce qu'il dit dans le début de son traité, et dont voici une traduction :

Ce qui est de manque, multiplié par ce qui est de manque, donne ce qui est positif ; tandis que ce qui est de manque, multiplié par ce qui est positif, donne ce qui est de manque, et la marque distinctive à ce qui est de manque est Ψ , c'est-à-dire un Λ incomplet et renversé. Après t'avoir expliqué les multiplications des expressions que nous avons exposées plus haut, leurs divisions sont claires. Il est donc utile que celui qui aborde ce traité se soit exercé à l'addition, à la soustraction, et à la multiplication des expressions, ainsi qu'à la manière d'ajouter des expressions positives et négatives non équipollentes à d'autres expressions qui sont elles-mêmes positives, ou même positives et négatives ; enfin à la manière de retrancher d'expressions positives et d'autres négatives, d'autres expressions soit positives, soit aussi positives et négatives. Ensuite, s'il résulte d'un problème que certaines expressions sont égales à des expressions identiques, mais non équipollentes, il faudra retrancher de part et d'autre les semblables des semblables, jusqu'à ce que l'on obtienne une seule expression égale à une seule expression. Si des expressions négatives se présentent de quelque manière, soit d'une part, soit de part et d'autre, il faudra ajouter ces expressions négatives de part et d'autre, jusqu'à ce que les expressions deviennent positives de part et d'autre, puis retrancher de nouveau les semblables des semblables jusqu'à ce qu'il reste une seule expression de part et d'autre.

En fait, il ne s'agit pas du tout d'un calcul sur des nombres, mais là aussi d'un calcul sur des expressions polynomiales. Sa dernière phrase montre qu'il ne faut jamais avoir d'expression négative.

Regardons, à partir du problème 27 du Livre I des *Arithmétiques*, sur quel type d'objets calcule Diophante.

Trouver deux nombres tels que leur somme et leur produit forment des nombres donnés.

Proposons que la somme des nombres soit $\overline{\text{K}}$ (20 unités), et que leur produit soit $\overline{\text{Q}\overline{\text{C}}}$ (96 unités)

Que la différence des nombres soit $\overline{\text{S}} \overline{\beta}$ (2x). Dès lors, puisque la somme des nombres est $\overline{\text{K}}$ (20) si nous la divisons en deux parties égales, chacune des parties sera la moitié de la somme, ou $\overline{\text{L}}$ (10). Donc, si nous ajoutons à l'une des parties, et si nous retranchons de l'autre partie, la moitié de la différence des nombres, c'est-à-dire $\overline{\text{S}} \overline{\alpha}$ (1x), il s'établit de nouveau que la somme des nombres est $\overline{\text{K}}$ (20), et que leur différence est $\overline{\text{S}} \overline{\beta}$ (2x). En conséquence, posons que le plus grand nombre est $\overline{\text{S}} \overline{\alpha} \overline{\text{L}}$ (1x + 10) donc le plus petit sera $\overline{\text{L}} \overline{\text{S}} \overline{\alpha}$ (10 - 1x), et il s'établit que la somme des nombres est $\overline{\text{K}}$ (20), et que leur différence est $\overline{\text{S}} \overline{\beta}$ (2x). Il faut aussi que le produit des nombres fasse $\overline{\text{Q}\overline{\text{C}}}$ (96). Or le produit est $\overline{\text{P}} \overline{\text{A}} \overline{\text{Y}} \overline{\alpha}$ (100 - 1x²), ce que nous égalons à $\overline{\text{Q}\overline{\text{C}}}$ (96), et $\overline{\text{S}}$ devient $\overline{\text{L}} \overline{\beta}$ (2). En conséquence, le plus grand nombre sera $\overline{\text{L}} \overline{\beta}$ (12), le plus petit sera $\overline{\text{L}} \overline{\eta}$ (8) et ces nombres satisfont à la proposition.

Faisons quelques remarques

Les unités, l'inconnue, son carré... sont désignés par des symboles spécifiques $\mathbf{M}$, $\mathbf{I}$, Δ ... , et leur nombre se place à leur droite, comme si nous écrivions u 20, x 2, x^2 1, au lieu de 20, 2x, $1x^2$. L'écriture polynomiale s'obtient par juxtaposition, quand on ajoute, et dans l'ordre des puissances croissantes que nous adoptons usuellement : $x+10$ s'écrit x 1 u 10 ($\mathbf{I} \overline{\alpha} \mathbf{M} \overline{\mathbf{I}}$). Donc quand il y a soustraction, on pourrait penser que, comme chez les chinois, $-x+10$ va s'écrire x (-1) u 10. Or il n'en est rien.

Le signe -va rester un signe opératoire : on soustrait 1x à 10, et on va donc écrire u 10 - x 1 ($\mathbf{M} \overline{\mathbf{I}} \mathbf{A} \mathbf{I} \overline{\alpha}$), et à cause de cela bouleverser l'ordre des puissances croissantes. Ce que l'on peut vérifier à nouveau sur l'écriture de $100 - 1x^2$.

Il n'y a donc pas chez Diophante de nombres négatifs, mais il y a un calcul algébrique, sur des quantités positives, dans lequel fonctionnent des règles de calcul analogues à celles que nous connaissons sur les relatifs. Ce n'est donc pas par hasard si les nombres relatifs ont longtemps fait partie de l'algèbre, et étaient dénommés, dans les programmes scolaires antérieurs à 1969, les nombres algébriques.

 Pour en savoir plus.

[4] VER ECK Paul. Traduction en français des *Six livres arithmétiques et du livre des nombres polygones* de Diophante d'Alexandrie, réédition Blanchard 1959.

[5] RADFORD Luis. *Diophante et l'algèbre présymbolique*, dans L'Oouvert n° 68, IREM de Strasbourg.

LES INDIENS

Longtemps on a cru que les Indiens avaient été les premiers à utiliser des nombres négatifs. De fait leur utilisation en Inde est attestée depuis le 7^e siècle.

Comme chez les Chinois, ces nombres ont une existence propre : ils sont notés avec un point surmontant leur valeur absolue. Avec nos notations : 9 désigne notre -9. Ils apparaissent là aussi comme des coefficients de polynômes qui sont soumis à calcul pour obtenir les solutions des équations auxquelles on a réduit les problèmes.

Contrairement au contexte chinois, on trouve quelquefois des négatifs comme solution d'une équation, mais ils sont rejetés comme solution impossible du problème "concret" que traduit l'équation.

Voyons, sur deux problèmes, le statut de ces négatifs dans les problèmes indiens.

Problème 1 (extrait du traité de Brahmagupta : De l'Algèbre, 7^e siècle)

Au nombre absolu multiplié par le coefficient du carré, ajouter le carré de la moitié du coefficient de l'inconnue ; la racine carrée de la somme diminuée de la moitié du coefficient de l'inconnue, ceci étant divisé par le coefficient du carré est l'inconnue.

Dans l'exemple précédent, l'égale soustraction étant faite à partir des deux côtés, le résultat a été

$$\begin{array}{ccc} \text{yāva I yā } 10 & & (x^2 - 10x = -9) \\ & \text{rū } 9 & \end{array}$$

Ici le nombre absolu (9) multiplié par (1) le coefficient du carré, (9) et ajouté au carré de la moitié de coefficient du moyen terme, c'est-à-dire 25, fait 16 ; la racine carrée de celui-ci est 4, moins la moitié du coefficient de l'inconnue (5) est 9 ; ceci divisé par le coefficient du carré (1) donne la valeur de l'inconnue, 9.

De l'algèbre, VII^e siècle.

Brahmagupta donne la "formule" pour trouver la solution d'une équation du type $ax^2 + bx = c$, et reprend l'équation d'un problème précédent.

Pas de signe pour $=$. Les deux membres sont disposés l'un en dessous de l'autre. Les constantes sont désignées par $r\bar{u}$, l'inconnue par $y\bar{a}$, son carré par $y\bar{a}va$. L'écriture polynomiale est obtenue par juxtaposition des puissances décroissantes, comme pour Diophante, mais par contre, différence essentielle, les coefficients sont positifs ou négatifs : c'est à dire que les opérations sont réinterprétées en termes de coefficients. Les coefficients se placent, là aussi, à droite des désignations des puissances de l'inconnue.

Le terme "nombre absolu" désigne le terme constant, c'est -à-dire le c dans $ax^2 + bx = c$.

Le calcul de la solution 9 de l'équation amène Brahmagupta à calculer $(-9) \times 1$, $(-9) + 16$, $4 - (-5)$, donc à maîtriser toutes les règles de calculs sur les relatifs, qu'il donne par ailleurs dans son ouvrage.

On voit comment la notation par juxtaposition amène à la nécessité d'un calcul sur les coefficients qui sont alors des relatifs.

En voici un autre exemple plus tardif.

Problème 2 (extrait du traité de Bhaskara : De l'Algèbre, 12^e siècle)

BHĀSKARA :

Exemple. La cinquième partie de la troupe, moins 3, élevée au carré était allée dans une caverne et un singe était en vue grimpé sur une branche. Dis combien ils étaient ?

Ici la troupe est $y\bar{a} 1$. La cinquième partie est $y\bar{a} \frac{1}{5}$. Moins trois, c'est $y\bar{a} \frac{1}{5}$
 $r\bar{u} \frac{15}{5}$. Ceci élevé au carré donne $y\bar{a}va \frac{1}{25} y\bar{a} \frac{30}{25} r\bar{u} \frac{225}{25}$. Avec celui que l'on
 voit $\frac{25}{25}$, cela donne $y\bar{a}va \frac{1}{25} y\bar{a} \frac{30}{25} r\bar{u} \frac{250}{25}$.

Ceci est égal à la troupe $y\bar{a} 1$. En réduisant les deux côtés de l'équation au même dénominateur, en abandonnant le dénominateur, et en faisant des soustractions identiques, l'équation devient

$$y\bar{a}va 1 y\bar{a} 55 r\bar{u} 0$$

$$(x^2 - 55x = -250)$$

$$y\bar{a}va 0 y\bar{a} 0 r\bar{u} 250.$$

En multipliant par 4 et en ajoutant un nombre égal au carré de cinquante cinq < 30 25 > les racines extraites sont

$$y\bar{a} 2 r\bar{u} 55$$

$$y\bar{a} 0 r\bar{u} 45$$

Ces problèmes sont extraits de :

[6] DHOMBRES J. et alia. *Mathématiques au fil des âges*, Gauthier-Villars 1987.

AILLEURS

Et pendant ce temps là, que se passe-t-il ailleurs ? Rien.

En Occident, les mathématiques sont en sommeil et vivent sur la tradition euclidienne et pythagoricienne. Point d'algèbre. Essentiellement de la géométrie et des nombres. Donc point de négatifs.

Les grands mathématiciens de l'époque (du 7^e au 14^e siècle) sont alors les Arabes, qui conservent la tradition grecque et la font évoluer. Ils créent l'algèbre : al jabr est le nom donné par Al Khwarismi à la transformation d'une équation pour n'avoir plus de soustractions !

Par exemple, avec nos notations, $2x^2 + 100 - 20x = 58$ est transformée par al jabr en $2x^2 + 100 = 20x + 58$. Puis par al muqabala en $2x^2 + 42 = 20x$ et enfin par al hatt en $x^2 + 21 = 10x$ forme canonique que l'algébriste arabe sait résoudre.

Le fait de bannir le négatif amène Al-Khwarizmi, et de nombreux mathématiciens à sa suite, à ramener toutes les équations du second degré à 6 types : $ax^2 = bx$; $ax^2 = c$; $bx = c$; $ax^2 + bx = c$; $ax^2 + c = bx$; $ax^2 = bx + c$; là où les Indiens ont une seule forme : $ax^2 + bx = c$, mais en utilisant pour coefficients des relatifs.

Donc là encore on tourne le dos aux relatifs.

1 . 2 . Apparition des négatifs en Europe : 15^e - 16^e siècles.

CHUQUET

On sait peu de choses de ce mathématicien lyonnais dont les deux œuvres les plus connues, *Triparty en la Science des nombres* et *La Géométrie* (1484), sont restées sous forme de manuscrits jusqu'à une époque assez récente. Fait notable, car fort rare à l'époque : ces manuscrits sont écrits en français !

Ces deux textes nous surprennent par l'usage qui y est fait des nombres négatifs.

Dans le premier, on trouve des nombres explicitement négatifs, interprétés concrètement, avec toutes les règles de calcul sur ces nombres, et en prime des problèmes concrets avec solutions négatives auxquelles Chuquet donne un sens.

Dans le second, on trouve, pour la résolution d'un problème de géométrie, l'utilisation de puissances à exposant négatif.

Quelle est la part d'une influence possible de traités indiens, via les Arabes et l'Italie ? Quel est son apport propre ?

Ce qui est certain c'est que son œuvre fait figure de cas isolé sans lendemain. La principale cause en est sûrement le peu de diffusion de ses idées à cause du manque de support imprimé.

Extraits du Triparty tirés de : [7] ITARD Jean. *Matériaux pour l'histoire des nombres complexes*. Brochure APMEP n°2 (1969)

(Folio 35 verso). — « lon doit savoir que qui adioust ou soustrait 0 avec aucun nombre laddicion ou soustraction ne augmente ne diminue Et qui adioust ung moins avec ung autre nombre ou qui dicellui le soustrayt laddicion se diminue et la soustraction croist ainsi comme qui adioust moins 4 avec 10 laddicion monte 6 Et qui de 10 en soustrait moins 4 Il reste 14 Et quant lon dit moins 4 cest comme si une personne navoit rien et quil deust encores 4 Et quant on dit 0 cest rien simplement » folio 66 v.

« Plus et Plus moins et moins adioustons plus et moins soustrayons ».

(Folio 70 recto-verso). — « Notable a savoir Qui multiplie plus par plus et moins par moins Il en vient plus Et qui multiplie plus par moins vel e contra Il en vient tousiours moins. »

(Folio 78 v.). — « Notable a savoir Qui partyt plus par plus et moins par moins Il en vient plus Et qui partyt plus par moins ou moins par plus Il en vient moins. »

(Folios 84 verso, 85 recto). — « lon doit sçavoir que moins et plus se ont lung envers laultre ainsi comme privacion et habit ou comme debte et avoir dont 0 est disposicion commune precedente lung et laultre comme de moins 12p qui se peult ainsi mettre 0 moins 12 cest a entendre que se une personne avoit 0 $\bar{m}$ 12p Il nauroit riens si devoit encores oultre et par dessus 12p Et sil avoit 0 $\bar{p}$ 12p Il auroit 12p oultre et pardessus 0. Et ainsi fault entendre de tous aultres nombres. »

(Folio 159 r.). — « Ung revendeur a achette tant de pommes qui luy coustent tant dargent que si les revend 3 au denier Il gangne 15 ds Et si les revend 4 au denier Il gangne 14 ds Assavoir moult quantes pommes Il a achettees et aussy quelles luy ont couste Response 12 pommes o $\bar{m}$ 11 deniers.

« C'est-à-dire que cellui revendeur les a achetees et luy ont este baillees en telle maniere que si les revend cellui de qui Il les a achetees luy donne 11 ds qui luy devoit et aussi les pommes. Qui vault autant a dire que celui revendeur les a achetees dung a qui il devoit 11 ds lequel luy a dît Je vous donne les 11 ds que vous me devez et aussi ces 12 pommes pourveu que les revendez au pris dessus 'ditz. »

Chuquet calcule donc $a + 0$, $a - 0$, $10 + (-4)$, $10 - (-4)$; -4 est interprété comme une dette ; -12 peut s'écrire $0 - 12$ et $0 + 12 = 12$ "par dessus" 0. Il donne la règle des signes pour la multiplication et la division, et un joli problème concret dont il interprète la solution négative $0 - 11$.

Extrait de La Géométrie tiré de :

[8] CHUQUET Nicolas. *La Géométrie*. Introduction, texte et notes par H. L'Huillier, Vrin 1979.

TRAPEZE INSCRIT DANS UN CERCLE

Calcul du diamètre du cercle, MF

DK = 12, PG = 8, PD = GK = 6.

Soit MF // PT, et C et B les milieux de PG et DK.

Soit FB = x

$$DB \times BK = FB \times BM, \text{ donc } BM = \frac{6 \times 6}{x} = 36 \times x^{-1}$$

$$\text{d'autre part } CB = \sqrt{32}, \text{ donc } MC = 36 \times x^{-1} - \sqrt{32}$$

$$\text{Or } MC \times CF = PC \times CG$$

$$(36 \times x^{-1} - \sqrt{32}) (\sqrt{32} + x) = 4 \times 4$$

$$\sqrt{41472} x^{-2} - \sqrt{32} x^2 = 12$$

$$\sqrt{41472} x^{-2} = 12 + \sqrt{32} x^2$$

$$\text{Multiplions par } x : \sqrt{41472} = 12 + \sqrt{32} x^4$$

$$\text{Divisons par } \sqrt{32} : 36 = x \sqrt{4 \frac{1}{2}} + x^2$$

$$\text{D'où } x = \sqrt{36 + 1 \frac{1}{8}} - \sqrt{1 \frac{1}{8}}$$

$$= \sqrt{37 \frac{1}{8}} - \sqrt{1 \frac{1}{8}} = FB$$

il nous convient sercher tout le dyametre .f.m.; et pour ce faire je pose que .f.b. soit 1^1 ; puis je multiplie .d.b. par .b.k., monte 36 que je partiz par 1^1 , vient a la part $36^{\overline{1}}$ pour .b.m. desquelz je soustraiz $R^2.32...$.c.b., restent $36^{\overline{1}}$ moins $R^2.32.$ pour .m.c.; ores je multiplie .m.c. qui est $36^{\overline{1}}$ moins $R^2.32.$ par .c.f. qui est $R^2.32. \overline{p} 1^1$, monte la multiplicacion $R^2.41472^{\overline{2}}$. moins 32 plus 36 moins $R^2.32^2$. egaulx a .p.c. multipliez par .c.g. qui font 16; ores abre- vie tes parties, si auras 12 plus $R^2.32^2$. d'une part et $R^2.41472^{\overline{2}}$. d'aulture; et pourtant que l'une des parties est racine seconde de secondz moins multiplie chascune d'icelles par 1^1 , et auras $R^2.41472.$ d'ung costé et $12^1 \overline{p} R^2.32^4.$ d' aulture; et pourtant que R^2 de quartz est equipolent a se- condz, ainsi nous avons icy premiers et secondz egaulx a nombre, ou a R^2 de nombre, qui est tout ung; et pourtant par- tiz les precedens, c'est assavoir 12 et $R^2.41472.$ par le sequent, c'est par $R^2.32^4.$, et auras $R^2.1296.$ qui sont 36, et $R^2.4 \frac{1}{2}$. pour moyen dont la moictié qui est $R^2.1 \frac{1}{8}$. multi- nliees en soy et adjoustee avec 36 font $37 \frac{1}{8}$ dont sa racine seconde est $R^2.37 \frac{1}{8}.$, de laquelle convient lever la moic- tié du moyen qui est $R^2.1 \frac{1}{8}.$, restent $R^2.37 \frac{1}{8}.$ $\overline{m}$ $R^2.1 \frac{1}{8}.$, et tant monte .f.b.;

Il s'agit de calculer le diamètre mf du cercle circonscrit à un trapèze isocèle pgkd, dont on connaît les côtés pg = 8, dk = 12, pd = gk = 6.

Après avoir calculé auparavant sa diagonale pk = $\sqrt{132}$ et sa hauteur bc = $\sqrt{32}$, il calcule,

dans l'extrait cité, fb. Puis il terminera en trouvant $mf = \sqrt{148\frac{1}{2}}$.

L'intérêt, pour notre sujet, est de le voir calculer avec des exposants négatifs, et leur appliquer les règles de calcul sur les relatifs : $-1 \times 2 = -2$. La notation de l'exposant négatif est aussi intéressante : $1 \overline{m}$, comme si nous notions 1- au lieu de -1.

Notes pour la lecture du texte.

- les puissances de l'inconnue sont simplement indiquées par un exposant précédé du coefficient de cette puissance : 1^1 c'est pour nous $1x^1$, 32^4 c'est $32x^4$, $36^{\overline{1}}$ c'est $36x^{-1}$...
- la racine nième d'un nombre a est notée $R^n.a.$, les points servant de parenthèses : $R^2.32.$ c'est pour nous $\sqrt{32}$.
- $\overline{p}$ est le signe pour plus, $\overline{m}$ est le signe pour moins.
- "partir" signifie diviser.

L'ECOLE ITALIENNE : CARDAN-BOMBELLI

Dans son *Ars Magna* (1545), Cardan donne une formule, connue sous le nom de formule de Cardan, pour résoudre les équations cubiques du type $x^3 = px + q$, ($p > 0$, $q > 0$) :

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

En fait, elle a été trouvée par Scipion del Ferro en 1500, et ne peut s'utiliser si $27q^2 - 4p^3$ est négatif.

Pourtant Bombelli sait que de telles équations ont une solution que nous qualifierions de nos jours de réelle positive. Aussi dans son *Algebra* de 1572 (mais conçue plus de 20 ans avant) franchit-il le pas, et utilise-t-il la formule, même dans le cas interdit. Voici deux exemples extraits du chapitre traitant de ce type d'équation.

Exemple 1 : $x^3 = 6x + 40$.

On trouve : $x = \sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}} = 4$

Exemple 2 : $x^3 = 15x + 4$.

On trouve : $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$

et l'on peut vérifier que ce nombre 4 obtenu par des calculs "impossibles", c'est-à-dire des calculs utilisant des négatifs et leurs racines carrées (donc des imaginaires), est bien solution de l'équation.

Pour prendre la mesure du style et des notations de Bombelli, voici le problème 1 tiré de son *Algebra* (extrait de [7]).

190 L I B R O

Capitolo di Cubo eguale à l'anti, e numero.

Volendo agguagliare cubo à Tanti, e numero, pigli-
si il terzo delli Tanti, e cubifi, ed il prodotto si caui del
quadrato della metà del numero, e di quello, che resta
se ne pigli il lato, al quale si aggiunge, e caui il mezzo
del numero, e della somma, se restante se ne piglia il la-
to cubico di ciascuno da se, e questi due lati giunti in-
sieme sono la ualuta del Tanto (come si uedrà nelli in-
frazcritti esempij.)

Agguagliasi 1 $\frac{1}{2}$ à 6 $\frac{1}{2}$ p. 40. Piglisi il terzo delli
Tanti, ch'è 2, cubifi fa 8, e questo si caui del quadrato

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1. Eguale à	6. p. 40.
2.	20.
3.	20.
4.	400.
2.	8.
8.	392.
R.q. 392.	
20. p. R. q. 392. 20. m. R. q. 392.	
R. c. L. 20. p. R. q. 392. L. p. R. c. L. 20. m. R. q. 392. L	
Lati. 2. p. R. q. 2. 2. m. R. q. 2, che	
sommati insieme fanno 4, ch'è la ualuta del	
Tanto.	
della metà del numero, ch'è 400. resta 392, e di que- sto si piglia il lato, ch'è R. q. 392, e si aggiunge alla me- tà	

FIG. 3.

Quelques indications

- Notation exponentielle de l'inconnue

comme chez Chuquet : $\sqrt[3]{1}$ égale $\sqrt[6]{p}$ 40" signifie

$1x^3 = 6x + 40$.

- Rc désigne la racine cubique

- Rq désigne la racine carrée

- p c'est le +, m le -

- L..... J sont les parenthèses

Pour le problème 2, Bombelli note "piu di meno 121" notre $+\sqrt{-121}$ et "meno di meno 121" notre $-\sqrt{-121}$.

Ce qu'il faut remarquer c'est que, pour résoudre des équations du 3^e degré, donc un problème purement mathématique, Bombelli calcule sur les négatifs, qui dès lors ont partie liée avec les imaginaires par l'intermédiaire des racines carrées. Problème qui autrement est insoluble. Cependant il est à noter que les Italiens sont en retrait par rapport aux Indiens : ils ne considèrent pas d'équations à coefficients négatifs. Dans la formule précédente, p et q sont des positifs. Ils multiplient donc, comme les Arabes, les cas et les formules de résolution.

STEVIN-GIRARD

En revanche, pendant ce temps-là en Allemagne, STIFEL utilise les coefficients négatifs dans les équations, et donc utilise des règles de calcul sur les relatifs dans son *Arithmetica integra* de 1544.

Il vulgarise les signes + et -, mais appelle les négatifs des nombres absurdes, et ne les admet pas comme solution d'équations.

Quarante ans plus tard, Stevin de Bruges, dans son *Arithmétique* (1585), accepte les solutions négatives des équations. C'est sous sa plume, qu'apparaît pour la première fois l'équivalence de la soustraction d'un nombre positif avec l'addition d'un nombre négatif. Il s'ensuit que c'est aussi la première fois que, pour une équation de degré donné, les différents cas sont unifiés.

Son disciple, le Lorrain Albert Girard, reprend à son compte le travail de Stevin qu'il publie à nouveau en 1634. Dans son *Invention nouvelle en algèbre* de 1629, il va plus loin que son maître en acceptant aussi les racines imaginaires pour les équations. Girard est le premier à donner une interprétation géométrique des négatifs : "la solution par moins s'explique en géométrie en rétrogradant, et le moins recule là où le plus avance".

Voici un extrait de son ouvrage tiré de [7], où l'on trouvera d'autres extraits.

note : *faction* = coefficients, et nous noterions (3), (2), (1) par : x^3 , x^2 , x).

(Folio F recto)

Item 1(3) esgale à $300(1) + 432$, laquelle remise en ordre alterne ce sera $1(3) - 300(1)$ esgale à $0(2) + 432$; les *factions* seront 0, -300, 432 : donc trouvons trois nombres &c. Or l'un est 18 ; donc la somme des deux autres sera -18, & leur produit 24 ; parquoy 1 (2) sera esgale à $-18(1) - 24$; les deux solutions seront : $-9 + \sqrt{57}$ & $-9 - \sqrt{57}$, puis l'autre cy-dessus 18 feront les trois solutions requises : de même si 1(4) est esgale à $4(1) - 3$, alors les quatre *factions* seront 0, 0, 4, 3, & partant les quatre solutions seront :

$$1 \quad 1 \quad -1 + \sqrt{-2} \quad -1 - \sqrt{-2}$$

(Notez que le produit des deux derniers est 3).

(Folio F verso)

Touchant François Viète, qui surpasse tous ses devanciers en l'algèbre ; [...] il ne trouve que deux solutions (comme aussi en beaucoup de lieu dans ses livres) soit dit-il $124(1) - 1(3)$ esgale à 240 : Il ne trouve que 2 & 10, & je trouve encor -12, car voicy les *factions* 0, -124, -240.

Notons qu'il ordonne ses équations cubiques sous la forme $ax^3 + bx = cx^2 + d$, et partant de $1x^3 = 300x + 432$ où les coefficients sont traditionnellement positifs, il l'écrit $1x^3 - 300x = 0x^2 + 432$, pour se ramener à sa forme canonique. Ceci lui permet de bien identifier les coefficients, dont il connaît l'expression en fonction des racines de l'équation. Par exemple, il sait que c est la somme des racines, et d leur produit. Ceci lui permet, en connaissant des racines, de les trouver toutes : négatives, imaginaires, comptées 2 fois si elles sont d'ordre 2... Ce que la plupart de ses contemporains refusent.

1 . 3 . Trois siècles de troubles et de débats.

DESCARTES

En 1637, paraît la *Géométrie* de Descartes, œuvre majeure, qui sera une référence et qui influencera considérablement les mathématiques. Malgré son titre, ce traité est davantage un livre d'algèbre, qui traite de courbes et d'équations. Y rencontre-t-on des nombres négatifs ? Lisons un extrait de la troisième partie consacrée aux équations.

DESCARTES. R. *Géométrie*, Livre troisième, 1637.

Quelles sont les fausses racines. Mais souvent il arrive, que quelques vnes de ces racines sont fausses, ou moindres que rien. comme si on suppose que x designe aussi le defaut d'une quantité, qui soit 5, on a $x + 5 = 0$, qui estant multipliée par $x^3 - 9xx + 26x - 24 = 0$ fait

$$x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 = 0$$
pour vne equation en laquelle il y a quatre racines, a sçavoir trois vraies qui sont 2, 3, 4, & vne fausse qui est 5.

De plus il est aisé de faire en vne mesme Equation, que toutes les racines qui estoient fausses deviennent vraies, & par mesme moyen que toutes celles qui estoient vraies deviennent fausses : a sçavoir en changeant tous les signes + ou - qui sont en la seconde, en la quatriesme, en la sixiesme, ou autres places qui se designent par les nombres pairs, sans changer ceux de la premiere, de la troisieme, de la cinquieme & semblables qui se designent par les nombres impairs. Comme si au lieu de

$$+x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 = 0$$

on escrit

$$+x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x + 120 = 0$$

on a vne Equation en laquelle il n'y a qu'une vraie racine, qui est 5, & trois fausses qui sont 2, 3, & 4.

Côment on peut augmenter ou diminuer les racines d'une Equation, sans les connoître. Que si sans connoître la valeur des racines d'une Equation, on la veut augmenter, ou diminuer de quelque quantité connue, il ne faut qu'au lieu du terme inconnu en supposer vn autre, qui soit plus ou moins grand de cete mesme quantité, & le substituer par tout en la place du premier.

Comme si on veut augmenter de 3 la racine de cete Equation

$$x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x + 120 = 0$$

il faut prendre y au lieu d' x , & penser que cete quantité y est plus grande qu' x de 3, en sorte que $y - 3$ est esgal a x , & au lieu d' xx , il faut mettre le quarré d' $y - 3$ qui est $yy - 6y + 9$ & au lieu d' x^3 il faut mettre son cube qui est $y^3 - 9yy + 27y - 27$, & enfin au lieu d' x^4 il faut mettre son quarré de quarré qui est $y^4 - 12y^3 + 54yy - 108y + 81$.

Et il est a remarquer qu'en augmentant les vrayes racines d'une Equation, on diminue les fausses de la mesme quantité, ou au contraire en diminuant les vrayes, on augmente les fausses. Et que si on diminue soit les vnes soit les autres, d'une quantité qui leur soit esgale, elles deviennent nulles, & que si c'est d'une quantité qui les surpasse, de vrayes elles deviennent fausses, ou de fausses vrayes. Comme icy en augmentant de 3 la vraye racine qui estoit 5, on a diminué de 3 chascune des fausses, en sorte que celle qui estoit 4 n'est plus qu'1, & celle qui estoit 3 est nulle, & celle qui estoit 2 est devenue vraye & est 1, a cause que $-2 + 3$ fait $+1$.

(Note : Descartes utilise le signe $\propto$ pour l'égalité).

Que constate-t-on ?

Descartes ne parle pas d'emblée, comme Girard, de -5 comme racine, mais parle d'une racine fausse qui est 5. Il éprouve le besoin de donner une règle pour rendre vraies les racines fausses, et à ce propos, on peut voir qu'il raisonne en augmentation et en diminution, en ne concevant pas le prolongement de la relation d'ordre aux racines fausses : $-4 + 3 = -1$ qui est plus petit que -4. La racine fausse 4 a diminué. De même $-2 + 3 = +1$ est plus petit que -2. Descartes ne compare que les valeurs absolues. Mais alors, si -1 avait été solution de son équation, il aurait eu : $-1 + 3 = +2$, et aurait dû dire que 2 était plus petit que 1 ! Etrange. D'ailleurs, son contemporain le mathématicien Beaugrand, critique farouche de Descartes, ne s'y trompe pas comme le montre cet extrait d'une lettre à Mersenne.

Beaugrand critique Descartes (Avril 1638)

"Mais, avant de passer outre, je veux vous faire remarquer l'erreur la plus grossière qui se puisse commettre par les moins aduancez en algèbre, et qui m'oblige a parler a ce Methodique impertinent aux mesmes termes que Clavius a Ioseph Scaliger : *Tu vero tantum credisses ineptiæ, vt ne istam tuam infamem temeritatem ? Disce homines esse aliquos, quos fallere nequeas, qui te tuaque plane dignoscant, falsa que a veris distinguere iam pridem norint. Proculdubio arrogantia tua decepit te, et superbia cordis tui.* C'est où il dict que, en augmentant les vrayes racines d'une equation, on diminue les faulses, et qu'en diminuant les vrayes, on augmente les faulses de la mesme quantité. Il est certain que, tout au contraire, on ne sçauroit augmenter les racines posituiues d'une equation sans augmenter les negatiues, ny diminuer les vnes sans diminuer aussy les autres de la mesme quantité. Comme, pour me seruir de son exemple, en ceste equation :

$$x^{\text{IV}} + 4x^{\text{III}} - 19x^{\text{II}} - 106x - 120,$$

en laquelle la quantité inconnue a quatre valeurs, a sçauoir : + 5, - 2, - 3, - 4, sy on suppose que x soit esgal a $y - 3$, vous changerez en ceste autre :

$$y^{\text{IV}} + 16y^{\text{III}} + 71y^{\text{II}} - 4y - 420,$$

en laquelle il y a aussy quatre valeurs, qui sont : + 2, - 5, - 6, - 7 ; et comme vous voyez que la valeur posituiue de la quantité inconnue de la precedente equation < surpasse de 3 la valeur posituiue de celle de la derniere equation > ,

ie dis aussy que chacune des valeurs negatiues qui luy correspond en l'autre equation. Car sy -7 n'estoit pas moindre que -4, mais plus grand, comme il soutient, il s'ensuiuroit qu'en adioustant +9 de part et d'autre, +9 -7 surpasseroit +9 -4. Or est-il que +9 -7 est esgal a +2, et +9 -4 a +5.

Donc, sy -7 estoit plus grand que -4, il faudroit dire que 2 seroit plus grand que 5, ce qui est faux et absurde. D'où il est aisé à iuger qu'en augmentant les racines positiues d'une equation, on augmente aussy les negatiues, et qu'en diminuant les vnes, on diminue les autres. Qui est ce qu'il falloit demonstrier, pour conuaincre l'erreur du M. I. a."

a. "Méthodique Impertinent".

(Le sobriquet que Beaugrand donne à Descartes)

Cela n'empêche pas Descartes de calculer correctement, et même, dans le cadre des équations, de faire des opérations sur les négatifs, comme en témoigne cet extrait qui se trouve quelques pages plus loin dans la *Géométrie*.

Descartes y divise l'équation $y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0$ par $y^2 - 16$.

Par exemple si on a

$$y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 \approx 0.$$

le dernier terme, qui est 64, peut estre diuisé sans fraction par 1, 2, 4, 8, 16, 32, & 64; C'est pourquoy il faut examiner par ordre si cete Equation ne peut point estre diuisée par quelqu'un des binomes, $yy - 1$ ou $yy + 1$, $yy - 2$ ou $yy + 2$, $yy - 4$ &c. &c. on trouue qu'elle peut l'estre par $yy - 16$, en cete sorte.

$$\begin{array}{r} + y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 \approx 0 \\ - 1y^6 - 8y^4 - 4yy \quad \quad - 16 \\ \hline 0 - 16y^4 - 128yy \end{array}$$

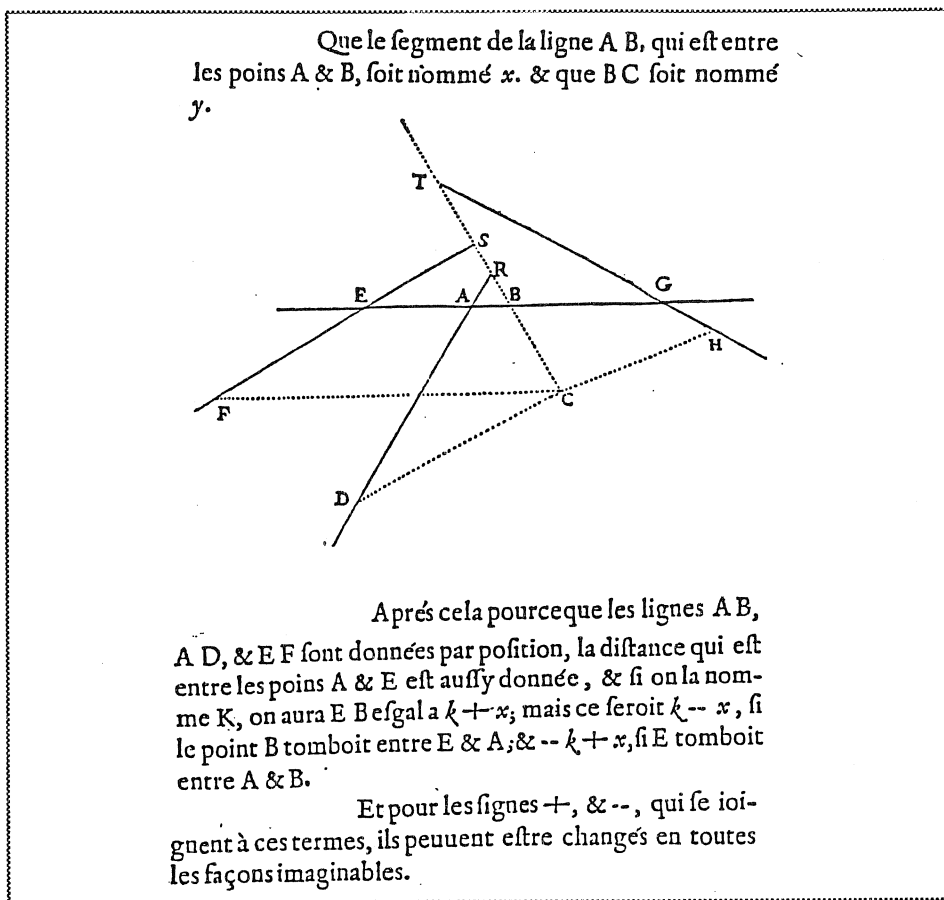
$$\begin{array}{r} \quad \quad \quad 16 \quad \quad 16 \\ \hline + y^4 + 8yy + 4 \approx 0. \end{array}$$

Je commence par le dernier terme, & diuise -- 64 par ^{La façon de diuiser} -- 16, ce qui fait +4, que j'escriis dans le quotient, puis ^{une Equation par un binome qui contient la racine.} ie multiplie +4 par +yy, ce qui fait +4yy; c'est pourquoy j'escriis --4yy en la somme, qu'il faut diuifer. car il y faut toujours escrire le signe + ou -- tout contraire a celui que produit la multiplication. & ioignant --124yy avec --4yy, iay --128yy, que ie diuise derechef par --16, & iay +8yy, pour mettre dans le quotient & en le multipliant par yy, iay --8y⁴, pour ioindre avec le terme qu'il faut diuifer, qui est aussy --8y⁴, & ces deux ensemble font --16y⁴, que ie diuise par --16, ce qui fait +1y⁴ pour le quotient, & --1y, pour ioindre avec +1y⁴, ce qui fait 0, & monstre que la diuision est acheuée.

Descartes manipule bien des négatifs ($-64 : -16 = +4$), mais on peut voir que c'est toujours dans le cadre d'un calcul sur les polynômes, et donc sur leurs coefficients.

Si l'on regarde les deux premières parties de son traité, *La Géométrie*, où Descartes utilise l'algèbre pour mettre en équation et résoudre des problèmes de géométrie, les lettres qu'il utilise désignent des *longueurs*, donc des nombres positifs; d'ailleurs il considère différents cas.

Voici un extrait de sa mise en équation du problème de Pappus.



Il n'est pas envisagé de valeurs négatives pour les inconnues, et donc pas de repère au sens actuel du terme.

Quand Descartes écrit :

ainsi l'equation qu'il
falloit trouver est .
 $yy \propto cy - \frac{cx}{b}y + ay - ax.$
de laquelle on connoist que la ligne EC est du premier
genre , comme en effect elle n'est autre qu'une Hy-
perbole.

y, x, a, b, c sont des longueurs, donc ne prennent que des valeurs positives. Il en sera ainsi la plupart du temps durant tout le siècle qui va suivre. Mais le développement de l'étude des courbes à partir de leurs équations, commencée par Descartes, et poursuivie dans le cadre du calcul différentiel et intégral mis au point à la fin du 17^e siècle par Leibniz et Newton, va amener les mathématiciens à utiliser systématiquement dans leurs calculs des nombres négatifs. Ce qui va entraîner l'apparition de paradoxes, et des débats entre mathématiciens, tel celui entre Leibniz et Jean Bernoulli, de 1712 à 1713, à propos de $\ln(-1)$, logarithme népérien de -1, débat que tranchera Euler en 1749.

Pour en savoir plus sur ce débat :

[9] Verley J.L. *La controverse des logarithmes des nombres négatifs et imaginaires.*
Dans: Fragments d'histoire des mathématiques. Brochure APMEP n° 41, 1981.

D'ALEMBERT

Ces paradoxes amènent les mathématiciens à s'interroger sur les fondements de l'algèbre, et sur le sens à donner aux quantités négatives, comme le fait d'Alembert dans son *Essai sur les éléments de philosophie* publiés en 1759.

Les auteurs ordinaires d'Eléments ne pechent pas seulement par le peu de soin qu'ils ont de donner une idée nette de l'Algèbre et de son but ; mais encore par le peu d'exactitude des notions qu'ils attachent à certaines expressions. Pour abréger, je me bornerai à la notion des quantités négatives. Les uns regardent ces quantités comme *au-dessous de rien*, notion absurde en elle-même : les autres, comme exprimant des *dettes*, notion trop bornée et par cela seul peu exacte : les autres, comme des quantités qui doivent être prises dans un sens contraire aux quantités qu'on a supposées positives ; notion dont la Géométrie fournit aisément des exemples, mais qui est sujette à de fréquentes exceptions ; puisqu'il est aisé de faire voir, par des exemples tirés aussi de la Géométrie, que des quantités représentées par le calcul avec le signe négatif, doivent quelquefois être prises du même sens que les quantités caractérisées par le signe positif. Qu'est-ce donc que les quantités négatives ? Il en faut distinguer de deux especes.

Les premières par leur signe négatif indiquent une fausse supposition qui a été faite dans l'énoncé du problème, supposition redressée par la solution. Si on demande un nombre qui ajouté à 20 fasse 15, on trouvera 5 avec le signe négatif ; ce qui marque qu'il aurait fallu énoncer le problème en cette sorte ; *trouver un nombre tel, qu'étant retranché de 20, et non ajouté, le résultat de l'opération soit 15*. En voilà autant qu'il est nécessaire pour donner ici la vraie notion de cette première espece de quantités négatives, qui se rencontrent à tout moment dans les solutions de problèmes.

La seconde espece de quantités négatives, se rencontre principalement dans les problèmes, où le résultat du second paroît présenter plusieurs solutions ; elles indiquent alors des solutions du même problème, envisagé sous un point de vue un peu différent de celui que l'énoncé suppose, mais toujours analogue à ce premier sens.

Les quantités négatives de la première espece montrent la généralité et l'avantage du calcul algébrique, qui redresse, pour ainsi dire, le calculateur en partant de la supposition même qui auroit dû l'égarer. Les quantités négatives de la seconde espece montrent tout à la fois, et la richesse de cette science qui fait trouver dans la solution du problème, jusqu'aux choses qu'on ne demandoit pas, et en même temps, si on ose le dire, l'imperfection du calcul, qui en donnant ce qu'on ne cherche pas et qu'on ne lui demande point, ne donne pas toujours ce qu'on lui demande avec toute la perfection qu'on pourrait exiger. C'est ce qui n'arrive que trop dans les questions algébriques ; la solution d'un problème, qui n'en a quelquefois qu'une possible (dans le sens où il a été proposé) est souvent incorporée et comme amalgamée avec plusieurs autres solutions de problèmes analogues, mais différents ; solutions qui enveloppant et masquant, pour ainsi dire, la première, la rendent plus difficile à découvrir. Ceux qui ont quelque connoissance de ce qu'on appelle en Algèbre la théorie des équations, savent par expérience la vérité de ce que nous venons de dire. Mais en voilà assez sur ce sujet, pour ne pas rebuter ceux de nos Lecteurs à qui les Eléments de cette science sont absolument inconnus.

On voit bien, à travers ce texte, qu'il ne s'agit pas de nombre, mais de quantité négative, et qu'un résultat négatif trouvé dans la solution d'un problème doit être "redressé" en reformulant le problème, en regardant le problème sous un autre angle. Cette vision perdurera jusqu'à une époque récente dans le texte des manuels scolaires, partie Algèbre. Le zéro est infranchissable, et le modèle des dettes ou les deux sens possibles, opposés, en géométrie sont sujets à caution.

EULER

Pendant ce temps-là, Euler ne s'embarrasse pas de scrupules, et donne a priori à ses calculs algébriques et analytiques une valeur étendue à tous les nombres qui peuvent exister. Dans son *Introduction à l'Analyse infinitésimale*, écrite en 1748, voici ce qu'il dit :

3. *Une quantité variable devient déterminée, lorsqu'on lui attribue une valeur déterminée quelconque.*

Elle peut donc le devenir d'une infinité de manières, puisqu'on peut lui substituer tous les nombres imaginables. La signification d'une quantité variable ne peut être censée épuisée, qu'autant qu'on aura conçu en sa place toutes les valeurs déterminées. Ainsi une telle quantité comprend tous les nombres tant positifs que négatifs, les nombres entiers & fractionnaires, ceux qui sont rationnels, irrationnels & transcendants ; on ne doit pas même en exclure zéro, ni les nombres imaginaires.

L'expression "on ne doit pas même en exclure" montre bien les réticences des mathématiciens de son époque et l'aspect novateur de ses propositions. Dans le tome II de son ouvrage, dans lequel il traite des courbes, il va utiliser systématiquement les nombres négatifs et positifs pour repérer les points des courbes, et calculer l'ordonnée y à partir de valeurs négatives de x . C'est un grand pas en avant. Voici le début de l'ouvrage.

INTRODUCTION

A

L'ANALYSE INFINITÉSIMALE.

L I V R E S E C O N D,

CONTENANT la Théorie des Lignes courbes, avec un Traité
abrégé des Surfaces.

CHAPITRE PREMIER.

Des Lignes Courbes en général.

1. **U**NE quantité variable étant une grandeur considérée en Pl. I. Fig. 1 général, qui renferme toutes les valeurs déterminées ; une droite indéfinie, telle que RS , fera très-propre à représenter, en géométrie, une quantité de cette nature. En

effet, puisqu'on peut prendre sur une droite indéfinie, une partie quelconque, qui ait une valeur déterminée, cette ligne présente à l'esprit la même idée de grandeur, que la quantité variable. Il faut donc, avant tout, fixer sur une ligne indéfinie RS un point A , qui sera censé l'origine des grandeurs déterminées, qu'on en séparera; ainsi une portion déterminée AP représentera une valeur déterminée comprise dans la quantité variable.

2. Soit donc x une quantité variable, représentée par la droite indéfinie RS ; il est clair que toutes les valeurs déterminées de x , pourvu qu'elles soient réelles, peuvent être exprimées par des portions prises sur la ligne RS . Par exemple, si le point P tombe sur le point A , l'intervalle AP , devenant nul, représentera la valeur de $x=0$; mais plus le point P s'éloignera du point A , plus la valeur déterminée de x représentée par l'intervalle AP deviendra grande.

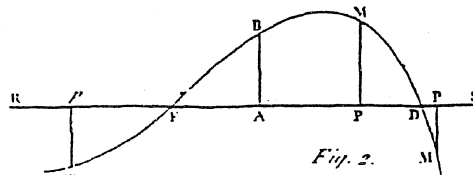
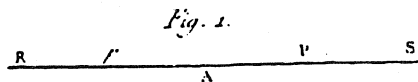
On appelle ces intervalles AP , **ABSCISSES**.

Ainsi les abscisses représentent les valeurs déterminées de la variable x .

3. Or, comme la droite indéfinie RS s'étend à l'infini de part & d'autre du point A , on pourra aussi couper de part & d'autre toutes les valeurs de x . Mais, si nous prenons les valeurs positives de x , en allant sur la droite depuis le point A , les intervalles AP situés sur la gauche représenteront les valeurs négatives de x . En effet, puisque plus le point P s'éloigne du point A vers la droite, plus est grande la valeur de x représentée par l'intervalle AP ; réciproquement, plus le point P s'éloigne vers la gauche, plus la valeur de x est diminuée; & si P tombe sur A , la valeur de x devient $=0$. C'est pourquoi, si le point P est reculé davantage vers la gauche, les valeurs de x deviendront plus petites que zéro, c'est-à-dire, seront négatives, & les intervalles AP pris sur la gauche depuis le point A , représenteront les valeurs négatives de x , si les intervalles AP , situés à la droite, sont censés représenter les valeurs positives. Au reste, il est indifférent de prendre du côté qu'on voudra les valeurs positives de x ; car le côté opposé renfermera toujours les valeurs négatives.

Pl. I. Fig. 2.

4. Puisqu'une ligne droite indéfinie est propre à représenter une quantité variable x , cherchons à présent une manière très-commode de représenter géométriquement une fonction quelconque de x . Soit y cette fonction de x ; laquelle par conséquent recevra une valeur déterminée, si on substitue pour x une valeur donnée. Ayant pris une droite indéfinie RS pour représenter les valeurs de x , il faudra, pour chaque valeur déterminée AP de x , élever sur cette ligne une perpendiculaire PM , égale à la valeur correspondante de y ; c'est-à-dire que, si la valeur de y est positive, il faudra la placer au-dessus de RS ; mais, si la valeur de y devient négative, il faudra la placer perpendiculairement au-dessous de la droite



RS . Car les valeurs positives de y étant prises au-dessus de la droite RS , celles qui deviennent nulles tomberont sur la ligne même RS , & celles qui sont négatives, au-dessous.

Même si l'axe des ordonnées n'est pas tracé, nous avons là le repère "cartésien" que nous utilisons aujourd'hui. Le zéro n'est plus un obstacle, le repérage est associé à la mesure des grandeurs. L'étude analytique des courbes va devenir alors un des contextes privilégiés du calcul avec des relatifs.

Le traité d'Euler va, petit à petit, devenir une référence, et sera traduit en français en 1796-1797.

CARNOT

Cependant à la même époque les choses ne sont pas aussi claires pour tout le monde, et la justification des règles de calcul sur les relatifs en particulier la règle des signes, et l'extension aux relatifs des règles de calcul sur les positifs posent de nombreux problèmes, comme en témoignent les extraits suivants de deux ouvrages de Carnot.

Géométrie de position. (1803). Paris, Duprat.

Pour obtenir réellement une quantité négative isolée, il faudrait retrancher une quantité effective de zéro, ôter quelque chose de rien : opération impossible. Comment donc concevoir une quantité négative isolée ?

...

Les notions qu'on a données jusqu'ici des quantités négatives isolées, se réduisent à deux : celle dont nous venons de parler, savoir que ce sont des quantités moindres que zéro, et celle qui consiste à dire, que les quantités négatives sont de même nature que les quantités positives, mais prises dans un sens contraire : d'ALEMBERT détruit l'une et l'autre de ces notions. Il repousse d'abord la première par un argument qui me paraît sans réplique.

Soit, dit-il, cette proportion $1 : -1 :: -1 : 1$; si la notion combattue était exacte, c'est-à-dire si -1 était moindre que 0 , à plus forte raison serait-il moindre que 1 ; donc le second terme de cette proportion devrait être moindre que le premier ; donc le quatrième devrait être moindre que le troisième, ; c'est-à-dire, que 1 devrait être moindre que -1 ; donc -1 serait tout ensemble moindre et plus grand que 1 ; ce qui est contradictoire.

Quant à la seconde des notions données ci-dessus, d'ALEMBERT l'attaque avec le même succès dans son mémoire sur les quantités négatives dont j'ai parlé ci-dessus ; et cependant, comme il n'a rien à mettre à la place, il semble adopter cette notion pour le fond, et vouloir montrer seulement qu'elle est sujette à diverses exceptions. *Il est, dit-il, d'autant plus nécessaire de démontrer cette position* (des quantités négatives en sens contraire des positives) *qu'elle n'a pas toujours lieu.*

...

Une multitude de paradoxes ou plutôt d'absurdités palpables résulteraient de la même notion ; par exemple, -3 serait moindre que 2 ; cependant $(-3)^2$ serait plus grand que 2^2 , c'est-à-dire qu'entre deux quantités inégales, le carré de la plus grande serait moindre que le carré de la plus petite, ce qui choque toutes les idées claires qu'on peut se former de la quantité.

Passons à la seconde notion, qui consiste à dire que les quantités négatives ne diffèrent des quantités positives qu'en ce qu'elles sont prises dans un sens opposé. Cette idée est ingénieuse ; mais elle n'est pas plus juste que la précédente. En effet, si deux quantités, l'une positive, l'autre négative, étaient aussi réelles l'une que l'autre et ne différeraient que par leurs positions, pourquoi la racine de l'une serait-elle une quantité imaginaire, tandis que celle de l'autre serait effective ? Pourquoi $\sqrt{-a}$ ne serait-elle pas aussi réelle que $\sqrt{+a}$? Conçoit-on une quantité effective dont on ne puisse extraire la racine carrée ? Et d'où viendrait le privilège que la première, $-a$, aurait de donner son signe au produit $-a \times +a$?

Réflexion sur la métaphysique du calcul infinitésimal (1797).

1. Il y a une analogie remarquable entre la théorie des quantités négatives isolées et celle des quantités infinitésimales, en ce que les unes et les autres ne sauraient jamais être employées qu'auxiliairement, et qu'elles doivent nécessairement disparaître des résultats du calcul, pour que ces résultats deviennent parfaitement exacts et intelligibles : jusqu'alors ce ne sont que des formes algébriques plus ou moins implicites, et qui ne sont susceptibles d'aucune application immédiate.

2. Il paraît beaucoup plus difficile d'expliquer nettement ce qu'est une quantité négative isolée, que de comprendre ce qu'est une quantité infinitésimale ; car celle-ci, comme on l'a vu, est une quantité effective, au lieu que l'autre est un être de raison, puisqu'on ne pourrait l'obtenir que par une opération inexécutable.

3. Avancer qu'une quantité négative isolée est moindre que 0, c'est couvrir la science des mathématiques, qui doit être celle de l'évidence, d'un nuage impenétrable, et s'engager dans un labyrinthe de paradoxes tous plus bizarres les uns que les autres ; dire que ce n'est qu'une quantité opposée aux quantités positives, c'est ne rien dire du tout, parce qu'il faut expliquer ensuite ce que c'est que ces quantités opposées ; recourir pour cette explication à de nouvelles idées premières, semblables à celles de la matière, du temps et de l'espace, c'est déclarer qu'on regarde la difficulté comme insoluble, et c'est en faire naître de nouvelles ; car si l'on me donne pour exemple de quantités opposées un mouvement vers l'orient et un mouvement vers l'occident, ou un mouvement vers le nord et un mouvement vers le sud, je demanderai ce que c'est qu'un mouvement vers le nord-est, vers le nord-ouest, vers le sud-sud-ouest, etc., et de quels signes ces quantités devront être affectées dans le calcul ?

On retrouve dans ces textes, presque tous les problèmes que peuvent poser les négatifs. D'abord celui de leur statut : chaque "définition" possible entraîne des conséquences inacceptables.

On peut voir qu'il s'agit essentiellement de propriétés que l'on pense comme universelles, donc devant s'appliquer à toute espèce de nombre, alors qu'elles n'ont été établies que pour des "positifs". Cela doit nous inciter à réfléchir aux généralisations "naturelles" auxquelles procèdent nos élèves, mais parfois aussi auxquelles nous recourons, nous enseignants, pour justifier telle ou telle règle ou propriété.

En fait c'est la notion même de nombre qui est en cause, l'idée qu'on s'en fait. Si 3 est un nombre, -3 ou +3 n'est plus un nombre : c'est un auxiliaire de calcul comme le redit Carnot, ou une quantité ainsi que le dit le célèbre mathématicien Cauchy.

CAUCHY, Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique (1821).

"Nous prendrons toujours la dénomination de *nombres* dans le sens où on l'emploie en Arithmétique, en faisant naître les nombres de la mesure absolue des grandeurs, et nous appliquerons uniquement la dénomination de *quantités* aux quantités *réelles positives* ou *négatives*, c'est-à-dire aux nombres précédés des signes + ou -. De plus, nous regarderons les quantités comme destinées à exprimer des accroissements ou des diminutions ; en sorte qu'une grandeur donnée sera simplement représentée par un nombre, si l'on se contente de la comparer à une autre grandeur de même espèce prise pour unité, et par ce nombre précédé du signe + ou du signe -, si on la considère comme devant servir à l'accroissement ou à la diminution d'une grandeur fixe de la même espèce. Cela posé, le signe + ou - placé devant un nombre en modifiera la signification, à peu près comme un adjectif modifie celle du substantif. Nous appellerons *valeur numérique* d'une quantité le nombre qui en fait la base, quantités *égales* celles qui ont le même signe avec la même valeur numérique, et quantités opposées deux quantités égales quant à leurs valeurs numériques, mais affectées de signes contraires."

Et si Cauchy prend bien la peine de distinguer nombre et quantité pour contourner le problème, 45 ans plus tard, le mathématicien Duhamel, professeur comme lui à l'Ecole Polytechnique, refuse même la possibilité de règles sur les quantités négatives. Voici ce qu'il dit :

"Toute démonstration de règles sur les quantités négatives isolées, ne peut être qu'une illusion, puisqu'il n'y a aucun sens à attacher à des opérations arithmétiques sur des choses qui ne sont pas des nombres, et n'ont aucune existence réelle"

1 . 4 . Epilogue.

Nous avons entr'aperçu que depuis le 16^e siècle, les négatifs ont eu partie liée avec les imaginaires. Ceux-ci ont eu, parallèlement, une histoire tumultueuse qui a commencé à se dénouer au début du 19^e siècle avec la "découverte" de leur représentation géométrique, qui va faire évoluer la notion de nombre, et qui va englober celle de négatif. C'est donc conjointement que va se trouver résolu le problème de leur statut, à travers la redéfinition de la notion de nombre, et l'explicitation des propriétés "prolongeables" à ces nouveaux nombres.

Hankel, dans sa *Théorie du système des nombres complexes* parue en 1867, va opérer cette rupture épistémologique.

"Le nombre n'est plus aujourd'hui une chose, une substance qui existerait en toute indépendance en dehors du sujet pensant ou des objets qui en sont l'occasion ; ce n'est plus un principe indépendant comme l'ont cru les Pythagoriciens. La question de l'existence des nombres nous renvoie soit au sujet pensant, soit aux objets pensés dont les nombres représentent les relations. Le mathématicien tient pour impossible au sens strict cela seul qui est logiquement impossible, c'est-à-dire qui implique contradiction. Il n'est pas besoin de démontrer qu'on ne peut admettre des nombres impossibles en ce sens. Mais si les nombres considérés sont logiquement possibles, si leur concept est défini clairement et distinctement, s'il est donc libre de toute contradiction, la question ne peut plus être que de savoir s'il y a dans le domaine du réel, dans ce qui est intuitif ou actuellement donné, un substrat pour ce nombre, s'il existe des objets qui puissent donner matière aux nombres en tant qu'ils sont relations intellectuelles d'un certain type."

On voit donc que l'on aborde alors l'ère d'une construction formelle des nombres.

Hankel démontre que la seule multiplication sur $\mathbb{R}$ qui prolonge la multiplication usuelle sur $\mathbb{R}^+$, en respectant les distributivités à gauche et à droite, est conforme à la règle des signes. On peut alors, enfin, démontrer cette règle comme suit.

Théorème : La seule multiplication sur $\mathbb{R}$, qui prolonge la multiplication usuelle sur $\mathbb{R}^+$, en respectant les distributivités à gauche et à droite est conforme à la règle des signes.

Dès que l'on a formulé ce problème, la démonstration est triviale :

$$0 = a \times 0 = a \times (b + \text{opp } b) = ab + a \times (\text{opp } b) < \text{distributivité à droite}>$$

$$0 = 0 \times (\text{opp } b) = (\text{opp } a + a) \times (\text{opp } b) = (\text{opp } a) \times (\text{opp } b) + a \times (\text{opp } b) < \text{distributivité à gauche}>$$

$$\text{D'où } (\text{opp } a) \times (\text{opp } b) = ab.$$

Pour conclure, voici, sur le sujet qui nous préoccupe, la vision en raccourci de Bourbaki, tirée des *Eléments d'Histoire des Mathématiques* (1969).

Il fallait d'abord, durant les siècles intermédiaires, que d'une part se développât un système de notation algébrique adéquat à l'expression de lois abstraites, et que, d'autre part, la notion de "nombre" reçût un élargissement tel qu'il permît, par l'observation de cas particuliers assez diversifiés, de s'élever à des conceptions générales. A cet égard, la théorie axiomatique des rapports de grandeurs, créée par les Grecs, était insuffisante, car elle ne faisait que préciser la notion intuitive de nombre réel > 0 et les opérations sur ces nombres, déjà connues des Babyloniens sous forme plus confuse ; il va s'agir au contraire

maintenant de " nombres" dont les Grecs n'avaient pas eu l'idée, et dont, au début, aucune "représentation" sensible ne s'imposait : d'une part, le zéro et les nombres négatifs, qui apparaissent dès le haut Moyen âge dans la Mathématique hindoue : de l'autre, les nombres imaginaires, création des algébristes italiens du XVI^e siècle.

Si on met à part le zéro, introduit d'abord comme symbole de numération avant d'être considéré comme un nombre, le caractère commun de ces extensions est d'être (au début tout au moins) purement "formelles". Il faut entendre par là que les nouveaux "nombres" apparaissent tout d'abord comme résultats d'opérations appliquées dans des conditions où elles n'ont, en s'entendant à leur définition stricte, aucun sens (par exemple, la différence $a - b$ de deux entiers naturels lorsque $a < b$) : d'où les noms de nombres "faux", "fictifs", "absurdes", "impossibles", "imaginaires" etc., qui leur sont attribués. Pour les Grecs de l'époque classique, épris avant tout de pensée claire, de pareilles extensions étaient inconcevables ; elles ne pouvaient provenir que de calculateurs plus disposés que ne l'étaient les Grecs à accorder une confiance quelque peu mystique à la puissance de leurs méthodes ("la généralité de l'Analyse", comme dira le XVIII^e siècle), et à se laisser entraîner par le mécanisme de leurs calculs sans en vérifier à chaque pas le bien-fondé ; confiance d'ailleurs justifiée le plus souvent *a posteriori*, par les résultats exacts auxquels conduisait l'extension à ces nouveaux êtres mathématiques, de règles de calcul valables uniquement, en toute rigueur, pour les nombres antérieurement connus. C'est ce qui explique comment on s'enhardit peu à peu à considérer pour elles-mêmes (indépendamment de toute application à des calculs concrets), ces généralisations de la notion de nombre, qui, au début, n'intervenaient qu'à titre d'intermédiaires dans une suite d'opérations dont le point de départ et l'aboutissement étaient de véritables "nombres" ; une fois ce pas franchi, on commence à rechercher des interprétations, plus ou moins tangibles, des entités nouvelles qui acquièrent ainsi droit de cité dans la Mathématique@.

@ Cette recherche n'a d'ailleurs constitué qu'un stade transitoire dans l'évolution des notions dont il s'agit ; dès le milieu de XIX^e siècle, on est revenu, de façon pleinement consciente cette fois, à une conception formelle des diverses extensions de la notion de nombre, conception qui a fini par s'intégrer dans le point de vue "formaliste" et axiomatique, qui domine l'ensemble des mathématiques modernes.

2 . Des enseignements pour la classe.

Cette longue et tumultueuse histoire nous permet :

1. de repérer dans quels contextes sont apparus et ont fonctionné les nombres relatifs,
2. de prendre la mesure des obstacles à leur conception et à leur utilisation.

2 . 1 . Les contextes.

LE REPERAGE

Nous avons vu que ce contexte apparaît très tard (18^e siècle), et est lié à la représentation des fonctions, tout d'abord conçue comme le tracé des courbes à partir d'une équation. Et il faut remarquer que ce repérage n'est pas un codage : il est lié à des mesures de longueurs, ce qui permet de faire des opérations.

Or, très souvent, c'est le contexte du repérage que l'on met en avant pour introduire les relatifs, et uniquement pour repérer des points sur une droite ou dans le plan. Cela doit nous inciter à y réfléchir de plus près.

En revanche, la construction de courbes dans un repère, à partir de formules ou d'équations, pourrait fournir un contexte d'utilisation des relatifs dans lesquels ceux-ci sont incontournables.

LES EQUATIONS

Au contraire, le domaine des équations est le premier contexte dans lequel apparaissent les relatifs, domaine où ils seront longtemps considérés comme des auxiliaires de calcul. Mais nous avons vu que cette utilisation de relatifs est très liée à la façon même de faire les calculs, et que notre écriture algébrique littérale permet d'éviter leur utilisation, comme l'a fait Viète, ainsi que de nombreux mathématiciens. D'autre part, on a commencé à les considérer comme racines d'équations quand on a pris conscience, au début du 17^e siècle (avec Girard, Descartes) que le degré d'une équation était lié au nombre de racines. La recherche de toutes les racines ("vraies ou fausses, réelles ou imaginaires" comme dira Descartes) d'une équation prit alors un sens.

Au niveau du premier cycle, point d'équation de degré supérieur à 1, mise à part l'équation $x^2 = a$ en 3^e. Mais la rencontre avec les relatifs comme auxiliaires pour la résolution des équations peut se faire sur des équations du premier degré par l'utilisation formelle des règles algébriques de transformation des équations.

Par exemple, $3x + 7 = 5x - 12$, peut se résoudre de deux façons:

En évitant les relatifs : $3x + 19 = 5x$
 $19 = 2x$
 $9,5 = x$

En s'y confrontant : $-2x + 7 = -12$
 $-2x = -19$
 $x = 9,5$

Dans la deuxième façon, on a effectivement calculé : $0 - 12$, $3 - 5$, $-12 + (-7)$ ou $-12 - 7$,
 $\frac{-19}{-2}$.

C'est de la comparaison de telles solutions qu'est née pour certains mathématiciens la confiance dans le calcul avec les relatifs. Peut-il en être de même avec nos élèves ?

Par contre, pour trouver des relatifs solutions d'équations, cela oblige à sortir du cadre de la géométrie et des problèmes concrets ; on peut alors penser à des problèmes sur des nombres, ou dans un repère. Dans ce dernier cas, les négatifs peuvent s'inclure de façon naturelle dans la formulation même du problème. Par exemple : trouver l'abscisse du point d'ordonnée -5 qui se trouve sur la droite d'équation $y = 3x + 1$.

LE CALCUL ALGEBRIQUE

Nous avons vu comment dans le cadre du calcul sur les polynômes, et plus généralement du calcul algébrique, ont pu se formuler des règles identiques à celles du calcul des relatifs, en particulier la règle des signes. Mais si le calcul algébrique, à partir de Viète et de Descartes, utilise les lettres pour résoudre les problèmes, ces lettres ne représentent que des grandeurs positives (nombres ou longueurs). Cela amène, en particulier en géométrie, à distinguer souvent de nombreux cas de figures (comme ceux envisagés par Descartes dans le texte précédemment cité), alors que l'utilisation de lettres représentant des relatifs permet de donner une seule formule. Prenons, par exemple, les formules donnant les coordonnées du milieu I d'un segment [AB]. Ces formules peuvent s'établir facilement par des considérations géométriques.

1^{er} cas $OI' = OA' + \frac{OB' - OA'}{2}$ $= \frac{OA' + OB'}{2}$ $OI'' = OB'' + \frac{OA'' - OB''}{2}$ $= \frac{OA'' + OB''}{2}$	2^e cas $OI' = OB' - \frac{OB' + OA'}{2}$ $= \frac{OB' - OA'}{2}$ ou : $OI' = \frac{OA' + OB'}{2} - OA'$ $= \frac{OB' - OA'}{2}$	3^e cas $OI' = OA' - \frac{OA' + OB'}{2}$ $= \frac{OA' - OB'}{2}$ ou : $OI' = \frac{OA' + OB'}{2} - OB'$ $= \frac{OA' - OB'}{2}$	4^e cas se ramène au premier cas : $OI' = \frac{OA' + OB'}{2}$
---	--	--	--

On voit donc que pour énoncer une règle englobant les 4 cas, on pourrait prendre $OI' = \frac{OA' + OB'}{2}$ et dire, comme Descartes (Géométrie p. 312) : "et pour les signes + et - ils peuvent être changés en toutes les façons imaginables".

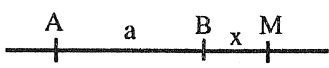
Par contre, si nous désignons par x_A , x_B , x_I , les abscisses de A, B, I, au sens actuel du terme, nous aurons pour les 4 cas, une seule et même formule : $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$. En effet :

1 ^{er} cas : $x_I = OI'$, $x_A = OA'$, $x_B = OB'$	2 ^e cas : $x_I = OI'$, $x_A = -OA'$, $x_B = OB'$	3 ^e cas : $x_I = -OI'$, $x_A = -OA'$, $x_B = OB'$	4 ^e cas : $x_I = -OI'$, $x_A = -OA'$, $x_B = -OB'$
--	--	---	--

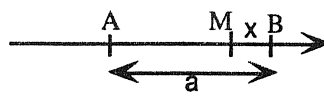
On voit alors que pour trouver la formule, il faut écrire $OB' - OA'$ comme $OB' + (-OA')$, $-\frac{OA' - OB'}{2}$ comme $\frac{(-OA') + OB'}{2}$... Calcul algébrique littéral et calcul sur les relatifs s'interpénètrent.

Il faudrait peut-être montrer ce pouvoir unificateur des relatifs : l'addition des relatifs (autrefois appelée addition algébrique) englobe bien des situations numériques additives et soustractives. De même pour la soustraction.

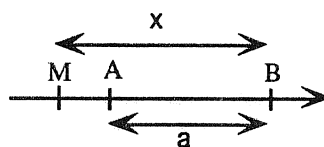
Il y aurait peut-être intérêt à ce que l'élève sache interpréter les schémas géométriques expliquant l'addition et la soustraction des relatifs.

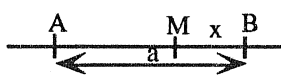
Le schéma  traduit de façon évidente, pour a et x positifs, le fait que $AM = a + x$; mais si l'on considère la droite orientée et x négatif, la somme $a + x$ traduit toujours, d'une certaine façon, la "distance" AM :

- en positif, dans le cas



- en négatif, dans le cas



De même  avec $AM = a - x$.

Cela peut faire sentir l'intérêt qu'il pourrait y avoir à parler de mesure algébrique d'un segment.

C'est une notion qu'on manipule sans le dire quand on parle des coordonnées d'un point.

Ses coordonnées, ce sont ses distances aux axes en tenant compte du sens pour pouvoir distinguer les quatre points possibles. Mais l'élève le perçoit-il ?

2 . 2 . Les obstacles

Ils sont essentiellement de trois types.

1. La nature des relatifs.
2. La définition des règles sur les relatifs.
3. La généralisation aux relatifs des règles connues sur les positifs.

A PROPOS DE LA NATURE DES RELATIFS

La conception que va se faire l'élève des relatifs va dépendre de la façon dont il va reconsidérer son idée de zéro, et des modèles qu'on va lui donner. Dans quel genre de problèmes a-t-on besoin d'aller au dessous de zéro ? Soustractions impossibles, pertes et gains, repérages...

A PROPOS DES OPERATIONS

Ce qui va changer c'est la définition contextuelle des opérations : il va falloir gérer conjointement la valeur "absolue" et le signe. Pour la valeur absolue, on essaie de se ramener aux opérations arithmétiques connues. Mais là, déjà, se profilent des obstacles.

Une addition de relatifs peut être obtenue à partir d'une addition arithmétique ou d'une soustraction arithmétique ! Il faut donc faire des soustractions pour faire des additions !

Quant à la soustraction, elle garde son nom mais perd son statut : on la remplace systématiquement par une addition !

Pour la multiplication, on garde l'opération arithmétique mais c'est le choix du signe qui pose problème, car aucun des modèles concrets donnés pour l'addition ne peut fonctionner si ce n'est comme un obstacle, comme le raconte Stendhal pour son cas personnel dans *La vie de Henri Brulard*.

Ce que l'on va, en revanche, garder pour l'addition, ce n'est pas l'idée de dénombrer ou de mettre bout à bout, mais celle de mettre ensemble, en faisant un bilan, ou celle de faire suivre : "et", "et ensuite" prennent un nouveau sens.

Pour la soustraction, la différence ce n'est pas le nombre qu'il faut ajouter au plus petit pour obtenir le plus grand, mais le nombre qu'il faut ajouter au second pour obtenir le premier. On voit là les blocages, comme au niveau historique, provoqués par une notion d'ordre bien construite pour les positifs, mais inexistante pour les négatifs (voir bibliographie complémentaire).

A PROPOS DES PROPRIETES

En revanche, ce que va bien mettre en évidence le travail de Hankel, c'est que, ce que l'on veut, en fait, conserver, ce sont les propriétés des opérations. La commutativité et l'associativité de $+$ et $\times$, la distributivité de $\times$ par rapport à $+$. Ce sont les règles formelles dégagées par le calcul littéral qui doivent être invariantes : si un nouvel ensemble d'objets y satisfait, on pourra le considérer comme un ensemble de nombres.

Par exemple, si la commutativité de $\times$ est une propriété non évidente dans les premiers apprentissages numériques (différence entre : $3 \times 5 = 5 + 5 + 5$ et $5 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3$), et si, peu à peu, elle se construit, en revanche, pour les relatifs, on ne peut que la poser en tant que telle : on veut que $\times$ soit commutative. Cela peut nous amener à clarifier ce que nous disons, ou faisons admettre à nos élèves.

A PROPOS DES SIGNES

Des exercices sur des gains et des pertes traduits sous la forme $+ 3 - 5 + 1$ confortent la perception du nombre comme absolu et du signe comme marque d'une augmentation ou d'une diminution. C'est ce qui a été le cas jusqu'au 19^e siècle. De plus, si le statut du nombre est flou, celui des opérations l'est aussi. Dans $+ 3 - 5 + 1$ le signe $-$, par exemple, désigne une diminution mais en même temps une soustraction !

Face à de telles écritures, deux problèmes se posent :

- où est le nombre négatif ?
- où est l'opération ?

En effet, quand j'écris " $+3 - 5$ " (cf. Descartes), je fais une soustraction avec des nombres entiers "positifs", et je donne un résultat négatif : $+$ indique que j'ai 3 francs par exemple, et $-$ que je perds 5 francs. A proprement parler, il ne s'agit ni d'une addition, ni d'une soustraction avec des relatifs. Si l'on veut que les relatifs aient leur statut de nombres, avec leurs opérations, il faudrait donc traduire "je gagne 3" et "je perds 5" sous la forme : $(+3) + (-5)$, en mettant bien en évidence le sens de $+$ (qui, lui, a alors changé de statut). En revanche, une écriture simplifiée du type " $3 - 5$ " désigne en fait une soustraction, et devrait donc être notée ou traduite par : $(+3) - (+5)$.

Le signe $-$, quand il est utilisé comme prédicat, désigne à la fois un nombre négatif et l'opposé d'un nombre. Or sa première utilisation est celle de la désignation d'un nombre *négatif* par opposition à un positif. L'écriture $-x$ a longtemps été, chez les mathématiciens, celle d'un négatif. Ce n'est qu'après une longue pratique du calcul algébrique, et de l'étude des courbes à partir de leurs équations, que la lettre a pu désigner un négatif. Cette notation $-x$ ne prend sens que dans le calcul algébrique et désigne alors l'opposé de x . C'est donc certainement le statut de la lettre, son domaine de représentation, qu'il faut davantage travailler avec nos élèves, lesquels, quelle que soit la définition de l'opposé et de la valeur absolue, vous diront, dans leur grande majorité, que $|x| = -x$ c'est impossible...

3 . Des propositions pédagogiques intéressantes

Pour terminer, nous proposons à votre réflexion des propositions pédagogiques de deux grands mathématiciens, Clairaut et Lacroix, qui ont beaucoup réfléchi à l'enseignement des mathématiques, et qui ont concrétisé leurs choix dans des ouvrages qui ont servi de référence.

Puis celle d'un auteur de manuel du début du 20^e siècle : Neveu.

Il faut néanmoins savoir que, parallèlement, des professeurs de mathématiques comme Busset, auteur d'un manuel très utilisé au milieu du 19^e siècle, font porter l'échec des mathématiques en France sur l'admission des quantités négatives !

CLAIRAUT, Elémens d'Algèbre, 1768.

La multiplication, est de toutes ces opérations celle qui arrête ordinairement le plus les Commençants, & dont l'explication embarrasse le plus les maîtres : ce principe qu'elle renferme, que deux quantités négatives donnent par leur produit une quantité positive, est presque toujours l'écueil des uns & des autres.

Pour éviter d'y tomber, je n'établis ce principe qu'après avoir fait faire des opérations dans lesquelles on a dû en remarquer la nécessité. Je commence par enseigner à multiplier une quantité composée de plusieurs termes positifs & négatifs par un seul terme que je suppose toujours positif, parce que l'on ne s'accoutume pas ordinairement à considérer une quantité négative, comme existant seule. Cette multiplication étant expliquée je passe à celle où le multiplicateur est aussi bien que le multiplicande composé de plusieurs termes positifs & négatifs, & je fais voir facilement que cette opération n'est autre chose que la première répétée autant de fois qu'il y a de termes dans le multiplicateur, & que, suivant que les termes de ce multiplicateur sont positifs ou négatifs, les produits qu'ils donnent, doivent être ajoutés ou retranchés.

Par ce moyen, je familiarise les Commençants avec la multiplication ; sans que j'aie seulement besoin d'énoncer ces principes ordinaires, que moins par plus donne moins, moins par moins donne plus, etc. qui, en présentant à l'oreille une contradiction dans les mots, laissent presque toujours croire qu'il y en a dans les choses.

On pourrait croire d'abord que je n'ai fait qu'éluder la difficulté, & je n'aurais fais réellement que l'éluder, si je ne parlais pas de multiplication des quantités purement négatives, par d'autres quantités aussi entièrement négatives, opération dans laquelle on ne saurait éviter la contradiction apparente dont je viens de parler. Mais je traite à fond de cette multiplication, après en avoir montré la nécessité au Lecteur, en le conduisant à un problème où l'on est obligé de considérer des quantités négatives indépendamment d'aucunes quantités positives dont elles soient retranchées.

Lorsque je suis parvenu, dans ce problème, au point où il s'agit de multiplier ou de diviser des quantités négatives les unes par les autres, je prends le parti qu'ont sans doute pris les premiers analystes qui ont eu de ces opérations à faire, & qui ont voulu suivre une route entièrement sûre, je cherche une solution au problème par laquelle je puisse éviter toute espèce de multiplication ou de division de quantités négatives, par ce moyen j'arrive au résultat, sans employer d'autres raisonnements, que ceux sur lesquels on ne peut former aucun doute ; où je vois ce que doivent être ces produits ou quotients des quantités négatives que m'avait donnés la première solution. Il n'est pas difficile ensuite d'en tirer ces principes si fameux que moins par moins fait plus, &c.

Je délivre ainsi ces principes de tout ce qu'ils ont de choquant, & le lecteur parvient en même temps à connaître la nature des solutions négatives des problèmes ; il apprend cette vérité si utile, que lorsque dans une solution on arrive à trouver une racine négative, elle doit être prise dans un sens opposé à celui suivant lequel on l'avait employée, en exprimant les conditions du problème.

Voici la démonstration que Clairaut donne pour le produit de quantités négatives isolées :

Pour nous assurer que la multiplication de - par - doit toujours donner + au produit, voyons quelle lumière nous pouvons tirer de la méthode générale des multiplications données, art.XLV. Suivant cette méthode, on voit très clairement que le produit d'une quantité telle que $a-b$ par une autre $c-d$, doit être $ac-bc-ad+bd$; & on voit par conséquent en même temps que le terme bd qui est venu par la multiplication de b & de d a le signe +, tandis que les produits b & d ont le signe -. Il ne reste donc plus qu'à savoir si lorsque deux quantités négatives telles que $-b$ & $-d$ ne seront précédées d'aucune quantité positive, leur produit sera encore $+bd$. Or, c'est ce dont il est facile de reconnaître la vérité, puisque la méthode par laquelle on a découvert que le produit de $a-b$ par $c-d$ était $ac-bc-ad+bd$, ne spécifiant aucune grandeur particulière ni à a ni à c , doit avoir encore lieu lorsque ces quantités sont égales à zéro : or, en ce cas, le produit $ac-bc-ad+bd$ le réduit à $+bd$, donc $-b \times -d = +bd$

LACROIX, Essais sur l'enseignement, Bachelier 1828.

«Je me suis convaincu de plus en plus, à chaque cours, que la considération des quantités négatives isolées était en général trop près du commencement, dans la plupart des livres élémentaires ; et cela est d'ailleurs confirmé par l'histoire de la science, où l'on voit que l'explication des solutions négatives des problèmes est un des derniers progrès de l'analyse, dû à Descartes. Aussi la plupart des auteurs ne se sont adressés sur ce sujet qu'à la mémoire ; et ceux qui, ne voulant pas en faire un objet d'autorité, ont cherché à expliquer la nature de ces quantités, ont eu recours à des comparaisons forcées, comme celles des biens et des dettes, qui ne conviennent qu'à des cas particuliers de cette théorie.

Ce n'est d'ailleurs que par l'application de l'Algèbre à la Géométrie, qu'on peut concevoir dans son ensemble la théorie des quantités négatives, puisque les principales circonstances de cette théorie sont les faits algébriques qu'il faut se contenter de bien constater et de classer ensuite dans l'ordre qui les fait le mieux ressortir. C'est aussi ce que j'ai tâché de faire craignant, d'après une observation très répétée, l'obscurité que des détails métaphysiques trop étendus et trop multipliés jettent dans l'esprit des commençans ; car on abuse aussi en Mathématiques du raisonnement, lorsqu'on s'obstine à ne pas reconnaître certains faits résultant des combinaisons du calcul qui ne peuvent s'expliquer plus clairement que par eux-mêmes».

NEVEU, Cours d'Algèbre, Masson 1911.

CHAPITRE PREMIER NOMBRES POSITIFS ET NOMBRES NEGATIFS

20. - Soit à retrancher le nombre 7 du nombre 5. Au sens même arithmétique, cette opération est impossible ; on ne peut, en effet, retrancher 7 de 5.

Dans un but de *généralisation*, l'algèbre ne rejette pas cette opération. On convient de représenter le résultat par -2 ; on écrit donc :

$$5 - 7 = -2.$$

Le nombre -2 est dit un nombre *négatif*, et tout nombre précédé du signe + est appelé nombre *positif*.

Les nombres *positifs* et les nombres *négatifs* forment ce qu'on appelle les nombres *algébriques*.

L'introduction des nombres négatifs simplifie certaines questions et permet d'interpréter des résultats qui, tout d'abord, paraissent impossibles ou absurdes. C'est ce qui arrive dans tous les problèmes où la quantité demandée peut être comptée dans deux sens opposés, comme, par exemple, le temps *avenir* ou *passé* ; un gain ou une perte ; une distance qui peut être portée dans un sens ou dans un autre par rapport à une origine choisie ; une température, etc...

Ainsi, imaginons un joueur qui convient de représenter les *gains* qu'il réalise par des nombres positifs et les pertes par des nombres négatifs, puis reprenons l'opération indiquée par $5 - 7$. Elle indique qu'une perte de 7 francs a succédé à un gain de 5 francs ; le résultat des deux opérations est donc une perte de 2 francs, qui, par conséquent, sera représentée par le nombre négatif -2 ; ce qui donne un sens à l'égalité

$$5 - 7 = -2.$$

Si l'on veut exprimer que la perte -7 s'ajoute au gain +5, on écrira, en plaçant les nombres entre parenthèses :

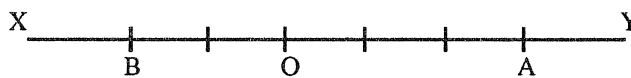
$$(+5) + (-7)$$

et l'on voit que, en réalité, ajouter -7 revient à retrancher 7 ; de sorte que l'on peut écrire :

$$(+5) + (-7) = +5 - 7 = -2.$$

[...]

Le signe + ou - placé devant le nombre arithmétique qui mesure la distance n'est donc pas ici un signe d'opération ; il est employé exclusivement pour indiquer le sens dans lequel la distance doit être portée.



Ainsi, un point A situé à la distance +3 du point O sera à droite de ce point à une distance égale à 3 fois l'unité de longueur ; un point B situé à la distance -2 du point O sera à gauche de ce point à une distance égale à 2 fois l'unité de longueur. De sorte que l'on écrira :

$$\begin{aligned} OA &= +3, \\ OB &= -2, \end{aligned}$$

3 et 2 représentant des mètres, des décimètres, des centimètres, ... suivant que l'unité de longueur est le mètre, le décimètre, le centimètre, ...

- Ainsi, en résumé :

Un nombre positif est un nombre arithmétique précédé du signe +.

Un nombre négatif est un nombre arithmétique précédé du signe -.

En général, *un nombre algébrique est un nombre positif ou négatif.*

BIBLIOGRAPHIE COMPLEMENTAIRE

D'ALEMBERT. *Articles : Négatif, Quantité, Courbe, Coordonnées, Equation* Encyclopédie Méthodique. Mathématiques. Tome second (1784), rééd. du Bicentenaire ACL-éditions 1987.

GAUD D, GUICHARD J.P. Aperçu historique sur les nombres relatifs. In Revue Repères IREM N°2 janvier 1991, p.94-123.

GLAESER G. *Epistémologie des nombres relatifs*. In Recherches en Didactique des Mathématiques, Volume 2/3, 1981, pp. 303-346. Ed. La pensée Sauvage, Grenoble 1981.

HAEGEL S. *Les nombres négatifs ont une histoire*. IREM de Strasbourg. ULP 1992. Brochure S.

NOEL E. *Le matin des mathématiciens*. Entretiens sur l'histoire des mathématiques. Belin-Radio France 1985.

SCHUBRING G. *Ruptures dans le statut mathématique des nombres négatifs*. In *petit X*, 1986 n° 12 pp. 5-32. IREM de Grenoble 1986.

STENDHAL. *Vie de Henri Brulard*. Gallimard-Folio 1973, pp. 330-334.

PARTIE 2 : L'apprentissage des relatifs

1 – L'introduction des relatifs

2 – Les quatre opérations

3 – Les transformations d'écritures

1 . Introduction des relatifs au collège

Le programme

L'examen des programmes officiels du collège nous apprend que les nombres relatifs doivent être introduits en 6^e mais qu'aucune compétence n'est exigible sur les opérations. Les règles sur l'addition et la soustraction seront étudiées en 5^e.

En 6^e, cette partie du programme est couplée avec le repérage sur une droite et dans le plan sans lien étroit avec le reste du programme de cette classe.

Les relatifs doivent donc apparaître :

- comme un moyen de se repérer sur une droite et dans le plan,
- comme des nombres.

L'aspect repérage, qui ne pose guère de problème, est largement développé dans les manuels. Mais que fait-on pour que les relatifs aient le statut de nombres ?

Les préacquis

Que sait un élève entrant en 6^e sur les nombres relatifs ? A l'école élémentaire, aucune situation ne peut faire penser à l'élève que d'autres nombres en dehors des décimaux positifs sur lesquels il apprend à opérer puissent exister. Pourtant, il a déjà entendu, dans la vie quotidienne, des expressions comme : "*Il fait moins cinq*", "*la voiture est garée au niveau -2*", mais pour lui -5 et -2 font partie du langage de la vie courante sans aucun rapport avec les objets mathématiques que sont les nombres.

Les objectifs

Quels objectifs doit-on poursuivre lors de l'introduction des nombres relatifs ? Quels apprentissages doit-on assurer ?

L'élève doit changer son regard sur les mathématiques. Jusqu'en 6^e, les maths servent à représenter le monde réel, à traiter des situations de la vie courante. A l'école élémentaire, pour résoudre les problèmes proposés, l'élève doit modéliser une situation qu'il a rencontrée ou plus exactement, l'élève peut représenter les nombres correspondants à des situations de comptage ou de mesurage. Avec les nombres négatifs, il y a une rupture, on va plus loin dans le monde de l'abstraction, l'élève doit se construire une représentation de ces nouveaux nombres que l'on ne peut plus associer aux mêmes situations que celles déjà rencontrées. L'élève doit donc changer sa conception du nombre. La construction de ce nouvel ensemble d'objets mathématiques doit se faire et doit être vue comme une extension du sens de ce que l'on nomme nombre pour qu'il n'y ait pas de coupure avec les nombres positifs déjà connus.

De plus, les relatifs ne prendront le statut de nombres que si l'élève est amené rapidement à opérer sur eux. Ces opérations devront amener l'élève à ne pas imaginer séparément les anciens et les nouveaux nombres mais, au contraire, à voir les décimaux positifs connus comme une partie de la grande famille des relatifs.

Pour tenter d'atteindre ces objectifs ambitieux, nous devons donc choisir des situations d'introduction en cohérence avec les buts poursuivis.

Historiquement, les nombres négatifs ont été introduits pour résoudre des équations, non pas pour une nécessité de modélisation du monde réel mais pour une nécessité interne aux mathématiques. Au collège, les commentaires mettent l'accent sur la résolution de problèmes concrets et sur le fait que les notions nouvelles doivent être introduites comme réponses à un problème posé.

Peut-on utiliser ce que nous apprend l'histoire et rester en cohérence avec les programmes ? Quels problèmes concrets peuvent nous amener à résoudre une équation du type $a + x = b$ avec une solution négative ? Aucun. Ce mode d'introduction ne peut donc être un support en 6^e.

Les manuels

Un détour vers les manuels les plus courants en 6^e nous donne un éventail des supports utilisés pour cette introduction. Voyons leurs avantages et leurs inconvénients. Les modèles concrets que l'on rencontre le plus souvent pour illustrer les nombres relatifs sont :

- l'ascenseur
- l'échelle des temps
- la température
- l'altitude . la profondeur

Ces quatre situations peuvent être codées par des nombres relatifs mais il ne s'agit que de repérages par rapport à une origine choisie arbitrairement. Elles offrent deux avantages :

- partir de situations connues ou imaginables par les élèves,
- utiliser certains acquis des élèves comme les températures.
- aboutir rapidement au repérage demandé par les programmes.

Mais elles présentent également des inconvénients :

- comme nous l'avons vu précédemment, les nombres utilisés vont-ils rester dans le domaine de la vie courante ? Pourront-ils entrer dans le domaine mathématique ?
- comment ces repérages vont-ils acquérir le statut de nombres ? Vont-ils entrer dans le domaine mathématique ou rester dans celui de la vie courante ?
- quelles opérations pouvons-nous faire avec eux ? Il n'y a aucun sens à ajouter ou à multiplier deux repérages.

Quelques exemples d'introduction des nombres relatifs :

a - Les températures

On ne peut pas faire d'opérations à partir de repérages. Si l'on ajoute (si l'on multiplie) la température de -3 relevée le matin et celle de 9 relevée à midi, que peut-on obtenir ?

Ces repérages touchent seulement le côté ordinal du nombre et ne peuvent servir à eux seuls à donner un statut de nombres aux relatifs.

Lorsque l'on fait résoudre à un élève un exercice tel que : "le matin la température est de -7°, dans la matinée la température augmente de 10°. Combien fait-il à midi ?".

On attend que l'élève modélise cette situation en " $-7 + 10 = 3$ " et qu'il réponde : "à midi il faisait 3°".

Or, -7 est un repérage, 10 un écart et 3 à nouveau un repérage. Ne risquons nous pas de semer le trouble chez l'élève si nos situations mêlent les deux aspects : repérage (aspect ordinal) et écart (aspect cardinal) ?

En effet, ces deux aspects du nombre sont à introduire :

- le codage, le repérage par rapport à une origine arbitrairement choisie (c'est le cas de l'ascenseur, de la température...)
- le nombre sur lequel on peut opérer.

mais ces deux aspects peuvent-ils coexister dans une même situation sans créer d'obstacles auprès de l'élève ?

b - Le goal-average

Un autre modèle concret est peu utilisé (un seul manuel sur quatre manuels courants étudiés le présente en guise d'introduction). Il s'agit du goal-average au football. On dispose de trois nombres : les buts pour
les buts contre
le goal-average qui est le bilan des deux premiers.

Ce goal-average, appelé différence dans le manuel étudié, est ainsi interprété :

- soit comme une différence BP - BC

$$10 - 7 = 3$$
$$3 - 11 = -7$$

- soit comme une addition de deux relatifs, que l'on doit coder auparavant, les buts "pour" en nombres positifs et les buts "contre" en nombres négatifs.

(+10) et (-7) donne + 3 (+3) et (-11) donne (-7)
ou (+10) + (-7) = + 3 ou (+3) + (-11) = (-7)

Le signe de l'addition est alors synonyme de "et", sens couramment utilisé pour l'addition des relatifs.

Une situation analogue se retrouve dans le cas de bilans gain-perte ou recette-dépense. Ces situations, qui sont également des modèles concrets, ont l'avantage de présenter le relatif comme un nombre intervenant dans une opération, aspect qui ne pouvait être mis en avant dans les quatre situations rencontrées dans les manuels.

Ces modèles concrets peuvent être très importants pour donner un statut de nombres aux relatifs mais leur utilisation excessive et exclusive risque de provoquer des blocages lors de l'introduction de la multiplication en 4^e. Comment peut-on envisager que le produit de deux pertes donne un gain ? C'est le risque encouru par la trop grande utilisation de ce genre d'image pour l'introduction et pour l'addition des relatifs. Si l'élève ne s'est pas détaché du modèle concret, il aura du mal à concevoir que les relatifs négatifs ne doivent leur existence qu'au rôle qu'ils jouent en mathématique à la fois dans la résolution des équations et dans la construction des ensembles de nombres abstraits et pourra difficilement donner du sens aux opérations ultérieurement étudiées.

c - Les soustractions impossibles

Une autre situation d'introduction peut-être envisagée. Pourquoi ne pas présenter le nombre négatif comme réponse à une soustraction jusqu'ici impossible pour l'élève, c'est-à-dire à résultat non positif ? Cette méthode, testée dans des classes, semble donner satisfaction dans l'immédiat pour l'introduction et ne pas provoquer de blocage au moment de l'apprentissage des opérations, car, d'emblée, le relatif se présente comme un nombre et son utilité ne peut être mise en doute.

Le nombre négatif est alors une réponse à un problème que l'on pose : faire en sorte que toutes les soustractions des nombres déjà connus soient possibles.

Détaillons un peu ce mode d'introduction peu développé et non rencontré dans les manuels.

1^{ère} étape.

Au tableau, la soustraction 5 - 7 est posée. Deux réponses sont possibles :

" 5 - 7 = 2 ". Les élèves font l'opération dans le sens où elle est possible, ils comptent l'écart entre ces deux nombres. Cette réponse peut être rapidement mise en défaut.

" 5 - 7 est impossible car 5 est plus petit que 7 ". C'est en effet ce que les élèves ont appris à l'école élémentaire. Le professeur doit alors faire placer les élèves dans un autre contexte purement mathématique. On veut faire en sorte que toutes les soustractions soient possibles, il s'agit d'imaginer une réponse. L'intérêt est donc purement mathématique, les nombres négatifs vont permettre d'effectuer des soustractions jusqu'ici sans réponse.

2^e étape.

Une liste de soustractions est alors donnée aux élèves, l'objectif étant de repérer celles que l'on savait faire antérieurement et de donner une réponse aux autres en allant en dessous de zéro.

Exemples : $10 - 4$; $15 - 7$; $100 - 85$; $89 - 98$; $2,5 - 1,3$; $0,01 - 0,1$; $0,7 - 0,73$.

Ce travail peut être individuel dans un premier temps pour que chacun se questionne et réagisse par rapport à ce nouveau savoir. Si les élèves ont l'habitude de travailler en groupes, on peut demander aux élèves de comparer leurs réponses et de se mettre d'accord, chaque réponse devant faire l'unanimité dans le groupe. Si cette structure de classe n'est pas pratiquée, on peut, tout de suite, collectivement, faire une synthèse en demandant, pour chaque opération, toutes les réponses trouvées et questionner les élèves sur leur méthode pour trouver les réponses.

Pour les soustractions données, il est intéressant de donner des nombres entiers et des nombres non entiers et ainsi tester le degré de maîtrise de l'ordre sur les décimaux et sur les opérations.

3^e étape.

Cette phase a pour objectif de faire un lien entre addition et soustraction en proposant des additions à trous. La résolution peut se faire par recours au sens des opérations.

Exemples :

$2 + \square = 10$; $17 + \square = 5$; $\square + 13 = 5$; $35 + \square = 21$; $145 + \square = 72$;
 $12,5 + \square = 8,5$

Les nouveaux nombres vont permettre de trouver une solution à toute équation du type $a + \square = b$, a et b étant positifs.

Les 2^e et 3^e étapes peuvent donner lieu à du calcul mental à condition de choisir des nombres simples. L'objectif est de se représenter mentalement ce que l'on fait et non d'appliquer une règle, aucune règle n'étant à institutionnaliser en 6^e.

4^e étape.

Une brève synthèse permet alors d'institutionnaliser ce nouveau savoir : l'existence de nombres autres que ceux déjà connus et permettant de donner une réponse à toutes les soustractions. Ces nombres sont alors représentés sur une droite graduée ce qui permet à la fois de matérialiser le franchissement de zéro et de faire une première approche de l'ordre.

Par cette méthode, le nombre négatif apparaît comme réponse à une opération à faire, son statut de nombre peut commencer à s'installer puisqu'on opère d'emblée avec lui. On peut prolonger ce travail par des exercices de repérage sur la droite et dans le plan.

Conclusion

En guise de conclusion, notons qu'aucun mode d'introduction ne peut, à lui seul, permettre d'atteindre les buts recherchés en 6^e. Il importe donc de varier les situations visant à donner un statut aux nombres négatifs, mais surtout de ne pas rester dans des modèles concrets qui risquent de créer la confusion repérage - écart ou de donner une bonne image pour l'addition (gains - pertes), mais d'engendrer un obstacle pour la multiplication.

Il semble préférable de se placer d'emblée dans un environnement mathématique qui montre la continuité positif - négatif et qui traite les négatifs comme d'autres nombres en opérant avec eux.

2 . Les quatre opérations

Si des modèles concrets ont été utilisés pendant la phase d'introduction, il est important qu'ensuite, les nombres découverts aient pris le statut de "nombres" ayant une existence propre et soient considérés comme des quantités autonomes avec lesquelles nous allons effectuer des opérations prolongeant celles déjà connues sur d'autres nombres et possédant les mêmes propriétés.

Ceci ne va pas sans difficulté quand on pense qu'il y a à peine plus d'un siècle (1866) Duhamel, professeur à l'école Polytechnique, écrivait :

Toute démonstration des règles sur des quantités négatives isolées ne peut être qu'illusion puisqu'il n'y a aucun sens à attacher des opérations arithmétiques sur des choses qui ne sont pas des nombres et n'ont aucune existence réelle.

2 . 1 . L'addition

Le programme

Les programmes de 6^e et de 5^e précisent les objectifs concernant les nombres relatifs.

En 6^e, *"Les travaux proposeront des exemples variés de situations nécessitant l'introduction de nouveaux nombres. Dans certains de ces exemples, faisant intervenir des températures, des durées,... on pourra être conduit à opérer sur ces nombres, mais les règles d'addition ne sont pas au programme"*.

En 5^e, les techniques opératoires se mettent en place :

"Effectuer la somme de deux nombres relatifs dans les différents cas de signes qui peuvent se présenter".

Les préacquis

Puisqu'il s'agit de prolonger à de "nouveaux nombres" une opération connue, demandons-nous quelles connaissances possède un élève sur l'addition ?

C'est la première opération apprise à l'école primaire, la pratique longue et répétée de situations dans lesquelles elle fonctionne en fait, en général, une opération bien maîtrisée par les élèves. En analysant les problèmes abordés, il semble possible d'en dégager deux catégories importantes :

– la première pourrait correspondre à un aspect *numérique*. Elle correspond à des problèmes conduisant à rassembler, à regrouper des "choses" de même espèce et à les dénombrer. Le signe + de l'opération traduit la mise en commun, la somme exprime le nombre total d'éléments :

Ex : $\left. \begin{array}{l} 5 \text{ chapeaux rouges} \\ 3 \text{ chapeaux noirs} \end{array} \right\} \text{ nombre total de chapeaux : } 5 + 3 = 8$

– la seconde se rattacherait davantage à une idée *géométrique*. C'est le cas de problèmes de déplacements successifs, de segments que l'on peut mettre "bout à bout". Le signe + traduit l'enchaînement des déplacements, la somme correspond au déplacement global, à la longueur totale :

Ex : $\left. \begin{array}{l} \text{premier déplacement : } 3 \text{ km} \\ \text{second déplacement : } 2,2 \text{ km} \end{array} \right\} \text{ distance totale parcourue : } 3 + 2,2 = 5,2$

Les contextes d'introduction

Que se passe-t-il lorsque nous manipulons les nombres relatifs ? Retrouvons-nous ces aspects numérique et géométrique dans les situations d'addition ?

Selon les activités d'introduction des nombres relatifs, nous nous trouvons en présence de trois possibilités pour la mise en place de l'addition de deux nombres relatifs :

– Soit les écritures ont acquis un statut de nombres et l'apprentissage porte sur la réalisation d'une opération connue avec ces nouveaux nombres (prolongement de l'addition déjà étudiée) et de ses propriétés en s'aidant d'images mentales telles que jetons de couleurs différentes, gains ou pertes.

Il s'agit bien là de mettre ensemble des nombres de même nature (relatifs) mais pas toujours de même espèce (positifs et négatifs) et d'en faire le bilan.

– Soit à partir d'une position initiale, nous réalisons une variation et nous essayons de trouver le résultat final. Les deux nombres en présence, représentent deux choses différentes : le premier indique un état (position, avoir) ; le deuxième traduit une variation, un déplacement.

Ex : Ce matin, il fait -3° , la température monte de 6° . Quelle est la température à midi ?

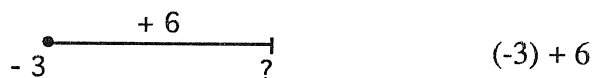
– Soit, et c'est peut-être une situation préférable, la somme correspond au bilan de deux variations ou de deux déplacements

Ex : l'ascenseur monte de 7 étages puis il descend de 3 étages, peut-il faire le même déplacement en une seule fois ?

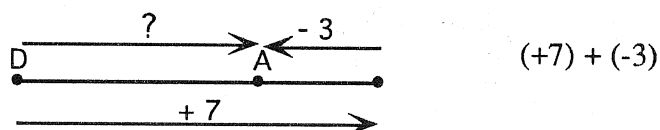
Le matin j'ai perdu 7 billes et l'après-midi 3 autres. Quel est le bilan de la journée ?

Dans ces deux derniers cas, les images se situent davantage dans un domaine géométrique, les variations, peuvent en effet se traduire par des schémas du genre :

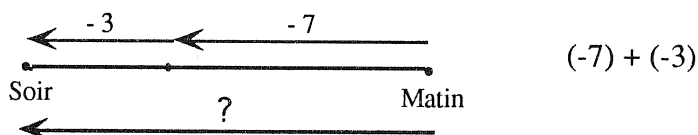
Pour les températures :



Pour l'ascenseur :



Pour les billes :



Pour les deux derniers cas, l'enchaînement des déplacements indiqué par le mot "et" dans la phrase française correspond au + de l'addition. C'est ce qui semble poser le plus de difficultés à l'élève. L'omission du signe opératoire est fréquente, les déplacements et les variations se juxtaposent : $-3 - 7$.

Pour l'élève a-t-on encore le modèle d'une addition ? Est-ce seulement un problème d'écriture ?

Si les modèles fonctionnent bien et si les images précédentes permettent d'appréhender facilement les nouvelles situations, quels sont alors les obstacles à l'apprentissage ?

Pour l'élève, il est nécessaire au début, de s'adapter à chaque situation, de réfléchir aux nombres en présence, d'accepter que pour faire une addition de nombres relatifs, il faut parfois effectuer une addition "arithmétique", d'autres fois une soustraction "arithmétique". (C'est une réelle difficulté !) Donner une réponse intuitive, c'est encore assez facile, mais lorsqu'il faut expliciter sa démarche, et formuler une règle générale cela devient plus problématique et il y a pour certains élèves, une véritable difficulté.

Ces difficultés ne sont pas récentes et on comprend mieux les précautions prises par Clairaut.

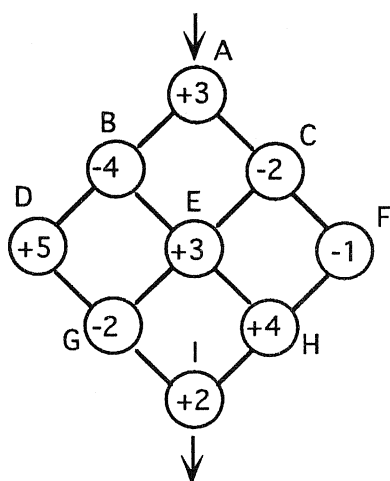
On demandera peut-être si on peut ajouter du négatif avec du positif, ou plutôt si on peut dire qu'on ajoute du négatif. A quoi je réponds que cette expression est exacte quand on ne confond point ajouter avec augmenter. Que deux personnes, par exemple, joignent leurs fortunes, quelles qu'elles soient, je dirai que c'est-là ajouter leurs biens, que l'un ait des dettes et des effets réels, si ses dettes surpassent ses effets, il ne possèdera que du négatif, et la jonction de sa fortune avec celle du premier diminuera le bien de celui-ci, en sorte que la somme se trouvera, ou moindre que ce que possédait le premier, ou même entièrement négative.

Alors quelles situations allons-nous mettre en place pour aborder l'addition des nombres relatifs ?

Les manuels

Voici quelques situations d'introduction, illustrant les trois aspects évoqués ci-dessus :

a . Le meilleur chemin (Pythagore 6^e • Hatier 1990)



Il faut descendre de la case du haut à celle du bas, sans remonter. Dans chaque case où l'on passe, on gagne le nombre de points marqués si le nombre est positif, on les perd si le nombre est négatif.

a) Par quel chemin faut-il passer pour gagner le maximum de points ?

b) Pour chaque chemin, traduire la succession des points gagnés ou perdus par une somme de nombres relatifs.

b . Variation de prix (Hachette 6^e • Edition 1994)

Calculer l'augmentation ou la baisse qui peut remplacer :

- une augmentation de 28 F suivie d'une augmentation de 19 F ;
- une augmentation de 54 F suivie d'une baisse de 45 F ;
- une baisse de 16 F suivie d'une baisse de 34 F ;
- une baisse de 32 F suivie d'une augmentation de 23 F.

(On écrira dans les quatre cas l'addition des deux entiers relatifs correspondants.)

c . Enneigement (Pythagore 6^e • Hatier 1990)

"En haut de la station, la couche de neige a baissé de 50 cm mais il est tombé 25 cm de neige, la nuit dernière.

a) Quelle variation a subi finalement l'épaisseur de la couche de neige ? Exprimer cette variation avec des nombres relatifs.

b) Avant ces modifications, la hauteur de neige était de 1,05 m en haut de la station. De combien est-elle maintenant ?

d . Recherche de déplacements équivalents. (Hachette 6^e • Edition 1994)

Laure et Laurent, Marc et Marion, Paul et Pauline, Sylvie et Sylvain sont, au départ, sur une même marche d'un grand escalier.

1° Laure monte de trois marches, puis de cinq marches.

Que doit faire Laurent pour rejoindre directement Laure ?

2° Marc monte de quatre marches, puis redescend de sept marches.

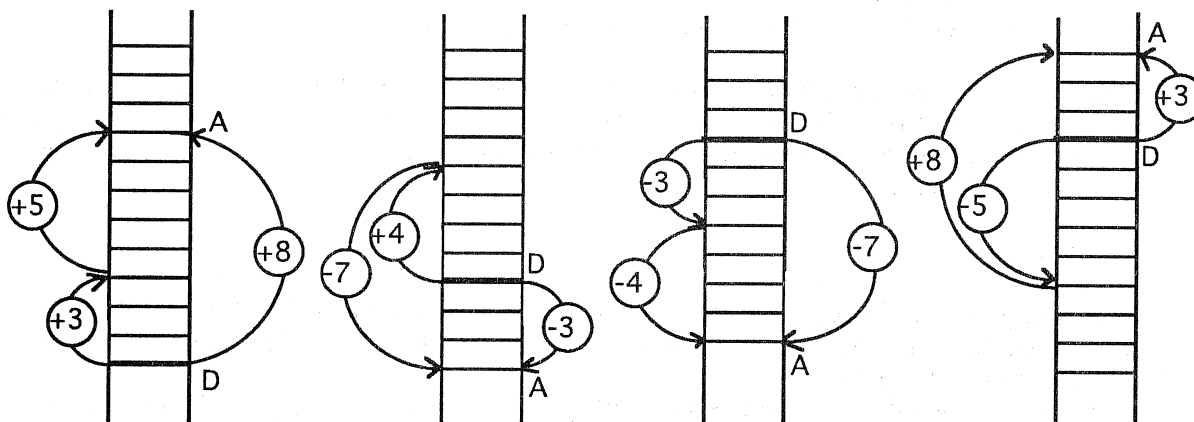
Que doit faire Marion pour rejoindre directement Marc ?

3° Paul descend de trois marches, puis de quatre marches.

Que doit faire Pauline pour rejoindre directement Paul ?

4° Sylvie descend de cinq marches, puis remonte de huit marches.

Que doit faire Sylvain pour rejoindre directement Sylvie ?



Les énoncés de ces situations contiennent des nombres relatifs ou font référence à leur utilisation ; en revanche, la solution des problèmes posés peut parfaitement être obtenue sans les utiliser : l'élève obtient alors une réponse par un raisonnement arithmétique, puis habilite cette réponse pour qu'elle soit conforme à l'attente du professeur.

Ex : Dans la situation 3, cela se traduit par : $50 - 25 = 25$, la hauteur a diminué de 25 cm : - 25.

L'exercice c est certainement celui qui illustre le mieux cette dérive; de plus, il présente l'inconvénient déjà mentionné de mêler repérage (position initiale) et déplacements (variations). En ce qui concerne les trois autres, le travail ne porte que sur des variations mais leur libellé n'incite pas à la recherche d'une modélisation. Si les situations présentées sont intéressantes, la formulation des questions est telle que l'élève n'a pas de raisons de remettre en cause les techniques qu'il sait déjà utiliser. N'oublions pas que *la nécessité de l'utilisation des nombres relatifs* est un enjeu important en 6^e et à plus forte raison en 5^e. L'élève doit être amené à les manipuler, non pas seulement pour "faire plaisir" au professeur, mais bien parce qu'il prend conscience qu'il peut, grâce à ces nombres, modéliser les problèmes posés et les résoudre de façon plus performante.

Il faut pour cela lui proposer des énoncés qui, même s'ils ont pour support des situations concrètes, l'incitent à modifier ses techniques et à se construire de nouvelles représentations. Dans l'exercice a par exemple, est-il nécessaire de faire référence à des

gains et à des pertes ? N'aurait-on pas plus de chances de faire évoluer la démarche de l'élève en donnant comme consigne : "Le schéma représente les bilans de plusieurs parties d'un jeu de billes. En partant de la case du haut, tu dois arriver à la case du bas, mais tu n'as pas le droit de remonter. Trouve le meilleur chemin, c'est-à-dire celui qui te permettra d'arriver avec le maximum de billes." ?

Les attentes du professeur diffèrent des réponses fournies par l'élève. Ne crée-t-on pas des obstacles didactiques en ne mettant pas en évidence la rupture avec les connaissances anciennes qui fonctionnent bien et que l'élève n'a aucune raison de changer ? Ces modèles concrets sont-ils adaptés pour ce que nous voulons mettre en place ?

La règle

A travers ces situations, l'élève va se familiariser avec l'addition de deux nombres relatifs de manière intuitive ; mais serait-il capable d'explicitier les règles qu'il utilise ? Quelles formulations en donnera-t-il ?

Il semble qu'à ce niveau (6^e, 5^e), le plus important soit que l'élève acquière une méthode de calcul :

- qu'il reconnaisse l'écriture d'une addition de deux nombres relatifs,
- qu'il observe les signes des nombres,
- qu'il déduise d'une part le signe du résultat, (nombres de même signe ou non), d'autre part l'opération "arithmétique" à effectuer pour donner le résultat.

Les formulations peuvent être données en liaison avec le travail de repérage, sur la droite graduée et en terme de "distance à zéro", (la notion de valeur absolue ne figurant plus, à juste titre, en collège). Les formulations rigoureuses n'ayant aucun sens pour l'élève semblent prématurées.

Les propriétés

Puisqu'il s'agit de prolonger l'addition des décimaux positifs aux nombres relatifs, il est important de faire sentir, à l'aide d'exemples, dans des situations choisies, que les deux opérations n'en sont qu'une.

N'est-il pas plus facile de calculer $(+9) + (-6)$ que $(-6) + (+9)$, de regrouper des termes pour en effectuer la somme :

$$\begin{aligned} (-13) + (+27) + (-4) &= (+27) + (-13) + (-4) \\ &= (+27) + (-17) \\ &= 10. \end{aligned}$$

N'aborde-t-on pas la somme de deux nombres opposés comme bilan de deux actions antagonistes ?

Il n'est pas nécessaire de donner les noms de ces propriétés, cependant on peut faire sentir aux élèves que leur utilisation ne changent pas la valeur des résultats mais qu'elle facilite les calculs.

Conclusion

En conclusion, les modèles concrets fonctionnent, donnent de bonnes images pour l'addition à condition qu'ils ne soient pas entravés par des activités d'introduction se limitant au repérage sur une droite ou au codage (températures par exemple) sur lesquels réaliser des additions n'a pas de sens.

2 . 2 . La soustraction

Introduction

Quand il aborde la soustraction, un élève s'est déjà familiarisé avec les nombres relatifs lors des activités d'introduction en 6^e, et avec leur utilisation, pour effectuer des additions, en 5^e surtout.

Dans le programme de 5^e, nous pouvons lire :

"Les activités... mettront en place les techniques opératoires concernant l'addition et la soustraction"

Les élèves devront être capables "de transformer une soustraction en une addition, les nombres étant explicites comme dans l'exemple : $-3,7 - (-4,3) = -3,7 + 4,3 = 0,6$ ".

Il semble que, pour nous enseignants, le travail se situe à deux niveaux. D'une part, il est important de proposer des situations dans lesquelles la soustraction existe avec des nombres positifs et négatifs afin qu'elle prenne sens en tant qu'opération ; d'autre part, il nous faut donner du sens à la technique opératoire et faire comprendre que la transformation en addition s'impose et qu'elle est fondée.

Quelles sont les situations qui vont permettre de donner du sens à l'opération ? Comment introduire le calcul de la différence de deux nombres relatifs ?

Contextes d'utilisation

Quelles connaissances possède un élève au sujet de la soustraction arithmétique ? Parmi les conceptions de la soustraction, deux d'entre elles permettent le prolongement du domaine "arithmétique" au domaine "relatif".

La première idée correspond à la recherche de *l'écart* entre deux états (état final, état initial) et consiste à effectuer la différence entre deux valeurs d'une même grandeur. La seconde idée est celle de complémentarité, de manque : rechercher le nombre à ajouter au deuxième nombre pour obtenir le premier, ce qui se traduit par la transformation de :

$$a - b = \square \quad \text{en} \quad a = b + \square$$

Il est intéressant de prendre appui sur ces connaissances, de faire fonctionner l'opération dans des cas faciles (nombres positifs) et d'essayer de prolonger aux nombres relatifs (positifs et négatifs) . Les exemples permettant ce passage et donnant du sens à l'opération, sont, en fait, peu nombreux ; citons-en cependant quelques-uns :

- le calcul de la durée de vie, lorsque la date de naissance est négative ;
- le calcul de la distance de deux points d'une droite graduée lorsque ceux-ci sont de chaque côté de l'origine ;
- le calcul de variations de températures, celles-ci pouvant être positives ou négatives.

Dans les deux premiers cas, les résultats sont toujours positifs de par leur nature, le premier nombre correspond toujours au plus grand des deux.

- durée de vie = année de mort - année de naissance
- distance = abscisse la plus grande - abscisse la plus petite

Dans le troisième cas, les variations peuvent être des deux sortes. Nous y reviendrons par la suite au moment où nous expliquerons nos propositions pour introduire la soustraction. L'écriture de la soustraction ne pose aucune difficulté lorsque nous manipulons des nombres positifs, en revanche, il y a rupture au voisinage de zéro. Il n'y a pas de prolongement dans l'écriture, l'élève calcule en effectuant une addition et hésite à écrire une soustraction respectant le calcul réalisé jusqu'alors.

Ex : • naissance : 1745 • mort : 1817
durée de vie : $1817 - 1745 = 72$

• naissance : 10 av JC • mort : 20 ap JC.
durée de vie : $20 + 10 = 30$

L'élève hésite à écrire $20 - (-10)$.

Ces hésitations sont à exploiter pour apporter une aide à la compréhension de l'opération d'une part, de sa technique d'autre part.

La seconde idée, recherche du complément (nombre qu'il faut ajouter au second pour obtenir le premier), est beaucoup plus exploitée dans les manuels : elle vise à donner du sens à la technique et à valider la transformation de la soustraction en addition. Quelles activités rencontre-t-on dans les différents manuels en usage actuellement ?

Activités d'introduction

a) Dans de nombreux manuels (Pythagore 5^e, ...), la règle est introduite par utilisation de la calculatrice. Il s'agit de comparer les résultats donnés pour $a - b$ par la calculatrice et les résultats calculés à la main pour $a + \text{opp } b$ sur quelques exemples, et accepter la règle "soustraire un nombre, c'est ajouter son opposé"

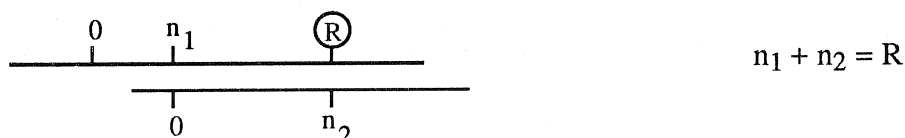
Certes, les résultats sont identiques, mais cela ne permet en rien de comprendre pourquoi il est ainsi, d'en saisir la raison.

b) Dans d'autres manuels et dans un souci de donner quelques images mentales à la soustraction, on utilise des modèles "concrets" et on recherche la transformation additive équivalente.

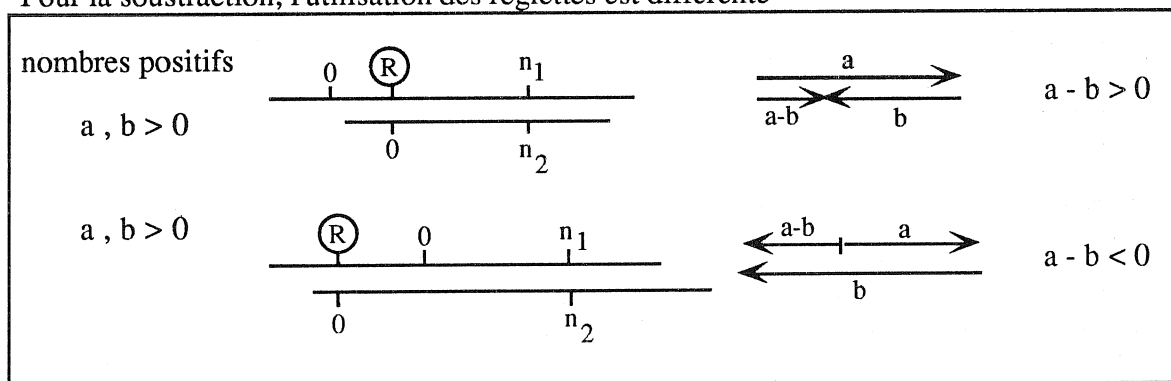
Citons quelques exemples

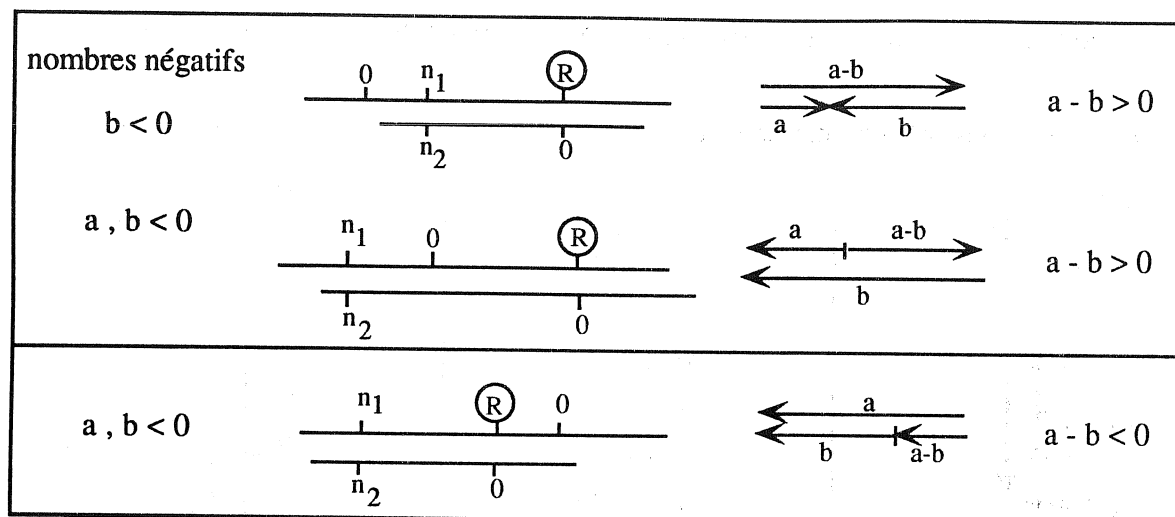
• *Utilisation des réglettes* (Bordas 5^e • Edition 1991)

Ces réglettes ont été utilisées pour aborder l'addition, en développant l'aspect géométrique de l'addition "mise bout à bout" de deux segments



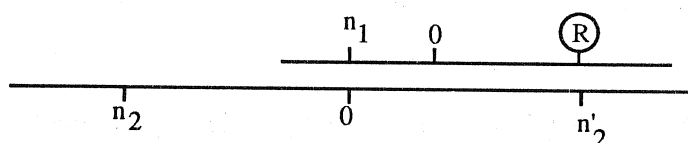
Pour la soustraction, l'utilisation des réglettes est différente



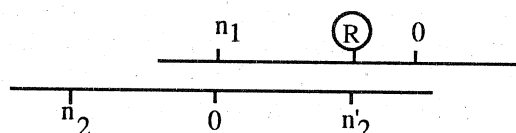


La soustraction correspond en fait à une addition. Le nombre R est plus grand que les nombres n_1 et n_2 .

Le résultat est le même que celui de l'addition d'un nombre n'_2 tel que :



ou encore



n'_2 se trouve à la même distance de 0 que n_2 mais de l'autre côté, c'est son opposé. D'où le passage à la règle :

$$n_1 - n_2 = n_1 + n'_2 = n_1 + \text{opp } n_2$$

L'utilisation de ces réglettes n'est-elle pas trop prégnante ? L'élève arrive-t-il à dépasser le stade de la manipulation pour calculer d'autres différences ? L'élève réalise-t-il qu'il fait des soustractions lorsqu'il manipule ces réglettes ?

• **Recettes et dépenses** fournissent aussi des modèles intéressants pour la compréhension du calcul. (Belin 5^e • Edition 1991)

Qui a raison ? Pourquoi ? Pour rétablir l'équilibre d'un budget :

Recette de 120 F en trop, deux possibilités :

- soustraire la recette de 120 F - (+120)
- ajouter une dépense de 120 F + (-120)

Dépense de 300 F en trop, deux possibilités :

- enlever une dépense de 300 F - (-300)
- ajouter une recette de 300 F + (+300)

On peut ensuite comparer les opérations pour conclure

$$a - (+120) = a + (-120)$$

$$b - (-300) = b + 300$$

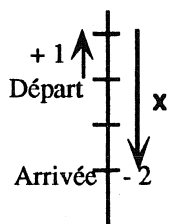
et dégager la règle générale.

- Autre modèle utilisé dans les manuels actuels (Nathan 5^e • Edition 1989) : *l'ascenseur*.

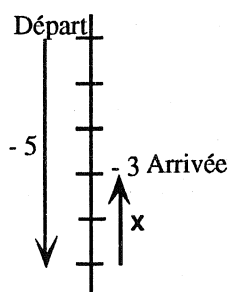
Il s'agit là

- d'une part de trouver le complément pour arriver au niveau indiqué en s'aidant du dessin

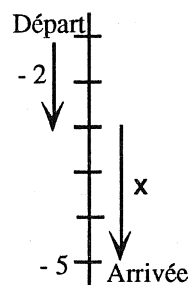
$$\begin{aligned} 1 + x &= -2 \\ x &= (-2) - 1 \\ x &= -3 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} (-5) + x &= -3 \\ x &= (-3) - (-5) \\ x &= 2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} -2 + x &= -5 \\ x &= -5 - (-2) \\ x &= -3 \end{aligned}$$



- d'autre part d'écrire le bilan sous forme d'une addition équivalente

$$x = (-2) + (-1)$$

$$x = (-3) + 5$$

$$x = (-5) + 2$$

Les écritures $x = (-2) - 1$; $x = (-3) - (-5)$ et $x = (-5) - (-2)$ correspondent aux soustractions mais le passage aux additions équivalentes n'est pas suggéré par les schémas.

Une difficulté supplémentaire est d'écrire l'addition qui correspond effectivement à la soustraction à transformer et non une autre donnant le même déplacement, par exemple $x = (-1) + (-2)$ déduite du dessin. De plus -2 indique tantôt une position, tantôt un déplacement, n'est-ce pas là une difficulté réelle, comme nous l'avons vu pour l'addition ?

c) Certaines activités d'introduction reposent sur la transformation de $a - b = c$ en $a = b + c$ ou réciproquement, par l'intermédiaire de résolution d'équations à trous ou de résolution d'équations de type algébrique.

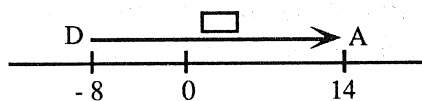
- C'est le cas, des **additions à trous** (Nathan 5^e • Edition 1989), le travail est décomposé en trois étapes

- 1^{ère} étape :

$$-8 + \square = 14$$

$$\square = 22$$

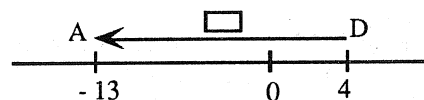
$$\square = 14 - (-8)$$



$$4 + \square = -13$$

$$\square = -17$$

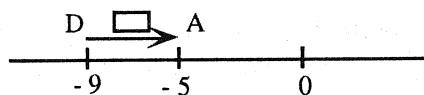
$$\square = (-13) - 4$$



$$-9 + \square = -5$$

$$\square = 4$$

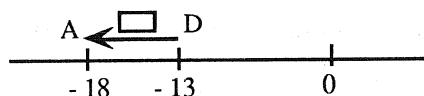
$$\square = (-5) - (-9)$$



$$-13 + \square = -18$$

$$\square = -5$$

$$\square = (-18) - (-13)$$



La recherche de $\square$ est facilitée par la visualisation sur la droite graduée.

• 2^e étape, on recherche l'addition ayant pour premier terme le même que celui de la soustraction et donnant le même résultat :

$$\begin{array}{rcl} 22 & = & 14 + \blacktriangle \\ -17 & = & -13 + \blacktriangle \\ 4 & = & -5 + \blacktriangle \\ -5 & = & -18 + \blacktriangle \end{array} \quad \begin{array}{rcl} \blacktriangle & = & 8 \\ \blacktriangle & = & -4 \\ \blacktriangle & = & 9 \\ \blacktriangle & = & 13 \end{array}$$

• 3^e étape

Par comparaison entre les deux étapes

$$-8 + \square = 14$$

$$\square = 14 - (-8)$$

1^o étape

$$\square = 14 + 8$$

2^o étape

on obtient $14 - (-8) = 14 + 8$

De même :

$$\begin{array}{l} (-13) - 4 = (-13) + (-4) \\ -5 - (-9) = (-5) + 9 \\ (-18) - (-13) = (-18) + 13 \end{array}$$

On peut alors établir, en acceptant que ce sera toujours vrai que :

$$c = a - b = a + \text{opp } b$$

Dans d'autres manuels (IREM Strasbourg 5^e • Edition 1987) ou des livres plus anciens tels que Lebossé Emery, on trouve *des transformations d'écritures* et *des essais de démonstration* dans le sens $a - b = c$ en $a = b + c$

Ainsi : $(-7) - (-4) = x$

$$-7 = x + (-4)$$

or $(-4) + (+4) = 0$, d'où l'idée d'ajouter +4 de chaque côté de l'égalité.

$$(-7) + (+4) = x + (-4) + (+4)$$

$$(-7) + (+4) = x + 0$$

$$(-7) + (+4) = x$$

Il s'en suit que :

$$(-7) - (-4) = (-7) + (+4)$$

On peut concevoir une généralisation de ce type de calcul à tous les nombres :

$$a - b = x$$

$$a = x + b$$

$$a + \text{opp } b = x + b + \text{opp } b$$

$$a + \text{opp } b = x$$

d'où $a - b = a + \text{opp } b$ et l'énonciation de la règle dans tous les cas :

"Soustraire un nombre, c'est ajouter son opposé".

L'introduction de la soustraction sous cette forme correspond davantage à une résolution d'équations de type algébrique, étudiée actuellement en classe de 4^e.

Une autre approche possible est celle que décrivent Monge et Guinchan dans leur manuel (4^e • Edition 1959). Elle est basée sur la connaissance de la somme nulle de deux nombres opposés et sur son addition à n'importe quel nombre, puisqu'ajouter zéro ne change pas la valeur.

Pour retrancher un nombre relatif, on ajoute son opposé :

Soit la différence $(+15) - (-7)$; nous ne la modifions pas en ajoutant une somme nulle telle que $(-7) + (+7)$ d'où : $(+15) - (-7) = (+15) - (-7) + (-7) + (+7)$

Or dans le second membre $- (-7)$ est compensé par $+ (-7)$, il en résulte que :

$$(+15) - (-7) = (+15) + (+7).$$

Ce raisonnement est indépendant des nombres considérés. La règle est générale ; si a et b désignent des nombres relatifs quelconques on a :

$$a - b = a + (-b)$$

Au début du XIX^e siècle, on introduisait la soustraction de cette manière (4^e Tome 1, Travaux numériques, IREM de Poitiers)

Soustraction - Retrancher b de a , c'est chercher un nombre tel qu'en l'ajoutant à b on retrouve a .

Soit à calculer : $5 - (-3)$.

Je dis que la différence est $5 + 3$. En effet, si à ce nombre on ajoute -3 , on obtient :

$$5 + 3 - 3 = 5$$

Donc $5 + 3$ représente la différence cherchée. Ainsi, on a :

$$5 - (-3) = 5 + 3 = 8.$$

Retrancher -3 revient donc à ajouter $+3$; de sorte que la soustraction ainsi généralisée n'implique plus nécessairement l'idée de *diminution*, pas plus d'ailleurs que l'addition qui n'implique pas nécessairement l'idée d'*augmentation*. Aussi, pour éviter l'ambiguïté, on emploie les expressions *somme algébrique* et *différence algébrique*.

On aura de même :

$$-5 - (-4) = -5 + 4 = -1.$$

Une approche possible

Nous avons évoqué au paragraphe 2, des situations donnant du sens à la soustraction en tant qu'opération existant avec les nombres relatifs ; comment les exploiter pour aborder la technique de calcul de la soustraction ?

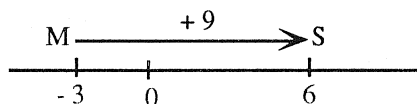
Nous exposons, dans ce paragraphe, une stratégie possible pour la classe en prenant comme situation le calcul de variations de températures.

Tous les élèves sont d'accord pour donner la variation de la température sur une journée par exemple, comme étant la différence entre la température (finale) du soir et la température (initiale) du matin.

• La première étape consiste à faire calculer les variations sur des exemples simples comme les deux premières colonnes du tableau suivant, puis de poser le problème en proposant la troisième colonne de ce même tableau :

Température du matin	12	15	- 3
Température du soir	15	12	6
Variation	$15 - 12 = 3$	$12 - 15 = -3$	

Il y a rupture dans l'écriture, l'élève n'écrit plus la soustraction $6 - (-3)$ mais calcule naturellement $6 + 3 = 9$ en s'aidant éventuellement d'un dessin, on peut l'amener à expliciter son changement de calcul.



- Le problème étant posé, dans un second temps nous pouvons lister avec les élèves tous les cas qui peuvent se présenter ; ce qui conduit à des calculs comme ceux décrits ci-dessous :

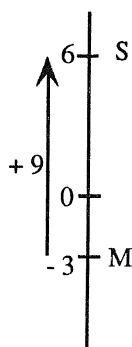
Matin	12	15	-3	6	-2	-6
Soir	15	12	6	-3	-6	-2
Variation (Tf-Ti)	15 - 12	12 - 15	6 - (-3)	(-3) - 6	(-6) - (-2)	(-2) - (-6)
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)

Ensuite nous pouvons trier ceux que l'on sait calculer directement :

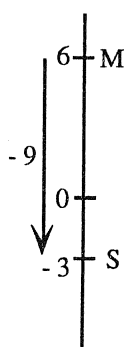
(1) soustraction arithmétique

(2) soustraction qui a permis d'introduire les "nouveaux" nombres (voir introduction des nombres relatifs)

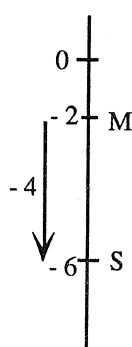
et représenter les autres calculs à l'aide de dessins, tels que ceux qui suivent, pour en trouver le résultat



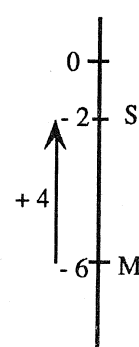
(3)



(4)



(5)



(6)

- La troisième étape consiste à observer le résultat du (3) : $6 - (-3) = 6 + 3$ pour analyser la transformation et dégager une règle de calcul.

- Enfin, on vérifie que cette règle fonctionne d'abord sur les cas connus :

$$(2) \quad 12 - 15 = 12 + (-15) = -3$$

puis sur les autres $(4) \quad (-3) - 6 = (-3) + (-6) = -9$

On peut également faire un travail sur le signe du résultat, donner des calculs et demander seulement le signe de la différence.

En liaison avec le sens de variation, on peut vérifier que :

$$\begin{array}{ll} a > b & a - b > 0 \\ \text{ou} & a < b & a - b < 0 \end{array}$$

- Selon le choix des températures, il est possible de dégager la non commutativité de la soustraction $6 - (-3) = 6 + (+3) = 9$

$$(-3) - 6 = (-3) + (-6) = -9$$

et la règle $a - b$ a pour opposé $b - a$.

Si nous choisissons comme introduction le calcul de la durée de vie, nous pouvons procéder de la même manière :

- faire des calculs dans des cas simples,
- lister tous les cas possibles.

Année Naissance	6	-10	-40
Année Mort	42	20	-15
Durée de vie (date mort - date naissance)	42 - 6 = 36	20 - (-10)	(-15) - (-40)
	(1)	(2)	(3)

Dans tous les cas calculés, la date de mort est un nombre supérieur à la date de naissance

- On peut voir ceux que l'on sait calculer directement ou par visualisation, c'est le cas de (1) et (2), puis analyser la transformation et dégager une règle possible pour le calcul et la faire fonctionner sur le cas (3)

$$20 - (-10) = 20 + 10$$

- On peut ensuite passer à une décontextualisation en écrivant tous les types de calculs possibles en manipulant des nombres relatifs :

Il en résulte les calculs suivants :

$$6 - 42 \quad (4)$$

$$(-10) - 20 \quad (5)$$

$$(-40) - (-15) \quad (6)$$

(4) peut se calculer directement (découverte des nombres relatifs négatifs)

(5) et (6) par utilisation de la règle énoncée précédemment.

$$\begin{aligned} (-10) - 20 &= (-10) + (-20) = -30 \\ (-40) - (-15) &= (-40) + 15 = -25 \end{aligned}$$

Puis on peut réaliser une vérification par une illustration géométrique.

L'avantage de telles situations réside dans le fait que l'addition s'impose naturellement par le calcul et peut se représenter géométriquement, la transformation apparaît directement, le travail consiste à l'analyser et à dégager une règle permettant d'effectuer la soustraction dans tous les cas possibles.

Difficultés des élèves

Une des difficultés importante est liée à la manipulation dans les deux sens de l'égalité :

$$a - b = x \quad a = b + x$$

Le passage de la soustraction à l'addition ne semble pas simple pour l'élève, d'autant plus que s'y adjoint le caractère réversible des nombres b et x

$$a - b = x \quad ; \quad a = b + x \quad \text{et} \quad a - x = b.$$

La soustraction n'implique plus l'idée de diminution de même que l'addition n'implique plus celle d'augmentation. La différence entre deux nombres peut être supérieure aux deux nombres initiaux et la soustraction est toujours possible. Il y a rupture avec les connaissances antérieures sur les opérations concernant les décimaux positifs.

La difficulté majeure semble provenir de la non commutativité de la soustraction, calculer $a - b$ ne donne pas le même résultat que $b - a$ mais le nombre opposé.

Conclusion

En cinquième, il est nécessaire de consacrer du temps à la mise en place de la soustraction : sens et technique, pour que l'élève comprenne bien que cette opération existe, même si elle perd son statut puisqu'elle est transformée en addition lorsque les nombres sont connus, et pour préparer le terrain du calcul littéral qui sera abordé plus tard. Dans les classes suivantes, nous rencontrerons d'autres occasions de faire fonctionner la soustraction (résolution d'équations, de systèmes d'équations, repères,...)

2 . 3 . La multiplication

Introduction

Pour l'introduction de l'addition et de la soustraction des nombres relatifs, il y a, nous l'avons vu, précédemment, un souci de rechercher des modèles "concrets". Ces modèles permettent, bien sûr, de comprendre et de mieux appréhender l'addition, mais ils ne fonctionnent plus pour la multiplication et constituent des obstacles pour les élèves : "comment accepter qu'une perte multipliée par une perte donne un gain ?".

Bien sûr, on peut rechercher d'autres modèles pour introduire la multiplication. Pour le dépassement de ces modèles, il faudra alors sortir du contexte déjà connu afin de faire fonctionner les règles dans des situations plus abstraites.

Historiquement, la recherche des modèles concrets a ralenti l'émergence des règles de la multiplication des nombres relatifs et dans les textes, on peut relever une grande prudence des propos.

A l'origine, les nombres relatifs ont pour fonction de résoudre des problèmes théoriques de type algébrique, la règle des signes prend naissance dans la distributivité ; ne vaudrait-il pas mieux la replacer dans son contexte pour lui redonner sens ?

Que faire avec les élèves ?

Il est possible de s'appuyer sur les connaissances précédemment acquises (multiplication des nombres positifs, addition) et de vouloir, dans ce champ de nouveaux nombres, établir une opération possédant les mêmes règles (commutativité, distributivité sur l'addition,...). Cela nécessite de revenir, dans un premier temps au sens de la multiplication, à sa redécouverte comme addition répétée.

On peut alors expliquer la multiplication d'un nombre positif par un nombre négatif dans le cas des entiers et prolonger pour les nombres décimaux :

$$(-6) \times 3 = (-6) + (-6) + (-6) = -18$$

De même :

$$(-1,2) \times 4 = (-1,2) + (-1,2) + (-1,2) + (-1,2) = -4,8.$$

Puis on prolonge pour des produits tels que : $-2,3 \times 7,6$

Il reste alors à examiner le cas du produit de deux nombres négatifs.

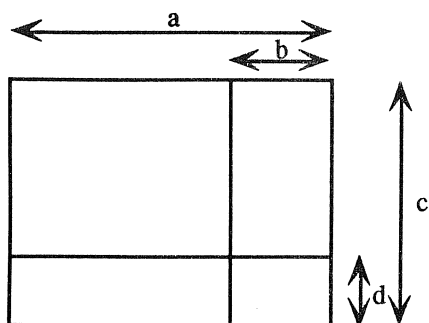
Historiquement

Regardons comment on introduisait les règles de calcul sur ces nombres au moment de leur mise en place. (Dans tout ce qui suit, les lettres représentent pour leurs auteurs des nombres positifs.)

Certaines explications, s'imposant par l'évidence, sont des explications de pratiques. Ainsi, Euler (1707 ; 1783) explique dans son "Introduction complète à l'algèbre" et justifie, les règles de calculs avec les négatifs.

Il dit que " $(-1) \times (-1) = 1$ car le résultat est 1 ou -1 et comme $1 \times (-1) = -1$, le résultat est nécessairement 1". Il explique aussi que "- a multiplié par - b fait +ab car il a déjà expliqué que - a par + b fait - ab" !

Le lien nombre-géométrie est aussi un obstacle pour faire accepter les règles avec les nombres relatifs ; ainsi à partir de $(a - b)(c - d)$, les produits doivent être ajoutés ou soustraits :



$$(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$$

Clairaut déduit de cette égalité, en posant $a = 0$ et $c = 0$:

$$(-b) \times (-d) = bd.$$

Mais cela a-t-il un sens ? Peut-on enlever quelque chose de rien ? De plus, dans le premier membre les signes "-" sont des signes opératoires tandis que dans l'écriture $-b$, le signe "-" traduit une quantité négative qui, à l'époque, n'avait pas d'existence propre.

Quelques tentatives de preuves irréfutables (liées à la pratique) sont à noter ; citons celles de Hankel et de Mac Laurin. Les deux mathématiciens basent leurs explications sur la distributivité de la multiplication sur l'addition de deux nombres opposés et le produit nul quand on multiplie par 0.

Ainsi, pour le premier : $b + \text{opp } b = 0$; $a + \text{opp } a = 0$

$$0 = a \times 0 = a \times (b + \text{opp } b) = a \times b + a \times \text{opp } b$$

$$0 = 0 \times \text{opp } b = (a + \text{opp } a) \times \text{opp } b = a \times \text{opp } b + \text{opp } a \times \text{opp } b.$$

Il s'ensuit l'égalité : $a \times b = \text{opp } a \times \text{opp } b$.

$$\text{et } ab = (-a) \times (-b).$$

Pour le second : $+a - a = 0$, on peut multiplier les deux membres par $-n$: $0 \times (-n) = 0$

$$(+a - a) \times (-n) = (+a) \times (-n) - a \times (-n) = 0$$

ce qui doit toujours être nul donc les deux nombres sont des nombres opposés,

$$\text{or, } +a \times (-n) = -an \text{ donc } -a \times (-n) = +an$$

et - par - donne + !

On pourra se reporter à la partie historique pour d'autres introductions.

Vers les années 1958, l'introduction se faisait à l'aide de modèles vectoriels et d'images relevant du domaine de la physique. Citons deux exemples :

Dans Monge (Edition 1958), l'introduction de la multiplication des nombres relatifs se fait à l'aide de mouvements "orientés" comme le montrent les quelques lignes suivantes :

Produits de deux facteurs.

51. Considérons un point mobile m qui se déplace sur un axe $x'x$ d'un mouvement uniforme. (Il parcourt des distances égales pendant des durées égales). Sur cet axe, nous choisissons une origine des abscisses O et nous convenons ce qui suit :

1° La vitesse est positive si m se déplace dans le sens positif de l'axe ; elle est négative s'il se déplace dans le sens contraire.

2° Nous choisissons comme instant zéro celui où le mobile passe au point O .

3° La date du passage du mobile m en un point M de $x'x$ est un nombre positif si le mobile passe en M après être passé en O, un nombre négatif dans le cas contraire.

La durée du parcours OM est la différence entre la date du passage en M et la date du passage en O, celle-ci est zéro par convention ; la durée du parcours OM s'exprime donc par le même nombre relatif que la date du passage en M.

4° La position M du mobile est repérée par l'abscisse $\overline{OM}$. Nous calculerons celle-ci en appliquant la formule du mouvement uniforme aux nombres relatifs : $\overline{OM}$, v , t :

$$\overline{OM} = v \times t.$$

52. 1^{er} cas de figure :

Le mobile se déplace dans le sens positif, sa vitesse est positive : $v = +3 \text{ cm/s}$; il passe en M 5 secondes après être passé en O, c'est-à-dire à la date + 5 secondes ; d'où $t = +5$.

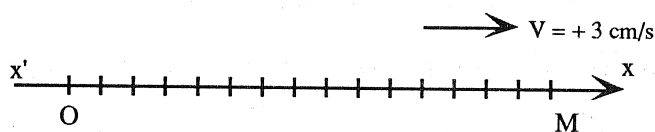


fig. 6

On a : $\overline{OM} = (+3)(+5) = +15$.

ce qui se vérifie sur la figure 6.

53. 2^e cas de figure :

Le mobile se déplace dans le sens positif, sa vitesse est positive : $v = +3 \text{ cm/s}$. Il est passé en M 4 secondes avant de passer en O, c'est-à-dire à la date - 4 secondes ; d'où $t = -4$.

$$\overline{OM} = (+3)(-4) = -12,$$

Ce qui se vérifie sur la figure 7.

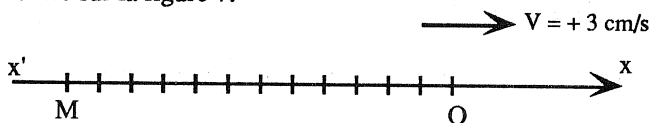


fig. 7

54. 3^e cas de figure :

Le mobile se déplace dans le sens négatif ; sa vitesse est négative : $v = -3 \text{ cm/s}$. Il passera en M 5 secondes après être passé en O, c'est-à-dire à la date + 5 secondes ; d'où : $t = +5$.

$$\overline{OM} = (-3)(+5) = -15,$$

ce qui se vérifie sur la figure 8.

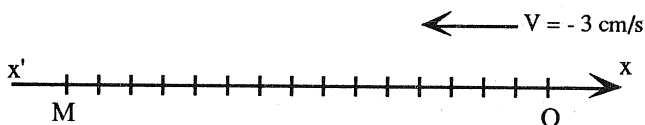


fig. 8

55. 4^e cas de figure :

Le mobile se déplace dans le sens négatif ; sa vitesse est négative : $v = -3 \text{ cm/s}$. Il est passé en M 4 secondes avant de passer en O, c'est-à-dire à la date - 4 secondes ; d'où $t = -4$.

$$\overline{OM} = (-3) (-4) = +12,$$

ce qui vérifie sur la figure 9.

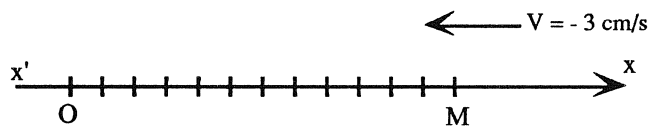


fig. 9

Dans Maillard 4^e (Edition 1958), le support choisi est vectoriel :

75. Multiplication d'un nombre relatif par un nombre négatif.

Soit un vecteur $\overrightarrow{AB}$. Construisons le vecteur $\overrightarrow{CD}$ ayant le même support, ayant le sens contraire et ayant une longueur triple :

$$CD = AB \times 3.$$

Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ est opposé au vecteur $\overrightarrow{AB} \times 3$, nous convenons d'écrire :

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \times (-3) \text{ et aussi } (-3) \times \overrightarrow{AB}$$

• CONVENTION. – Multiplier un vecteur $\overrightarrow{AB}$ par un nombre négatif a , c'est construire un vecteur $\overrightarrow{CD}$ de même support mais de sens contraire à celui du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et dont la longueur est obtenue en multipliant la longueur du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par la valeur absolue du nombre a .

On écrit : $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \times a$ ou $\overrightarrow{CD} = a \overrightarrow{AB}$.

Supposons maintenant que le support du vecteur $\overrightarrow{AB}$ soit orienté. Deux cas sont possibles :

1° Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a une mesure algébrique positive, par exemple $\overline{AB} = (+2)$ (fig.23).

Prenons $a = (-3)$. Construisons le vecteur $\overrightarrow{CD}$ tel que :

$$(1) \quad \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \times (-3).$$

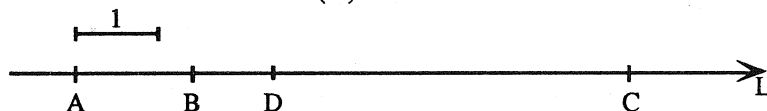


fig. 23

$$\overline{AB} = +2 ; \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \times (-3)$$

La mesure $\overline{CD}$ du vecteur $\overrightarrow{CD}$ est négative, la longueur CD du vecteur $\overrightarrow{CD}$ est : $2 \times 3 = 6$. On a donc :

$$\overline{CD} = (-6) = -6.$$

Nous *conviendrons* encore, de traduire la relation (1) par l'écriture :

$$(2) \quad \overline{CD} = \overline{AB} \times (-3).$$

Nous en déduisons l'écriture : $(-6) = (+2) \times (-3)$

ou : $-6 = (+2) (-3)$

qui pose, en fait, la définition du produit d'un nombre positif par un nombre négatif.

2°) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a une mesure algébrique négative, par exemple $\overline{AB} = (-2)$: (fig.24).

Prenons $a = (-3)$. Construisons le vecteur $\overrightarrow{CD}$ tel que :

$$(3) \quad \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \times (-3).$$

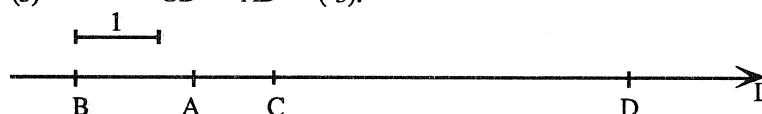


fig. 24

$$\overline{AB} = -2 ; \quad \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \times (-3)$$

La mesure $\overline{CD}$ du vecteur $\overrightarrow{CD}$ est positive, la longueur CD du vecteur $\overrightarrow{CD}$ est : $2 \times 3 = 6$. On a donc :

$$\overline{CD} = (+6) = 6.$$

Nous *conviendrons* toujours de traduire la relation (3) par l'écriture :

$$(4) \quad \overline{CD} = \overline{AB} \times (-3).$$

Nous en déduisons l'écriture : $(+6) = (-2) \times (-3)$

ou : $6 = (-2) (-3)$

qui pose en fait, la définition du produit d'un nombre négatif par un nombre négatif.

Actuellement, nous ne disposons plus au collège, ni de la mesure algébrique ni du produit d'un vecteur par un nombre, quelles introductions pouvons-nous alors proposer aux élèves ?

- Beaucoup de manuels actuels s'appuient sur les résultats fournis par la calculatrice : après quelques calculs, il y a constatation d'une règle, cette règle est admise pour l'ensemble des nombres, validée, puis appliquée. C'est, certes, un moyen rapide, utilisant les outils modernes dont les élèves disposent, mais il n'y a aucune explication. N'est-ce pas dangereux pour la mise en place de la démonstration étudiée parallèlement ?

- D'autres manuels proposent une démarche voisine mais peut-être moins problématique : on donne la règle d'autorité, puis l'élève la vérifie sur quelques exemples, ensuite on la valide. Là encore, qu'est ce qui explique que "un nombre négatif multiplié par un nombre négatif donne un produit positif" ? Il faut que l'élève l'accepte sans réfutation.

- On peut trouver, dans d'autres manuels ou brochures, des situations essayant de faire comprendre à l'élève pourquoi il en est ainsi. Nous allons en citer quelques unes :

a - La première est extraite d'une production APMEP (1980) ; son principe est de prolonger la règle de construction d'une table de multiplication.

$$4 \times (-3) = -12$$

$$3 \times (-3) = -9$$

$$2 \times (-3) = -6$$

$$1 \times (-3) = -3$$

$$0 \times (-3) = 0$$

$$(-1) \times (-3) = +3$$

$$(-2) \times (-3) = +6$$

↓ (+3)

↓ (+3)

↓ (+3)

↓ (+3)

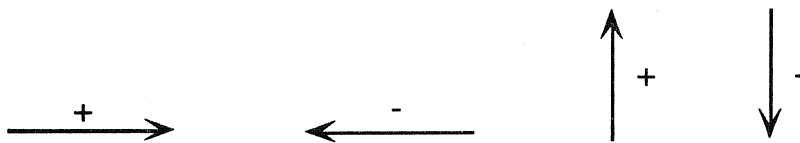
↓ (+3)

↓ (+3)

Puis on étend aux nombres décimaux.

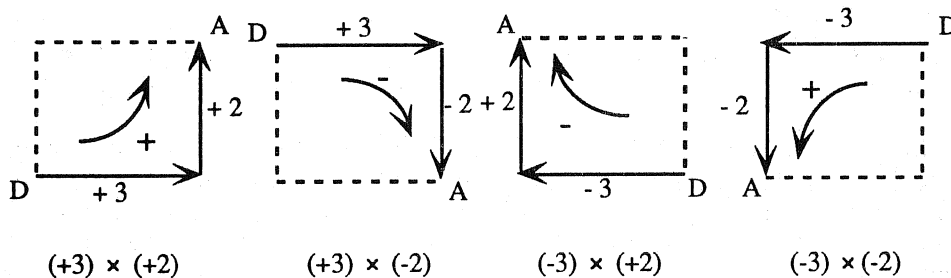
b - Une autre explication est proposée par une équipe de Lille, en 1988, avec les aires orientées.

Une unité étant choisie un nombre relatif est représenté par un segment orienté, matérialisant un déplacement, soit horizontal, soit vertical :



La somme de deux relatifs se représente à l'aide de deux déplacements successifs.

Pour le produit, il procède ainsi :

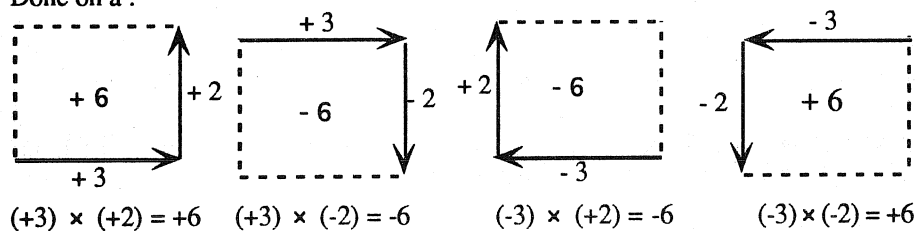


On n'obtient alors que deux sens de parcours possibles.

On attribue le signe + à celui dont on sait qu'il représente un produit positif :

$$(+3) \times (+2) = 3 \times 2 = 6 = +6$$

Donc on a :



c - On pourrait proposer un prolongement de la table de multiplication par une symétrie par rapport à 0 pour le produit de deux nombres relatifs entiers et étendre la règle à tous les nombres (Cedic • Edition 1983, donné en exercice).

				-5	5	5				
		-12	-8	-4	4	4	8			
		-9	-6	-3	3	3	6	9	12	
	-8	-6	-4	-2	2	2	4	6	8	
-5	-4	-3	-2	-1	1	1	2	3	4	5
-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
5	4	3	2	1	-1	-1	-2	-3	-4	-5
	8	6	4	2	-2	-2	-4	-6	-8	
		9	6	3	-3	-3	-6	-9	-12	
		12	8	4	-4	-4	-8			
				5	-5	-5				

d - On trouve aussi des explications à partir de la notion d'opposé, $-x$ et x sont opposés, et de la propriété : " $-x$ est aussi $(-1) \times x$ ".

$$\begin{aligned}
 (-2) \times (-3) &= [(-1) \times 2] \times (-3) \\
 &= (-1) \times (2 \times (-3)) \\
 &= (-1) \times (-6) \\
 &= \text{opp}(-6) \\
 &= 6
 \end{aligned}$$

d'où : $(-2) \times (-3) = 6$

Ou encore, avec la même propriété (Hachette 4^e • Edition 1988) et la somme de deux nombres opposés :

"propriétés gardées"

Les propriétés de la multiplication sont rappelées ci-dessous. C'est parce qu'elles sont essentielles dans le calcul, que l'on impose à la multiplication de décimaux quelconques d'avoir ces mêmes propriétés.

Considérons alors un décimal positif b .

1° Quelles propriétés vont permettre d'expliquer les égalités :

$$3,1 \times [(-b) + b] = 0$$

puis :

$$3,1 \times [(-b) + b] = 3,1 \times (-b) + 3,1 \times b$$

Que dire alors des produits $3,1 \times (-b)$ et $3,1 \times b$?

2° Mêmes questions avec les égalités :

$$[3,1 + (-3,1)] \times b = 0$$

puis :

$$[3,1 + (-3,1)] \times (-b) = 3,1 \times (-b) + (-3,1) \times (-b).$$

Que peut-on en conclure pour $(-3,1) \times (-b)$?

a, b, c décimaux positifs quelconques	
$a \times b = b \times a$	commutativité
$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$	associativité
$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$	distributivité
$a \times (b - c) = a \times b - a \times c$	avec $b \geq c$
$a \times 1 = 1 \times a = a$	1 : élément neutre
$0 \times a = a \times 0 = 0$	

N'y a-t-il pas un risque de voir dans l'écriture $-b$ toujours un nombre négatif ? On retrouve là une approche voisine de celle proposée par Hankel pour la soustraction en 1867.

e - Une autre approche de la règle des signes est possible par la résolution d'équations (proposition de l'IREM de Poitiers 4^e) ; par exemple :

" a) Quel est le nombre qui multiplié par (-2) donne 6

b) Existe-t-il un nombre x tel que $(-2,5) \times x + 7 = 12$?

c) Peux-tu trouver un nombre x pour que l'égalité $\frac{x}{-3} + 4 = -9$ soit vraie."

Les élèves font des propositions argumentées pour les valeurs de x, en voici quelques-unes :

Pour a : $x = -3$ ou pour d'autres $x = 3$. Pour les premiers, une explication proposée est :

$$\begin{aligned} x \times (-2) &= 6 \\ x &= 6 : (-2) = -3. \end{aligned}$$

Pour b :

$\begin{aligned} -2,5 \times x + 7 &= 12 \\ -2,5 \times x &= 5 \\ -x &= 5 : 2,5 \\ -x &= 2 \\ x &= -2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} -2,5 \times x + 7 &= 12 \\ -2,5 \times x &= 5 \\ 2,5 \times x &= -5 \\ x &= \frac{-5}{2,5} \\ x &= -2 \end{aligned}$
--	---

Dans le premier calcul, la règle $-2,5 = (-1) \times 2,5$ est sous-entendue dans le second, -5 partagé en 2 donne $-2,5$, on prolonge en écrivant que -5 divisé par $2,5$ donne -2

Pour c :

$\begin{aligned} \frac{x}{-3} + 4 &= -9 \\ \frac{x}{-3} &= -9 - 4 \\ \frac{x}{-3} &= -13 \end{aligned}$ puis arrêt à $x = (-13) \times (-3)$	$\begin{aligned} \frac{x}{-3} + 4 &= -9 \\ \frac{x}{-3} &= -13 \\ -\frac{x}{3} &= -13 \\ -x &= -13 \times 3 \\ -x &= -39 \\ x &= 39 \end{aligned}$
--	--

Ces réponses sont-elles satisfaisantes ? Pourquoi ? C'est l'objet de la synthèse, les différentes démarches sont examinées, discutées, puis les résultats vérifiés à l'aide de la calculatrice et une règle générale est dégagée pour la multiplication de deux nombres négatifs.

Aucun modèle n'est capable d'expliquer de manière satisfaisante la règle des signes, mais certains de ces modèles permettent de faire comprendre le bien fondé de cette règle.

La règle

Sous quelle forme est dégagée la "règle des signes" ?

Voici quelques formulations de la règle des signes ; certaines utilisent des "expressions" françaises, d'autres un mélange de signes mathématiques et de mots , d'autres sont complètement formelles.

Dans l'Arithmétique de Simon STEVIN (1625), on trouve la règle des signes présentée ainsi :

Plus multiplié par plus donne produit plus ; moins multiplié par moins donne produit plus ; plus multiplié par moins ou moins multiplié par plus donne produit moins.

Dans des manuels actuels, on peut rencontrer des tableaux tels que ceux présentés ci-dessous :

+ par + donne +	plus fois plus = plus	+ × + = +
- par - donne +	plus fois moins = moins	- × + = -
+ par - donne -	moins fois plus = moins	+ × - = -
- par + donne -	moins fois moins = plus.	- × - = +

Dans les tableaux précédents, n'y a-t-il pas un danger de faire croire à l'élève que l'on multiplie des signes et que l'on travaille sur des opérations et non sur des nombres ? Pour les élèves, le signe "-" est associé à la soustraction, le signe "+" à l'addition, ces formulations laissent à penser que l'on multiplie une soustraction par une addition ou une soustraction.

Nous pensons que "*la règle moins par moins égal plus*" est à rejeter car elle peut créer des confusions chez les élèves ; il suffit d'admettre que le produit de deux nombres négatifs est un nombre positif.

Quelquefois, la règle des signes est donnée sous la forme d'expressions littérales telles que dans IREM de Lorraine (4^e • Edition 1988)

La règle des signes Tu dois connaître les formules que nous venons de rencontrer : • $a \times (-b) = -(a \times b)$ que l'on écrit aussi : $a \times (-b) = -ab$ • On vérifie de la même façon : $(-a) \times b = (-1) \times a \times b = -(a \times b)$ que l'on écrit aussi : $(-a) \times b = -ab$ • $(-a) \times (-b) = a \times b$ que l'on écrit aussi : $(-a) \times (-b) = ab$	Ces formules sont vraies pour tous les couples de nombres a et b. Utilisons-les pour donner les règles de calcul : • Pour multiplier un nombre positif et un nombre négatif, on multiplie les valeurs absolues et on met le signe -. Exemple : $(-7) \times 8 = -56$ $-a \times b = -ab$ $7 \times (-8) = -56$ $a \times (-b) = -ab$ • Pour multiplier deux nombres négatifs, on multiplie les valeurs absolues et on met le signe +. Exemple : $(-7) \times (-8) = 56$ $(-a) \times (-b) = ab$
---	---

Dans ce dernier texte, les exemples choisis laissent croire que les écritures **a** et **b** désignent des nombres positifs, ce qui n'est pas le cas. Ces écritures créent des obstacles non négligeables pour la connaissance des écritures littérales correspondant à des relatifs. De plus, on peut rappeler que la notion de "valeur absolue" n'est pas abordée au collège !

Ne vaudrait-il pas mieux, alors, donner, comme il est fait dans Nathan (4^e) la règle en parlant de nombres ou encore sous la forme suivante :

*"Le produit – de deux nombres positifs est positif ;
– d'un nombre positif et d'un nombre négatif est négatif ;
– de deux nombres négatifs est positif".*

Ce que l'on peut ensuite regrouper après un certain entraînement en deux parties : cas des nombres de même signe ; cas des nombres de signes différents.

2 . 4 . La division des nombres relatifs

En ce qui concerne la division, il y a peu de nouveautés à mettre en place, cette opération étant définie à partir de la multiplication des nombres relatifs, comme le disait Neveu (1911) :

"Diviser a par b (non nul), c'est chercher le nombre qui multiplié par b reproduise a, ce nombre est le quotient de a par b.

Je dis que l'on peut écrire $(+15) : (-3) = -5$ car $+15 = (-5) \times (-3)$ ".

Ce qui pourrait se traduire littéralement par :

$$a : b = \frac{a}{b} = x \quad (b \text{ non nul})$$

$$a = x \times b$$

Si $a = 1$, le quotient de 1 par b est appelé l'inverse de b.

$$1 = x \times b$$

$$x = \frac{1}{b} \quad \text{ou} \quad x = b^{-1}$$

Remarque : A l'aide de cette définition et des propriétés sur les puissances, on peut retrouver la règle des signes : " - $\times$ - = + " :

L'inverse de $\frac{1}{b}$ est b ou b^1 . L'inverse de $\frac{1}{b}$ c'est aussi $\frac{1}{\frac{1}{b}} = \frac{1}{b^{-1}} = (b^{-1})^{-1}$.

d'où $(b^{-1})^{-1} = b^1$ et par suite $(-1) \times (-1) = 1$.

La définition posée, il s'agit de donner une expression de la valeur exacte de quotients tels que :

$$-4 : 2 ; -6 : (-2,5) ; 3 : (-7) ; -4 : (-9)$$

Pour ce qui est du signe du quotient, il n'y a pas de difficulté majeure puisque l'on s'appuie sur la règle des signes de la multiplication des relatifs.

En effet :

$-4 : 2 = x$	$-6 : (-2,5) = y$	$+3 : (-7) = z$	$-4 : (-9) = t$
$-4 = x \times 2$	$-6 = y \times (-2,5)$	$(+3) = z \times (-7)$	$-4 = t \times (-9)$
①	②	③	④

Le produit est dans les cas ① - ② - ④ négatif. On en déduit que x est un nombre négatif, y est un nombre positif et t est un nombre positif ; dans le cas ③ le produit est positif, d'où z est un nombre négatif.

Les problèmes résident davantage dans la recherche et l'écriture de la valeur exacte des quotients selon les nombres en présence.

Pour les deux premiers exemples, le résultat se trouve facilement soit :

$$-4 : 2 = x$$

$$-4 = 2 \times x$$

x est négatif et le nombre qui, multiplié par 2, donne -4 est -2 d'où : $x = -2$.

De même :

$-6 : (-2,5) = x$ ou $-6 = x \times (-2,5)$ x est positif et de plus $2,4 \times 2,5 = 6$ (ou $6 : 2,5 = 2,4$)
d'où $x = 2,4$.

Le calcul du quotient est alors ramené à la division de deux décimaux positifs.

Pour les deux derniers exemples :

$$\begin{array}{l|l} 3 : (-7) = z & -4 : (-9) = t \\ 3 = z \times (-7) & -4 = t \times (-9) \end{array}$$

Il n'y a pas de décimal satisfaisant ces égalités ; se pose alors l'écriture du résultat :

$$z = \frac{3}{-7} \quad t = \frac{-4}{-9}$$

Le nombre t est, comme nous l'avons vu précédemment, un nombre positif, ce que ne montre pas l'écriture $t = \frac{-4}{-9}$.

Faut-il, comme on le faisait en 1958 (Maillard 4^e), distinguer fractions algébriques (ou rapports algébriques), quotient indiqué et non effectué de deux nombres relatifs, de la valeur de la fraction ?

Exemple :

$\frac{-4}{-9}$; $\frac{3}{-7}$ sont des fractions algébriques
 $\frac{4}{9}$ et $-\frac{3}{7}$ sont les valeurs des fractions précédentes.

Quand se trouve-t-on confronté à ces difficultés avec les élèves ? Souvent, lors de la résolution d'équations.

Examinons quelques démarches d'élèves :

1°) Résolution de $-3x = 7$

$-3x$ peut être perçu comme $-(3x)$; $(-3) \times x$; $3(-x)$ ou encore, mais plus rare, $(-1) \times 3 \times x$.

Il s'ensuit des calculs quelque peu différents :

$$\begin{array}{l|l|l|l} \begin{array}{l} -(3x) = 7 \\ 3x = -7 \\ x = \frac{-7}{3} \end{array} & \begin{array}{l} -3x = 7 \\ (-3) \times x = 7 \\ x = \frac{7}{-3} \end{array} & \begin{array}{l} 3 \times (-x) = 7 \\ -x = \frac{7}{3} \\ x = -\frac{7}{3} \end{array} & \begin{array}{l} (-1) \times 3 \times x = 7 \\ (-1) \times x = \frac{7}{3} \\ (-1) \times x = \text{opp de } x \\ -x = \frac{7}{3} \\ x = -\frac{7}{3} \end{array} \end{array}$$

$\frac{7}{-3}$; $\frac{-7}{3}$; $-\frac{7}{3}$ sont des écritures d'un même nombre : la solution de l'équation $-3x = 7$.

Il est nécessaire de faire le point avec les élèves, de les amener à expliciter leurs différentes perceptions des nombres et des démarches utilisées et ne pas laisser le doute s'installer.

2°) Résolution de l'équation :

$$7 - x = 5x + 3$$

On peut penser que tous les élèves vont procéder de la même manière, en mettant les "x" du côté où ils sont les plus nombreux, il n'en est rien et on est amené alors à préciser le signe du résultat.

$$7 - x = 5x + 2$$

$$7 = 6x + 2$$

$$5 = 6x$$

$$\frac{5}{6} = x$$

$$7 - x = 5x + 2$$

$$7 - 6x = 2$$

$$- 6x = -5$$

ce qui donne

$$\text{soit } x = \frac{-5}{-6}$$

soit par passage aux opposés

$$6x = 5$$

$$x = \frac{5}{6}$$

Ensuite, il faut établir que $\frac{5}{6}$ et $\frac{-5}{-6}$ sont des écritures du même nombre : la solution de l'équation $7 - x = 5x + 2$.

Si dans des résolutions d'équations des élèves obtiennent, par diverses démarches, différentes écritures de la solution, il est alors intéressant de comparer ces différentes écritures et de prouver que ce sont celles d'un même nombre : le calcul numérique est alors finalisé.

3 . Les transformations d'écritures

3 . 1 . Les sommes algébriques

Les programmes

Dans les compléments aux programmes de 5^e, partie 2.2 : travaux numériques – Nombres relatifs en écriture décimale, on peut lire dans la colonne "compétences exigibles" :

"Calculer, sur des exemples numériques, une expression , où interviennent uniquement des signes + ; - et , éventuellement , des parenthèses".

Cette phrase demande à être décodée : quel est le statut des " + " et " - " ? Parle-t-on du signe des nombres ou des signes de l'addition et de la soustraction ?

Les parenthèses citées sont-elles celles que l'on utilise quand on écrit (-7) ou celles qui encadrent un calcul et indiquent une priorité d'opérations ?

Un regard sur la colonne de gauche qui précise "le sens et les limites des contenus du programme" peut nous donner un premier éclairage : *"on entraînera les élèves à organiser et à gérer un programme de calcul mettant en jeu des additions et des soustractions".*

Vraisemblablement, les signes "+" et "-" font référence à l'addition et à la soustraction de nombres relatifs et les parenthèses indiquent une priorité opératoire.

On rencontre dans les manuels, pour cette partie de programme, des expressions telles que :

(1) $-2 + 3,7 + 10,3 - 15$

(2) $(-5,3) + (-7) + (+10,3)$

(3) $8,2 - (-4) + (-2,13)$

(4) $-20 + 103 - (3,05 - 7)$, la seule pouvant être qualifiée d'expression avec parenthèses.

Certaines sont-elles préférées à d'autres ? Certaines sont-elles des formes "simplifiées" ? Quel est le statut des différents signes dans l'expression (1) : signes des nombres relatifs ou signes opératoires ?

Les manuels

Regardons ce qu'en disent les manuels actuellement en usage dans les classes de 5^e.

Une somme algébrique (ou une expression) y est définie comme une suite d'additions et de soustractions de relatifs ; les exemples cités revêtent des formes analogues à celles que nous avons évoquées précédemment.

Mais les avis divergent sur le *traitement* de ces expressions.

• Certains érigent la "simplification" comme un passage obligé, ils énoncent donc des règles de simplification que nous allons examiner.

Exemple 1 :

$(-1) - (-5) + (-3,2) - 4$ est simplifié en $-1 + 5 - 3,2 - 4$ en utilisant deux règles de simplification :

Règle 1 :

Quand une somme ou une différence commence par un nombre négatif, il y a suppression des parenthèses du nombre négatif.

Cette règle, admise par tous, est également utilisée dans toute somme et toute différence de deux nombres relatifs, nous y reviendrons dans le prochain paragraphe.

La transformation de (-1) en -1 est ainsi expliquée : le "-" précédant le 1 est un prédicat puisqu'il provient de (-1)

Règle 2 (de la soustraction) :

Les exemples cités sont $-1 - (-5) = -1 + 5$

$$4 + (-3,2) = 4 - 3,2$$

Ici, il convient de s'interroger sur la pertinence des calculs évoqués ci-dessous.

Pourquoi $-1 - (-5)$ est-il écrit $-1 + 5$ sinon pour effectuer une soustraction qui ne peut l'être mentalement directement, pour un élève de 5^e, ou même de 4^e ? Il est en effet enseigné que pour soustraire un nombre, on ajoute son opposé. Cette règle n'est donc pas une règle de *simplification* d'écriture mais une règle *pour effectuer* un calcul. De même pour effectuer $-3,2 - 4$, les élèves apprennent à transformer cette soustraction en addition : $-3,2 + (-4)$ qu'ils savent effectuer.

Pour ce qui est du deuxième calcul cité comme simplification $4 + (-3,2) = 4 - 3,2$, quelle est son utilité ? Ne risque-t-il pas de semer le trouble dans la tête des élèves ?

Un adulte qui maîtrise les opérations sur les relatifs reconnaît très vite que cette addition de relatifs correspond à une soustraction de nombres positifs que les élèves savent faire depuis l'école élémentaire.

Cette analyse n'est pas présentée ainsi par les auteurs de manuels puisqu'ils utilisent cette même règle pour "simplifier" $7,1 + (-15)$ en $7,1 - 15$! Comment un élève pourra-t-il s'y retrouver si on lui fait transformer tantôt des soustractions en additions, tantôt des additions en soustractions !

Cette somme algébrique étant "simplifiée", c'est-à-dire sans parenthèses, quelles méthodes préconise-t-on pour l'effectuer ?

– Soit un calcul dans l'ordre d'écriture

$$\begin{aligned} -1 + 5 - 3,2 - 4 &= 4 - 3,2 - 4 \\ &= 0,8 - 4 \\ &= -3,2 \end{aligned}$$

Pour ce dernier calcul, l'élève doit donc revenir mentalement à l'addition :

$$0,8 - 4 = 0,8 + (-4).$$

– Soit un changement d'ordre des termes

$$\begin{aligned} -1 + 5 - 3,2 - 4 &= 4 - 3,2 - 4 \\ &= 4 - 4 - 3,2 \\ &= -3,2 \end{aligned}$$

Chacun de nous met en avant auprès des élèves, l'importance de l'ordre des termes dans une soustraction, alors comment peut-on expliquer ce changement d'ordre sans revenir aux additions ?

Pour conclure sur cet exemple, nous voyons donc que cette transformation d'écriture qui vise à supprimer des parenthèses n'a aucune pertinence :

- Pourquoi transformer des additions en soustractions alors que pour le calcul, il faudra mentalement revenir aux additions ? Où est la simplicité ?
- Pourquoi laisser croire aux élèves que des changements d'ordre des termes d'une soustraction sont possibles dans certains cas ? N'est-ce pas créer des problèmes là où il n'y en a pas ?
- Quel est le sens des exercices qui demandent de simplifier des écritures ?

Exemple 2 :

Dans d'autres manuels de 5^e, on peut lire que pour calculer la somme algébrique suivante $(+3) + (-4) + (+9) + (-1,6) + (-12,3)$ on supprime les parenthèses et le signe + de l'addition. Cette somme devient alors $3 - 4 + 9 - 1,6 - 12,3$.

Les différents signes opératoires étant enlevés, les signes "+" et "-" qui figurent sont donc des signes "prédicatifs". Nous voilà donc avec une suite d'opérations sans signes opératoires ! Alors comment effectuer ? Certainement en faisant comme si ces signes

"prédicats" étaient des signes opératoires car on peut lire : "Pour calculer $3 - 4$ penser à $(+3)$ + (-4) ". Que de confusions !

- On fait enlever des signes opératoires et on ne se retrouve qu'avec des signes "prédicatifs".
- On fait comme si ces signes prédicatifs étaient des signes opératoires.
- Pour effectuer la soustraction, on fait revenir à l'addition, donc à l'écriture de départ !

Si les détenteurs de cette méthode possédaient une calculatrice, ils pourraient l'éprouver en tapant $3 - 4$, le $-$ devant le 4 étant pris comme signe "prédicatoire" : on obtient $- 34$. De même $-5 - 2$ donnera 52 si l'on considère les deux signes $-$ comme étant les signes des nombres.

Ces deux exemples nous font réfléchir sur la pertinence de ces transformations. Si l'on relit les compléments du programme de 5^e, l'objectif est bien qu'un élève apprenne à gérer un programme de calcul, une suite d'opérations donc à effectuer. Pour cela il n'a besoin que d'une règle qui est une règle de calcul : la transformation de soustractions en additions. Ensuite l'élève se retrouve devant une somme qui possède les propriétés de commutativité et d'associativité, propriétés que les élèves font fonctionner spontanément même s'ils n'en connaissent pas le nom.

"Simplifier : Rendre plus simple, moins complexe, moins difficile ou moins chargé d'éléments accessoires." ROBERT (6 Volumes).

Dans un calcul, il est moins difficile d'effectuer une addition de relatifs qu'une soustraction. Les "éléments accessoires" ne sont pas les parenthèses autour des nombres relatifs car elles précisent les nombres, ce sont des conventions d'écriture, elles donnent sens au calcul, mais ce sont les règles de transformations qui sont souvent dépourvues de pertinence et qui encombrant inutilement la mémoire des élèves.

3 . 2 . Les conventions

a - Les écritures des nombres.

On peut se demander quelle écriture des relatifs il faut privilégier, au moins en début d'apprentissage : doit-on tout au long de la 6^e écrire $(+3)$ pour 3 et (-7) pour -7.

Deux écueils sont à éviter si l'on ne veut pas créer d'obstacles à l'apprentissage :

- Si l'on garde très longtemps et exclusivement $(+3)$ pour le nombre 3, les élèves peuvent penser que les nombres relatifs sont indépendants des nombres déjà connus, les décimaux positifs.
- Si l'on écrit systématiquement 3 au lieu de $+3$, les élèves peuvent penser les nombres relatifs signifient nombres négatifs et qu'on les juxtapose aux nombres connus.

Le problème posé est celui de la construction du concept de nombre. Pour beaucoup d'élèves de collège, nombre signifie entier positif. Pour aider à cette construction, il faut donc faire sentir que nous agrandissons la "famille" des nombres et que les décimaux connus en sont une partie. Ainsi, au lieu d'écrire $(+3) = 3$, il vaudrait mieux dire que $(+3)$ et 3 sont deux écritures du même nombre. Nous ne pouvons pas passer à côté des deux écritures des relatifs positifs et leur assimilation aux nombres connus sera facilitée si l'on utilise conjointement ces deux écritures.

Pour les nombres négatifs, les parenthèses se justifient lorsqu'il peut y avoir ambiguïté sur le statut du signe moins. L'écriture sans parenthèse sera privilégiée pour la désignation du nombre et son écriture (-7) sera utilisée dans un calcul.

Par exemple, pour le repérage, nous écrirons $(5 ; -8)$ et dans les opérations, nous mettrons des parenthèses ; ainsi :

$$3 + (-7) = -4$$

Somme de 3 et de -7

$$3 + (-7) = (-4)$$

Signe opératoire

Signes prédictifs

$$-8 - 5 = -13$$

ou éventuellement $(-8) - 5 = -13$

Différence de -8 et de 5

$$-8 - 5 = -13$$

Signe prédictif

Signe prédictif

Signe opératoire

b - La multiplication : La suppression du signe $\times$

• Le signe $\times$ n'est pas écrit dans un produit dont les facteurs sont deux lettres ou un nombre et une lettre. Ainsi $(-4)t$ est décodé comme $(-4) \times t$. Mais il arrive de rencontrer l'absence de ce signe $\times$ dans le cas d'un produit de deux relatifs négatifs : $(-3)(-5)$ ne peut être décodé et n'a pas de sens.

La valeur numérique de ab quand $a = 2$ et $b = 3$ n'est pas écrite 23, alors pourquoi accepter $(-3)(-5)$?

• Ce signe $\times$ est également omis devant un quotient : on peut voir écrit $3 \frac{-4}{3}$. Là encore ne laissons s'installer aucune ambiguïté. Que les nombres soient entiers, fractionnaires, ... utilisons la même règle tout le temps, cela contribuera peut-être à la construction du concept de nombre et écrivons : $3 \times \frac{-4}{3}$.

c - La division

Le signe d'un quotient est vite maîtrisé dans le cas d'un calcul. Par exemple, si l'on pose $(-36) : (-4)$, l'élève reconnaîtra un quotient et appliquera la règle adéquate sur le signe du quotient.

Cette reconnaissance est déjà moins immédiate si le calcul est présenté sous la forme $\frac{-36}{-4}$.

Les problèmes deviennent plus aigus quand l'élève rencontre des formes telles que $\frac{-2}{-3}$; $\frac{-2}{3}$; $\frac{2}{-3}$; $-\frac{2}{3}$. Ces écritures ne sont pas reconnues comme des quotients et la place des signes devient empirique.

Ainsi $\frac{-2}{-3}$ n'est pas assimilé à un quotient des deux nombres négatifs puisque ce quotient n'a pas d'écriture décimale et bien des élèves ne l'écriront pas $\frac{2}{3}$. Ceci sera un handicap s'ils ont à l'ajouter à un autre nombre.

De même, les élèves hésiteront à cerner que $\frac{2}{-3}$ est égal à $-\frac{2}{3}$ et encore plus à $\frac{-2}{3}$. Ayant à traiter dans un exercice l'écriture $-\frac{2}{3}$, ils auront tendance à l'écrire $\frac{-2}{3}$, en distribuant le signe "-" à chacun des nombres.

Ces transformations d'écriture utilisent des règles connues des élèves mais qui ne sont pas identifiées comme telles. Peut-être serait-il utile de passer plus de temps à la reconnaissance et à l'identification des calculs à traiter ? La transformation de $\frac{-2}{-3}$ en $\frac{2}{3}$ ne serait pas perçue

comme une nouvelle règle de simplification mais comme une façon de traiter les calculs en manipulant des nombres positifs plus familiers.

d - Les puissances

Une autre non reconnaissance de forme intervient également quand l'élève confond $(-3)^2$ et -3^2 . Il conviendrait peut-être de lui faire formuler que $(-3)^2$ est l'écriture d'un carré tandis que -3^2 est celle d'un opposé que l'on pourrait écrire de façon plus explicite comme $-(3^2)$. Cette confusion intervient également lors du calcul de la valeur numérique d'une expression littérale telle que $-x^2$, $(-x)^2$ ou x^2 pour $x = -7$ ou pour $x = 9$. Peut-on économiser la formulation en français de l'expression à calculer et l'usage des parenthèses ?

3 . 3 . L'opposé

La notation $-b$ pour l'opposé de b est source de nombreuses confusions. Le signe "-" déjà utilisé comme signe opératoire de la soustraction et comme signe prédicatif pour un relatif négatif est ici utilisé avec un troisième sens.

A quel niveau cette notation est-elle indispensable ? Dans quels cas ? Où se situent les problèmes ?

- En 6^e, le mot "opposé" n'a aucune utilité car aucune opération n'est à étudier. On peut tout de même l'introduire lorsque l'on travaille sur la droite graduée, deux nombres opposés étant deux nombres qui ont :

- des signes différents ;
- la même distance à 0.

On peut également découvrir que deux nombres opposés ont une somme nulle.

A ce niveau, il faut seulement veiller à ne pas créer d'obstacle pour l'avenir. Ainsi dire seulement " -3 est l'opposé de 3 " peut faire croire qu'un opposé est forcément négatif et que le nombre relatif -3 qu'on vient juste d'introduire n'a pas d'existence propre. Il semble préférable de dire que " 3 et -3 sont des nombres opposés" :

3 est l'opposé de -3

-3 est l'opposé de 3 .

(On peut faire le parallèle avec deux points symétriques, dire que deux points A et B sont symétriques signifie que A est symétrique de B et que B est symétrique de A).

- En 5^e, le mot "opposé" est indispensable lors de l'introduction de la soustraction. Celle-ci étant introduite comme addition de l'opposé, il ne devrait y avoir aucun problème de notation, car le travail ne doit porter que sur des expressions numériques.

Toutefois, une difficulté importante intervient quand on veut formaliser cette règle de soustraction avec des lettres. C'est le cas dans les résumés de quelques manuels étudiés où l'on peut voir "*Pour soustraire un nombre, on ajoute son opposé : $a - b = a + (-b)$* ".

Or, en 5^e, les élèves n'ont eu qu'une courte fréquentation des lettres. Ils les rencontrent comme inconnue dans une équation de type $a + x = b$ (a et b relatifs) et $ax = b$ (a et b décimaux positifs), la lettre x représentant un seul nombre à trouver ; dans une formule d'aire ou de volume, la lettre représentant alors souvent un diminutif du mot comme par exemple : B pour base, h pour hauteur.

Ici, dans la règle de la soustraction, la lettre doit-être conçue comme indéterminée, ce qui est encore différent.

Il y a donc un risque à formaliser trop tôt la règle de la soustraction comme celle présentée précédemment, l'élève aura tendance à voir $(-b)$ comme un nombre forcément négatif. De plus, un résumé est un aide-mémoire, il doit aider l'élève à retrouver une règle oubliée.

Il semble donc préférable d'écrire la phrase en français, de citer des exemples numériques dans différents cas et si l'on veut formaliser, il vaut mieux garder l'écriture de "opposé" en toutes lettres et d'écrire $a - b = a + \text{opposé de } b$.

En 4^e et 3^e, l'introduction et l'utilisation du calcul algébrique rendent obligatoire la notation $-b$ pour l'opposé de b .

Le danger de la phrase " $-b$ désigne l'opposé du nombre b " est que les élèves assimilent automatiquement $-b$ à un nombre négatif. Il est tentant de faire le rapprochement entre le signe " $-$ " désignant "opposé de" et le signe " $-$ " prédictif de -27 . Pourtant cette notation est indispensable pour :

- les simplifications d'expressions algébriques
- les résolutions d'équations
- les reconnaissances et identifications de formes telles que $y = ax$ en 4^e et $y = ax + b$ en 3^e...

Analysons les difficultés :

Avec les nombres, -7 désigne à la fois le relatif -7 qui est négatif et le nombre qui est l'opposé de 7

Avec les lettres, b doit être vu comme le codage d'un nombre et $-b$ comme le codage de l'opposé du nombre codé b . Le problème est que les lettres ne sont pas des nombres mais des représentants de nombres. Pourtant ces lettres apparaissent dans des expressions et sont traitées dans certains cas comme si l'on effectuait des calculs numériques.

Ainsi lorsqu'on écrit $\frac{b}{b} = 1$, ou $a - a = 0$ ou $\frac{k \times a}{k \times b} = \frac{a}{b}$, on utilise la même procédure que

pour des nombres et de plus, pour les deux premiers cas cités, on obtient des nombres connus. En revanche, si l'on rencontre $a + a$, on ne peut que donner un autre représentant de ce nombre, ce que l'on fait rarement avec les nombres ; quand remplace-t-on $7,3 + 7,3$ par $2 \times 7,3$?

L'élève doit alors comprendre que cette écriture d'un autre représentant ne sert pas à faire un "calcul" à proprement parler mais à obtenir une écriture plus courte par certaines simplifications. Ainsi $a - b - 2,5a + 3b$ n'est pas un calcul à faire mais une expression, une représentation d'un nombre que l'on cherche à écrire avec moins de termes dans le but d'effectuer ensuite une application numérique, d'étudier une fonction, de résoudre une équation ou de reconnaître une forme : équation de droite, fonction linéaire ou affine, forme développée d'un carré...

Ce but est malheureusement absent dans de nombreux exercices où l'on demande seulement de simplifier.

Ce problème de l'assimilation de $-b$ à un nombre négatif peut-être sinon évité, du moins atténué par un passage moins rapide aux expressions littérales. L'élève doit comprendre d'une part que b et $-b$ sont des codages de nombres et non des nombres et d'autre part que ce sont les propriétés des opérations qui sont étendues au calcul littéral et non les caractéristiques de notre numération décimale (ab ne désigne pas $a \times 10 + b$ comme 27 désigne $2 \times 10 + 7$).

Certes, les propriétés des opérations ne figurent plus dans les programmes comme objets d'étude mais on les fait fonctionner, souvent sans les expliciter, pour tout calcul numérique et pour toute simplification d'expression littérale.

En phase d'apprentissage, comme c'est le cas surtout en 4^e, pouvons-nous faire l'économie du détail de toutes les étapes sans installer des automatismes vides de sens qui entraîneront des erreurs ?

Ainsi pour simplifier l'expression $a - b - 2,5a + 3b$ et la mener à bien, examinons ce que l'on peut se dire :

- on peut remplacer les soustractions par des additions d'opposés $a + \text{opp } b + \text{opp } 2,5a + 3b$ ou $a + (-b) + (-2,5a) + 3b$.
- on peut changer l'ordre des termes dans une addition $a + (-2,5a) + (-b) + 3b$
- on peut grouper les termes d'une addition $[a + (-2,5a)] + [(-b) + 3b]$

- on peut considérer que

ou

$(-2,5a)$ c'est $(-a) + (-1,5a)$
qui permet de simplifier
 $a + (-a) + (-1,5a)$ en $-1,5a$;
la somme de deux opposés étant 0 et quand
on ajoute 0 à un nombre, on ne change pas
ce nombre.
De même pour $(-b) + 3b$

on peut utiliser la factorisation
c'est à dire interpréter a comme $1 \times a$,
 $(-2,5a)$ comme $(-2,5) \times a$
 $a + (-2,5a)$ s'écrit alors $[1 + (-2,5)] a$
ou $-1,5a$.
De même pour $(-b) + 3b$.

Toutes ces étapes ne peuvent être écrites pour chaque simplification d'expression algébrique, pourtant il convient certainement de les expliciter à des moments opportuns pour éviter les erreurs.

Pour la résolution d'une simple équation telle que $27 - 3x = 50$, les étapes, dans un premier temps sont :

$$\begin{aligned} 27 - 3x &= 50 \\ 27 + (-27) + (-3x) &= 50 + (-27) \\ 0 + (-3x) &= 23 \\ -3x &= 23 \end{aligned}$$

Puis :

ou

passer aux opposés
opp $(-3x) = \text{opp } 23$
 $3x = -23$
 $x = \frac{-23}{3}$
ou $x = -\frac{23}{3}$

considérer que $-3x = (-3) \times x$
 $(-3) \times x = 23$
 $x = \frac{23}{-3}$
ou $x = -\frac{23}{3}$

Opposé d'une somme, d'une différence

La règle de suppression des parenthèses dans une suite d'additions et de soustractions n'a de sens que dans un calcul où figurent des lettres. En 4^e, on a besoin de l'utiliser au cours de la résolution d'équations, c'est donc à ce niveau et dans ce contexte qu'elle prend son sens.

En feuilletant les manuels, on s'aperçoit qu'elle est souvent introduite prématurément en 5^e pour supprimer des parenthèses dans un programme de calcul numérique ; on peut se demander si cette suppression est pertinente.

Elle apparaît également dans des exercices systématiques où figurent des lettres et des nombres. Rappelons, à ce propos, quelques termes des compléments des programmes de la partie Travaux numériques *"La résolution de problèmes concrets constitue l'objectif fondamental de cette partie du programme .../... Il convient donc de ne pas multiplier les activités de technique pure"*.

Opposé d'un produit, d'un quotient

Comment interpréter $-3x$? Le voit-on comme l'opposé du produit de 3 et de x : $-(3 \times x)$? Dans l'affirmative, qu'a-t-on comme règle pour le calcul de l'opposé d'un produit ? On enseigne que l'opposé d'une somme (d'une différence) est la somme (la différence) des opposés, mais on ne dit rien de l'opposé d'un produit. Les élèves peuvent alors étendre au produit la règle connue pour la somme et faire l'erreur suivante $-(3 \times x) = (-3) \times (-x)$.

Prendre l'opposé, c'est aussi multiplier par -1 :

La règle $\text{opp } x = -1 \times x$ s'écrit alors $-x = -1 \times x$. La difficulté réside dans le choix de la bonne écriture suivant le type de calcul à faire.

Comme on vient de le voir, pour l'élève l'ambiguïté règne souvent sur le sens et l'interprétation du signe "-". Tous ces changements d'écriture que nous manions avec dextérité sont pour l'élève un chemin semé d'embûches et de pièges. Peut-être voulons-nous aller trop vite avec les élèves en imposant ou en valorisant prématurément certaines transformations ?

3 . 4 . Conclusion

Pour tous ces problèmes de transformations d'écritures, les difficultés ne proviennent généralement pas de la méconnaissance des règles mais de la non reconnaissance de certaines formes et des différents statuts du signe "-": signe du nombre relatif, signe de l'opération soustraction, signe de l'opposé dans le cas de calcul littéral.

Pour les deux premiers, il semble que l'élève, en fin de cinquième, peut maîtriser la différence de nature entre ces deux signes à condition de :

- faire expliciter la nature des signes dans des situations de calculs numériques ; par exemple en faisant formuler que $-4 + 7$ est la somme de -4 et de 7 et que $-4 - 3$ est la différence de -4 et de 3 ;

- ne pas vouloir à tout prix faire "simplifier" des sommes algébriques, c'est-à-dire supprimer des signes, faire changer des signes de statut dans le seul but de raccourcir l'expression à calculer ; n'oublions pas que le but est de calculer ces sommes algébriques et que pour cela l'élève ne connaît que la règle : "*pour soustraire un nombre, on ajoute son opposé*" et les propriétés de l'addition ;

- ne pas introduire en sixième ou en cinquième l'écriture $-b$ pour coder l'opposé du nombre b .

En quatrième seulement, ce nouveau statut du signe "-" est à introduire dans des situations de calcul littéral. Mais gardons-nous bien de vouloir "gagner" du temps en omettant l'écriture de certaines étapes. Tout apprentissage s'inscrit dans la durée. Il est certainement préférable de faire moins d'exercices mais de faire expliciter, au moins oralement, toutes les étapes, de faire formuler les règles de calcul et les propriétés des opérations utilisées. Ainsi l'élève pourra mieux maîtriser ses calculs et prendre l'habitude de les "méditer" avant de les effectuer. Il gagnera en efficacité et, de lui-même, omettra certaines étapes en étant conscient qu'il ne les écrit pas mais en les faisant rapidement et mentalement. N'oublions pas non plus que tout calcul ou toute transformation d'écriture s'effectue dans un but précis, alors donnons moins de calculs répétitifs et choisissons des calculs à analyser dans lesquels les transformations s'imposent d'elles-mêmes.

PARTIE 3 : Les contextes d'utilisation

1 – Les équations

2 – Le repérage

3 – Les jeux

1 . Problèmes et équations

Les nombres relatifs sont apparus comme outil facilitant la résolution des équations dans lesquelles on continua longtemps à ne retenir que les solutions positives. C'est un outil théorique et algébrique.

Cependant, les racines négatives d'une équation ont eu du mal à être considérées comme nombres. Descartes parle même de "racines fausses".

En fait, ces solutions négatives vont poser des problèmes aux mathématiciens car il faut les interpréter. Par exemple Lacroix dans ses *Eléments d'Algèbre* de 1768 dit "*toute solution négative marque que la quantité cherchée doit être prise dans un sens opposé à celui dans lequel elle l'a été d'abord*". Mais dans la septième édition de son livre, en 1808, il qualifie les solutions négatives d'absurdes. Voici ce qu'il dit à propos de $60 + 7y = 46$: "*la seule inspection de cette équation y fait reconnaître une absurdité. En effet, il n'est pas possible de former le nombre 46 en ajoutant quelque chose au nombre 60, qui seul surpasse déjà 46*".

Les relatifs ont pour fonction de résoudre des "problèmes théoriques" de type algébrique et non des "problèmes concrets", mais sans doute est-il bon en cinquième et en quatrième de montrer que l'on peut aussi les utiliser pour résoudre ce type de problèmes. Il est nécessaire que peu à peu, les élèves intègrent l'idée que ces "nouveaux nombres" enrichissent la palette d'outils dont ils disposent.

Les exercices qui suivent peuvent être classés en trois catégories :

- Problèmes qui peuvent être résolus sans utiliser de nombres relatifs.
- Problèmes dont l'énoncé contient des nombres relatifs.
- Problèmes dont l'énoncé ne contient pas explicitement de nombres relatifs mais dont les solutions en contiennent.

1 . 1 . Problèmes qui peuvent être résolus sans utiliser des relatifs.

Problème 1 : *Karen veut acheter des cassettes qui coûtent toutes le même prix. Si elle achète un paquet de trois, il lui reste 27 F, mais il lui manque 8 F pour un paquet de cinq. Combien coûte une cassette ?*

Problème 2 : *Voici la règle d'un jeu : quand je gagne, je reçois 10 F et quand je perds, je donne 4 F. J'ai joué 25 fois et j'ai perdu 2 F. Combien de fois ai-je gagné ?*

Commentaires

Problème 1, en quatrième :

a) Dans le cas où les élèves ont déjà été familiarisés avec la notion d'équation, l'ordre des données incite à écrire $3x + 27 = 5x - 8$ ou encore $3x + 27 = 5x + (-8)$ suivant le sens que l'on donne à "il manque 8 F". Il est d'ailleurs intéressant de mettre ces deux écritures en parallèle puisque on y retrouve la définition de la soustraction.

Les résolutions seront différentes suivant l'équation de départ, mais elles s'appuient uniquement sur deux règles (ou trois suivant la formulation) :

- on obtient une nouvelle égalité en ajoutant (ou retranchant) un même nombre aux deux membres ;
- on obtient une nouvelle égalité en multipliant (ou divisant) les deux membres par un même nombre ;
- on obtient une nouvelle égalité en écrivant l'opposé des deux membres (ce qui revient à une multiplication par -1 donc à la règle précédente).

L'application de ces règles permet de manipuler toutes les opérations avec les relatifs ainsi que les propriétés correspondant à ces opérations (somme des opposés, commutativité, associativité, factorisation, rôle de 0, rôle de 1).

• En partant de $3x + 27 = 5x - 8$, on considère $5x - 8$ comme une soustraction. Dans ce cas, la résolution peut se faire en raisonnant uniquement sur le sens de la soustraction dans les naturels. Pour "annuler" la soustraction, on ajoute 8 : $3x + 27 + 8 = 5x - 8 + 8$, puis $3x + 35 = 5x$ qui donne $35 + 3x = 5x$. On retranche ensuite $3x$ pour "annuler" l'addition : $35 + 3x - 3x = 5x - 3x$ puis $35 = 2x$. L'obtention de $2x$ est liée bien entendu à une factorisation, il est important que les élèves en soient conscients pour ne pas être en difficulté dans des cas plus complexes ($\frac{1}{3}x - \frac{3}{2}x$ par exemple) mais dans les cas simples comme celui-ci, il n'est peut-être pas nécessaire d'en exiger l'écriture systématique. En revanche $2x$ doit bien être interprété comme produit de 2 par x pour que l'étape suivante : diviser par 2, ne se transforme pas en soustraction ou autres solutions erronées.

• En partant de $3x + 27 = 5x + (-8)$, on peut envisager deux méthodes de résolution, toutes deux de type additif, en utilisant les propriétés des opposés.

ou

On ajoute l'opposé de -8 :

$$\begin{aligned} 3x + [27 + 8] &= 5x + [(-8) + 8] \\ 3x + 35 &= 5x + 0 \\ 3x + 35 &= 5x \end{aligned}$$

On ajoute l'opposé de 27 :

$$\begin{aligned} 3x + [27 + (-27)] &= 5x + [(-8) + (-27)] \\ 3x + 0 &= 5x + (-35) \\ 3x &= 5x + (-35) \end{aligned}$$

On ajoute l'opposé de $3x$ (ou de $5x$), ce qui suppose qu'un travail préalable ait été mené sur ce qu'est l'opposé d'un produit.

ou

$$\begin{aligned} [(-3x) + 3x] + 35 &= 5x + (-3x) \\ 0 + 35 &= 2x \end{aligned}$$

etc ...

$$\begin{aligned} 3x + (-5x) &= [(-5x) + 5x] + (-35) \\ -2x &= 0 + (-35) \\ \text{soit } -2x &= -35 \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \text{passage à l'opposé} \\ 2x &= 35 \\ x &= \frac{35}{2} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \text{division par } -2 \\ x &= \frac{-35}{-2} \\ x &= \frac{35}{2} \end{aligned}$$

Si la division est certainement l'opération privilégiée par les élèves dans un premier temps pour terminer la résolution, il est souhaitable que, pour que la notion d'inverse s'installe, on ait recours progressivement (peut-être par une double écriture) à la forme multiplicative.

On multiplie par l'inverse de 2 ou de -2 :

$$2x = 35 \text{ devient } \left[\frac{1}{2} \times 2\right] \times x = \frac{1}{2} \times 35 \text{ et } 1 \times x = \frac{35}{2}.$$

$$\text{De même, } (-2)x = -35 \text{ devient } \left[(-\frac{1}{2}) \times (-2)\right] \times x = (-\frac{1}{2}) \times (-35) \text{ et } 1 \times x = -\frac{-35}{2}.$$

$$\text{Enfin, dans les deux cas : } x = \frac{35}{2} \text{ ou } 17,5.$$

Les calculs qui viennent d'être présentés sont très détaillés. Il n'est sans doute pas nécessaire d'exiger systématiquement autant de précision de la part d'un élève. Cependant, un "retour aux sources" assez fréquent permet sans doute d'éviter une mécanisation excessive qui finit par provoquer des erreurs considérées à tort comme des étourderies alors qu'elles sont en réalité le symptôme d'une perte du sens des opérations. Afin d'éviter ces déviations, il faudrait privilégier les formulations en termes d'opérations (je multiplie, j'ajoute etc ...) plutôt qu'en termes de manipulations (je change de signe, je transpose, etc ...).

Il s'agit bien *d'opérer* sur les nombres relatifs, et la confrontation des différentes écritures et des différentes résolutions devrait permettre, à la longue, de faire prendre conscience aux élèves que ces nombres sont un outil puissant pour résoudre des problèmes, mais également, et c'est sans doute là l'intérêt essentiel de cette confrontation, de montrer que, si toutes les méthodes conduisent à la même solution, certaines sont plus performantes que d'autres car elles minimisent les risques d'erreurs. Le choix préalable de la méthode, qui suppose un examen réfléchi de l'expression algébrique à transformer, a alors des chances de passer du stade de vœu pieux du professeur à une réalité pour un plus grand nombre d'élèves.

b) Cet exercice peut aussi être traité sans avoir recours aux équations. Il suffit de raisonner sur les grandeurs, on reste alors dans le domaine du concret : si Karen avait 8 F de plus, elle pourrait acheter 3 cassettes et il lui resterait 35 F ou bien elle pourrait acheter 5 cassettes exactement.

On en déduit que le prix de 3 cassettes plus 35 F est égal au prix de 5 cassettes, ce qui signifie que deux cassettes (5 - 3) coûtent 35 F.

A ce titre, cet exercice peut éventuellement servir à l'introduction des équations (l'écriture des opérations successives conduit à la résolution décrite dans la première partie du paragraphe a). La mise en équation est bien présentée alors comme la modélisation, sous une forme algébrique, d'une situation concrète : on sort du domaine concret pour entrer dans le domaine théorique, on ne raisonne plus sur des quantités, mais sur des nombres, des opérations et leurs propriétés.

Le calcul littéral n'est pas introduit comme une suite de manipulations magiques que l'élève doit effectuer pour faire plaisir au professeur (dans le meilleur des cas), mais comme un nouvel outil lui permettant de résoudre des problèmes plus complexes.

Problème 2, en quatrième :

Le deuxième exercice peut être résolu par essais et corrections successifs, et dans ce cas l'utilisation des relatifs n'est pas nécessaire, mais c'est une méthode qui peut être fastidieuse. L'écriture d'une équation ($10x - 4(25 - x) = -2$) oblige à utiliser les relatifs et à faire fonctionner toutes les règles de calcul concernant ces nombres.

1 . 2 . Problèmes dont l'énoncé contient des relatifs :

Problème 1 : "Pense à un nombre. Ajoute 5. Multiplie par 2. Retranché 30. Divise par 2. Retranché le nombre pensé au début."

a) Parmi les formules proposées, quelle est celle qui correspond à cette liste de consignes ?

$$\begin{aligned} n + 5 \times 2 - 30 : 2 - n \\ \frac{n + 5 \times 2 - 30}{2} - 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (n + 5) \times 2 - 30 : 2 - n \\ \frac{(n + 5) \times 2 - 30}{2} - 30 \end{aligned}$$

b) Calcule le résultat obtenu en choisissant comme nombre de départ 13 puis 10.

c) Même question pour - 11 puis - 3.

d) Quel nombre faut-il choisir pour trouver 0? Pour trouver 10?

e) Que penses-tu du petit malin qui annonce: "moi, je peux deviner à l'avance le résultat !"

Problème 2 : Combien existe-t-il de nombres vérifiant chaque condition suivante ?

a) La moitié du nombre est égale à son triple augmenté de 10.

b) Le double du nombre augmenté de 7 est négatif.

c) Le double du nombre diminué de 3 est inférieur au double du nombre augmenté de (-7).

Problème 3 : La somme de deux nombres est -7. L'un est le quadruple de l'autre. Trouve ces deux nombres.

Problème 4 : La somme de trois nombres entiers consécutifs est -21. Quels sont ces trois nombres ?

Problème 5 : Voici une liste de nombres et une liste d'équations. Chacun des nombres est solution d'au moins une équation. Associe correctement chaque nombre aux équations dont il est solution.

Les nombres : - 5 ; 6 ; 5 ; $-\frac{1}{2}$; - 3 ; 0 ; $\frac{1}{3}$; 0,5

Les équations :

$$(x + 1)(4x - 8) = -9$$

$$2(3x - 1) = -2$$

$$3x + 11 = -4$$

$$5x - 2(x + 5) = 7(x - 2) + 4(1 - x)$$

$$(x + 3)(4x + 2) = 0$$

$$x^2 - 25 = 0$$

$$-\frac{2}{3}x = -4$$

$$2x^3 = 50$$

$$3x^2 = x$$

Commentaires

Problème 1, en cinquième (questions a et b), en quatrième (c, d, e).

La progression des questions devrait amener les élèves à s'interroger sur l'existence d'une solution (question d). Le calcul littéral nécessaire à la question e, permet de travailler sur la différence entre vérification et démonstration.

Problème 2, en quatrième.

Dans les trois cas, le problème posé est celui du nombre de solutions, les élèves ayant souvent tendance à croire qu'un problème a une solution unique.

Pour le a, il s'agit d'un travail autour d'une équation (commentaires du problème 1 dans 1.1).

Pour les questions b et c, les deux inéquations conduisent à une infinité de solutions pour la première, et à aucune pour l'autre.

L'utilisation des mots "augmenté" et "diminué" permet de faire le point sur le sens de ces mots dans les calculs avec les relatifs, sens différent de celui qu'ils peuvent avoir dans le langage courant, et de les associer à l'idée d'opérations (addition et soustraction), plutôt qu'au résultat de ces opérations.

Problème 3, en quatrième ou troisième.

La présence apparente de deux inconnues nécessite de travailler sur l'interprétation des données. On peut se poser la question de l'unicité de la solution, ce qui ramène à la commutativité de l'addition. Il est intéressant de rapprocher cet exercice du problème 1 du paragraphe 1.3, cela permet de revenir sur les propriétés de l'addition et de la soustraction : commutativité pour l'une et non-commutativité pour l'autre.

Problème 4, en quatrième.

La présence apparente de trois inconnues incite à clarifier le sens du mot consécutif.

Problème 5, a) en quatrième.

Il s'agit alors de vérifications. La quantité de calculs nécessaires permet un entraînement dans de multiples situations (entiers, nombres fractionnaires, nombres décimaux ; additions,

multiplications, carrés et cubes). L'élève est aussi confronté à des équations de types différents et devrait, par la *répétition* du travail, mieux appréhender ce que représente une solution d'équation.

b) en troisième.

L'objectif peut être la résolution d'équations du premier degré ou d'équations se ramenant à des équations-produits, méthode plus économique pour résoudre le problème que la vérification. On peut, à cette occasion, faire évoluer les stratégies en montrant que l'acquisition de nouveaux outils est souvent rendue nécessaire par les limites de l'utilisation des précédents.

En ce qui concerne les équations-produits, cette formulation d'exercices semble plus porteuse de sens que la forme "résoudre $x^2 = a$ ". L'incitation à la vérification permet de faire prendre conscience de l'existence de solutions négatives, ce qui est loin d'être naturel pour un élève, même en troisième.

Prouver par une vérification que 5 et -5 sont solutions de $x^2 - 25 = 0$ permet certainement plus facilement d'identifier cette équation avec $(x + 5)(x - 5) = 0$.

Cependant, ces équations et leur résolution ne prendront véritablement leur sens que plus tard, au lycée, avec un support graphique.

1 . 3 . Problèmes dont l'énoncé ne contient pas explicitement de nombres relatifs mais dont les solutions en contiennent.

Problème 1 : La différence de deux nombres est 12 et l'un est le triple de l'autre. Trouve ces deux nombres. Existe-t-il d'autres solutions ?

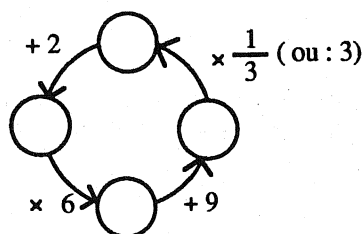
Problème 2 : Voici l'énoncé du problème que Nicolas doit résoudre: "Jean a 27 ans de plus que son fils. Dans 10 ans, son âge sera quatre fois celui de son fils. Quel est l'âge de Jean et quel est celui de son fils ?"

Nicolas répond: " Ce problème est idiot, je trouve un résultat impossible!"
Explique la réaction de Nicolas.

Problème 3 : Trouve le nombre x tel que $\frac{5+x}{8+x} = \frac{1}{2}$

Problème 4 : Trouve le nombre x tel que $\frac{5-x}{8+x} = \frac{3}{5}$

Problème 5 : (Extrait de Hachette 4^e • Edition 1989)
Complète les cases avec des nombres :



Commentaires

Problème 1, en quatrième.

A rapprocher du paragraphe 1.2, problème 3 (commutativité de l'addition et non commutativité de la soustraction).

Problème 2, en quatrième.

A priori, le problème paraît classique, les calculs sont identiques à ceux que l'on peut trouver dans les résolutions d'équations, et la vérification par le calcul fonctionne. L'attention de l'élève devrait être attirée vers la nécessité de la validation d'une solution, nécessité souvent ignorée, non sans raison d'ailleurs, si les problèmes qu'on leur propose ont toujours une solution unique et valable.

N'oublions pas que le développement de l'esprit critique fait (aussi) partie des objectifs de notre enseignement. On peut prolonger cet exercice en demandant de chercher ce qui doit être modifié dans l'énoncé pour que le problème ait une solution.

Problème 3, en cinquième (par essais successifs).

C'est l'occasion là aussi d'utiliser ces "nouveaux nombres" en faisant un travail sur la comparaison des fractions.

Problème 4, a) en quatrième.

Il est nécessaire de connaître la multiplication et la division des relatifs.

b) en troisième.

Le même exercice, posé sous sa forme littérale (avec deux nombres a et b non nuls,

$\frac{a-x}{b-x} = \frac{b}{a}$ permet de réinvestir des connaissances sur les factorisations, avec une identité remarquable ($a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$), dans une situation où leur emploi est indispensable.

Problème 5, en quatrième.

La représentation du problème conduit à quatre équations possibles du type $ax + b = cx + d$.

$$[(x+2) \times 6 + 9] \times \frac{1}{3} = x \quad \longrightarrow \quad x = -7$$

$$[(x \times 6) + 9] \times \frac{1}{3} + 2 = x \quad \longrightarrow \quad x = -5$$

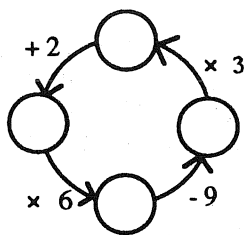
$$[(x+9) \times \frac{1}{3} + 2] \times 6 = x \quad \longrightarrow \quad x = -30$$

$$[((x \times \frac{1}{3}) + 2) \times 6] + 9 = x \quad \longrightarrow \quad x = -21$$

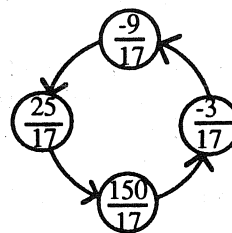
Dans la résolution des équations intervient la division de négatifs et éventuellement des additions et des soustractions.

Rien ne laisse présager que les nombres à trouver doivent être négatifs. Une fois l'un des nombres trouvé, le calcul des trois autres et la vérification de la justesse du premier fait travailler multiplication et addition avec des négatifs.

En changeant les opérateurs, on peut à volonté, compliquer ou simplifier les différents calculs : par exemple, faire faire du calcul avec des quotients d'entiers.



donne



Dans ce type d'exercice, l'élève a envie d'entreprendre la recherche et vérifie spontanément sa solution.

Conclusion

Tous les exercices donnés à un niveau peuvent bien sûr l'être aux niveaux supérieurs, mais avec des objectifs différents (problème 5, paragraphe 1.2). Certains d'entre eux, suivant leur formulation et le choix des données peuvent être envisagés à différents niveaux (problèmes 3 et 4, paragraphes 1.3).

On peut remarquer qu'en cinquième, les problèmes utilisant des relatifs ne peuvent être résolus que par essais et corrections, puisque pratiquement tous se ramènent à des résolutions d'équations dans lesquelles entrent des multiplications. A ce niveau, les exercices d'entraînement sont plutôt du type "jeux" (carrés magiques, murs etc...), ou bien portent sur du repérage. Ils peuvent souvent être utilisés dans la phase d'introduction.

A partir de la quatrième, on peut concevoir toute une gamme d'exercices et problèmes permettant un entraînement au calcul en même temps qu'un apprentissage ou un réinvestissement de beaucoup d'autres notions. Les relatifs jouent alors complètement le rôle pour lequel ils ont été créés : la résolution d'équations. Ils interviennent alors, suivant le cas, comme "objets" dont l'emploi facilite le calcul (paragraphe 1.1), ou comme "sujet" du problème (paragraphes 1.2 et 1.3).

C'est, bien entendu, l'ensemble de ces activités qui peut, progressivement, légitimer pour les élèves l'existence et l'utilisation des nombres relatifs.

2 . Le repérage

Nous avons vu dans la partie historique que l'étude des courbes est devenue au XVIII^{ème} siècle un contexte privilégié du calcul avec les relatifs et de leur utilisation : c'est le domaine de l'analyse largement développée au second cycle. Au premier cycle, on n'aborde que les fonctions linéaires et affines souvent dans un contexte de problèmes où les nombres en jeu sont positifs limitant le graphique au premier quadrant. C'est plutôt dans le contexte des équations de droites et du calcul dans un repère, c'est-à-dire dans le domaine de la géométrie analytique abordé en 3^e, que l'on utilise les relatifs. Comme le repérage est au programme de toute les classes du collège, il nous a donc semblé bon d'utiliser ce cadre dès la sixième pour faire des calculs qui donnent du sens aux nombres relatifs. Ils sont alors indispensables pour décrire des objets géométriques qui "évoluent" dans tout le plan.

Nous avons choisi trois axes : les courbes, les transformations, les figures, que nous illustrons essentiellement aux niveaux 6^e, 5^e, 4^e, où le lien calcul-repère est souvent absent des activités et exercices alors qu'en 3^e, il est fortement présent à travers les exercices de géométrie analytique.

2 . 1 . Les courbes.

a . Activité : "Les 7 familles" (4^e)

Familles de points : les 7 familles
--

Nous sommes des points et nous habitons tous dans un rectangle dont les sommets ont pour coordonnées : $(-7; 10)$ $(7; 10)$ $(7; -10)$ $(-7; -10)$.

Voici nos adresses :

Famille 1 : notre ordonnée est l'opposé de notre abscisse.

Famille 2 : en divisant notre abscisse par 2 et en retranchant 5 au résultat, on trouve notre ordonnée.

Famille 3 : en multipliant notre abscisse par -3 et en retranchant 7 au résultat, on trouve notre ordonnée.

Famille 4 : notre ordonnée est égale au carré de notre abscisse divisé par 2.

Famille 5 : notre ordonnée est égale au cube de notre abscisse divisé par -4.

Famille 6 : le produit de notre abscisse et de notre ordonnée est toujours égal à 4.

Famille 7 : la somme du carré de notre abscisse et du carré de notre ordonnée est toujours égale à 25.

1°) Pour chaque famille, trouve 4 points de la famille.

2°) Donne l'adresse de chaque famille sous la forme d'une relation qui lie l'abscisse x et l'ordonnée y des points de la famille.

3°) Représente les 7 familles.

4°) Pour chaque famille, trouve les coordonnées des points qui habitent sur les bords du rectangle.

5°) Pour chaque famille, trouve les coordonnées des points qui habitent sur les axes.

6°) Quels sont les points qui appartiennent à plusieurs familles ?

Commentaires

Le thème de cette activité est la recherche sous forme ludique d'ensembles de points dont les définitions sont rédigées en français.

Ces points sont à chercher dans une "fenêtre" rectangulaire du plan repéré centrée à l'origine.

Les nombres négatifs sont omniprésents :

– dans les coordonnées des points donnés et des points cherchés.

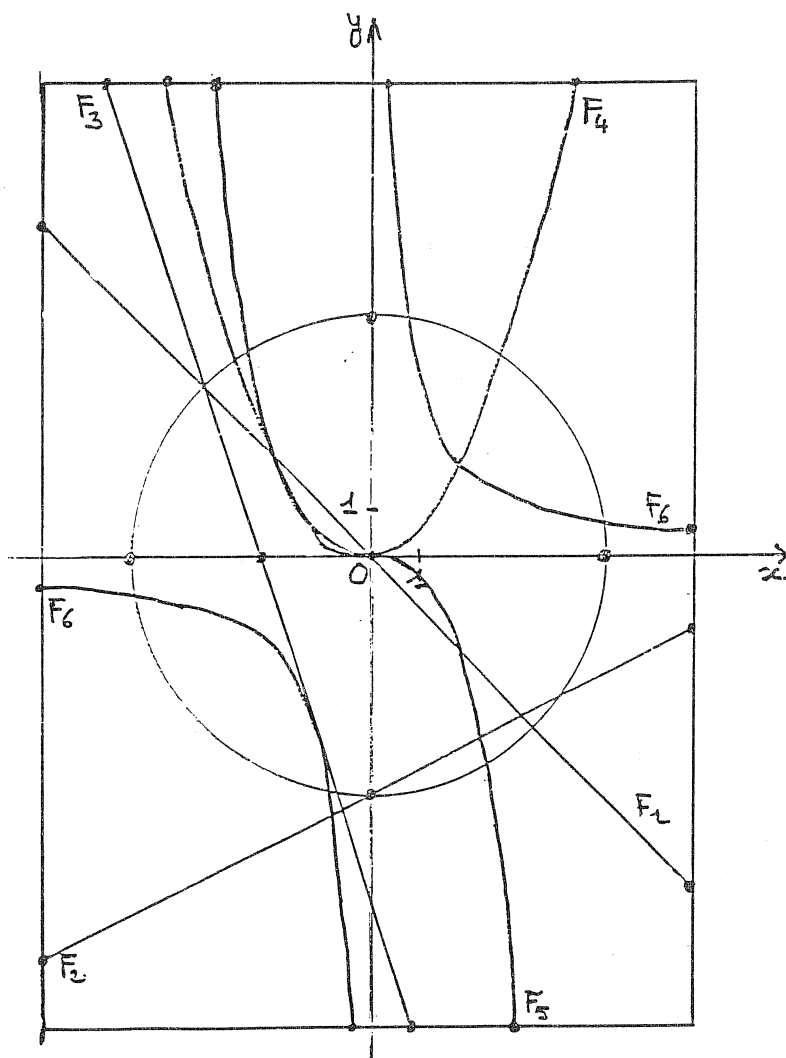
– dans les *calculs* à faire pour trouver les coordonnées des points cherchés.

Les différentes familles ont été choisies de manière à faire utiliser *toutes* les opérations sur les relatifs dans *tous* les cas de signes possibles. Et c'est là l'intérêt essentiel de l'activité pour l'apprentissage et l'entraînement au calcul avec les relatifs.

L'activité vise aussi à faire découvrir à l'élève la notion d'équation de courbe. Elle permet d'autre part aux élèves de réfléchir sur la notion de nombre : au départ pour trouver des points pour les familles ils ont tendance à privilégier les entiers naturels et à penser que chaque famille ne comporte que "quelques" points. Découvrir que chaque famille contient une infinité de points remet en question leur conception du nombre.

Enfin pour les questions 4, 5, 6, le va et vient entre graphique et équations permet un travail très riche à des niveaux d'approfondissement possibles très divers, en particulier sur la notion de valeur exacte et de valeur approchée.

Les calculs à effectuer sont "la mise en oeuvre de programmes de calcul portant sur des sommes ou des produits de relatifs"..., "utilisent des expressions littérales pour des calculs numériques "et" utilisent du calcul littéral pour la mise en équation et la résolution de problèmes divers" comme le stipule le programme.



On obtient trois droites, une parabole, une cubique, une hyperbole et un cercle :

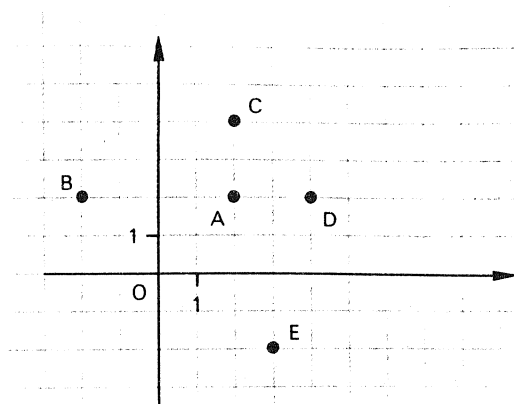
$$F_1 : y = -x \quad , \quad F_2 : y = \frac{x}{2} - 5 \quad , \quad F_3 : y = -3x - 7 \quad , \quad F_4 : y = \frac{x^2}{2} \quad ,$$

$$F_5 : y = \frac{x^3}{-4} \quad , \quad F_6 : xy = 4 \quad , \quad F_7 : x^2 + y^2 = 25.$$

Remarques sur la gestion de l'activité :

- en fonction des réactions des élèves on peut, avant de faire représenter les familles, augmenter graduellement le nombre de points à chercher pour chaque famille afin de faire franchir aux élèves certains obstacles.
- on peut aussi faire un bilan par groupe, sur transparent, ce qui permet d'obtenir "beaucoup" de points pour chaque famille et avoir une idée de leur "lieu d'habitation".
- En utilisant des équations de droite du type $y = x + a$ ou $y = x - a$ (a entier relatif), on peut adapter cette activité et l'utiliser en 5^e.

b. Exercice "Qui suis-je ?" (Pythagore, Hatier 6^e • Edition 1990)



Compléter avec O, A, B, C, D, ou E :

- Mon abscisse égale mon ordonnée, je suis le point ...
- Mon abscisse est le double de mon ordonnée, je suis le point ...
- Mon abscisse est la moitié de mon ordonnée, je suis le point ...
- Mon abscisse est l'opposé de mon ordonnée, je suis le point ...
- Mon ordonnée est négative, je suis le point ...
- Mon ordonnée est égale et opposée à mon abscisse, je suis le point ...

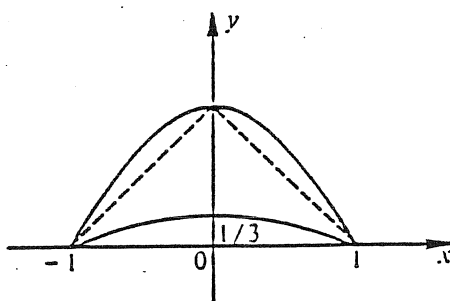
Commentaire

Cet exercice qui a été à la source de la précédente activité, peut être enrichi et approfondi en 6^e et 5^e :

- en faisant chercher d'autres points satisfaisant à la même définition.
- en proposant d'autres définitions faisant intervenir des additions ou des soustractions.

c. Le bicorné. (Hachette 3^e • Edition 1989)

La courbe ci-dessous fut introduite en 1896 par les Anglais, mais ce sont les Français qui, perspicaces, lui donnèrent un an plus tard le nom qui lui est resté : celui de bicorné.



Sachant que l'équation du bicorne est :

$$x^2(x^2 + y^2) + 4x^2y - 2x^2 + 3y^2 - 4y + 1 = 0,$$

1°) vérifier que les points de coordonnées $(0; 1)$; $(0; \frac{1}{3})$ et $(1; 0)$ appartiennent au bicorne ;

2°) préciser si les points $A(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ et $B(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ appartiennent au bicorne.

Commentaire

Cet exercice permet de faire du calcul avec des relatifs, éventuellement sous forme fractionnaire, à partir d'une expression littérale, dans un contexte où ce type de calcul a un intérêt car il permet de répondre à des questions que l'on peut se poser. De plus, il permet aux élèves de se familiariser avec la notion d'équation de courbe.

2 . 2 . Les transformations.

Activité : "Dans l'aquarium" 6^e.

Commentaire

L'intérêt de cette activité est de montrer aux élèves qu'effectuer des *opérations* sur les coordonnées de points d'une figure permet de déplacer (et éventuellement de déformer) cette figure. Elle permet ainsi de comprendre comment on peut faire des animations sur ordinateur.

Au niveau de l'apprentissage des relatifs, l'intérêt de l'activité est de faire faire aux élèves des additions de relatifs, sans faire du calcul pour du calcul. De plus, le contexte permet des autocorrections puisqu'on sait que l'on doit retrouver le même poisson.

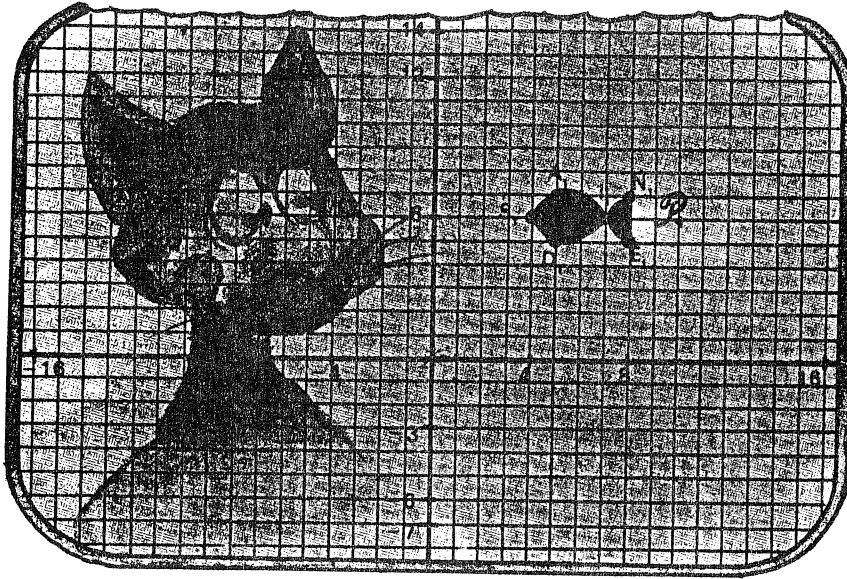
Le choix de la position initiale et des positions successives permet conjointement de déplacer le poisson dans les quatre parties de l'aquarium et faire des additions de relatifs dans tous les cas possibles.

A propos de la question 6 : Il y a plusieurs positions possibles pour le poisson. Si l'on reste dans le cadre des "translations" du poisson, il y en a deux : ce sont en fait les solutions que donnent les élèves. Mais si certains proposent une position verticale ou de biais, cela permet d'ouvrir des perspectives sur d'autres transformations possibles des coordonnées.

Remarques :

- Cette activité peut être travaillée en classe ou donnée en devoir à la maison.
 - Elle peut être utilisée en 5^e en introduisant des soustractions.
 - Elle peut être utilisée en 4^e en introduisant des multiplications et divisions ce qui entraîne des agrandissements et réductions des poissons.
- On trouvera dans cette optique, la version qui est à l'origine de l'activité dans le manuel Pythagore Hatier 4^e, au premier chapitre sur les relatifs.

"Dans l'aquarium"



1. Colorie le poisson en rouge et l'eau en bleu ciel.
2. Inscris les coordonnées des points S_1 , A_1 , R_1 , D_1 , I_1 , N_1 , E_1 du poisson dans la première ligne du tableau (position 1).
3. Ajoute (-15) aux abscisses des points de la première ligne et ne touche pas aux ordonnées. Inscris dans la deuxième ligne les nouvelles coordonnées des points du poisson que tu as obtenues. Puis, dessine le poisson dans sa nouvelle position (position 2).
4. Ajoute (-9) aux ordonnées des points de la deuxième ligne et ne touche pas aux abscisses. Complète ainsi la troisième ligne, puis dessine le poisson dans sa nouvelle position (position 3).
5. Remplace les abscisses des points de la troisième ligne par leurs opposés, et ne touche pas à leurs ordonnées. Complète ainsi la quatrième ligne, puis dessine le poisson dans sa nouvelle position (position 4).
6. Le poisson veut aller manger un ver qui se trouve en $V(-6 ; 11)$. Place V dans l'aquarium, et dessine le poisson quand sa bouche S touche V . Relève les coordonnées des points du poisson et inscris-les dans la cinquième ligne (position 5). Quelles opérations faut-il faire pour trouver les coordonnées des points de la cinquième ligne en partant de celles de la quatrième ligne ?
7. Explique comment avec des calculs on peut déplacer le poisson.
8. Quel titre donnerais-tu à ce problème ? (à mettre dans la place libre au-dessus de l'aquarium).

Tableau des déplacements du petit poisson.

Les points du poisson	S	A	R	D	I	N	E
Position 1 ($\mathcal{P}_1$)		(5 ; 7)					
Position 2 ($\mathcal{P}_2$)			(-10 ; 6)		(-8 ; 6)		
Position 3 ($\mathcal{P}_3$)	(-11 ; -3)						
Position 4 ($\mathcal{P}_4$)				(10 ; -4)		(7 ; -2)	
Position 5 ($\mathcal{P}_5$)							

2 . 3 . Les figures.

a . Exercice "Poisson" 6^e

1°) Trace deux axes perpendiculaires gradués.

2°) Place et relie les points dont voici les coordonnées :

(-4 ; 0) (-2 ; 2) (2 ; 4) (0 ; 4) (0 ; 2) (2 ; 0)

(4 ; 4) (4 ; -4) (2 ; 0) (0 ; -2) (0 ; -6)

(-2 ; -2) (-4 ; 0).

3°) Calcule $a = 1 - 3$. Place le point de coordonnées (a ; 1).

Commentaires

Ce genre d'exercice permet de travailler sur le repérage, avec une auto-évaluation car on connaît a priori, grâce au titre de l'exercice, la forme de la figure que l'on doit obtenir. On peut faire également travailler sur des opérations en soumettant les coordonnées à des contraintes.

b . "Quadrilatères" (TD Géométrie 6^e, Hatier)

a. Quelles sont les coordonnées des points A et B ?

A (_____ ; _____)

B (_____ ; _____)

b. On appelle F le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses. Construis F.

Quelles sont les coordonnées de F ?

F (_____ ; _____)

c. D est un point ayant une abscisse positive.

Construis le point D avec le triangle AED triangle isocèle rectangle de sommet A.

Quelles sont les coordonnées de D ? D (_____ ; _____)

d. Construis le point C tel que ABCD soit un parallélogramme. Que peux-tu dire de ABCD ?

Quelles sont les coordonnées de C ? C (_____ ; _____)

e. Construis le point E tel que ADEF soit un parallélogramme. Que peux-tu dire de ADEF ?

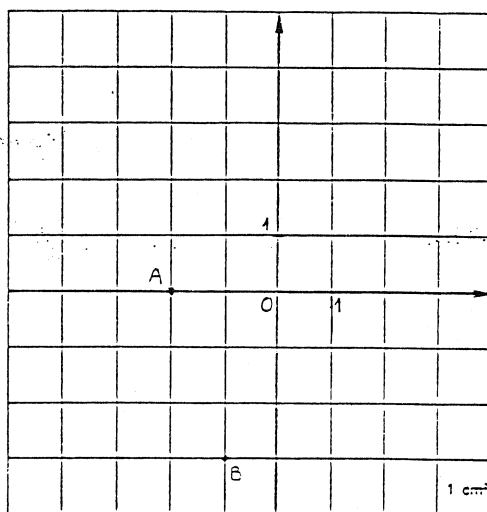
Quelles sont les coordonnées de E ? E (_____ ; _____)

f. On appelle G et H les symétriques respectifs de C et B par rapport à la droite (AE). Construis G et H. Quelles sont les coordonnées de ces deux points ?

G (_____ ; _____) H (_____ ; _____)

g. Quelle est la nature du quadrilatère AFGH ? Pourquoi ?

h. En utilisant ce quadrillage, trouve l'aire en cm² des quadrilatères ABCD et ADEF.
Aire de ABCD : _____ Aire de ADEF : _____



Cet exercice permet de lire les coordonnées de points dans un plan muni d'un repère orthonormal. Il permet aussi de décroisser les notions vues sur les quadrilatères, la symétrie axiale, les aires en les réinvestissant dans un repère. On peut penser qu'ainsi, un élève est amené à considérer les relatifs comme des nombres qu'on peut utiliser à tout moment et pas seulement lors de la leçon sur les relatifs.

On obtient, à la fin, une figure compliquée, ce qui permet de faire travailler les élèves sur la reconnaissance de figures usuelles dans un environnement plus complexe, comme le stipule le programme de 6^e.

c . Les milieux en 4^e.

Le calcul des coordonnées du milieu d'un segment permet de réactiver les connaissances des élèves sur le repérage, de faire fonctionner l'addition des relatifs de façon finalisée, ainsi que le quotient d'un relatif par un entier. Ne s'agissant que de la moitié, la division ou la multiplication par 2 d'un négatif peut être abordée dans ce cadre, où elle a du sens et peut être contrôlée graphiquement, avant l'étude de la multiplication et division de deux relatifs en général.

Les exercices proposés permettent aussi de faire fonctionner diverses propriétés liées au parallélogramme et aux milieux.

Exercice 1 :

On donne dans un repère, les points suivants :

$A(6 ; 3)$ $B(4 ; -1)$ $C(\frac{3}{2} ; 0)$ $D(-\frac{7}{2} ; -1)$ $E(-6 ; 0)$ $P(-4 ; 4)$ $G(-\frac{3}{2} ; 3)$ $H(\frac{7}{2} ; 4)$.

Le polygone ABCDEFGH présente une particularité. Laquelle ? Le prouver.

Exercice 2 :

On donne, dans un repère, les points suivants :

$A(2 ; 1)$ $B(6 ; 4)$ $C(5 ; 0)$ $S(1 ; -3)$ $E(-4 ; 2)$ et T tel que EABT soit un parallélogramme.

1°) ABCS est-il un parallélogramme ? Le démontrer.

2°) Calculer les coordonnées de T.

Exercice 3 :

(c'est une version de l'exercice 2 avec de grands nombres qui empêchent la représentation graphique et rendent nécessaires les calculs pour trouver les coordonnées de points astreints à des conditions ou pour démontrer une propriété.)

On donne dans un repère, les points suivants :

$E(-4 ; 2)$; $D(-2 ; -3)$; $Z(-1515 ; 1789)$; Y milieu de [DZ], W tel que EZWD soit un parallélogramme.

1°) Calcule les coordonnées de Y et de W.

2°) Si R a pour coordonnées $(-1 ; 1)$, et $S(1 ; -3)$, RSZW est-il un parallélogramme ?

Remarque :

On trouvera d'autres exemples d'exercices utilisant les coordonnées du milieu d'un segment dans la brochure de la Commission Inter-IREM Premier Cycle. "Autour de Thalès" (1995) à l'article "Milieu d'un segment" de M.J. Bach et M. Marot.

3 . Les jeux

A l'école élémentaire, les élèves ont eu l'occasion de faire des jeux pour compter avec des décimaux positifs. Ils connaissent tous le "compte est bon", les carrés magiques, les nombres croisés...

En introduisant des nombres négatifs dans les jeux qu'ils connaissent ou qu'ils vont découvrir, on va faire évoluer la conception qu'ils ont des nombres.

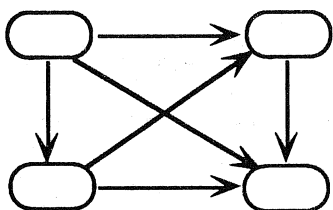
Petit à petit, les négatifs vont acquérir le statut de nombre : on pourra les ajouter, les soustraire, les multiplier et les diviser entre eux ou avec des positifs.

Les manuels nous proposent des jeux pour ordonner les nombres et d'autres jeux pour calculer.

3 . 1 . Des jeux pour ordonner les relatifs.

Exercice 1 : (Hachette 5^e)

Placer les quatre nombres relatifs -10 ; -9 ; -9,1 et -9,9 dans les cases du schéma ci-dessous :

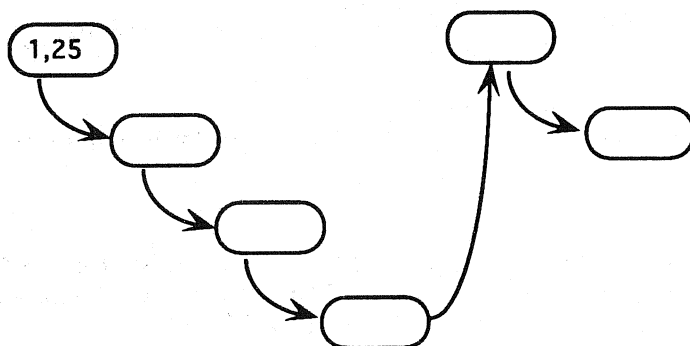


La flèche $\longrightarrow$ signifie
" ...est plus petit que ..."

Exercice 2 : (Hachette 5^e)

+1,5 ; -1,5 ; +1,2 ; -1 ; +1,3.

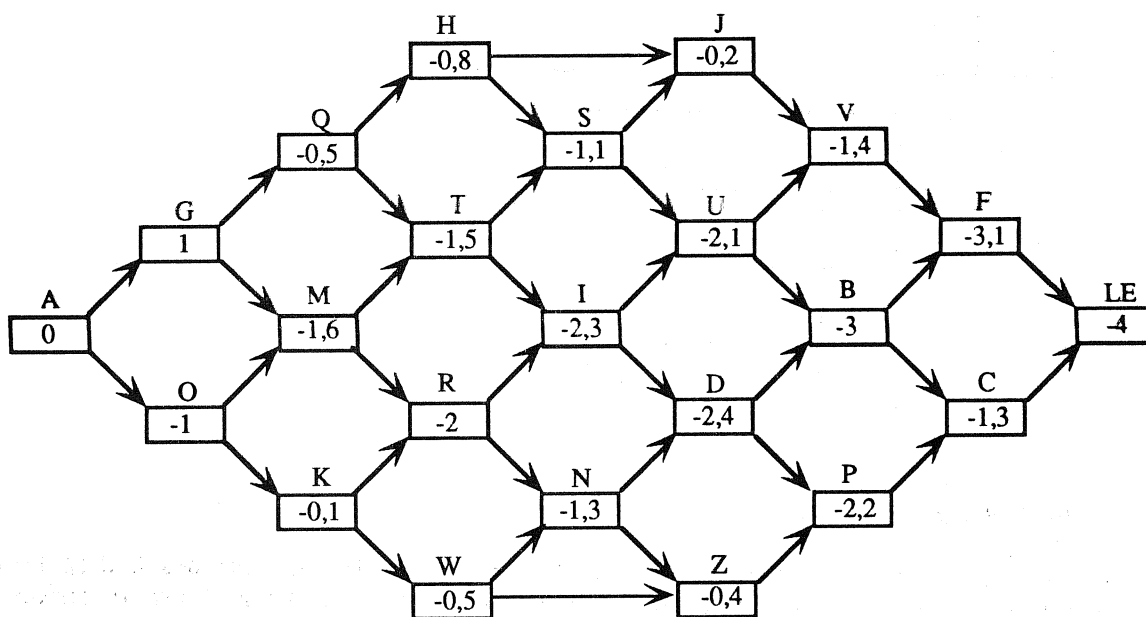
Placer ces nombres dans les cases ci-dessous sachant que l'on descend vers un nombre plus petit et que l'on monte vers un nombre plus grand.



Exercice 3 : "De zéro à moins quatre" (Hachette 5^e)

Il s'agit en partant de la case 0 (à gauche) de se déplacer de case en case en suivant les flèches et en respectant la règle suivante : *on se dirige obligatoirement vers un nombre plus petit..*

Une fois arrivé à la case -4 à droite, il suffit de relever toutes les lettres rencontrées sur ce chemin et de les mettre en ordre pour trouver un mot formidable.



Commentaire

L'exercice 1 peut permettre la mise en évidence de la transitivité de l'inégalité. Cette propriété n'est pas explicitée dans les programmes mais elle est souvent utilisée implicitement (valeurs approchées, encadrements...).

Les exercices 2 et 3 sont intéressants car ils obligent les élèves à lire des consignes différentes et à mettre en oeuvre des *stratégies appropriées*.

Il est à noter qu'en choisissant *d'autres nombres* on peut augmenter la difficulté.

3 . 2 . Des jeux pour ajouter et soustraire.

a . Les carrés magiques "additifs"

La somme des nombres de chaque ligne est égale à la somme des nombres de chaque colonne et de chaque diagonale. (Hachette 6^e)

Exercice 1 :

Les carrés ci-dessous sont-ils magiques ?

-2	3	-4
-3	-1	1
2	-5	0

-9	16	-19
-14	-4	6
11	-24	-1

Exercice 2 :

Compléter ces carrés de nombres pour qu'ils deviennent magiques.

-3		-1
	0	
1		

	3	
	-1	
2	-5	

4	-1		-8
	1		6
		-2	
7		0	-5

Commentaire

Dans l'exercice 1, il est intéressant d'insister sur le fait que les huit sommes sont égales alors qu'une seule somme différente prouve que le carré n'est pas magique. C'est l'occasion de se familiariser avec un certain type de preuve. Dans l'exercice 2, les carrés magiques peuvent déboucher sur des équations et donner ainsi du sens à la soustraction :

$$2 + (-5) + x = -3 \text{ donc } x = -3 - [2 + (-5)]$$

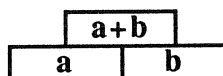
Un autre intérêt réside dans le fait que le dernier nombre peut se trouver de deux façons différentes, permettant ainsi une auto-correction.

Les nombres sont choisis entiers en 5^e car il s'agit de calculer sans calculatrice et rapidement.

En 4^e, on pourrait donner des nombres décimaux ou des fractions.

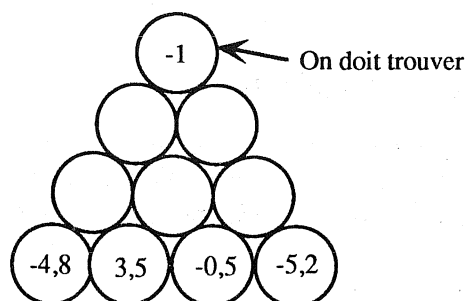
b . Les murs (Hachette 5^e • Edition 1995 et Hachette 4^e • Edition 1992)

Pour compléter les murs, on décide qu'une brique est égale à la somme des deux briques sur lesquelles elle est posée.

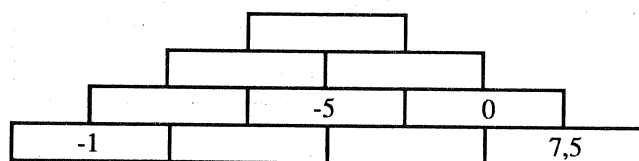


Complète les murs suivants, selon la règle précédente.

Exercice 1 :



Exercice 2 :



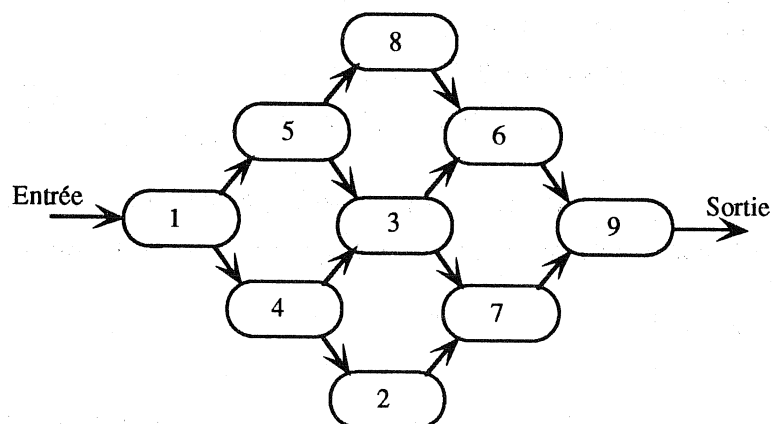
Commentaire

Dans l'exercice 1, il s'agit de faire uniquement des additions sans calculatrice ; en donnant un résultat intermédiaire, on permet aux élèves de vérifier les résultats.

Dans l'exercice 2, plus difficile, l'élève va être obligé de choisir la bonne stratégie et de faire des soustractions. Cet exercice peut également amener l'élève à utiliser des équations pour trouver les nombres manquants.

c . D'autres jeux pour additionner et soustraire. (Hachette 5^e • Edition 1995)

On additionne en "montant" et on soustrait en "descendant" :



Existe-t-il un parcours qui, à la sortie, donne zéro ?

Commentaire

Dans ce dernier jeu, il n'y a que des nombres positifs dans l'énoncé, pourtant certains parcours donnent un résultat négatif ; en donnant ce jeu en 6^e, on met en évidence la nécessité des nombres négatifs.

3 . 3 . Des jeux pour multiplier et diviser.

a . Les carrés magiques "multiplicatifs"

Il s'agit de produits et non de sommes. On obtient le même résultat en effectuant le produit des nombres de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale. Un tel carré est appelé *carré de produits magique* (Hachette 4^e • Edition 1995).

Exercice 1 : Facile !...

Vérifier que le carré ci-contre est un carré de produits magique

16	0,125	-4
0,5	-2	8
-1	32	0,25

Exercice 2 : Moins facile!...

Compléter le carré ci-contre pour obtenir un carré de produits magique

128	-8	0,5
1		

Commentaire

Dans l'exercice 1, on peut montrer l'utilité de la commutativité et de l'associativité de la multiplication pour calculer rapidement.

Dans l'exercice 2, on a : $128 \times (-8) \times 0,5 = -512$.

On écrira ensuite l'équation : $1 \times x \times 128 = -512$ soit $x = -\frac{512}{128}$ ou $x = -4$.

On peut remarquer qu'il est plus intéressant de ne pas effectuer le produit $128 \times (-8) \times 0,5 = 128 \times 1 \times x$ mais de résoudre l'équation en divisant les deux membres par 128, ce qui donne :

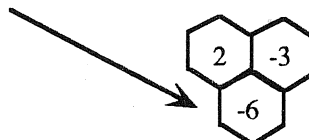
$$\begin{aligned} (-8) \times 0,5 &= x \\ -4 &= x \end{aligned}$$

On a, dans cet exercice, l'occasion d'effectuer avec les élèves un travail sur les équations et les propriétés de la multiplication.

b . Les pyramides ou "nids d'abeilles" (Hachette 4^e • Edition 1992)

Ces "nids d'abeilles" fonctionnent suivant la règle illustrée ci-contre :

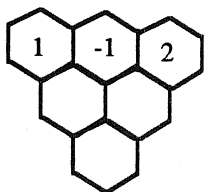
On effectue $2 \times (-3)$



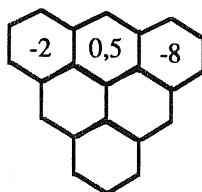
Exercice 1 :

Compléter les "nids d'abeilles" suivants:

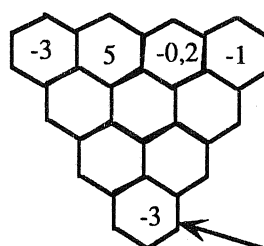
a)



b)



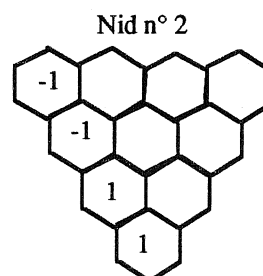
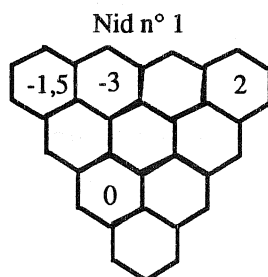
c)



On doit trouver

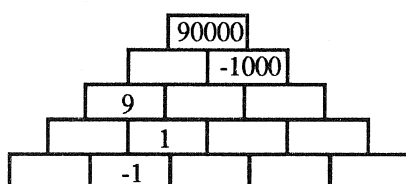
En mettant la réponse finale, on permet aux élèves de vérifier leurs calculs.

Exercice 2 :



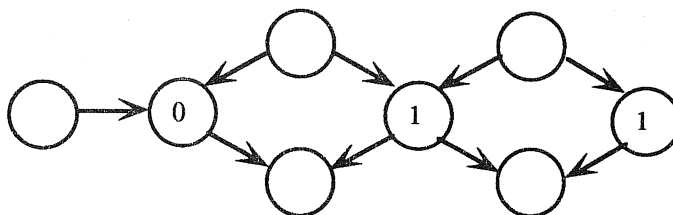
c . Les pyramides (Hachette 4^e • Edition 1992)

Chaque nombre est le produit des deux nombres dans les cases juste en-dessous.
Compléter les cases vides :



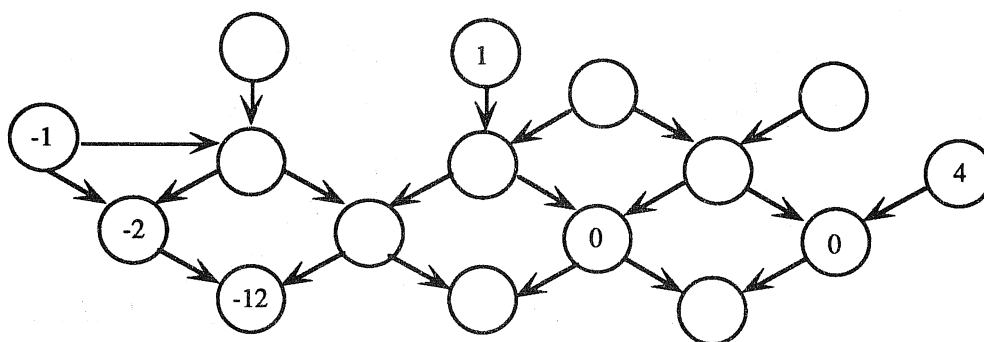
d . Les filets (Pythagore 3^e • Edition 1993)

Chaque noeud est le produit des noeuds qui pointent sur lui.



Avec des entiers relatifs

Compléter ce filet sachant que chaque noeud contient un entier relatif :



Commentaire

Ces exercices donnent l'occasion de travailler sur la règle du produit nul et des produits par 1 et -1, permettent de travailler la multiplication et la division avec des grands nombres et de réactiver les règles $\times$ ou $:$ par 10, 100, 1000,

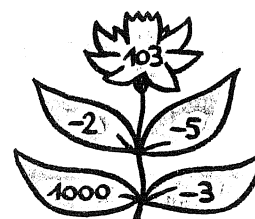
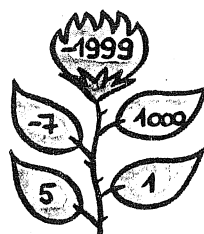
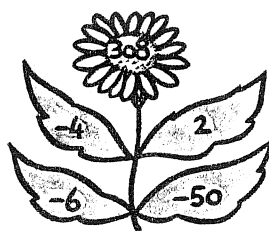
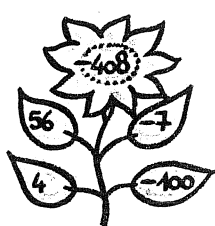
Dans le dernier exercice, si l'on veut travailler sur le signe d'un produit, il serait préférable de remplacer -2 par 2 et de ne mettre qu'un seul 0.

3 . 4 . D'autres jeux pour faire fonctionner les quatre opérations et les priorités.

Compter fleurette (Pythagore 4^e • Edition 1992)

Comment combiner les feuilles, par le calcul, pour obtenir la fleur ?

Les opérations autorisées sont : + ; - ; $\times$ et $:$.



Commentaire

Ce jeu qui ressemble au "compte est bon" est intéressant si on demande d'écrire la ligne de calculs complète. Par exemple : $308 = (-6) \times (-50) - (-4) \times 2$. Les élèves sont obligés d'écrire la soustraction ce qu'ils ne font pas volontiers, de préciser les priorités des opérations et donc de placer les parenthèses nécessaires.

$$103 = \frac{1000}{(-2) \times (-5)} - (-3)$$

L'écriture avec un produit au dénominateur n'est pas habituelle, ici elle est obligatoire, on peut aussi écrire :

$$1000 : [-2 \times (-5)] - (-3)$$

b) Le rallye. (A partir d'une activité de Pythagore 4^e, Hatier)

Sans calculatrice

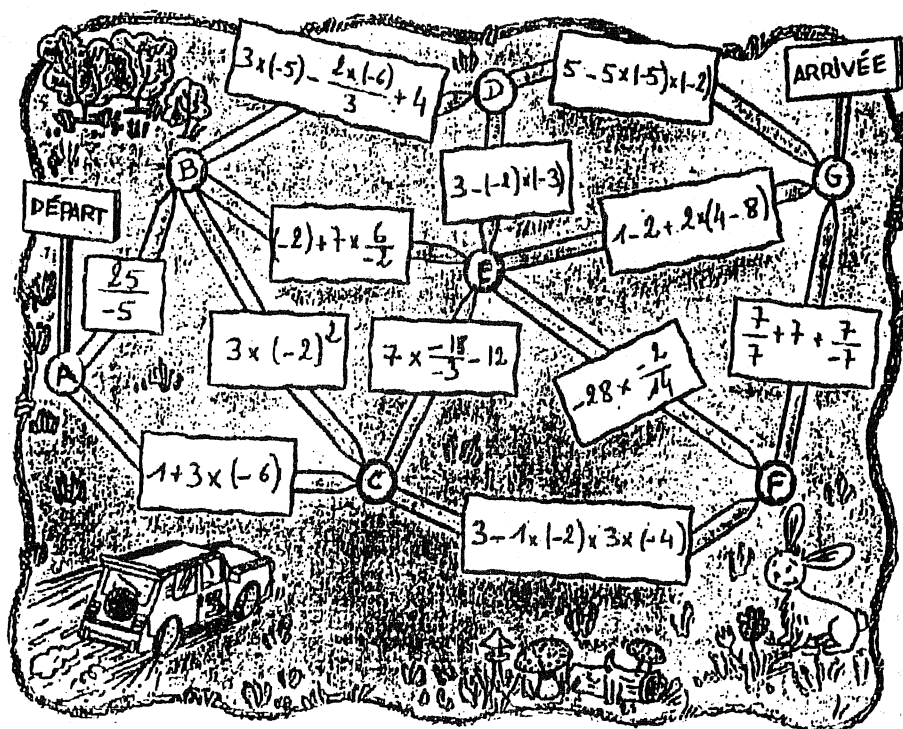
1. Donne le résultat de chacun des 12 calculs du circuit sous la forme d'un entier relatif.
Pour chaque calcul, indique toutes les étapes du calcul.

2. Pour aller du départ A à l'arrivée G, en suivant les flèches, il y a 11 chemins possibles.

Un chemin est "positif" quand le produit des étiquettes rencontrées est positif.

Un chemin est "négatif" quand le produit des étiquettes rencontrées est négatif.

Donne 3 chemins "positifs" et 3 chemins "négatifs". (Justifie ta réponse).



Si tu as fini : Donne les noms des 11 chemins et indique ceux qui sont "positifs" et ceux qui sont "négatifs".

Commentaire

Le choix judicieux des nombres permet de faire travailler tous les cas possibles de produits, quotients, sommes et différences de relatifs et de retravailler les priorités des opérations. La question 2 fait fonctionner la règle des signes. A la fin, on peut demander de classer ces chemins en utilisant la calculatrice. La forme ludique de l'exercice est un attrait pour les élèves.

c) Les nombres croisés.

NOMBRES CROISES

Convention : Pour indiquer qu'un nombre est négatif, on l'inscrit en lisant de droite à gauche. Exemple : (-25) se note 52 dans la grille.

	1	2	3	4	5	6
I						
II						
III						
IV						
V						
VI						

HORIZONTALEMENT :

I : $(-9) \times (-5)$ & Je suis la solution de l'équation : $8 - 2a = 16,4$.
II : Si on me multiplie par (-2) et qu'on ajoute 5 au résultat, on trouve $(-10,6)$ & $-4 + 2 \times 3,5$.
III : $(-10)^3 + 1996$ & $(-5)^2$.
IV : $4 - 2 + 2 \times (4 - 8)$ & Je suis la solution de l'équation : $13d - 300 = 260 + 3d$.
V : $5 + 4 \times (-2) + 4$ & Je suis la solution de l'équation : $-8e + 4 = -88 - 3e$.
VI : $(-1) \times (-2) \times (+4,3)$ & Je suis la solution de l'équation $-2f - 65,5 = 34,5$.

VERTICALEMENT :

1 : $(-10)^3 + 26$ & Je suis la solution de l'équation : $5g + 80 = 3g - 82$.
2 : Je suis la solution de l'équation : $-6y + 19 = 297 - 2y$.
3 : $(-10)^2 + 7 \times (-2)$ & $(-3)^2 + (-3) \times (-4) - 5$.
4 : $2 - 3 \times (-6)$ & $(-17) \times 5$.
5 : Si on me multiplie par (-10) et qu'on enlève 3 au résultat, on trouve 3,2.
6 : Je suis la solution de l'équation : $-3z + 7 = -863 - z$ & $(-3)^2 \times 5$.

CONSIGNES : 1) Compléter la grille.

2) Donner deux résolutions différentes de l'équation V

Commentaire

Comme pour toute grille, un tel travail permet une auto-évaluation et une auto-correction. Deux grandes directions ont été privilégiées ici :

- le calcul sur les relatifs avec toutes les opérations et les priorités opératoires,
- la résolution d'équations avec des coefficients de l'inconnue négatifs et des nombres négatifs tant dans l'équation que dans la solution. C'est un type d'équation que l'on ne peut obtenir lorsque l'on met en équation des problèmes "concrets" ou à base géométrique.

Conclusion

Les jeux permettent :

- de faire du calcul mental,
- de donner du sens – aux nombres relatifs
 - aux opérations (soustraction, division)
 - à certaines écritures,
- d'utiliser les propriétés des opérations, des règles de calcul,
- de résoudre des équations,
- de finaliser les calculs,
- de faire du calcul sans avoir l'air de faire du calcul systématique,
- de mettre les élèves dans des situations d'auto-correction.

CONCLUSION

Que faire en 6^e ?

Que faire en 5^e ?

Que faire en 4^e ?

Que faire en 3^e ?

LES RELATIFS AU COLLEGE

	Ce qui est nouveau	Comment l'introduire ?	Règles nouvelles (k, a, b, c, et d relatifs)	Où le réinvestir ?
Sixième	• Les relatifs • Repérage sur une droite et dans le plan	• Exemples pris dans la vie courante : goal average, soustractions impossibles, ...	• Aucune	• Dans un repère : observation et tracé de figures géométriques
Cinquième	• Comparaison, addition, et soustraction de décimaux relatifs • Réduction de sommes algébriques • Equation $a + x = b$ avec des relatifs	• Bilans divers (écarts de températures, soldes bancaires etc...)	• Pas d'énoncés formels • Savoir que la différence de deux relatifs s'obtient en ajoutant au premier l'opposé du second	• Idem 6^e • Déplacements dans le plan
Quatrième	• Toutes opérations avec des relatifs (décimaux ou fractions) • Puissances entières (exposants positifs et négatifs) • Effets de l'addition et de la multiplication sur l'ordre • Expressions littérales : développements, factorisations • Equations et inéquations du 1^{er} degré à une inconnue	• Equation de type $ax = b$ (avec des relatifs) • Utilisation et prolongement des propriétés déjà connues sur les opérations avec les positifs	• Règles des signes • Règles de la division • Distributivité simple et double • Règles concernant les produits et quotients de puissances, et la puissance d'un produit • Règles concernant la conservation de l'égalité et de l'ordre	• Différentes écritures des nombres : valeurs exactes, valeurs approchées, ordre de grandeur • Utilisation de la calculatrice • Très grands (ou très petits) nombres • Valeurs numériques d'expressions littérales • Coordonnées du milieu • Application linéaire, pente • Sphère – Aires et volumes • Reconnaissance de formes (sommes, différences, produits, quotients, etc...)
Troisième	• Extension aux écritures avec des radicaux	• Résolution de problèmes	• Identités remarquables	• Systèmes (équations et inéquations) • Géométrie analytique (coordonnées de vecteurs, équations de droites, déplacements)

Les nombres relatifs en 6^e

Ce qui est nouveau	Comment l'introduire ?	Quel bilan ?	Où le réinvestir ?
• Graduer régulièrement une droite. • Sur une droite graduée, les valeurs en jeu étant des entiers relatifs : lire l'abscisse d'un point donné, placer un point d'abscisse donnée. • Dans le plan repéré, les valeurs en jeu étant des entiers relatifs : lire les coordonnées d'un point donné, placer un point de coordonnées données. <i>Commentaires :</i> On pourra être conduit à opérer sur ces nombres, mais les règles d'addition ne sont pas au programme. Sur la droite et dans le plan, le cas de points dont les coordonnées ne sont pas des entiers relatifs doit être envisagé en classe, mais ne donne pas lieu à une compétence exigible.	• Dans des problèmes de codage, de repérage : • Exercices sur des températures, des durées, des altitudes, des profondeurs, ... • En faisant des soustractions "impossibles" : exercices sur le goal-average, sur des comptes bancaires, exercices utilisant la calculatrice, problèmes concrets (recherche d'un nombre manquant dans une opération).	• Nombres relatifs. • Repérer un point sur une droite graduée. • Repérer un point dans un plan repéré.	• <i>Gestion de données</i> : graphiques • <i>Symétrie orthogonale</i> : Dans un plan repéré, dessiner une figure, construire son image par une symétrie orthogonale, lire les coordonnées des points. Translater une figure à partir d'une addition sur ses coordonnées. • <i>Quadrilatères</i> : Dans un plan repéré, placer 3 points, sommets d'un rectangle, terminer le rectangle, calculer son périmètre, son aire. Placer 2 points, construire des rectangles d'aire donnée. Placer A, B, C et D pour qu'ils soient chacun dans un quadrant et que ABCD soit un quadrilatère particulier. • <i>Jeux</i> : Carrés, étoiles magiques, murs... • <i>Histoire</i> : Echelle chronologique. • <i>Géographie</i> : Graphiques, repérages.

Les nombres relatifs en 5^e

Ce qui est nouveau	Comment l'introduire ?	Quel bilan ?	Où le réinvestir ?
Ranger des relatifs	Graduer une droite Le thermomètre Des graphiques	Comparer 2 relatifs négatifs puis de signe contraire	Activités graphiques Relevés statistiques
Effectuer la somme	Sous forme de jeux : reculer et avancer, jeux de dés...	$a + b$ avec a et b de même signe puis de signes contraires	Equation $a + x = b$
Transformer une soustraction en une addition	Variation d'une quantité : température, âge avant / après JC La calculatrice	$a - b = a + (-b)$	Distance de deux points
Calculer une expression	Sous forme d'exemples types	Suite d'additions Suite d'additions et de soustractions Idem avec des $\{ [()] \}$	Mise en équation d'un problème
Ecrire un programme de calcul	Sous forme d'exemples types		C'est ce type de démarche qui peut être réinvesti

Les nombres relatifs en 4^e

Ce qui est nouveau	Règles nouvelles (k, a, b, c, et d relatifs)	Où les réinvestir ?
• Multiplication et division des relatifs • Inverses • Calculs dans Q : organiser et effectuer des séquences de calculs portant sur des sommes et des produits (utilisation de parenthèses) • Effets de l'addition et de la multiplication sur l'ordre	• Conservation des propriétés déjà connues • Règles des signes • $a \times \frac{1}{a} = 1$ et $\frac{1}{a} = a^{-1}$ avec $a \neq 0$ $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ et $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ avec b et $c \neq 0$ $\frac{a}{c} : \frac{d}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ avec b, c et $d \neq 0$ • $a + c$ et $b + c$ sont dans le même ordre que a et b • ac et bc sont dans le même ordre que a et b seulement si c est positif	• Ecritures différentes - Valeurs exactes et valeurs approchées - Comparaison de nombres - Ordre de grandeur - Utilisation de la calculatrice • Calcul de valeurs numériques d'expressions littérales • Coordonnées du milieu
• Puissances de 10 avec exposants négatifs • Puissances d'entiers relatifs à exposants simples	$10^m \times 10^n = 10^{m+n}$ $\frac{1}{10^n} = 10^{-n}$ $a^2 \times a^3 = a^5$; $a^2 : a^5 = a^{-3}$ $(a \ b)^2 = a^2 b^2$ (a et b $\neq 0$)	• Sphère • Volumes
• Calcul littéral : distributivité (simple et double) - factorisation - calculs avec des sommes algébriques	$k(a+b) = ka + kb$ $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$ $(-a)b = a(-b) = -ab$ $(-a)(-b) = ab$ $1 \ a = a$; $(-1) \ a = -a$ $-(a+b) = (-a) + (-b)$	• Equations et inéquations • Aires • Application linéaire, pente

Les nombres relatifs en 3^e

Ce qui est nouveau	Où réinvestir les connaissances ?
Rien	<i>Dans un repère :</i> • Calculer les coordonnées d'un vecteur • Calculer les coordonnées d'un point • Reconnaître le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine d'une droite écrite sous la forme $y = m x + p$ • Tracer une droite, la représentation graphique d'une fonction affine • Savoir si un point est sur une droite <i>Dans les résolutions d'équations et d'inéquations :</i> • $x^2 = a$ • Systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues (Résolution et vérification) • Inéquations et systèmes d'inéquations du premier degré à une inconnue (Règles sur l'ordre, résolution, vérification, représentation des solutions sur une droite graduée)

