Université de POITIERS

Institut de Recherche
sur l'Enseignement des Mathématiques

Janvier 1991

Méthodes et connaissances de référence en mathématiques au collège

Fascicule 1

Fichier MÉTHODES

(FASICULE D'ACCOMPAGNEMENT)

Marie-Josée BACH
Jean FROMENTIN
Dominique GAUD
Jean-Paul GUICHARD
Claude ROBIN

Méthodes et connaissances de référence en mathématiques au collège

Fascicule 1 - Fichier MÉTHODES

(FASCICULE D'ACCOMPAGNEMENT)

SOMMAIRE

INTRODUCTION

Nos recherches sur l'apprentissage de la démonstration [1] [2] [3] [4] [5], notre pratique enseignante, nos "rencontres" avec les théories actuelles de l'aprentissage [6] [7] et de la didactique des mathématiques [8] [9], ainsi qu'une sensibilisation à l'évaluation formatrice [10], tout concourt à nous montrer que l'acquisition de connaissances est loin de suffire pour que les élèves puissent faire des mathématiques. Les difficultés que les élèves, même "sérieux", ont pour réaliser des tâches complexes, comme celle de démontrer, en témoignent. En témoigne aussi le fait que souvent bon nombre d'élèves "sèchent" face à un exercice ou un problème non stéréotypé. Ils ont les connaissances requises, mais sont incapables de les utiliser : s'ils ne reconnaissent pas un exercice déjà fait récemment c'est le vide [11]. En fait ce qui leur manque ce sont des stratégies d'action. Or pour développer de telles stratégies, il faut que l'individu maîtrise au moins les trois étapes fondamentales suivantes :

1- qu'il situe le problème posé dans une catégorie de problèmes

2- qu'il pense ses connaissances en tant qu'outils

3- qu'il procède à l'analyse des données.

Notre point de vue est que nous devons former l'élève à une démarche comportant ces trois étapes, démarche générale et transférable à d'autres domaines.

Le travail qui suit est une objectivation, une matérialisation de cette démarche, il en est aussi une représentation. C'est un produit fini, et nous expliquerons par la suite comment il peut être utilisé pour que l'élève se construise une telle démarche.

PRÉSENTATION DU FICHIER

1- Le fichier commence par un sommaire qui répond à la question *"qu'ai-je à faire ? "* et qui demande à l'élève de resituer le problème posé, dans une grande catégorie de problèmes. Le début correspond donc à la première étape de la démarche.

2- Ensuite se trouve le corpus proprement dit, qui dans chaque catégorie de problèmes répond à la question *"comment faire ?"* c'est le fichier méthodes proprement dit. Il correspond à la deuxième étape de la démarche. Les connaissances sont réorganisées, reformulées, pour être utilisées en tant qu'outils (cf. la terminologie "boîte à outils" de certains manuels. Voir aussi [11]).

3- Enfin, hors fichier, dans ce fascicule, seront donnés des exemples de mise en œuvre correspondant à la troisième étape.

NOS CHOIX :

1- Les cinq catégories de problèmes retenues ont été :
DEMONTRER, CALCULER, TRANSFORMER, CONSTRUIRE, RESOUDRE.
Elles ont été élaborées à partir de l'étude des questions qui sont le plus souvent posées en mathématiques. Nous avons pour cela analysé des sujets de brevet des collèges, mais aussi de baccalauréat et du CAPES de mathématiques.

2- Le contenu des fiches :
Nous avons présenté un éventail de fiches, qui, pour nous, couvre tout le programme de premier cycle.

• les fiches multi-méthodes :
Une fiche méthodologique n'a de sens, de notre point de vue, qu'à partir du moment où l'on dispose d'au moins deux méthodes : sinon il s'agit d'une connaissance et cela figurera dans le fascicule 2 : répertoire CONNAISSANCES. Par exemple ne figure pas de fiche sur : "comment calculer la somme de deux fractions ?".
D'autre part une méthode ne peut prétendre à ce titre que si elle est fréquemment employée ; un outil que l'on a rencontré une fois ou deux ne peut être un outil mobilisable et réutilisable. Il vaut mieux utiliser peu d'outils que l'on apprendra ainsi à maîtriser, que beaucoup d'outils que l'on ne sait pas maîtriser. Ainsi nous avons éliminé, par exemple, la présence d'un axe de symétrie, dans la fiche pour démontrer qu'un triangle est isocèle. Nous avons éliminé aussi toutes les méthodes qui ne renvoient pas à des capacités exigibles. Par exemple, dans la fiche sur l'alignement de trois points, nous avons éliminé la méthode utilisant l'égalité de longueurs, cas limite de l'inégalité triangulaire.
Pour rendre ces fiches opérationnelles, pour qu'elles suscitent une gymnastique mentale et non pour qu'elles deviennent une encyclopédie méthodique à consulter, nous avons volontairement limité le nombre de méthodes : nous nous sommes efforcés de ne retenir que 3 ou 4 méthodes par fiche. Néanmoins, il est à noter que cela fait encore plus de 120 méthodes à maîtriser... Il faut remarquer cependant qu'en choisissant moins de méthodes, donc moins d'énoncés, on augmente le nombre d'étapes dans les raisonnements,donc de fait on favorise alors un apprentissage du raisonnement. Prenons un exemple, celui de la fiche
• 07 : *"comment démontrer qu'un quadrilatère est un carré ?"*.
Dans cette fiche, nous avons éliminé deux méthodes faisant appel au losange :
- losange qui a un angle droit
- losange qui a les diagonales de même longueur.
Dans ces deux cas, la démonstration est possible en deux étapes au lieu d'une :
- du losange, on déduit que les 4 côtés ont même mesure puis on utilise la méthode 1 de la fiche : un quadrilatère qui a 4 côtés de même mesure et un angle droit est un carré.

- du losange, on déduit que les diagonales sont perpendiculaires et ont même milieu, puis on utilise la méthode 2 de la fiche : un quadrilatère qui a ses diagonales perpendiculaires de même milieu et de même mesure est un carré.
On peut remarquer en passant, qu'avec cette perspective on fait davantage fonctionner des énoncés directs : c'est un losange donc...
Enfin certaines choses triviales, provenant le plus souvent d'une définition, n'ont pas été explicitées. Par exemple l'utilisation de la bissectrice ne figure pas dans la fiche ⚁ ❸ : *"comment calculer un angle ?"*. De même, hauteur et tangente ne figurent pas dans la fiche ⚀ ❷❷ *"comment démontrer que deux droites sont perpendiculaires ?"*

• Les fiches démarches :
Les fiches multiméthodes dont nous venons de parler correspondent bien aux problèmes de choix qui se posent dès que l'on a affaire aux questions : DEMONTRER, CALCULER. Par contre pour CONSTRUIRE, RESOUDRE ou TRANSFORMER, il n'y a parfois qu'une ou deux méthodes. En fait, il s'agit alors plutôt d'une démarche ou d'un algorithme complexe (par exemple : résoudre une équation du premier degré à une inconnue), qui ne peuvent être mis en œuvre que si l'on a en tête les principales étapes et que si celles-ci sont orientées vers un but. A ce titre, il nous semble important qu'elles figurent dans un fichier méthodes car elles visent aussi à donner à l'élève des stratégies d'action.

3- La rédaction des fiches :
Nous avons essayé d'associer l'aspect verbal et l'aspect visuel :

• pour la plupart des méthodes, une figure ou un calcul résume la méthode et permet de la mémoriser sous forme visuelle.

• pour la rédaction, nous avons privilégié un langage simple, souvent celui d'élèves, parfois moins rigoureux que le nôtre mais plus parlant. Nous n'avons pas explicité les énoncés qui sous-tendent les méthodes mais nous avons toujours mis en évidence les conditions ou le contexte d'utilisation de la méthode (voir par exemple fiche ⚁ ❶ *"comment calculer une longueur ?"*).
La forme elle-même change suivant la catégorie de problèmes, ce qui montre que ces catégories recouvrent des apprentissages spécifiques.

• pour les fiches "démarches", nous avons mis en avant la "philosophie" de la méthode sous le titre principe, et nous avons balisé les principales étapes et leurs variantes. Elles prennent alors une forme plus algorithmique.
Pour toutes les fiches, nous n'avons pas repris les énoncés ou propriétés utilisés qui eux figurent dans le "cours" et qui font l'objet du fascicule 2 : répertoire CONNAISSANCES.

UTILISATION DU FICHIER

Comme nous l'avons dit, le fichier est inutile lorsque l'élève a à gérer une situation simple ou standard, son intérêt par contre apparaît dès que les situations à traiter sont plus complexes, complexité due aux multiples possibilités de choix ou à la longueur de la démarche à mettre en œuvre. Son utilisation suppose donc que les propriétés, définitions, algorithmes simples soient connus des élèves et que ceux-ci sachent les utiliser dans les cas simples et typiques. D'autre part, il ne faudrait pas croire que la connaissance des méthodes du fichier soit suffisante pour que l'élève sache faire. Elle est absolument nécessaire mais suppose que l'élève ait une certaine maîtrise du type de tâche demandée, par exemple démontrer, résoudre... L'utilisation du fichier doit donc se doubler d'un travail permettant aux élèves de se représenter et de s'approprier ce type de tâche : un bon outil pour cela sont les activités centrées sur l'analyse de la tâche qui sont actuellement développées en évaluation formatrice [10]. On trouvera en annexe 1 un document sur la démonstration.

Enfin, il ne faut pas concevoir ce fichier comme une bible, mais plutôt comme un outil évolutif et jetable. En effet, lorsque l'élève aura acquis une certaine pratique, les démarches et méthodes seront intégrées et il n'aura plus besoin de consulter telle ou telle partie de son fichier. Certaines fiches vont devenir obsolètes : l'élève s'en rendra compte lui-même car il s'agira des fiches qu'il n'utilisera plus. En revanche, de nouvelles méthodes vont venir s'ajouter, et il faudra les intégrer aux anciennes.

Prenons des exemples :

<u>Exemple 1</u> : fiche ⚄ ❶. A la fin de la troisième, une telle fiche devrait être obsolète.

<u>Exemple 2</u> : fiche ⚃ ❶. Les méthodes 1 et 2 devraient disparaître mais devrait apparaître une méthode 3 : problème de construction (second cycle).

<u>Exemple 3</u> : fiche ⚀ ❷❷. *"comment démontrer que des droites sont perpendiculaires ?"* devrait en second cycle se transformer en recueil des grandes stratégies. Ce pourrait être :

> *Méthode 1* : en utilisant la géométrie des figures
>
> (donc inclurait toutes les méthodes de la fiche ⚀ ❷❷)
>
> *Méthode 2* : en utilisant une transformation
>
> *Méthode 3* : en utilisant le produit scalaire
>
> *Méthode 4* : en utilisant les nombres complexes
>
> *Méthode 5* : en utilisant l'analytique
>
> On peut voir à l'œuvre l'utilisation de toutes ces méthodes au second cycle dans [12].

Comment s'en servir pour DEMONTRER ?

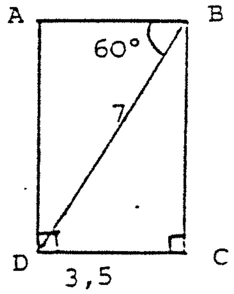
Pour démontrer une propriété ou la nature d'une figure, l'élève est en présence d'un texte de problème de géométrie. Son parcours est alors balisé par trois étapes :

1- <u>Lecture - figure - données</u> :
La première étape est bien sûr de lire le texte et de le traduire, de le visualiser sous forme d'un dessin (schéma à main levée ou figure construite avec les instruments pour la recherche, figure construite avec les instruments au moment de la rédaction et pour la vérification) en notant à côté les <u>données</u> du problème. Cette phase d'écriture des données est importante car elle permet de s'approprier les <u>seules</u> choses que l'on sait à propos de la figure et de bien les visualiser. Cette écriture des données peut aussi amener à faire des déductions simples ce qui

permet de remplacer une écriture par une autre : par exemple, une hauteur peut être prise en compte dans les données, sous forme d'une perpendiculaire.

2- Identifier la question - se questionner- rechercher une méthode :
La deuxième étape est de bien identifier la question posée dans le texte "*qu'ai-je à faire ?*". Et alors de se questionner en se demandant "*comment vais-je faire ?*" c'est le moment crucial du choix d'une stratégie. Soit l'élève n'en a pas, et alors l'intérêt du fichier est évident : il va chercher dans son fichier une méthode possible. Soit l'élève a une idée et alors il n'a pas besoin du fichier, mais l'expérience montre qu'en début d'apprentissage (et souvent pendant pas mal de temps) l'élève ne mobilise pas des propriétés caractéristiques mais invente des caractérisations qu'il ne vérifie pas et qu'il ne met pas en relation avec les propriétés vues auparavant en cours. La raison en est qu'il ne maîtrise pas les notions de propriétés caractéristiques, de conditions nécessaires et de conditions suffisantes ; cela est normal car c'est justement cet apprentissage de la démonstration qui lui permettra petit à petit de les maîtriser. Donc, même dans ce cas, le fichier est utile car il permet à l'élève de vérifier si la méthode qu'il veut mettre en œuvre ou qu'il a mise en œuvre est bonne ou pas, si elle a été validée ou non, et s'il se trouve effectivement dans les bonnes conditions d'utilisation (retour aux données).

Prenons un exemple situé pour nous en début de quatrième :
Il s'agit d'un exercice extrait du fascicule 1 - Géométrie de 4ème - IREM de Poitiers (p.123):



Que dire du quadrilatère ABCD ? Justifie.

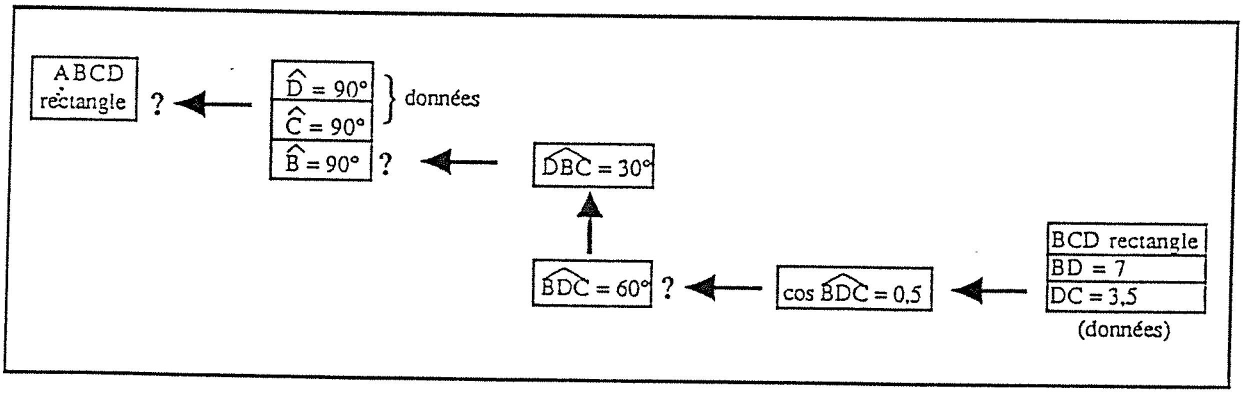
• Remarquons tout d'abord que la rédaction de l'exercice permet de se centrer immédiatement sur le problème sans avoir à passer par la phase de lecture - compréhension - représentation du texte. Toutes les données sont visualisées sur le schéma et n'ont donc pas, dans un premier temps, à être réécrites. Enfin la réponse à la question ne fait de doute pour personne. Donc l'élève saisit bien que le seul problème est, ici, de justifier son affirmation.

• Comment vont-ils s'y prendre ? Voici des justifications avancées :
- car il a quatre angles droits,
- car il est formé de deux triangles rectangles DAB et DCB,
- car il a ses côtés opposés de même longueur et des angles droits,
- car il a deux diagonales de 7 cm.

C'est alors le bon moment pour le professeur d'interroger les élèves sur la validité de leurs méthodes et soumettre celles-ci à la critique et à la vérification. Le fichier va alors devenir un des outils de critique et de vérification, et sa consultation va permettre à l'élève, petit à petit, de distinguer condition nécessaire et condition suffisante, de connaître les propriétés utiles pour démontrer, de bien les identifier.
La non prise en compte des conditions nécessaires et suffisantes pour démontrer la nature d'une figure est particulièrement flagrante sur la figure que les élèves connaissent le mieux, dont ils connaissent parfaitement toutes les propriétés : le CARRE. Mettez à l'épreuve vos élèves, même en second cycle, avec le test figurant en annexe 2 et qui a été élaboré uniquement avec des justifications d'élèves (de "bonnes" classes).
Il est bon de remarquer que cette étape est essentiellement "mentale" : elle se passe dans la tête de l'élève. Si nous voulons pouvoir agir sur elle, il serait bon de faire verbaliser les élèves sur la façon dont ils s'y prennent.

3- <u>Comment faire son choix</u> ?

Pour faire un choix, il faut, pour chaque méthode envisagée, faire un retour à la figure et aux données et les confronter aux conditions exigées. C'est pour cela que nous avons bien mis en évidence ces conditions dans les fiches. Si nous reprenons l'exemple précédent, la consultation du fichier (⊡ ❶❺) nous donne en priorité une méthode par les angles et une par les diagonales. Le retour au couple figure - données (2 angles droits donnés, une seule diagonale dessinée, pas de milieux) fait présumer qu'il vaut mieux utiliser la méthode 1 : 3 angles droits. Il y en a 2 d'acquis, reste alors à prouver qu'il en a un troisième. Là encore le couple figure-données fait présumer que c'est de l'angle $\widehat{B}$ dont il va falloir s'occuper. Il y a là un point d'arrêt, de bilan : il faut voir ce qu'il y a maintenant à démontrer, et reprendre le questionnement "*comment démontrer que ?*". Sur l'exemple considéré, il n'y aura là aucun besoin du fichier : il est clair pour tous qu'il faut prouver que $\widehat{DBC} = 30°$. C'est pour cela qu'une méthode telle que "pour démontrer qu'un angle est droit, il suffit de prouver qu'il est la somme de deux angles qui font 90°" ne figure pas dans le fichier. En revanche, la question "comment démontrer que $\widehat{DBC} = 30°$?" n'est pas évidente et la nécessité du fichier se fait là aussi sentir car si de nombreux élèves affirment que $\widehat{DBC} = \widehat{ADB}$ (angles alternes internes) et que $\widehat{CDB} = \widehat{DBA}$ (angles alternes internes) et que, puisque $\widehat{ABD} = 60°$ et $\widehat{ADC} = 90°$ alors $\widehat{DBC} = 30°$, ils ne voient plus comment faire lorsqu'on leur montre que leur raisonnement repose sur une supposition non assurée : on ne sait pas si (AB) et (DC) sont parallèles. A ce propos, il faut que les élèves perçoivent l'importance des explications qu'il est nécessaire de fournir, c'est-à-dire qu'il faut expliciter les conditions d'utilisation des propriétés et que lorsque l'on fait des démonstrations, il est absolument nécessaire de savoir si ces conditions sont effectivement remplies de façon <u>certaine</u>, c'est à dire en se référant aux seules choses dont on est sûr et certain : les données du problème. Ceci montre qu'il faut de la méthode (faire des bilans partiels, se questionner) pour pouvoir enchaîner plusieurs méthodes : le fichier est alors une aide aux décisions, une aide aux moments de blocage, où l'on ne voit plus comment faire. Mais la démarche elle-même demande une bonne gestion mentale : ces activités de démonstration permettent d'ailleurs de s'y entrainer. Mais pour certains, ou lorsque cela devient trop compliqué, il peut être alors utile de baliser la recherche, de marquer les acquis, de noter les points en suspens, en question : la confection d'un schéma type organigramme ascendant peut être une aide précieuse. Pour le professeur, il permet aussi de bien récapituler la démarche ou les différentes démarches de façon visuelle et bien compréhensible. Pour l'exemple pris, on pourrait faire le schéma suivant :



Ce va-et-vient entre la question posée, ou que l'on se pose, et le couple figure-données est essentiel : c'est le moteur de la recherche qui permet d'aller de question en question. C'est pour cela que nous avons utilisé la formulation "en prouvant que" qui indique bien qu'en général, on amorce un processus qui en fait ne s'arrête que lorsque ce "en prouvant que" est inutile, c'est à dire qu'il peut être remplacé par "puisque je sais que". La démarche ascendante (partir de la conclusion générale ou provisoire) et l'analyse des données, qui permet de guider le choix de la méthode, sont de fait en perpétuelle interaction.

LES AUTRES MÉTHODES :

Si nous avons adjoint d'autres rubriques et d'autres méthodes, c'est qu'il nous semble que ce qui fait le plus défaut aux élèves ce sont :

• la capacité, face à une question, de mobiliser leurs connaissances et de faire alors un choix pertinent.

• la capacité à mettre en œuvre des démarches finalisées. Et comme pour la démonstration, il nous semble que le fichier est une aide à la fois au niveau matériel, mais également au niveau des représentations mentales. Sa seule existence déjà montre à l'élève qu'il faut se poser des questions, faire des choix, connaître quelques principes de base.

PERSONNALISATION :

La forme de ce fichier est l'aboutissement d'un certain nombre de choix que nous avons faits et que nous avons justifiés précédement. Ces choix ne seront pas forcément ceux de tous : aussi nous nous sommes efforcés de faire que la forme matérielle du fichier soit personnalisable.

1- Chaque fiche peut être complétée, en classe ou de façon autonome par l'élève, soit au recto dans l'espace restant, soit au verso qui a été conservé vierge.

Ces compléments peuvent être :

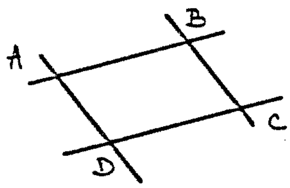
• d'autres méthodes :

Ex : fiche [•] ❼ *"Comment démontrer qu'un quadrilatère est un carré ?"*
méthode 4 : en montrant que c'est un losange particulier (avec un angle droit)

• des lettres pour désigner les sommets et traduire les propriétés en langage mathématique
Ex :

❶❹ **Comment démontrer qu'un QUADRILATERE est un PARALLELOGRAMME** [•]

Méthode 1 *En prouvant que les côtés opposés sont parallèles*

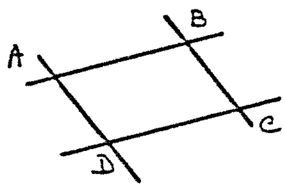


$(AB) \parallel (CD)$ } donc ABCD parallélogramme
$(AD) \parallel (BC)$ }

• des organigrammes :
Ex :

❶❹ **Comment démontrer qu'un QUADRILATERE est un PARALLELOGRAMME** [•]

Méthode 1 *En prouvant que les côtés opposés sont parallèles*



$\boxed{(AB) \parallel (CD)}$ $\boxed{(AD) \parallel (BC)}$

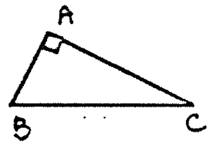
Un quadrilatère qui a ses côtés opposés parallèles est un parallélogramme.

ABCD parallélogramme

• <u>des exemples</u> :
Ex :

❶ $\boxed{\text{Comment calculer UNE LONGUEUR}}$

Méthode 1



En utilisant l'énoncé de Pythagore

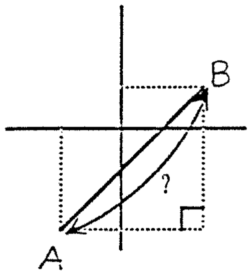
si on a
| • un triangle rectangle
| • des longueurs connues

ABC rectangle en A
donc
$AB^2 + AC^2 = BC^2$

Données : $AB = 2$; $BC = 6$
$AC^2 + 4 = 36$
$AC^2 = 32$; $AC = \sqrt{32}$

• <u>des formules</u> accompagnées ou non d'exemples
Ex : dans la même fiche :

Méthode 4



En utilisant la formule donnant la distance entre deux points dans un repère orthonormal ou le théorème de Pythagore
si on connaît les coordonnées des points.

$$\left.\begin{array}{l} A(x_A ; y_A) \\ B(x_B ; y_B) \end{array}\right\} AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exemple : $A(-1 ; -2)$
$B(2 ; \frac{1}{2})$

$$AB = \sqrt{(2+1)^2 + (\tfrac{1}{2} + 2)^2}$$
$$AB = \sqrt{9 + \tfrac{25}{4}}$$
$$AB = \frac{\sqrt{61}}{2}$$

ou $\vec{AB}\ (3 ; \frac{5}{2})$

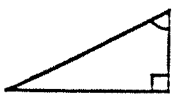
$$AB^2 = 9 + \frac{25}{4}$$
$$AB^2 = \frac{61}{4}$$
$$AB = \frac{\sqrt{61}}{2}$$

• <u>des renvois aux fiches cours</u> (voir fichier répertoire fascicule 2) pour les définitions ou les énoncés
Ex : même fiche que la précédente

Méthode 2

En utilisant le cosinus, le sinus ou la tangente
(Trigonométrie)

si on a :
| • un triangle rectangle
| • des angles et des longueurs connus

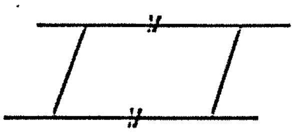


(voir fiche trigonométrie)

• des précisions jugées nécessaires selon la classe et selon les élèves :
Ex : mots : "et" "ou"

1 4 Comment démontrer qu'un QUADRILATERE est un PARALLELOGRAMME •

Méthode 3



En prouvant que deux côtés sont
et
≡
• parallèles
• de même longueur

Remarque : l'usage de couleurs, de fluo, permet d'améliorer la visualisation et permet de superposer des utilisations différentes, de distinguer les données et la conclusion... Ce qui ne peut apparaître ici sur le document imprimé.
Des exemples de personnalisation de fiches sont données en annexe 3.

2- Le fichier lui même peut être complété : pour cela une rubrique du sommaire a été laissée libre et des pages blanches utilisables se trouvent en fin de fichier.

3- Une suggestion : les méthodes étant vues petit à petit en cours, s'enrichissant durant la scolarité, et n'étant pas forcément introduites dans l'ordre du fichier, bien que nous ayions essayé d'adopter une certaine "chronologie", il pourrait être intéressant de "fluoriser" sur les sommaires et sur les fiches les méthodes vues au fur et à mesure.

DIVERSES PRÉSENTATIONS

LE SUPPORT MATÉRIEL :

Nous avons choisi une présentation pratique, peu encombrante, solide et permettant des compléments. Cependant certains peuvent penser qu'il est plus formateur de faire réaliser le fichier par les élèves eux-mêmes. Cela permet une réalisation au fur et à mesure des besoins. Plusieurs choix sont alors possibles :

- classer les fiches par ordre alphabétique
- affecter un numéro et éventuellement un logo (pour les types de problèmes) à chaque fiche, laisser les fiches classées par numéros et faire une première page de sommaire.

Quand aux supports proprement dits on peut envisager :

- des fiches bristol rangées dans une pochette, ou réunies par deux anneaux, ou mises dans un petit classeur...
- des feuilles blanches ou des feuilles de classeur rangées dans le classeur mathématique (éventuellement dans des pochettes transparentes peu chères), ou reliées par une baguette plastique et protégées par une couverture plastique souple (par exemple deux pochettes transparentes)...

LE CONTENU DES FICHES :

Si depuis des années la forme que nous avons donnée à nos fichiers dans nos différentes classes a été diverse, celle donnée à nos fiches l'a aussi été. Elles peuvent être :

- avec ou sans figures
- avec ou sans exemples
- avec ou sans propriétés explicitement écrites
- avec ou sans organigramme
- très fournies ou peu fournies
- ...

des exemples sont présentés et analysés dans l'annexe 4.

PROLONGEMENT DANS LE SECOND CYCLE

Certaines fiches devraient se révéler caduques dès l'entrée en seconde comme par exemple ⁙ ❶ ou ⊡ ❶❶. Néanmoins la majorité des fiches correspondent à des questions qui sont posées aux élèves et qu'ils auront eux-mêmes à se poser tout au long de leur scolarité. Par exemple *"comment démontrer que deux droites sont perpendiculaires ?"* sera toujours d'actualité mais va s'enrichir de nouvelles méthodes :

- utilisation du produit scalaire (1^{ere})
- utilisation des nombres complexes (Terminale)
- utilisation des transformations (à partir de la 2nde)
- utilisation des propriétés d'orthogonalité dans l'espace (2nde)

donc la complexité va s'accroître. Et il nous semble alors, qu'en seconde, par exemple, la fabrication ou la poursuite d'un fichier méthodologique est tout à fait d'actualité, d'autant qu'il y a peu de connaissances nouvelles et que l'un des motifs avoués qui justifient le nouveau programme de seconde est de renforcer les objectifs d'acquisition de méthodes. Il nous semble que de nouvelles méthodes ou démarches fondamentales vont s'ajouter et venir compléter les anciennes. En voici quelques exemples :

- représenter une fonction (CONSTRUIRE)
- résolution approchée d'une équation (RESOUDRE)
- construire une figure astreinte à des conditions :
problème de construction (CONSTRUIRE)
- trouver un lieu géométrique (RESOUDRE)
- démontrer que deux ensembles sont égaux (DEMONTRER)

Et rien ne peut laisser penser que les élèves s'approprieront toutes ces méthodes sans un travail méthodologique qu'un tel fichier peut favoriser. Et ceci que l'on soit en 2nde ou en TC. Nous donnons un exemple de fiche faite en TC extraite de [11] en annexe 5 et nous renvoyons, pour la géométrie, le lecteur à [12].

CONCLUSION

Un intérêt essentiel du fichier est de transformer des connaissances (savoirs) en outils de résolution de problèmes, et de faire prendre petit à petit conscience aux élèves de cette transformation. Il répond en grande partie à cette question si souvent occultée : à quoi ça sert ? Pour nous, professeurs, il permet de mesurer l'ampleur des connaissances utiles, utilisées effectivement, mais il permet de repérer aussi celles qui ne le sont pas : il peut être ainsi un bon outil pour recentrer notre enseignement sur l'essentiel, et nous freiner sur notre pente naturelle qui est de vouloir tout faire et d'en faire trop : trop pour les élèves qui ne peuvent tout engranger, et trop par rapport à la lettre et l'esprit des programmes.

Il n'est peut être pas inutile enfin de rappeler que l'objectif de ce fichier est d'aider l'élève à se construire de bonnes démarches ; sa vocation est donc d'être jetable, feuille par feuille, quitte à en créer de nouvelles, ou en bloc : c'est qu'alors, méthodes et démarches seront intégrées et ce fichier aura alors atteint son but. Peut-être même, qu'ensuite, au fil de ses études, l'élève éprouvera le besoin de se construire de tels outils pour mémoriser et structurer ses connaissances...

BIBLIOGRAPHIE

[1] GAUD D., GUICHARD J.P.
Pour apprendre à démontrer.
Éd. IREM de Poitiers 1983

[2] GAUD D., GUICHARD J.P.
Apprentissage de la démonstration in *Petit x* n°4
Ed. IREM de Grenoble 1984

[3] GAUD D., GUICHARD J.P., MAROT M., ROBIN C., ROBIN M.,
Géométrie de 4° Fascicule 1
Ed. IREM de Poitiers 1988

[4] MESQUITA A., RAUSCHER J.C.
Sur une approche d'apprentissage de la démonstration
in Annales de didactique et de sciences cognitives n°1
Ed. IREM de Strasbourg 1988

[5] ARSAC G.
La démonstration et les phénomènes de validation
in Recherches en didactique des Mathématiques Vol 9.3.
Ed. La pensée sauvage 1990

[6] BONNET C., HOC J.M., TIBERGHIEN G.
Psychologie, intelligence artificielle et automatique
Ed. Pierre Mardaga 1986

[7] TALYZINA N.F.
De l'enseignement programmé à la programmation de la connaissance
Ed. Presse Universitaire de Lille 1980

[8] BROUSSEAU G.
Les objets de la didactique des mathématiques
in Contributions à la 2° école d'été de didactique des mathématiques
Ed. IREM d'Orléans 1983

[9] DOUADY R.
De la didactique des mathématiques à l'heure actuelle
Cahier de didactique des mathématiques n° 6
Ed. IREM de Paris VII
ou article "Mathématiques" (didactique des) in Encyclopedia Universalis Ed. 1984

[10] NUNZIATI G.
Pour construire un dispositif d'évaluation formatrice
in Cahiers Pédagogiques n° 280
Ed. CRAP 1990

[11] NOIRFALISE R., PORTE J.
Aider les élèves à initialiser une procédure de résolution d'un problème en second cycle
in Repères IREM n°1
Ed. Topiques 1990

[12] CHEVRIER P., DOBIGEON J.C.
La géométrie plane au lycée. Point de vue global et méthodologique. 200 problèmes.
Ed. IREM de Poitiers 1989

ANNEXE 1

DÉMONSTRATION (Tâche à erreurs)

L'objectif est de faire dégager par les élèves, en utilisant des phases de confrontation et de verbalisation, des critères leur permettant d'évaluer si ce qu'ils produisent comme démonstration en est effectivement et donc de s'approprier la notion même de démonstration.

Contexte : un devoir a été fait (DS n°5 : 29.1.90 : feuille 4). La correction de A 3- montre que la notion de démonstration n'est pas acquise. D'où, à partir des copies des élèves, je confectionne :

1- une liste de 10 explications (feuille 1: DÉMONSTRATIONS : oui ou non ?)
2- une fiche d'activité (feuille 2 : Reconnaître une DÉMONSTRATION)

Activité :

• Etape 1 : consigne : individuellement faire la fiche Reconnaître une DÉMONSTRATION (les élèves ont donc en leur possession, chacun, une feuille 1 et une feuille 2).

• Etape 2 : consigne : en groupe de 4, comparez vos fiches, sans les modifier, et remplissez ensemble une seule fiche que je vous donne (feuille 2, vierge) et pour laquelle vous serez tous d'accord.

• Bilan : une fiche guide démonstration (feuille 3) que j'ai confectionnée à partir des 6 fiches des 6 groupes.

Commentaire :
1- Au départ beaucoup de ces explications sont considérées par l'élève comme des démonstrations (en moyenne 5 explications, cela va de 2 à 9).
2- Le critère dominant est celui de l'abondance d'explications.
3- Les explications ayant reçu le label démonstration sont (par ordre de fréquence décroissante) : 6.4.10.1.3 (plus de 50%).
4- Après discussion en groupe ne sont retenues que (la ou) les deux explications 6 et 10 qui peuvent effectivement être considérées comme des démonstrations. Mais les critères sont difficilement explicités.

Feuille 1

4e

DEMONSTRATIONS : OUI OU NON ?

(DS n°5 question A 3-)

1- NAA'O est un parallélogramme car ses diagonales se coupent en leur milieu. Les côtés opposés sont parallèles et de même longueur. Les angles opposés sont de même mesure.

2- ONAA' est un parallélogramme car ses diagonales se coupent en leur milieu.

3- Les côtés opposés sont parallèles 2 à 2 et si on projette le point M sur (OA') ce sera le milieu de (OA'), ses diagonales se coupent en leur milieu donc c'est un parallélogramme.

4- C'est un parallélogramme car (NA) est parallèle à (OA') et (NO) est parallèle à (AA'). Les diagonales se coupent en leur milieu.

5- ONAA' est un parallélogramme car ses côtés sont parallèles 2 à 2.

6- ONAA' est un parallélogramme car (AA') est parallèle à d', (NA) est parallèle à d alors (NA) // (OA') et (NO) // (AA').

7- ONAA' est un parallélogramme : ses côtés opposés sont parallèles car (AA') // (ON) et (OA') // (NA).

8- ONAA' est un parallélogramme car (NO) // (AA') et (OA') // (AN).

9- Le quadrilatère ONA'A est un parallélogramme car la droite (AA') est parallèle à (ON), ses diagonales se coupent en leur milieu et il y a une projection orthogonale.

10- Le quadrilatère ONAA' est un parallélogramme car :
(ON) // (AA') car A' est la projection de A parallèlement à d'
et (OA') // (AN) car N est la projection de A parallèlement à d.

Feuille 2

NOMS :

4e **RECONNAITRE UNE DEMONSTRATION**

DS n°5 question A 3-

Voici 10 explications qui ont été données pour démontrer que ONAA' est un parallélogramme. (voir feuille : DÉMONSTRATIONS : OUI OU NON ?)

1- Trouve parmi ces 10 explications celles qui sont vraiment des démonstrations.
Ecris leurs numéros :

2- Ecris les raisons qui te permettent de le dire (en les numérotant : raison 1, raison 2,...)
raison 1 :

3- Ecris les raisons qui te permettent de dire que les autres explications ne sont pas des démonstrations.
raison 1 :

Feuille 3

Fiche guide

DEMONSTRATION

Reconnaître une DÉMONSTRATION

Pour que des explications soient une démonstration il faut que :
1- Tout ce qui est dit soit juste.

2- Les explications données soient complètes : tout est expliqué
En lisant ce qui est écrit on ne peut pas se poser la question POURQUOI ?.

3- Dans les explications on retrouve les données de départ
(celles qui ont servi à construire la figure).

4- Si on dit quelque chose (par exemple que des droites sont parallèles, ou que des diagonales se coupent en leur milieu) il faut :

- ou qu'on le sache avant (que ce soit les données du texte)
- ou qu'on le prouve.

5- Les preuves que nous donnons, nous devons les avoir trouvées dans les données.

Ce n'est pas une démonstration si :
1- Il y a des erreurs.

2- C'est incomplet : il manque des explications (on peut se demander POURQUOI ?).

3- Il manque les explications qui partent des données.

Savoir faire une DÉMONSTRATION

1- Se poser la question : comment démontrer que ... ?.

2- Faire la liste des méthodes possibles (ou consulter ses fiches).

3- Choisir une méthode qui ait un rapport avec les données du problème.

4- Essayer cette méthode.

5- Vérifier si ce qui est écrit est bien une démonstration.

6- Si ça ne marche pas, essayer une autre méthode (de la liste).

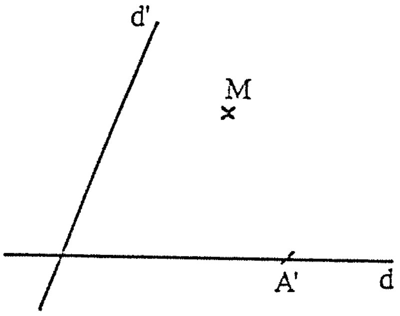
Feuille 4

4e

MATHEMATIQUES

Devoir surveillé n° 5

A (4 points)

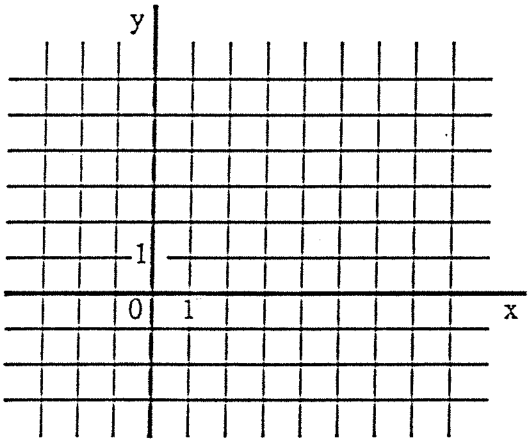


1- Construis sur la figure ci-contre le point N projection du point M sur d' parallèlement à d.

2- Construis le point A en sachant que :
- sa projection sur d' parallèlement à d est le point N
- sa projection sur d parallèlement à d' est le point A'.

3- Que peux tu dire du quadrilatère ONAA' ? Démontre-le.

B (9 points)



1- Place dans le repère ci-contre les points suivants : R(-2 ; 2) A(3 ; 3) T(2; -1) P(-3 ; -2).

2- Place le point L tel que LATR soit un parallèlogramme et place les points I et K milieux respectifs des segments [RA] et [RT].

3- Calcule les coordonnées des points I et K.

4- Calcule les coordonnées du point L.

5- Démontre que la droite (IK) est parallèle à la droite (AT).

6- Que peux tu dire du quadrilatère RATP ? Prouve-le.

C (7 points)

1- Trace un triangle DEF quelconque et construis les points suivants :
- I milieu du segment [EF]
- E' et I' projections orthogonales des points E et I sur la droite (DF).
- E" projection orthogonale du point E sur la droite (I I').

2- Démontre que I' est le milieu du segment [E'F].

3- La longueur I I' est égale à la moitié de EE'. Pourquoi ?

4- Quelle est la nature de EE"I'E' ? Justifie la réponse.

5- Quelle est la projection orthogonale du point F sur la droite (EE') ?
Y a-t-il d'autres points de la figure qui ont la même projection orthogonale que F sur (EE')?
Si oui, cite-les.

ANNEXE 2

Savoir démontrer qu'un quadrilatère est un CARRE

VRAI ou **FAUX** ? Entoure le numéro des phrases vraies, raye celui des phrases fausses. Complète la **20.**

1 - ABCD est un carré car ses diagonales se coupent en leur milieu.

2 - ABCD a un angle droit et 2 côtés consécutifs de même longueur donc c'est un carré.

3- Puisque AB = BC = CD = DA alors ABCD est carré.

4 - ABCD est un carré car ses diagonales se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires.

5- I est le milieu des diagonales [AC] et [BC] donc ABCD est un carré.

6 - ABCD est un carré car les diagonales ont un même milieu, il y a un angle droit et deux côtés sont égaux.

7 - Un parallélogramme qui a 4 côtés égaux et 1 angle droit est un carré.

8 - ABCD est un carré car ses 4 côtés sont de même mesure.

9 - ABCD est un parallélogramme car ses diagonales sont de même longueur.

10 - ABCD est un carré car ses diagonales sont perpendiculaires et ont même milieu.

11 - AB = BC = CD donc ABCD est un carré.

12 - Les diagonales ont même milieu et les 4 côtés sont égaux donc ABCD est un carré.

13 - ABCD est un carré si ses diagonales sont égales et qu'elles se coupent en leur milieu.

14 - $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\widehat{A} = 90°$ donc ABCD est un carré.

15 - Une figure qui a ses 4 côtés de même longueur et qui a un angle droit est un carré.

16 - ABCD est un parallélogramme, $\widehat{A} = 90°$ donc ABCD est un rectangle et comme 2 côtés adjacents sont égaux donc ABCD est un carré.

17 - ABC et ADC sont 2 triangles isocèles donc ABCD est un carré.

18 - Puisque I est le milieu des diagonales et que $\widehat{A}$ est un angle droit, ABCD est un carré.

19 - ABCD est un carré car les diagonales se coupent en leur milieu, AB = BC et il y a un angle droit $\widehat{A}$.

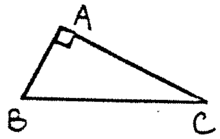
20 - ABCD est un carré si ......

ANNEXE 3

Exemples de personnalisation de fiches

❶ Comment calculer UNE LONGUEUR

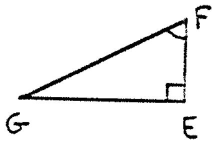
Méthode 1



En utilisant l'énoncé de Pythagore
si on a
- un triangle rectangle
- des longueurs connues

ABC rectangle en A → $AB^2 + AC^2 = BC^2$

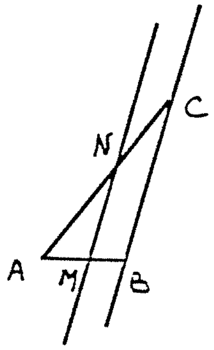
Méthode 2



En utilisant le cosinus, le sinus ou la tangente (Trigonométrie)
si on a
- un triangle rectangle
- des angles et des longueurs connus

EFG rectangle en E → $\cos \widehat{F} = \frac{EF}{GF}$

Méthode 3

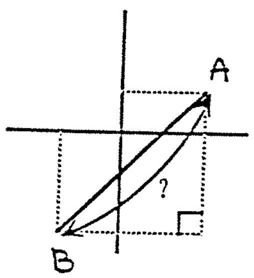


En utilisant l'énoncé de Thalès
si on a
- des triangles
- des parallèles
- des longueurs connues

ABC triangle
(MN) // (BC)
→ $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

Méthode 4

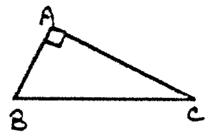
En utilisant la formule donnant la distance entre deux points dans un repère orthonormal ou le théorème de Pythagore
si on connaît les coordonnées des points.



$A(x_A\,;\,y_A)$
$B(x_B\,;\,y_B)$
→ $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

1 Comment calculer UNE LONGUEUR

Méthode 1



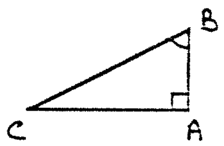
En utilisant l'énoncé de Pythagore

si on a
- un triangle rectangle
- des longueurs connues

Si ABC est rectangle en A,
alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$

Méthode 2

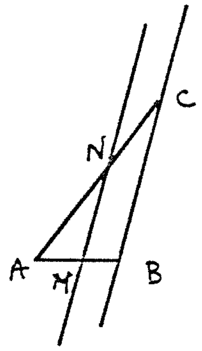
En utilisant le cosinus, le sinus ou la tangente (Trigonométrie)



si on a
- un triangle rectangle
- des angles et des longueurs connus

Si ABC est rectangle en A,
alors $\cos \widehat{B} = \frac{AB}{BC}$

Méthode 3



En utilisant l'énoncé de Thalès

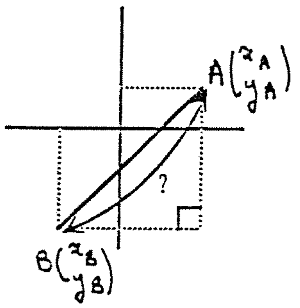
si on a
- des triangles
- des parallèles
- des longueurs connues

Si ABC est un triangle et $(MN) \parallel (BC)$
alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

Méthode 4

En utilisant la formule donnant la distance entre deux points dans un repère orthonormal ou le théorème de Pythagore

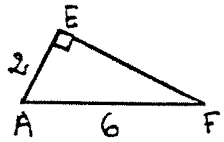
si on connaît les coordonnées des points.



Si $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$
alors $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

❶ Comment calculer UNE LONGUEUR

Méthode 1



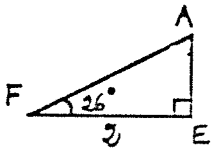
En utilisant l'énoncé de Pythagore

si on a
- un triangle rectangle
- des longueurs connues

ABC rectangle en E
$AE = 2$
$AF = 6$

$AF^2 = AE^2 + EF^2$
$36 = 4 + EF^2$
$EF^2 = 32$; $EF = \sqrt{32}$

Méthode 2



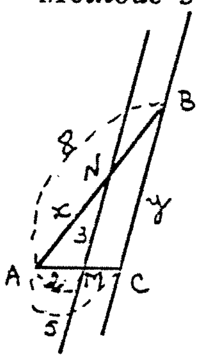
En utilisant le cosinus, le sinus ou la tangente (Trigonométrie)

si on a
- un triangle rectangle
- des angles et des longueurs connus

AEF rectangle en E
$EF = 2$
$\widehat{EFA} = 26°$

$\cos 26° = \dfrac{EF}{AF}$
$AF = \dfrac{2}{\cos 26°} \approx 2,23$

Méthode 3



En utilisant l'énoncé de Thalès

si on a
- des triangles
- des parallèles
- des longueurs connues

ABC triangle
(MN) ∥ (BC)
$AM = 2$
$AC = 5$
$AB = 8$

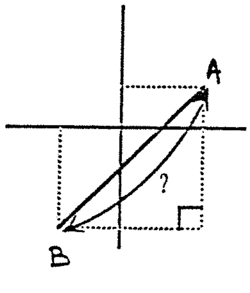
$\dfrac{AN}{AB} = \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$

$\dfrac{x}{8} = \dfrac{2}{5}$ $\qquad \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{y}$

$x = \dfrac{16}{5} = 3,2$

$y = \dfrac{15}{2} = 7,5$

Méthode 4



En utilisant la formule donnant la distance entre deux points dans un repère orthonormal ou le théorème de Pythagore

si on connaît les coordonnées des points.

$A(2\,;1)$
$B(-1\,;-3)$

$AB = \sqrt{(-1-2)^2 + (-3-1)^2}$

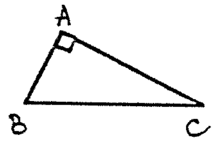
$AB = \sqrt{9+16}$

$AB = \sqrt{25}$

$AB = 5.$

Comment calculer UNE LONGUEUR

Méthode 1



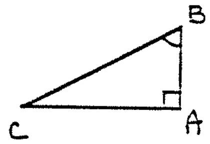
En utilisant l'énoncé de Pythagore

si on a
- un triangle rectangle
- des longueurs connues

ABC rectangle en A
donc
$AB^2 + AC^2 = BC^2$

Données : $AB = 2$; $BC = 6$
$AC^2 + 4 = 36$
$AC^2 = 32$; $AC = \sqrt{32}$

Méthode 2



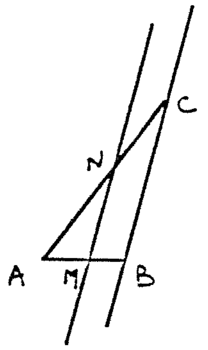
En utilisant le cosinus, le sinus ou la tangente (Trigonométrie)

si on a
- un triangle rectangle
- des angles et des longueurs connus

ABC rectangle en A
donc
$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC}$

Données : $\hat{B} = 26°$; $AC = 4$
$\sin \hat{B} = \frac{AC}{CB}$
$\sin 26° = \frac{4}{CB}$; $CB = \frac{4}{\sin 26°}$

Méthode 3



En utilisant l'énoncé de Thalès

si on a
- des triangles
- des parallèles
- des longueurs connues

ABC triangle
(MN) // (BC)
donc
$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

Données : $AM = 2$; $AN = x$; $MN = 3$
$AB = 5$; $AC = 8$; $BC = y$

$\frac{2}{5} = \frac{x}{8}$ $\qquad$ $\frac{2}{5} = \frac{3}{y}$

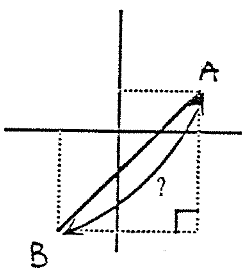
$x = \frac{16}{5} = 3,2$ $\qquad$ $y = \frac{15}{2} = 7,5$

$AN = 3,2$ $\qquad$ $BC = 7,5$

Méthode 4

En utilisant la formule donnant la distance entre deux points dans un repère orthonormal ou le théorème de Pythagore

si on connaît les coordonnées des points.

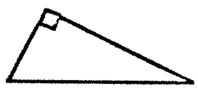


$A(x_A ; y_A)$
$B(x_B ; y_B)$
donc
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Données : $A(2 ; 1)$
$B(-2 ; -3)$
$AB = \sqrt{(-2-2)^2 + (-3-1)^2}$
$AB = \sqrt{16 + 16}$
$AB = \sqrt{32}$

❶ Comment calculer UNE LONGUEUR

Méthode 1

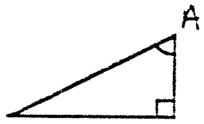


En utilisant l'énoncé de Pythagore

si on a
- un triangle rectangle
- des longueurs connues

Dans un triangle rectangle, la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit est égale au carré de l'hypoténuse.

Méthode 2



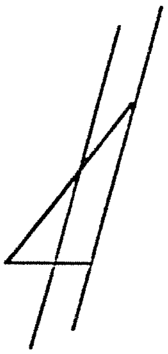
En utilisant le cosinus, le sinus ou la tangente (Trigonométrie)

si on a
- un triangle rectangle
- des angles et des longueurs connus

Dans un triangle rectangle :

$\cos \hat{A} = \frac{\text{côté adj}}{\text{hyp}}$; $\sin \hat{A} = \frac{\text{côté opp}}{\text{hyp}}$; $\tan \hat{A} = \frac{\text{côté opp}}{\text{côté adj}}$

Méthode 3



En utilisant l'énoncé de Thalès

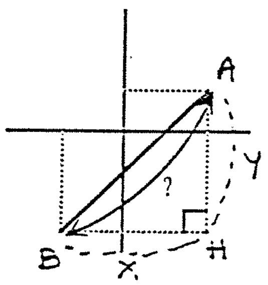
si on a
- des triangles
- des parallèles
- des longueurs connues

Dans un triangle, si on trace une parallèle à l'un des côtés, les longueurs des côtés des triangles obtenus sont proportionnelles.

Méthode 4

En utilisant la formule donnant la distance entre deux points dans un repère orthonormal ou le théorème de Pythagore

si on connaît les coordonnées des points.



$A(x_A ; y_A)$; $B(x_B ; y_B)$

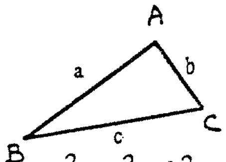
$\overrightarrow{AB}(\underbrace{x_B - x_A}_{X} ; \underbrace{y_B - y_A}_{Y})$

$AB^2 = AH^2 + HB^2$

$AB^2 = X^2 + Y^2$

13 **Comment démontrer qu'un TRIANGLE est RECTANGLE**

Méthode 1



$c^2 = a^2 + b^2$

En prouvant que le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres (réciproque de Pythagore)
si on a les longueurs des trois côtés

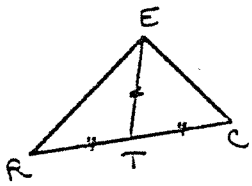
ou

si on a des relations entre les longueurs des côtés

<u>Si</u> $BA^2 + AC^2 = BC^2$
<u>alors</u> BAC triangle rectangle en A

Méthode 2

En prouvant qu'une médiane est égale à la moitié du côté qu'elle coupe

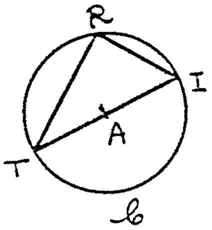


<u>Si</u> | T milieu de [RC]
| et
| $ET = \frac{1}{2} RC$

<u>alors</u> REC triangle rectangle en E

Méthode 3

En prouvant :
- *que ses sommets sont sur un cercle*
- *que l'un des côtés est un diamètre du cercle*

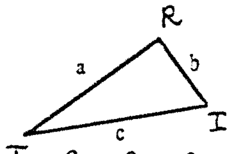


<u>Si</u> | [TI] diamètre de $\mathscr{C}$
| et
| R point de $\mathscr{C}$

<u>alors</u> TRI triangle rectangle en R

13 Comment démontrer qu'un TRIANGLE est RECTANGLE

Méthode 1



$c^2 = a^2 + b^2$

En prouvant que le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres (réciproque de Pythagore)
si on a les longueurs des trois côtés

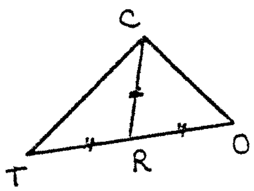
ou

si on a des relations entre les longueurs des côtés

$TR^2 + RI^2 = TI^2$ —— TRI rectangle en R

Méthode 2

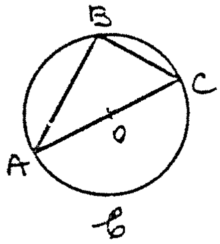
En prouvant qu'une médiane est égale à la moitié du côté qu'elle coupe



M milieu de [TO]
$CR = \frac{1}{2} TO$ —— TOC rectangle en C

Méthode 3

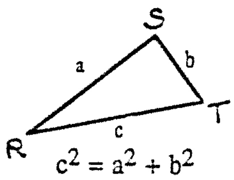
En prouvant :
- *que ses sommets sont sur un cercle*
- *que l'un des côtés est un diamètre du cercle*



B point de 𝒞
[AC] diamètre de 𝒞 —— ABC rectangle en B

13 Comment démontrer qu'un TRIANGLE est RECTANGLE

Méthode 1



$c^2 = a^2 + b^2$

En prouvant que le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres (réciproque de Pythagore)

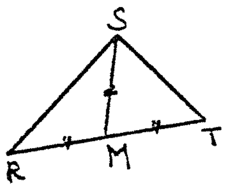
si on a les longueurs des trois côtés

ou

si on a des relations entre les longueurs des côtés

Si $RS^2 + ST^2 = RT^2$ alors RST est un triangle rectangle en S.

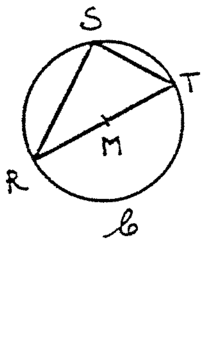
Méthode 2



En prouvant qu'une médiane est égale à la moitié du côté qu'elle coupe

Si [SM] médiane et si $SM = \frac{1}{2} RT$ alors RST est un triangle rectangle en S.

Méthode 3



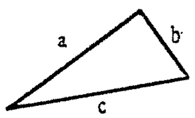
En prouvant :

- *que ses sommets sont sur un cercle*
- *que l'un des côtés est un diamètre du cercle*

Si [RT] diamètre de 𝒞 et si S point de 𝒞 alors RST est un triangle rectangle en S.

13 Comment démontrer qu'un TRIANGLE est RECTANGLE

Méthode 1



$c^2 = a^2 + b^2$

En prouvant que le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres (réciproque de Pythagore)

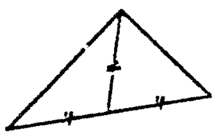
si on a les longueurs des trois côtés

ou

si on a des relations entre les longueurs des côtés

Dans un triangle, si la somme des carrés des deux plus petits côtés est égale au carré du plus grand alors ce triangle est rectangle.

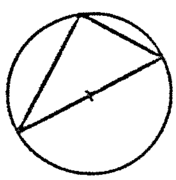
Méthode 2



En prouvant qu'une médiane est égale à la moitié du côté qu'elle coupe

Dans un triangle, si la médiane relative au plus grand côté est égale à la moitié de ce côté alors ce triangle est rectangle.

Méthode 3



En prouvant :

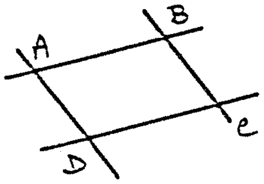
- *que ses sommets sont sur un cercle*
- *que l'un des côtés est un diamètre du cercle*

Si un triangle est inscriptible dans un cercle et si le plus grand côté du triangle est diamètre du cercle alors ce triangle est rectangle.

❶❹ Comment démontrer qu'un QUADRILATERE est un PARALLELOGRAMME

Méthode 1

En prouvant que les côtés opposés sont parallèles



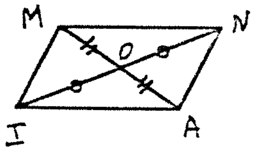
$(AB) \parallel (CD)$

$(AD) \parallel (BC)$

→ ABCD parallélogramme

Méthode 2

En prouvant que les diagonales ont le même milieu

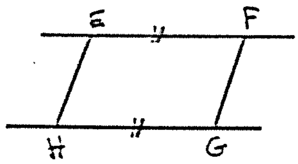


O milieu de [AM] et de [IN] → ANMI parallélogramme

Méthode 3

En prouvant que deux côtés sont

et
- *parallèles*
- *de même longueur*



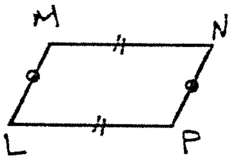
$EF = GH$

$(EF) \parallel (GH)$

→ EFGH parallélogramme

Méthode 4

En prouvant que les côtés opposés sont de même longueur



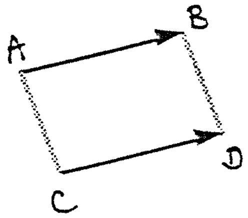
$MN = LP$

$ML = NP$

→ MNPL parallélogramme

Méthode 5

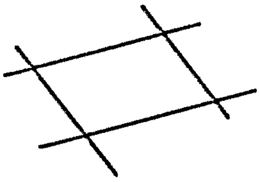
En prouvant que deux vecteurs sont égaux



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ → ABDC parallélogramme

14 Comment démontrer qu'un QUADRILATERE est un PARALLELOGRAMME

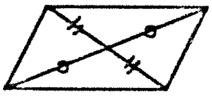
Méthode 1



En prouvant que les côtés opposés sont parallèles

car : " Un quadrilatère qui a ses côtés opposés parallèles est un parallélogramme ".

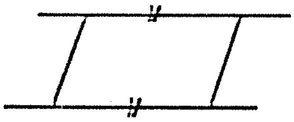
Méthode 2



En prouvant que les diagonales ont le même milieu

car : " Un quadrilatère qui a ses diagonales de même milieu est un parallélogramme ".

Méthode 3

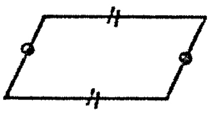


En prouvant que deux côtés sont

et
- *parallèles*
- *de même longueur*

car : " Un quadrilatère qui a deux côtés à la fois parallèles et de même mesure est un parallélogramme ."

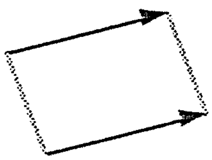
Méthode 4



En prouvant que les côtés opposés sont de même longueur

car : " Un quadrilatère qui a ses côtés opposés de même longueur est un parallélogramme ".

Méthode 5

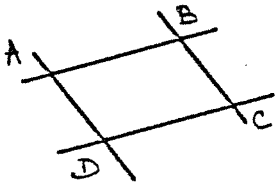


En prouvant que deux vecteurs sont égaux

car : " Deux vecteurs égaux déterminent un parallélogramme ".

14 Comment démontrer qu'un QUADRILATERE est un PARALLELOGRAMME

Méthode 1

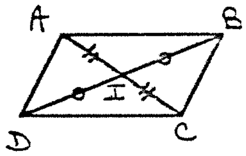


En prouvant que les côtés opposés sont parallèles

(AB) // (CD) — (AD) // (BC)

ABCD parallélogramme

Méthode 2

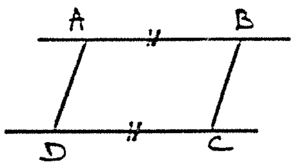


En prouvant que les diagonales ont le même milieu

I milieu de [AC] et [BD]

ABCD parallélogramme

Méthode 3



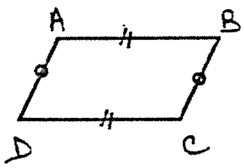
En prouvant que deux côtés sont

et
- *parallèles*
- *de même longueur*

(AB) // (CD) — AB = CD

ABCD parallélogramme

Méthode 4

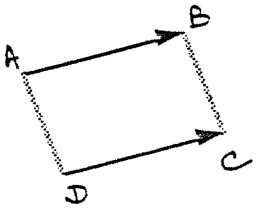


En prouvant que les côtés opposés sont de même longueur

AB = CD — AD = BC

ABCD parallélogramme

Méthode 5



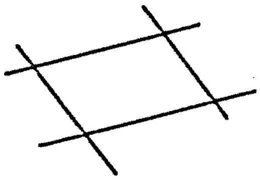
En prouvant que deux vecteurs sont égaux

$\vec{AB} = \vec{DC}$

ABCD parallélogramme

14 Comment démontrer qu'un QUADRILATERE est un PARALLELOGRAMME

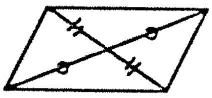
Méthode 1



En prouvant que les côtés opposés sont parallèles

Si un quadrilatère a les côtés opposés parallèles
alors c'est un parallélogramme.

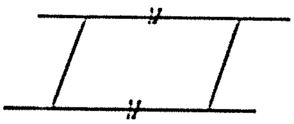
Méthode 2



En prouvant que les diagonales ont le même milieu

Si un quadrilatère a les diagonales de même milieu
alors c'est un parallélogramme.

Méthode 3

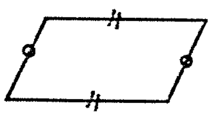


En prouvant que deux côtés sont

et
- *parallèles*
- *de même longueur*

Si un quadrilatère a 2 côtés à la fois parallèles et de même longueur
alors c'est un parallélogramme.

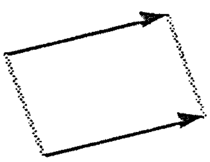
Méthode 4



En prouvant que les côtés opposés sont de même longueur

Si un quadrilatère a ses côtés opposés de même longueur
alors c'est un parallélogramme.

Méthode 5



En prouvant que deux vecteurs sont égaux

Si deux vecteurs sont égaux
alors ils déterminent un parallélogramme.

ANNEXE 4

Comment démontrer qu'un point est le MILIEU d'un SEGMENT

modèle 88-89

1- En montrant qu'il est sur le segment et à égale distance de ses extrémités

A, I, B alignés

AI = IB

Un point d'un segment qui est à égale distance des extremités est le MILIEU de ce segment.

I est le milieu de [AB]

2- En utilisant la symétrie centrale

A' symétrique de A par rapport à O.

O milieu de [AA']

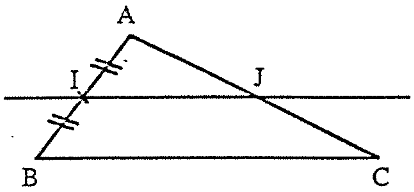
3- En utilisant le point d'intersection des diagonales d'un parallélogramme ou d'un rectangle, ou d'un losange ou d'un carré

par exemple si $\left\{ \begin{array}{c} \text{ABCD parallélogramme} \\ \text{(AC) et (BD) se coupent en I} \end{array} \right.$ alors I milieu de [AC]

4- En utilisant une médiane dans un triangle, ou la médiatrice du segment (voir droites remarquables du triangle)

5- En utilisant une projection et le théorème qui se résume par : "la projection conserve les milieux"

6- En utilisant un triangle



(ABC) triangle

I milieu de [AB]

(IJ) // (BC)

Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui est parallèle à un autre côté passe obligatoirement par le milieu du 3ème côté.

J milieu de [AC]

7- Dans un repère, en montrant que

$\left\{ \begin{array}{l} \text{son abscisse est la demi-somme des abscisses des extrémités} \\ \text{et que} \\ \text{son ordonnée est la demi-somme des ordonnées des extrémités} \end{array} \right.$

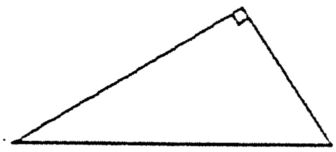
Comparons une fiche "Comment démontrer qu'un point est le milieu d'un segment" modèle 88-89 et la fiche modèle 91 du fichier.
Les **1-** et **2-** ont été éliminés car les notions utilisées ont été considérées comme triviales.
Les **3-** et **4-** ont été regroupés pour la méthode 1
Les **5-** et **6-** ont été regroupés pour la méthodes 2
Le **7-** représente la méthode 3
Noter que le modèle 88-89 était difficilement jetable car comportant trop de méthodes et étant trop détaillé.

Je peux CALCULER une LONGUEUR

Si j'ai

un triangle rectangle
la longueur de deux côtés

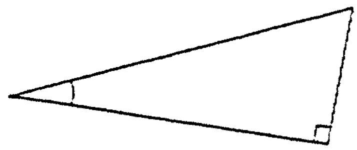
En utilisant le théorème de PYTHAGORE



Si j'ai

un triangle rectangle
un côté et un angle aigu

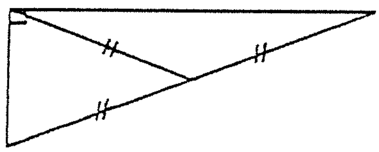
En utilisant le COSINUS



Si j'ai

un triangle rectangle
la longueur de la médiane issue de l'angle droit

En utilisant le Théorème de la médiane



Si j'ai

une aire
une longueur

En utilisant le fait qu'une aire est le produit de deux longueurs

---

Comment calculer une DISTANCE

1- Dans un triangle rectangle avec Pythagore

2- Dans un triangle rectangle avec la trigo.

3- En utilisant le milieu d'un segment
si I milieu de [AB] alors $AI = \frac{1}{2} AB$

4- En utilisant le segment des milieux dans un triangle

I milieu de [AB] | J milieu de [AC]

Le segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est égal à la moitié du 3ème côté.

$IJ = \frac{1}{2} \times BC$

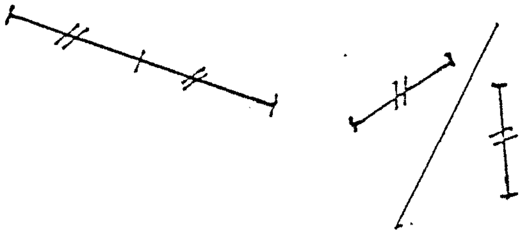
5- En montrant qu'elle est égale à une autre distance
(voir comment démontrer que 2 distances sont égales)

6- En utlilisant le <u>théorème de Thalès</u> dans un triangle à la condition qu'il y ait des droites parallèles

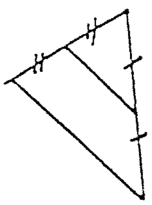
7- Dans un repère en utilisant la formule
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Tous les points du cercle sont à une même distance du centre

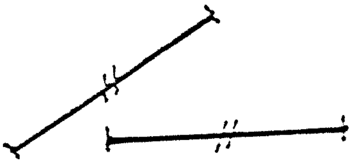
Deux segments symétriques ont même longueur.



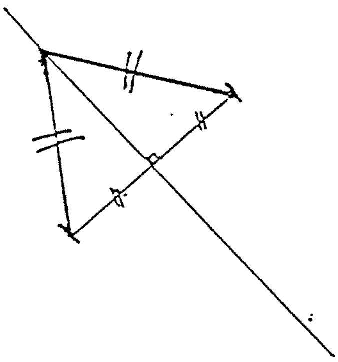
Le segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle mesure la moitié du 3ème côté



même longueur



Un point de la médiatrice d'un segment est à la même distance des extrémités du segment



Un triangle isocèle a deux côtés égaux

Un parallélogramme a ses côtés opposés de même longueur.

Un losange a ses côtés de même longueur.

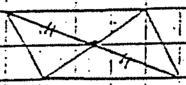
Les diagonales d'un rectangle ont la même longueur.

Dans un triangle rectangle la médiane relative à l'hypoténuse mesure la moitié de l'hypoténuse

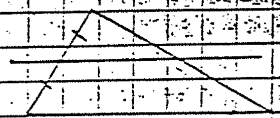
MILIEU

Comment démontrer qu'un point est milieu segment ?

Méthode 1 - si on sait que c'est l'intersection des diagonales d'un parallélogramme.



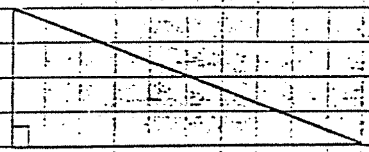
Méthode 2 - si on sait que c'est l'intersection
- d'un côté d'un triangle
- d'une droite qui est parallèle à un 2ème côté et qui passe par le milieu du 3ème côté



LONGUEUR (OU DISTANCE)

Comment calculer une longueur ?

Méthode 1 : en utilisant PYTHAGORE. Il faut pour cela un triangle rectangle.

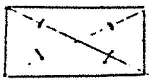


RECTANGLE.

Comment démontrer qu'un quadrilatère est un rectangle ?

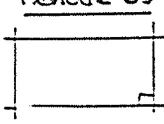
méthode 1 : si il a 3 angles droits.

méthode 2 - si les diagonales :
. ont même milieu



. ont même longueur

méthode 3 -

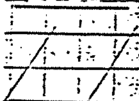


. si les côtés sont parallèles 2 à 2.
. si 2 côtés sont perpendiculaires.

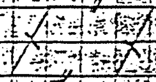
PARALLÉLOGRAMME

Comment démontrer qu'un quadrilatère est parallélogramme ?

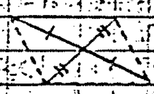
Méthode 1 : si on sait que ses côtés sont parallèles 2 à 2



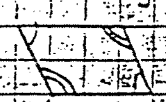
Méthode 2 - si on sait que ses côtés opposés sont de même longueur



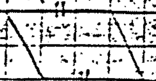
Méthode 3 - si on sait que ses diagonales ont même milieu



Méthode 4 - si on sait que les 2 angles opposés ont même mesure

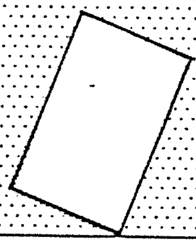


Méthode 5 - si on sait que deux côtés opposés :
sont parallèles
ont même mesure



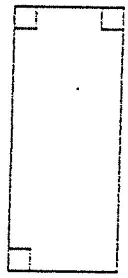
Je peux DEMONTRER

RECTANGLE



Si j'ai un quadrilatère trois angles droits

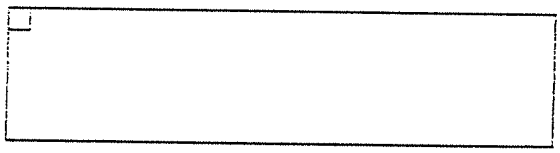
en utilisant la propriété



Un quadrilatère qui a trois angles droits est un rectangle.

Si j'ai un parallélogramme un angle droit

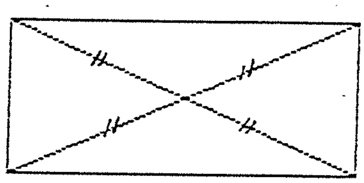
en utilisant la propriété



Un parallèlogramme ayant un angle droit est un rectangle.

Si j'ai un parallélogramme diagonales de même mesure

en utilisant la propriété



Un parallèlogramme ayant ses diagonales de même mesure est un rectangle.

6

Comment demontrer qu'un quadrilatère est un rectangle

1) en montrant qu'il a 3 angles droits

Si | un quadrilatère a 3 angles droits | alors | ce quadrilatère est un rectangle |

2) en montrant que ses diagonales sont de même milieu et de même mesure

Si | un quadrilatère a ses diagonales de même milieu et de même mesure | alors | c'est un rectangle |

3) en montrant que c'est un parallélogramme et qu'il a un angle droit.

Si | un parallélogramme a un angle droit | alors | c'est un rectangle |

Comment démontrer qu'un quadrilatère est un rectangle

1) en montrant qu'il a trois angles droits.	$\hat{A}$ droit · $\hat{B}$: 90° · $\hat{C}$: 90° ↓ un quadrilatère qui a trois angles droits est un rectangle. ↓ ABCD rectangle
2) En montrant que c'est un parallélogramme qui a un angle droit.	ABCD parallélogramme · $\hat{A}$: 90° ↓ un parallélogramme qui a un angle droit est un rectang[le] ↓ ABCD rectangle

ANNEXE 5

ANNEXE 1

Comment faire pour démontrer qu'on a une bijection ?
Savoirs procéduraux liés aux bijections (niveau TC)

1°) *Vérifier qu'il s'agit d'une application.*

2°) S'il s'agit d'une application en GÉOMÉTRIE PLANE

$$T : \begin{cases} M \longmapsto M' \\ E \longrightarrow E' \end{cases}$$

On note, s'il y a lieu, (x, y) les coordonnées de M et z son affixe ;
de même (x', y') et z' pour M'.

et SI elle est est exprimée analytiquement : $(x', y') = F(x, y)$

ALORS on cherche (x, y) *en fonction de* (x', y')

si il y a une solution unique,

ALORS T est bijective.

et SI elle est est exprimée sous forme complexe : $z' = f(z)$

ALORS on cherche z *en fonction de* z'

si il y a une solution unique,

ALORS c'est une bijection.

et SI l'application est *composée de bijections*

ALORS c'est une bijection.

et SINON, pour tout M' de E', on cherche à cosntruire M de E, *antécédent de* M'

si il y a une solution unique,

ALORS T est bijective.

[S'il s'agit de bijection en GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE seule la forme complexe est exclue.]

3°) S'il s'agit d'une APPLICATION NUMERIQUE D'UNE VARIABLE RÉELLE

$$f : \begin{cases} x \longmapsto f(x) \\ I \longrightarrow f(I) \end{cases}$$ définie sur un intervalle I

et SI elle est *continue* sur I

ALORS on cherche ses *variations*.

et si elle est *strictement monotone sur* I

ALORS c'est une bijection de I sur $f(I)$.

N.B.- Les autres cas se ramènent en général à l'un des cas précités.
La fiche ci-dessus est une fiche pratique de travail où, pour la clarté du schéma, apparaissent des abus de langage. Dans le travail, quand il s'agit de résoudre les équations, nous réintroduisons les quantificateurs :
« *Pour tout z', affixe de M' de E', cherchons z, affixe de M de E, tel que : z' = f(z) ...* »

Auteurs	*M.J. BACH - J. FROMENTIN - D. GAUD - JP. GUICHARD - M. MAROT - C. ROBIN*
Titre	Méthodes et connaissances de référence en mathématiques au collège Fasicule 1 - Fichier Méthodes (Fasicule d'accompagnement)
Editeur	IREM de POITIERS
Date	Janvier 1991
Niveau	De la sixième à la seconde
Mots-clé	Démontrer - Calculer - Construire - Résoudre - Transformer

Résumé	Cette brochure accompagne le fichier METHODE. Elle explique les choix faits pour la conception de la brochure élève et en donne des exemples d'utilisation.

IREM - 40, Avenue du Recteur Pineau 86022 POITIERS CEDEX

ISBN 2-85954-033-4