**Université de POITIERS**

Institut de Recherche
sur l' Enseignement des Mathématiques

**I. R. E. M. de POITIERS**

# *FICHIER*

# *MATHEMATIQUES*

# *T.C.*

Septembre 1992

**DEMONTRER**

**RESOUDRE**

**CALCULER**

**TRANSFORMER**

**CONSTRUIRE**

**et ... REUSSIR !**

**L. P. I. du Futuroscope**

Institut de Recherche
sur l'Enseignement des Mathématiques

L.P.I. du Futuroscope

Septembre 1992

# Fichier MATHEMATIQUES T.C.

## Démontrer

## Résoudre

## Calculer

## Transformer

## Construire

P. CROTTEREAU
D. GAUD
P. PASQUIER

# A L'ATTENTION DES UTILISATEURS DU FICHIER

## ORGANISATION

Les **FICHES** ont été classées suivant 5 rubriques selon les types de problèmes posés en classe de mathématiques :

- **DEMONTRER**, montrer, prouver, justifier, ...
- **CALCULER**, déterminer, ...
- **TRANSFORMER**, écrire autrement , factoriser, développer, ...
- **CONSTRUIRE**, tracer, ...
- **RESOUDRE**, trouver les solutions, ...

Chaque rubrique est elle même partagée suivant les domaines mathématiques concernés par des types de questions posées :

Exemple : Si le problème posé est du problème de démonstration portant sur l'analyse, il faut se reporter à la partie "Analyse" de la rubrique "Démontrer".

En géométrie, dans chaque rubrique, les méthodes ont été classées suivant la nature des outils qui entrent en jeu :

- **géométrie des figures**
- **géométrie vectorielle**
- **géométrie analytique**
- **géométrie complexe**
- **géométrie des transformations**
- **géométrie des angles**

# MISE A JOUR ET PERSONNALISATION DU FICHIER

Pour que ce fichier soit efficace il semble souhaitable de le personnaliser :

- **par l'illustration d'exemples** pour chaque méthode. Cela peut se faire, quand la méthode est rencontrée pour la première fois, soit sous la direction du professeur si celui-ci le souhaite, soit sous l'initiative même de l'utilisateur.

- **par des commentaires** :

exemple : ❶.❻ Comment démontrer une inégalité du type $m\,(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M\,(b - a)$.

commentaire : cette inégalité dite des accroissement finis est souvent utiliser pour montrer la convergence des suites du type $U_{n+1} = f(U_n)$.

- **par des figures** : qui aident à mémoriser les méthodes (par exemple en géométrie ou en analyse).

- **par l'adjonction** de méthodes données par le professeur ou par la suppression de certaines méthodes jugées peu importantes par le professeur.

# UTILISATION DU FICHIER

Le fichier est un ensemble de méthodes :

• Il peut servir à retrouver une méthode oubliée.

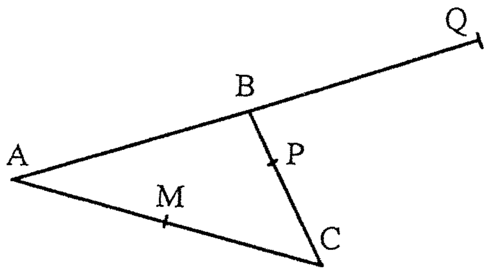
Exemple : Y a-t-il une méthode avec l'homothétie pour démontrer que des points sont alignés ?

• Il peut servir à retrouver l'algorithme d'une méthode.

Exemple : Je ne sais plus déterminer une équation cartésienne d'une droite passant par deux points

• Il peut aider à trouver une stratégie pour résoudre un problème.

Exemple :




ABC est un triangle.
M est le milieu de [AC].
P est le point de [BC] tel que PC = 2 PB.
Q est le point de (AB), extérieur au segment [AB] tel que AQ = 2 QB.
Démontrer que M, P et Q sont alignés.

1) Que dois-je faire ? Calculer ? Démontrer ? Construire ? Transformer ? Résoudre ?
C'est un problème de démonstration, on se reporte à la rubrique COMMENT DEMONTRER QUE

2) Comment le faire ?
Il faut démontrer que des points sont alignés.
On trouve la fiche "Comment démontrer que TROIS POINTS SONT ALIGNES"

Les cadres proposent diverses méthodes, il faut choisir :

CONFIGURATION : N'ayant aucune mesure d'angle, la méthode n'est pas applicable.
Il n'y a pas de droite parallèle à (MP) ou à (MQ) apparente. Cette méthode paraît difficile à appliquer.

VECTEURS : Les données et la conclusion vont se traduire facilement, cette méthode paraît intéressante.

ANALYTIQUE : Il n'y a pas de repère orthogonal apparent, les deux méthodes semblent difficiles à appliquer.

TRANSFORMATIONS : On ne reconnaît pas de configuration connue au niveau seconde/première, ces méthodes semblent difficiles à appliquer.

L'outil raisonnable semble être le vecteur...

Ayant choisi la méthode de résolution, on peut développer la démonstration et répondre à la question posée.

• Il peut être utilisé lors des révisions de contrôles et du bac :

exemple : Si l'utilisateur veut faire le point sur les méthodes pour calculer la valeur exacte d'une intégrale...

Comme tout outil il faut l'utiliser souvent pour le rendre efficace.

L'utilisation fréquente permet aussi de mémoriser les méthodes, s'en servir c'est donc aussi apprendre à s'en passer...

RUBRIQUES :

## 1 - Méthodes générales

## ❶.❶ Comment démontrer une implication ?

(c'est à dire prouver que : si la propriété A est vraie alors la propriété B est vraie)

### *Méthode 1*

En procédant par déductions successives justifiées.
Si on a $A$ alors on a $A_1$ (car... )
si on a $A_1$ alors on a $A_2$ (car... )
....................................
si on a $A_n$ alors on a $B$ (car... )

*Exemples :*

### *Méthode 2*

En procédant par l'absurde
On suppose que $A$ est vraie, que $B$ n'est pas vraie (on contredit le résultat que l'on souhaite démontrer) et on essaie de parvenir à une contradiction.

*Exemples :*

### *Méthode 3*

En procédant par contraposition
On reprend la méthode 1 en montrant que si $B$ n'est pas vérifiée alors $A$ ne l'est pas non plus.

*Exemples :*

## ❶.❷ Comment démontrer une équivalence entre deux propositions A et B ?

*Méthode 1*

En procédant par équivalences justifiées

$A \Leftrightarrow A_1$ (car... ).

$A_1 \Leftrightarrow A_2$ (car... ).

.

.

$A_n \Leftrightarrow B$ (car... ).

*Méthode 2*

En démontrant une double implication
Si on a A alors on a B
Si on a B alors on a A.

*Exemples :*

*Commentaire* :
L'équivalence se cache sous les mots : "équivaut", "si et seulement si", "nécessaire et suffisant", "signifie".

# ❶.❸ Comment démontrer l'égalité de deux ensembles E et F ?

**Méthode 1**

En démontrant que : x appartient à E équivaut à x appartient à F.

*Exemples :*

**Méthode 2**

En démontrant que $E \subset F$ et $F \subset E$ ; c'est à dire
que si x appartient à E, il appartient à F et
que si x appartient à F, il appartient à E.

*Exemples :*

## ❶.❹ Comment démontrer l'unicité d'un objet possédant une certaine propriété ?

*Méthode 1*

En utilisant les théorèmes d'unicité vus dans le cours.

*Exemples :*

*Méthode 2*

En raisonnant par l'absurde : on suppose qu'il existe deux objets différents et on essaie d'arriver à une contradiction.

*Exemples :*

*Méthode 3*

En supposant qu'il existe deux objets et en démontrant que ces objets sont identiques.

*Exemples* :

## ❶.❺ Comment démontrer une égalité $X = Y$ ?

$\boxed{\textit{Méthode 1}}$

En partant de $X$ pour arriver à $Y$
$X = X_1$ (car... )
$X_1 = X_2$ (car... )
..........
$X_n = Y$ (car... )
donc $X = Y$.

$\boxed{\textit{Méthode 2}}$

En partant de $Y$ pour arriver à $X$
$Y = Y_1$ (car... )
..........
$Y_n = X$ (car... )
donc $Y = X$.

$\boxed{\textit{Méthode 3}}$

En partant de $X$, en transformant $X$ on arrive à $Z$
en partant de $Y$, en transformant $Y$ on arrive à $Z$
ainsi $X = Z$ et $Y = Z$ donc $X = Y$.

$\boxed{\textit{Méthode 4}}$

En montrant que $X$ et $Y$ ont même image par une bijection.

*Exemples :*

$\boxed{\textit{Méthode 5}}$ (valable pour les vecteurs, les nombres... )

En montrant que $X - Y = 0$

*Exemples :*

$\boxed{\textit{Méthode 6}}$ (valable pour les nombres)

En montrant que $\dfrac{X}{Y} = 1$ si $Y \neq 0$.

$\boxed{\textit{Méthode 7}}$ (cas particulier de la méthode 4 avec X et Y réels positifs)

En montrant que $X^2 = Y^2$ ou que $\sqrt{X} = \sqrt{Y}$.

$\boxed{\textit{Méthode 8}}$ (cas où X et Y sont fonction de n où n est entier et si les méthodes précédentes ont échouées)

En utilisant la récurrence.

*Exemples :*

*Commentaire* :

$\boxed{\textit{Méthode 9}}$ (cas où X et Y sont deux fonctions définies sur un intervalle I dérivables sur I, $X = f(x)$, $Y = g(x)$ si les méthodes précédentes ont échouées)

En montrant que : $f'(x) = g'(x)$ pour tout $x$ de I
$f(a) = g(a)$ pour un $a$ de I

*Exemples :*

## ❶.❻ Comment démontrer une inégalité ?

### 1 - Du type **$A \leq B$** (ou $f(x) \leq g(x)$)

***Méthode 1***

En partant de $A$ et en allant jusqu'à $B$.
$A \leq A_1$ (car... )
$A_1 \leq A_2$ (car... )
.
.
$A_n \leq B$ (car... ).

***Méthode 2***

En partant d'une hypothèse donnée et en la transformant jusqu'à obtention de $A \leq B$.

*Exemples :*

*Commentaire* :

***Méthode 3***

En montrant que $A - B \leq 0$

*Exemples :*

*Commentaire :*

***Méthode 4***

En utilisant la monotonie d'une fontion f.
($A \leq B \Leftrightarrow f(A) \leq f(B)$ dans le cas où f est croissante)

*Exemples :*

**Méthode 5** (valable éventuellement pour une inégalité du type $f(x) \leq g(x)$ où $f$ et $g$ sont définies et dérivables sur un même intervalle I).

En étudiant la fonction $f - g$ et en montrant à l'aide du tableau de variation que pour tout $x$ de I, $f(x) - g(x) \leq 0$.

*Exemples :*

***Méthode 6*** (cas ou A et B sont fonctions d'un entier n)

En utilisant la récurrence.

*Exemples :*

## 2 - Du type $|f(x)| \leq M$ ou $m \leq f(x) \leq M$. (où f est continue sur un intervalle I)

***Méthode***

En montrant que l'image de I par f est inclus dans l'intervalle $[- M; M]$ ou $[m; M]$.
(pour déterminer f(I) voir CALCULER).

*Exemples :*

## 3 - Du type $m (b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M (b - a)$ (avec $a \leq b$) ou $|f(b) - f(a)| \leq M |b - a|$ (où f est une fonction dérivable sur un intervalle I contenant a et b)

***Méthode***

En montrant que pour tout x de I, $m \leq f'(x) \leq M$ (ou $|f'(x)| < M$) et en utilisant le théorème des accroissements finis.

*Exemples :*

## ❶.❼ Comment démontrer qu'une application f est une bijection de E sur F ?

**Méthode 1**

En montrant que tout élément de l'ensemble d'arrivée F possède un unique antécédent.

*Exemples :*

**Méthode 2** (cas d'une fonction numérique définie sur un intervalle I)

En utilisant : si f est continue sur I et f est strictement monotone sur I alors f est une bijection de I sur f(I).

*Exemples :*

# ❶.❽ Comment démontrer une proposition par récurrence ?

**Méthode**

*1ère étape* :
En formulant clairement la propriété à démontrer.

*2ème étape* :
En démontrant que la propriété est vraie au rang $n_0$.

*3ème étape* :
En démontrant l'hérédité de la propriété : si la propriété est vraie au rang $n$ elle l'est au rang $n + 1$.

*4ème étape* :
En concluant que la propriété est vraie pour tout $n \geq n_0$.

*Exemples :*

## ❶.❾ Comment démontrer l'existence de quelque chose ?

*Méthode 1*

En utilisant les théorèmes du cours.

*Exemples :*

*Méthode 2*

En procédant en 2 phases.
- on suppose l'existence de l'objet et on recherche les conditions nécessaires que vérifie l'objet.
- on vérifie que l'objet vérifiant ces conditions est solution au problème posé.

*Exemples :*

COMMENT DÉMONTRER ?

## 2 - Complexes

## ❷.❶ Comment démontrer qu'un nombre complexe z est réel ?

$\boxed{\textit{Méthode 1}}$

En montrant que $\mathrm{Im}(z) = 0$.

*Exemples :*

$\boxed{\text{Méthode 2}}$

En montrant que $z = \bar{z}$.

*Exemples :*

$\boxed{\textit{Méthode 3}}$

En montrant que $z = 0$ ou $\arg(z) = 0\ (\pi)$.

*Exemples :*

$\boxed{\textit{Méthode 4}}$

En montrant que son point image appartient à l'axe des absisses.

*Exemples :*

## ❷.❷ Comment montrer que z est imaginaire pur ?

*Méthode 1*

En montrant que Re (z) = 0.

*Exemples :*

*Méthode 2*

En montrant que $z = -\bar{z}$

*Exemples :*

*Méthode 3*

En montrant que $z = 0$ ou $\arg(z) = \frac{\pi}{2}\ (\pi)$

*Exemples :*

*Méthode 4*

En montrant que son point image appartient à l'axe des ordonnées.

## 3 - Analyse

## ❸.❶ Comment montrer qu'une courbe admet un centre de symétrie A ?

### 1 - La courbe est la courbe représentative d'une fonction f dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$

**Méthode 1** (si A est l'origine O)

En montrant que f est impaire (O est centre de symétrie).

***Méthode 2***

En se ramenant au cas précédent par changement de repère et de fonctions.

* En se plaçant dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$ où $A(a, a')$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

* En cherchant les formules de changement de repère
$M(X, Y)$ dans $(A, \vec{i}, \vec{j})$, $M(x, y)$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$
$X = x - a \quad Y = y - a'$.

* En écrivant $Y + a' = f(X + a)$ (on obtient $Y = g(X)$).

* En montrant que g est impaire. A est alors centre de symétrie.

### 2 - La courbe est définie paramétriquement dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ $M(x(t), y(t))$

**Méthode** (A = 0)

En montrant que $t \longrightarrow x(t)$ et $t \longrightarrow y(t)$ sont impaires, on montre que la courbe admet O comme centre de symétrie.

*Exemples :*

*Commentaire :*

# ❸.❷ Comment démontrer qu'une courbe admet un axe $(\Delta)$ de symétrie ?

## 1 - La courbe est la courbe représentative d'une fonction f dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$

**Méthode 1** $(\Delta) = (Oy)$

En montrant que la fonction est paire.

**Méthode 2** $(\Delta)$ a pour équation $x = a$

En se ramenant au cas précédent :

* En se plaçant dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$ où $A(a, O)$.

* En cherchant les formules de changment de repère
$M(X, Y)$ dans $(A, \vec{i}, \vec{j})$ et $M(x,y)$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$. $X = x - a \quad Y = y$
(on écrit $Y = f(X + a) = g(X)$).

* En montrant que $g$ est paire.
$(\Delta)$ est alors axe de symétrie.

## 2 - La courbe est définie paramétriquement $M(x(t), y(t))$

**Méthode 3**

En montrant que $t \longrightarrow x(t)$ est paire et $t \longrightarrow y(t)$ impaire alors $Ox$ est axe de symétrie.

**Méthode 4**

En montrant que $t \longrightarrow x(t)$ est impaire et $t \longrightarrow y(t)$ paire alors $Oy$ est axe de symétrie.

## ③.③ Comment démontrer que $\lim\limits_{\blacksquare} f = +\infty$ où $\blacksquare$ est $+\infty$, $a$, $a^+$, $a^-$ ou $-\infty$ ?

**_Méthode 1_**

En utilisant le tableau sur les opérations algébriques (voir tableau général dans "Calculer") et les résultats connus sur les fonctions usuelles.

*Exemples :*

**_Méthode 2_**

En utilisant la composition :

si $f = g \circ h$ et si $\lim\limits_{\blacksquare} h = \blacktriangle$ et $\lim\limits_{\blacktriangle} g = +\infty$ alors $\lim\limits_{\blacksquare} f = +\infty$.

*Exemples :*

**_Méthode 3_**

En minorant $f$ par une fonction $h$ telle que $\lim\limits_{\blacksquare} h = +\infty$.

*Commentaire* : $h$ est très souvent une fonction de référence.

*Exemples :*

**_Méthode 4_**

En calculant $\lim\limits_{\blacksquare} f$ (voir calculer).

| | |
|---|---|
| ❸.❹ | **Comment démontrer que** <br> $\lim_{\blacksquare} f = -\infty$ où $\blacksquare$ est $+\infty$, $a$, $a^+$, $a^-$ ou $-\infty$ |

**Méthode 1**

En utilisant le tableau sur les opérations algébriques (voir tableau général dans "Calculer") et les résultats connus sur les fonctions usuelles.

Dans la rubrique "calculer".

*Exemples :*

**Méthode 2**

En utilisant la composition :

si $f = g \circ h$ et si $\lim_{\blacksquare} h = \blacktriangle$ et $\lim_{\blacktriangle} g = -\infty$ alors $\lim_{\blacksquare} f = -\infty$.

*Exemples :*

**Méthode 3**

En majorant $f$ par une fonction $h$ telle que $\lim_{\blacksquare} h = -\infty$.

*Commentaire* : $h$ est très souvent une fonction de référence.

*Exemples :*

**Méthode 4**

En calculant $\lim_{\blacksquare} f$ (voir calculer)

## ❸.❺ Comment démontrer que $\lim\limits_{■} f = \ell$ où ■ est $+\infty$, a, $a^+$, $a^-$ ou $-\infty$

**Méthode 1**

En utilisant les opérations algébriques sur les limites (voir tableau général) et les résultats connus sur les fonctions usuelles.

**Méthode 2**

En utilisant la composition

si $f = g \circ h$, si $\lim\limits_{■} h = ▲$ et $\lim\limits_{▲} g = \ell$ alors $\lim\limits_{■} f = \ell$.

*Exemples :*

**Méthode 3**

En montrant que $\lim\limits_{x \to ■} | f(x) - \ell | = 0$

*Exemples* :

**Méthode 4**

En utilisant le théorème " de l'encadrement"

si $h \leq f \leq g$ et si $\lim\limits_{■} g = \lim\limits_{■} h = \ell$ alors $\lim\limits_{■} f = \ell$.

*Exemples :*

**Méthode 5**

En calculant $\lim\limits_{■} f$ (voir calculer).

## ❸.❻ Comment démontrer que f est continue en a ?

**Méthode 1**

En montrant que f est dérivable en a.

*Exemples :*

**Méthode 2**

En montrant que f est définie en a et que $\lim_{a} f = f(a)$.

*Exemples :*

**Méthode 3**

En montrant que f est définie en a et que $\lim_{a^+} f = \lim_{a^-} f = f(a)$.

*Exemples :*

## ❸.❼ Comment démontrer qu'une fonction est dérivable en a ?

**Méthode 1**

En utilisant les opérations sur les fonctions dérivables.

**Méthode 2**

En utilisant la composition des fonctions dérivables.

**Méthode 3** (en cas d'échec de *1* et *2*)

En montrant que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie.

*Commentaire* : pour calculer un nombre dérivé : voir calculer.

**Méthode 4**

Dans certains cas, en calculant les nombres dérivés à droite et à gauche en a et en montrant qu'ils sont égaux.

## ❸.❽ Comment démontrer qu'une fonction f admet une primitive sur un intervalle ?

*Méthode*

En démontrant que f est continue sur cet intervalle.

*Commentaire* :

## ❸.❾ Comment démontrer qu'une suite $(U_n) \in \mathbb{N}$ est arithmétique ?

*Méthode 1*

En démontrant qu'il existe un réel $r$ tel que pour tout $n$ entier $U_{n+1} - U_n = r$.

*Méthode 2*

En démontrant qu'il existe $a$ et $r$ tels que pour tout $n$ $U_n = a + nr$.

## ❸.⑩ Comment démontrer qu'une suite $(U_n)$ $n \in \mathbb{N}$ est géométrique ?

*Méthode 1*

En démontrant qu'il existe un réel $q \neq 0$ tel que $U_{n+1} = q\,U_n$ pour tout n.

*Méthode 2*

En démontrant qu'il existe deux réels a et q tels que pour tout entier n $U_n = aq^n$.

| | |
|---|---|
| ❸.❶❶ | **Comment démontrer qu'une suite est croissante ?**<br>(feuille identique pour $U_n$ décroissante) |

### *Méthode 1*

En montrant que $U_n \leq U_{n+1}$ ou que $U_{n+1} - U_n \geq 0$ (voir inégalité) éventuellement par récurrence.

*Exemples :*

*Commentaire :*

### *Méthode 2*

Si $U_n = f(n)$
En montrant que la fonction $f$ est croissante.

*Exemples :*

### *Méthode 3*

Si $(U_n)$ est à termes strictement positifs
En montrant que $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1$.

*Exemples :*

### *Méthode 4*

Dans le cas où $U_{n+1} = f(U_n)$ : en montrant que $x \longmapsto f(x) - x$ est positive.

*Exemples :*

## ❸.❶❷ Comment démontrer qu'une suite **est majorée** ($U_n \leq M$ pour $n \geq n_0$) **ou minorée** ($m \leq U_n$ pour $n \geq n_0$) **ou bornée** ($m \leq U_n \leq M$ pour $n \geq n_0$)

*Méthode 1*

En utilisant les méthodes générales sur les inégalités. (voir méthodes générales)

*Méthode 2*

Si $U_n = f(n)$ en montrant que $f$ est majorée sur $[n_0 ; +\infty[$ (ou minorée, ou bornée)

*Méthode 3* (valable pour montrer que la suite est bornée lorsqu'elle est définie par une relation du type $U_{n+1} = f(U_n)$).

En montrant par récurrence que $m \leq U_n \leq M$.
(l'hérédité est souvent obtenue en montrant que $f([m ; M]) \subset [m ; M]$)

*Exemples :*

# ❸.❶❸ Comment démontrer qu'une suite $(U_n)$ $n \in \mathbb{N}$ a pour limite $+\infty$ ?

**Méthode 1**

En utilisant les opérations sur les suites (voir tableau général.)

**Méthode 2**

En minorant $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par une suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\lim\limits_{+\infty} V_n = +\infty$.

(Si $V_n \leq U_n$ pour $n \geq n_0$, si $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{+\infty} U_n = +\infty$)

*Commentaire* : très souvent $U_n$ est une suite de référence : géométrique avec la raison supérieure et $U_n > 0$ à 1 ou arithmétique avec une raison positive.

**Méthode 3** Si $U_n = f(n)$

En montrant que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

## ❸.❶❹ Comment démontrer qu'une suite est convergente vers $\ell$ ?

**Méthode 1**

En utilisant les opérations sur les suites convergentes (voir tableau général).

**Méthode 2**

En utilisant le théorème de l'encadrement.

(Si $W_n \leq U_n \leq V_n$ et si $\lim\limits_{+\infty} V_n = \lim\limits_{+\infty} W_n = \ell$ alors $\lim\limits_{+\infty} U_n = \ell$)

*Exemples :*

**Méthode 3**

En montrant que $|U_n - \ell| \leq V_n$ où $V_n$ est convergente vers 0 (on a alors $\lim\limits_{+\infty} U_n = \ell$).

*Commentaire :*

**Méthode 4**

Si $U_n = f(n)$

En montrant que $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$.

$\boxed{\textit{Méthode 5}}$

En se ramenant à la méthode 3 par le résultat :
si $|U_n - \ell| < k\,|U_{n-1} - \ell|$ avec $0 < k < 1$ alors $|U_n - \ell| < k^n\,|U_0 - \ell|$.

*Commentaire* : L'inégalité est souvent obtenu dans le cas où $U_{n+1} = f(U_n)$ par l'inégalité des accroissements finis.

$\boxed{\textit{Méthode 6}}$ (permet de justifier mais pas de calculer la limite)

En montrant que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante majorée (ou décroissante minorée).

*Exemples :*

$\boxed{\textit{Méthode 7}}$ (cas d'une suite définie par une relation de récurrence du type $U_{n+1} = f(U_n)$).

* En montrant que $(U_n)$ est convergente (vers une limite $\ell$).
* En montrant que $f$ est continue en $\ell$.
* $\ell$ est alors solution de l'équation $f(x) = x$.

*Commentaire* :On utilise souvent la ***Méthode 6*** pour montrer que la suite $(U_n)$ est convergente.

*Exemples :*

## 4 - Géométrie dans l'espace

# ❹.❶ Comment démontrer que deux plans (P) et (P') sont parallèles ?

## 1 - Géométrie des figures

*Méthode 1*

En montrant que (P) et (P') sont parallèles à un même plan.

*Méthode 2*

En montrant qu'une droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.

*Méthode 3*

En montrant que deux droites sécantes de l'un sont parallèles à deux droites de l'autre.

## 2 - Géométrie vectorielle

*Méthode 1*

En montrant qu'un vecteur normal à l'un est colinéaire à un vecteur normal à l'autre.

*Méthode 2*

En montrant que deux vecteurs directeurs non colinéaires de l'un sont vecteurs directeurs de l'autre.

## 3 - Géométrie analytique

*Méthode*

En montrant que le système constitué par deux équations cartésiennes des plans
* n'admet pas de solutions (plans parallèles disjoints)
* est équivalent à une seule équation (plans confondus)

## ❹.❷ Comment démontrer que deux plans sont perpendiculaires ?

### 1 - Géométrie des figures

*Méthode 1*

En montrant qu'une droite de l'un est orthogonale à l'autre plan.

*Méthode 2*

En montrant qu'une droite orthogonale à l'un est orthogonale à une droite orthogonale à l'autre.

### 2 - Géométrie vectorielle

*Méthode 1*

En montrant qu'un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.

*Commentaire* :

# ❹.❸ Comment démontrer qu'un plan et une droite sont orthogonaux ?

## 1 - Géométrie des figures

*Méthode 1*

En montrant que la droite est orthogonale à deux droites sécantes du plan.

*Méthode 2*

En montrant que la droite est orthogonale à un plan parallèle au plan initial.

*Méthode 3*

En montrant que le plan est médiateur d'un segment porté par la droite.

## 2 - Géométrie vectorielle

*Méthode 1*

En montrant qu'un vecteur directeur de la droite est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan.

*Méthode 2*

En montrant qu'un vecteur directeur de la droite est colinéaire à un vecteur normal du plan.

*Commentaire* :

## ❹.❹ Comment démontrer qu'un plan (P) et une droite (D) sont parallèles ?

### 1 - Géométrie des figures

*Méthode 1*

En montrant que la droite est parallèle à une droite du plan.

*Méthode 2*

En montrant que (D) est orthogonale à une droite orthogonale au plan.

*Méthode 3*

En montrant que (D) et (P) n'ont pas de points communs.

### 2 - Géométrie vectorielle

*Méthode 1*

En montrant qu'un vecteur directeur de (D) est l'un des vecteurs directeurs du plan.

*Méthode 2*

En montrant qu'un vecteur normal du plan est orthogonal à un vecteur directeur de la droite.

## 3 - Géométrie analytique

***Méthode***

En montrant que le système formé par les équations paramétriques de la droite et une équation cartésienne du plan
* n'admet pas de solution alors la droite et les plans sont disjoints.
ou
* admet une infinité de solutions alors la droite est incluse dans le plan.

*Commentaire* :

## ❹.❺ Comment démontrer que quatre points A, B, C, D distincts 2 à 2 sont coplanaires ?

### 1 - Géométrie des figures

*Méthode 1*

En montrant que (AB) et (CD) sont sécantes ou parallèles.

*Méthode 2*

En montrant que l'un des points appartient au plan formé par les trois autres (si les 3 points ne sont pas alignés).

*Méthode 3*

En montrant qu'ils appartiennent au plan médiateur d'un même segment.

### 2 - Géométrie vectorielle

*Méthode 4*

En montrant qu'il existe deux nombres réels a et b tels que $\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{AC} + b\,\overrightarrow{AD}$.

### 3 - Géométrie analytique

*Méthode 5*

En traduisant analytiquement la méthode 2 :
- on recherche une équation du plan passant par les 3 points non alignés
- on vérifie que les coordonnées du $4^{\text{ième}}$ satisfont l'équation.

## ❹.❻ Comment démontrer qu'une base orthonormée $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est directe ?

***Méthode***

En montrant que $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

# ❹.❼ Comment démontrer que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ?

## 1 - Géométrie vectorielle

*Méthode 1*

En montrant que l'on peut trouver k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$.

*Méthode 2*

En montrant que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

## 2 - Géométrie analytique

En traduisant analytiquement la méthode 1 ou la méthode 2.

## ❹.❽ Comment démontrer qu'un plan est médiateur d'un segment [AB] ?

**Méthode 1**

En montrant que le plan est orthogonal au segment en son milieu.

**Méthode 2**

En montrant que A et B sont équidistants de trois points non alignés du plan.

**Méthode 3**

En montrant que B est l'image de A par la réflexion du plan.

## 5 - Géométrie plane



COMMENT DÉMONTRER ?

# ❺.❶ Comment démontrer que trois droites sont concourantes ?

## 1 - Géométrie des figures

*Méthode 1*

En montrant que ces trois droites sont les trois hauteurs ou trois médiatrices ou trois médianes ou trois bissectrices d'un triangle.

*Méthode 2*

En montrant que l'une des droites passe par le point d'intersection des deux autres.

## 2 - Géométrie analytique

**Méthode** (traduction de la méthode 2)

En recherchant des équations des trois droites et en prouvant que les coordonnées du point d'intersection de deux de ces droites satisfont une équation de la troisième.

## 3 - Géométrie des transformations

*Méthode*

En montrant que ces trois droites sont les images de trois droites concourantes par une isométrie ou une similitude directe.

# ❺.❷ Comment démontrer que deux droites sont parallèles ?

## 1 - Géométrie des figures

*Méthode 1*

En utilisant les relations parallélisme - orthogonalité.

*Méthode 2*

En utilisant la réciproque du théorème de Thalès.

*Méthode 3*

En utilisant les configurations classiques (parallélogrammes, trapèzes... ).

## 2 - Géométrie vectorielle

*Méthode*

En montrant qu'un vecteur directeur de l'une est colinéaire à un vecteur directeur de l'autre.

## 3 - Géométrie analytique

*Méthode*

En recherchant des équations des droites et en prouvant :
* qu'elles ont même cœfficient directeur,
* que des vecteurs directeurs sont colinéaires.

## 4 - Géométrie complexe

*Méthode*

En montrant que $\arg\left(\frac{d - c}{b - a}\right) = 0 \ (\pi)$ où :
D(d) C(c) sont deux points distincts de la première droite
B(b) A(a) sont deux points distincts de la deuxième droite.

## 5 - Géométrie des transformations

*Méthode 1*

En montrant que les droites sont les images de deux droites parallèles par une similitude directe ou une isométrie.

*Méthode 2*

En montrant que l'une est l'image de l'autre par une translation, une symétrie centrale ou une homothétie.

## 6 - Géométrie des angles

En montrant que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0 \ (\pi)$ en utilisant les relations angulaires.

## ➄.➂ Comment démontrer que l'on a deux droites perpendiculaires ?

### 1 - Géométrie des figures

*Méthode 1*

En utilisant les relations parallélisme - orthogonalité.

*Méthode 2*

En appliquant la réciproque du théorème de Pythagore dans un triangle.

*Méthode 3*

En utilisant les configurations classiques (hauteur d'un triangle, médiatrice d'un segment, tangente à un cercle, triangle inscrit dans un demi-cercle...).

### 2 - Géométrie vectorielle

*Méthode*

En montrant qu'un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre.

### 3 - Géométrie analytique

*Méthode*

En recherchant des équations des droites et en prouvant :
* que le produit des coéfficients directeurs est - 1,
* que le produit scalaire des vecteurs directeurs est nul.

## 4 - Géométrie complexe

*Méthode*

En montrant que $\arg\left(\frac{d - c}{b - a}\right) = \frac{\pi}{2}$ $(\pi)$ où $D(d)$ $C(c)$ sont deux points distincts de la première droite et $B(b)$ et $A(a)$ sont deux points distincts de la seconde droite.

## 5 - Géométrie des transformations

*Méthode 1*

En montrant que les droites sont les images de deux droites perpendiculaires par une similitude directe ou une isométrie.

*Méthode 2*

En montrant que l'une est l'image de l'autre par une rotation ou une similitude directe d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$ $(2\pi)$.

## 6 - Géométrie des angles

*Méthode*

En montrant que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2}$ $(\pi)$ à l'aide des relations angulaires.
(Angles des triangles isocèles, équilatéraux - Somme des angles d'un triangle. Angles inscrits et angles au centre... ).

# 5 . 4 Comment démontrer que trois points A, B et C deux à deux distincts sont alignés ?

## 1 - Géométrie des figures

*Méthode 1*

En montrant que les droites (AB) et (AC) sont parallèles.

*Méthode 2*

En montrant que l'un des points appartient à la droite passant par les deux autres.

## 2 - Géométrie vectorielle

*Méthode*

En montrant que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

## 3 - Géométrie analytique

*Méthode 1*

En cherchant une équation de la droite (BC) et en vérifiant que les coordonnées de A satisfont cette équation.

*Méthode 2*

En prouvant que $\det(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}) = 0$. (traduction de la colinéarité)

## 4 - Géométrie complexe

**_Méthode_**

En montrant que $\arg\left(\frac{c - a}{b - a}\right) = 0 \ (\pi)$ $(a \neq b \quad a \neq c)$.

En montrant que $\frac{c - a}{b - a}$ est réel.

## 5 - Géométrie des transformations

**_Méthode 1_**

En montrant que A, B et C sont les images de trois points alignés par une similitude directe ou une isométrie.

**_Méthode 2_**

En montrant que B est l'image de C par une homothétie de centre A.

## 6 - Géométrie des angles

**_Méthode_**

En montrant que $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = 0 \ (\pi)$.

# ⑤.⑤ Comment démontrer que quatre points distincts deux à deux sont cocycliques ?

## 1 - Géométrie des figures

**Méthode 1**

En montrant qu'il existe O tel que $OA = OB = OC = OD$.

**Méthode 2**

En montrant que l'un des points appartient au cercle passant par les trois autres.

## 2 - Géométrie analytique

En traduisant l'une des méthodes précédentes.

## 3 - Géométrie des angles

**Méthode**

En montrant que $2\,(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 2\,(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})\ \ (2\,\pi)$.

ou $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})\ \ (\pi)$.

(Cas particulier : En recherchant deux triangles rectangles ayant leur hypoténuse commune)

## ❺.❻ Comment démontrer que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ?

***Méthode 1***

En démontrant que l'on peut trouver k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$.

***Méthode 2***

En démontrant que le déterminant $(\det(\vec{u}\ ,\ \vec{v}))$ est nul.

# ❺.❼ Comment démontrer que deux segments ont la même longueur ?

*Méthode générale* voir comment démontrer une égalité.

## 1 - Géométrie des figures :

*Méthode 1*

En calculant les longueurs.

*Méthode 2*

En utilisant les configurations (parallélogrammes, losanges, carrés, rectangles, triangles isocèles ou équilatéraux ou rectangles).

*Méthode 3*

En utilisant les théorèmes de Thalès, Pythagore ou la trigonométrie.

## 2 - Géométrie analytique

*Méthode*

En calculant les longueurs.

## 3 - Géométrie complexe

*Méthode*

En montrant que les modules $|d - c|$ et $|b - a|$ sont égaux (où A(a), B(b), C(c) et D(d)).

## 4 - Géométrie des transformations

En montrant que l'un des segments est image de l'autre par une isométrie.

## ❺.❽ Comment démontrer que deux angles orientés sont égaux ?

**Méthode 1** (voir Méthode générale)

**Méthode 2**

En utilisant les relations angulaires (angles inscrits, angles au centre, somme des angles d'un triangle... ).

**Méthode 3**

En montrant que l'un est image de l'autre par un déplacement ou une similitude directe.

# ❺.❾ Comment démontrer qu'un quadrilatère ABCD est un carré ?

## 1 - Géométrie des figures

*Méthode 1*

En montrant que c'est un losange avec un angle droit.

*Méthode 2*

En montrant que c'est un rectangle avec deux côtés consécutifs égaux.

## 2 - Géométrie complexe

*Méthode*

En montrant que $c - d = b - a = i\,(c - b)$
ou $-i\,(c - b)$ (ou (A(a) B(b) C(c) D(d))

## 3 - Géométrie des transformations

*Méthode 1*

En montrant qu'il existe une rotation de centre O (point d'intersection des diagonales) d'angle $\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ ou $-\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ transformant $A \longrightarrow B$, $B \longrightarrow C$, $C \longrightarrow D$, $D \longrightarrow A$.

## ❺.⑩ Comment démontrer qu'un triangle est équilatéral ?

### 1 - Géométrie des figures

**Méthode**

En démontrant qu'il a trois côtés de même longueur, ou trois angles égaux, ou des angles égaux à $\pm\frac{\pi}{3}$.

*Commentaire* :
Pour calculer les longueurs ou angles (voir fiche calculer une longueur).

### 2 - Géométrie complexe

**Méthode**

Si A(a) B(b) C(c).
En démontrant $c - a = e^{\pm i\pi/3}(b - a)$.

### 3 - Géométrie des transformations

**Méthode 1**

En démontrant que la rotation de centre un sommet d'angle $\pm\frac{\pi}{3}$ $(2\pi)$ transforme le deuxième sommet en le troisième.

**Méthode 2**

En démontrant que le centre de gravité est centre d'une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ (ou $-\frac{2\pi}{3}$) $(2\pi)$ transformant $A \longrightarrow B$, $B \longrightarrow C$, $C \longrightarrow A$.

# ❺.❶❶ Comment démontrer qu'un triangle est rectangle isocèle ?

## 1 - Géométrie des figures

*Méthode*

En montrant qu'il est rectangle (voir 5.1) et isocèle (voir fiche calculer une longueur).

## 2 - Géométrie des angles

*Méthode*

En calculant les angles.

## 3 - Géométrie complexe

Si A(a) B(b) C(c).
En démontrant $c - a = \pm i \ (b - a)$ (ou une relation analogue).

## 4 - Géométrie des transformations

*Méthode 1*

En démontrant que la rotation de centre un sommet d'angle $\pm \frac{\pi}{2} \ (2\pi)$ transforme le deuxième sommet en le troisième.

*Méthode 2*

En démontrant que la similitude de centre un sommet d'angle $\pm\frac{\pi}{4} \ (2\pi)$ de rapport $\sqrt{2}$ (ou $\frac{1}{\sqrt{2}}$) transforme le deuxième sommet en le troisième.

COMMENT RESOUDRE ?

COMMENT RESOUDRE ?

## 1 - Méthodes générales en géométrie

## ❶.❶ Comment résoudre un problème de démonstration en géométrie ?

En suivant le plan :

**a/** Que demande t-on ?

**b/** Quels peuvent être les outils ?

- vecteurs,
- géométrie des figures,
- transformations,
- les complexes,
- l'analytique,
- les angles.

**c/** Comment choisir l'outil pour résoudre un problème de géométrie ?
Il faut s'assurer que données et conclusion se traduisent facilement à l'aide de l'outil choisi (voir transformer).

# ❶.❷ Comment résoudre un problème de lieu ?

**_Méthode 1_**

En se ramenant à lieu connu (voir déterminer - calculer)

*Commentaire* :

**_Méthode 2_**

* En identifiant ce qui bouge et ce qui est fixe.

* En conjecturant l'ensemble $\mathfrak{L}$ cherché.

* En montrant que $\mathfrak{L}$ est inclus dans un ensemble $\mathfrak{D}$.

* En montrant que tous les points de $\mathfrak{D}$ conviennent (réciproque).

*Remarque* : souvent, on prouve que $\mathfrak{L}$ est l'image d'un ensemble fixé par une transformation usuelle. Dans ce cas l'étude de la réciproque est superflue.

*Exemples :*

## ❶.❸ Comment résoudre un problème de construction ?

*Méthode*

**En distinguant les 2 phases :**

**a/** phase analyse
* En supposant le problème résolu.

* En analysant la figure obtenue et en repérant comment les éléments à construire sont liés avec les éléments fixes de la figure (c'est la recherche de conditions que doivent nécessairement vérifier les éléments à construire).

**b/** phase synthèse
En partant des éléments donnés, on effectue la construction en justifiant (très souvent des discussions apparaissent).

*Exemples :*

## 2 - Equations

| ❷.❶ | **Comment résoudre l'équation** <br> **$az^2 + bz + c = 0$ dans $\mathbb{C}$ ?** <br> (a, b, c, réels $a \neq 0$) |
| --- | --- |

*Méthode*

* En calculant $\Delta = b^2 - 4ac$.
* En appliquant les formules :

Si $\Delta > 0$ $\quad z = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Si $\Delta = 0$ $\quad z = -\dfrac{b}{2a}$.

Si $\Delta < 0$ $\quad z = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

## ❷.❷ Comment résoudre $z^n = 1 \quad z \in \mathbb{C}$ ?

**Méthode**

En écrivant z sous forme trigonométrique puis en utilisant la formule de Moivre.

*Exemples :*

# ❷.❸ Comment résoudre $z^n = Z$ ?

*Méthode 1*

En posant $z$ sous forme trigonométrique, en écrivant $Z$ sous forme trigonométrique et en utilisant la formule de Moivre.

*Exemples :*

*Methode 2*

* En cherchant une solution particulière $z_0$.

* En se ramenant à $u^n = 1$ où $u = \dfrac{z}{z_0}$ .

*Exemples :*

## ❷.❹ Comment résoudre le système $\begin{cases} a + b = S \\ ab = P \end{cases}$ ?

**_Méthode_**

En montrant que les solutions du système sont celles de l'équation
$X^2 - SX + P = 0$.

*Exemples :*

# ❷.❺ Comment résoudre une équation du type $a \cos x + b \sin x = c$ ?

**Méthode**

En se ramenant à une équation du type $\cos(x - \mathscr{C}) = c'$ (voir transformer).

*Exemples :*

## ❷.❻ Comment résoudre une équation du type $\sin(A(x)) + \cos(B(x)) = 0$ ?

### *Méthode 1*

En factorisant à l'aide des formules

$\cos p + \cos q$
$\sin p + \sin q$
$\cos p + \sin q$

*Exemples :*

### *Méthode 2*

En se ramenant à $\sin(A(x)) = \sin(C(x))$

# ❷.❼ Comment résoudre une équation différentielle du type $ay'' + by' + cy = 0$ ?

**Méthode 1**

**a/** $a = 0 \quad b \neq 0$
l'équation est du type $y' - Ay = 0$
les solutions sont de la forme $y = Ke^{Ax}$.

**b/** $a \neq 0$
* En résolvant l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$.

* On appelle $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $\Delta > 0$ les solutions sont de la forme $y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ où $r_1$ et $r_2$ sont les 2 racines réelles de $ar^2 + br + c = 0$

Si $\Delta = 0$ les solutions sont de la forme $y = (A + Bx)\, e^{rx}$
où $r$ est la racine double.

Si $\Delta < 0$ les solutions sont de la forme
$y = (A \sin \beta x + B \cos \beta x)\, e^{\alpha x}$ où $r = \alpha \pm i\beta$ sont les solutions de l'équation caractéristique.

Remarque : $y$ s'écrit aussi $A \cos(\beta x + \varphi)\, e^{\alpha x}$

*Exemples :*

## ❷.❽ Comment résoudre un système linéaire ?

***Méthode 1***

En utilisant les techniques d'additions ou (et) de substitution.

*Exemples :*

***Méthode 2***

En utilisant la méthode du pivot de GAUSS.

*Exemples :*

COMMENT RESOUDRE ?

## 3 - Inéquations

## ❸.❶ Comment résoudre $\cos(A(x)) > C$ ?

**Méthode**

∗ Si $c > 1$ pas de solution.

∗ Si $-1 \leq c \leq 1$ en utilisant le cercle trigonométrique :
$-x_0 + 2k\pi < A(x) < x_0 + 2k\pi$.

∗ Si $c < -1$ toute valeur $x$ pour laquelle $A(x)$ existe, est solution.

*Exemples :*

*Commentaire* :

## ❸.❷ Comment résoudre a cos x + b sin x > C ?

*Méthode*

En se ramenant à une inéquation du type $\cos(x - \mathscr{C}) > c'$ (voir transformer).

*Exemples :*

COMMENT RESOUDRE ?

## 4 - Dénombrement

# ④.❶ Comment résoudre un problème de dénombrement ?

**_Méthode_**

En se ramenant à un modèle connu : celui des tirages.

* simultanés. Eléments distincts, l'ordre n'intervient pas : modèles des combinaisons ($C_n^p$).

* successifs et sans remise. Eléments distincts, l'ordre intervient : modèles des arrangements ($A_n^p$).

* successifs et avec remises. Eléments non nécessairement distincts et l'ordre intervient : modèles des p-uplets ($n^p$).

*Commentaire* : Dans certains cas plus complexes, on utilise la méthode précédente à plusieurs niveaux.

*Exemples :*

## 1 - Analyse

| ❶.❶ | **Comment calculer $\lim\limits_{\blacksquare} f$ ?** <br> **($\blacksquare$ est $+\infty$, $a$, $-\infty$, $a^+$, $a^-$)** |
|---|---|

***Méthode 1***

En utilisant les opérations (voir tableau) et composition.

***Méthode 2***

En démontrant que $\lim\limits_{\blacksquare} f = +\infty$ ; $-\infty$ ou $\ell$ (voir démontrer).

***Méthode 3***

En se ramenant à des limites connues à l'aide de certaines techniques.

**a/** En factorisant les termes prépondérants.

*Exemples :*

**b/** En effectuant des changements de voisinage d'étude

$$\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim_{x \mapsto -\infty} f(-x).$$

$$\lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim_{x \mapsto +\infty} f(-x).$$

$$\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim_{h \mapsto O^+} f\left(\frac{1}{h}\right).$$

$$\lim_{x \mapsto O^+} f(x) = \lim_{h \mapsto +\infty} f\left(\frac{1}{h}\right).$$

$$\lim_{x \mapsto 0} f(x) = \lim_{h \mapsto -\infty} f(\frac{1}{h}).$$

$$\lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim_{h \mapsto 0} f(\frac{1}{h}).$$

$$\lim_{x \mapsto a} f(x) = \lim_{h \mapsto 0} f(a + h).$$

$$\lim_{x \mapsto a^+} f(x) = \lim_{h \mapsto 0^+} f(a + h).$$

$$\lim_{x \mapsto a^-} f(x) = \lim_{h \mapsto 0^-} f(a +h).$$

**c/** Lorsque les méthodes précédentes ont échouées, et pour les fonctions irrationnelles en utilisant la quantité conjuguée.

*Exemples :*

**d/** Pour les fonctions trigonométriques, en utilisant les formules de duplication ou d'addition.

*Exemples :*

**e/** En faisant apparaître un taux d'accroissement du type

$$\lim_{x \mapsto a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{ou} \quad \lim_{h \mapsto 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

*Exemples :*

**f/** En se ramenant à une limite connue à l'aide de certaines techniques :

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \text{Ln}\, x = +\infty$ $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} \text{Ln}\, x = -\infty$ $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} e^x = +\infty$ $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} e^x = 0.$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{\text{Ln}\, x}{x} = 0$ $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} xe^x = 0$ $\lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{\text{Ln}\,(1+h)}{h} = 1$

$(\alpha > 0)$ $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{\text{Ln}\, x}{x^\alpha} = 0$ $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} x^\alpha \,\text{Ln}\, x = 0.$

$\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$ $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ (cas particulier du **e/**)

*Exemples :*

**g/** En utilisant les propriétés algébriques des fonctions Ln et exponentielles.

*Exemples :*

## Opérations sur les limites

$\ell$ et $\ell'$ sont des réels, symbole ■ est à remplacer par a ou $a^+$ ou $+\infty$ ou $-\infty$.

$\lim\limits_{■} f = 0_{(+)}$ (respectivement $0_{(-)}$) signifie que f tend vers 0 par valeurs positives en ■ (respectivement par valeurs négatives).

| Si $\lim\limits_{■} f =$ | Si $\lim\limits_{■} g =$ | Alors |
|---|---|---|
| | | $\lim\limits_{■} (f+g) =$ |
| $\ell$ | $\ell'$ | $\ell + \ell'$ |
| $\ell$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $\ell$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $+\infty$ | $-\infty$ | pas de résultat général |
| | | $\lim\limits_{■} (fg) =$ |
| $\ell$ | $\ell'$ | $\ell\ell'$ |
| $\ell \neq 0$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $+\infty$ ou $-\infty$ (selon $\ell$) |
| $+\infty$ ou $-\infty$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $+\infty$ ou $-\infty$ (règle signes) |
| 0 | $+\infty$ ou $-\infty$ | pas de résultat général |
| | | $\lim\limits_{■} \frac{f}{g} =$ |
| $\ell$ | $\ell' \neq 0$ | $\frac{\ell}{\ell'}$ |
| $\ell$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | 0 |

| | | |
|---|---|---|
| $\ell \neq 0$ ou $+\infty$ ou $-\infty$ | $0(+)$ ou $0(-)$ | $+\infty$ ou $-\infty$ (règle des signes) |
| $+\infty$ ou $-\infty$ | $\ell' \neq 0$ | |
| $\ell \neq 0$ ou $+\infty$ ou $-\infty$ | 0 mais ni $0(+)$ ni $0(-)$ | pas de limite |
| 0 | 0 | pas de résultat général |
| $+\infty$ ou $-\infty$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | |

## ❶.❷ Comment calculer une équation d'une droite asymptote à une courbe représentative d'une fonction f ?

**Méthode 1** (asymptote verticale)

Si $\lim\limits_{\substack{a \\ \text{ou} \\ a^+ \\ \text{ou} \\ a^-}} f = \begin{matrix} +\infty \\ \text{ou} \\ -\infty \end{matrix}$ alors $x = a$ est asymptote

**Méthode 2** (asymptote horizontale)

Si $\lim\limits_{\substack{+\infty \\ \text{ou} \\ -\infty}} f = \ell$ alors $y = \ell$ est asymptote

**Méthode 3** (asymptote oblique)

En conjecturant une équation de l'asymptote à l'aide de la calculatrice

$y = ax + b$ et en montrant $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$.

**Méthode 4** (dernier recours)

En montrant que : $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ $\lim\limits_{+\infty} (f(x) - ax) = b$ (où a et b réels finis) alors $y = ax + b$

est asymptote en $+\infty$ (idem en $-\infty$).

## ❶.❸ Comment calculer le nombre dérivé en a d'une fonction f ?

*Méthode 1*

En utilisant les théorèmes sur les opérations et compositions de fonctions dérivables en un point, puis en utilisant les formules usuelles (voir tableau)

*Méthode 2*

En revenant à la définition $\left( \lim\limits_{x \mapsto a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)$

*Méthode 3*

En calculant les nombres dérivés à droite et à gauche en a et en montrant qu'ils sont égaux.

*Commentaire* :

# Tableau des dérivées usuelles

| Domaine de dérivabilité | f <br> $x \longrightarrow$ | f' <br> $x \longrightarrow$ |
|---|---|---|
| $\mathbb{R}$ | $x^n$ | $n\, x^{n-1} \quad n \in \mathbb{N}$ |
| $\mathbb{R}$ | $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $\mathbb{R}$ | $\sin x$ | $\cos x$ |
| $]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi[\ k \in \mathbb{Z}$ | $\tan x$ | $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ |
| $\overset{+}{\mathbb{R}}_*$ ou $\overset{-}{\mathbb{R}}_*$ | $\frac{1}{x^n}$ | $-\frac{n}{x^{n+1}}$ |
| $\overset{*}{\mathbb{R}}_+$ | $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $\overset{*}{\mathbb{R}}_+$ | $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ |
| $\mathbb{R}$ | $e^x$ | $e^x$ |
| $\mathbb{R}$, $a > 0$ | $a^x$ | $(\mathrm{Ln}\, a)\, a^x$ |
| $\overset{*}{\mathbb{R}}_+$ $\alpha \in \mathbb{R}$ | $x^\alpha$ | $\alpha\, x^{\alpha - 1}$ |
| A déterminer <br> à <br> l'aide des théorèmes | $u(x)\, v(x)$ | $u'(x)\, v(x) + v'(x)\, u(x)$ |
| | $\frac{u(x)}{v(x)}$ | $\frac{u'(x)\, v(x) - v'(x)\, u(x)}{(v(x)^2)}$ |
| | $\sqrt{f}$ | $\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ |
| | $e^{u(x)}$ | $u'(x)\, e^{u(x)}$ |
| | $\ln(f(x))$ | $\frac{f'(x)}{f(x)}$ |
| | $(g \circ u)(x)$ | $g'(u(x))\, u'(x)$ |

## ❶.❹ Comment calculer une équation d'une tangente à une courbe ?

*Méthode 1*

Si la courbe est la courbe représentative d'une fonction f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Tangente non verticale :
En montrant que f est dérivable en $x_0$, et en calculant
$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ on obtient une équation de la tangente en $M_0\ (x_0, f(x_0))$

Demi-tangente verticale : $x = x_0$

En montrant que $\lim\limits_{x \mapsto x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ ou $-\infty$,

ou

$x \mapsto x_0^-$

*Méthode 2*

Si la courbe est définie paramétriquement dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
$\overrightarrow{OM} = x(t)\ \vec{i} + y(t)\ \vec{j}$.

En montrant que $t \rightarrow x(t)$ et $t \rightarrow y(t)$ sont dérivables en $t_0$ et que $(x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0, 0)$ ; on obtient alors une équation en écrivant que cette tangente passe par $M_0(x(t_0), y(t_0))$ et a pour vecteur directeur $\vec{v}\ (t_0)\ (x'(t_0), y'(t_0))$.

| ❶.❺ | **Comment déterminer l'image d'un intervalle I par une fonction continue f ?** |
|---|---|

*Méthode 1* (Si f est de plus strictement monotone)

* Si $I = [a, b]$ alors l'image est $[f(a), f(b)]$ ou $[f(b), f(a)]$

* Si $I = ]a, b[$ alors on cherche $\lim\limits_{a} f$ et $\lim\limits_{b} f$ (éventuellement a et b peuvent être infinis).

* Si $I = ]a, b]$ ou $[a, b[$ ...

*Exemples :*

*Méthode 2* (Si f est dérivable)

En étudiant les variations de f et en utilisant le tableau de variation.

*Exemples :*

*Commentaire* :

| ❶.❻ | Comment déterminer une primitive d'une fonction continue ? |
|---|---|

**Méthode 1**

En utilisant les primitives usuelles (lecture inverse du tableau des dérivées)

**Méthode 2**

En reconnaissant que la primitive est celle d'une fonction de la forme

$uv' + vu'$ ou $\dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ ou $(f' \circ u) \times u'$ ou $\dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$ ou $f' f^{n-1}$ ou $\dfrac{f'}{f}$ ou $f' e^{f}$

*Exemples :*

**Méthode 3**

En utilisant une intégration par parties.

$x \to \int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de f (si f est continue).

Si $f = u'v$ $\int_a^x f(t)\,dt = [u(t)\,v(t)]_a^x - \int_a^x u(t)v'(t)\,dt$ où u et v sont dérivables
u' et v' sont continues.

*Exemples :*

**Méthode 4** (cas particulier d'une fonction trigonométrique)

En linéarisant pour une fonction du type $x \to \cos^p x \sin^q x$.
(voir comment transformer 3.2)

## ❶.❼ Comment calculer la valeur exacte d'une intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ ?

(f intégrable)

**Méthode 1**

En utilisant les primitives.

*Exemples :*

**Méthode 2**

En utilisant l'intégration par parties.

*Exemples :*

*Commentaire* :

**Méthode 3**

En utilisant la linéarité de l'intégrale

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta f(t))\,dt = \alpha \int_a^b f(t)\,dt + \beta \int_a^b g(t)\,dt.$$

**Méthode 4**

En utilisant la relation de Chasles

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

*Commentaire* :

# ❶.❽ Comment calculer une valeur approchée de $\int_a^b f(t)\,dt$ ?

**Méthode 1**

En encadrant f par deux fonctions g et h dont on sait calculer les intégrales

*Exemples :*

**Méthode 2**

En utilisant la méthode des rectangles

$$S_n = \frac{b-a}{n}\left(f(a) + f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + \ldots + f\left(a + (n-1)\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

$$\lim_{n \mapsto +\infty} S_n = \int_a^b f(t)\,dt.$$

(L'erreur commise en remplaçant $\int_a^b f(t)\,dt$ par $S_n$ est de l'ordre de $\frac{1}{n}$ ).

*Commentaire* :
Il existe bien d'autres méthodes.

## ❶.❾ Comment calculer la limite d'une suite ?

*Méthode*

En montrant qu'elle est convergente (voir démontrer).

## 2 - Géométrie plane et espace

## ❷.❶ Comment calculer une longueur AB ?

*Méthode 1* (valable dans le plan ou l'espace)

En utilisant le thèorème de Pythagore ou de Thalès.

*Méthode 2* (valable dans le plan et l'espace)

En utilisant la trigonométrie.

*Méthode 3* (analytique valable dans le plan et l'espace muni d'un repère orthonormé)

En utilisant $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

ou $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$ .

*Méthode 4* (valable dans le plan complexe)

En utilisant $AB = |b - a|$ où $b$ et $a$ sont les affixes respectives de B et de A.

## ❷.❷ Comment calculer un angle (géométrique ou orienté de 2 vecteurs) ?

### *Méthode 1*

En utilisant les angles géométriques (somme des angles d'un triangle, angles d'un triangle rectangle ou isocèle ou équilatéral , angles alternes - internes et angles transformés pas une isométrie ou une similitude directe).

### *Méthode 2* (valable dans le plan)

En utilisant les angles orientés de vecteurs (somme des angles d'un triangle, angles d'un triangle rectangle ou isocèle ou équilatéral , angles transformés pas une isométrie ou une similitude directe, angles inscrits ou au centre, relation de Chasles).

### *Méthode 3* (analytique, valable dans le plan orienté)

En utilisant le produit scalaire et le déterminant

$$\sin(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}$$

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}$$

### *Méthode 4*

En utilisant les points cocycliques.

$\boxed{\textit{Méthode 5}}$ (complexe, valable dans le plan complexe)

En utilisant les arguments $\vec{v}(z)$ $\vec{v'}(z')$ $(\vec{v},\vec{v'}) = \arg\left(\frac{z'}{z}\right)\ (2\pi)$

*Commentaire* : En particlulier A(a) B(b) C(c) (b ≠ a et c ≠ a)
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{c - a}{b - a}\right)\ (2\pi)$

*Exemples :*

$\boxed{\textit{Méthode 6}}$

En utilisant la formule d'Al-Kashi

$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\,\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\vec{u}, \vec{v})$

*Exemples :*

## ❷.❸ Comment calculer une aire ?

**Méthode 1**

En utilisant les formules connues si on possède les éléments.

*Exemples :*

**Méthode 2** (aire d'un parallélogramme ABDC dans un repère du plan orienté)

En calculant $|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|$.

**Méthode 3**

En utilisant les transformations.

*Commentaire* :
* Les isométrie conservent les aires.

* Les similitudes directes (donc les homothéties) de rapport k les multiplient par $k^2$.

**Méthode 4** (valable dans le plan)

En utilisant le calcul intégral.

*Commentaire* :

**Méthode 5** (valable dans l'espace orienté pour calculer l'aire d'un parallélogramme ABDC)

En utilisant le produit vectoriel : $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$.

## 3 - Géométrie dans l'espace

| | |
|---|---|
| **❸.❶** | **Comment déterminer une (ou des) équation d'un plan (P) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ?** |

**Si on a 1 point A et 2 vecteurs directeurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ :**

*Méthode 1* (équations paramétriques)

En écrivant que : $M \in P \Leftrightarrow$ il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que
$\overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$.

*Méthode 2* (équation cartésienne)

En cherchant un vecteur normal $\vec{w}$ à (P) et en écrivant
$M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{w} = 0$ $(\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v})$.

**Si on a 1 point A et un vecteur normal $\vec{w}$ :**

*Méthode 3*

En écrivant $M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{w} = 0$.

**Si on a 3 points :**

*Méthode 4*

En se ramenant aux méthodes 1, 2 ou 3.

*Méthode 5*

* En écrivant que les coordonnées des points vérifient une équation du type $ax + by + cz + d = 0$.

* En résolvant le système de 3 équations à 3 inconnues obtenues.

*Commentaire* :

## ❸.❷ Comment déterminer les équations paramétriques d'une droite ?

**$\mathcal{D}$ est déterminée par 1 point A et un vecteur $\vec{u}$ :**

*Méthode 1*

En écrivant que : $M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\ \vec{u}$.

**$\mathcal{D}$ est déterminée par 2 points A et B :**

*Méthode 2*

En se ramenant au cas précédent.

**$\mathcal{D}$ est déterminée par des équations cartésiennes de 2 plans sécants en $\mathcal{D}$ :**

*Méthode 3*

$ax + by + cz + d = 0$

$a'x + b'y + c'z + d' = 0$

En recherchant deux des variables (par exemple x et y) en fonction de la troisième (z).

Exemple :

## ❸.❸ Comment déterminer un vecteur normal à un plan (P) ?

**_Méthode 1_**

A l'aide du produit vectoriel : si on connait 2 vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires du plan, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est normal à (P).

**_Méthode 2_**

En utilisant une équation cartésienne du plan.

Si (P) a pour équation $ax + by + cz + d = 0$, alors

$\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan.

# 4 - Complexes

## ❹.❶ Comment calculer l'affixe d'un point C ?

**On connait A(a), B(b), AB, AC, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \theta \ (2\pi)$ :**

***Méthode 1***

En utilisant le fait que l'on passe de B à C par une rotation d'angle $\theta$, de centre A suivi d'une homothétie de centre A de rapport $\frac{AC}{AB}$ donc $c - a = \frac{AC}{AB}(\cos\theta + i \sin\theta)(b - a)$.

*Commentaire :*

* triangle rectangle isocèle.

* triangle équilatéral.

***Méthode 2***

En utilisant la forme complexe des similitudes directes.
(Voir méthode 1)

*Exemples :*

# 5 - Géométrie plane

# ❺.❶ Comment déterminer les éléments d'une similitude directe ?

**Méthode 1**

En utilisant les résultat sur les compositions de similitudes.

si f = so s' et s et s' sont deux similitudes, alors f est une similitude
- de rapport le produit des rapports de s et s'
- d'angles la somme des angles de s et s'
(dans le cas où f n'est pas une translation, on cherche alors un point invariant par f).

**Méthode 2**

En utilisant les nombres complexes.

L'expression complexe d'une similitude est
$M(z) \mapsto M'(z')$ avec $z' = az + b$.
- le rapport de s est $|a|$
- son angle à pour mesures $\arg(a)$ $(2\pi)$
- son centre a pour affixe $\frac{b}{1 - a}$ si $a \neq 1$

**Méthode 3**

En utilisant des procédés géométriques.

si f est définie par 2 points A et B distincts et leurs images A' et B' alors le rapport de s est $\frac{A'B'}{AB}$

l'angle de s est $(\overline{AB} ; \overline{A'B'}) = \alpha$

Si f n'est pas une translation, le centre I peut être déterminer par :

- les arcs capables (car $(\overrightarrow{IA} ; \overrightarrow{IA}) = \alpha$ $(2\pi)$,
- les cercles ensemble des points M tels que $\frac{MA}{MA'} = k$,
- souvent, il est utile de faire une étude du triangle IAA' (ou IBB') pour rechercher ses particularités.

## ❺.❷ Comment déterminer une isométrie et ses éléments ?

**Méthode 1**

En faisant coïncider f avec une isométrie connue en 3 points non alignés.

*Commentaire :*

**Méthode 2**

En montrant que f est un déplacement et en utilisant :

* que si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{f(A)\,f(B)}) = 0\ (2\pi)$ pour 2 points quelconques distincts alors f est la translation de vecteur $\overrightarrow{A\,f(A)}$.

* que si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{f(A)\,f(B)}) \neq 0\ (2\pi)$ pour 2 points quelconques distincts alors f est une rotation d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{f(A)\,f(B)})$.

**Méthode 3**

En utilisant les compositions :

* Si $f = r' \circ r$ où r' et r sont des rotations alors f est une translation si la somme des angles de r et r' est nulle à $2\pi$ près, de vecteur $\overrightarrow{A\,f(A)}$ où A est quelconque ; f est une rotation si la somme des angles de r et r' est non nulle à $2\pi$ près. La rotation a pour angle la somme des angles des rotations, on cherche alors un point invariant par f.

* Si $f = t \circ r$ ou $r \circ t$ où t est une translation et r une rotation, alors f est une rotation dont l'angle est celui de r, on cherche un point invariant par f.

$\boxed{\textit{Méthode 4}}$

En utilisant les points invariants

* Si f admet un seul point invariant c'est une rotation.

* Si f admet 2 points invariants et n'est pas l'identité f est une symétrie axiale.

* Si f admet 3 points invariants non alignés c'est l'identité.

* Si f est un déplacement ayant 2 points invariants distincts c'est l'identité.

* Si f est un déplacement sans point invariant c'est une translation.

$\boxed{\textit{Méthode 5}}$ (valable pour les déplacements)

En utlilisant la forme complexe

* Si la forme complexe est de la forme $z' = z + b$ c'est une translation de vecteur $\vec{u}(b)$.

* Si la forme complexe est de la forme $z' = e^{i\theta} z + b$ $\theta \neq 0\ (2\pi)$ c'est une rotation d'angle $\theta$, l'affixe $z_0$ du centre vérifie $z_0 = e^{i\theta} z_0 + b$.

## ⑤.③ Comment déterminer les éléments d'une conique ?

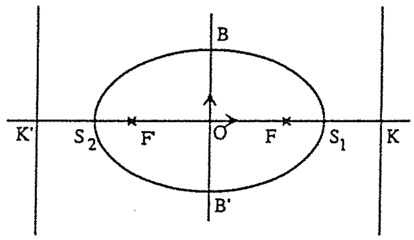
**Méthode 1**

($\mathcal{C}$) est donnée par son foyer, sa directrice et son exentricité.

En utilisant la configuration suivante et les formules

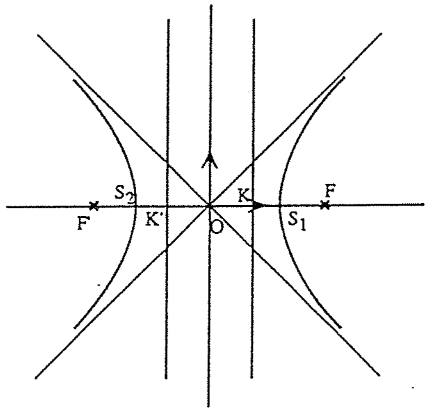
* $0 < e < 1$

$c = ea$
$b = \sqrt{a^2 - c^2}$
$c = OF = OF'$
$a = OS_1 = OS_2$
$b = OB = OB'$ , $OK = OK' = \dfrac{a^2}{c}$



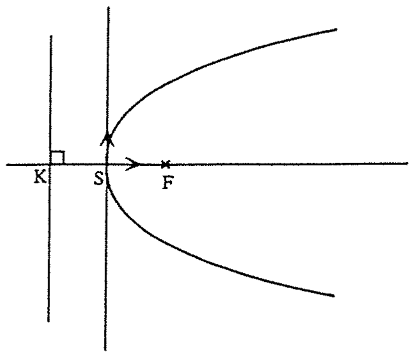

* $e > 1$

$c = ea$ $\quad$ $b = \sqrt{c^2 - a^2}$
les droites d'équation
$y = \dfrac{b}{a}x$ et $y = -\dfrac{b}{a}x$
sont asymptotes
$c = OF = OF'$
$a = OS_1 = OS_2$
$b = OB = OB'$ , $OK = OK' = \dfrac{a^2}{c}$




* $e = 1$

$y^2 = 2\,px$ avec $p = FK$



**Méthode 2**

(($\mathcal{C}$) est donnée sous la forme $Ax^2 + By^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0$
dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$)

En déterminant un repère orthonormé $(K, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel ($\mathcal{C}$) admet une équation du type
$y^2 = 2\,px$ ou $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$ ou $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

L'axe focal est alors $\mathcal{D}$ $(K, \vec{i}\,)$.

Pour la parabole, le foyer et la directrice sont déterminés par p.

Pour les coniques à centres, les foyers et les directrices sont déterminés par les relations $c = ea$
$OK = \frac{a^2}{c}$.

## ❺.❹ Comment déterminer un ensemble de points ?

(ou ligne de niveau)

**_Méthode 1_**

En se ramenant à un ensemble de points connus à l'aide d'une relation caractéristique.

* $\left\{\begin{matrix} M, & AM = R \\ & A \text{ fixe}, R>0 \end{matrix}\right\}$ cercle ou sphère dans l'espace.

* {M, MA = MB, A et B fixés } médiatrice dans le plan, plan médiateur dans l'espace.

* si $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$ $\left\{M, \sum_{i=1}^{n} a_i\ MA_i^2 = k\right\}$ où les $(A, a_i)$ et k sont fixés est un cercle (ou sphère dans l'espace), un point ou $\emptyset$ .

* si $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$ , $\left\{M, \sum_{i=1}^{n} a_i\ MA_i^2 = k\right\}$ où les $(A, a_i)$ et k sont fixés est une droite (ou plan dans l'espace) ou $\emptyset$, ou le plan (ou l'espace)

* $\left\{\begin{matrix} M, & \overrightarrow{MA} . \vec{u} = k \\ & \vec{u} \neq \vec{o}, A, k \text{ fixés} \end{matrix}\right\}$ est une droite (ou plan dans l'espace) dont $\vec{u}$ est un vecteur normal.

* $\left\{\begin{matrix} M, & \overrightarrow{MA} . \overrightarrow{MB} = k \\ & A, B, k \text{ fixés} \end{matrix}\right\}$ est un cercle (ou sphère dans l'espace) ou un point ou $\emptyset$.

* $\left\{M, \dfrac{MA}{MB} = k \quad \begin{matrix} A, B \text{ fixés} \\ k>0 \ k\neq 1 \end{matrix}\right\}$ est un cercle (ou sphère dans l'espace).

* $\left\{\begin{matrix} M, (\overrightarrow{MA} . \overrightarrow{MB}) = \alpha \ (2\pi) \\ A, B, \alpha \text{ fixés} \end{matrix}\right\}$ est un arc capable si $\alpha \neq 0 \ (\pi)$.

* $\left\{\begin{matrix} M, \quad (\overrightarrow{MA} . \overrightarrow{MB}) = \alpha \ (\pi) \\ \text{si } \alpha \neq 0 \end{matrix}\right\}$ est un cercle privé de A et B.

* $\left\{M, \dfrac{MF}{MH} = e\right\}$ où $e > 0$, F sont fixés et H est la projection orthogonale de M sur une droite fixe est une conique.

## *Méthode 2*

En procédant analytiquement et en faisant apparaître une équation d'un lieu connu : droite, plan, cercle, conique...

## *Méthode 3*

(voir Résoudre un problème de lieu)

## 6 - Probabilités

## ⑥.❶ Comment calculer la probabilité d'un évènement ?

### *Méthode 1*

En calculant card A (cas d'équiprobrabilité).

*Exemples :*

### *Méthode 2*

En se ramenant au calcul de probabilités d'évènements connus à l'aide des formules.

$* \; P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ (les évènements $A_i$ étant disjoints deux à deux).

$* \; P(C \cup B) + P(C \cap B) = P(C) + P(B)$.

$* \; P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

*Exemples :*

*Commentaire :* on modélise (éventuellement plusieurs fois) à l'aide d'urnes en utilisant des tirages équiprobables.

# COMMENT TRANSFORMER ?

COMMENT TRANSFORMER ?

## 1 - Complexes

# ❶.❶ Comment écrire un nombre complexe z sous forme algébrique ?

### *Méthode 1*

En regroupant parties réelles et imaginaires dans le cas de somme ou de produits de nombres complexes donnés sous forme algébrique.

*Exemples :*

### *Méthode 2*

En utilisant la technique du complexe conjugué

$$z = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}\ .$$

*Exemples :*

### *Méthode 3*

Si $z$ est donné pour forme trigonométrique $z = [r, \theta]$ alors

$$z = \underset{a}{(r\cos\theta)} + i\ \underset{b}{(r\sin\theta)}.$$

*Exemples :*

### *Méthode 4*

Si $z$ est donné sous forme exponentielle on se ramène à la méthode 3.

| | |
|---|---|
| **❶.❷** | **Comment écrire un nombre complexe z non nul sous forme trigonométrique ou exponentielle ?** |

### *Méthode 1*

z est donné sous forme algébrique ($z \neq 0$)

$z = a + ib \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$

$\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \sin \theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et alors $z = [|z|, \theta]$.

### *Méthode 2*

z est produit ou quotient de 2 nombres complexes $z = z' z''$ ou $z = \dfrac{z'}{z''}$, $z' \neq 0$, $z'' \neq 0$.

$z = |z'| \, |z''| \, (\cos (\theta' + \theta'') + i \sin (\theta' + \theta'')) = |z'| \, |z''| \, e^{i(\theta' + \theta'')}$

$z = \dfrac{|z'|}{|z''|} e^{i(\theta' - \theta'')} = \dfrac{|z'|}{|z''|} (\cos (\theta' - \theta'') + i \sin (\theta' - \theta''))$.

*Exemples :*

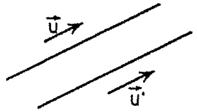
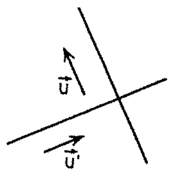
### *Méthode 3*

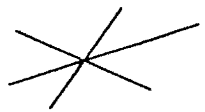
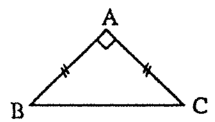
Si $z = z_0{}^n$ où $z_0 = [r, \theta]$ alors $z = [r^n, n\theta]$ (formule de Moivre).

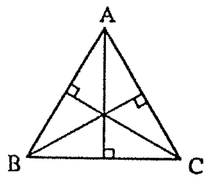
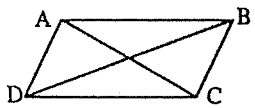
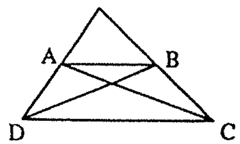
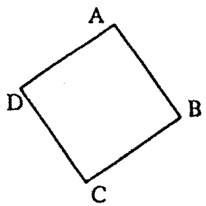
*Exemples :*

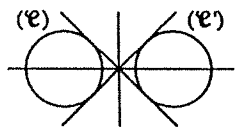
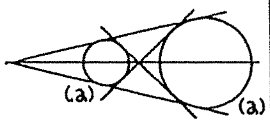
## 2 - Géométrie plane

## ❷.❶ Comment passer d'un outil à un autre ?

| Propriétés | Géométrie des figures | Vecteurs | Analytique | Complexes | Transformations | Angles |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (D) et (D') droites parallèles de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$.  | • Utilisation des relations de parallèlisme - orthogonalité<br>• Utilisation des quadrilatères usuels. | $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ colinéaires. | • $\det(\vec{u}\ ;\ \vec{u'}) = 0$<br>• Condition de parallélisme de 2 droites données par leurs équations. | $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = 0\ (\pi)$<br>où z et z' sont les affixes respectives de $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ | • l'une des droites est l'image de l'autre par une translation, une symétrie centrale ou une homothétie.<br>• elles se déduisent de 2 droites parallèles par une transformation usuelle. | . $2\,(\vec{u}, \vec{u'}) = 0\ (2\pi)$<br>ou<br>$(\vec{u}, \vec{u'}) = 0\ (\pi)$ |
| Points alignés A, B, C distints deux à deux.  | (AB) et (AC) sont parallèles (Euclide). | $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. | • $\det(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = 0$<br>• les coordonnées d'un point vérifient une équation de la droite passant par les 2 autres. | a, b et c désignant les affixes de A, B, C<br>$\arg\left(\frac{b - a}{c - a}\right) = 0\ (\pi)$. | • A, B et C sont les images de 3 points alignés par une transformation usuelle.<br>• B est l'image de C par une homothétie de centre A. | $2\,(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = 0\ (2\pi)$<br>ou<br>$(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = 0\ (\pi)$. |
| (D) et (D') droites perpendiculaires de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$.  | • Utilisation des relations de parallèlisme - ortogonalité.<br>• Utilisation des quadrilatères usuels. | $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ orthogonaux.<br>$\vec{u} \cdot \vec{u'} = 0$ | • Traduction analytique du produit scalaire.<br>• Condition d'orthogonalité de deux droites données par leurs équations. | $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \frac{\pi}{2}\ (\pi)$<br>où z et z' sont les affixes respectives de $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ | • L'une des droites est l'image de l'autre par une rotation ou une similitude d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$.<br>• Elles se déduisent de 2 droites perpendiculaires par une transformation usuelle. | $2\,(\vec{u}, \vec{u'}) = \pi\ (2\pi)$.<br>ou<br>$(\vec{u}, \vec{u'}) \doteq \frac{\pi}{2}\ (\pi)$. |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Droites concourantes.  | • Droites remarquables dans un triangle.<br>• Le point d'intersection de deux des droites appartient à la troisième. | | • Les coordonnées du point d'intersection de 2 des droites vérifient une équation de la troisième. | | • Les droites se déduisent de 3 droites concourantes par une transformation usuelle. | |
| I milieu de [AB] | • Utilisation des diagonales d'un parallélogramme.<br>• Médiatrice d'un segment.<br>• Projection du milieu. | • $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$.<br>• $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. | • $\begin{cases} x_I = \frac{x_A+x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A+y_B}{2} \end{cases}$ | $z_I = \frac{z_A+z_B}{2}$ | • I est l'image d'un milieu par une transformation.<br>• I est centre de symétrie. | |
| A, B, C, D cocycliques (A, B, C, D quatre points distincts). | • Triangles rectangles de même hypothénuse. | | Les coordonnées de A, B, C et D vérifient une équation d'un même cercle. | $2\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) =$<br>$2\arg\left(\frac{c-d}{b-d}\right)\ (2\pi)$<br>ou<br>$\arg\left(\frac{c-a}{d-a}\right) =$<br>$\arg\left(\frac{c-b}{d-b}\right)\ (\pi)$ avec A(a), B(b), C(c) et D(d) | | $2(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) =$<br>$2(\overrightarrow{DB}\,;\overrightarrow{DC})\ (2\pi)$<br>ou<br>$(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) =$<br>$(\overrightarrow{DB}\,;\overrightarrow{DC})\ (\pi)$ |
| ABC triangle rectangle isocèle en A.  | AB = AC<br>et (AB) ⊥ (AC) | $\lVert\overrightarrow{AB}\rVert = \lVert\overrightarrow{AC}\rVert$ et<br>$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$. | Traduction analytique de<br>$\lVert\overrightarrow{AB}\rVert = \lVert\overrightarrow{AC}\rVert$ et<br>$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$. | $(c-a) = i(b-a)$<br>ou<br>$(c-a) = -i(b-a)$<br>avec A(a), B(b) et C(c). | • B est image de C par la rotation de centre A d'angle $\pm\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$.<br>• B est l'image de A par une similitude de centre C d'angle $\pm\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$ de rapport $\sqrt{2}$ ou $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{CB}\,;\overrightarrow{CA})$<br>$= \frac{\pi}{4}$ (ou $-\frac{\pi}{4}$) $(2\pi)$ |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ABC est un triangle équilatéral.<br><br> | AB = AC = BC<br>ou<br>$\begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = \pm\frac{\pi}{3}\ (2\pi) \end{cases}$ | $\Vert\overrightarrow{AB}\Vert = \Vert\overrightarrow{AC}\Vert = \Vert\overrightarrow{BC}\Vert$ | Traduction analytique de $\Vert\overrightarrow{AB}\Vert = \Vert\overrightarrow{AC}\Vert = \Vert\overrightarrow{BC}\Vert$ | $c - a = e^{i\pi/3}\ (b - a)$<br>ou<br>$c - a = e^{-i\pi/3}\ (b - a)$<br>avec A(a), B(b) et C(c). | • B est l'image de C par la rotation de centre A d'angle $\pm\frac{\pi}{3}\ (2\pi)$.<br>• La rotation de centre G (centre de gravité de ABC) d'angle $\pm\ \frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$ transforme A en B, B en C et C en A. | $(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AB})\ (2\pi)$ |
| ABCD est un parallélogramme<br><br> | $\begin{cases} (AB) \mathbin{//} (DC) \\ \text{et} \\ (AD) \mathbin{//} (BC) \end{cases}$ | $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ | Traduction analytique de $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ | $b - a = c - d$<br>où a, b, c et d sont les affixes de A, B, C et D. | • B et C sont les images de A et D par une même translation.<br>• B et C sont les images de D et A par une symétrie centrale. | |
| ABCD est un trapèze<br><br> | (AB) et (DC) parallèles. | $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ colinéaires. | $\det(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{DC}) = 0$ | $\frac{d - c}{b - a}$ est réel.<br>où a, b, c et d sont les affixes de A, B, C et D. | [AB] est l'image de [CD] par une homothétie. | $2\,(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CD}) = 0\ (2\pi)$<br>ou<br>$(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CD}) = 0\ (\pi)$ |
| ABCD est un carré<br><br> | • Propriétés usuelles | $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$<br>et<br>$\Vert\overrightarrow{AB}\Vert = \Vert\overrightarrow{AC}\Vert = \Vert\overrightarrow{BC}\Vert = \Vert\overrightarrow{CD}\Vert$. | Traduction des propriétés usuelles. | $d - a = c - b = \pm i\ (b - a)$ | • Le quadrilatère est globalement invariant par la rotation de centre O (point d'intersection des diagonales) d'angle $\pm\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$. | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| G barycentre de $(A_i ; \alpha_i)$ $i = 1, \dots, n$ <br> $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ | | $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{O}$ <br> ou <br> Pour tout point M <br> $(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i) \overrightarrow{MG} =$ <br> $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ \overrightarrow{MA_i}$. | $x_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$ <br> $y_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$ | $z_G = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i$ | • G est l'image d'un barycentre par une transformation usuelle. | |
| $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont deux cercles de même rayon <br>   | | | | | $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ se déduisent l'un et l'autre par 2 symétries axiales, une symétrie centrale ou une translation. | |
| $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont deux cercles de rayon différent <br>   | | | | | $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ se déduisent l'un et l'autre par 2 homothéties. | |

## ❷.❷ Comment effectuer un changement de repère ?

$M(x, y)$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ; $M(X, Y)$ dans $(A, \vec{u}, \vec{v})$
où $\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ $\quad \vec{v} = \alpha'\vec{i} + \beta'\vec{j}$ $\qquad A(a, a')$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$

### *Méthode*

On écrit $\overrightarrow{AM} = X\vec{u} + Y\vec{v}$
$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = X(\alpha\vec{i} + \beta\vec{j}) + Y(\alpha'\vec{i} + \beta'\vec{j})$.

On a alors le système :
$x - a = \alpha X + \alpha' Y$
$y - a' = \beta X + \beta' Y$.

*Commentaire* : Cas les plus fréquents

* $(O, \vec{i}, \vec{j}) \to (A, \vec{i}, \vec{j})$
$\vec{u} = \vec{i}$
$\vec{v} = \vec{j}$
on a : $\begin{cases} x - a = X \\ y - a' = Y \end{cases}$

* $(O, \vec{i}, \vec{j}) \to (O, \vec{j}, \vec{i})$
$\vec{u} = \vec{i}$ $\qquad A = O$
$\vec{v} = \vec{j}$
on a : $\begin{cases} X = y \\ Y = x \end{cases}$

*Exemples :*

| | |
|---|---|
| ❷.❸ | **Comment transformer une équation du type $ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ pour faire apparaître une équation de conique ou de cercle ?** |

*Méthode*

* Regrouper les termes où figure x et les termes où figure y en faisant apparaître des identités remarquables pour se placer dans les conditions d'un changement de repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$ :

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} \pm \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1.$$

ou

$(x-\alpha)^2 = 2p\,(y-\beta)$ ou $(y-\beta)^2 = 2p\,(x-\alpha)$

* Effectuer les changements de repère $(O, \vec{i}, \vec{j}) \to (A, \vec{i}, \vec{j})$ où $A(\alpha, \beta)$ (éventuellement $(A, \vec{j}, \vec{i})$ ou $(A, -\vec{i}, \vec{j})$).

$$\frac{X^2}{a^2} \pm \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

* Conclure

*Exemples :*

## ❷.❹ Comment transformer $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, MA_i^2$ ?

**Méthode**

* Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, en faisant intervenir le barycentre des points $(A_i, \alpha_i)$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, MA_i^2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\Big)\, GM^2 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, GA_i^2.$$

*Commentaire* :

* Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$, en faisant intervenir un point quelconque A

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, MA_i^2 = 2\, \overrightarrow{MA} \,.\, \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \overrightarrow{AA_i}\Big) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, AA_i^{\,2}.$$

*Commentaire* :

$\sum \alpha_i\, \overrightarrow{AA_i}$ est un vecteur constant (ne dépendant pas du choix de A).

En général le point A est judicieusement choisi pour faciliter le calcul de $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, AA_i^{\,2}$.

COMMENT TRANSFORMER ?

## 3 - Algèbre

# ❸.❶ Comment développer $(a + b)^n$ ?

**_Méthode_**

* $(a + b)^n = a^n + C_n^1\, a^{n-1}\, b + C_n^2\, a^{n-2}\, b^2 + \ldots + C_n^p\, a^{n-p}\, b^p + \ldots + b^n$ .

* Les $C_n^p$ se trouvent à l'aide du triangle de Pascal

$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

*Exemples :*

# ❸.❷ Comment linéariser $\cos^m x \sin^p x$ ?

**Méthode**

* En utilisant les formules d'Euler

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

* En développant à l'aide de la formule du binôme

$$\cos^m x = \frac{(e^{ix} + e^{-ix})^m}{2^m} \qquad \sin^p x = \frac{(e^{ix} - e^{-ix})^p}{2^p (i)^p}$$

* En regroupant les termes suivant les formules d'Euler utilisées dans l'autre sens.

*Commentaire* : Cette méthode est utilisée pour calculer des primitives (ex : $\int_0^{\pi} \cos^4 x \, dx$).

*Exemples :*

# ❸.❸ Comment transformer l'expression a sin x + b cos x ?

((a, b) $\neq$ (o, o))

* En mettant en facteur $\sqrt{a^2+b^2}$

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left[\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\cos x + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\sin x\right].$$

* En déterminant $\zeta$ tel que $\cos \zeta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin \zeta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

* On obtient $a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2+b^2}\,\cos(x - \zeta)$.

*Exemples :*

# COMMENT CONSTRUIRE ?

| ❶ | **Comment construire la représentation graphique d'une fonction f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ?** |
|---|---|

*Méthode*

En étudiant la fonction :

* Recherche du domaine de définition.

* Réduction du domaine d'étude (si possible) par parité ou périodicité.

* Calcul de la dérivée aux points où la fonction est dérivable en appliquant les théorèmes portant sur les opérations et compositions.

* Etude de la continuité et de la dérivabilité aux points où le cas précédent ne s'applique pas.

* Etude des limites aux bornes du domaine de définition.

* Etude des variations de f à l'aide du signe de la dérivée.

* Tableau de variation.

* Etude des asymptotes éventuelles.

* Tracé de la courbe en prenant soin de :
    - Choisir les points remarquables.
    - Placer les points remarquables.
    - Tracer les tangentes horizontales et les demi-tangentes.
    - Tracer les asymptotes.

| ❷ | Comment contruire la représentation graphique d'une courbe définie paramétriquement dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ? |
|---|---|

$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\ \vec{i} + y(t)\ \vec{j}$.

*Méthode*

* Recherche des domaines de définition des fonctions
$x : t \to x(t)$ et $y : t \to y(t)$.

* Réduction des domaines d'étude par parité et périodicité des fonctions x et y (voir démontrer).

* Etude des fonction x et y et construction d'un tableau de variation commun aux fonctions x et y.

* Placer les points remarquables (éventuellement les tangentes en ces points).

* Tracer les tangentes horizontales et verticales.

## ❸ Comment construire les éléments d'une conique définie par son équation réduite ?

**Méthode**

Parabole :

$y^2 = 2px \quad p > 0$

le foyer : $F(O, \frac{p}{2})$, la directrice $x = - \frac{p}{2}$ .

Ellipse :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ a > b \end{cases}$$

L'axe focal est l'axe des abcisses.

Les foyers F et F ' ont pour coodonnées $F(- c, O)$, $F'(c, O)$
où $c > O \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Les directrices ont pour équations $x = \frac{a^2}{c}$ et $x = - \frac{a^2}{c}$ .

Les sommets ont pour coordonnées $(a, O)$ et $(- a, O)$.

L'exentricité est $e = \frac{c}{a}$ .

Hyperbole :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

L'axe focal est l'axe des abscisses.

Les foyers F et F ' ont pour coordonnées $F(- c, O)$, $F'(c, O)$
où $c > O \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Les directrices ont pour équations $x = - \frac{a^2}{c}$ et $x = \frac{a^2}{c}$ et les asymptotes $y = \frac{b}{a}$ x et $y = - \frac{b}{a}$ x.

Les sommets ont pour coordonnées $(a, O)$ et $(- a, O)$

L'exentricité est $e = \frac{c}{a}$ .

*Commentaire* :

IMP. P. OUDIN POITIERS - TÉL. : 49 41 13 23

**Auteurs** *P. CROTTEREAU - D. GAUD - P. PASQUIER*

**Titre** Fichier Mathématiques T.C.

**Editeur** IREM de POITIERS

**Date** Septembre 1992

**Mots-clé** Démontrer - Résoudre - Calculer - Transformer - Construire

**Résumé** Ce fascicule propose une série de fiches méthodologiques destinées à être utilisées et éventuellement complétées par les élèves

Premier tirage 2000 exemplaires

**IREM** - 40, Avenue du Recteur Pineau - 86022 POITIERS CEDEX

**ISBN 2-85954-036-9**