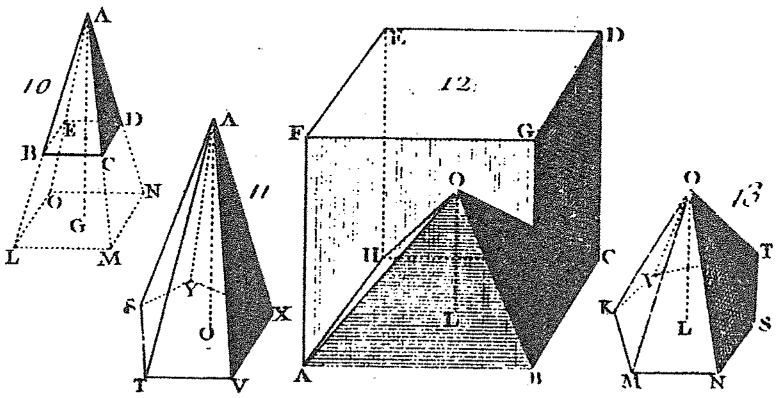
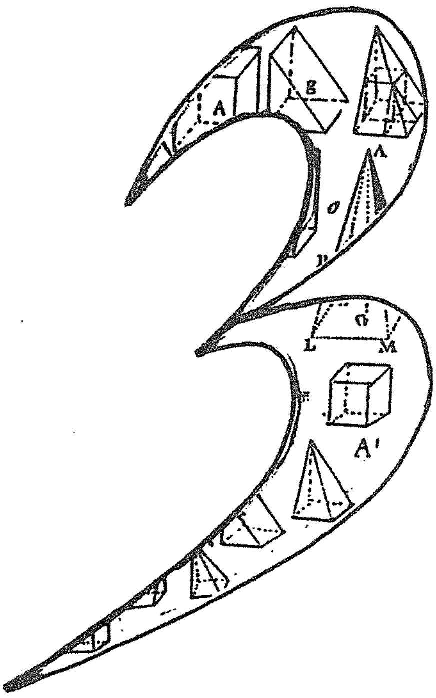
UNIVERSITE de POITIERS

Institut de Recherche
sur l'Enseignement des Mathématiques

MAI 1989

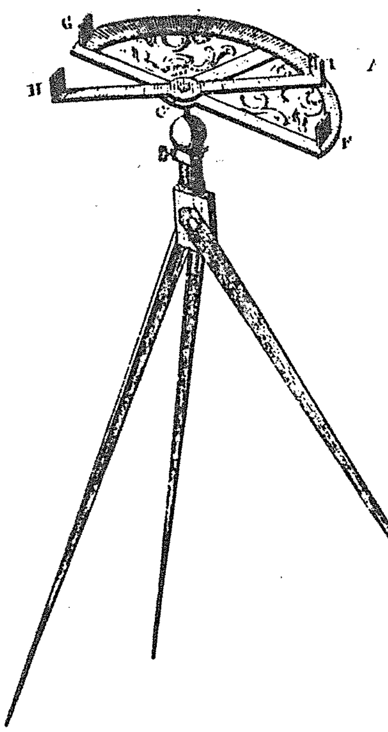


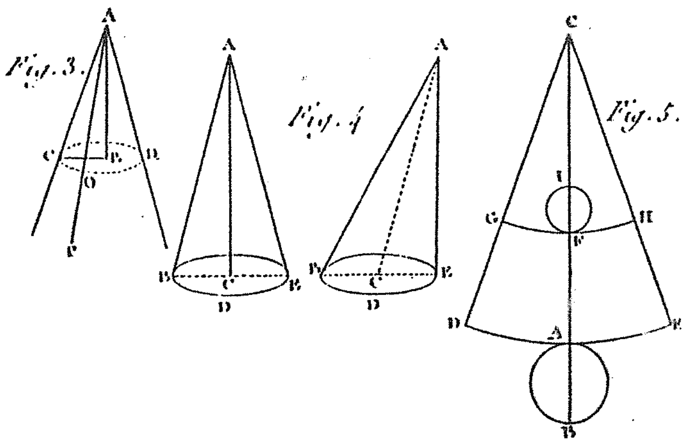


COMPTE RENDU DE L'EXPERIMENTATION DES NOUVEAUX PROGRAMMES
de Troisième

FASCICULE 2

CALCULS D'ELEMENTS METRIQUES (2) : Trigonométrie
GEOMETRIE DANS L'ESPACE
TRAVAUX NUMERIQUES (2) : Calcul littéral





M.J. BACH
D. GAUD
J.P. GUICHARD
M. MAROT
C. ROBIN
M. ROBIN

SOMMAIRE

AVERTISSEMENT

Contrairement aux années précédentes nous n'avons pas voulu dissocier algèbre et géométrie. En effet plus que les autres années les contenus sont intimement liés : peut-on enseigner les règles de calcul sur les racines sans utiliser abondamment des situations géométriques qui donnent sens à ces règles, le calcul littéral n'est-il pas présent partout (Thalès, espace...) ?

Aussi nous avons choisi de publier les comptes rendus de l'expérimentation dans l'ordre où nous avons présenté le travail aux élèves, ce qui nous l'espérons permettra de bien rendre compte de la "spiralité" des programmes.

L'équipe.

PROGRAMME DE TROISIEME
Fascicule 2

CONDITIONS D'EXPERIMENTATION

Le collège

Collège de Vouneuil-sur-Vienne. Ce collège rural compte 551 élèves ; ces élèves sont issus pour la plupart de milieux ouvriers ou employés.

Les classes

Deux troisièmes de 24 élèves sont concernées.
Ces élèves ont participé au suivi scientifique en 6ème-5ème et 4ème sur la totalité des programmes.
Les horaires de ces classes sont en parallèle.

L'équipe

Elle est composée de trois professeurs du collège et de l'ex-directeur d'études de mathématiques du centre de P.E.G.C.

Les contenus

Les contenus du programme ont été répartis en dominantes (nous appelons dominante un thème fédérateur qui nécessite un apprentissage spécifique).
En 3ème nous avons retenu les dominantes suivantes :

1. Calculs d'éléments métriques.
Exemples de contenus : énoncé de Thalès, trigonométrie.

2. Système d'équations, équations d'une droite.

3. Calculs numériques.
Exemples de contenus : calculs sur les racines, identités remarquables, équations, inéquations.

4. Transformations - vecteurs.

5. Gestion de données.
Exemples de contenus : statistiques, fonctions affines.

6. Géométrie dans l'espace.

7. Résolution de problèmes.
Exemples de contenus : géométrie analytique, réciproque de Thalès, angles inscrits.

Ces dominantes ne sont pas disjointes. Elles interfèrent entre elles. Certaines dominantes peuvent être fractionnées. L'ordre de présentation est fonction des choix didactiques de chacun.

Présentation des contenus aux élèves - gestion des classes.

La présentation des contenus, la gestion des classes sont élaborées en fonction des buts que nous nous sommes fixés :

- développer l'autonomie des élèves,
- faire en sorte que chacun atteigne les objectifs, ce qui nous oblige à tenir compte de l'hétérogénéité des classes.

Présentation des contenus

Sauf cas contraire, les contenus sont présentés de la manière suivante :

- *Une activité*

Pour définir une activité nous avons retenu les critères suivants (conformément aux programmes) :

. l'énoncé est court (en général) et compris de tous les élèves
. la réponse n'est pas évidente
. pour répondre, l'élève devra :
    - soit découvrir la connaissance visée,
    - soit découvrir ce qu'il faudrait savoir pour résoudre le problème,
    - soit mobiliser les notions antérieures.

Le problème est riche (plusieurs démarches sont possibles ou (et) plusieurs solutions sont possibles). L'élève peut formuler des questions intermédiaires (ce qui exclut un recours à un découpage a priori fait par le professeur).

- *Synthèse de l'activité* (effectuée collectivement) :

. formulation des résultats et des démarches par les élèves,
. validation des résultats par la classe et le professeur,
. énoncé des objectifs par les élèves en accord avec le professeur.

- *Exercices didactiques et auto-test.*

- *Test.*

Gestion des classes

Les élèves sont groupés par 4 depuis la sixième, ce qui signifie que le travail est d'abord individuel puis des échanges ont lieu à l'intérieur des groupes. Ces échanges peuvent revêtir plusieurs formes :

- échanges de résultats,
- entraide.

Les groupes se sont constitués par affinité. Le professeur apporte soit des aides individuelles soit des aides aux groupes et gère les synthèses. Les énoncés des activités et des exercices sont sur fiches.

Avant chaque série d'exercices didactiques, est imposé un contrat composé d'un certain nombre d'exercices et d'une durée.
Exemple : "les 6 premiers exercices sont obligatoires, durée de la fiche 2 heures".

Cela signifie pour l'élève, que ces 6 exercices doivent être faits à l'issue de ces 2 heures, libre à l'élève de s'avancer chez lui.

A l'issue des résolutions d'exercices didactiques nous nous efforçons de proposer aux élèves des auto-tests portant sur des objectifs purement techniques pour vérifier si ceux-ci sont atteints. Aucune contrainte n'est imposée à l'élève pour ces auto-tests, il est libre de les faire ou non. En cas de non atteinte des objectifs, les élèves peuvent consulter un recueil d'exercices supplémentaires auto-correctifs (à faire seul).

A l'issue du test, des groupes de besoin peuvent être établis : on regroupe les élèves ayant des difficultés pour un réapprentissage bref (2 ou 3 h maximum). Cela est permis par les horaires en parallèle.

Matériels utilisés

Outre le matériel classique (instruments de géométrie, calculatrice) les élèves ont à leur disposition :

- un répertoire où sont consignés les résultats vus depuis la 6ème, le répertoire est complété chaque année. Il suit l'élève de la sixième à la troisième,

- un fichier méthodologique "comment démontrer que" qui s'élabore depuis le début de la quatrième.

LES PROGRAMMES

Classe de troisième

Le travail effectué doit permettre à l'élève de s'approprier solidement l'usage des instruments de mesure et de dessin, d'acquérir définitivement des techniques opératoires (mentales ou écrites) et, conjointement, d'utiliser avec sûreté des calculatrices de poche, de s'entraîner constamment au raisonnement déductif.
L'utilisation d'un ordinateur peut accompagner utilement ces activités.

Travaux géométriques

1) Enoncé de Thalès relatif au triangle.
Application à des problèmes de construction (moyenne géométrique...)
Pyramide et cône de révolution : volume, section par un plan parallèle à la base.
Effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur longueurs, aires et volumes, masses.

2) Angles.
Relations trigonométriques dans le triangle rectangle.
Angle inscrit dans un cercle et angle au centre.

3) Dans le plan, construction de transformées de figures par composition de deux translations ; de deux symétries centrales; de deux symétries orthogonales par rapport à des droites parallèles ou perpendiculaires.

4) Translation et vecteur. Egalité vectorielle :
dans le plan rapporté à un repère : effet d'un déplacement par translation sur les coordonnées d'un point ; coordonnées d'un vecteur.

5) Distance de deux points en repère orthonormé :
Equation d'une droite sous la forme :
$$y = mx \; ; \; y = mx + p \; ; \; x = p.$$
Coefficient directeur ; parallélisme, orthogonalité en repère orthonormal.

6) Addition vectorielle.

Travaux numériques

1) Ecritures littérales :
Factorisation d'expressions de la forme :
$a^2 - b^2$; $a^2 + 2\ ab + b^2$; $a^2 - 2\ ab + b^2$
(a et b désignent des formes simples de nombres exprimés dans les différentes écritures déjà rencontrées).

2) Calculs élémentaires sur les radicaux (racines carrées):
. produit et quotient de deux radicaux.
. puissance d'ordre 2 ou 4 d'un radical.

3) Equations et inéquations du premier degré :
. Méthodes de résolution d'un système de deux équations ou inéquations du premier degré à deux inconnues à coefficients numériques.
. Méthodes de résolution d'un système de deux équations ou inéquations du premier degré à deux inconnues à coefficients numériques.
Exemples variés de problèmes se ramenant au premier degré.

Organisation et gestion de données. Fonctions.

1) Applications affines : représentation graphique d'une application affine.

2) Exploitation de données statistiques :
moyenne ; moyennes pondérées ; médiane.

3) Mise en oeuvre de la proportionnalité sur des grandeurs-quotients ou sur des grandeurs-produits.

4) Résolution d'équations par essais et corrections successifs.

5) Analyse (et construction) d'algorithmes comme suite d'instructions aboutissant à la résolution d'un problème donné. Application numérique à l'aide d'un ordinateur.

Classe de Troisième

EXPLICITATION DES CONNAISSANCES, DES METHODES ET DES CAPACITES EXIGIBLES DES ELEVES.

Remarques préliminaires

Les commentaires des quatre classes des collèges sont indissociables ; ils se réfèrent aux lignes directrices définies en avant-propos des programmes (cf. Livre de Poche des Collèges, pp.77 à 82).

Dans le cadre du programme le professeur a toute liberté pour l'organisation de son enseignement. En particulier il lui revient de déterminer selon le niveau de sa classe les résultats qui seront démontrés et ceux qui seront admis.

L'approfondissement des notions déjà acquises, l'entraînement au raisonnement déductif sont conduits dans l'esprit des classes antérieures, sans reconstruction systématique et à propos de situations nouvelles, de façon à développer les capacités de découverte et de conjecture autant que de démonstration. On évitera les exigences prématurées de formulation ; en particulier les propriétés caractéristiques seront encore exprimées à l'aide de deux énoncés séparés.

Les notations utilisées sont celles signalées en Quatrième, auxquelles s'ajoutent la notation du sinus et de la tangente d'un angle aigu. Les symboles $\subset$, $\cup$, $\cap$ sont hors programme ainsi que toute notion sur les ensembles et les relations. Sont également exclues la notation "o" des lois de composition, la notation de la valeur absolue et celles relatives aux intervalles des réels.

Les travaux numériques nécessitent l'emploi d'une calculatrice scientifique. L'usage de l'ordinateur pourra accompagner utilement les activités géométriques, numériques et graphiques.

Pour chacune des trois rubriques du programme, les objectifs figurent en bandeau :

- dans la colonne de droite sont fixées les capacités exigibles, c'est-à-dire les connaissances et les savoir-faire qu'on demande à l'élève d'avoir assimilés et d'être capable d'exploiter avec ce que cela comporte d'utilisation d'acquis des classes antérieures ;
- dans la colonne de gauche sont fixés les contenus et les limites du programme, ainsi que l'orientation des activités ; celles-ci ne sauraient se limiter aux seuls points évoqués dans la colonne de droite.

TRAVAUX GEOMETRIQUES

La **description** et la **représentation d'objets géométriques** usuels du plan et de l'espace, le **calcul de grandeurs** attachées à ces objets demeurent des objectifs fondamentaux.

Dans le plan, les travaux font appel aux figures usuelles (cercle, triangle, quadrilatères particuliers, polygones réguliers) et à leur transformation par symétrie, translation, rotation.
Avec les travaux sur les solides, les outils acquis, comme le théorème de Pythagore, ou nouveaux, comme le théorème de Thalès, sont mis en oeuvre conjointement dans le plan et dans l'espace.

Commentaires et capacités exigibles

1.a Enoncé de Thalès relatif au triangle, application à des problèmes de construction

Commentaires

Des activités expérimentales, reliées à la pratique de la projection, permettront de dégager le théorème de Thalès relatif au triangle et sa réciproque : cette réciproque sera formulée en précisant dans l'énoncé les positions relatives des points.

Des activités de construction sur droites graduées contribueront à éclairer la correspondance entre nombres et points (construire les $\frac{9}{7}$ d'un segment, placer sur une droite graduée le point d'abscisse $-\frac{2}{3}$ ....).

Cependant

- l'énoncé général du théorème de Thalès est hors programme ;
- toute intervention de mesures algébriques est exclue ;
- la construction d'une moyenne géométrique n'est pas demandée.

Capacités exigibles

- Connaître, et utiliser dans une situation donnée, le théorème de Thalès relatif au triangle,

($\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$, B' est sur la droite (AB), C' est sur la droite (AC)) et sa réciproque.

- Connaître et utiliser dans la même situation la propriété :

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

- Savoir construire une quatrième proportionnelle.

b. Pyramide et cône de révolution ; volume. Section par un plan parallèle à la base.

Commentaires

L'objectif est toujours d'apprendre à voir dans l'espace et de calculer des longueurs, des aires et des volumes, ce qui implique un large usage des représentations en perspective et de la fabrication de patrons.

L'observation et l'argumentation au cours de ces travaux font appel aux acquis de géométrie plane et à quelques énoncés courants concernant l'orthogonalité et le parallélisme. L'explicitation de ces énoncés n'est pas exigible des élèves.

Les activités sur la pyramide exploiteront des situations limitées et simples, se prêtant bien aux opérations de fabrication :

- pyramides dont une arête latérale est aussi la hauteur ;
- pyramides régulières à trois, quatre ou six faces latérales.

(Une pyramide régulière est une pyramide admettant comme base un polygone régulier, l'axe de ce polygone contenant le sommet de la pyramide).

Capacités exigibles

- Savoir, dans des situations simples et uniquement à propos de travaux sur les solides, utiliser le théorème de Pythagore pour des calculs de longueurs (diagonale d'un parallélépipède rectangle, rayon d'une section plane d'une sphère, hauteur d'une pyramide régulière...).

- Connaître et utiliser les formules de volume :

$V = Bh$ pour les prismes droits et le cylindre de révolution,

$V = \frac{1}{3}\,Bh$ pour les pyramides et le cône de révolution.

C. Effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs, aires et volumes.

Commentaires

Les activités, notamment en classe de cinquième, de dessin et de reproduction à une échelle donnée ont mis en oeuvre le principe de la multiplication des longueurs initiales par un même coefficient.

Des activités expérimentales dégageront l'effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur les aires, les volumes.

Capacités exigibles

- Utiliser, dans l'agrandissement ou la réduction d'un objet géométrique du plan ou de l'espace, la propriété : si les longueurs sont multipliées par k, alors les aires sont multipliées par k^2, les volumes le sont par k^3 et les angles sont conservés.

- Connaître et utiliser la propriété, pour la section d'une pyramide ou d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base, d'être une réduction de la base.

2. Angles. Relations trigonométriques dans le triangle rectangle. Angle inscrit dans un cercle et angle au centre.

Commentaires

On n'évoquera pas d'autre unité d'angle que le degré décimal.

La définition du cosinus d'un angle aigu a été mise en place en Quatrième. Le sinus et la tangente d'un angle aigu seront présentés comme des rapports dans le triangle rectangle.

Les formules $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$,sont seules au programme.

La comparaison d'un angle inscrit et de l'angle au centre qui intercepte le même arc fera l'objet d'activités mais aucune compétence n'est exigible sur ce point. Cette comparaison permet celle de deux angles inscrits interceptant le même arc, mais la recherche de l'ensemble des points du plan d'où l'on voit un segment sous un angle donné autre qu'un angle droit est hors programme.

Capacités exigibles

- Utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur approchée

  . du sinus ou de la tangente d'un angle aigu donné,
  . de l'angle aigu de sinus ou de tangente donnés.

- Connaître et utiliser dans le triangle rectangle les relations entre le cosinus, ou le sinus, ou la tangente, et les longueurs de deux côtés du triangle.

3. Dans le plan, construction de transformées de figures par composition de deux translations, de deux symétries centrales, de deux symétries orthogonales par rapport à des droites parallèles ou perpendiculaires.

Commentaires

Les travaux entretiendront la compétence sur les transformations étudiées dans les classes précédentes.
La composition de deux transformations n'apparaîtra que dans son action sur des figures et les activités s'organiseront autour de la réalisation de figures (frises, pavages...).
Aucune compétence en la matière n'est au programme; on rappelle que la notation "o" est exclue.

Capacités exigibles

-Connaître et savoir utiliser la conservation de l'alignement, des distances, des angles par une symétrie, une translation ou une rotation explicitement donnée.

4. et 6. Translation et vecteur. Egalité vectorielle. Dans le plan rapporté à un repère, effet d'un déplacement par translation sur les coordonnées d'un point ; coordonnées d'un vecteur. Addition vectorielle.

Commentaires

Les travaux partiront de l'expérience acquise en Quatrième. Il s'agit essentiellement, sur des situations simples, de familiariser les élèves avec le maniement des vecteurs.

L'addition vectorielle, qui ne fera l'objet que d'un travail d'initiation, sera reliée à la composition de deux translations.

On évitera de donner une place excessive au calcul des coordonnées de l'image d'un point par une translation, à celui des coordonnées d'un vecteur ou de la somme de deux vecteurs.
Aucune compétence sur le calcul vectoriel n'est exigible des élèves.

Le produit d'un vecteur par un réel n'est pas au programme.

Capacités exigibles

- Savoir relier l'égalité vectorielle au parallélogramme.
- Savoir construire l'image d'un point par translation connaissant le vecteur de la translation.

- Savoir que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

- Relier la construction de $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ à celle du parallélogramme.

- Savoir calculer, lire sur un graphique, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ connaissant les coordonnées des points A et B.

5. Distance de deux points en repère orthonormal. Equation d'une droite sous la forme : $y = mx$, $y = mx + p$, $x = p$; coefficient directeur. Parallélisme, orthogonalité en repère orthonormal.

Commentaires

Les activités se placeront dans le cadre des différentes rubriques du programme. Elles mettront en oeuvre les outils de géométrie plane ; elles permettront aussi de consolider la notion de fonction linéaire introduite en Quatrième.

On se limitera au cas des repères orthogonaux. L'équation générale d'une droite sous la forme ax + by + c = 0 est hors programme ; ceci n'exclut pas le traitement d'exemples numériques de ce type par retour à l'une des formes figurant au programme.

Dans le cas d'un repère orthonormal on explicitera le lien entre un coefficient directeur strictement positif et la tangente de l'angle aigu formé avec l'axe des abscisses.

Capacités exigibles

- Calculer la distance de deux points définis par leurs coordonnées dans un repère orthonormal.

- Tracer une droite donnée par son équation ou par son coefficient directeur et un point.

- Déterminer l'équation d'une droite définie
  . par deux points
  . par son coefficient directeur et un point.

- Savoir reconnaître ou exprimer à l'aide des coefficients directeurs le parallélisme de deux droites ou, en repère orthonormal, leur orthogonalité.

TRAVAUX NUMERIQUES

La résolution de problèmes (issus de la géométrie, de la gestion de données, des autres disciplines, de la vie courante) constitue l'objectif fondamental de cette partie du programme.

La pratique du calcul exact et approché doit conduire, à l'issue de la classe de Troisième, à une bonne maîtrise des règles opératoires et des règles de comparaison des nombres.

L'entraînement au calcul littéral se poursuit et doit aboutir à une relative autonomie.

1. Ecritures littérales ; factorisation d'expressions de la forme :

$$a^2 - b^2, \quad a^2 + 2ab + b^2, \quad a^2 - 2ab + b^2$$

Commentaires

Comme en Quatrième, les travaux s'articuleront suivant deux axes :

- utilisation d'expressions littérales pour des calculs numériques ;
- utilisation du calcul littéral dans la mise en équation et la résolution de problèmes divers.

Les activités viseront à assurer la maîtrise du développement d'expressions simples ; par contre la maîtrise de la factorisation n'est pas un objectif de la classe de Troisième. On entretiendra les compétences en matière de calcul sur les puissances.

Capacités exigibles

- Savoir factoriser des expressions telles que :

$(x + 1)(x + 2) - 5(x + 2)$;
$(2x + 1)^2 + (2x + 1)(x + 3)$.

- Connaître les égalités :

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

et savoir les utiliser sur des expressions numériques ou littérales simples telles que :

$101^2 = (100 + 1)^2 = 100^2 + 200 + 1, \dots ;$
$(x + 5)^2 - 4 = (x + 5)^2 - 2^2 = (x + 5 + 2)(x + 5 - 2)$.

2. Calculs élémentaires sur les radicaux (racines carrées).
Produit et quotient de deux radicaux.
Puissance d'ordre 2 ou 4 d'un radical.

Commentaires

La touche $\sqrt{\ }$ de la calculatrice, qui a déjà été utilisée en Quatrième fournit une valeur approchée d'une racine carrée. On met en place, par ailleurs, les règles de calcul ci-contre.

Le calcul sur des expressions comportant des radicaux (telles que $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$, $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ n'est pas un objectif du programme.
Comme dans les classes antérieures, on habituera les élèves à écrire un nombre sous la forme la mieux adaptée au problème posé.

Capacités exigibles

- Savoir que, si a désigne un nombre positif, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré est a.

- Savoir déterminer, sur des exemples numériques, les nombres x tels que $x^2 = a$, où a désigne un nombre positif.

- Sur des exemples numériques, utiliser les égalités :

$(\sqrt{a})^2 = a$, $\sqrt{a^2} = a$

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, où a et b désignent deux nombres positifs.

Par exemple : $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$, $\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

3. Equations et inéquations du premier degré :

Méthodes graphiques de résolution d'équations et d'inéquations du premier degré à coefficients numériques.
Méthodes de résolution d'un système de deux équations ou inéquations du premier degré à deux inconnues à coefficients numériques.

Exemples variés de problèmes se ramenant au premier degré.

Commentaires

Les travaux se placeront dans le cadre des différentes parties du programme. Comme en Quatrième on dégagera, sur les exemples étudiés, les différentes étapes du traitement d'un problème : mise en équation, résolution, interprétation du résultat. On habituera les élèves à tester l'exactitude ou la vraisemblance des résultats.

Les activités de résolution d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues à coefficients numériques permettront de pratiquer les méthodes de substitution ou de combinaisons.

Pour la résolution graphique d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues à coefficients numériques, on se ramènera aux équations de droites figurant au programme (cf. travaux géométriques § 5).

Aucune compétence n'est exigible sur les inéquations du premier degré à deux inconnues. L'étude du signe d'un produit ou d'un quotient de deux expressions du premier degré de la même variable est hors programme.

Capacités exigibles

- Connaître et utiliser le fait que des nombres relatifs de la forme ab et ac sont dans le même ordre que b et c si a est strictement positif, dans l'ordre inverse si a est strictement négatif.

- Résoudre une inéquation ou un système de deux inéquations du premier degré à une inconnue à coefficients numériques.

- Résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues à coefficients numériques admettant une solution et une seule.

- Mettre en équation et résoudre un problème simple conduisant à un tel système.

- Savoir interpréter graphiquement un système de deux équations du premier degré à deux inconnues, les droites associées étant tracées.

- Résoudre une équation mise sous la forme A.B = 0 , où A et B désignent deux expressions du premier degré de la même variable.

ORGANISATION ET GESTION DE DONNEES. FONCTIONS

L'objectif essentiel est de gérer des situations concrètes, relevant en particulier des thèmes transversaux, à l'aide de tableaux, de diagrammes, de graphiques.

Dans les situations mettant en jeu des fonctions, on continue d'habituer les élèves à utiliser des expressions telles que "en fonction de", "est fonction de" ; on pourra introduire prudemment la notation f(x), mais toute définition de la notion de fonction ou d'application est exclue.

1. Applications affines ; représentation graphique d'une application affine.

Commentaires

Les travaux porteront sur les diverses parties du programme. On mettra en évidence la proportionnalité des accroissements.

On pourra, à partir de situations simples, construire des tableaux d'une fonction non affine, mais aucune connaissance sur de telles fonctions n'est au programme.

Capacités exigibles

- Déterminer une application affine par la donnée de deux nombres et de leurs images.

- Savoir construire un tableau de valeurs d'une fonction affine.

- Représenter graphiquement une application affine donnée et exploiter cette représentation.

2. Exploitation de données statistiques : moyenne ; moyennes pondérées ; médiane.

Commentaires

Les travaux permettront de faire la synthèse des activités analogues des années antérieures.

Les élèves seront initiés au calcul de moyennes pondérées, et la notion de médiane sera dégagée, mais aucune connaissance n'est exigible sur ces deux points.

Capacités exigibles

- Savoir lire et exploiter des données statistiques mises sous forme de tableaux ou de diagrammes d'effectifs ou de fréquences, savoir calculer une moyenne.

- A partir de données statistiques, calculer les effectifs ou les fréquences, les présenter dans des tableaux et tracer les diagrammes correspondants.

3. Mise en oeuvre de la proportionnalité sur des grandeurs-quotients ou sur des grandeurs-produits.

Commentaires

Les travaux consolideront l'acquisition de savoir-faire dans les situations relevant de la proportionnalité.

Les situations nouvelles mettant en jeu des grandeurs-quotients ou des grandeurs-produits seront tirées de la vie courante (par exemple : consommation au compteur d'un appareil électrique de puissance donnée ; passage, pour la consommation d'un véhicule, du nombre de litres aux 100 km au nombre de km par litre), mais aucune connaissance n'est exigible à ce propos.

Capacités exigibles

- Savoir traduire par une fonction une augmentation ou une diminution exprimée en pourcentage. Par exemple : savoir qu'une augmentation de 5% fait passer de la valeur X à la valeur 1,05 X.

4. Résolution d'équations par essais et corrections successifs.

Commentaires

Certains problèmes mèneront à la résolution approchée d'équations $f(x) = a$ ne relevant pas du modèle $mx + p = 0$; cette résolution conduira à des activités graphiques ou à des activités numériques nécessitant l'emploi d'une calculatrice, mais aucune compétence n'est exigible à ce propos.

5. Analyse (et construction) d'algorithmes comme suite d'instructions aboutissant à la résolution d'un problème donné.
Application numérique à l'aide d'un ordinateur.

Il s'agit d'une simple initiation, par exemple, sur des situations telles que croissance d'une population, intérêts composés, ... mais aucune compétence n'est exigible à ce propos. Les calculatrices ou l'ordinateur pourront être utilisés avec profit.

GESTION DU PROGRAMME

Les contenus doivent être gérés de telle manière que l'esprit du programme soit respecté. Ainsi les notions déjà vues doivent être souvent réinvesties sans pour autant être objets de révisions systématiques.

L'ordre dans lequel nous avons présenté les notions figure dans le tableau ci-dessous. En parallèle se trouvent les notions nouvelles et les notions réinvesties sur chaque dominante.

Dominantes	Exemple de notions nouvelles	Exemples de notions réinvesties
Calculs d'éléments métriques (1) : Enoncé de Thalès	- Enoncé de Thalès - Agrandissement réduction	- Résolutions d'équations - Aires-périmètres - Calculs sur les fractions - Démonstrations sur des configurations géométriques
Systèmes d'équations Equations de droites	- Systèmes d'équations - Equations de droites - Résolution graphique d'un système	- Résolutions d'équations - Calculs sur les fractions - Thalès - Repérage - Mise en équations de problèmes.
Calculs d'éléments métriques (2) : Trigonométrie	- Sinus, tangente	- Cosinus - Pythagore - Valeurs exacte et approchée - Démonstrations sur les configurations géométriques - Thalès - Racines carrées - Aires et périmètres
Travaux numériques (1) : Calculs sur les racines	- Calculs sur les racines	- Thalès, Pythagore - Calcul littéral - Aires et périmètres
Travaux numériques (2) : Calcul littéral	- Identités remarquables - Factorisations - Equations produit	- Pythagore - Constructions de configurations géométriques - Géométrie dans l'espace - Résolutions d'équations - Résolutions de systèmes d'équations - Calculs sur les fractions
Espace	- Pyramide, cône - Agrandissement réduction - Gestion de données (représentation graphique d'une fonction) - Résolutions par essais et rectifications de $f(x) = a$	- Calcul littéral - Solides connus (prisme, pavé, cylindre) - Calculs d'aire, angles (trigonométrie), volumes - Perspectives cavalières
Travaux numériques (3)	- Inéquations	- Calcul littéral - Calcul sur les fractions

Transformations vecteurs	- Composition de transformations - vecteurs - Géométrie analytique	- Rotation, translations, symétries - Démonstrations sur les - configurations géométriques
Gestion de données	- Statistiques - Fonctions affines	- Equations de droites - Proportionnalité - Pourcentages - Fonctions linéaires - Aires et volumes
Résolution de problèmes	- Géométrie analytique - Angles inscrits - Réciproque de Thalès	- Angles - Démonstrations sur des configurations géométriques - Pythagore - ......

Quelques remarques pour justifier ces choix :

1. Comme en quatrième il nous semble préférable de commencer par des calculs (cf. brochures 4ème).

2. Commencer par Thalès permet, sans faire de révisions systématiques, de revoir les techniques de résolution d'équations du premier degré, ainsi que de refaire des démonstrations sur des configurations géométriques.

3. Le calcul littéral intervient tout au long de l'année avec cependant des temps forts pour des apprentissages spécifiques (identités remarquables, factorisations).

4. Les systèmes d'équations sont vus en début d'année. Cela permet :
- de les réinvestir dans de nombreuses situations variées tout au long de l'année,
- d'introduire les équations de droite qui peuvent être aussi largement réinvesties dans d'autres parties du programme.

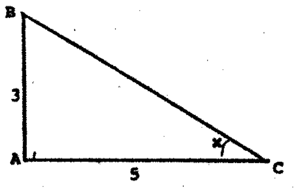
5. La dernière dominante "résolution de problèmes" permet de revoir certaines méthodes de recherche.

CALCULS D'ELEMENTS METRIQUES (2)

Trigonométrie

ACTIVITE

Cette activité **est donnée oralement** au tableau indépendamment du dossier:



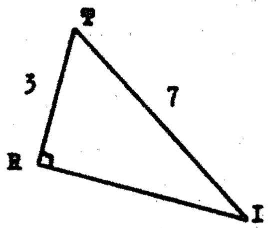
Que vaut x ?

OBJECTIFS

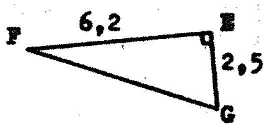
CONTRAT : tous les exercices sont obligatoires.

DUREE : 6 heures en classe.

Ex 1 :

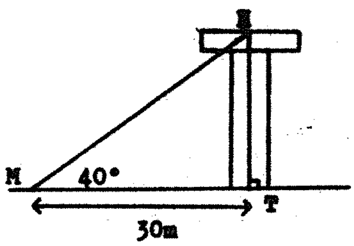


Calcule chacun des angles à un degré près par défaut.



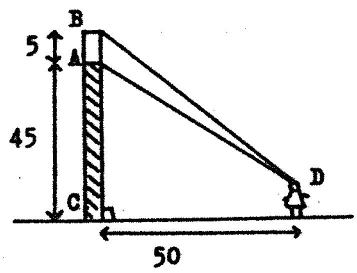
Calcule un encadrement d'amplitude 1° pour chacun des angles.

Ex 2 :



On s'est placé à 30 m d'un château d'eau HT que l'on voit sous un angle de 40°.
Trouve la hauteur du château d'eau à 1 dm près par excès.

Ex 3 :



Une statue AB de 5 m de hauteur est posée sur un socle de 45 mètres de haut. Un observateur D est placé à 50 mètres du pied du socle, ses yeux sont à 1,50 m du sol. L'observateur D voit la statue AB sous l'angle $\widehat{BDA}$.

Calcule cet angle à un degré près par défaut.

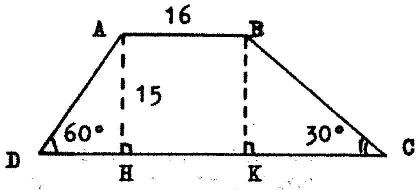
Ex 4 :

Dans un repère orthonormé, A et B sont deux points d'une droite. Ils ont pour coordonnées : A (1 ; 4) et B (10 ; 9).
Calcule un encadrement au dixième près de l'angle formé par (AB) et l'horizontale.

Ex 5 :

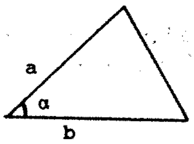
La droite (D) a pour équation $\frac{9}{5}x - \frac{6}{5}y + 3 = 0$.
Calcule l'angle formé par la droite (D) et la verticale.

Ex 6 :



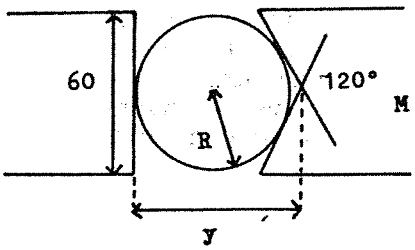
Calcule l'aire et le périmètre de ce trapèze à 0,1 près par défaut.

Ex 7 :



Trouve une formule donnant l'aire du triangle en fonction de a, b et α .

Ex 8 :



La figure représente un dispositif d'ablocage d'un cylindre par un mors (M).
Le diamètre du cylindre est 40 mm.
Donne un encadrement de y.

Ex 9 :

Démontre que $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.

Ex 10 :

Un angle x est tel que sin x = 0,7.
Sans calculatrice, calcule la valeur exacte de cos x.

Ex 11 :

Calcule les valeurs exactes de sin 45°, cos 45° et tan 45°.

Ex 12 :

Calcule les valeurs exactes de sin 30°, cos 30° , tan 30°. Déduis-en les valeurs exactes de sin 60°, cos 60° et tan 60°.

Ex 13 :

(D'après un problème de Brevet).
Soit [OA] un segment de longueur 6 cm ; sur la droite perpendiculaire en 0 à [AO], de part et d'autre de 0, on considère les points :

B tel que $\widehat{OAB} = 45°$

C tel que $OC = 2\sqrt{3}$ cm.

Le cercle de diamètre [OA] coupe [AB] en D et [AC] en E. On note H son centre.

a) Faire la figure (on prendra $\sqrt{3} \approx 1,7$ pour placer le point C).

b) Quelle est la nature des triangles AOB et AOD ? Justifier.
Montrer que D est le milieu de [AB]. Calculer AB.

c) Quelle est la nature du triangle AOE ?

d) Calculer tan $\widehat{OAC}$ (tangente de l'angle $\widehat{OAC}$). Utiliser la table (ci-dessous) pour trouver la mesure en degrés de l'angle $\widehat{OAC}$.
Dans le triangle OAE, déterminer sin $\widehat{OAE}$ puis OE.
Démontrer que le triangle OHE est équilatéral.

	0°	30°	45°	60°	90°
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

Ex 14 :

Construis RAS, triangle équilatéral de côté 6 cm. Construis le triangle BOL tel que :

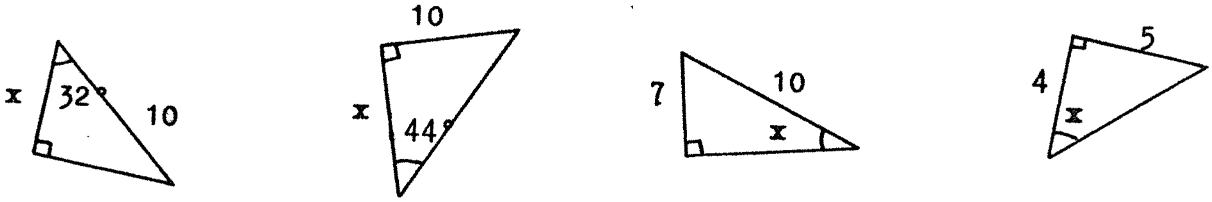
(BO) est perpendiculaire à (AS) en A.
(BL) est perpendiculaire à (RA) en R.
(LO) est perpendiculaire à (RS) en S.

a) Calcule le périmètre de BOL.
b) Montre que le périmètre est égal à $18\sqrt{3}$
c) Montre que le rapport des aires des deux triangles est 3 (illustre-le ensuite par un découpage).

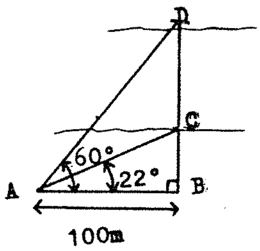
AUTO-TEST

Ex 1 :

Pour chacun des triangles suivants, calcule la valeur de x à 0,1 près par défaut.

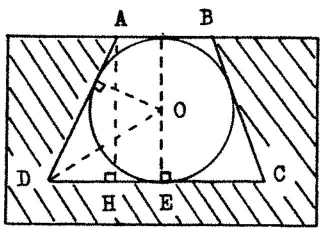


Ex 2 :



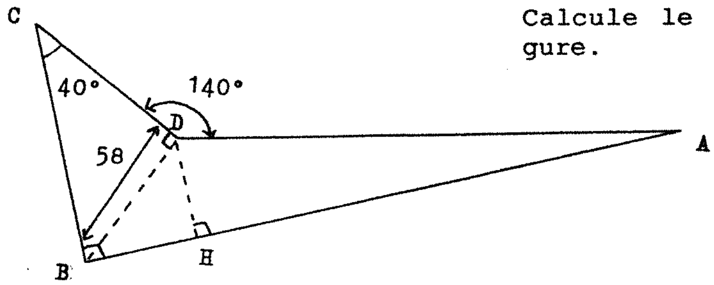
En utilisant les informations données sur la figure, calcule la largeur de la rivière.
(Brevet 1982).

Ex 3 :



(OE) est axe de symétrie, OE = 3 cm et CD = 10 cm.
Calcule les mesures des côtés et des angles du trapèze ABCD.

Ex 4 :



Calcule le périmètre de cette figure.

DEVOIR A LA MAISON

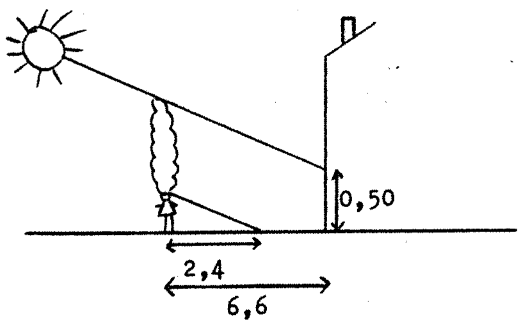
EX 1 :

ABCD est un carré dont les côtés ont pour longueur 2 cm.
On désigne par : I le milieu du segment [DC],
J le symétrique de I par rapport au point C,
E le symétrique de A par rapport au point D.

Les droites (BJ) et (AD) se coupent en K.

a) Faire une figure.
b) Calculer CJ, BJ, KB. (Pour le calcul de KB, on pourra, par exemple, utiliser le rapport $\frac{DC}{CJ}$).
c) Démontrer que les droites (EC) et (BD) sont parallèles.
d) Calculer la tangente de l'angle $\widehat{CBJ}$. En déduire une valeur approchée, à 1° près, de cet angle.
e) L'angle $\widehat{DBJ}$ est-il un angle droit ? (Brevet Grenoble 1986).

Ex 2 :



Un beau matin ensoleillé, Thalésine, une descendante de Thalès, cherche à connaître la hauteur d'un arbre de son jardin (faute de pyramide...).
L'ombre de l'arbre "monte" sur le mur de la maison à 0,50 m. Le pied de l'arbre est à 6,6 m du mur de la maison. Thalésine mesure 1,60 m ; son ombre sur le sol est longue de 2,40 m.
Calcule la hauteur de l'arbre à 10 cm près par excès.

CHOIX DIDACTIQUES

Les élèves ont été familiarisés avec la trigonométrie en 4ème par la partie traitant du cosinus.

En fait, le cosinus associé au théorème de Pythagore permet de résoudre de nombreux problèmes de trigonométrie.
Dans cette partie, il s'agit de montrer qu'il existe des outils plus performants (tangente et sinus) pour résoudre certains types de problèmes.

Les exercices réinvestissent des notions déjà vues (équations de droites, calculs d'aires, calculs de périmètres).

Notons que nous n'avons pas insisté sur les relations $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ et $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$ qui ne peuvent pas prendre sens en 3ème, les problèmes donnant sens à ces formules (équations trigonométriques, étude de fonctions trigonométriques...) étant hors du programme de 3ème.

OBJECTIFS

- Connaître les lignes trigonométriques dans un triangle rectangle.
- Connaître les relations entre sinus, cosinus et tangente d'un angle aigu.
- Connaître la relation entre sinus et cosinus de deux angles complémentaires.
- Savoir utiliser la calculatrice pour trouver le sinus, le cosinus ou la tangente d'un angle et inversement.
- Savoir calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle ou un angle en utilisant la "meilleure" ligne trigonométrique.

Objectifs secondaires

- Distinguer valeur exacte et valeur approchée.
- Réinvestir les contenus déjà abordés : configurations, espace, Pythagore, Thalès, équations de droites...

ANALYSE DE LA FICHE ELEVE

L'activité peut être perçue par les élèves comme un exercice répétitif (qu'ils savent fort bien traiter). Pour le professeur il s'agit de resituer le problème : l'angle x peut être déterminé par les données d'un côté et de l'hypoténuse (cosinus), ne peut-il pas l'être par les données des deux côtés adjacents de l'angle droit ?

L'exercice 1 est constitué d'applications directes. Les exercices 2, 3 et 8 font intervenir des situations concrètes.

L'exercice 13 est un problème de Brevet donné pour habituer les élèves à la structure d'un problème type "Brevet" (décomposition des questions, etc...).

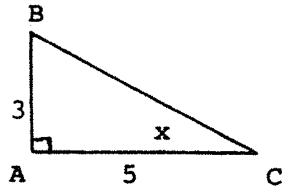
L'exercice 14 permet de faire des démonstrations en utilisant la trigonométrie.

DEROULEMENT ET COMMENTAIRES

ACTIVITE (Durée 15 min).

Elle est donnée au tableau et n'est pas écrite sur le dossier pour ne pas induire la méthode.

Consigne :



Que vaut x ?

Tous les élèves choisissent la même méthode : calcul de l'hypoténuse BC grâce à l'énoncé de Pythagore puis calcul de x en utilisant le cosinus: ces deux notions étudiées en 4ème sont maintenant bien maîtrisées. Ils enchaînent les calculs sur la calculatrice et trouvent donc la même valeur approchée de x : 30,96°.

Le professeur demande alors si la donnée des 2 côtés de l'angle droit suffit pour trouver les angles $\widehat{C}$ et $\widehat{B}$ et les invite à refaire leurs calculs en prenant d'autres mesures pour AB et AC en gardant $\frac{3}{5}$ comme rapport $\frac{AB}{AC}$. Le rapport $\frac{3}{5}$ semble donc bien caractériser l'angle $\widehat{C}$.

Le professeur fait alors remarquer que deux autres touches sin et tan avoisinent la touche cos sur la calculatrice; ces deux touches correspondent à deux autres lignes trigonométriques.

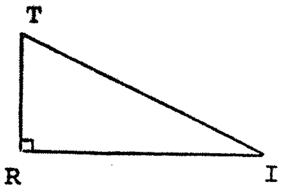
Après essais, le rapport $\frac{3}{5}$ est reconnu comme la tangente de l'angle $\widehat{C}$.

Le professeur valide alors et donne les définitions de la tangente et du sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle.

Les élèves mentionnent alors que pour deux angles complémentaires le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre et que les tangentes sont inverses l'une de l'autre.

Ce qui est noté sur le répertoire

T Trigonométrie



TRI est un triangle rectangle en R

$$\sin \widehat{T} = \frac{RI \leftarrow \text{côté opposé}}{TI \leftarrow \text{hypoténuse}}$$

$$\cos \widehat{T} = \frac{TR \leftarrow \text{côté adjacent}}{TI \leftarrow \text{hypoténuse}}$$

$$\tan \widehat{T} = \frac{RI \leftarrow \text{côté opposé}}{TR \leftarrow \text{côté adjacent}}$$

$\sin \widehat{I} = \frac{TR}{TI}$ $\qquad \cos \widehat{I} = \frac{RI}{TI}$ $\qquad \tan \widehat{I} = \frac{TR}{RI}$

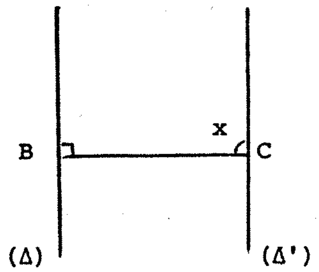
Lorsque deux angles sont complémentaires, le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre et les tangentes sont inverses l'une de l'autre.

Un prolongement de cette activité est alors demandé:"Représenter graphiquement le sinus, le cosinus et la tangente en fonction de l'angle, une représentation par groupe, 2 groupes représentent sinus, 2 groupes cosinus et 2 groupes tangente" (la classe est organisée en 6 groupes).

L'échelle sur les axes est laissée au choix des élèves ce qui pose problème pour la tangente. Autre problème : celui des limites de variation de l'angle : Pour $x = 0°$ ou pour $x = 90°$, il n'y a plus de triangle, les élèves choisissent donc 1° et 89° pour valeurs extrêmes et réalisent un tableau de valeurs.

Les trois courbes sont décalquées sur transparents et rétroprojetées.
Une synthèse collective est alors menée sur l'évolution du sinus, du cosinus et de la tangente lorsque l'angle x croît. Des remarques sont alors formulées par les élèves :

- le cosinus décroît lorsque l'angle croît et il est compris entre 1 et 0,
- le sinus croît lorsque l'angle croît et il est compris entre 0 et 1,
- la tangente croit en même temps que l'angle mais elle peut avoir une valeur **supérieure à** 1 ($\tan 89{,}9 \approx 573$) et n'a pas de valeur pour 90°. Un retour au triangle rectangle est fait pour expliquer ce phénomène.



Lorsque $x = 90°$, les deux droites (Δ) et (Δ') sont des parallèles, AB est alors infiniment grand.

- les deux graphiques sinus et cosinus sont posés l'un sur l'autre et les élèves retrouvent les propriétés des angles complémentaires.
Ils font également remarquer que sinus et cosinus semblent égaux pour 45°, propriété justifiée par retour au triangle rectangle isocèle.

Le répertoire est alors complété.

T Trigonométrie

Le sinus et le cosinus d'un angle sont compris entre 0 et 1 mais la tangente peut être supérieure à 1.

Le dossier est distribué, les élèves énoncent les objectifs et les notent:

Je dois savoir calculer : . un angle
. une longueur
en utilisant la bonne ligne trigonométrique dans un triangle rectangle.

EXERCICES

Durée : 7 h.

Les exercices 1 et 2 permettent de refaire le point sur les expressions:

valeur exacte, valeur approchée par défaut ou par excès, amplitude d'un encadrement.

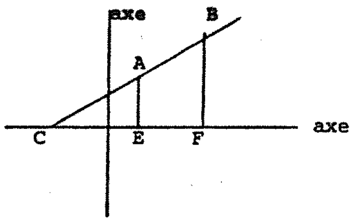
Quelques élèves ont tendance à utiliser systématiquement le cosinus et Pythagore

le rôle du professeur est de montrer que l'utilisation des autres lignes trigonométriques peut raccourcir les calculs dans certains cas et donner une meilleure approximation.

A l'exercice 3, aucun élève n'utilise les lignes trigonométriques dans une figure autre que le triangle rectangle. Ils font le tracé supplémentaire nécessaire ce qui tend à montrer qu'ils sentent bien les conditions d'application des lignes trigonométriques.

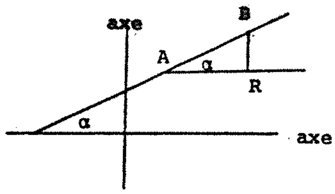
Les exercices 4 et 5 permettent de réinvestir les équations de droites et les repères. Aucun élève n'a écrit l'équation de la droite (AB) pour trouver les coordonnées du point d'intersection de (AB) avec l'axe des abscisses.

Dans un groupe, les élèves ont projeté A et B orthogonalement sur l'axe des abscisses et utilisé l'énoncé de Thalès dans le triangle CBF en posant comme inconnue la distance CE.



L'équation obtenue $\frac{x}{x + 9} = \frac{4}{9}$ est alors traitée.

Les autres élèves ont tracé la parallèle à l'axe des abscisses passant par A, retrouvé l'angle α en utilisant, les angles correspondants et calculé α par la tangente dans le triangle ABR.

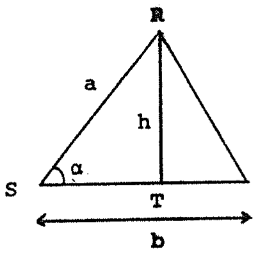


Ces méthodes tendent à montrer que le côté métrique du programme : angles, mesures, est mieux maîtrisé que l'analytique (il est vrai, très peu utilisé.)
Une synthèse de cet exercice est faite pour montrer les différentes méthodes utilisables.

Pour l'exercice 5, on doit tout d'abord trouver les coordonnées de deux points de la droite (D) pour opérer ensuite comme dans l'exercice précédent. La rédaction de cette partie d'exercice montre que celle-ci est mal intégrée car les techniques de calcul ne sont pas justifiées très clairement.

L'exercice 6 est répétitif, il faut seulement conseiller à certains d'enchaîner les opérations pour ne prendre la valeur au dixième qu'à la fin des calculs.

L'énoncé de **l'exercice 7** ne comporte que des données littérales. Quelques élèves font d'abord des calculs en prenant des valeurs particulières pour a, b et α puis démontrent dans le cas général. Deux méthodes sont alors utilisées. Tous tracent la hauteur, ensuite les méthodes divergent, les uns utilisant le sinus de α et les autres le cosinus.



Première méthode

$$\sin \alpha = \frac{RT}{SR}$$

d'où $h = a \sin \alpha$

$$\text{Aire} = \frac{ab \sin \alpha}{2}$$

Deuxième méthode

$$\cos \alpha = \frac{ST}{SR}$$

d'où $ST = a \cos \alpha$

utilisation de l'énoncé de Pythagore dans RST

$$RS^2 = RT^2 + ST^2$$
$$a^2 = h^2 + a^2 \cos^2 \alpha$$
$$h^2 = a^2 - a^2 \cos^2 \alpha$$

$$\text{Aire} = \frac{b \times \sqrt{a^2 - a^2 \cos^2 \alpha}}{2}$$

Ces deux méthodes sont exposées par les élèves et chacun pense que les deux démarches sont correctes. On doit donc avoir :

$$a \frac{b \sin \alpha}{2} = \frac{b \times \sqrt{a^2 - a^2 \cos^2 \alpha}}{2}$$

L'occasion est alors donnée ici de démontrer la relation entre sinus et cosinus d'un angle aigu. Le professeur pose alors le problème : "puisque l'on a égalité, il existe donc une relation entre sinus et cosinus d'un angle, essayons de trouver laquelle". La démonstration est menée collectivement.

La simplification par $\frac{b}{2}$ est immédiate et l'on obtient :

$$a \sin \alpha = \sqrt{a^2 - a^2 \cos^2 \alpha}$$

Il est alors très tentant d'écrire $\sqrt{a^2 - a^2 \cos^2 \alpha} = a - a \cos \alpha$, c'est ce que propose un élève. Cette erreur "classique" ne soulève pas de protestation de la classe même si cette erreur n'est pas faite avec des nombres.

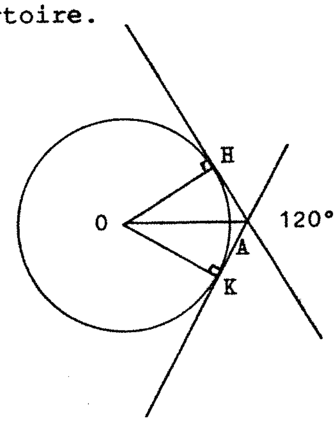
Les propriétés des racines, bien connues, sont rappelées mais le "modèle" $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$ n'est pas reconnu ici car on n'opère plus sur des nombres. Une explication est alors nécessaire. Il est alors proposé par la classe d'élever ces deux quantités au carré puisqu'elles sont positives et de simplifier par a^2 (pour certains, avant d'avoir factorisé). La relation $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ est alors trouvée.

L'exercice 9 n'a alors plus de raison d'être dans cette classe bien que dans un groupe il ait été refait de façon classique.
Il a été également mené à bien dans l'autre classe non sans difficulté: en effet il faut choisir un triangle rectangle, considérer AB^2, AC^2, BC^2 comme des nombres, puis utiliser l'énoncé de Pythagore en changeant de paramètre (α) ....

Lors de la synthèse le professeur demande s'il n'existe pas de relation entre sinus, cosinus et tangente d'un angle. La relation $\tan \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ est alors établie collectivement en se plaçant dans un triangle rectangle.

Ces deux résultats sont alors notés sur le répertoire.

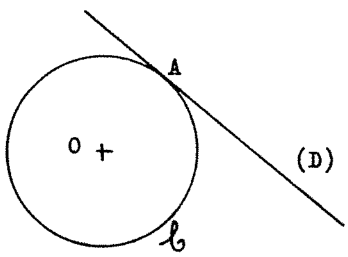
L'exercice 8 est difficile à comprendre, les mots "mors" et "ablocage" n'étant pas connus. De plus le calcul de l'angle $\widehat{OAH}$ pose problème. Ce calcul nécessite un énoncé sur les tangentes à un cercle (seul l'énoncé réciproque a été rencontré en 4ème).



Ce qui est alors noté sur le fichier.

"Comment démontrer que 2 droites sont perpendiculaires ?".

- en utilisant la tangente à un cercle.



(D) tangente au cercle en A

[OA] rayon du cercle

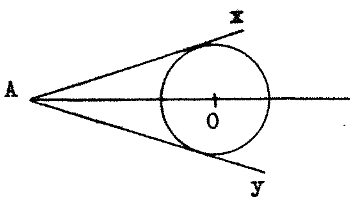
La tangente à un cercle en un point est perpendiculaire au rayon qui passe par ce point.

$(D) \perp (OA)$

Les élèves montrent alors l'égalité de $\widehat{OAK}$ et $\widehat{OAH}$ par utilisation de leur sinus et en déduisent que (OA) est bissectice de $\widehat{HAK}$ et calculent OA.

Le répertoire est alors complété à:

T Tangente



(AO) est la bissectrice de $\widehat{xAy}$, c'est l'axe de symétrie de la figure.

B Bissectrice

Les points à égale distance des 2 côtés d'un angle sont sur la bissectrice de cet angle.

Pour l'exercice 11, le professeur doit aider certains groupes à analyser le problème et trouver dans quelle figure particulière on doit se placer pour obtenir cette situation.

Le côté de l'angle droit est alors codé, l'hypoténuse calculée en fonction de ces côtés et les valeurs exactes de sin 45°, cos 45° et tan 45° trouvées.

A l'exercice 12 la figure à considérer est moins évidente qu'à l'exercice précédent. Certains élèves considèrent un triangle équilatéral et une hauteur. Pour d'autres, une aide est nécessaire. Le professeur les engage à revoir ce qui a été noté sur le répertoire à **Trigonométrie** et à l'analyser. Il en découle que connaître une seule des valeurs parmi sin 30°, cos 30°, sin 60°, cos 60° permet de déduire toutes les autres.

Les élèves se souviennent de la valeur exacte de cos 60° souvent rencontrée en 4ème. Les autres sont ensuite calculées, les énoncés sur la trigonométrie et les calculs avec les racines carrées sont alors réinvestis.

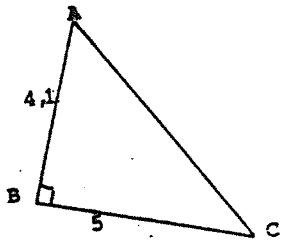
Un tableau analogue à celui de l'exercice 13 est noté sur le répertoire mais il n'est pas demandé aux élèves de mémoriser ces valeurs.

L'exercice 13 ne pose pas de problème, des méthodes variées sont utilisées pour calculs et démonstrations.

A l'exercice 14, le calcul de la hauteur du triangle équilatéral RAS est souvent mal justifié. En effet ils doivent passer par l'axe de symétrie qui est médiatrice et hauteur. De plus, certains ne démontrent pas que BOL est équilatéral et font les calculs comme s'il l'était.

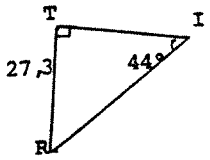
TEST

Ex 1 :



Calcule la valeur approchée de l'angle $\widehat{ACB}$ à un degré près par défaut.

Ex 2 :



Calcule une valeur approchée de RI. Tu donneras ton résultat sous forme d'un encadrement d'amplitude 0,1.

Ex 3 :

La valeur exacte du cosinus d'un angle α est 0,6. Calcule la valeur exacte de sin α et de tan α.

Ex 4 :

ABC est un triangle rectangle en A tel que AC = 2 et BC = 4. Fais un dessin.

a) Calcule la valeur exacte de l'angle $\widehat{ABC}$.
b) Calcule la valeur exacte de AB.
c) [AH] est une hauteur de ABC. Place H et montre que AH = $\sqrt{3}$.
d) D est le point de [BC] tel que BD = 1. La perpendiculaire à (BC) passant par D coupe la perpendiculaire à (AB) passant par B en E. Place D et E. Calcule la valeur exacte de DE.
e) Démontre que ADEH est un parallélogramme.
f) Donne un encadrement d'amplitude 1 de l'angle $\widehat{DEH}$.

Pour cet exercice tu justifieras toutes les étapes.

Si tu as fini : ABC est un triangle rectangle en A tel que tan $\hat{B}$ = 3 et AB = 2.
Construis ce triangle sans calculer les angles. Explique.

	30°	45°	60°
sinus	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosinus	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Barème : Ex 1 : 2 points

Ex 2 : 2 points

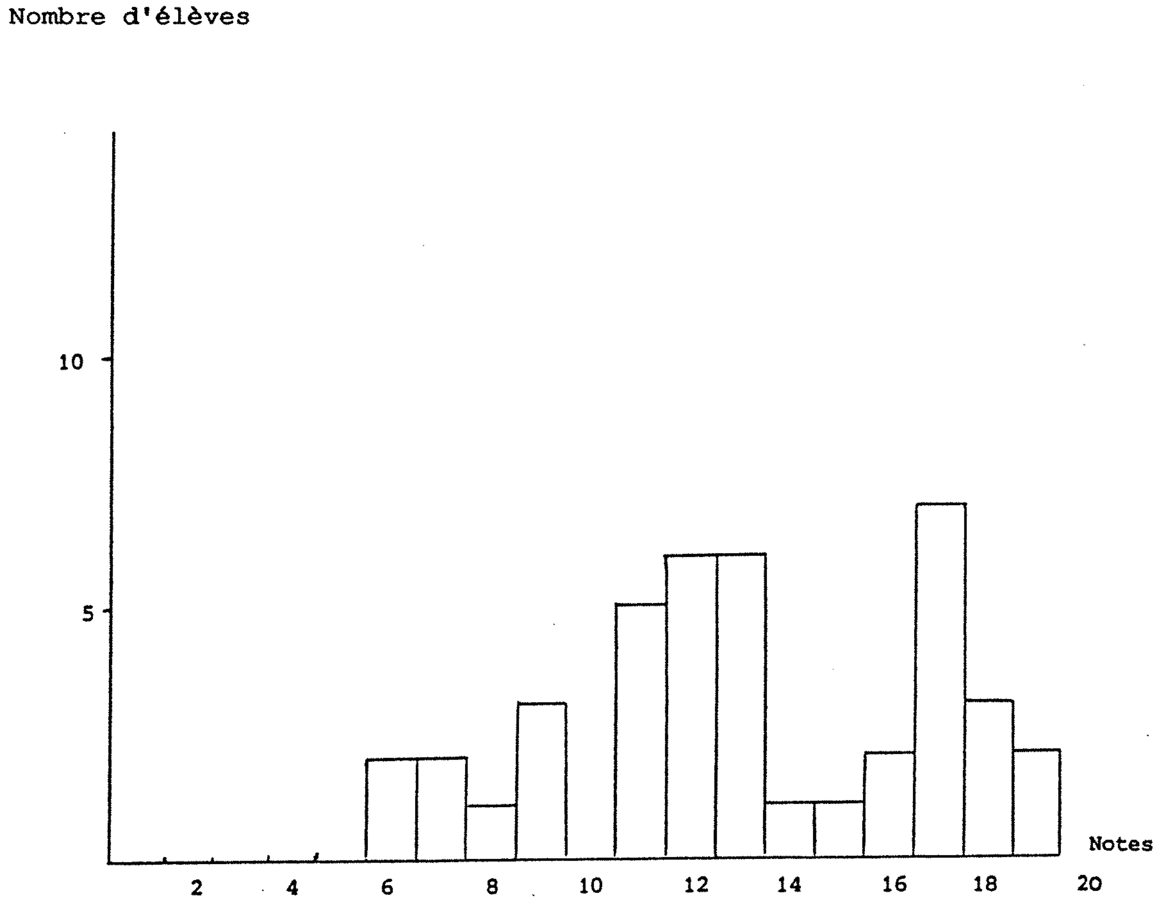
Ex 3 : 3 points

Ex 4 : 13 points.

RÉSULTATS DU TEST

Nombre d'élèves : 44 élèves

Moyenne : 13,25



GEOMETRIE DANS L'ESPACE

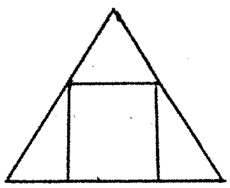
Etats initiaux
Etude du cône
Etude de la pyramide

CHOIX DIDACTIQUES

Cette dominante recouvre les parties b (entièrement) et c (partiellement) des "travaux géométriques" du programme.
Au cours de l'apprentissage, nous avons choisi de réinvestir des notions vues les années précédentes (cylindre, perspective cavalière du pavé, cosinus, sphère, Pythagore, proportionnalité) et des notions vues cette année (trigonométrie, énoncé de Thalès, calculs sur les racines, calculs littéraux). D'autres contenus du programme sont rencontrés pour la première fois en situation, en particulier les élèves ont à résoudre une équation par "essais et corrections successifs" (paragraphe III 3 des programmes).

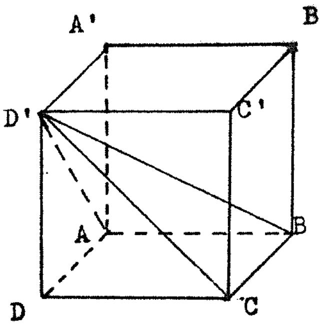
Notre objectif essentiel dans cette dominante est d'apprendre aux élèves à calculer des éléments métriques dans le cône et le cylindre (angles, longueurs, aires, volumes). Pour cela il est nécessaire d'habituer les élèves à utiliser le type de représentation (vues ou coupes, patrons ou perspective cavalière) le mieux adapté pour résoudre le problème ; ainsi:

- pour trouver le diamètre d'un cylindre de hauteur donnée inscrit dans un cône de hauteur et diamètre de base donnés, une vue de face (ou une coupe) est bien adaptée :



- pour trouver l'angle du développement du cône, connaissant le diamètre de base et la génératrice, le patron est souhaitable,

- pour trouver la longueur totale des arêtes d'une pyramide ABCDD' inscrite dans un cube ABCD A'B'C'D' une perspective cavalière facilite la tâche.



D'autre part, pour que cet objectif soit atteint, il est nécessaire que les élèves aient une bonne image mentale des objets.

Ainsi,

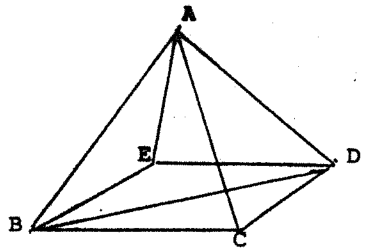
- un cône doit être vu comme un objet de révolution ce qui permet de concevoir que la génératrice a une longueur constante et que la "vue de face" d'un cône posé sur sa base est un triangle isocèle dont la hauteur principale est l'axe du cône,

- une pyramide doit être vue comme un objet "pointu".

Enfin, la résolution de nombreux exercices utilise de manière implicite des théorèmes de géométrie dans l'espace. Il ne nous semble pas opportun de spécifier ces théorèmes pour justifier l'obtention des résultats. Ces théorèmes sont bien souvent des théorèmes en actes, c'est-à-dire appliqués de manière naturelle (les élèves, pour la plupart, ne soupçonnent pas leur existence).

Exemple :

Pour calculer l'angle $\widehat{BAD}$ de la pyramide régulière à base carrée ABCDE les élèves coupent mentalement la pyramide par le plan (ABD).



Ils utilisent spontanément le fait que par A,B,D ne passe qu'un plan, de même qu'ils utilisent le fait que la hauteur de la pyramide appartient à ce plan.

Ces théorèmes constituent un objet d'étude en seconde.

MATERIEL

* Des objets en polystyrène de différentes formes (cônes, pyramides,....).

* Des armatures (cubes et pyramides).

* Des fils à couper le polystyrène et du polystyrène.

ETATS INITIAUX

ACTIVITÉ 1

Tu peux faire des dessins et répondre par des phrases.

Qu'est-ce qu'un cône ?

Qu'est-ce qu'une pyramide ?

ANALYSE DE LA FICHE ELEVE

Cette fiche comporte deux questions qui par leurs réponses doivent mettre en valeur les images mentales des élèves sur les pyramides et les cônes.

Cette fiche a été donnée environ un mois avant les études du cône et de la pyramide afin que le professeur ait le temps d'exploiter les réponses. (Celles-ci seront exploitées durant l'étude des objets).

DUREE : 20 min.

ANALYSE DES REPONSES OBTENUES

♦ ***CONES***

On peut classer les définitions de la manière suivante :

* ***Définition descriptive***

Exemple :

"C'est un solide qui a deux faces : l'une plate, l'autre bombée. Il est formé d'un disque à la base et d'une surface qui va du sommet H à la circonférence du disque. Sa hauteur va du centre du cercle de la base au sommet H. Il a 3 arêtes". (Confusion entre le cône et sa perspective : les deux génératrices représentées sur la perspective sont comptées comme arêtes).

* ***Des images***

Exemple :

Cornet de glace, chapeau de clown blanc, faisceau lumineux.

* ***Solide vu comme une pyramide "dégénérée".***

Exemple :

- "C'est un triangle arrondi à la base ce qui retire tout angle droit, c'est la différence avec la pyramide, il n'y a aucune arête".

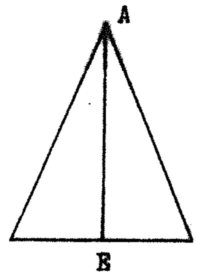
- "Un cône est une pyramide dont la base est un cercle".

- "C'est une pyramide avec une infinité de faces".

* ***Solide engendré par la rotation d'un triangle isocèle.***

Exemples :

- "Le cône est un ensemble de triangles isocèles qui "tournent" sur eux-mêmes en prenant comme centre de rotation la droite (AE) qui est la médiatrice de ces triangles.



- "Le tour du cône n'a qu'une face car il tourne comme un boule".

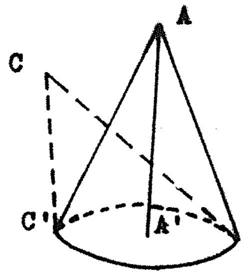
*** Solide engendré par des droites issues d'un même point et s'appuyant sur un cercle.**

Exemples :

- "C'est un point d'où partent plein de droites qui se séparent pour s'arrêter. Si on rejoint toutes les droites à l'autre bout (il en faut beaucoup), on obtient un cercle".

- "C'est une figure qui a pour base un disque et un sommet A. On trace toutes les droites de A vers les points du cercle. Un cône peut être creux".

- "La droite (AA') est perpendiculaire au cercle. Elle ne passe pas forcément par le point A' (CC')." (Le dessin accompagne cette remarque).



*** Cône vu comme des disques empilés**

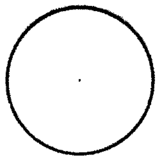
Exemple :

"Un cône est une infinité de disques superposés qui diminuent en se rapprochant du sommet".

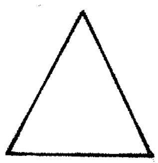
*** Dessins**

- **Des vues correctes**

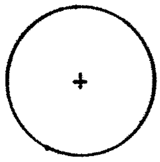
Exemples :



Vue de dessous



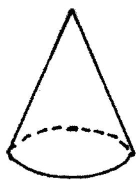
Vue de face



Vue de dessus

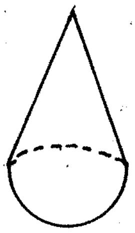
- **Une perspective**

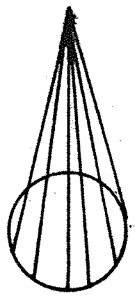
Exemple :



- **Des dessins bâtards**

Exemples





QUELQUES REMARQUES

- Toutes les explications étaient accompagnées de dessins.
- Des confusions entre "faces" et "côtés", "cône" et "cylindre" ont été faites.
- Des patrons "faux" ont aussi été dessinés.

♦ ***PYRAMIDES***

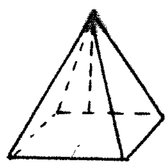
Notons que pour la plupart des élèves une pyramide est une pyramide régulière à base carrée. On peut classer les définitions ou explications comme ci-dessous :

* ***Des définitions descriptives ou "raisonnées".***

Exemples :

- "C'est un carré surmonté de 4 triangles isocèles de même hauteur ayant la base de même mesure. Le point d'intersection des 4 sommets des 4 triangles est aligné avec le point d'intersection des diagonales du carré : c'est la hauteur".

- "C'est un volume qui a 5 faces, la base représente un carré ou un rectangle et les autres faces qui se retrouvent au point M sont des triangles isocèles.
Sa hauteur va du point M au point d'intersection des médiatrices des côtés du carré. Elle a 8 arêtes".



* ***Une explication qui pose le problème de l'angle dièdre.***

Exemple :

"Une pyramide a 5 faces : 4 sont des triangles, l'autre est un carré. Entre les faces qui forment les côtés il y a un angle droit puisque le carré a 4 angles droits".

* ***Des vues dynamiques de la pyramide.***

Exemples :

- "Ce sont 4 arêtes qui partent d'un même point (le sommet). Elles se séparent pour finir par s'arrêter et si on rejoint les 4 points (2° extrémité de l'arête) on doit avoir un carré ; chaque côté est la base de chacun des côtés de la pyramide".

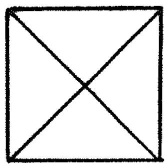
- "La pyramide a pour base un carré qui se rétrécit vers le haut jusqu'au point appelé sommet. Elle a 4 faces triangulaires".

- "L'image de la pyramide représente une translation d'un point (le point d'extrémité) en un carré, sa trajectoire serait cette image". (Explication orale de l'élève : "c'est comme si au début on avait un minuscule carré qui se confondait avec le sommet et qui s'agrandirait jusqu'à la base pour former la pyramide").

* ***Des dessins***

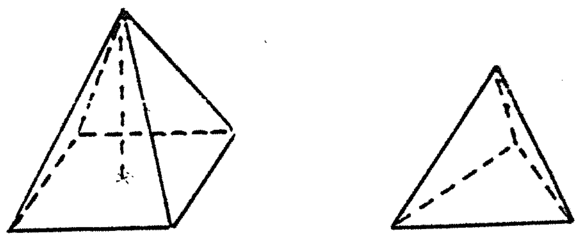
- **Vue correcte**

Exemple :



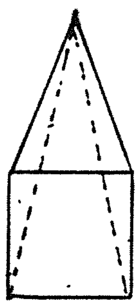
- **Des perspectives que l'on peut admettre comme correctes.**

Exemples :



- **Des dessins bâtards**

Exemple :



ETUDE DU CÔNE

ACTIVITE 2

Tu as devant toi un cône en polystyrène.
Construis le patron d'un cône de hauteur 6 cm et dont le rayon de base mesure 4,5 cm.

ACTIVITE 3

Construis un cône en polystyrène d'angle au sommet 50°.
Si on coupe le cône par un plan perpendiculaire à la base et passant par le sommet, quelle figure obtient-on ? Justifie ta réponse.

OBJECTIFS

CONTRAT : l'exercice 9 est facultatif, l'exercice 6 est à faire en devoir à la maison

DUREE : 4 heures en classe.

Ex 1 :

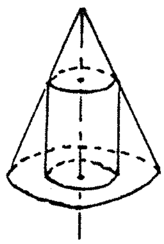
Cite trois exemples de cône dans la vie courante :

Ex 2 :

Calcule la génératrice d'un cône de hauteur 7 cm et d'angle au sommet 35°.

Ex 3 :

Un cylindre est inscrit dans un cône. Les deux axes sont confondus.



On donne :
rayon du cylindre $r = 2$ cm
rayon de la base du cône $R = 6$ cm
hauteur du cylindre $h = 4$ cm.

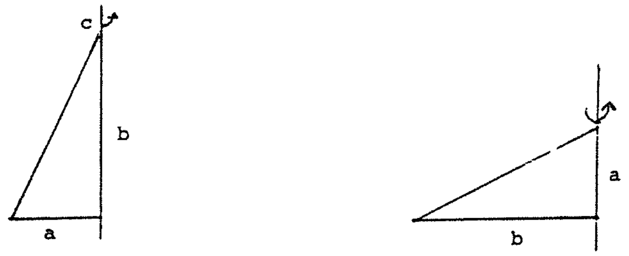
Quelle est la hauteur du cône ?
Montre que le rapport du volume du cône à celui du cylindre est 6.

Ex 4 :

Un cône dont la génératrice est égale au diamètre de la base contient une sphère qui lui est tangente.
Le diamètre de la base est 6 cm. Montre que le volume du cône est $\frac{9}{4}$ celui de la sphère.

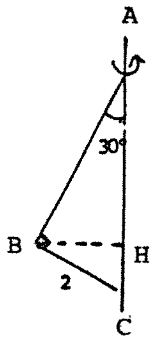
Ex 5 :

En tournant, ces triangles engendrent des cônes.
Montre que la différence des volumes est $\frac{1}{3}\pi\, a\, b\, (b - a)$.



Ex 6 :

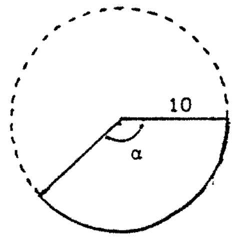
Quel est le volume du solide engendré ?



Ex 7 :

Etude de la hauteur du cône sans fond en fonction de l'angle α .

a) La hauteur est-elle proportionnelle à l'angle ?
b) Trouve α pour que la hauteur soit 8.



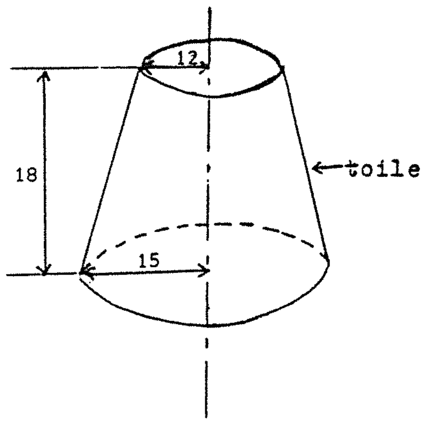
Ex 8 :

On coupe un cône par un plan parallèle à la base. Le petit cône est la réduction du grand à l'échelle $\frac{1}{4}$.

Montre que le volume du petit cône est $\frac{1}{4^3}$ celui du grand.

Ex 9 :

Le dessin représente un abat-jour. Calcule l'aire de la toile le constituant ?



ANALYSE DE LA FICHE ELEVE

Les activités 2 et 3 nécessitent la manipulation du cône. La première activité : recherche du patron, infirme les fausses idées de patron que les élèves avaient. La deuxième activité pose les problèmes de l'axe du cône et de la "révolution".

Comme nous l'avons dit précédemment, les exercices portent essentiellement sur le calcul d'éléments métriques. (Ils utilisent l'énoncé de Pythagore et la trigonométrie.)

Cependant on peut noter que :

- l'exercice 3 utilise le théorème de Thalès,
- l'exercice 4 réinvestit la sphère,
- l'exercice 5 porte sur le calcul littéral, le "support" de l'exercice étant le cône,
- l'exercice 7 porte sur les gestions de données,
- les exercices 8 et 9 abordent les problèmes de réduction et d'échelle.

OBJECTIFS

Savoir calculer des éléments métriques (aires, longueurs, angles, volume) dans le cône.

Objectifs secondaires

- Savoir mobiliser les connaissances vues dans le plan pour résoudre des problèmes dans l'espace,
- savoir tracer une courbe point par point,
- utiliser le calcul littéral.

DEROULEMENT ET COMMENTAIRES

ACTIVITÉ 2 (1 heure)

Objectifs de cette activité :

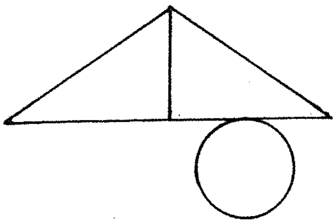
- manipuler le cône,
- découvrir l'axe, connaître les propriétés de cet axe,
- montrer que la génératrice est constante,
- trouver la forme du patron du cône,
- réinvestir l'énoncé de Pythagore dans une situation de l'espace,
- utiliser la proportionnalité entre la longueur de l'arc et la mesure de l'angle qui l'intercepte.

Déroulement de cette activité

Un cône en polystyrène est distribué à chaque groupe. Ce cône n'a pas les mêmes dimensions que celui que les élèves doivent construire. Les élèves ont conscience que le cône a 2 faces et donc que son patron possède deux parties : l'une est un disque (obtenu sans difficulté), l'autre face ne semble pas être connue des élèves. En effet, ils procèdent par dessins conjecturés, découpage, assemblage, essais-rectifications pour trouver l'allure de cette face et sa forme véritable.

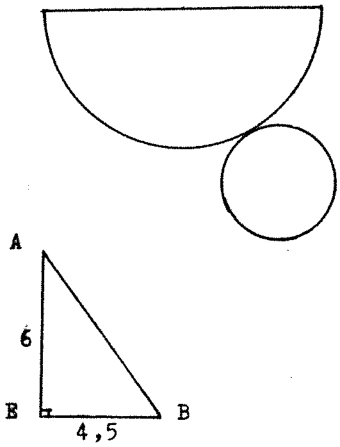
Démarches utilisées

a.



Triangle isocèle de hauteur 6 (confusion avec la hauteur du cône) et dont la base possède une longueur égale au périmètre du disque, base du cône.

b.

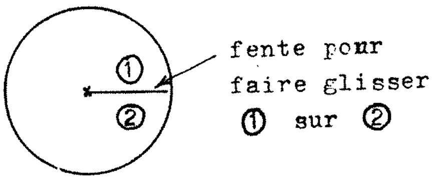


Demi-cercle dont le rayon est égal à une génératrice du cône, celle-ci est calculée à partir des données. La présence de l'axe du cône et sa position par rapport à la base sont bien perçues des élèves.

L'énoncé de Pythagore dans le triangle ABE rectangle en E est bien utilisé pour calculer AB.

L'assemblage des 2 morceaux n'est pas possible. Le demi-cercle paraît erroné.

c.



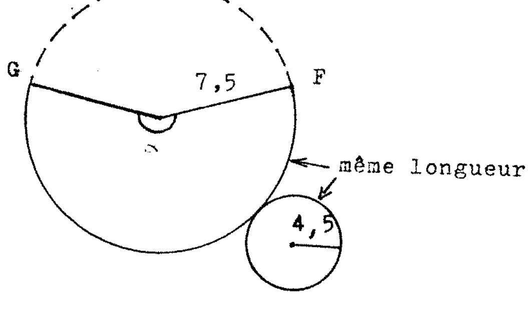
Pour avoir une idée plus précise: les élèves découpent une feuille et la posent sur le cône dont ils disposent. Les élèves constatent que l'angle est supérieur à 180° et savent que la longueur de l'arc qu'il intercepte doit être égale au périmètre de la base du cône.

Le calcul de la valeur de l'angle pose quelques difficultés.

- Un groupe calcule la longueur de l'arc pour différentes valeurs d'angles et finit par trouver un assemblage "correct", mais ils ne sont pas sûrs du résultat

- L'aide du professeur est nécessaire pour faire avancer la réflexion des élèves.

Les conditions à satisfaire sont rappelées et représentées au tableau :



. Génératrice = 7,5, ce qui donne le rayon du cercle

. la longueur de l'arc GF est égale au périmètre de la base.

Un élève propose de calculer la longueur totale du cercle ce qui donnerait la longueur pour un angle de 360°.

L'angle **α** est ensuite calculé par utilisation de la proportionnalité entre la longueur des arcs et les mesures des angles correspondant à ces arcs.

Le professeur fait remarquer l'avantage de garder **π** dans les calculs pour obtenir la valeur exacte de α.

Le patron est ensuite réalisé à la maison.

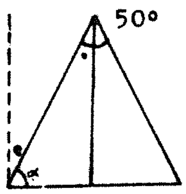
ACTIVITE 3 (20 min.)

Objectifs : Découvrir que - le cône est un solide de révolution,
- l'angle au sommet est constant.

Réinvestir le fait que la génératrice est constante.

Déroulement :

Cette activité est réalisée à l'aide du fil à couper le polystyrène ; fil que les élèves connaissent et manipulent depuis la 5ème. Le professeur précise les détails matériels pour la réalisation d'un cône (utilisation du support annexe[1] sur lequel tourne le polystyrène).
Les élèves calculent l'angle d'inclinaison du fil :



- soit l'angle avec l'horizontale (α) correspondant à l'angle à la base du cône en utilisant les angles complémentaires,

- soit l'angle avec la verticale correspondant au demi-angle au sommet du cône en utilisant les angles alternes-internes.

Les cônes réalisés par les groupes sont placés côte à côte, les élèves constatent les différences de base et de hauteur et recherchent pourquoi ils sont différents.

Le professeur projette ensuite, à l'aide du rétroprojecteur la synthèse de l'activité 1.

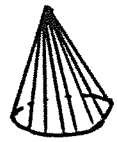
Dans une classe, le transparent suivant est projeté :

- Un cône est une figure. C'est un triangle qui a pour base un cercle. Le triangle est isocèle.

[1] *Voir "Construction du fil à couper le polystyrène" IREM de Poitiers".*

- Un cône c'est une infinité de disques superposés qui diminuent en se rapprochant du sommet.

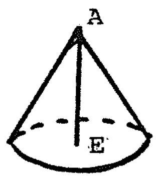
- C'est un point d'où partent plein de droites qui se séparent. Si on rejoint toutes les droites à l'autre bout, on obtient un cercle.



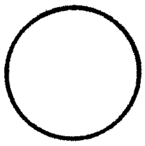
- C'est un solide qui a 2 faces, l'une plate et l'autre bombée. Il est formé d'un disque à la base et d'une surface qui va du sommet à la circonférence du disque. Sa hauteur va du centre du disque de base au sommet. Il a 3 arêtes.

-

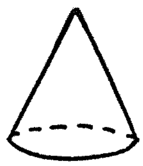
- Le cône est un ensemble de triangles isocèles qui tournent sur eux-mêmes en prenant comme centre de rotation la droite (RE) qui est la médiatrice de ces triangles.

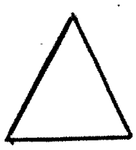


- **Représentations.**

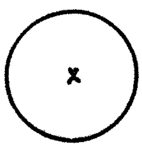


vue de dessous

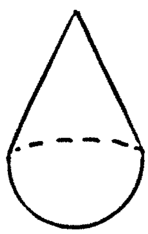


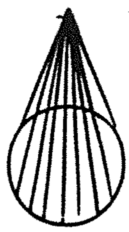


vue de face



vue de dessus





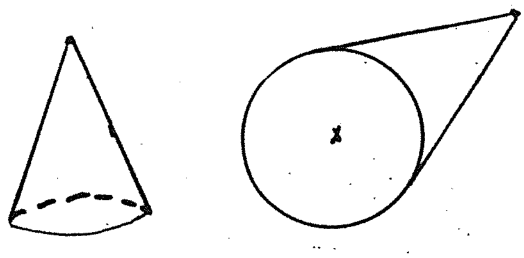
Chaque définition est commentée et discutée afin de faire ressortir ce qui est juste ou faux et ce qu'il est intéressant de connaître sur le cône régulier ou cône de révolution.

Dans l'autre classe, plus faible, le transparent comporte seulement les réponses justes données par les élèves.

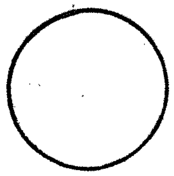
La comparaison avec leurs réponses fausses, faite oralement, permet de corriger les images mentales erronées que les élèves avaient du cône et de mieux fixer les caractéristiques du cône de révolution.

Des images :
Un cornet de glace, un chapeau pointu, un faisceau lumineux.

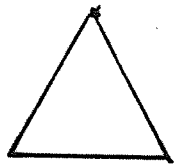
Des dessins :
Perspectives cavalières



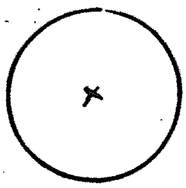
vues :



vue de dessous



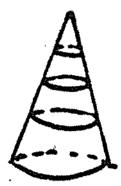
vue de face (triangle isocèle)



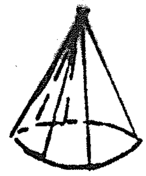
vue de dessus

Des idées :

- Un cône est une infinité de disques accolés qui diminuent en se rapprochant du sommet.



- Un cône est un cercle et un sommet et on trace une infinité de droites



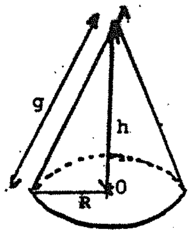
- Si on coupe le cône, on a toujours un cercle.

Des descriptions :

Le cône a deux faces : un disque
une autre face

Le cône a une arête : cercle.

Les dimensions :



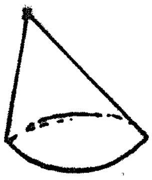
h : hauteur
R : rayon de la base
g : génératrice

La hauteur est perpendiculaire à la base en son centre 0 et passe par le sommet du cône A :

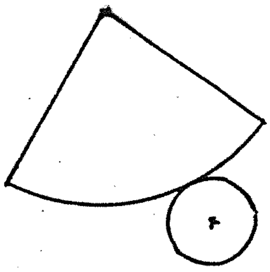
On a alors un cône droit.

La hauteur peut ne pas passer par le centre de la base :

On a alors un cône oblique.



Des patrons :



longueur arc égale longueur du cercle (base)

disque (base).

Des nombres :

aire = aire disque + aire secteur

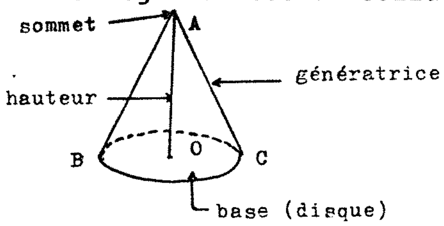
$$\text{volume} = \frac{1}{3}\ \underset{\substack{\uparrow \\ B = \pi \times R^2}}{B} \times h$$

(R rayon base)

Ce qui a été noté sur le répertoire

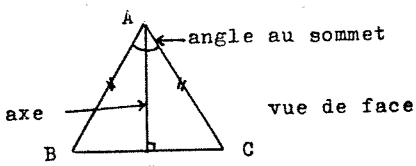
C Cône

Un cône régulier est un solide de révolution :



- Le cône régulier a un axe qui passe par le sommet et le centre de la base et qui est perpendiculaire à la base, on l'appelle hauteur du cône.

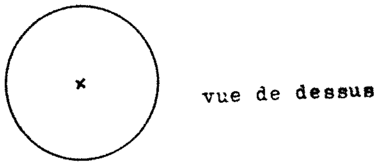
- La génératrice est constante
- L'angle au sommet est constant
- La vue de face est un triangle isocèle.
- Son volume se calcule par :



$V = \frac{1}{3}\ B \times h$ → hauteur

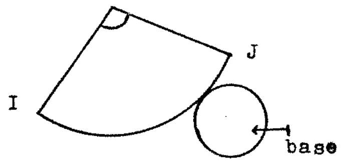
↑

aire base (πR^2) (R rayon base)



- La forme du patron est :

La longueur de l'arc IJ est égale au périmètre de la base.



Les objectifs précisés par les élèves sont alors inscrits dans le dossier:

Je dois savoir : ***- calculer les éléments métriques du cône (hauteur, génératrice, rayon de la base, angle au sommet, aire, volume, angle du patron),***

- représenter un cône (perspective, vues, patron).

EXERCICES (5 Heures)

A l'exercice 1 de nombreux exemples sont cités ce qui permet de vérifier que les élèves ont une bonne image mentale du cône.

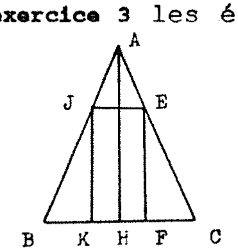
Pour tous les exercices suivants, des élèves ont à coeur de justifier les étapes de la démonstration ce qui leur pose parfois quelques difficultés car ici, nous n'avons pas tous les énoncés sur les fiches.

A l'exercice 2 les élèves utilisent tout de suite, une section du cône (ou vue) et calculent la génératrice par l'énoncé de Pythagore et la trigonométrie.

Le problème étant ramené à une situation plane, les justifications (triangle isocèle, hauteur : bissectrice de l'angle au sommet) sont possibles.

A l'exercice 3 les élèves dessinent une coupe de l'objet.

Certaines étapes sont bien justifiées (parallèles (EJ) et (FK) par les bases parallèles du cylindre) d'autres sous-entendues (EFC rectangle en F, (AH) et (EF) parallèles).



Plusieurs démarches sont utilisées :

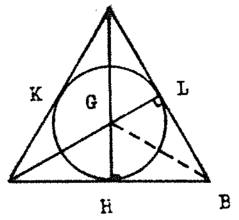
- Enoncé de Thalès dans AHC pour avoir AH
- Trigonométrie dans EFC : tan $\widehat{C}$ puis $\widehat{C}$.
  Puis utilisation de tan $\widehat{C}$ dans AHC.

- Utilisation des parallèles et des angles correspondants $\widehat{C}$ et $\widehat{E}$.
  Puis utilisation de la trigonométrie.

Des précisions sont nécessaires sur le mot rapport ainsi que sur la façon de mener les calculs (nécessité de garder π pour avoir la valeur exacte).

L'exercice 4 pose plus de difficultés.

- D'abord pour faire le dessin :



Est-on sûr que la sphère est tangente aux 3 côtés du cône en H, L, K ?

- Ensuite pour situer le centre de la sphère et calculer son rayon.

C'est l'occasion de faire le point sur les droites remarquables dans un triangle équilatéral, (bissectrices, médianes) et leur point de concours.

Les élèves recherchent dans leur répertoire ce qui avait été noté sur le centre de gravité du triangle et terminent le calcul du rayon.

D'autres groupes utilisent les angles : bissectrices, hauteurs et les lignes trigonométriques de $\widehat{GBH}$ pour calculer GH.

Exercice 5, deux triangles en carton collés sur une tige que l'on fait tourner illustrent la situation et permettent de corriger la confusion entre figure plane et solide.

La factorisation encore mal maîtrisée par quelques élèves nécessite une aide.

Exercice 6, quelques erreurs dues à une mauvaise compréhension de la situation (le solide obtenu est considéré comme formé d'un seul cône de base BH et de hauteur AC).

Pour les calculs, les élèves

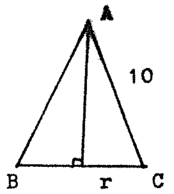
* ont gardé π dans leurs calculs (valeur exacte du volume),
* ont utilisé
  . soit les angles et seulement la trigonométrie
  . soit les angles, la trigonométrie et l'énoncé de Pythagore.

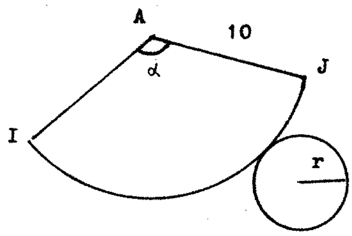
L'exercice 7 est l'exercice du dossier qui pose le plus de problèmes, l'activité 2 semble mal assimilée. Des élèves pensent qu'il manque une donnée, d'autres ne voient pas bien le lien entre l'angle α et la hauteur du cône. Le professeur leur fait alors construire des patrons de cônes de même génératrice mais d'angle α différent puis assembler le cône.

Une réflexion collective, permet d'aider les élèves en difficulté.

Les données du texte sont traduites au tableau par 2 dessins :

- une section par plan perpendiculaire à la base,
- le patron.





Les difficultés proviennent du fait qu'il faut travailler sur les deux dessins à la fois.

Les élèves complètent les informations :

AC = 10 ; génératrice cône = rayon du patron; IJ a même longueur que la base.

. On exprime IJ la fonction de α puis on calcule r et h et on résoud l'équation pour que h soit égal à 8.

2 erreurs rencontrées dans les calculs.

$$\sqrt{1296 - \frac{\alpha^2}{36}} = 36 - \frac{\alpha}{6}$$

$$64 = 100 - \frac{\alpha^2}{1296} \text{ donne } 1296 \times 64 = 100 - \alpha^2$$

Les élèves plus faibles ont calculé r par l'énoncé de Pythagore puis le périmètre de la base, puis la valeur de α. En fait, ils ont résolu le problème à l'envers.

L'exercice 8 permet comme à l'exercice 7, de faire "fonctionner" le calcul littéral sur une situation de l'espace, de rappeler que l'échelle porte sur les longueurs et de montrer que si les longueurs sont multipliées par k, le volume est multiplié par k^3.

ETUDE DE LA PYRAMIDE

ACTIVITE 2

Construis le patron d'une pyramide régulière à base carrée. La hauteur de la pyramide est 6 cm et le côté de la base est 3 cm.

ACTIVITE 3

En utilisant une perspective cavalière du pavé, donne une représentation en perspective cavalière de la pyramide placée sur la table.

OBJECTIFS

CONTRAT : l'exercice 6 est facultatif, les exercices 5 et 8 sont à faire en devoir à la maison.

DUREE : 5 heures en classe.

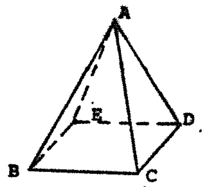
EXERCICES

Ex 1 :

Une pyramide a une base qui possède x côtés.
Exprime en fonction de x :
- le nombre de sommets
- le nombre de faces
- le nombre d'arêtes.

Ex 2 :

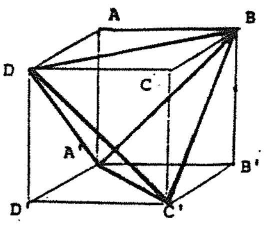
Une pyramide à base carrée de côté 3 a pour hauteur 5.
- Calcule une valeur approchée de l'angle au sommet d'une face latérale ($\widehat{BAC}$ par exemple).
- Calcule une valeur approchée de l'angle $\widehat{ABD}$.



Ex 3 :

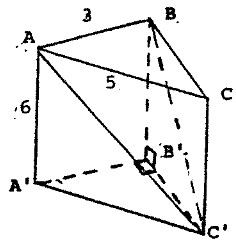
Une pyramide régulière à base hexagonale a pour hauteur 2x.
Le rayon du cercle circonscrit à l'hexagone est 2x.
- Calcule l'aire totale de la pyramide en fonction de x.
- Calcule le volume de la pyramide en fonction de x.

Ex 4 :



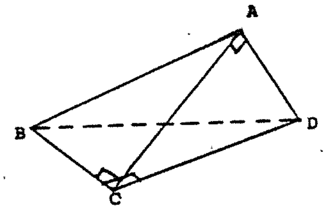
- Dessine un patron du tétraèdre DBC'A' inscrit dans le cube d'arête 4cm.
- Compare le volume de ce tétraèdre et celui du cube.
- Quelle est l'aire du triangle A'BD ?
- Calcule la hauteur de ce tétraèdre.

Ex 5 :



On coupe le prisme ABCA'B'C' suivant le plan ABC'.
a) Dessine les patrons des deux solides obtenus,
b) Calcule l'aire et le volume de chaque solide obtenu.

Ex 6 :



Dans le solide ci-contre,
ABC est un triangle rectangle en C.
ADC est un triangle rectangle en A.
BCD est un triangle rectangle en C.

- Montre par le calcul que le triangle ABD est rectangle.
- Que penses-tu de la droite (BC) et du plan (ADC) ?

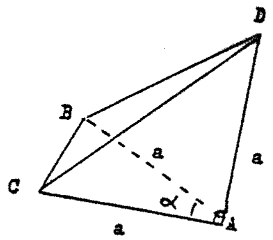
Ex 7 :

Démontre que l'aire latérale d'une pyramide régulière a pour mesure le produit du demi-périmètre de la base par la hauteur d'une face latérale issue du sommet de la pyramide.

Ex 8 :

En Egypte, la pyramide de Khéops est une pyramide à base carrée de côté 230 m qui a pour hauteur 137 m. Donne un ordre de grandeur de son volume.

Ex 9 :

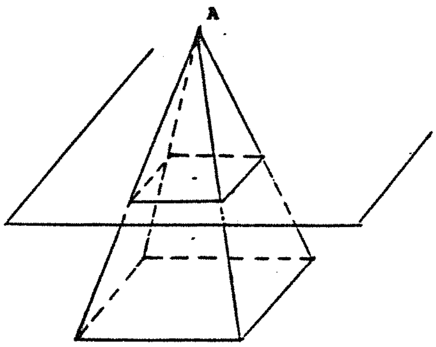


ABCD est un tétraèdre. La base est le triangle ABC isocèle en A. L'arête [AD] est perpendiculaire à la face ABC. AD = AC = AB = a.

a) Exprime le volume de cette pyramide en fonction de a et de α .

b) Pour quelle valeur de α le volume de cette pyramide est-il égal au volume d'un cube d'arête $\frac{1}{2}$ a .

ACTIVITE 4



Un plan parallèle à la base coupe une pyramide à base carrée.

- Quelle est la forme de la section ?
Pourquoi ?

La pyramide initiale a pour hauteur 6 et sa base mesure 5 de côté. Le côté de la base de la petite pyramide est 2.

- Calcule la hauteur de la petite pyramide.

- Montre que :

$V \text{ petite} = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \times V \text{ grande}.$

Généralisation : Une pyramide à base carrée est réalisée à l'échelle k. Quel est le rapport des volumes des pyramides ?

ANALYSE DE LA FICHE ELEVE

Suite à la première partie de l'activité 1 (états initiaux) passée un mois auparavant, nous proposons aux élèves de trier des solides afin qu'ils puissent préciser ce qui est ou n'est pas une pyramide. Parmi les objets choisis figurent des pyramides non régulières et des objets pointus qui ne sont pas des pyramides.

A l'issue de ce tri, que les élèves justifient, des morceaux choisis de l'activité 1 sont projetés au tableau afin que les élèves puissent discuter ce qui leur semble juste ou faux, à retenir ou pas.

Les activités 2 et 3 permettent de passer du patron à la perspective cavalière.
Les exercices 1, 3, 7 sont des exercices de calcul littéral dont le support est la géométrie dans l'espace.

L'activité 4 porte sur des activités de réduction et d'agrandissement.

OBJECTIFS

- Savoir ce qu'est une pyramide, une pyramide régulière, un tétraèdre, un tétraèdre régulier.
- Savoir calculer les éléments métriques d'une pyramide (hauteur, arêtes, hauteur d'une face latérale, volume, aire, angle au sommet d'une face...).
- Choisir la bonne représentation, la bonne vue, le bon plan de projection d'une perspective cavalière.
- Développer la vision dans l'espace en s'habituant à considérer les pyramides comme des pavés tronqués (perspective d'une pyramide à partir d'un cube ou d'un pavé).

MATERIEL

Pyramides diverses en polystyrène, armatures de cube et pavé, carton.

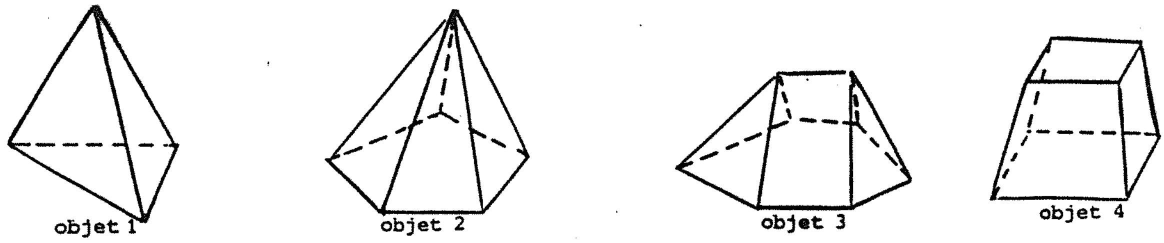
ACTIVITE 1

1ère PARTIE

Elle a été passée environ 1 mois avant l'étude du dossier en même temps que l'activité 1 sur le cône.

2ème PARTIE

Les élèves reçoivent une pochette contenant les objets suivants construits en polystyrène.



accompagnés de la consigne :

"Parmi les objets présentés, quelles sont les pyramides ?

Cette deuxième partie de l'activité a pour but d'infirmer les idées reçues telles que :

- une pyramide est un objet pointu
- toute pyramide est régulière
- toute pyramide a une base carrée.

Les objets à bases triangulaire et pentagonale ne sont pas réguliers. Seul le tronc de pyramide possède une base carrée.

Les élèves hésitent dans leur classement,
. l'objet 3 est rejeté sans problème (2 sommets),
. l'objet 4 est appelé pyramide coupée, est-ce une pyramide ?
. les objets 1 et 2 sont classés par les uns comme pyramides, par les autres non.

La discussion qui a suivi ces classements a permis de dégager les caractéristiques d'une pyramide, d'une pyramide régulière et de donner une bonne image mentale de ce solide.

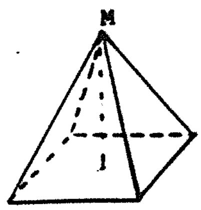
A la suite de cette activité, le professeur projette (au rétroprojecteur) des morceaux choisis de la 1ère partie de l'activité.

Dans une classe

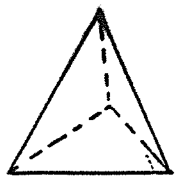
- Une pyramide a pour base un carré qui se rétrécit vers le haut jusqu'à un point appelé sommet. Il a 4 faces triangulaires.

- Une pyramide a 5 faces, 4 sont des triangles, l'autre est un carré. Entre les faces qui forment les côtés il y a un angle droit puisque le carré a 4 angles droits.

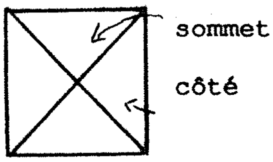
- La hauteur va du point M au point d'intersection des médiatrices des côtés du carré.



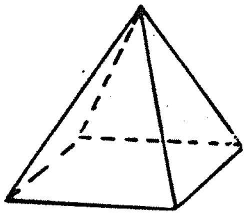
- Ce sont 4 triangles de même aire dont un sur le sol et les 3 autres en l'air. Ils ont un sommet commun et 2 à 2 : 2 sommets communs.

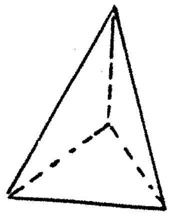


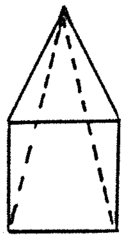
Représentations



vue de dessus



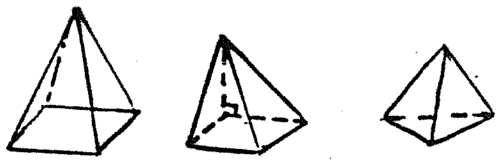




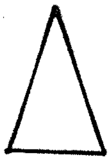
Dans l'autre classe

Des images : *Pyramide d'Egypte.Pub sur TF1.*

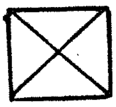
Des dessins : *Perspective cavalière*



vues

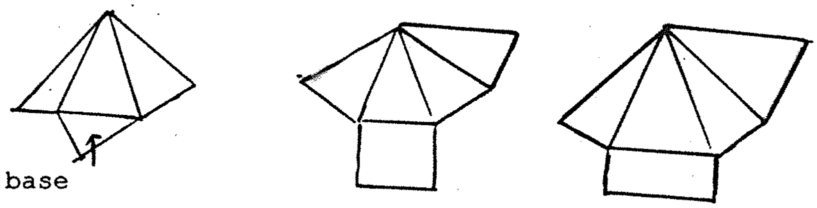


vue de face



vue de dessus

patrons

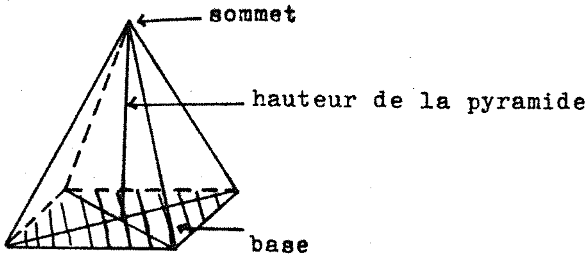


Des idées

- Carré surmonté de 4 triangles isocèles de même hauteur.
- Sa hauteur va du sommet au centre de la base (intersection des diagonales ou des médiatrices des côtés).
- Un minuscule carré qui s'agrandit jusqu'à la base.
- La base qui se retrécit jusqu'au sommet.
- Quatre arêtes qui partent d'un même point (sommet) qui se séparent. Si on relie les extrémités, on obtient la base.

Des descriptions

- La pyramide a une base (carré, rectangle, triangle,...).
- Les autres faces sont des triangles isocèles ayant 1 point commun : le sommet.
- La hauteur passe par le sommet et le centre de la base (pyramide régulière).



Des nombres

Aire totale = aire base + aire des faces latérales

Volume = $\frac{1}{3}$ B h ← hauteur de la pyramide
↑
aire de la base

Nécessité de bien choisir le plan dans leqpel on travaille.

Dans les deux classes ces "morceaux choisis" sont discutés, puis une synthèse est effectuée sur le répertoire à

P Pyramide

. Solide dont toutes les faces latérales sont des triangles et qui ont un sommet commun (sommet de la pyramide).

. L'autre face est la base de la pyramide.

*Pyramide régulière

. La base est un polygone régulier (côtés de même mesure, angles égaux).

. Les faces latérales sont des triangles isocèles superposables.

. Elle a un axe qui passe par le sommet de la pyramide et le centre de rotation de la base et qui est perpendiculaire à la base. C'est la hauteur de la pyramide.

*Tétraèdre

Pyramide dont la base est un triangle.
Les quatre faces sont des triangles.

*Tétraèdre régulier

Toutes les faces sont des triangles équilatéraux.

*Volume

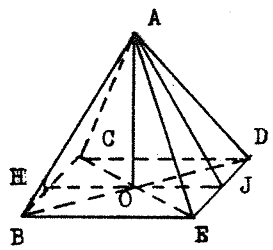
$$V = \frac{1}{3} \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{aire de la base.}}}{B} \times h \leftarrow \text{hauteur de la pyramide}$$

ACTIVITE 2

Quelques élèves confondent la hauteur de la pyramide et la hauteur d'une face.
Le vocabulaire est alors précisé. Des patrons sont tracés à main levée.
La plupart des élèves dessinent le patron "étoilé" qui, semble-t-il, favorise au mieux la compréhension des calculs à réaliser.

Notons que deux démarches sont utilisées pour les calculs :

- soit calcul d'une arête latérale (côté des faces triangulaires),
- soit calcul de la hauteur du triangle.



Les élèves s'aident d'une représentation en perspective et se placent ensuite dans le triangle AOE :

Calcul de OE, $\frac{1}{2}$ diagonale, puis de AE, hypoténuse du triangle rectangle AOE).

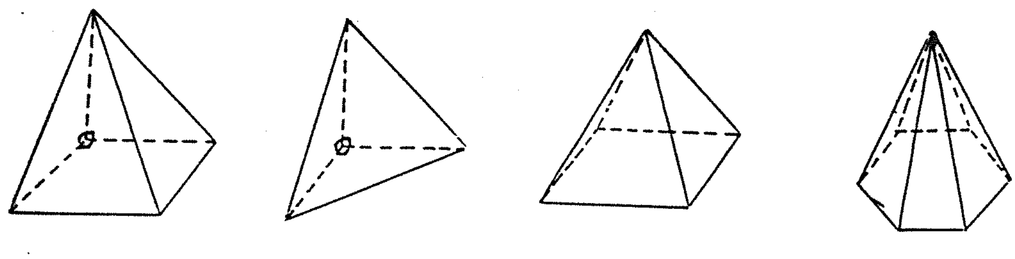
ou dans le triangle AOJ

(calcul de OJ = $\frac{1}{2}$ côté puis AJ hypoténuse du triangle rectangle AOJ).

Les calculs sont bien faits par tous les élèves. Le patron est terminé à la maison.

ACTIVITE 3

Chaque groupe d'élèves dispose de l'un des objets ci-dessous.



Les objectifs de cette activité sont :

- de faire remarquer qu'en inscrivant la pyramide dans un cube ou un pavé, on facilite la représentation en perspective cavalière,

- de montrer qu'une pyramide régulière peut être obtenue à partir d'un cube ou d'un pavé tronqué,

- de remémorer pour certains élèves, la perspective cavalière du cube et du pavé, repréciser les fuyantes et le parallélisme des arêtes.

Les dessins sont bien réussis et chaque groupe présente sa pyramide aux autres groupes de la classe lors de la synthèse.

A la suite de cette activité, les objectifs sont dégagés et inscrits sur le dossier :

Je dois savoir : ***- calculer les éléments métriques d'une pyramide,***
- dessiner une perspective cavalière et un patron d'une pyramide.

EXERCICES (5 heures).

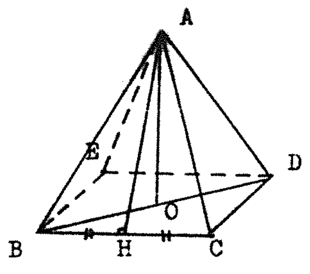
A l'exercie 1, les élèves commencent par des conjectures sur des pyramides à bases triangle, quadrilatère,..., puis généralisent.

Les réponses sont données au professeur qui circule de groupe en groupe.

A l'exercice 2, la difficulté que présente cet exercice est double :
- bien choisir le plan dans lequel on travaille
- justifier les étapes de la démonstration.

L'énoncé de Pythagore et la trigonométrie sont largement réinvestis et bien utilisés par les élèves. Deux démarches :

* calculs :
- de BD dans BDC par Pythagore
- de BO
- de AB dans ABO par Pythagore
- de $\widehat{BAH}$ par son sinus dans BAH puis de $\widehat{BAC}$.



* calculs :
- de OH
- de AH par Pythagore
- de $\widehat{BAH}$ par sa tangente puis de $\widehat{BAC}$.

L'exercice 3 est plus difficile car, d'une part, il allie le calcul littéral et une situation de l'espace et, d'autre part, les justifications sont nombreuses : hexagone régulier inscrit dans le cercle de rayon R qui a pour côté R, formé de 6 triangles équilatéraux (ou 2 trapèzes pour quelques élèves), axe de symétrie des triangles équilatéraux, axe de la pyramide,....

Des confusions constatées dans les calculs entre la hauteur de la pyramide, la hauteur d'un triangle équilatéral constituant la base, la hauteur d'une face latérale nécessitent une mise au point dans l'organisation des calculs.
Cet exercice offre l'occasion de travailler sur les racines carrées pour le calcul de l'aire et du volume et de revenir sur la factorisation (exemple d'erreurs rencontrées :

$6\ x^2 \sqrt{7} + 6x^2 \sqrt{3}$ factorisé en $12x^2 (\sqrt{7} + \sqrt{3})$ et $2x^2 - x^2 = 2$!).

A l'exercice 4, la réalisation du patron ne pose pas de problème, les élèves ont bien vu les diagonales des faces du cube pour les arêtes du tétraèdre.

Le calcul du volume du tétraèdre est plus difficile.
Le professeur aide les élèves à comprendre la situation en utilisant une armature de cube, dans laquelle le tétraèdre est visualisé avec de la laine, puis à découvrir le calcul du volume du tétraèdre à partir du volume du cube (on enlève 4 pyramides au cube.)

La formule habituelle est ensuite employée pour trouver la hauteur du tétraèdre.

Les exercices 5 et 8 sont faits en devoir à la maison, toutefois, un prisme coupé, réalisé en polystyrène (ex. 5) est présenté aux élèves pour faciliter la compréhension des solides obtenus.

L'exercice 7 est bien réalisé, le calcul littéral est mené à bien.

A l'exercice 9, les élèves font une bonne analyse de la figure et de ce qu'ils doivent calculer pour répondre à la 1ère question. Les méthodes sont bonnes et variées.
Les 2 formules $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ et $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ sont utilisées pour comparer les résultats proposés.

Les erreurs les plus fréquentes rencontrées dans les calculs sont :

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{2}$$

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha$$

$\sqrt{a^2 - a^2 \cos^2 a} = a - a \cos \alpha$. (Erreur qui n'est pas faite avec des nombres.)

Pour répondre à la question b, les élèves procèdent par essais-rectifications en se répartissant le travail.
Cette méthode permet d'obtenir un encadrement aussi fin que l'on veut, même si la valeur exacte n'est pas trouvée.
Les élèves constatent que deux valeurs conviennent, α variant de 0 à 180°.

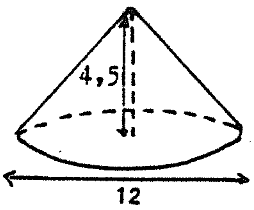
Une autre méthode de résolution est proposée dans une des deux classes. Un tableau de valeurs étant établi, il est possible de tracer une courbe représentant le volume en fonction de l'angle et ainsi avoir une valeur approchée des 2 valeurs possibles de l'angle.
Ce travail est terminé à la maison.

ACTIVITE 4

Elle donne l'occasion d'utiliser l'énoncé de Thalès dans une situation de l'espace et de rappeler que si les longueurs sont multipliées par k, le volume est multiplié par k^3.

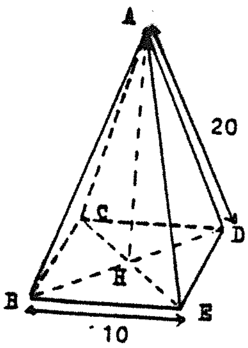
TEST

Ex 1 :



Voici un dessin en perspective cavalière d'un cône de révolution.
Calcule la valeur exacte du volume de ce cône.
(4,5 est la valeur de la hauteur du cône et 12 le diamètre de la base).

Ex 2 :



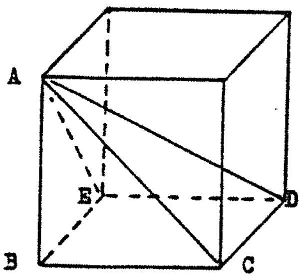
Voici un dessin en perspective cavalière d'une pyramide régulière à base carrée de côté 10.
L'arête latérale mesure 20.

a) Calcule la valeur exacte de AH, hauteur de la pyramide.
Justifie toutes les étapes.

b) Calcule la valeur exacte du volume de cette pyramide.

c) Calcule un encadrement à un degré près de $\widehat{ABD}$.

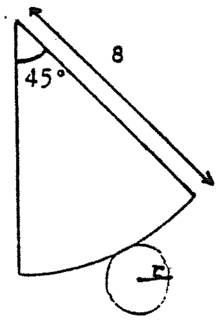
Ex 3 :



La pyramide ABCDE est inscrite dans un cube d'arête 4.

a) Calcule la valeur exacte des longueurs des arêtes AE, AC, et AD.
b) Dessine un patron de cette pyramide.

Si tu as fini



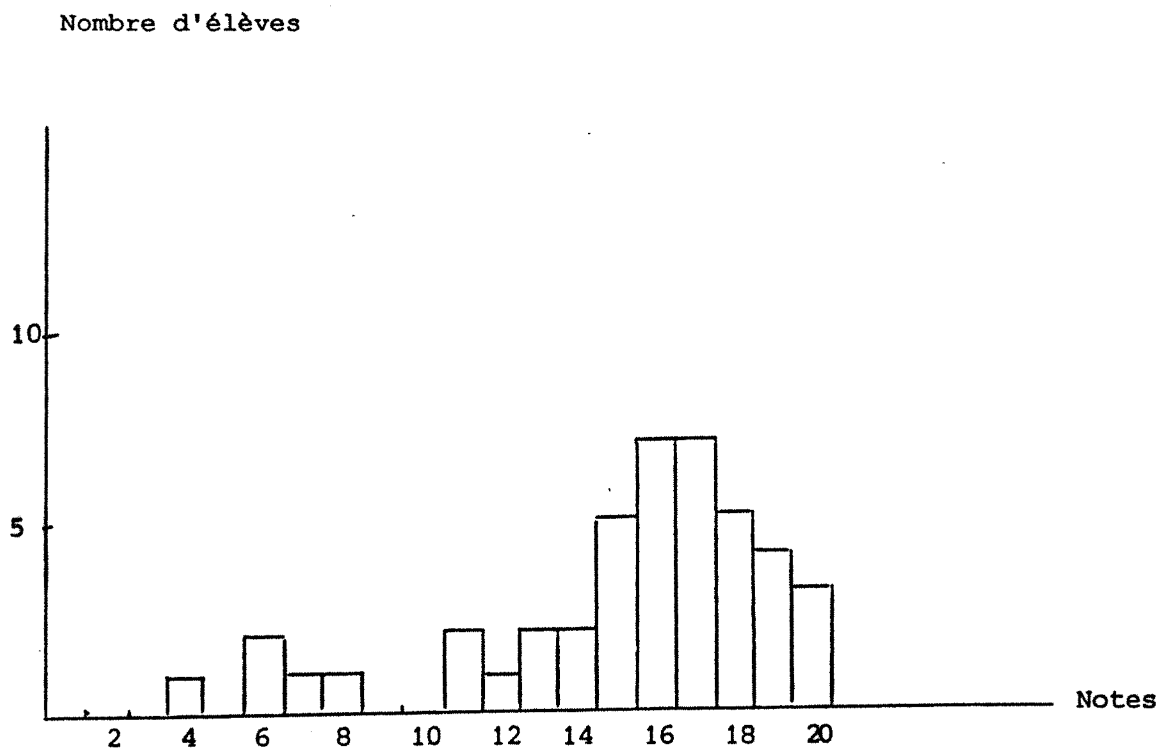
Ceci est le patron d'un cône.
Calcule la valeur exacte du rayon r de la base.

Barême : Ex 1) 3 points
Ex 2) 9 points
Ex 3) 8 points.

RESULTATS DU TEST

Nombre d'élèves : 43

Moyenne : 15,14/20



TRAVAUX NUMERIQUES (2)

CALCUL LITTERAL

ACTIVITE 1

Illustre par une figure $a^2 - b^2$.

En découpant la figure le moins de fois possible, comment obtenir un rectangle à la manière d'un puzzle ?

ACTIVITE 2

Est-il vrai que la somme du carré de la différence de deux nombres et du quadruple de leur produit est égale au carré de leur somme ?

OBJECTIFS

PARTIE A

CONTRAT : l'exercice 12 est facultatif.

DUREE : 5 heures en classe.

Ex 1 :

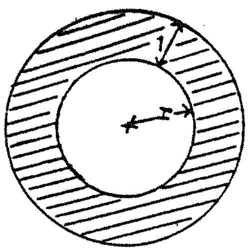
Dans les Zététiques de Viète (1540-1603) on trouve :

"Le double du produit de deux nombres ajouté à la somme de leurs carrés est égal au carré de leur somme."

"Le double de la somme des carrés de deux nombres diminué du carré de la différence de ces deux nombres est égal au carré de leur somme."

Prouve chacune de ces affirmations.

Ex 2 :



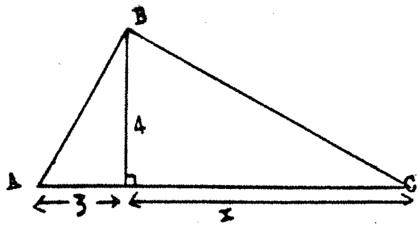
Les deux cercles sont concentriques.
Que vaut r pour que l'aire hachurée soit 6 cm^2 ?

Ex 3 :

Construis un triangle rectangle sachant que :

- son périmètre est 9
- l'un des côtés de l'angle droit vaut 1.

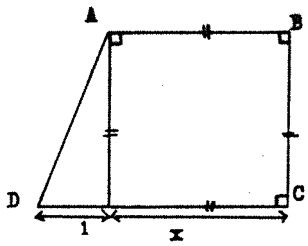
Ex 4 :

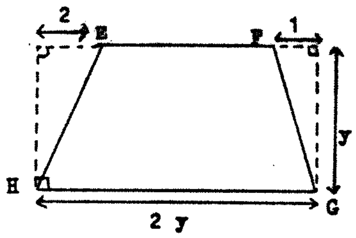


Trouve x pour que le triangle ABC soit rectangle en B.

Ex 5 :

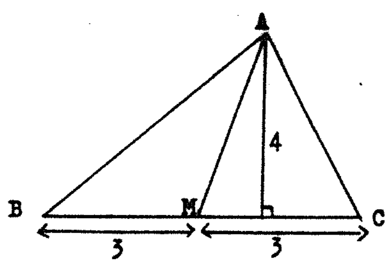
Dans un vieux manuel on lit : "Dans un trapèze convexe, la somme des carrés des diagonales diminuée du double produit des bases est égale à la somme des carrés des deux côtés non parallèles."
Prouve que cette relation est vraie pour chacun de ces trapèzes ABCD et EFGH.





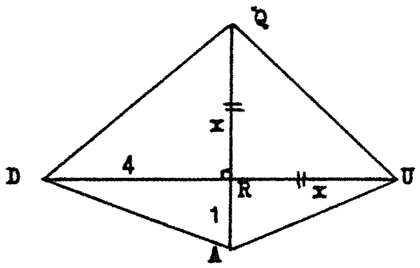
Ex 6 :

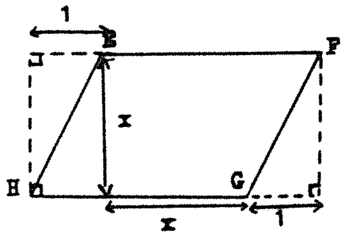
Prouve que $AB^2 + AC^2 = 2\ AM^2 + \dfrac{BC^2}{2}$.



Ex 7 :

Dans un quadrilatère quelconque, la différence entre la somme des carrés des quatre côtés et la somme des carrés des diagonales est égale à quatre fois le carré de "la droite" qui joint les milieux des diagonales (c'est un théorème dû à Euler).
Vérifie la formule dans le rectangle, le losange et dans chacun des quadrilatères suivants :





Ex 8 :

$a-1$, a et $a+1$ sont les mesures des côtés d'un triangle rectangle.
Que vaut a ?

Ex 9 :

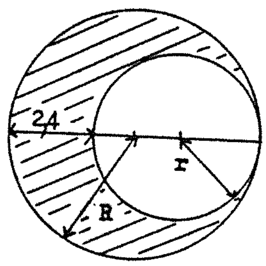
Le produit de deux nombres positifs est 12 et la somme de leurs carrés est 25.
Trouve ces deux nombres.

Ex 10 :

ZETETIQVE III.

Estant donnée la perpendiculaire d'vn triangle rectangle, & la difference de la base à l'hypotenuse : trouuer la base & hypotenuse.

Ex 11 :



Calcule R et r pour que l'aire hachurée soit $50 cm^2$.

Ex 12 :

Un triplet (a, b, c) est pythagoricien s'il vérifie $c^2 = a^2 + b^2$.
Par exemple (3, 4, 5) est pythagoricien car $3^2 + 4^2 = 5^2$.
Pourquoi les appelle-t-on ainsi ?

a) Si (a, b, c) est pythagoricien alors $(\frac{2}{3}a\ ;\ \frac{2}{3}b\ ;\ \frac{2}{3}c)$ l'est aussi.
Pourquoi ?
Est-ce général ?

b) Montre que $(2\,x\,y\ ;\ x^2 - y^2\ ;\ x^2 + y^2)$ est pythagoricien.

c) Fermat (1601-1665) indique que si $(a\ ;\ a + 1\ ;\ c)$ est pythagoricien alors $(3a + 2c + 1\ ;\ 3a + 2c + 2\ ;\ 4a + 3c + 2)$ l'est aussi.

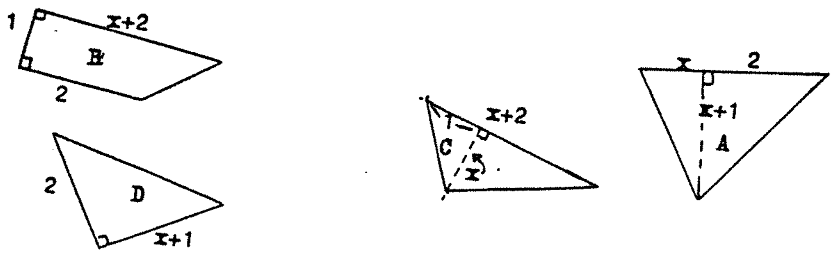
Prouve-le.

PARTIE B

CONTRAT : tous les exercices sont obligatoires.

DUREE : 2 heures en classe.

Ex 1 :



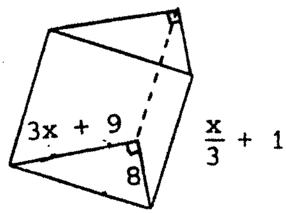
Avec les quatre pièces ci-dessus, on peut former un carré. Par le calcul de l'aire, précise le côté de ce carré.
Dessine ensuite le carré formé.

Ex 2 :

Montre que $n^3 - n$ est le produit de trois nombres consécutifs.

Ex 3 :

Montre que le volume de ce prisme est égal au volume d'un pavé de base carrée et de hauteur 4.



ACTIVITE 3

Deux nombres a et b sont tels que :
$a^2 + (2a + 1)^2 = b^2 + (2b - 1)^2$.
Quelles relations a-t-on entre a et b ?

OBJECTIFS

CONTRAT : tous les exercices sont obligatoires.

DUREE : 3 heures en classe.

Ex 1 :

Trouve un nombre tel que le double de son carré soit égal à son triple.

Ex 2 :

Quels sont les nombres dont la puissance quatrième est égale à 9 fois leur carré ?

Ex 3 :

On donne deux nombres a et b.

$T = a(a + 2) + b(b - 2) - 2ab$.
Montre que T est le produit de deux facteurs dont l'un est $a - b$.
Calcule a et b sachant que leur somme est $\frac{7}{3}$ et que $T = 0$.

Ex 4 :

a) Factoriser et réduire si possible

$-2x - \frac{1}{2}x$.

$21y^4 - 14y^2 + 35y^5$.

$2(x + 3) + (x + 3)(x - 7)$
$(2x + 3)(x - 5) - (2x + 3)(2x - 1)$.

$x^2 + 8x + 16$

$(2x + 3)^2 - 2(8x + 12)$

$\frac{a^2}{9} - \frac{b^2}{16}$.

$(x - 1)^2 + 4(x - 1)$
$(x - 2)(y + 2) - (x - 2)^2$

$16 - 4x + 0,25\ x^2$
$2,56\ a^2 - 2,25\ b^2$.

$6a + 10ab + 18 + 30b$.

b) Développer et réduire si possible.

$5a(a + 3b) - 3a\ (a - 2b)$

$(3x + 5)\ (2x - 7)$

$(x + 2)^2$
$(a - 5)\ (a + 5)$

$(2a - 5)^2$

$\left(\frac{1}{3}\ a - \frac{2}{5}\ b\right)\ \left(\frac{1}{3}\ a + \frac{2}{5}\ b\right)$

$(0,2x + 5)^2$

$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2$

$(x - 3)\ (x - 4) - (x - 5)^2$.

c) Equations. Résous:

$(2x - 1)\ (x - 7) = 0$

$- 7x + 4x^2 = 0$.

$9x^2 - 42x + 49 = 0$.

$4x^2 + 12x = -9$

$100x^2 - 36 = 0$.

$(7x - 1)\ (x + 3) - (x - 2)\ (7x - 1) = 0$.

$(2x + 3)^2 - (2x + 3) = 0$.

CHOIX DIDACTIQUES

Les élèves ont déjà manipulé, à de nombreuses reprises, le calcul littéral avant d'aborder cette partie : avec l'énoncé de Thalès, avec les résolutions des systèmes d'équations, avec le calcul sur les racines ou en géométrie dans l'espace.
Les nouveautés résident dans la mise en place des identités remarquables et dans la résolution des équations-produit. Dans cette partie aussi se poursuit l'apprentissage concernant les factorisations. On perçoit donc que cette partie constitue un temps fort de l'apprentissage des techniques du calcul littéral en troisième.
Cependant concevoir un tel apprentissage est difficile si on veut respecter l'esprit du programme. En effet les commentaires précisent : "la résolution de problèmes (issus de la géométrie, de la gestion de données, des autres disciplines, de la vie courante) constitue l'objectif fondamental de cette partie du programme". Or, quels types de problèmes portant sur la vie courante, la géométrie..... nécessitent, pour leur résolution, l'utilisation des factorisations ou des équations-produit ? Nous n'en avons pas trouvé. (Peut-on en trouver ?)
Ainsi en est-on réduit à faire de l'art pour l'art ! Ceci explique que, pour les factorisations et équations-produit, l'apprentissage est constitué d'exercices systématiques.

OBJECTIFS

- Savoir utiliser les identités remarquables.
- Savoir factoriser dans des cas simples (ceux spécifiés par les commentaires).
- Savoir résoudre les équations du type $(2x + 3)\ (x - \frac{5}{3}) = 0$.

Objectifs secondaires

Réinvestir le calcul littéral dans différents domaines (vie courante, géométrie...).

ANALYSE DE LA FICHE-ELEVE

Elle se divise en 2 parties.

PARTIE A : découverte des identités remarquables et utilisation.
PARTIE B : factorisation et équations-produit.

PARTIE A

L'activité 1 a pour objectif de faire visualiser les identités $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ par des dessins. En outre, cela permet aux élèves de réfléchir sur les écritures, ici interpréter des produits comme des aires.
L'activité 2, de par sa lecture, oblige à réfléchir sur le sens des mots, somme, produit, différence ainsi que sur la façon dont on doit lire une écriture littérale. En effet, très souvent les élèves ont une lecture "séquentielle" : ainsi lisent-ils $(x + 3)^2 - 1$, " x plus trois entre parenthèses au carré moins un" ; or cette lecture est inopérante pour, par exemple ici, factoriser. Factoriser nécessite une lecture globale de l'expression du type "la différence du carré de (x + 3) et de 1."

Notons qu'à la synthèse de cette activité nous insistons sur les points suivants :

* Si on connait $a^2 + b^2$ et ab on peut connaître $(a + b)^2$, $(a - b)^2$.

* Si on connait $(a + b)^2$ et ab on peut connaître $a^2 + b^2$.

* Si on connait $a^2 - b^2$ et $a + b$ on connait $a - b$ donc a et b.

* Si on connait $a^2 - b^2$ et $a - b$ on connaît $a + b$ donc a et b.

Les exercices sont à supports géométrique, arithmétique ou historique. Les exercices à support géométrique portent sur des relations métriques dans des configurations connues des élèves (triangles, quadrilatères, cercles).

PARTIE B

Cette partie traite de la factorisation et des équations-produit. Les exercices sont de type systématique.

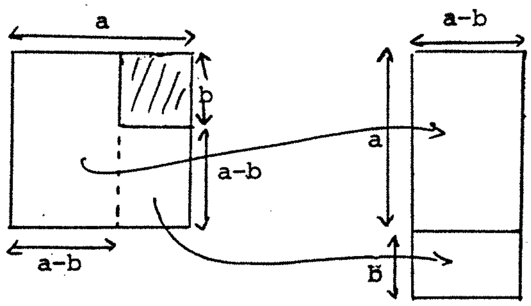
DUREE : 11 heures.

DEROULEMENT ET COMMENTAIRES

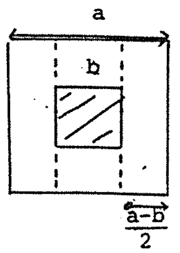
ACTIVITE 1 : 30 mn.

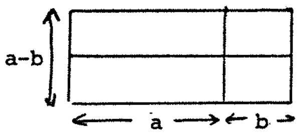
Les élèves imaginent aussitôt que $a^2 - b^2$ peut être représenté par une différence de deux aires (des exercices d'illustration d'écritures littérales par des aires ou périmètres ont été faits en 5ème et 4ème).

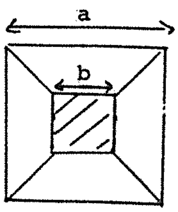
Généralement ils placent le carré de côté b avec un sommet commun avec celui de côté a. Ils découpent mentalement et réassemblent pour obtenir un rectangle de côtés $a + b$ et $a - b$.



Dans le but de faire manipuler des calculs avec des lettres, le professeur, en circulant entre les groupes, demande comment faire si le petit carré est placé à l'intérieur du grand avec les centres communs, les deux découpages suivants sont matérialisés et les mesures en fonctions de a et b sont retrouvées.







Pour ce découpage qui ne permet pas de reconstituer un rectangle sans autre coupe, les élèves vérifient que la somme des aires des 4 trapèzes est égale à $a^2 - b^2$ en utilisant la formule de l'aire du trapèze

$$4 \times \frac{a-b}{2} \times \frac{a+b}{2}$$

La synthèse de cette activité porte sur la validité de cette égalité. A t-on démontré la formule $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$? Les élèves sont conscients qu'ils n'ont fait qu'une vérification sur un dessin. Le professeur fait également remarquer que dans ce cas a et b sont des nombres positifs.

La formule dans le cas général est alors établie en développant le produit $(a + b)(a - b)$.

ACTIVITE 2

Le décodage et la traduction du texte ne pose problème qu'aux élèves qui ont des difficultés de lecture et surtout d'analyse de phrases. Les élèves ont été progressivement entraînés depuis la 6ème à ce type d'exercice.
L'erreur classique $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ est faite par quelques élèves qui se corrigent rapidement après un bref questionnement du professeur sur le sens de y^2. Pour développer, les élèves utilisent la double distributivité.

A la suite de ces deux activités, une synthèse collective est menée. Les trois identités remarquables sont dégagées et les deux carrés $(a + b)^2$ et $(a - b)^2$ sont illustrés par des dessins.

Le professeur insiste sur les deux formes de ces écritures : sommes et produits ainsi que sur le sens des mots : factoriser et développer.

Ce qui a été noté sur le répertoire.

I Identités remarquables

a et b représentent des nombres quelconques

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Des dessins sont faits pour illustrer.

Produits   Sommes

$\xrightarrow{\text{Développer}}$

$\xleftarrow{\text{factoriser}}$

Les objectifs sont dégagés par les élèves et notés sur le dossier.

"Je dois savoir utiliser les identités remarquables pour développer et pour factoriser".

EXERCICES

DUREE : 7 heures.

La partie A sera consacrée aux développements et la partie B aux factorisations.

Durant ce dossier il est demandé aux élèves de pointer les erreurs qu'ils font lors de la résolution des exercices. Toutes les deux ou trois heures un recensement est fait collectivement. Ceci permet de mettre en évidence les erreurs les plus courantes et d'éviter leur reproduction.

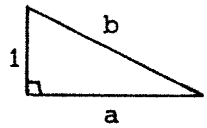
PARTIE A

A l'exercice 1, le texte est rapidement décodé et traduit. Pour la résolution, les élèves sont habitués à développer des carrés en utilisant la double distributivité. L'utilisation des identités n'est donc pas automatique ; mais doit-on les obliger à utiliser une technique s'ils n'en voient pas l'utilité ? Nous pensons que non, il semble préférable de laisser chacun choisir sa méthode. Les identités sont en effet surtout indispensables lorsque l'on veut factoriser.

A l'exercice 2, certains demandent une explication sur le sens du mot "concentrique". Cet exercice permet de revenir sur les notions de valeur exacte, valeur approchée et de montrer l'intérêt de garder la valeur π tout au long des calculs.

Pour l'exercice 3, un dessin est réalisé et le texte est traduit par un système de deux équations.

$$\begin{cases} b^2 = a^2 + 1 \\ a + b = 8 \end{cases}$$



Ce système a subi parfois les transformations suivantes :

En général, $\begin{cases} b = \sqrt{a^2 + 1} \\ a + b = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} b = \sqrt{a^2 + 1} \\ a + \sqrt{a^2 + 1} = 8 \end{cases}$

Parfois, mais plus rarement il est transformé en $\begin{cases} b = 8 - a \\ (8 - a)^2 = a^2 + 1. \end{cases}$

Cette transformation est moins employée car les élèves pensent obtenir une équation du second degré qu'ils ne savent pas résoudre.

Le traitement de l'équation $a + \sqrt{a^2 + 1} = 8$ pose alors problème et conduit à des erreurs :

* il est tentant de "simplifier $\sqrt{a^2+1}$ en a + 1.

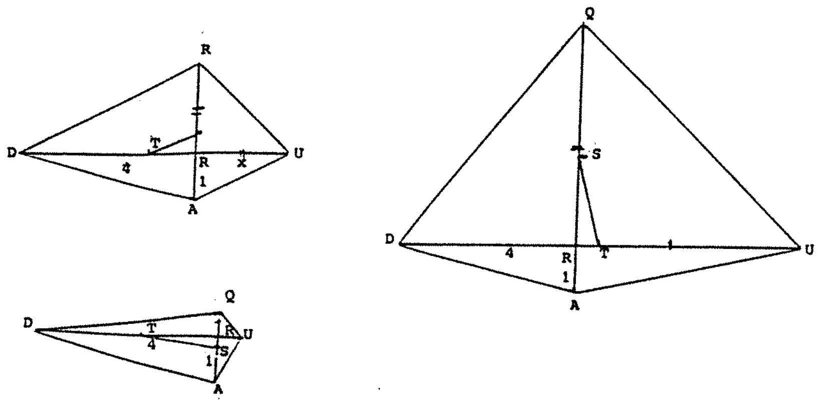
* Beaucoup pensent à élever les deux membres au carré
$\left(a + \sqrt{a^2+1}\right)^2 = 64$ qui se transforme parfois en $a^2 + a^2 + 1 = 64$.

Ceux qui développent correctement leur produit ne sont pas pour autant tirés d'affaire car ils obtiennent $a^2 + a^2 + 1 + 2\sqrt{a^2+1} = 64$, la racine carrée n'a donc pas disparu comme prévu.

Le professeur doit alors apporter une aide pour analyser le problème : pour pouvoir résoudre, il faut éliminer la racine carrée donc élever au carré mais pour que la racine disparaisse elle doit être seule dans un membre.
Cette aide apportée, la résolution est rapidement faite.

L'énoncé de Pythagore étant bien maîtrisé, **l'exercice 4** est vite réalisé. **Les exercices 5 et 7** ont pour support des relations métriques dans des quadrilatères. L'objectif ici n'est pas de faire découvrir ces relations ni de les faire utiliser dans des cas généraux. Il est plutôt de faire décoder et traduire ; en effet la compréhension nécessite une lecture séquentielle du texte. Il faut donc analyser les phrases. On est ainsi ramené à une situation souvent rencontrée : "comment montrer que deux expressions A et B sont égales ?"

L'exercice 7 permet en outre d'établir la relation $(a - b)^2 = (b - a)^2$. Pour trouver les distances RS et RT les élèves raisonnent sur le cas de figure dessiné. Lors de la synthèse, le professeur projette au rétroprojecteur les trois figures suivantes en expliquant que x peut être inférieur à 1, compris entre 1 et 4 ou supérieur à 4.



L'expression de ST^2 change donc dans chaque cas de figure, les élèves sont ainsi amenés à réfléchir sur la validité de leur démonstration.
Un élève propose de vérifier par le calcul si $(x - 4)^2$ est égal à $(4 - x)^2$, l'égalité est alors établie. Le professeur relance le problème en demandant pourquoi ces deux nombres sont égaux. L'explication n'est pas trouvée rapidement, les nombres x-4 et 4-x n'étant pas vus comme opposés.

Les erreurs rencontrées lors du traitement de l'exercice 5 se résument ainsi :

* $2AB \times DC = 2AB \times 2DC$: confusion avec la distributivité

* $-2x\,(x + 1) = -2x^2 + 2x$: règle de suppression de parenthèses

précédées du signe - , $-2x\ (x + 1)$ n'est pas vu comme $-[2x(x + 1)]$

* $(2y - 1)^2 = (2y)^2 - 1$

ou $4y + 1 - 4y$

ou $2y^2 + 1 - 4y$

Pour l'exercice 6 l'égalité à démontrer est déjà mathématisée mais pour établir cette égalité, une distance doit être codée par une lettre : c'est généralement la distance de M au pied de la hauteur qui est choisie.

Le texte de l'exercice 8 est illustré par un dessin et traduit par une équation qui est du second degré, écrite :

soit $a^2 = 4a$, il est alors tentant de "simplifier" par a.
soit $a^2 - 4a = 0$ que les élèves disent ne pas savoir résoudre.

Ils n'ont en effet jamais été confrontés à ce type d'équation.

Le professeur fait remarquer que l'on est en présence de deux problèmes:

* résoudre un problème théorique $a^2 - 4a = 0$ qui a 2 solutions 0 et 4 (recours à la factorisation et résolution de $a.b = 0$

* faire un retour à la situation du problème où seule la solution $a = 4$ convient.

Cet exercice est donc l'occasion d'une première approche du problème de la résolution d'une équation du 2ème degré où une factorisation est possible.
L'énoncé : "un produit de facteurs est nul lorsqu'au moins un des facteurs est nul" est donc formulé. D'autres équations de ce type seront résolues dans la dernière partie du dossier.

L'exercice 9 est cherché à la maison et, dans une classe, un début de solution est proposé par un élève : formuler les identités $(a + b)^2$ et $(a - b)^2$ à l'aide de $a^2 + b^2$ et ab. Dans l'autre classe, il est demandé aux élèves de calculer $(a + b)^2$ et $(a - b)^2$.

On obtient alors
$$\underbrace{a^2 + b^2 + 2ab}_{(a+b)^2} = 25 + 2 \times 12$$
$$(a + b)^2 = 49$$
$$\underbrace{a^2 + b^2 - 2ab}_{(a-b)^2} = 25 - 2 \times 12$$
$$(a - b)^2 = 1$$

d'où le système
$$\begin{cases} (a + b)^2 = 49 \\ (a - b)^2 = 1 \end{cases}$$

Le professeur doit inviter à la prudence pour résoudre ce système, 7 n'est pas le seul nombre à avoir 49 pour carré (de même pour 1).
Un retour au problème à résoudre permet d'affirmer que $a + b = 7$ et non -7 car a et b sont positifs mais $a - b$ peut être égal à 1 ou -1 d'où 2 systèmes à résoudre.

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = -1. \end{cases}$$

La traduction du texte de l'exercice 10 est difficile, elle est faite collectivement.
Deux problèmes se posent :

* le texte lui-même : "base" et "perpendiculaire" sont les deux côtés de l'angle droit,

* la compréhension du problème : il faut exprimer 2 longueurs en fonction de deux autres supposées connues sans qu'il y ait de données numériques.

Cet exercice est traité collectivement.

A l'exercice 11, les élèves donnent les valeurs exactes de R et r en gardant π.

PARTIE B

Les problèmes reposant sur une vraie situation qui nécessitent une mise en facteur en utilisant une identité remarquable sont rares. C'est pourquoi seulement 3 situations sont ici données.

De plus il faut noter que ces 3 exercices n'ont pas toujours atteint l'objectif visé : factoriser en utilisant une identité remarquable.

A l'exercice 1, de nombreux élèves, sans dessiner, assemblent mentalement les pièces du puzzle et conjecturent le côté du carré : $x + 2$.
Ils développent alors $(x + 2)^2$ et calculent la somme des aires des 4 pièces. Trouvant l'égalité des deux quantités, ils peuvent conclure sans avoir factorisé $x^2 + 4x + 4$.

D'autres élèves calculent les côtés manquants sur les morceaux A, B, C, D et assemblent ainsi les pièces par juxtaposition des côtés isométriques. Ils obtiennent alors une figure qui a 4 côtés de même mesure $x + 2$ et qui a un angle droit, donc un carré (pourtant l'énoncé: "un losange qui a un angle droit est un carré" n'avait pas été énoncé en classe).

Pour l'exercice 2 les élèves codent les nombres consécutifs : $n-1$, n, $n+1$.
Ils développent et obtiennent n^3-n. Aucune factorisation n'est donc faite ici. Il semblerait préférable de modifier le texte :

"Montre que n^3-n représente le volume d'un pavé dont tu préciseras les dimensions."

A l'exercice 3, l'aire du carré trouvée étant $x^2 + 6x + 9$ le côté est noté $\sqrt{x^2 + 6x + 9}$, ce qui est sensé.

Des exercices systématiques de factorisation sont alors donnés, ils ont été pris dans le manuel. Le professeur explique la méthode pour reconnaître le développement de chaque identité et pour factoriser. Une fiche autocorrective est fournie aux élèves.

ACTIVITE 3 : Durée 30 mn.

Cette activité a pour objectif de faire résoudre une équation du type $ab = 0$.

Deux procédures sont utilisées.

- Factorisation sans développement préalable après avoir tout mis dans le même membre. Cette procédure a été le moins souvent utilisée.

- Développement de chaque membre et regroupement des termes semblables

$$5a^2 + 4a = 5b^2 - 4b.$$

Il faut alors aider les élèves pour les engager à regrouper $5a^2$ et $5b^2$, $4a$ et $4b$. Ils obtiennent alors $5a^2 - 5b^2 + 4a + 4b = 0$ et pensent alors à factoriser.

$$5(a^2 - b^2) + 4\,(a + b) = 0$$

$a^2 - b^2$ est factorisé en $(a + b)\,(a - b)$ et la factorisation est menée à son terme

$$(a + b)\,(5a - 5b + 4) = 0.$$

La résolution de ce type d'équation ayant été déjà vue dans la première partie du dossier, il reste à valider.

La synthèse porte sur :

- le savoir: un produit de facteurs est nul lorsqu'au moins un des facteurs est nul,

- la méthode: lorsqu'un problème nous amène à une équation du second degré, la méthode est de chercher à factoriser.

Ce qui a été noté sur le répertoire

E Equation

Un produit de facteurs est nul lorsqu'au moins un des facteurs est nul.

L'équation $a.b = 0$ a deux groupes de solutions, celles qui correspondent à $a = 0$ et celles qui correspondent à $b = 0$.

L'objectif est noté sur le dossier:

"Je dois savoir résoudre une équation du type $a.b = 0$."

EXERCICES

DUREE : 2h 30mn en classe.

L'exercice 1 est bien réussi. Pour l'exercice 2, la factorisation conduisant à $x^2(x^2 - 9) = 0$, certains élèves n'écrivent pas la solution $x = -3$.

A l'exercice 3 pour trouver a et b on est amené à résoudre un système qui se partage en 2 systèmes du fait de l'équation-produit

$$\begin{cases} a + b = \frac{7}{3} \\ a - b = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a + b = \frac{7}{3} \\ a - b + 2 = 0. \end{cases}$$

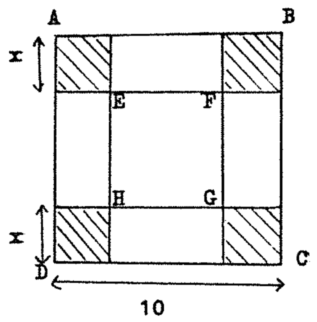
La difficulté ici est d'ordre méthodologique : résoudre séparément les deux systèmes et ne pas calculer, par exemple, a à partir du 1° et b à partir du 2°. En effet le texte ne sous-entend pas que l'on ait deux valeurs pour a et b. De plus, les élèves ne voient pas tous que ce sont des couples de valeurs que l'on obtient.

Seule la partie **c)** de l'exercice 4 est traitée en classe, les parties **a)** et **b)** sont faites en devoir à la maison car elles reprennent des exercices résolus dans la partie précédente.

Quelques erreurs telles que $7x^2 + 4x = 0$ donne $7x^2 = 0$ ou $4x = 0$, sont faites.

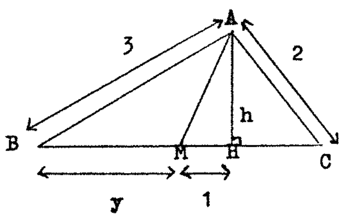
TEST

Ex 1 :



ABCD et EFGH sont des carrés. Que vaut x pour que l'aire du carré EFGH soit égale à la somme des aires des quatre carrés hachurés ?

Ex 2 :



Dans le triangle ABC, [AH] est une hauteur et [AM] une médiane.

a) En utilisant le triangle AHC, montre que

$$h^2 = 3 + 2\,y - y^2$$

b) En utilisant le triangle HAB, montre que

$$h^2 = 8 - y^2 - 2\,y$$

c) Déduis-en la valeur de y.

Ex 3 :

Montre que $(2\sqrt{3} - \sqrt{7})\ (2\sqrt{3} + \sqrt{7})$ est un entier.

Ex 4 :

Développe $(4\,a - 7)^2$ puis montre que $(4a - 7)^2 + 26\,a - 40 + 9\,a^2$ est un carré.

Ex 5 :

a) Développe $(\frac{1}{4}\,b + 0{,}2)^2$

$(y\sqrt{2} - 1)^2$

b) Factorise $\frac{16}{49} - 25\,d^2$

$10\,y + y^2 + 25$

c) Résous $(y - \frac{1}{2})\ (2y + 3) = 0$

$a^2 + 8a + 16 = 0$

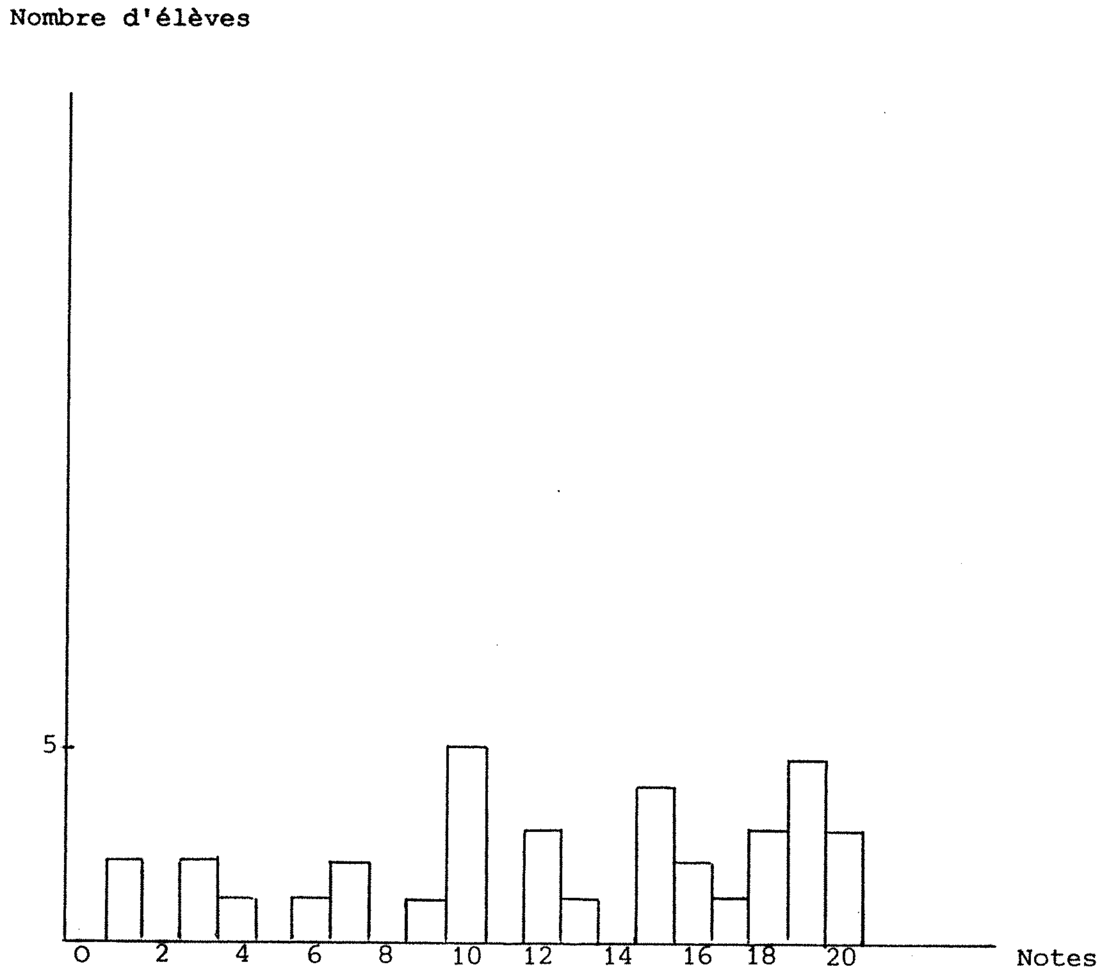
$\frac{1}{4}\,(u - 5) + (\frac{1}{2} + u)\ (u - 5) = 0.$

Barème :

Ex 1 : 3 points	Ex 4 : 2 1/2 points
Ex 2 : 4 points	Ex 5 : 9 points
Ex 3 : 1 1/2 points	

RESULTATS DU TEST

Nombre d'élèves : 36
Moyenne : 12,7



Remarques :

Pour être en accord avec les nouveaux commentaires, il aurait été préférable de modifier le texte de la question ex. 5) en :

1°) Factorise.
2°) Résous.

Auteurs : *M.J. BACH - D. GAUD - J.P. GUICHARD - M. MAROT - C. ROBIN M. ROBIN.*

Titre : 3ème - Fascicule 2
- Calculs d'éléments métriques (2) : trigonométrie
- Géométrie dans l'espace
- Travaux numériques (2) : Calcul littéral

Editeur : IREM de Poitiers

Niveau : Collège

Date : Mai 1989

Mots-clés : Expérimentation - Troisième - Trigonométrie - Pyramides - Cônes - Identités remarquables - Calcul littéral

Résumé : Le fascicule propose une mise en oeuvre commentée des parties suivantes du programme de troisième :
- Géométrie dans l'Espace
- Trigonométrie
- Calcul littéral

IREM - 40, Avenue du Recteur Pineau - Poitiers ISBN 2-85954-O27-X