UNIVERSITE de POITIERS

Institut de Recherche
sur l'Enseignement des Mathématiques

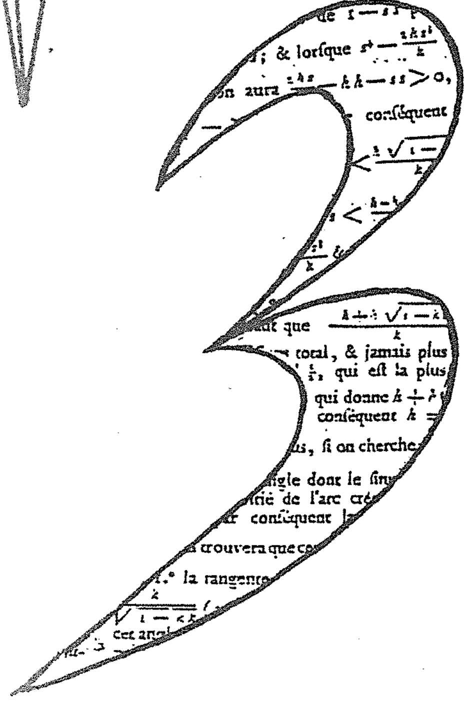
Mars 1989

SOURD, adj. *en terme d'Arithmétique*, signifie un nombre qui ne peut être exprimé, ou bien un nombre qui n'a point de mesure commune avec l'unité. *Voyez* NOMBRE.

C'est ce qu'on appelle autrement *nombre irrationel* ou *incommensurable*. *Voyez* IRRATIONEL & INCOMMENSURABLE.

Quand il s'agit d'extraire la racine proposée d'un nombre ou d'une quantité quelconque, si cette quantité n'est pas une puissance parfaite de la racine que l'on demande, c'est-à-dire, si l'on demande une racine quarrée, & que la quantité proposée ne soit pas un quarré; si c'est une racine cube, & que la quantité ne soit pas un cube, &c. alors il est impossible d'assigner en nombres entiers ou en fractions, la racine exacte de ce nombre proposé. *Voy.* RACINE, QUARRÉ, &c.

Quand cela arrive, les mathématiciens ont coutume de marquer la racine demandée de ces nombres ou quantités, en les faisant précéder du signe radical $\sqrt{}$: ainsi $\sqrt{2}$ signifie la racine quarrée de 2; & $\sqrt[3]{16}$ signifie la racine cubique de 16. Ces racines sont appellées proprement des racines *sourdes*, à cause qu'il est impossible de les exprimer en nombres, exactement, car l'on ne sauroit assigner de nombre entier ou fractionnaire, qui multiplié par lui-même produise 2; ou bien un nombre, qui multiplié cubiquement puisse jamais produire 16.



COMPTE RENDU DE L'EXPERIMENTATION DES NOUVEAUX PROGRAMMES de Troisième

FASCICULE 1

CALCULS D'ELEMENTS METRIQUES (1) Thalès
SYSTEMES D'EQUATIONS - EQUATIONS de DROITES
TRAVAUX NUMERIQUES (1) Calcul sur les racines

M.J. BACH
D. GAUD
J.P. GUICHARD
M. MAROT
C. ROBIN
M. ROBIN

"Thalès n'a rien découvert d'autre que la possibilité de la réduction... La pyramide est inaccessible, il invente l'échelle".

Michel SERRES.

Estant donné multinomie radical entier à multiplier, & multinomie entier multiplicateur: Trouver leur produict.

Explication du donné. Soit donné multinomie à multiplier $\sqrt{7} + \sqrt{5} - \sqrt{6}$, & multinomie multiplicateur $\sqrt{4} - \sqrt{8} + \sqrt{3}$. *Explication du requis:* Il faut trouver leur produict. *Construction.* On disposera les données en ordre, comme dessus, disant, $+\sqrt{3}$ fois $-\sqrt{6}$, faict $-\sqrt{18}$; car + multiplié par −, donne produict −, par precedant theoreme. Et ainsi des autres. La disposition des characteres de l'operation achevée est telle.

$$
\begin{array}{r}
\sqrt{7} + \sqrt{5} - \sqrt{6} \\
\sqrt{4} - \sqrt{8} + \sqrt{3} \\
\hline
+\sqrt{21} + \sqrt{15} - \sqrt{18} \\
-\sqrt{56} - \sqrt{40} + \sqrt{48} \\
\sqrt{28} + \sqrt{20} - \sqrt{24} \\
\hline
\sqrt{28} + \sqrt{20} - \sqrt{24} - \sqrt{56} - \sqrt{40} + \sqrt{48} + \sqrt{21} + \\
\sqrt{15} - \sqrt{18}
\end{array}
$$

STEVIN

SOMMAIRE

AVERTISSEMENT

Contrairement aux années précédentes nous n'avons pas voulu dissocier algèbre et géométrie. En effet plus que les autres années les contenus sont intimement liés : peut-on enseigner les règles de calcul sur les racines sans utiliser abondamment des situations géométriques qui donnent sens à ces règles, le calcul littéral n'est-il pas présent partout (Thalès, espace...) ?

Aussi nous avons choisi de publier les comptes rendus de l'expérimentation dans l'ordre où nous avons présenté le travail aux élèves, ce qui nous l'espérons permettra de bien rendre compte de la "spiralité" des programmes.

L'équipe.

PROGRAMME DE TROISIEME
Fascicule 1

CONDITIONS D'EXPERIMENTATION

Le collège

Collège de Vouneuil-sur-Vienne. Ce collège rural compte 551 élèves ; ces élèves sont issus pour la plupart de milieux ouvriers ou employés.

Les classes

Deux troisièmes de 24 élèves sont concernées.
Ces élèves ont participé au suivi scientifique en 6ème-5ème et 4ème sur la totalité des programmes.
Les horaires de ces classes sont en parallèle.

L'équipe

Elle est composée de trois professeurs du collège et de l'ex-directeur d'études de mathématiques du centre de P.E.G.C.

Les contenus

Les contenus du programme ont été répartis en dominantes (nous appelons dominante un thème fédérateur qui nécessite un apprentissage spécifique).
En 3ème nous avons retenu les dominantes suivantes :

1. Calculs d'éléments métriques.
Exemples de contenus : énoncé de Thalès, trigonométrie.

2. Système d'équations, équations d'une droite.

3. Calculs numériques.
Exemples de contenus : calculs sur les racines, identités remarquables, équations, inéquations.

4. Transformations - vecteurs.

5. Gestion de données.
Exemples de contenus : statistiques, fonctions affines.

6. Géométrie dans l'espace.

7. Résolution de problèmes.
Exemples de contenus : géométrie analytique, réciproque de Thalès, angles inscrits.

Ces dominantes ne sont pas disjointes. Elles interfèrent entre elles. Certaines dominantes peuvent être fractionnées. L'ordre de présentation est fonction des choix didactiques de chacun.

Présentation des contenus aux élèves - gestion des classes.

La présentation des contenus, la gestion des classes sont élaborées en fonction des buts que nous nous sommes fixés :

- développer l'autonomie des élèves,
- faire en sorte que chacun atteigne les objectifs, ce qui nous oblige à tenir compte de l'hétérogénéité des classes.

Présentation des contenus

Sauf cas contraire, les contenus sont présentés de la manière suivante :

- *Une activité*

Pour définir une activité nous avons retenu les critères suivants (conformément aux programmes) :

. l'énoncé est court (en général) et compris de tous les élèves
. la réponse n'est pas évidente
. pour répondre, l'élève devra :
  - soit découvrir la connaissance visée,
  - soit découvrir ce qu'il faudrait savoir pour résoudre le problème,
  - soit mobiliser les notions antérieures.

Le problème est riche (plusieurs démarches sont possibles ou (et) plusieurs solutions sont possibles). L'élève peut formuler des questions intermédiaires (ce qui exclut un recours à un découpage a priori fait par le professeur).

- *Synthèse de l'activité* (effectuée collectivement) :

. formulation des résultats et des démarches par les élèves,
. validation des résultats par la classe et le professeur,
. énoncé des objectifs par les élèves en accord avec le professeur.

- *Exercices didactiques et auto-test.*

- *Test.*

Gestion des classes

Les élèves sont groupés par 4 depuis la sixième, ce qui signifie que le travail est d'abord individuel puis des échanges ont lieu à l'intérieur des groupes. Ces échanges peuvent revêtir plusieurs formes :

- échanges de résultats,
- entraide.

Les groupes se sont constitués par affinité. Le professeur apporte soit des aides individuelles soit des aides aux groupes et gère les synthèses. Les énoncés des activités et des exercices sont sur fiches.

Avant chaque série d'exercices didactiques, est imposé un contrat composé d'un certain nombre d'exercices et d'une durée.
Exemple : "les 6 premiers exercices sont obligatoires, durée de la fiche 2 heures".

Cela signifie pour l'élève, que ces 6 exercices doivent être faits à l'issue de ces 2 heures, libre à l'élève de s'avancer chez lui.

A l'issue des résolutions d'exercices didactiques nous nous efforçons de proposer aux élèves des auto-tests portant sur des objectifs purement techniques pour vérifier si ceux-ci sont atteints. Aucune contrainte n'est imposée à l'élève pour ces auto-tests, il est libre de les faire ou non. En cas de non atteinte des objectifs, les élèves peuvent consulter un recueil d'exercices supplémentaires auto-correctifs (à faire seul).

A l'issue du test, des groupes de besoin peuvent être établis : on regroupe les élèves ayant des difficultés pour un réapprentissage bref (2 ou 3 h maximum). Cela est permis par les horaires en parallèle.

Matériels utilisés

Outre le matériel classique (instruments de géométrie, calculatrice) les élèves ont à leur disposition :

- un répertoire où sont consignés les résultats vus depuis la 6ème, le répertoire est complété chaque année. Il suit l'élève de la sixième à la troisième,

- un fichier méthodologique "comment démontrer que" qui s'élabore depuis le début de la quatrième.

LES PROGRAMMES

Classe de troisième

Le travail effectué doit permettre à l'élève de s'approprier solidement l'usage des instruments de mesure et de dessin, d'acquérir définitivement des techniques opératoires (mentales ou écrites) et, conjointement, d'utiliser avec sûreté des calculatrices de poche, de s'entraîner constamment au raisonnement déductif.
L'utilisation d'un ordinateur peut accompagner utilement ces activités.

Travaux géométriques

1) Enoncé de Thalès relatif au triangle.
Application à des problèmes de construction (moyenne géométrique...)
Pyramide et cône de révolution : volume, section par un plan parallèle à la base.
Effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur longueurs, aires et volumes, masses.

2) Angles.
Relations trigonométriques dans le triangle rectangle.
Angle inscrit dans un cercle et angle au centre.

3) Dans le plan, construction de transformées de figures par composition de deux translations ; de deux symétries centrales; de deux symétries orthogonales par rapport à des droites parallèles ou perpendiculaires.

4) Translation et vecteur. Egalité vectorielle :
dans le plan rapporté à un repère : effet d'un déplacement par translation sur les coordonnées d'un point ; coordonnées d'un vecteur.

5) Distance de deux points en repère orthonormé :
Equation d'une droite sous la forme :
$$y = mx \; ; \; y = mx + p \; ; \; x = p.$$
Coefficient directeur ; parallélisme, orthogonalité en repère orthonormal.

6) Addition vectorielle.

Travaux numériques

1) Ecritures littérales :
Factorisation d'expressions de la forme :
$a^2 - b^2$; $a^2 + 2\ ab + b^2$; $a^2 - 2\ ab + b^2$
(a et b désignent des formes simples de nombres exprimés dans les différentes écritures déjà rencontrées).

2) Calculs élémentaires sur les radicaux (racines carrées):
. produit et quotient de deux radicaux.
. puissance d'ordre 2 ou 4 d'un radical.

3) Equations et inéquations du premier degré :
. Méthodes de résolution d'un système de deux équations ou inéquations du premier degré à deux inconnues à coefficients numériques.
. Méthodes de résolution d'un système de deux équations ou inéquations du premier degré à deux inconnues à coefficients numériques.
Exemples variés de problèmes se ramenant au premier degré.

Organisation et gestion de données. Fonctions.

1) Applications affines : représentation graphique d'une application affine.

2) Exploitation de données statistiques :
moyenne ; moyennes pondérées ; médiane.

3) Mise en oeuvre de la proportionnalité sur des grandeurs-quotients ou sur des grandeurs-produits.

4) Résolution d'équations par essais et corrections successifs.

5) Analyse (et construction) d'algorithmes comme suite d'instructions aboutissant à la résolution d'un problème donné. Application numérique à l'aide d'un ordinateur.

Classe de Troisième

EXPLICITATION DES CONNAISSANCES, DES METHODES ET DES CAPACITES EXIGIBLES DES ELEVES.

Remarques préliminaires

Les commentaires des quatre classes des collèges sont indissociables ; ils se réfèrent aux lignes directrices définies en avant-propos des programmes (cf. Livre de Poche des Collèges, pp.77 à 82).

Dans le cadre du programme le professeur a toute liberté pour l'organisation de son enseignement. En particulier il lui revient de déterminer selon le niveau de sa classe les résultats qui seront démontrés et ceux qui seront admis.

L'approfondissement des notions déjà acquises, l'entraînement au raisonnement déductif sont conduits dans l'esprit des classes antérieures, sans reconstruction systématique et à propos de situations nouvelles, de façon à développer les capacités de découverte et de conjecture autant que de démonstration. On évitera les exigences prématurées de formulation ; en particulier les propriétés caractéristiques seront encore exprimées à l'aide de deux énoncés séparés.

Les notations utilisées sont celles signalées en Quatrième, auxquelles s'ajoutent la notation du sinus et de la tangente d'un angle aigu. Les symboles $\subset$, $\cup$, $\cap$ sont hors programme ainsi que toute notion sur les ensembles et les relations. Sont également exclues la notation "o" des lois de composition, la notation de la valeur absolue et celles relatives aux intervalles des réels.

Les travaux numériques nécessitent l'emploi d'une calculatrice scientifique. L'usage de l'ordinateur pourra accompagner utilement les activités géométriques, numériques et graphiques.

Pour chacune des trois rubriques du programme, les objectifs figurent en bandeau :

- dans la colonne de droite sont fixées les capacités exigibles, c'est-à-dire les connaissances et les savoir-faire qu'on demande à l'élève d'avoir assimilés et d'être capable d'exploiter avec ce que cela comporte d'utilisation d'acquis des classes antérieures ;
- dans la colonne de gauche sont fixés les contenus et les limites du programme, ainsi que l'orientation des activités ; celles-ci ne sauraient se limiter aux seuls points évoqués dans la colonne de droite.

TRAVAUX GEOMETRIQUES

La **description** et la **représentation d'objets géométriques** usuels du plan et de l'espace, le **calcul de grandeurs** attachées à ces objets demeurent des objectifs fondamentaux.

Dans le plan, les travaux font appel aux figures usuelles (cercle, triangle, quadrilatères particuliers, polygones réguliers) et à leur transformation par symétrie, translation, rotation.
Avec les travaux sur les solides, les outils acquis, comme le théorème de Pythagore, ou nouveaux, comme le théorème de Thalès, sont mis en oeuvre conjointement dans le plan et dans l'espace.

Commentaires et capacités exigibles

1.a Enoncé de Thalès relatif au triangle, application à des problèmes de construction

Commentaires

Des activités expérimentales, reliées à la pratique de la projection, permettront de dégager le théorème de Thalès relatif au triangle et sa réciproque : cette réciproque sera formulée en précisant dans l'énoncé les positions relatives des points.

Des activités de construction sur droites graduées contribueront à éclairer la correspondance entre nombres et points (construire les $\frac{9}{7}$ d'un segment, placer sur une droite graduée le point d'abscisse $-\frac{2}{3}$ ....).

Cependant

- l'énoncé général du théorème de Thalès est hors programme ;
- toute intervention de mesures algébriques est exclue ;
- la construction d'une moyenne géométrique n'est pas demandée.

Capacités exigibles

- Connaître, et utiliser dans une situation donnée, le théorème de Thalès relatif au triangle,

($\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$, B' est sur la droite AB, C' est sur la droite (AC)) et sa réciproque.

- Connaître et utiliser dans la même situation la propriété :

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

- Savoir construire une quatrième proportionnelle.

b. Pyramide et cône de révolution ; volume. Section par un plan parallèle à la base.

Commentaires

L'objectif est toujours d'apprendre à voir dans l'espace et de calculer des longueurs, des aires et des volumes, ce qui implique un large usage des représentations en perspective et de la fabrication de patrons.

L'observation et l'argumentation au cours de ces travaux font appel aux acquis de géométrie plane et à quelques énoncés courants concernant l'orthogonalité et le parallélisme. L'explicitation de ces énoncés n'est pas exigible des élèves.

Les activités sur la pyramide exploiteront des situations limitées et simples, se prêtant bien aux opérations de fabrication :

- pyramides dont une arête latérale est aussi la hauteur ;
- pyramides régulières à trois, quatre ou six faces latérales.

(Une pyramide régulière est une pyramide admettant comme base un polygone régulier, l'axe de ce polygone contenant le sommet de la pyramide).

Capacités exigibles

- Savoir, dans des situations simples et uniquement à propos de travaux sur les solides, utiliser le théorème de Pythagore pour des calculs de longueurs (diagonale d'un parallélépipède rectangle, rayon d'une section plane d'une sphère, hauteur d'une pyramide régulière...).

- Connaître et utiliser les formules de volume :

$V = Bh$ pour les prismes droits et le cylindre de révolution,

$V = \frac{1}{3} Bh$ pour les pyramides et le cône de révolution.

C. Effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs, aires et volumes.

Commentaires

Les activités, notamment en classe de cinquième, de dessin et de reproduction à une échelle donnée ont mis en oeuvre le principe de la multiplication des longueurs initiales par un même coefficient.

Des activités expérimentales dégageront l'effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur les aires, les volumes.

Capacités exigibles

- Utiliser, dans l'agrandissement ou la réduction d'un objet géométrique du plan ou de l'espace, la propriété : si les longueurs sont multipliées par k, alors les aires sont multipliées par k^2, les volumes le sont par k^3 et les angles sont conservés.

- Connaître et utiliser la propriété, pour la section d'une pyramide ou d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base, d'être une réduction de la base.

2. Angles. Relations trigonométriques dans le triangle rectangle. Angle inscrit dans un cercle et angle au centre.

Commentaires

On n'évoquera pas d'autre unité d'angle que le degré décimal.

La définition du cosinus d'un angle aigu a été mise en place en Quatrième. Le sinus et la tangente d'un angle aigu seront présentés comme des rapports dans le triangle rectangle.

Les formules $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$,sont seules au programme.

La comparaison d'un angle inscrit et de l'angle au centre qui intercepte le même arc fera l'objet d'activités mais aucune compétence n'est exigible sur ce point. Cette comparaison permet celle de deux angles inscrits interceptant le même arc, mais la recherche de l'ensemble des points du plan d'où l'on voit un segment sous un angle donné autre qu'un angle droit est hors programme.

Capacités exigibles

- Utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur approchée

  . du sinus ou de la tangente d'un angle aigu donné,
  . de l'angle aigu de sinus ou de tangente donnés.

- Connaître et utiliser dans le triangle rectangle les relations entre le cosinus, ou le sinus, ou la tangente, et les longueurs de deux côtés du triangle.

3. Dans le plan, construction de transformées de figures par composition de deux translations, de deux symétries centrales, de deux symétries orthogonales par rapport à des droites parallèles ou perpendiculaires.

Commentaires

Les travaux entretiendront la compétence sur les transformations étudiées dans les classes précédentes.
La composition de deux transformations n'apparaîtra que dans son action sur des figures et les activités s'organiseront autour de la réalisation de figures (frises, pavages...).
Aucune compétence en la matière n'est au programme; on rappelle que la notation "o" est exclue.

Capacités exigibles

-Connaître et savoir utiliser la conservation de l'alignement, des distances, des angles par une symétrie, une translation ou une rotation explicitement donnée.

4. et 6. Translation et vecteur. Egalité vectorielle. Dans le plan rapporté à un repère, effet d'un déplacement par translation sur les coordonnées d'un point ; coordonnées d'un vecteur. Addition vectorielle.

Commentaires

Les travaux partiront de l'expérience acquise en Quatrième. Il s'agit essentiellement, sur des situations simples, de familiariser les élèves avec le maniement des vecteurs.

L'addition vectorielle, qui ne fera l'objet que d'un travail d'initiation, sera reliée à la composition de deux translations.

On évitera de donner une place excessive au calcul des coordonnées de l'image d'un point par une translation, à celui des coordonnées d'un vecteur ou de la somme de deux vecteurs.
Aucune compétence sur le calcul vectoriel n'est exigible des élèves.

Le produit d'un vecteur par un réel n'est pas au programme.

Capacités exigibles

- Savoir relier l'égalité vectorielle au parallélogramme.
- Savoir construire l'image d'un point par translation connaissant le vecteur de la translation.

- Savoir que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

- Relier la construction de $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ à celle du parallélogramme.

- Savoir calculer, lire sur un graphique, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ connaissant les coordonnées des points A et B.

5. Distance de deux points en repère orthonormal. Equation d'une droite sous la forme : $y = mx$, $y = mx + p$, $x = p$; coefficient directeur. Parallélisme, orthogonalité en repère orthonormal.

Commentaires

Les activités se placeront dans le cadre des différentes rubriques du programme. Elles mettront en oeuvre les outils de géométrie plane ; elles permettront aussi de consolider la notion de fonction linéaire introduite en Quatrième.

On se limitera au cas des repères orthogonaux. L'équation générale d'une droite sous la forme $ax + by + c = 0$ est hors programme ; ceci n'exclut pas le traitement d'exemples numériques de ce type par retour à l'une des formes figurant au programme.

Dans le cas d'un repère orthonormal on explicitera le lien entre un coefficient directeur strictement positif et la tangente de l'angle aigu formé avec l'axe des abscisses.

Capacités exigibles

- Calculer la distance de deux points définis par leurs coordonnées dans un repère orthonormal.

- Tracer une droite donnée par son équation ou par son coefficient directeur et un point.

- Déterminer l'équation d'une droite définie
  . par deux points
  . par son coefficient directeur et un point.

- Savoir reconnaître ou exprimer à l'aide des coefficients directeurs le parallélisme de deux droites ou, en repère orthonormal, leur orthogonalité.

TRAVAUX NUMERIQUES

La résolution de problèmes (issus de la géométrie, de la gestion de données, des autres disciplines, de la vie courante) constitue l'objectif fondamental de cette partie du programme.

La pratique du calcul exact et approché doit conduire, à l'issue de la classe de Troisième, à une bonne maîtrise des règles opératoires et des règles de comparaison des nombres.

L'entraînement au calcul littéral se poursuit et doit aboutir à une relative autonomie.

1. Ecritures littérales ; factorisation d'expressions de la forme :

$$a^2 - b^2, \quad a^2 + 2ab + b^2, \quad a^2 - 2ab + b^2$$

Commentaires

Comme en Quatrième, les travaux s'articuleront suivant deux axes :

- utilisation d'expressions littérales pour des calculs numériques ;

- utilisation du calcul littéral dans la mise en équation et la résolution de problèmes divers.

Les activités viseront à assurer la maîtrise du développement d'expressions simples ; par contre la maîtrise de la factorisation n'est pas un objectif de la classe de Troisième. On entretiendra les compétences en matière de calcul sur les puissances.

Capacités exigibles

- Savoir factoriser des expressions telles que :

$(x + 1)(x + 2) - 5(x + 2)$;
$(2x + 1)^2 + (2x + 1)(x + 3)$.

- Connaître les égalités :

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

et savoir les utiliser sur des expressions numériques ou littérales simples telles que :

$101^2 = (100 + 1)^2 = 100^2 + 200 + 1, \dots ;$
$(x + 5)^2 - 4 = (x + 5)^2 - 2^2 = (x + 5 + 2)(x + 5 - 2)$.

2. Calculs élémentaires sur les radicaux (racines carrées).
Produit et quotient de deux radicaux.
Puissance d'ordre 2 ou 4 d'un radical.

Commentaires

La touche $\sqrt{\ }$ de la calculatrice, qui a déjà été utilisée en Quatrième fournit une valeur approchée d'une racine carrée. On met en place, par ailleurs, les règles de calcul ci-contre.

Le calcul sur des expressions comportant des radicaux (telles que $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$, $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$) n'est pas un objectif du programme.
Comme dans les classes antérieures, on habituera les élèves à écrire un nombre sous la forme la mieux adaptée au problème posé.

Capacités exigibles

- Savoir que, si a désigne un nombre positif, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré est a.

- Savoir déterminer, sur des exemples numériques, les nombres x tels que $x^2 = a$, où a désigne un nombre positif.

- Sur des exemples numériques, utiliser les égalités :
$(\sqrt{a})^2 = a$, $\sqrt{a^2} = a$

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, où a et b désignent deux nombres positifs.

Par exemple : $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$, $\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

3. Equations et inéquations du premier degré :

Méthodes graphiques de résolution d'équations et d'inéquations du premier degré à coefficients numériques.
Méthodes de résolution d'un système de deux équations ou inéquations du premier degré à deux inconnues à coefficients numériques.

Exemples variés de problèmes se ramenant au premier degré.

Commentaires

Les travaux se placeront dans le cadre des différentes parties du programme. Comme en Quatrième on dégagera, sur les exemples étudiés, les différentes étapes du traitement d'un problème : mise en équation, résolution, interprétation du résultat. On habituera les élèves à tester l'exactitude ou la vraisemblance des résultats.

Les activités de résolution d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues à coefficients numériques permettront de pratiquer les méthodes de substitution ou de combinaisons.

Pour la résolution graphique d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues à coefficients numériques, on se ramènera aux équations de droites figurant au programme (cf. travaux géométriques § 5).

Aucune compétence n'est exigible sur les inéquations du premier degré à deux inconnues. L'étude du signe d'un produit ou d'un quotient de deux expressions du premier degré de la même variable est hors programme.

Capacités exigibles

- Savoir et utiliser le fait que des nombres relatifs de la forme ab et ac sont dans le même ordre que b et c si a est strictement positif, dans l'ordre inverse si a est strictement négatif.

- Résoudre une inéquation ou un système de deux inéquations du premier degré à une inconnue à coefficients numériques.

- Résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues à coefficients numériques admettant une solution et une seule.

- Mettre en équation et résoudre un problème simple conduisant à un tel système.

- Savoir interpréter graphiquement un système de deux équations du premier degré à deux inconnues, les droites associées étant tracées.

- Résoudre une équation mise sous la forme $A.B = 0$, où A et B désignent deux expressions du premier degré de la même variable.

ORGANISATION ET GESTION DE DONNEES. FONCTIONS

L'objectif essentiel est de gérer des situations concrètes, relevant en particulier des thèmes transversaux, à l'aide de tableaux, de diagrammes, de graphiques.

Dans les situations mettant en jeu des fonctions, on continue d'habituer les élèves à utiliser des expressions telles que "en fonction de", "est fonction de" ; on pourra introduire prudemment la notation f(x), mais toute définition de la notion de fonction ou d'application est exclue.

1. Applications affines ; représentation graphique d'une application affine.

Commentaires

Les travaux porteront sur les diverses parties du programme. On mettra en évidence la proportionnalité des accroissements.

On pourra, à partir de situations simples, construire des tableaux d'une fonction non affine, mais aucune connaissance sur de telles fonctions n'est au programme.

Capacités exigibles

- Déterminer une application affine par la donnée de deux nombres et de leurs images.

- Savoir construire un tableau de valeurs d'une fonction affine.

- Représenter graphiquement une application affine donnée et exploiter cette représentation.

2. Exploitation de données statistiques : moyenne ; moyennes pondérées ; médiane.

Commentaires

Les travaux permettront de faire la synthèse des activités analogues des années antérieures.

Les élèves seront initiés au calcul de moyennes pondérées, et la notion de médiane sera dégagée, mais aucune connaissance n'est exigible sur ces deux points.

Capacités exigibles

- Savoir lire et exploiter des données statistiques mises sous forme de tableaux ou de diagrammes d'effectifs ou de fréquences, savoir calculer une moyenne.

- A partir de données statistiques, calculer les effectifs ou les fréquences, les présenter dans des tableaux et tracer les diagrammes correspondants.

3. Mise en oeuvre de la proportionnalité sur des grandeurs-quotients ou sur des grandeurs-produits.

Commentaires

Les travaux consolideront l'acquisition de savoir-faire dans les situations relevant de la proportionnalité.

Les situations nouvelles mettant en jeu des grandeurs-quotients ou des grandeurs-produits seront tirées de la vie courante (par exemple : consommation au compteur d'un appareil électrique de puissance donnée ; passage, pour la consommation d'un véhicule, du nombre de litres aux 100 km au nombre de km par litre), mais aucune connaissance n'est exigible à ce propos.

Capacités exigibles

- Savoir traduire par une fonction une augmentation ou une diminution exprimée en pourcentage. Par exemple : savoir qu'une augmentation de 5% fait passer de la valeur X à la valeur 1,05 X.

4. Résolution d'équations par essais et corrections successifs.

Commentaires

Certains problèmes mèneront à la résolution approchée d'équations $f(x) = a$ ne relevant pas du modèle $mx + p = 0$; cette résolution conduira à des activités graphiques ou à des activités numériques nécessitant l'emploi d'une calculatrice, mais aucune compétence n'est exigible à ce propos.

5. Analyse (et construction) d'algorithmes comme suite d'instructions aboutissant à la résolution d'un problème donné.
Application numérique à l'aide d'un ordinateur.

Il s'agit d'une simple initiation, par exemple, sur des situations telles que croissance d'une population, intérêts composés, ... mais aucune compétence n'est exigible à ce propos. Les calculatrices ou l'ordinateur pourront être utilisés avec profit.

GESTION DU PROGRAMME

Les contenus doivent être gérés de telle manière que l'esprit du programme soit respecté. Ainsi les notions déjà vues doivent être souvent réinvesties sans pour autant être objets de révisions systématiques.

L'ordre dans lequel nous avons présenté les notions figure dans le tableau ci-dessous. En parallèle se trouvent les notions nouvelles et les notions réinvesties sur chaque dominante.

Dominantes	Exemple de notions nouvelles	Exemples de notions réinvesties
Calculs d'éléments métriques (1) : Enoncé de Thalès	- Enoncé de Thalès - Agrandissement réduction	- Résolutions d'équations - Aires-périmètres - Calculs sur les fractions - Démonstrations sur des configurations géométriques
Systèmes d'équations Equations de droites	- Systèmes d'équations - Equations de droites - Résolution graphique d'un système	- Résolutions d'équations - Calculs sur les fractions - Thalès - Repérage - Mise en équations de problèmes.
Calculs d'éléments métriques (2) : Trigonométrie	- Sinus, tangente	- Cosinus - Pythagore - Valeurs exacte et approchée - Démonstrations sur les configurations géométriques - Thalès - Racines carrées - Aires et périmètres
Travaux numériques (1) : Calculs sur les racines	- Calculs sur les racines	- Thalès, Pythagore - Calcul littéral - Aires et périmètres
Travaux numériques (2) : Calcul littéral	- Identités remarquables - Factorisations - Equations produit	- Pythagore - Constructions de configurations géométriques - Géométrie dans l'espace - Résolutions d'équations - Résolutions de systèmes d'équations - Calculs sur les fractions
Espace	- Pyramide, cône - Agrandissement réduction - Gestion de données (représentation graphique d'une fonction) - Résolutions par essais et rectifications de $f(x) = a$	- Calcul littéral - Solides connus (prisme, pavé, cylindre) - Calculs d'aire, angles (trigonométrie), volumes - Perspectives cavalières
Travaux numériques (3)	- Inéquations	- Calcul littéral - Calcul sur les fractions

Transformations vecteurs	- Composition de transformations - vecteurs - Géométrie analytique	- Rotation, translations, symétries - Démonstrations sur les configurations géométriques
Gestion de données	- Statistiques - Fonctions affines	- Equations de droites - Proportionnalité - Pourcentages - Fonctions linéaires - Aires et volumes
Résolution de problèmes	- Géométrie analytique - Angles inscrits - Réciproque de Thalès	- Angles - Démonstrations sur des configurations géométriques - Pythagore - ......

Quelques remarques pour justifier ces choix :

1. Comme en quatrième il nous semble préférable de commencer par des calculs (cf. brochures 4ème).

2. Commencer par Thalès permet, sans faire de révisions systématiques, de revoir les techniques de résolution d'équations du premier degré, ainsi que de refaire des démonstrations sur des configurations géométriques.

3. Le calcul littéral intervient tout au long de l'année avec cependant des temps forts pour des apprentissages spécifiques (identités remarquables, factorisations).

4. Les systèmes d'équations sont vus en début d'année. Cela permet :
- de les réinvestir dans de nombreuses situations variées tout au long de l'année,
- d'introduire les équations de droite qui peuvent être aussi largement réinvesties dans d'autres parties du programme.

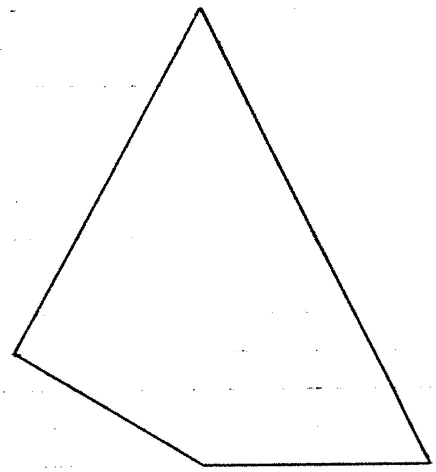
5. La dernière dominante "résolution de problèmes" permet de revoir certaines méthodes de recherche.

CALCULS D'ELEMENTS METRIQUES (1)

Enoncé de Thalès

FEUILLE 1

ACTIVITE : Trouve une méthode économique pour reproduire ce quadrilatère à l'échelle $\frac{1}{3}$.

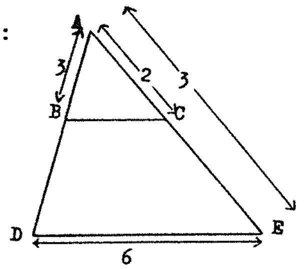


OBJECTIFS

CONTRAT : Les exercices 5 et 19 sont à faire en devoir à la maison.
Les exercices 3, 14 et 18 sont facultatifs.

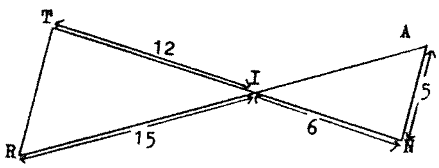
DUREE : 7 heures en classe.

Ex 1 :



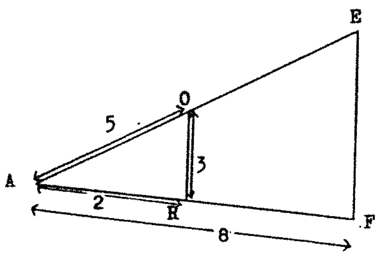
Les droites (BC) et (DE) sont parallèles.
Calcule AD et BC.

Ex 2 :



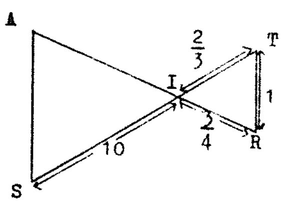
Les droites (TR) et (AN) sont parallèles.
Calcule IA et TR.

Ex 3 :



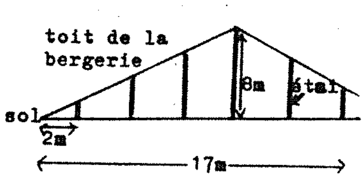
On sait que (OR) est parallèle à (EF), calcule le périmètre du triangle AEF.

Ex 4 :



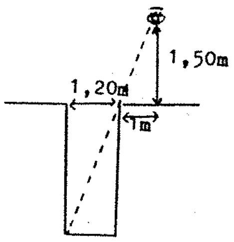
Calcule IA et AS sachant que (TR) est parallèle à (AS).

Ex 5 :



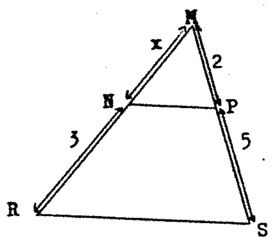
On a représenté une bergerie en coupe : on voit le toit, le sol et six étais en bois, régulièrement espacés entre eux, soutenant le toit.
Calcule la longueur de chaque étai.

Ex 6 :



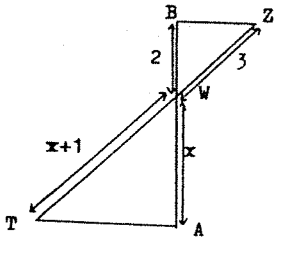
Voici une technique utilisée dès l'antiquité pour mesurer la profondeur d'un puits. (Cette technique est exposée dans un ouvrage d'Euclide au 3ème siècle avant J.C).
En plaçant son oeil à 1,50 m de hauteur et à 1 m du bord d'un puits de 1,20 m de diamètre, le bord du puits cache juste la ligne du fond.
Quelle est la profondeur du puits ?

Ex 7 :



On sait que (RS) et (NP) sont parallèles, que vaut x ?

Ex 8 :

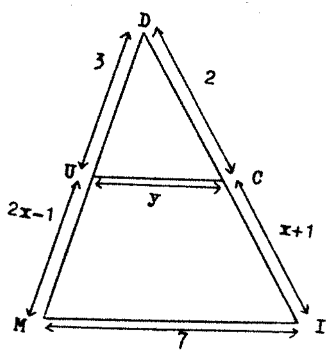


(BZ) et (AT) sont parallèles, trouve la valeur de x.

Ex 9 :

LST est un triangle tel que TL = 8 et LS = 6. P est un point du côté [LS] tel que PS = 4. O est le projeté de P sur [LT] parallèlement à (ST).
On pose OT = y, calcule y.

Ex 10 :

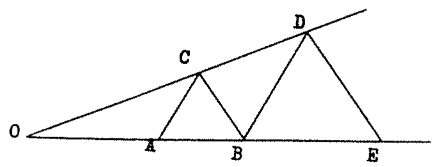


Les droites (CU) et (MI) sont parallèles.
Calcule les valeurs de x et de y.

Ex 11 :

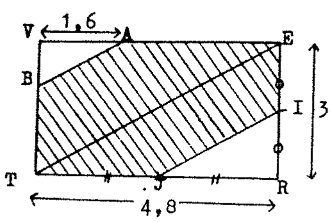
ABC est un triangle tel que AB = 5, AC = 4 et BC = 3. I est un point de [AB] tel que BI = 2, I' est le projeté orthogonal de I sur (AC).
Calcule AI' et II'.

Ex 12 :



Les droites (CA) et (BD) sont parallèles, les droites (CB) et (DE) sont parallèles.
Prouve que $OB^2 = OA \times OE$.

Ex 13 :



VERT est un rectangle, (AB) et (ET) sont parallèles. Calcule l'aire de la surface hachurée, justifie ta réponse par une démonstration.

Ex 14 :

ABC est un triangle, [AA'] une médiane, P un point sur [AA']. Place N le projeté de P sur (BC) parallèlement à (AC) et M le projeté de P sur (BC) parallèlement à (AB).
Quel est le milieu de [MN] ? Prouve-le.

Ex 15 :

TRI est un triangle, [IJ] et [RK] deux de ses médianes qui se coupent en un point G.
Place A le projeté de J sur (TI) parallèlement à (RK).

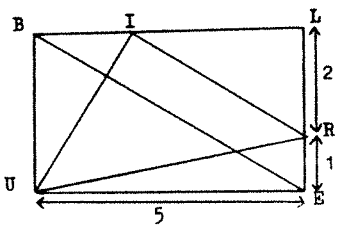
- Prouve que $IK = \frac{2}{3}$ IA

- Compare IG et IJ.

Ex 16 :

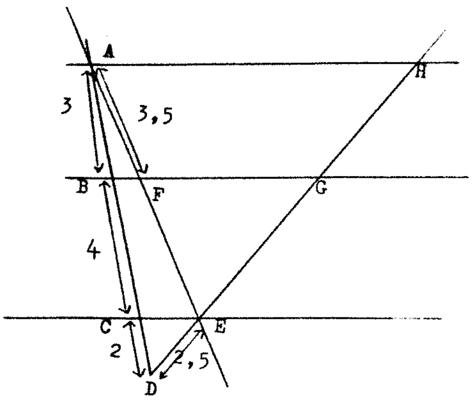
OUI est un triangle rectangle en O tel que OU = 6 et OI = 3. A est le point de [OU] tel que AU = 4, B est le projeté de A sur (UI) parallèlement à (OI) et C est le projeté orthogonal de B sur (OI).
BAOC est-il un carré ? Prouve-le.

Ex 17 :



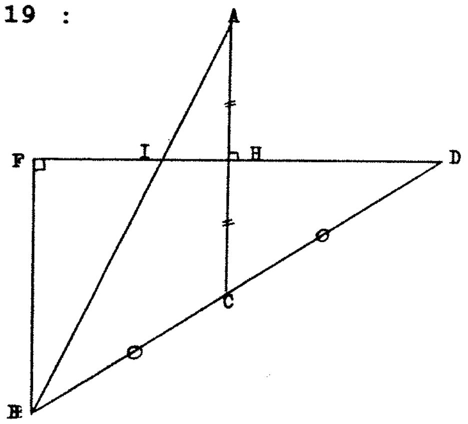
BLEU est un rectangle, (EB) et (RI) sont parallèles.
Le triangle UIR est-il rectangle? Prouve-le.

Ex 18 :



Les droites (AH), (BG), (CE) sont parallèles.
Calcule les valeurs exactes de EF, EG et GH.

Ex 19 :



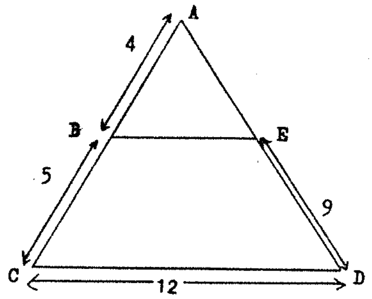
Montre que AB = 3 AI.

Ex 20 :

Trace un segment [AB].
Construis à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas le point M tel que AM = $\frac{5}{7}$ AB.

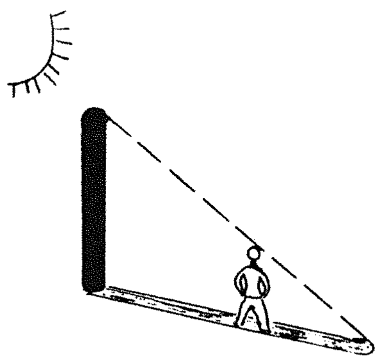
AUTO-TEST

Ex 1 :



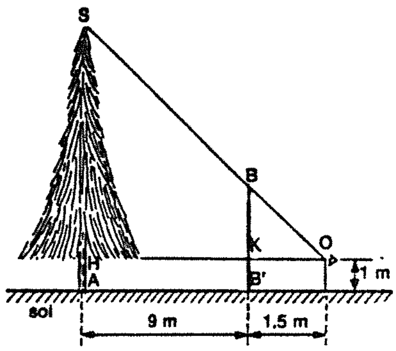
(BE) et (CD) sont parallèles. Calcule les dimensions qui manquent.

Ex 2 :



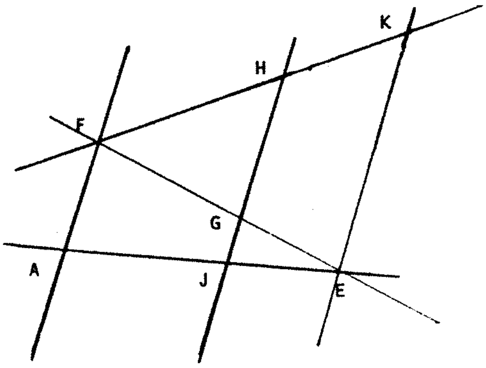
A la fête foraine on a dressé un mât de cocagne. On peut emporter le ballon qui y est fixé à condition de trouver, sans s'en approcher, la hauteur de mât à 10 cm près. Un astucieux luron se place, ainsi que l'indique le dessin, de façon à faire coïncider l'ombre de sa tête avec celle du ballon.
Il sait que sa taille est 1,65 m, qu'il est à 7,9 m du pied du mât, que l'ombre du mât a pour longueur 10 m... et il emporte le ballon. Explique comment il a pu trouver la hauteur du mât et calcule cette hauteur.

Ex 3 :



On veut mesurer la hauteur du sapin et on ne dispose que d'un bâton. On le pique en terre, verticalement, à 9 m du pied du sapin. La partie visible du bâton BB' mesure 2,5 m.
On se place derrière, jusqu'à ce que l'oeil O, situé à 1 m au-dessus du sol, voit en alignement le sommet S de l'arbre et l'extrémité B du bâton. On mesure alors la distance de l'oeil au bâton et on trouve 1,5 m.
Quelle est la hauteur du sapin au-dessus du sol ?

Ex 4 :



Les droites (AF), (JH) et (KE) sont parallèles.

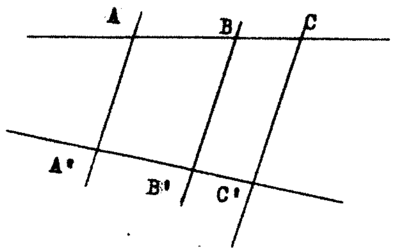
FH = 10,625 AJ = 7,65
JE = 3,6 EF = 8,5

Calcule GE et FK.

CHOIX DIDACTIQUES

a) L'énoncé de Thalès peut être perçu comme lié à la projection ou lié à l'homothétie selon la configuration.

Cas du trapèze (hors programme en 3ème)



Si (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles

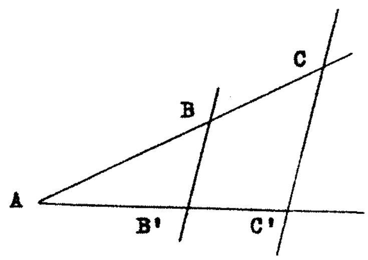
alors

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'} \text{ ou } \frac{BC}{BA} = \frac{B'C'}{B'A'} \; \ldots\ldots$$

(cette égalité est due au fait que la projection conserve le barycentre). De cette égalité, on déduit le rapport de projection

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} .$$

Cas du triangle



(BB') et (CC') sont supposées parallèles.

1) Cette figure peut être perçue comme un cas particulier de la précédente, par suite on peut déduire

* $\dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{AC'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC}$

* $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AB'}{AC'}$

* $\dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AB}{AB'}$

....

Par contre, on ne peut déduire $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BB'}{CC'}$.

2) Cette figure peut aussi être perçue comme deux triangles, l'un étant réduit par rapport à l'autre (c'est à dire l'un est déduit de l'autre par une homothétie).

Le rapport de réduction (ou d'agrandissement) est alors

$\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'} = \frac{BB'}{CC'}$ (rapport d'homothétie).

Dans cette perception le rapport $\frac{BC}{B'C'}$ ne représente rien.

b) Ces différentes perceptions permettent trois introductions de l'énoncé de Thalès, l'une par les projections l'autre par l'homothétie, une troisième ne privilégiant aucun des 2 aspects précédents.

Avantages et inconvénients de chacune des méthodes.

- ***Par les projections.***

Avantages :

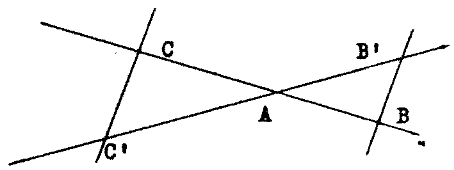
- c'est la présentation préconisée par les projets des commentaires,

- cette présentation permet de trouver facilement une des longueurs AB, BC, B'C' ou AB' connaissant les trois autres,

- la présentation convient pour le trapèze (mais cette configuration n'est pas au programme).

Inconvénients :

- la projection est mal maîtrisée surtout quand la figure est "croisée".



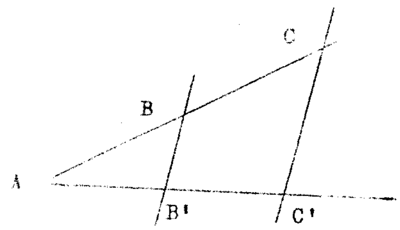
- on ne peut obtenir $\frac{BB'}{CC'} = \frac{AB}{AC}$

- ***Par l'homothétie***

Avantages :

- la reconnaissance de Thalès est facile : il suffit de repérer un triangle et son agrandissement (ou sa réduction).

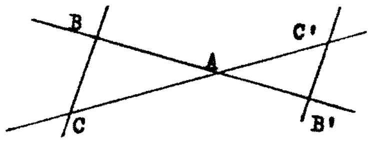
- on peut obtenir facilement $\frac{BB'}{CC'} = \frac{AB}{AC}$



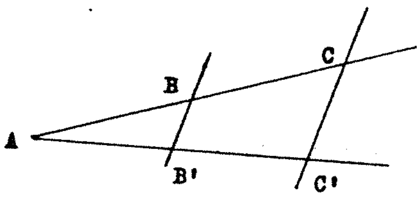
- on habitue l'élève à la vision de l'homothétie (vue en seconde).

- la liaison avec la partie agrandissement-réduction est aisée.

- la figure "croisée" :



ne pose pas, a priori, davantage de difficulté que la figure "non croisée".



- le fait de ne pas avoir l'égalité $\frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{AB'}$ permet de mobiliser davantage de méthodes vues en 4ème pour résoudre des équations (cf. la mise en oeuvre dans la classe).

Inconvénient :

- Toute égalité de rapports privilégie le sommet commun aux deux triangles ce qui peut alourdir les calculs.

- ***Ne privilégier aucun des 2 aspects.***

Avantage :

- faire réfléchir sur l'outil le plus performant.

Inconvénients :

- risque de confusion dans le choix des rapports,
- mauvaise reconnaissance de Thalès (trop d'outils peut nuire à certains élèves),
- temps à passer plus important.

NOTRE CHOIX : privilégier l'aspect homothétie.

c) Le traitement d'un problème relevant de Thalès peut être fait par la proportionnalité ou par les équations.

NOTRE CHOIX : faire utiliser la proportionnalité quand cela peut être fait.

OBJECTIFS

- Savoir et savoir utiliser l'énoncé de Thalès pour calculer une longueur dans un triangle.

- Faire le lien entre l'énoncé et l'agrandissement ou la réduction d'une figure.

Objectifs secondaires

- Réinvestir les connaissances sur

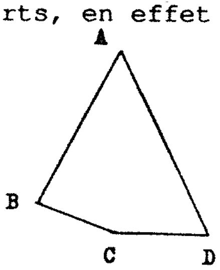
* les équations
* le calcul littéral
* le cosinus
* Pythagore
* les fractions

- Poursuivre l'apprentissage de la démonstration.

ANALYSE DE LA FICHE ÉLEVE

Choix de l'activité 1

La construction du quadrilatère réduit peut être obtenue de nombreuses façons. La position de la figure sur le quadrillage, les dimensions de celles-ci ont été choisies de telle manière que la méthode la plus économique relève de Thalès ou de sa réciproque ; c'est-à-dire pour qu'apparaissent le lien entre tracés de parallèles et égalités de rapports, en effet :



- une des diagonales [AC] est portée par le quadrillage
- la longueur de cette diagonale est divisible par 3
- un des côtés [CD] est porté par le quadrillage et sa longueur est aussi divisible par 3.
- $\widehat{ACD}$ est droit.

D'autre part cette activité permet d'observer ce que les élèves savent des réductions (conservation des angles, effet sur les aires....).

Choix des activités 2 et 3

Il s'agit de reconnaître le modèle vu dans l'activité 1.

Activité 2

- Les élèves regardent un extrait du film "si Thalès m'était conté" et doivent répondre à la question posée à la fin du film.

Activité 3

- Les élèves ont à mesurer une distance inaccessible à l'aide du théorème de Thalès.

Suite à ces activités une recherche sur la démonstration de l'énoncé est effectuée.

Choix des exercices

On peut les classer de la manière suivante :

les exercices 1 à 4 : application directe de l'énoncé de Thalès, les résolutions peuvent être faites avec la proportionnalité,

les exercices 5 et 6 : mathématisation d'une situation,

les exercices 7 à 10 : résolution d'équations,

les exercices 11 à 19 : révisions sur les configurations et démonstrations de propriétés,

l'exercice 20 : réinvestissement de Thalès dans un problème ouvert.

DÉROULEMENT ET COMMENTAIRES

ACTIVITE 1 : distribution de la feuille 1

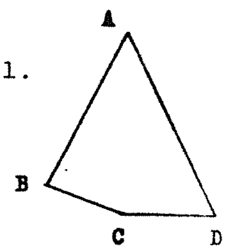
Recherche en classe avec explication écrite de la procédure utilisée (30 mn).

Synthèse : 30 mn.

* ***Procédures utilisées*** :

Les élèves ont tracé le quadrilatère réduit à l'intérieur ou à l'extérieur du quadrilatère initial.

1) Pour le quadrilatère tracé en dehors du quadrilatère initial.



Appelons ABCD le quadrilatère initial, A' B' C' D' le quadrilatère réduit.

1.1. - De très nombreux élèves ont procédé au comptage des carreaux pour reproduire AC et CD.

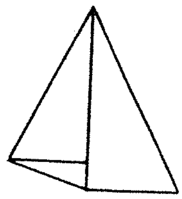
A'C' et C' D' sont tracés sur le quadrillage ((A'C') // (AC); (C'D') // (CD)). Après, les procédures divergent.

- . Mesure de $\widehat{BCD}$ d'où $\widehat{B'C'D'}$ (il y a pas eu division de l'angle en trois).
  . Mesure de BC, calcul de B'C'.

- Tracés de parallèles.

- . mesure de BC et de AB
  . calcul de B'C' et A'B'
  . tracé au compas

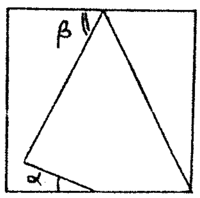
- Tracé de 3 triangles rectangles à l'intérieur du quadrilatère et division des côtés par 3.



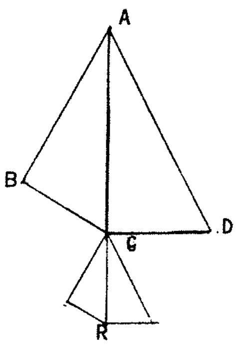
- Tracé du rectangle (le rectangle est porté par le quadrillage) qui inscrit le quadrilatère (appelé "figure minimale qui peut contenir la figure") et reproduction.

Les points sont placés par comptage. (Mais 11 n'est pas divisible par 3).

- Inscription du quadrilatère dans un carré de côté 6 cm. Reproduction de ce carré à l'échelle $\frac{1}{3}$. Les points A' et C' sont les milieux de 2 des côtés du carré réduit. Mesure de α et β et reproduction de ces angles en vraie grandeur.
Notons que le carré a pour côté 12 (donc est facile à réduire au $\frac{1}{3}$).

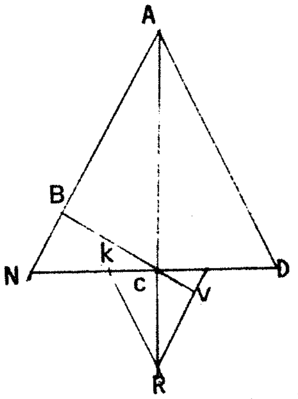


1.2.



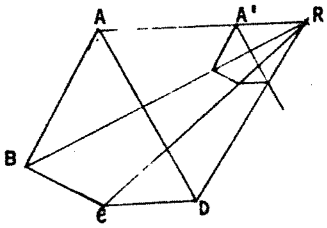
- La droite (AC) est tracée et le point R est placé sur (AC) pour que CR = $\frac{1}{3}$ AC. Les autres côtés sont tracés parallèles aux côtés du quadrilatère initial.

1.3.



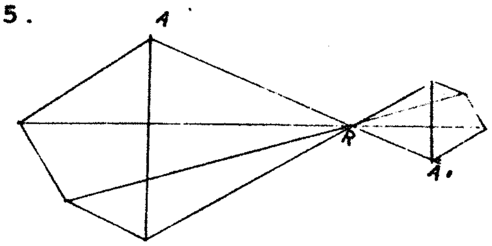
- Le quadrilatère est inscrit dans un triangle ; R est placé sur (AC) pour que CR = $\frac{1}{3}$ AC par comptage. P est mis sur (CD) tel que CP = $\frac{1}{3}$ CD et K sur (CD) tel que CK = $\frac{1}{3}$ CD. Mesure de $\widehat{BCD}$ et tracé de l'angle $\widehat{KCV}$.

1.4.



- Un point R est mis à l'extérieur du quadrilatère, les segments [RA], [RB], [RC] et [RD] sont tracés. A' est placé au tiers de [RA] et les côtés sont tracés parallèles aux côtés du quadrilatère initial.

1.5.



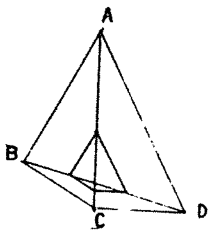
- Ce tracé est ébauché mais non explicité.

2) Pour le quadrilatère à l'intérieur du quadrilatère initial.

2.1. - Tracé du quadrilatère sans sommet commun avec le quadrilatère initial (il est mis "au milieu", au 1/3 de AC) puis A'C' par comptage et tracés de parallèles.

2.2. - Choix d'un sommet commun (A ou C), comptage pour AC et tracés de parallèles.

2.3.



- Tracé des diagonales et "glissement" jusqu'à obtenir des côtés réduits de 1/3.

3) Procédures abandonnées par les élèves.

- Faire un quadrillage 3 fois plus petit. Abandon après discussion dans le groupe.

- ABC est vu comme un triangle rectangle en B (vérification à l'équerre). Le professeur demande à l'élève s'il est sûr de son affirmation. L'élève vérifie en utilisant la réciproque de l'énoncé de Pythagore et abandonne la stratégie.

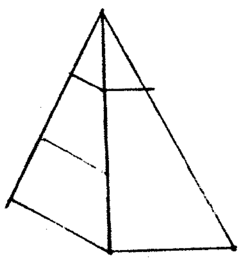
4) Procédures erronées.

- Tracé de la bissectrice de chaque angle. Aucun résultat.
- Détermination de l'aire du quadrilatère initial par comptage de carreaux et division de l'aire par 3.

Remarques

- Il n'y a pas eu de quadrilatères "tournés" par rapport au quadrillage (les transformations en jeu sont des homothéties et non des similitudes).
- Tous ont remarqué que les angles des deux quadrilatères étaient égaux (ce qui montre que les élèves ont une bonne idée de ce qu' est une réduction).
- Les angles sont largement réinvestis.
- De nombreuses solutions relèvent de Thalès ou de sa réciproque.

- Seulement un quart des élèves a utilisé le fait que deux des côtés des quadrilatères peuvent être confondus :



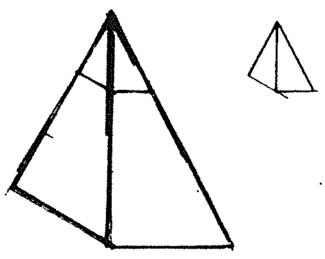
On peut supposer que dans cette situation les quadrilatères n'apparaissent pas, pour tous, assez explicitement.

Synthèse

Les différentes procédures sont analysées et discutées.

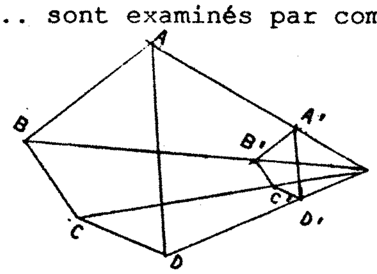
Les procédures élèves sont brièvement rappelées par le professeur.
Un document élève est projeté au rétroprojecteur.

Pour la figure à l'intérieur, le professeur fait ressortir le parallélisme entre (B'C') et (BC) entre (C'D') et (CD) et fait apparaître les rapports $\frac{AC'}{AC}$, $\frac{AB'}{AB}$ ....



Pour la figure à l'extérieur, le parallélisme demeure mais que deviennent les rapports où interviennent B et B', C et C'...? Un tracé supplémentaire est présenté au rétroprojecteur; à l'aide d'un rabat il permet de visualiser la convergence des droites (AA'), (BB'), (CC'), (DD').

Les rapports $\frac{OA'}{OA}$, $\frac{OC'}{OC}$ ... sont examinés par comptage de carreaux.



Les élèves comprennent ainsi que l'on est ramené au cas précédent. Le lien entre les tracés de parallèles et les égalités de rapports est alors perçu.

Aucune validation n'est effectuée à ce moment-là.

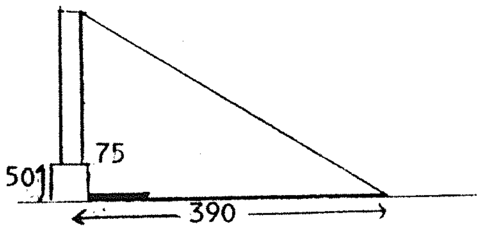
ACTIVITE 2

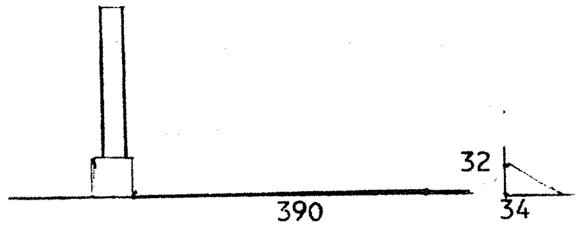
Projection d'une partie du film vidéo "si Thalès m'était conté II" (film du CNDP). L'extrait choisi commence au moment où "Thalès" réfléchit devant la pyramide et se termine sur le point "?", qui questionne pour trouver la hauteur de la pyramide. Suite à cette projection la question suivante est posée : "Qu'a découvert "Thalès" ? Que peut-il calculer ?"

Pour répondre à cette question il est nécessaire de repasser le film afin que les élèves prennent des notes.
L'analogie avec l'activité précédente est perçue. Ainsi certains élèves écrivent des égalités de rapports, d'autres reconnaissent que l'un des triangles est réduit et calculent l'échelle. La hauteur de la pyramide est alors trouvée par tous.

ACTIVITE 3

Calculer la hauteur d'une des colonnes du collège*.
Les élèves reproduisent la méthode de Thalès en mesurant la longueur de l'ombre de la colonne et, soit celle de l'ombre du socle, soit celle d'une règle perpendiculaire au sol.

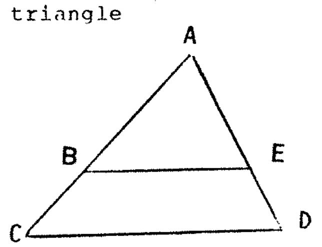




- A l'issue de ces 3 activités l'énoncé est formulé, par les élèves et institutionnalisé par le professeur. Ils dégagent les données nécessaires à son utilisation et ce qu'il permet de déduire et de calculer. A ce stade le profeseur fait bien remarquer que l'énoncé est, à ce moment là, **admis**.

La fiche "Comment calculer une distance" est complétée:

- En utilisant l'énoncé de Thalès dans un triangle



ACD triangle	B point de [AC]	E point de [AD]	(BE)//(CD)

↓

Si dans un triangle on trace une parallèle à un côté alors les longueurs des côtés des 2 triangles obtenus sont proportionnelles

↓

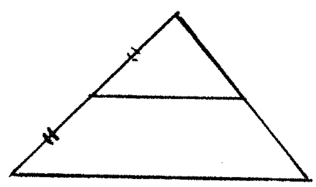
$$\boxed{\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{BE}{CD}}$$

Le répertoire est complété à la lettre **T** où l'énoncé de Thalès (direct) est copié.

DÉMONSTRATION : Premier temps.

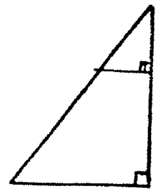
L'énoncé étant à ce moment compris de tous, le professeur demande aux élèves s'ils connaissent des cas particuliers de figures où cet énoncé pourrait être démontré. Deux cas sont signalés par les élèves :

- le cas où figure un milieu



* Le collège (reconstruit) possède un ensemble de colonnes hautes de quelques mètres.

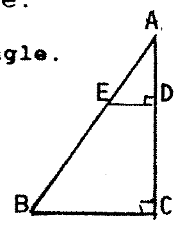
- le cas où figurent des triangles rectangles



Démonstration de l'énoncé dans le cas où un point est milieu d'un côté.

Les données et conclusion sont dégagées en classe et la démonstration recherchée en partie à la maison (les énoncés nécessaires ont tous été vus et utilisés en 4ème).
L'heure suivante, il y a entraide entre élèves pour la mise au point, le professeur aidant individuellement les groupes en difficulté.

Démonstration de l'énoncé dans le cas du triangle rectangle.

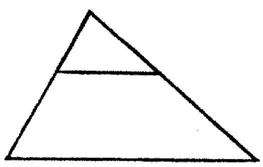


Les données sont dégagées collectivement : ABC rectangle en C, E point de [AB] et D point de [AC], (ED) parallèle à (BC) ; la conclusion $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{ED}{BC}$ est écrite également.
Les procédures utilisables sont énoncées par les élèves : dans un triangle rectangle ils pensent à l'énoncé de Pythagore et au cosinus. La recherche de la démonstration a lieu en classe, le répertoire et le fichier "comment démontrer que" sont consultés et la démonstration est menée à bien dans tous les groupes : utilisation du cosinus et des angles correspondants.
Cette démonstration est formulée soit sous forme d'organigramme, soit directement en français.

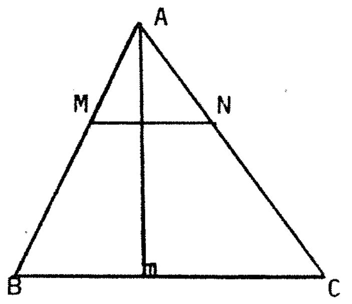
DÉMONSTRATION : 2ème temps.

* *"Comment démontrer le cas général ?"*

Figure proposée:

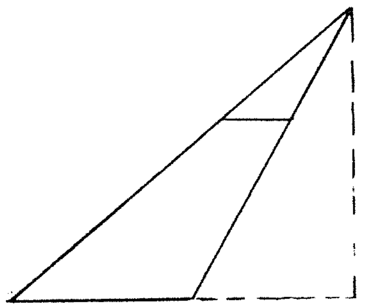


Un élève propose aussitôt de tracer une hauteur pour se ramener à une situation connue. A ce stade, il faut insister sur le fait que la démonstration, dans le cas où le triangle est rectangle, est faite, on peut donc utiliser le résultat (certains recommencent tout...).

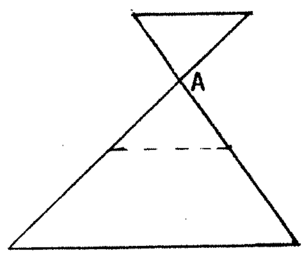


Pour montrer que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ la démarche qui consiste à prouver que ces deux rapports sont égaux à un même troisième est bien maîtrisée. L'égalité avec le troisième rapport $\frac{MN}{BC}$ est plus difficile à prouver et nécessite l'aide du professeur.

* *Le raisonnement est-il valable dans les cas suivants ?*



Les élèves se ramènent au cas précédent en traçant la hauteur "extérieure".



Les élèves se ramènent au cas précédent à l'aide de la symétrie centrale de centre A.

Le dossier est alors distribué, l'objectif formulé par les élèves est noté:

"Je dois savoir utiliser l'énoncé de Thalès pour calculer une distance dans un triangle".

EXERCICES

Dès le début des exercices, une difficulté non prévue apparaît : les élèves tracent la hauteur du triangle et recommencent la démonstration. Le professeur doit réexpliquer la démarche utilisée pour démontrer l'énoncé:"Pour ce faire, on a décomposé le problème en traitant d'abord des cas particuliers pour lesquels la démonstration était facile. Pour le cas général, des tracés supplémentaires ont permis de se ramener à une situation connue. L'énoncé, maintenant démontré, peut être utilisé".

Une aide méthodologique est apportée par le professeur dès les premiers exercices pour la gestion des rapports égaux. Lorsque l'on écrit l'énoncé de Thalès on peut écrire deux doubles égalités, chacune pouvant s'écrire sous forme de trois égalités. Il suffit de choisir celle qui servira à calculer la distance voulue, cette distance inconnue étant au numérateur, ce qui raccourcit les calculs et pose moins de problème.(On se place suivant le contexte en situation d'agrandissement ou de réduction.)

Aux exercices 2 et 4 quelques difficultés surgissent pour calculer les quotients de fractions. Une mise au point est alors faite.

Le texte de l'exercice 5 semble manquer de précision : les étais sont-ils perpendiculaires au sol ? L'étai central est-il axe de symétrie ? Il s'agit d'un exercice de mathématisation. Les étais de gauche peuvent être supposés perpendiculaires, mais à droite on ne sait rien et donc on ne peut rien calculer.

Les exercices 7 à 10 visent à réinvestir le calcul littéral et la résolution d'équation tout en s'entraînant à l'utilisation de l'énoncé de Thalès.
La résolution d'équation, où l'inconnue figure dans les deux membres a déjà été pratiquée en 4ème mais ici une difficulté supplémentaire surgit avec l'inconnue qui peut être présente au dénominateur. (Pour l'élève il n'est pas toujours évident de considérer x + 3 comme un nombre.)

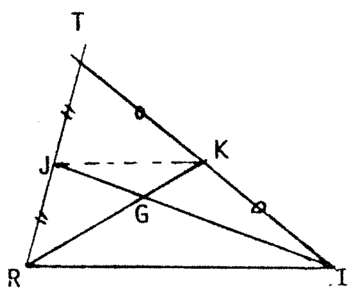
Le professeur aide individuellement les élèves qui éprouvent quelques difficultés et fait à nouveau remarquer que $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$ peut aussi s'écrire $\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD}$ (passage de l'agrandissement à la réduction et vice-versa).

A partir de l'exercice 11, les configurations sont réinvesties. Ces exercices permettent aux élèves de revoir les énoncés rencontrés en 4ème et de continuer l'apprentissage de la démonstration tout en s'entraînant à utiliser l'énoncé de Thalès.

Pour la plupart, les élèves résolvent par organigrammes comme en 4ème. Les méthodes utilisées en 4ème sont bien réutilisées et le fichier "comment démontrer que" est largement feuilleté.

L'objectif de l'exercice n° 15 est de faire démontrer que le centre de gravité d'un triangle est situé aux deux tiers de chaque médiane.

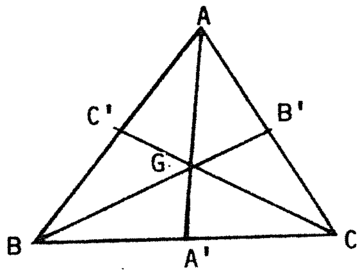
Cette démonstration aurait pu être faite plus rapidement en prouvant que $JK = \frac{1}{2} RI$ et en utilisant l'énoncé de Thalès dans les triangles RIG et JKG.



La démarche utilisée ici, a été préconisée pour réinvestir les projections et travailler sur le calcul littéral.
Certains élèves éprouvent des difficultés pour analyser la figure et utiliser le calcul littéral.

A la suite de cet exercice, le résultat démontré est noté sur le répertoire et sur la fiche "Comment calculer une distance":

- En utilisant le centre de gravité dans un triangle.



A' milieu de [BC]	B' milieu de [AC]	C' milieu de [AB]	G centre de gravité de ABC

↓

Dans un triangle, le centre de gravité est situé aux deux tiers de chaque médiane

↓

$AG = \frac{2}{3} AA'$	$BG = \frac{2}{3} BB'$	$CG = \frac{2}{3} CC'$

L'exercice n° 17 permet de poursuivre l'initiation aux racines carrées et aux différentes écritures d'un même nombre.
En effet, pour le calcul de RI on peut utiliser

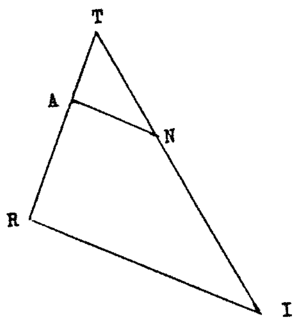
- soit l'énoncé de Thalès : $RI = \sqrt{\frac{136}{9}}$
- soit l'énoncé de Pythagore : $RI = \frac{2}{3}\sqrt{34}$.

Il y a donc doute pour les élèves.
Le calcul de RI^2 permet de montrer que $\frac{2}{3}\sqrt{34}$ et $\sqrt{\frac{136}{9}}$ sont deux écritures du même nombre

L'exercice 20 a été trouvé par quelques élèves seulement, mais lorsqu'un élève a montré sa méthode, chacun a su la justifier. La synthèse a consisté à faire la liaison avec le "guide-âne" (faisceau de droites parallèles) utilisé en 6ème pour partager un segment.

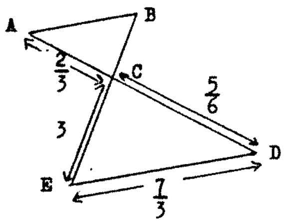
TEST

Ex 1 :



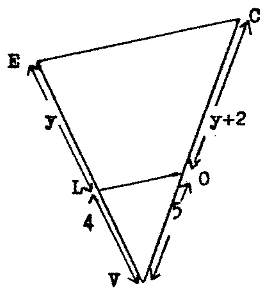
Les droites (AN) et (RI) sont parallèles ; TA = 1,6, AR = 5,4, TI = 8,4, AN = 1.
Calcule la valeur exacte de TN et celle de RI.

Ex 2 :



Les droites (AB) et (ED) sont parallèles.
Calcule la valeur exacte de CB.

Ex 3 :

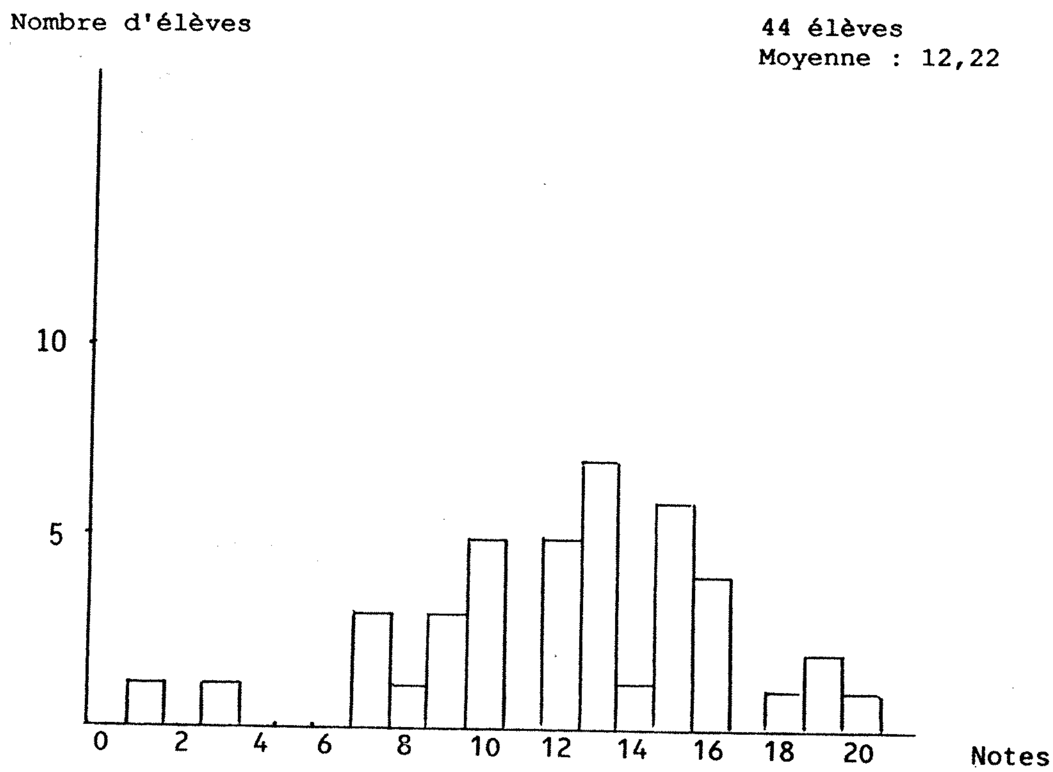


Les droites (EC) et (OL) sont parallèles.
Calcule la valeur exacte de y.

Ex 4 : ABC est un triangle tel que AB = 4 et BC = 6. E est le point de [AB] tel que BE = 2,4. Place F sur [AC] tel que les droites (EF) et (BC) soient parallèles. La parallèle à (AB) passant par F coupe [BC] en G.
Montre que EFGB est un losange.

Barème : Ex 1 : 5 points
Ex 2 : 4 points
Ex 3 : 4 points
Ex 4 : 7 points

RESULTATS DU TEST



Erreurs commises par les élèves

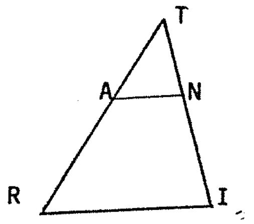
Ex 1 :	mauvaise écriture des rapports	1
	mauvais calcul	8
Ex 2 :	mauvaise écriture des rapports	11
	mauvais calcul	8
Ex 3 :	mauvaise écriture des rapports	11
	erreur dans le calcul littéral	24
Ex 4 :	rapports qui ne correspondent pas au parallélisme cité	12
	mauvaise écriture des rapports	4

COMMENTAIRES

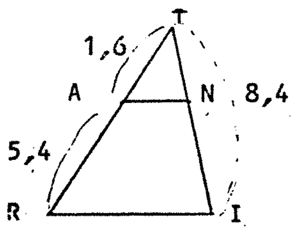
Les élèves semblaient avoir bien compris l'énoncé de Thalès, aussi nous nous sommes interrogés sur les erreurs commises lors du test.

Afin de trouver des éléments de réponse nous avons demandé aux élèves ayant échoué de résoudre à nouveau les problèmes.
Voici pour les 4 exercices ce que nous avons observé.

L'influence des données. (exercice 1)

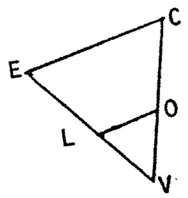


Un élève donne correctement l'énoncé de Thalès : $\frac{TA}{TR} = \frac{TN}{TI} = \frac{AN}{RI}$,



mais dans la figure suivante il écrit $\frac{TA}{AR} = \frac{TN}{TI}$ car les données sont TA, AR et TI. L'élève se laisse influencer par les données de la figure.

La position de la figure (exercice 3) ***et la forme de la figure*** (exercice 4)



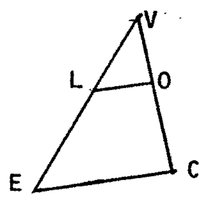
Un élève donne au tableau $\frac{CE}{OL} = \frac{CO}{CV} = \frac{EL}{EV}$.

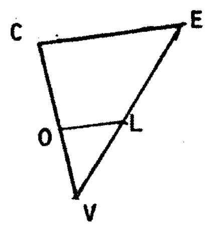
Cet élève "raisonne du haut vers le bas".

Ce qui compte pour lui c'est l'ordre des points en "descendant le segment".

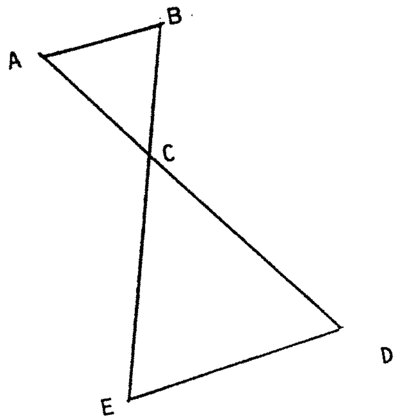
Dans les 2 figures cet élève écrit :

$\frac{VO}{VC} = \frac{OL}{EC}$ et $\frac{CO}{CV} = \frac{EL}{EV}$.





La forme de la figure



Un élève écrit: $\frac{AB}{ED} = \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BE}$

L'erreur peut être du même type que celle écrite précédemment.

Elle peut aussi être dûe à un obstacle didactique. Très souvent on a expliqué : "le petit côté sur le plus grand"... D'où $\frac{AC}{AD}$, AD étant visiblement le plus grand....

SYSTEMES D'EQUATIONS

EQUATIONS DE DROITES

CHOIX DIDACTIQUES

Cette partie tout comme l'énoncé de Thalès permet de réinvestir des notions antérieures sans pour autant faire des révisions systématiques :

- techniques du calcul littéral
- configurations géométriques
- calculs numériques.

D'où l'intérêt de la traiter tôt dans l'année.
Nous avons lié aux systèmes d'équations la partie du programme portant sur les équations de droites.

En effet, les équations de droites peuvent être liées à au moins deux problèmes :

- le rapport vectoriel-analytique
- la représentation des solutions d'une équation du type $ax + by + c = 0$.

Le premier de ces problèmes est exclu car la multiplication d'un vecteur par un réel ne figure plus dans les programmes. Nous avons donc opté pour le second : à la suite du travail sur les systèmes de deux équations les élèves sont mis en recherche d'une situation apparemment paradoxale. Cette situation relève des systèmes mais conduit à une seule équation. Il y a une infinité de solutions mais tous les couples ne conviennent pas ; d'où l'idée d'essayer de représenter les solutions. Dans cette démarche c'est le professeur qui valide sans démontrer. De même, la réciproque: une droite a une équation de la forme $ax + by + c = 0$, est validée sans démonstration.
Les relations entre les équations des droites, le parallélisme, l'orthogonalité ne sont pas faites dans cette dominante.
Ces questions seront abordées dans la dominante "résolution de problèmes" où nous initierons à la géométrie analytique.

OBJECTIFS

- savoir résoudre un système de 2 équations à deux inconnues par addition et substitution,
- savoir tracer une droite connaissant une équation,
- savoir trouver une équation d'une droite déterminée par 2 points,
- savoir calculer et lire les coordonnées du point d'intersection de deux droites,
- savoir lire sur un graphique la solution d'un système de deux équations à deux inconnues.

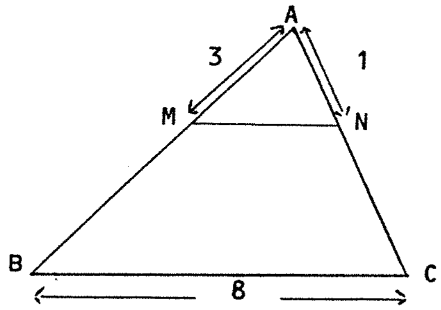
Objectifs secondaires

- savoir mathématiser une situation
- savoir calculer sur des expressions littérales.

PARTIE I - Systèmes d'équations

ACTIVITÉ

Construire en vraie grandeur la figure schématisée ci-dessous sachant
- que (MN) // (BC)
- que le périmètre du triangle ABC est égal à 17.



OBJECTIFS

CONTRAT : les exercices 1 à 17 sont obligatoires.

DURÉE : 6 heures en classe.

EXERCICES

Ex 1 :

La différence de deux nombres vaut 40 et leur somme 100.
Trouve ces deux nombres.

Ex 2 :

La différence entre le double d'un nombre et le triple d'un autre est 9.
La somme de ces deux nombres est 17.
Trouve ces deux nombres.

Ex 3 :

Si deux cercles sont tangents intérieurement la distance de leurs centres est 4. S'ils sont tangents extérieurement la distance est 15.
Quels sont les rayons des cercles ?

Ex 4 :

La somme de deux nombres est 84. Le quart de l'un ajouté au tiers de l'autre vaut 14.
Trouve ces deux nombres.

Ex 5 :

La différence de deux nombres est 70. Le tiers du deuxième ajouté à la moitié du plus grand donne 98.
Trouve ces deux nombres.

Ex 6 :

Hiéron II, tyran de Syracuse au IIIème siècle avant J.C., avait commandé à un orfèvre une couronne et lui avait fourni 3 kg d'or et 1 kg d'argent.
L'orfèvre fabriqua une couronne qui pesait bien le poids convenu, c'est-à-dire, 4 kg.
Mais Hiéron, qui était très méfiant, eut des doutes sur les quantités d'or et d'argent utilisées.
Pourquoi ?
Hièron demanda donc à Archimède un moyen de démasquer une éventuelle tromperie sans détruire la couronne. Archimède, alors, en la plongeant dans l'eau, mesura son volume : 0,3 dm^3. Il sait que 1 dm^3 d'or pèse environ 20 kg et 1 dm^3 d'argent pèse environ 10 kg.

Quelle fut la réponse d'Archimède à Hiéron ?
A ton avis, qu'advint-il de l'orfèvre ?

Ex 7 :

Résous le système suivant :

$$\begin{cases} 3y - 2x = 21 \\ x + 2y = 37 \end{cases}$$

Ex 8 :

Résoudre les systèmes de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} 3x - y = 9 \\ -x + 4y = -14 \end{cases}$$

(BEPC 1988)

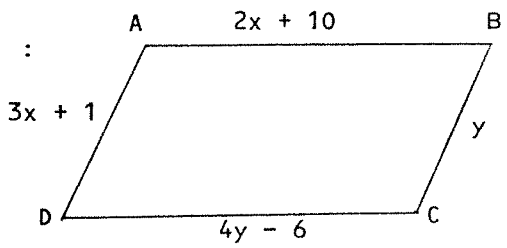
$$\begin{cases} 4x - y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

(BEPC 1980)

$$\begin{cases} y = \frac{x}{2} - 5 \\ -\frac{2}{3}x - \frac{y}{3} = \frac{5}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y = 6x - 4 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

Ex 9 :



ABCD est un parallélogramme, trouve x et y.

Ex 10 :

En regardant ses résultats au baccalauréat, Lionel, élève de terminale C, a fait une tache d'encre cachant ses notes de maths et de philo. Il se souvient cependant que si ses deux notes étaient inversées, il aurait la moyenne et n'aurait pas passé l'oral.
Retrouve les notes de Lionel sachant que:

- les notes sont des nombres entiers,
- le total des autres notes est 142 et la somme des coefficients correspondants est 16.

	Maths	Philo	Moyenne
coefficient	5	2	
notes			9

Ex 11 :

La somme de deux nombres est 21 et leur rapport est 5.
Trouve ces deux nombres.

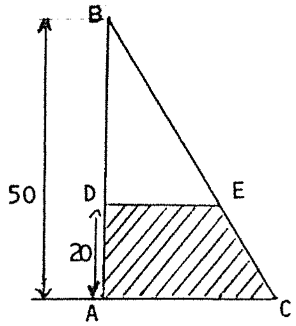
Ex 12 :

Un vieux problème :
Un cheval et un mulet portant chacun un lourd fardeau allaient côte à côte. Le cheval se plaignait du poids excessif de son fardeau.
"De quoi te plains-tu?, lui dit le mulet, si je te prends un sac, ma charge sera deux fois plus lourde que la tienne. Mais si tu prends un sac de mon dos, ton fardeau sera égal au mien".
Dites-nous, mathématiciens éclairés, combien de sacs portait le cheval et combien de sacs portait le mulet ?
(Tous les sacs sont identiques.)

Ex 13 :

La différence de deux nombres a et b est 7. Calcule a et b sachant que : $a(a + 2) + b\,(b + 2) - 2ab = 108$.

Ex 14 :



Un triangle ABC est rectangle en A. Le segment [AB] mesure 50. Une parallèle à l'autre côté de l'angle droit et à une distance 20 de celui-ci détermine un trapèze d'aire 320.
Trouve les longueurs des bases du trapèze.

Ex 15 :

Xavier dit à son père :
"Dans huit ans, j'aurai la moitié de ton âge."
Son père lui répond :
"Il y a quatre ans, j'avais trois fois ton âge".
Traduis ces données par un système de deux équations.
Déduis-en l'âge de Xavier et de son père.
(BEPC Clermont-Ferrand 84).

Ex 16 :

Trouve le nombre $\frac{x}{y}$ tel que :

- si on ajoute 3 au numérateur et 9 au dénominateur, on trouve $\frac{1}{2}$.
- si on retranche 3 de son numérateur et 4 de son dénominateur, on trouve 1.

Ex 17 :

Le quotient de deux naturels est 6 et le reste de la division euclidienne de l'un par l'autre est 47.
La somme de ces deux nombres et du reste est 591.
Quels sont ces deux nombres ?

Ex 18 :

Deux nombres d et e sont tels que :
* le quart de d ajouté à la moitié de e donne 24
et
* 3 (d - 2) + 5 (4 - e) = - 116.
Trouve d et e.

Ex 19 :

Je pense à deux nombres.
Si j'ajoute 4 fois le premier et 6 fois le deuxième, je trouve 90.
Si j'enlève 6 au premier et que j'ajoute au résultat 5 fois le deuxième, je trouve la différence entre 24 et le double de leur différence.
Quels sont les deux nombres ?

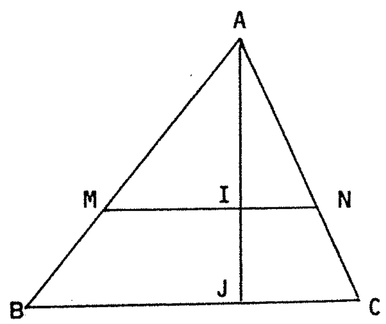
AUTO-TEST

Ex 1 :

On veut peser une orange et un pamplemousse. Pour cela, on utilise une balance de Roberval et deux masses marquées (200 g et 500 g).
Un premier équilibre est obtenu avec l'orange et le pamplemousse sur un plateau et la masse de 500 g sur l'autre.
Un deuxième équilibre est obtenu avec l'orange et la masse de 200 g sur un plateau et le pamplemousse sur l'autre.
Trouve la masse du pamplemousse et celle de l'orange.
(BEPC Strasbourg).

Ex 2 :

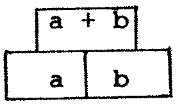
Dans la figure suivante, (MN) est parallèle à (BC), MN = 28,4 ;
IJ = 25,2 ; BC = 54,8.
Calcule les hauteurs des deux triangles (AI et AJ).

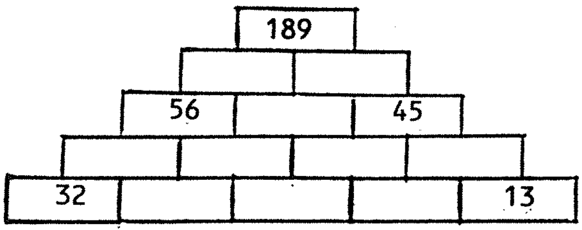


DEVOIR A LA MAISON

Ex 1 :

Complète les cases sur le modèle :





Détaille tes calculs.

(paru dans la Nouvelle République).

Ex 2 :

Trouve une fraction telle que si on ajoute 3 à son numérateur et à son dénominateur, elle soit égale à $\frac{7}{10}$. et si on retranche 5 de son numérateur et de son dénominateur, elle soit égale à $\frac{1}{2}$.

Ex 3 :

Résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 9y = -17{,}5. \end{cases}$$

(BEPC Dijon 1988).

*** *Analyse de la fiche***

- Choix de l'activité

- **l'activité**: elle relève de la partie précédente (Thalès) et donc d'emblée les élèves ne peuvent pas discerner la nouveauté.
Selon le choix des inconnues on peut avoir soit les systèmes :

(1) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{1} \\ x + y + 8 = 17 \end{cases}$ ou (2) $\begin{cases} \dfrac{3}{x} = \dfrac{1}{y} \\ x + y + 8 = 17 \end{cases}$ (x = AB et y = AC)

soit les systèmes :

(3) $\begin{cases} \dfrac{x + 3}{3} = y + 1 \\ x + y + 12 = 17 \end{cases}$ ou (4) $\begin{cases} \dfrac{3}{x + 3} = \dfrac{1}{y + 1} \\ x + y + 12 = 17 \end{cases}$ (x = BM , y = NC)

Les résolutions peuvent faire apparaître a priori les méthodes de substitution et d'addition.

CHOIX DES EXERCICES

- **Les exercices** ont pour support l'arithmétique, la géométrie ou la vie courante. Les premiers (1, 2, 3 et 4) privilégient la technique d'addition. L'exercice systématique n° 7 met l'accent sur la position des lettres les unes par rapport aux autres.
D'autres exercices (8, 9 et 16) se ramènent plus facilement au système :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c'. \end{cases}$$

DÉROULEMENT ET COMMENTAIRES

- L'ACTIVITE

L'énoncé de Thalès est bien réinvesti. La méthode employée est en général la substitution (le problème se prêtait-il à l'apparition de l'autre méthode ?).
Un élève a recherché d'abord la solution par tâtonnement:

Ayant remarqué que AB + AC devait être égal à 9, il a tracé des triangles en choisissant des valeurs possibles pour AB et AC.

Après plusieurs constructions, il pense avoir trouvé et propose AB = 6,5 et AC = 2,5; (MN) semble parallèle à (BC).
Le professeur intervient en lui demandant si un dessin est suffisant pour être sûr de son affirmation.

La synthèse porte sur la manière de résoudre un tel problème :

- Repérer les inconnues et les coder,
- traduire le texte par des équations.

On obtient alors deux équations à deux inconnues. Le professeur fait remarquer que les inconnues dépendent l'une de l'autre et que les deux équations doivent être traitées simultanément.

- Simplifier chaque équation pour la ramener sous une forme plus simple ($ax + by = c$ ou $y = ax + b$ ou $ax + by - c = 0$).

- Choisir le mode de résolution le mieux adapté au système.
  Les différents modes de résolution sont alors mis en évidence : leur but est de se ramener à une équation du premier degré à une inconnue.

  * substitution : le plus utilisé lors de l'activité
  * addition : $\begin{cases} x + y = 9 \\ x = 3y \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 9 \\ -x + 3y = 0 \end{cases}$

  * combinaison ; addition. Certains élèves font remarquer que l'on pourrait éliminer y en multipliant les deux membres de l'une des équations par 3

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 3y = 27 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

  puis en ajoutant.

  Ces trois méthodes s'appliquent à tous les systèmes mais l'une d'elles est souvent "plus économique" que les autres.

- Vérifier que les solutions obtenues conviennent en remplaçant les inconnues par les nombres dans les équations initiales.

Il est fait remarquer que très souvent on emploie pour résoudre deux méthodes. (x est trouvé par addition, y en substituant la valeur de x trouvée dans l'une des équations).

L'objectif est ensuite noté sur le dossier.

"Je dois savoir résoudre un système de deux équations à deux inconnues (méthode : substitution, addition, combinaison-addition)".

EXERCICES

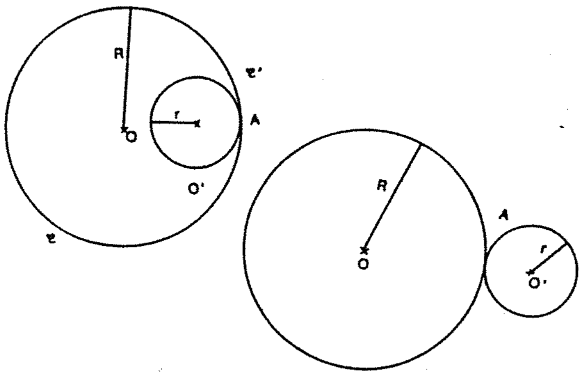
Durée : 6h 30 mn.

Le démarrage est difficile. Le professeur aide les élèves pour les premiers exercices. Il est nécessaire de rappeler que l'on doit se ramener à un système dans lequel une des équations ne possède qu'une inconnue. En particulier la méthode d'addition vise à faire disparaître une inconnue et non les constantes !

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y = 3 \\ (x + 2y) - (2x - y) = 0 \end{cases}$$

- **L'exercice 3** permet de travailler sur les cercles tangents et donne l'occasion de compléter la page "cercle" du répertoire.

C Cercle : **Cercles tangents.**



𝒞 et 𝒞' sont tangents intérieurement en A.
OO' = R - r
A est le seul point commun aux deux cercles.

𝒞 et 𝒞' sont tangents extérieurement en A.
OO' = R + r

A est le seul point commun aux deux cercles.

- **Pour les exercices 4 et 5,** les équations comportent des écritures fractionnaires, leurs transformations ne sont pas toujours bien réalisées.

Ainsi $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 14$ donne $\frac{3x}{4} + y = 14$ ou $\frac{x}{4} + y = 42$.

- **A l'exercice 6** une aide est apportée à toute la classe pour la mise en équation du problème.

Les élèves sentent bien qu'une équation concerne les masses ainsi que les masses volumiques, l'autre les volumes mais ces deux notions étudiées en physique ne semblent pas bien assimilées. La première équation est écrite sans difficulté, pour faire trouver la deuxième le professeur a recours à la proportionnalié.
Le système écrit, l'exercice est résolu aisément.

- **Les exercices 7 et 8** ne présentent pas de difficulté majeure ; les élèves sont invités à réfléchir et à choisir le mode de résolution le mieux adapté.

- **A partir de l'exercice 9,** les équations écrites ne sont plus sous la forme ax + by = c ou y = ax + c :

  - soit il y a des inconnues dans les 2 membres
  - soit les inconnues figurent dans les dénominateurs de quotients.

Il est donc nécessaire de transformer en utilisant des règles de calcul (distributivité, double distributivité, multiplication par un même nombre...) pour se ramener à une forme connue.

L'entraînement au calcul littéral se poursuit et les acquis antérieurs sont réinvestis.

- **Les exercices 9 à 14** à support géométrique sont bien réussis, les propriétés géométriques (parallélogrammes, Thalès, aire) correctement utilisées sans être toujours explicitées. Les élèves complètent leur rédaction à la demande du professeur.

- **Les exercices 11, 13, 17** à support arithmétique ou numérique nécessitent

  * des précisions sur le vocabulaire
    + rapport (rencontré lors d'exercices)
    + division euclidienne (aperçue en 5ème à propos des fractions :

$$\frac{a}{b} = n + \frac{r}{b} \; ; \; o < r < b),$$

* des rappels sur la double distributivité et les simplifications d'écriture.

$a^2 + 2a + b^2 + 2b - 2\,ab$ est transformée en $a^2 + b^2$ (des élèves pensent que $2a + 2b = 2\,ab$).

$(b + 7)^2$ développé en $b^2 + 49$
et $- 2b(b + 7)$ en $-2b^2 + 14b$.

Ces erreurs classiques peuvent s'expliquer par le fait que nous sommes en début d'année scolaire et qu'aucun entraînement n'a encore eu lieu dans ces types de calcul.

- **Les exercices 10 et 15** correspondant à des situations concrètes sont plus difficilement mis en équations. Pour l'exercice 10, cela peut s'expliquer facilement car en 3ème, les élèves n'ont jamais calculé de moyennes avec des notes coefficientées, de plus les notes demandées sont des nombres entiers alors que la résolution conduit à des nombres décimaux qu'il faut arrondir. Pour l'exercice 15, une mise au point est faite en classe entière sous forme d'un tableau.

	maintenant	dans 8 ans	il y a 4 ans
âge de Xavier	x	x + 8	x - 4
âge du Père	y	y + 8	y - 4

Les deux équations sont ensuite écrites et le système résolu correctement.

TEST

Ex 1 :

Résous les systèmes suivants :

$$\begin{cases} s - c = 1{,}5 \\ 2s - 3c = 28 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 3x + 5 \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a - \dfrac{b}{2} = 7 \\ \dfrac{a+b}{3} = 4 \end{cases}$$

Ex 2 :

Avec une somme de 360 F, je peux acheter :

- soit 7 disques et 8 cassettes
- soit 4 disques et 16 cassettes.

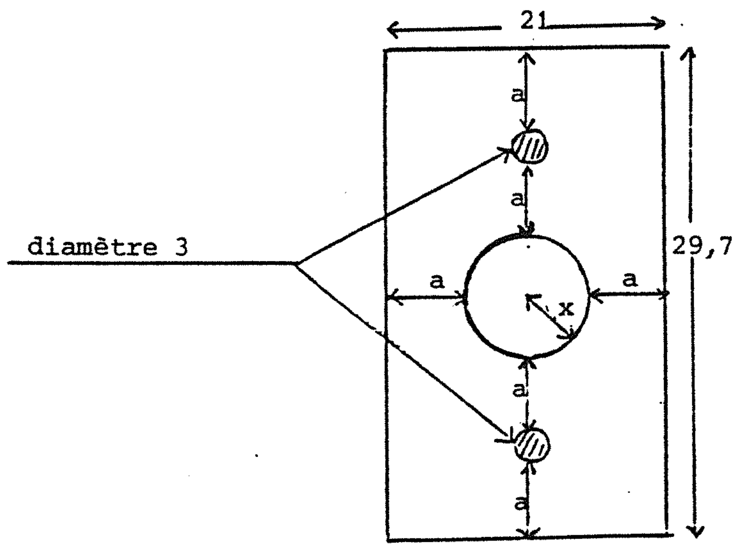
Traduis la situation par un système d'équations et résous-le.

Quel est le prix d'un disque ? Quel est le prix d'une cassette ?

(BEPC Poitiers 1982).

Ex 3 :

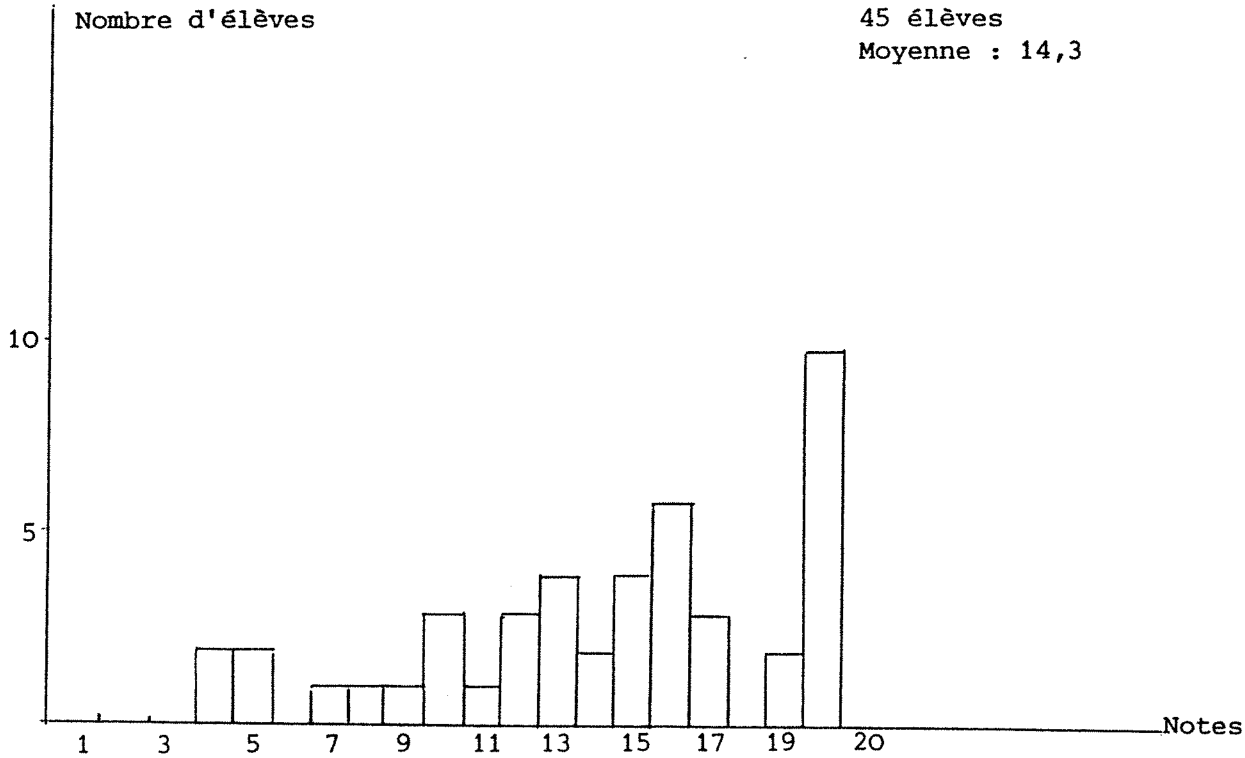
Un beau dessin :



Calcule les valeurs de x et de a.

Barême : ex 1 : 12 (3 × 4)
ex 2 : 4
ex 3 : 4

RESULTATS DU TEST



Parmi les élèves en difficulté, 2 ont été absents pendant une partie du temps consacré à l'étude du thème.

Les exercices concrets sont en général mieux réussis que les exercices systématiques.

Les erreurs rencontrées :

- Erreurs dans l'utilisation des règles

$a = b \; ; \quad a \times c = b \times c$

$\left.\begin{array}{l} a = b \\ c = d \end{array}\right\} \; a + c = b + d$

- Erreurs dans le calcul

+ réduction au même dénominateur
+ distributivité
+ oubli des parenthèses
+ changement de membre
+ passage de (-3) à 3
+ opérations sur des relatifs.

PARTIE II - Equations de droites

Activité 1

Dans un nombre de deux chiffres le chiffre des dizaines est inférieur de 3 à celui des unités. Si on inverse les deux chiffres, on obtient un nombre qui dépasse de 27 le premier.

Trouve ces deux nombres.

Activité 2

Résous le système :

$$\begin{cases} \dfrac{3x - 5}{2} + y = 2 \\ 2x + 5y = (9 - x) + 3y \end{cases}$$

OBJECTIFS

CONTRAT : tous les exercices sont obligatoires.

DUREE : 2 heures.

Ex 1 :

Voici des équations de droites :

(d_1) : $x + 2y - 5 = 0$

(d_2) : $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

(d_3) : $x - y = 0$

(d_4) : $x + y = 0$

(d_5) : $x = 7$

(d_6) : $3y = 3$

(d_7) : $x = 3y - 1$

(d_8) : $y = x - 2$

Pour chacune des droites :

- le point A (1;1) appartient-il à la droite ? Prouve ta réponse
- le point B (-1;1) appartient-il à la droite ? Prouve ta réponse
- le point C (1;2) appartient-il à la droite ? Justifie ta réponse.

Ex 2 :

On donne :

(d_1) : $3x + 2y + 1 = 0$

(d_2) : $y = -\frac{2}{3}x$

(d_3) : $y = x - 4$

a) Trouve pour chacune des droites, l'ordonnée du point d'abscisse 2.

b) Trouve pour chacune des droites, l'abscisse du point d'ordonnée 5.

Ex 3 :

Trouve les coordonnées des points d'intersection des droites suivantes avec les axes du repère :

(d_1) : $y = -2x - 4$

(d_2) : $2{,}5x - 3y - 5 = 0$

(d_3) : $y = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{4}$

(d_4) : $y = \frac{1}{2}x - 5$

(d_5) : $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y - 12 = 0$

(d_6) : $2x = 9$.

Ex 4 :

Dessine les droites dont les équations sont données à l'exercice 1).

Ex 5 :

Trouve une équation de la droite (AB) dans chacun des cas suivants :

a) A $(-1 ; 0)$ B $(3 ; 5)$

b) A $(\frac{1}{2} ; \frac{1}{3})$ B $(2 ; -1)$

c) A $(3 ; -1)$ B $(3 ; \frac{1}{2})$

Ex 6 :

Trouve une équation des droites supports des trois côtés du triangle ABC, connaissant les coordonnées des sommets :

A $(0 ; 1)$, B $(2 ; -3)$, C $(4 ; -3)$.

Ex 7 :

E, F, G, H sont quatre points dans un repère :

E $(1;1)$, F $(-\frac{1}{2} ; 0)$, G $(0 ; \frac{1}{3})$, H $(-2 ; -1)$.

Démontre que les quatre points E, F, G, H sont alignés.

Ex 8 :

a) Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} 4x + 6y = 10 \\ 7x - 2y = 5 \end{cases}$$

b) Comment pourrait-on résoudre graphiquement le problème ?

Ex 9 :

a) Construire les droites (d) et (d') d'équations respectives :

$$y - (x + 3) = 0$$

$$y - 2(x + 1) = 0$$

b) Dans trois ans, Léon Camé sera deux fois plus vieux qu'il ne l'était l'an dernier. Quel âge a Léon Camé ?

c) Comment la question a) te permet-elle de vérifier la réponse à la question b) ?

Ex 10 :

Soit (d) : $y = x + 2$ et (d') : $2x + 3y = 1$.

Calcule les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites.

Activités et synthèse : Durée 2 heures.

CHOIX DES ACTIVITÉS

L'activité 1 est paradoxale : rien ne laisse supposer, à la lecture du texte, que les deux équations obtenues seront équivalentes. Cependant, le nombre des solutions est limité, on peut calculer toutes les valeurs (qui sont toutes entières et comprises entre 0 et 9).

L'activité 2 plus abstraite et systématique fournit une situation où le nombre de solutions est infini.

ACTIVITÉ 1

La mise en équation, bien que difficile, est bien réussie sans aide spécifique par environ un tiers des élèves. Pour les autres, il faut rappeler la différence entre chiffre et nombre.
Un élève a trouvé rapidement par tatônnement 58 et 85, il estime alors avoir terminé son exercice ; le professeur lui propose alors deux autres nombres satisfaisants. L'élève est troublé car pour lui une seule solution devait exister comme dans la plupart des exercices résolus jusqu'à présent.

La mise en équations faite, la résolution est généralement faite par substitution, aucun élève ne voyant que la deuxième équation était la même que la première à un coefficient près.

Le système suivant est alors obtenu $\begin{cases} d = u-3 \\ 0 = 0 \end{cases}$

ce qui paraît énigmatique aux élèves.

Une aide à chaque groupe est nécessaire pour faire découvrir que la 2ème équation est identique à la 1ère (les élèves pensaient avoir fait des erreurs de calcul) et pour les inciter à chercher si de tels couples existent.

Ces couples sont représentés sur un graphique après suggestion du professeur. L'alignement des points est remarqué.

ACTIVITÉ 2

Cette fois les élèves cherchent à simplifier les équations pour voir si la situation est identique à celle de l'activité 1 (deux fois la même équation).

Des valeurs sont recherchées, mais les élèves sont conscients du fait qu'ils ne pourront pas obtenir toutes les solutions. Les solutions sont alors représentées sur un graphique.

Pour calculer les couples de valeurs (x, y) un grand nombre d'élèves a gardé l'écriture $3x + 2y = 9$. Le professeur montre qu'en transformant cette égalité, on peut calculer plus rapidement $y = \frac{9-3x}{2}$ en se fixant x, ou $x = \frac{9-2y}{3}$ en se fixant y.

Pour les élèves en difficulté, cette étape n'est pas simple à comprendre: lors de la résolution x et y étaient des inconnues. Ensuite en fixant x (ou y) et en exprimant y (ou x) en fonction de x (ou y) le statut de la lettre change, x (ou y) devient variable (le changement de statut de la lettre est difficile).
Lors de la synthèse de ces deux activités, les résultats et remarques sont énoncés par les élèves :

- Pour l'activité 1, les couples solutions sont des couples d'entiers inférieurs à 9 car ils représentent des chiffres. Les points qui les représentent sont alignés.

- Pour l'activité 2, il y a une infinité de couples solutions. Les points qui les représentent sont alignés sur une droite.

Le professeur valide en disant que les points qui ont des coordonnées (x, y) qui vérifient $y = x - 3$ (ou $3x + 2y + 9 = 0$) sont alignés sur une droite, $y = x - 3$ (par exemple) est alors appelé une équation de cette droite.

Le problème réciproque est alors posé : "une droite tracée dans un repère, a-t-elle une équation ?"

Pour cela, le professeur montre au rétroprojecteur une droite et un repère tracés sur un quadrillage. Les élèves essaient de conjecturer une relation. Pour cela ils relèvent les coordonnées de points de la droite qu'ils notent dans un tableau.
Une aide leur est nécessaire. Trois autres droites sont alors projetées (celles d'équations $y = 4$, $x = -3$ et $y = -2x$) et les équations sont trouvées. Pour la droite d'équation $y = -2x$ le lien est fait avec la fonction linéaire et la proportionnalité entre les coordonnées des points.
Le professeur valide alors : à toute droite tracée dans un repère on peut associer une équation de la forme $x + dy = e$, il insiste sur les différentes équations ($y = 2x - 3$, $y - 2x + 3 = 0$, $x = \frac{y + 3}{2}$ ....) qui peuvent représenter une même droite.

Ce qui a été noté sur le répertoire.

D Equations de droites

- Les solutions d'une équation de la forme $ax + by = c$ (a, b, c sont des nombres) peuvent être représentées par une droite. (x et y représentent alors les coordonnées d'un point).

- Lorsque l'on a une droite dans un repère, les coordonnées (x, y) des points sont liées par une relation appelée équation de la droite.

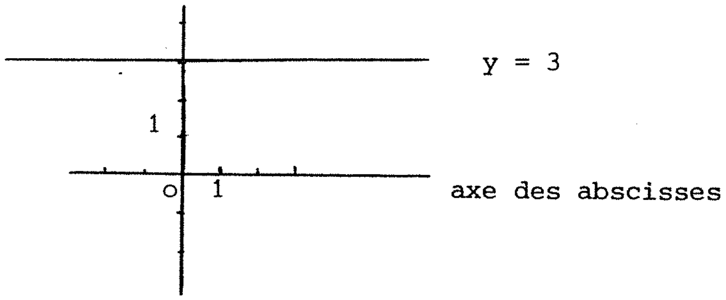
On peut avoir différentes écritures pour une équation de droite. Par exemple $2x + 3y = 9$ s'écrit

$$2x + 3y - 9 = 0$$
$$y = -\frac{2}{3}x + 3$$
$$x = -\frac{3}{2}y + \frac{9}{2}$$

Cas particuliers :

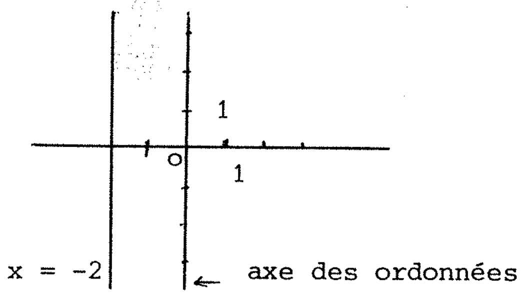
* $y = m$ est l'équation d'une droite parallèle à l'axe des abscisses.

ex : $y = 3$



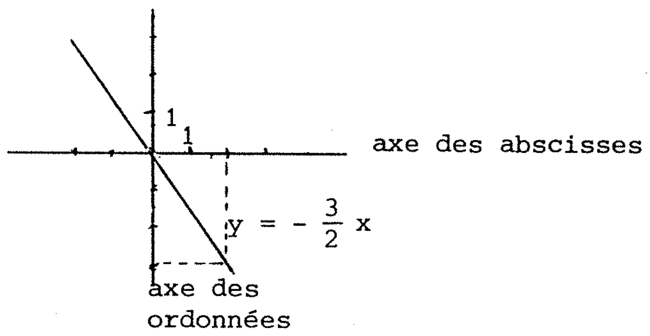
* $x = p$ est l'équation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

ex : $x = -2$



* $y = ax$ est l'équation d'une droite qui passe par l'origine du repère. Il y a proportionnalité entre abscisse et ordonnée des points de la droite.

ex : $y = -\frac{3}{2}x$



Les objectifs sont énoncés par les élèves et notés sur le dossier.

Je dois savoir :

- *trouver une équation d'une droite connaissant les coordonnées de 2 points de cette droite,*
- *tracer une droite dont on connaît une équation,*
- *dire si un point est sur une droite,*
- *donner les coordonnées de points d'une droite.*

EXERCICES

Durée : 5 heures.

Pour les exercices de ce thème, les élèves éprouvent des difficultés de plusieurs types:

- difficultés liées à la compréhension même de ce qu'est une équation de droite. Il n'est pas évident, pour un élève de 3ème, de concevoir qu'une équation de droite est une relation entre les coordonnées d'un point quelconque de cette droite,

- difficultés pour rédiger les exercices dues en majorité à la compréhension trop superficielle de la notion même. Une aide est donc nécessaire pour la rédaction,

- difficultés liées au statut de la lettre. A l'exercice 5, chaque équation de droite doit être écrite sous la forme $y = ax + b$ où les inconnues sont a et b (et non, x et y comme on vient de le rencontrer dans les systèmes d'équations) alors qu'aux exercices 8, 9, 10 les inconnues sont x et y. Les élèves doivent donc "jongler" avec les différents statuts de la lettre : inconnues, paramètres... sans que l'on puisse le leur expliciter complètement. Les programmes sont peut-être ici trop prétentieux pour des élèves de 3ème. Pour la majorité d'entre eux, on ne peut obtenir que des savoir-faire non fondés sur une réelle compréhension de la notion,

- difficultés liées au repérage, à la lecture sur un dessin :

* confusion entre abscisses et ordonnées.
* problème de la validité des coordonnées lues sur un dessin pour un point d'intersection de deux droites. Le professeur doit insister sur l'imprécision d'un dessin et le fait que l'on n'est pas sûr de ces coordonnées (une grande cohérence avec l'apprentissage de la démonstration doit être assurée),

- difficultés liées aux cas particuliers. Pour déterminer une équation du type $y = n$ ou $x = p$, on ne peut utiliser les mêmes méthodes que pour une équation du type $y = ax + b$ (seul l'examen des coordonnées des points permet de trouver cette équation). Le manque de méthode générale gêne les élèves,

- difficultés liées au calcul littéral encore mal maîtrisé pour certains.

TEST

Ex 1 :

Soient les équations de deux droites (D_1) et (D_2) :

(D_1) : $y = -3x + 1$
(D_2) : $y = \frac{1}{2} x - \frac{4}{3}$

a) Trace ces deux droites en précisant ta méthode.
b) Calcule les coordonnées du point d'intersection des 2 droites.

Ex 2 :

Une droite a pour équation : $4y + 10 = 0$.
Trace-la et explique.
Trace la droite d'équation : $y = -2x$. Explique.

Ex 3 :

Une droite passe par les points A $(\frac{1}{2} ; -1)$ et B $(\frac{1}{3} ; -0{,}5)$.
Trouve une équation de la droite (AB).

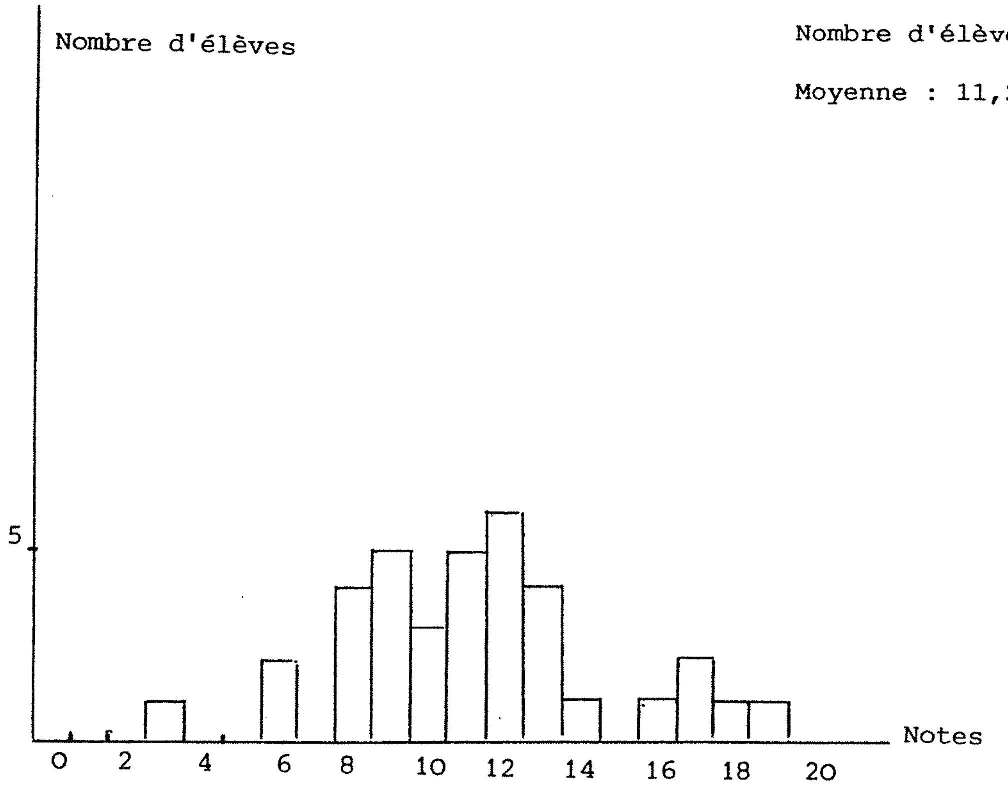
On appelle E le point d'intersection de la droite (AB) avec l'axe des abscisses et F celui de (AB) avec l'axe des ordonnées.
Calcule les coordonnées des points E et F.

Ex 4 :

Une droite a pour équation : $y = 7x + b$ et passe par le point R(2 ; 1).
Trouve b.

Barème : ex 1 : 7 points
ex 2 : 3 points
ex 3 : 8 points
ex 4 : 2 points

RESULTATS DU TEST



Nombre d'élèves : 36

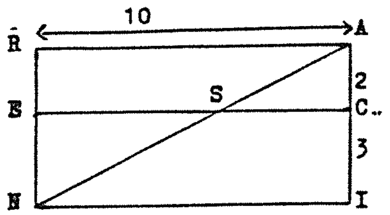
Moyenne : 11,2

Les résultats du test sont très moyens comme le laissaient prévoir les difficultés rencontrées lors des exercices. Cette partie sera reprise lors des dominantes "gestion de données" et "résolution de problème".

TRAVAUX NUMERIQUES (1)

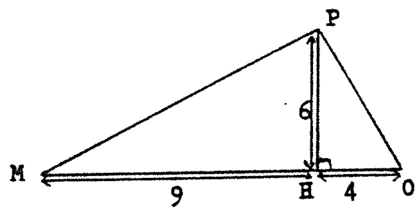
Calcul sur les racines

ACTIVITE 1



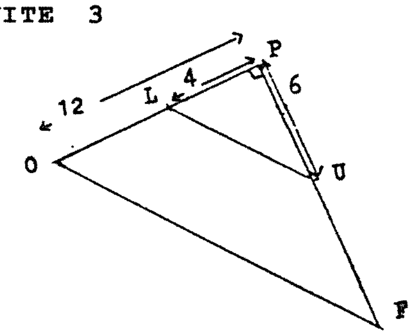
RAIN est un rectangle, (EC) est parallèle à (IN).
Calcule la valeur exacte de SN.

ACTIVITE 2



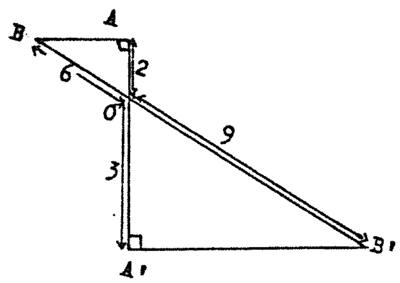
Le triangle POM est-il rectangle ?
Prouve-le.
Calcule son aire de plusieurs façons.

ACTIVITE 3



Les droites (LU) et (OF) sont parallèles.
Calcule FO.

ACTIVITE 4



Donne plusieurs méthodes pour calculer $\frac{AB}{A'B'}$

OBJECTIFS

CONTRAT : tous les exercices sont obligatoires.

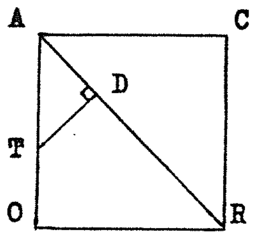
DUREE : 7 heures en classe.

Ex 1 :

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifie.

a) La moitié de $\sqrt{18}$ est $\sqrt{9}$.
b) Le triple de $\sqrt{5}$ est $\sqrt{45}$.
c) Le produit de 4 et $\sqrt{2}$ est $\sqrt{32}$.
d) La racine de $\frac{3}{10}$ est $\frac{\sqrt{3}}{10}$.
e) $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{10}$.
f) Le double du produit de $\sqrt{3}$ et $\sqrt{7}$ est $\sqrt{84}$.
g) $\sqrt{32} - \sqrt{2} = \sqrt{18}$
h) Le carré de $1 + \sqrt{2}$ est $3 + 2\sqrt{2}$.
i) L'inverse de $\sqrt{2} - 1$ est $\sqrt{2} + 1$.

Ex 2 :



ACRO est un carré de côté 1, DR = 1 et (DT) est perpendiculaire à (AR). Calcule la valeur exacte et une valeur approchée de l'aire de DAT.

Ex 3 :

a) Parmi les nombres suivants, cite ceux qui sont égaux, justifie.

$$\frac{1}{\sqrt{7}} \; ; \; \frac{7}{\sqrt{7}} \; ; \; \sqrt{\frac{1}{7}} \; ; \; \frac{2}{\sqrt{28}} \; ; \; \sqrt{7} \; ; \; \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{21}} \; ; \; \frac{\sqrt{7}}{7}$$

b) Parmi les nombres suivants, cite ceux qui sont égaux, justifie.

$$(\sqrt{3} + \sqrt{5})\ (\sqrt{3} - \sqrt{5}) \; ; \; (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 \; ; \; -2 \; ; \; 2\sqrt{3}\ (\sqrt{3} + \sqrt{5}) + 2$$

Ex 4 :

Voici comment Stevin (XVIème siècle) s'y prenait pour calculer

$(\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2})^2$

Explique sa méthode et justifie son résultat.

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\quad \sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2} \\
\qquad\qquad\quad \sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2} \\
\hline
\qquad\qquad\quad \sqrt{10} - \sqrt{6} + 2 \\
\quad - \sqrt{15} + 3 - \sqrt{6} \\
5 - \sqrt{15} + \sqrt{10} \\
\hline
10 - \sqrt{60} + \sqrt{40} - \sqrt{24}
\end{array}
$$

Ex 5 :

Héron d'Alexandrie a vécu entre 75 et 150 après JC. Dans son livre intitulé "les métriques", on trouve la formule de l'aire d'un triangle quelconque :

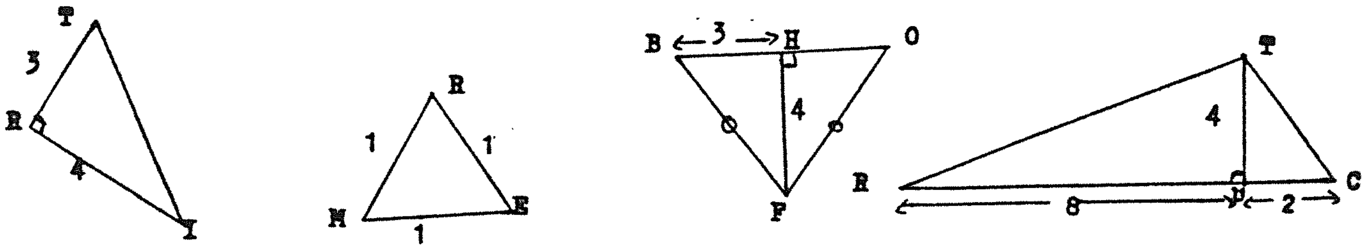
$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ où A est l'aire
a, b, c sont les longueurs des 3 côtés,
p est le demi-périmètre du triangle.

En fait, cette formule est certainement due à Archimède (287-212 avant J.C.)

a) Vérification, par la mesure, de la vraisemblance de la formule :

Choisis 3 nombres, construis un triangle ayant ces trois nombres pour côtés.
Calcule l'aire de ce triangle en utilisant la formule habituelle et en utilisant la formule de Héron.

b) Prouve que cette formule est vraie pour les 4 cas particuliers suivants :



En fait, cette formule est toujours vraie.

Ex 6 :

Montre que $\sqrt{5} - 1$ est une solution de l'équation $t^2 + 2t - 4 = 0$.

Ex 7 :

Ecris chacun des nombres suivants sans radical ou sous la forme a $\sqrt{b}$ avec b entier le plus petit possible (a peut être entier ou décimal non entier ou une fraction non décimale).

a) $\sqrt{8} \times \sqrt{2} =$ $\qquad$ $\sqrt{45^2 \times 22^2} =$ $\qquad$ $\sqrt{12,5} =$

$\sqrt{7} \times \sqrt{12} =$ $\qquad$ $\sqrt{50} =$ $\qquad$ $\dfrac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}} =$

$\sqrt{10} \times \sqrt{1\ 000} =$ $\qquad$ $\sqrt{112} =$ $\qquad$ $\dfrac{\sqrt{0,4}}{\sqrt{10}} =$

$\sqrt{18} \times \sqrt{8} =$ $\qquad$ $\sqrt{0,25} =$ $\qquad$ $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} =$

$\sqrt{21} \times \sqrt{84} =$ $\qquad$ $2\sqrt{27} =$ $\qquad$ $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} =$

$\sqrt{48} \times \sqrt{75} =$ $\qquad$ $5\sqrt{72} =$

$\sqrt{49^2} =$ $\qquad$ $\sqrt{0,08} =$

$\sqrt{144} =$ $\qquad$ $\sqrt{0,18} =$

$\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{25}} =$ $\qquad$ $\dfrac{\sqrt{98}}{\sqrt{75}} =$

b) $\sqrt{2} - \sqrt{18} + \sqrt{50} =$

$\sqrt{20} - 2\sqrt{5} + \sqrt{45} =$

$\sqrt{28} - \sqrt{63} + \sqrt{175} =$

$2\sqrt{27} - 4\sqrt{9} - 3\sqrt{12} + 4\sqrt{25} =$

Ex 8 :

a) Factorise : $\sqrt{3} - \sqrt{6} + \sqrt{3} + 2 + 2\sqrt{6} + 4\sqrt{3} =$

$2\sqrt{15} - \sqrt{20} =$

b) Prouve que : $\dfrac{3\sqrt{2} + \sqrt{12}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \sqrt{6}$.

Ex 9 :

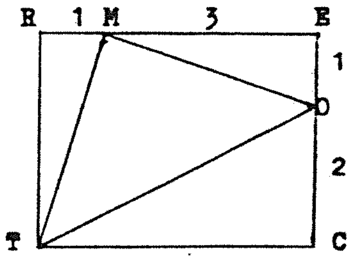
Développe et réduis les produits suivants :

$(3 + \sqrt{2})\ (3 - \sqrt{2}) =$
$(\sqrt{3} + \sqrt{5})\ (\sqrt{3} - \sqrt{5}) =$
$(\sqrt{2} - \sqrt{3} + 1)\ (\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1) =$
$(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2 =$
$(2\sqrt{3} - \sqrt{5})^2 =$

Ex 10 :

Comment trouver, sans calculatrice, deux nombres entiers a et b tels que le double de leur produit soit $\sqrt{196}$.

Ex 11 :



RECT est un rectangle.
a) Calcule l'aire et le périmètre de TOM
b) Pour le périmètre, Jean trouve $2\sqrt{5}\ (\sqrt{2} + 1)$ et Pierre trouve $\sqrt{10}\ (2 + \sqrt{2})$.
Ont-ils le même résultat ?
Et toi, as-tu le même résultat ?

Ex 12 :

Extraits de LA GEOMETRIE de Nicolas Chuquet (1484).

a) Calcul du diamètre ED du cercle inscrit dans un triangle équilatéral ABC dont le côté est 12.
Chuquet trouve ED $= \frac{2}{3}\sqrt{108} = \sqrt{48}$.
Démontre que l'égalité est vraie. (On ne demande pas de calculer ED mais seulement de prouver que l'égalité est vraie).

b) Côtés d'un rectangle PCGK inscrit dans un cercle de diamètre 12 et dont la largeur est les deux tiers de la longueur.

- Trouve les dimensions de ce rectangle.
- Chuquet trouve pour la longueur : KG $= \frac{3}{2}\sqrt{44 + \frac{4}{13}} = \sqrt{99 + \frac{9}{13}}$.
  Démontre que cette égalité est vraie.
- Trouves-tu le même résultat que Chuquet ?

c) Diamètre BG du cercle circonscrit à un triangle équilatéral ABC dont le côté mesure 8.

Chuquet trouve : $BG = \sqrt{5 + \frac{1}{3}} + \sqrt{48} = \sqrt{85 + \frac{1}{3}}$

Démontre que l'égalité est vraie.
Quelle autre écriture proposes-tu pour la réponse ?

Ex 13 :

a) Quels sont les nombres dont le carré est 10 ?
b) Résoudre $y^2 = -1$
c) Trouve les nombres t tels que $t^2 = 16$
d) Peux-tu trouver des nombres dont le carré est 732 ?
e) Le carré du nombre auquel je pense est 77. Quel est-ce nombre ?
f) Le carré d'un nombre est $\sqrt{25}$. Quel est ce nombre ?
g) Résoudre $a^2 = 0$.
h) Résoudre $-100 = b^2$
i) Pour quelles valeurs de r a-t-on $r^2 = 17$?
j) Résoudre $x^2 = \sqrt{(-10)^2}$.

Ex 14 :

Parmi les écritures suivantes, lesquelles sont incorrectes et pourquoi ?

a) $\sqrt{-34,8}$
b) $\sqrt{6}$
c) $-\sqrt{56}$
d) $\sqrt{-81}$
e) $\sqrt{(6 - 8)^2}$
f) $\sqrt{-4}$
g) $\sqrt{(-4)^3}$
h) $\sqrt{0}$
i) $\sqrt{(-5)^4}$

Ex 15 :

Résous les équations :

$u^2 = 4$	$x^2 = 0$	$u^2 = -9$	$\sqrt{x^2} = 5$
$t^2 = -25$	$v^2 = 0,16$	$x = \sqrt{3^2}$	$v^2 = \frac{1}{9}$
$y^2 = 4/9$	$x^2 = -2,25$	$y^2 = \frac{4}{25}$	$(\sqrt{a})^2 = 3$
$b^2 = 5$	$a^2 = 1/2$	$\sqrt{m} = \frac{2}{3}$	$\sqrt{x} - 2 = 2$

$y^2 + 4 = 0$

$(x + 1)^2 = 4$

$t^2 - 3 = 0$

AUTO-TEST

Ex 1 :

Calcule la mesure de la diagonale FK du losange FGKP tel que FG = 6 et GP = 6.

Chuquet donne comme réponse : FK = $\sqrt{27} + \sqrt{27} = \sqrt{108}$.
Justifie ces deux égalités.

Ex 2 :

Même exercice que le n° 7 avec les nombres suivants :

$\sqrt{3} \times \sqrt{12}$	$\sqrt{108}$	$5\sqrt{45}$
$\sqrt{80} \times \sqrt{5}$	$\sqrt{75}$	$\sqrt{0,32}$
$\sqrt{3\ 136}$	$\sqrt{100}$	$\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$
$\sqrt{54}$	$2\sqrt{63}$	$\sqrt{\dfrac{3}{4}}$

Ex 3 :

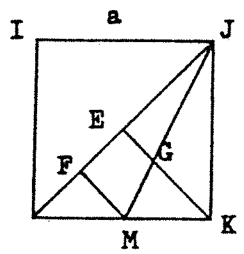
Développe et réduis si possible :

$(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})\ (3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$

$(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2$

DEVOIR

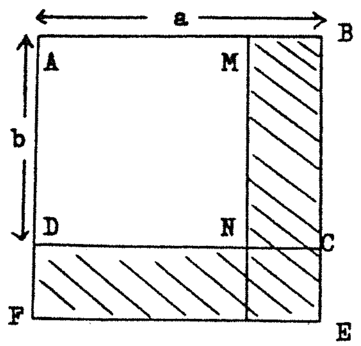
Ex 1 :



IJKL est un carré de côté a, M est le milieu de [LK] et (MF) est parallèle à (EK). E est le point d'intersection des diagonales du carré.
Calcule en fonction de a : JL ; EJ; EF ; FM ; EG ; JM.
Justifie tous tes calculs.

Ex 2 :

Sur la figure ci-dessous, ABEF et AMND sont des carrés.
On pose AB = a et AD = b.



I) Exprimer en fonction de a et b :

1 - La longueur MB
2 - Le périmètre du rectangle ABCD
3 - L'aire du carré ABEF
4 - L'aire du carré AMND
5 - L'aire de la surface hachurée
6 - Le périmètre de la surface hachurée.

II) Calculer les valeurs numériques des expressions : $a - b$; $2(a + b)$; a^2 ; b^2 ; $(a + b)(a - b)$ dans chacun des cas suivants :

a) $a = \frac{5}{4}$ et $b = \frac{7}{10}$

b) $a = \sqrt{45}$ et $b = 2\sqrt{5} - 1$

III) Sachant que $b = 12\sqrt{2}$, déterminer la valeur de a pour que l'aire du carré AMND soit égale à la moitié de l'aire du carré ABEF.
(Brevet Strasbourg. Juin 1987).

CHOIX DIDACTIQUES

Cette partie du programme vise à mettre en place les règles de calcul sur les racines :

- $(\sqrt{a})^2 = a \qquad \sqrt{a^2} = a \ (a \geq 0)$ déjà vues en quatrième.

- $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\,\sqrt{b} \quad (a > 0, \ b > 0)$

- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a > 0 \ , \ b > 0)$

- $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b} \quad (a > 0 \ , \ b > 0)$.

Ces règles doivent se mettre en place par rapport aux "non-règles" :

- $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a + b}$

- $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a - b}$

- $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \neq a + b$

- ....

Le calcul sur les racines apparaît **naturellement** sur des **situations géométriques** utilisant l'énoncé de Thalès et (ou) celui de Pythagore : selon les résolutions adoptées, les résultats sont écrits différemment, se pose alors le problème de montrer algébriquement que ces deux écritures représentent le même nombre, puis de généraliser afin d'obtenir des règles de calcul.

OBJECTIFS

- Savoir transformer des écritures comportant des radicaux en utilisant les règles explicitées par le programme.

- Savoir résoudre $x^2 = a$, a positif ou négatif et les équations simples s'y ramenant :

$x^2 + a = 0 \ ; \ x^2 - a = 0$.

Objectifs secondaires

- Savoir utiliser les énoncés de Thalès et Pythagore.
- Savoir prouver que des égalités sont vraies.
- Savoir démontrer des propriétés de configurations géométriques.
- Savoir résoudre des équations.

ANALYSE DE LA FICHE ELEVE

Choix des activités

Leur but est de faire découvrir les règles du calcul sur les racines tout en posant le problème des non-règles. Selon la façon de procéder les écritures obtenues pour le résultat sont différentes.
La première activité pose tous les problèmes mais à ce niveau on ne peut rien conclure.

La deuxième activité conduit à l'égalité $\sqrt{a}\,\sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

La troisième activité conduit à $\sqrt{a^2\,b} = a\,\sqrt{b}$.

La dernière nous conduit à $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Les trois règles conjecturées par un exemple sont validées avec le calcul littéral.

L'activité 1 est alors reprise pour démontrer algébriquement le résultat.

Choix des exercices

1) Nous avons varié les supports :

* Géométriques pour revoir,

 . Les énoncés : - de Thalès
 - de Pythagore et sa réciproque
 - sur les quadrilatères

 . des calculs d'aires, de périmètre, d'angles.

* Historiques pour :

 . Calculer : Stevin - Chuquet
 . Calculer des aires de triangles (Héron d'Alexandrie).
 . Prouver (Héron d'Alexandrie, Chuquet).

* Littéraux et numériques pour :

 . Utiliser le calcul littéral comme base de calcul numérique.
 . Mettre en équation un problème et le résoudre.
 . Transformer des écritures, prouver.

2) Les exercices sont choisis pour nous **permettre de poursuivre.**

* L'entraînement à la démonstration tant en géométrie qu'en calcul (questions du type : montre que, prouve que ....).

* La distinction entre valeur exacte et valeur approchée.

DEROULEMENT ET COMMENTAIRES

ACTIVITES (2h 30 mn).

ACTIVITE 1

La démonstration qui nécessite l'utilisation des énoncés de Thalès, de Pythagore, du rectangle est bien réalisée.

Les élèves ont utilisé cinq procédures.

1ère procédure

. Calcul de AN dans ANI (énoncé de Pythagore)
. Calcul de SC dans ANI (énoncé de Thalès)
. Calcul de AS dans ASC (énoncé de Pythagore)
. Calcul de SN $= AN - AS$
$= \sqrt{125} - \sqrt{20}$

2ème procédure

. Calcul de SC dans ANI (énoncé de Thalès)
. Calcul de AN dans ANI (énoncé de Pythagore)
. Calcul de AS dans ANI (énoncé de Thalès)
. Calcul de SN $= AN - AS$
$= \sqrt{125} - 0{,}4\sqrt{125}$

3ème procédure

. Calcul de SC dans ANI (énoncé de Thalès)
. Calcul de ES: ES=EC-SC
. Calcul de SN dans ESN (énoncé de Pythagore)
$SN = \sqrt{45}$

4ème procédure

. Calcul de AN dans ANI (énoncé de Pythagore)
. Calcul de AS dans ANI (énoncé de Thalès)
. Calcul de SN $= AN - AS$
$= \frac{3}{5}\sqrt{125}$

5ème procédure

. Calcul de AN dans ANI (énoncé de Pythagore)
. Utilisation de Thalès dans ESN et SAC
$$\frac{SN}{SA} = \frac{NE}{AC}$$

. Ecriture d'un système et résolution de ce système.

$$AN = AS + SN$$
$$\frac{SN}{SA} = \frac{3}{2}$$

$$SA = \sqrt{125} - SN \qquad\qquad SA = \sqrt{125} - SN$$

$$\frac{SN}{\sqrt{125-SN}} = \frac{3}{2} \qquad \ldots \qquad SN = \frac{3}{5}\sqrt{125} = 0{,}6\sqrt{125}$$

Les résultats trouvés par les élèves sont écrits au tableau.

$$SN = \sqrt{125} - \sqrt{20}$$

$$SN = \sqrt{45}$$

$$SN = \sqrt{125} - 0{,}4\sqrt{125}$$

$$SN = \frac{3}{5}\sqrt{125}$$

$$SN = 0{,}6\sqrt{125}$$

Peut-on savoir par le calcul si ces nombres sont les mêmes ? Qu'en pense la calculatrice ?

. Quelques élèves veulent transformer $\sqrt{125} - \sqrt{20}$ en $\sqrt{105}$, le professeur propose de vérifier cette règle de calcul à l'aide de $\sqrt{25} - \sqrt{16}$ et $\sqrt{9}$. Cette règle est alors écartée.

. On propose ensuite de vérifier les résultats à l'aide de la calculatrice.

La partie décimale affichée par la calculatrice pour $\sqrt{125} - \sqrt{20}$ est la même que celle donnée pour $\sqrt{45}$.

Les élèves possèdent des calculatrices de modèles différents, l'une d'elle donne pour $\sqrt{45}$, 7 chiffres : 6,708204 alors qu'habituellement elle affiche 8 chiffres, l'élève conclut que la valeur donnée est le résultat exact de $\sqrt{45}$, de plus en élevant le nombre affiché au carré, on retrouve 45 !

Le professeur demande alors de calculer

45 - (nombre affiché)^2, la calculatrice ne donne pas 0 ! puis

$\sqrt{125} - \sqrt{20} - \sqrt{45}$ ou $\sqrt{45} - \frac{3}{5}\sqrt{125}$, les résultats obtenus changent suivant le modèle de calculatrice mais on n'obtient jamais 0 !!.

Cette vérification à l'aide de la calculatrice a permis :

- de préciser que la calculatrice calcule plus de chiffres qu'elle n'en affiche,
- de revenir sur valeur exacte et valeur approchée,
- de préciser une nouvelle fois l'affichage 5 - 10 donné par la calculatrice (puissances négatives de 10),
- de montrer que toutes les calculatrices ne donnent pas le même résultat,
- de constater que l'on ne peut pas conclure sur l'égalité des nombres (la différence n'est pas nulle) avec la calculatrice.

Certains élèves qui faisaient une totale confiance à leur calculatrice sont déstabilisés momentanément.

A ce moment de la recherche, le professeur laisse planer le doute sur l'égalité des résultats trouvés et propose aux élèves la recherche des activités suivantes.

ACTIVITE 2

L'utilisation de l'énoncé de Pythagore pour calculer PM et PO ainsi que l'utilisation de la réciproque pour prouver que PMO est rectangle en P est bien faite.

Le calcul de l'aire du triangle PMO réalisé de deux façons conduit à

$$\frac{\sqrt{52} \times \sqrt{117}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{78}{2}$$

Les élèves ne doutent pas que les deux nombres sont égaux car ils correspondent à l'aire du triangle

$$78 \overset{?}{=} \sqrt{52} \times \sqrt{117}.$$

Avec la calculatrice, les élèves essaient $\sqrt{52 \times 117}$ ce qui donne 78, puis recommencent avec des nombres "connus" $\sqrt{4} \times \sqrt{25} = 10$; $\sqrt{4 \times 25} = \sqrt{100} = 10$.

Cette propriété est-elle toujours vraie ? on se propose alors de prouver l'égalité dans le cas général. Une méthode est donnée par le professeur : "pour comparer deux nombres positifs, il suffit de comparer leurs carrés" (les élèves savent depuis la quatrième que $(\sqrt{a})^2 = a$).

$$(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 \qquad (\sqrt{ab})^2 = ab.$$

$$= a \times b$$
$$= ab$$

La règle $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ prouvée est alors énoncée.

ACTIVITE 3

Pour calculer FO, les énoncés de Pythagore et de Thalès sont nécessaires, selon l'ordre dans lequel on les utilise les résultats obtenus varient

$$\sqrt{468} \quad \text{et} \quad 3\sqrt{52}.$$

Pour comparer, les élèves comparent les carrés.
La démonstration dans le cas général est faite avec la règle précédente et bien réussie :

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}.$$

Cette règle est ensuite utilisée sur quelques cas particuliers, pour permettre aux élèves de bien se l'approprier et de se remémorer les carrés des premiers nombres entiers.

A la fin de ces deux activités, un retour est fait sur les résultats trouvés lors de l'activité 1.

A l'aide des règles trouvées, les élèves sont en mesure de comparer
$\sqrt{45}$; $\sqrt{125} - \sqrt{20}$; $\sqrt{125} - 0{,}4\sqrt{125}$; $\frac{3}{5}\sqrt{125}$ et $0{,}6\sqrt{125}$.

Ce travail, bien réussi, le professeur fait remarquer qu'une racine carrée se factorise comme une "lettre"

$$\sqrt{125} - 0{,}4\sqrt{125} = \sqrt{125} \times (1 - 0{,}4) = 0{,}6\sqrt{125}.$$

ACTIVITE 4

$\frac{AB}{A'B'}$ est calculé soit directement par l'utilisation de l'énoncé de Thalès, soit par calcul préalable des longueurs AB et A'B' dans deux triangles rectangles suivi du calcul de leur rapport

$$\frac{2}{3} = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{72}}$$

La comparaison des résultats est faite par les élèves à l'aide des règles vues aux activités précédentes ou par élévation au carré.

La démonstration dans le cas général est bien réussie et la règle $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ est énoncée.

Ce qui est noté dans le répertoire

R Racines carrées : a et b sont des nombres positifs

$(\sqrt{a})^2 = a$

$\sqrt{a^2} = a$

$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ $(b \neq 0)$

$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a + b}$

Les objectifs énoncés par les élèves sont notés sur le dossier.

"Je dois savoir calculer en utilisant les règles sur les racines carrées".

Le contrat est précisé aux élèves :

- tous les exercices sont obligatoires
- utiliser le moins possible la calculatrice.

EXERCICES : Durée 9 h.

Exercice 1

Objectifs : - voir si la notion $\sqrt{\ }$ est comprise
- utiliser les règles pour transformer
- comparer des nombres
- changer de langage (français $\rightarrow$ mathématiques).

Quelques difficultés rencontrées par les élèves :

e) $\sqrt{2} + \sqrt{8}$ comment calculer une somme de $\sqrt{\ }$, nous n'avons pas de règles !

Ceci permet de faire un retour sur la transformation de $\sqrt{8}$ et la factorisation lorsque le facteur commun est une racine carrée.

h) Le carré $(1 + \sqrt{2})^2$ est développé en $(1)^2 + (\sqrt{2})^2$, par quelques élèves. Il est nécessaire de revenir au sens du carré pour corriger les erreurs. Il est à noter qu'à cette époque de l'année, nous n'avons pas vu les identités remarquables et que le calcul se fait par un double développement.

i) Le problème posé est lié à la notion d'inverse. Les élèves se reportent à leur répertoire ; l'objectif ici, n'est pas de montrer que $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1$ en rendant rationnel $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ mais de montrer que

$(\sqrt{2} + 1)\ (\sqrt{2} - 1) = 1$ (notion d'inverse).

Exercice 2

Objectif : - Poursuivre l'entraînement à la démonstration (utilisation d'énoncés : carré, Pythagore, triangle isocèle rectangle) lien entre la géométrie et le numérique.
- Calculer des aires.

Exercice 3

Objectif : - Transformer des écritures en utilisant les règles sur les racines (surtout $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$) et les développements.
- Comparer des nombres.

Exercice 4

Objectif : - Utiliser un support historique.
- Comparer des écritures.

Quelques élèves ont calculé le carré de la somme en développant, d'autres ont calculé la dernière ligne de la multiplication de Stevin en ajoutant, puis tous ont comparé leur résultat avec celui donné par Stevin.

Il semble que le passage $2\sqrt{15}$ à $\sqrt{60}$ soit plus naturel que le passage inverse $\sqrt{60}$ à $2\sqrt{15}$.

Exercice 5

Objectif :
- Utiliser un support historique.
- Calculer des aires de triangles.
- S'entraîner à la démonstration (droites dans un triangle, Pythagore).
- Calculer avec des racines carrées.

Le dernier exercice de la partie b pose problème et n'a été réalisé que dans une des deux classes.

- Le calcul du périmètre conduit à $\sqrt{80} + \sqrt{20} + 10$, les élèves ne pensent pas à transformer $\sqrt{80}$ et $\sqrt{20}$ pour regrouper.

- Le calcul de l'aire est long, les élèves ne connaissant pas encore les produits remarquables, il faut procéder par étapes successives pour calculer :

$(3\sqrt{5} + 5) \quad (3\sqrt{5} - 5) \quad (5 - \sqrt{5}) \quad (5 + \sqrt{5})$.

$(3\sqrt{5}) \times (3\sqrt{5})$ est souvent donné égal à $9\sqrt{5}$ c'est-à-dire $3 \times 3\sqrt{5}$.

Exercice 6

Objectifs :
- Utiliser le calcul littéral, comme support au calcul numérique.
- Prouver par des calculs.

Une précision est nécessaire pour la compréhension de l'énoncé : "solution de l'équation".

Exercices 7 et 9

Objectifs :
- Exercices d'entraînement au calcul sur les racines carrées (bonne connaissance des règles et leur appropriation).

- Entraînement au développement : carré de sommes, produit de sommes ou de différences.

Exercice 8

Objectifs :
- Transformer des écritures
- Factoriser une racine carrée
- Initier à la preuve en calcul : question "prouve que"....

* $\dfrac{3\sqrt{2} + \sqrt{12}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ écrit par quelques élèves $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}}$ ou $\dfrac{3 + \sqrt{12}}{\sqrt{3}}$

(simplification par $\sqrt{2}$). Cette erreur, qui n'apparaissait pas sur les nombres, laisse à penser que la racine carrée n'a pas, pour tous, le statut de nombre !

* Le calcul se fait en 2 temps :

- "rentrer 3 sous la racine" $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$
- décomposer $\sqrt{18}$ en $\sqrt{6} \times \sqrt{3}$, $\sqrt{12}$ en $\sqrt{6} \times \sqrt{2}$ et factoriser $\sqrt{6}$.

Ces 2 étapes ne sont pas réalisées spontanément par tous les élèves.

Exercice 10
Objectif : - Mettre en équation un problème et le résoudre.

Les élèves ont été gênés dans cet exercice par le fait d'avoir deux lettres et une seule égalité $ab = 7$!

Exercice 11
Objectif : - Entraînement à la démonstration (utilisation de l'énoncé de Pythagore et de sa réciproque) tout en calculant avec des racines carrées.

Pour calculer l'aire du triangle OMT deux démarches apparaissent :

- calculer l'aire du rectangle, enlever l'aire des 3 triangles rectangles,

ou

- montrer que OMT est rectangle en M et calculer son aire par $\frac{1}{2}$ rectangle.

Cet exercice est bien réussi, et bien rédigé par les élèves.

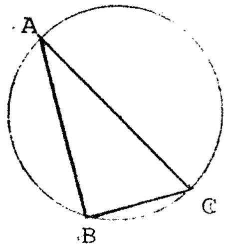
Exercice 12
Objectifs : - Utiliser un support historique (éléments de géométrie de Chuquet) pour faire calculer et prouver des égalités et donc initier à la démonstration en calcul.
- Poursuivre l'entraînement à la démonstration en géométrie.

a) Transformer des écritures pour prouver des égalités ; ceci est bien réussi.

b) Nous avons complété le fichier "comment démontrer que" :

Fiche : Comment démontrer que des points sont sur un cercle (énoncé que nous n'avions pas vu en quatrième).

- en utilisant un triangle rectangle



ABC rectangle en B

↓

Un triangle rectangle est inscriptible dans un demi cercle dont le diamètre est son hypoténuse

↓

B sur le cercle de diamètre [AC]

c) La transformation est plus difficile. Il faut penser à écrire

$$\sqrt{48} = \sqrt{\frac{144}{3}} .$$

Exercice 13
Objectif : - Etudier les solutions de l'équation $x^2 = a$.

L'exercice est cherché individuellement, les résultats sont ensuite discutés dans la classe (présentés au rétroprojecteur dans une classe).

Les réponses apparues le plus souvent sont :

a) $\sqrt{10}$

b) y n'existe pas ou impossible

c) t = 4

d) $\sqrt{732}$

e) $\sqrt{77}$

f) $\sqrt{5}$ (ou 5 parfois)

g) 0

h) n'existe pas ou impossible

i) $r = \sqrt{17}$

j) n'existe pas ou - 10 ou $\sqrt{-10}$.

Les réponses données sont cohérentes. La question c) où 16 est un carré parfait est formulée différemment par le professeur : quels sont les nombres dont le carré est 16 ? Ceci permet de semer le doute sur l'unicité de la réponse, de rappeler que :
- deux nombres opposés ont le même carré,
- qu'un carré est toujours positif.

Pour la question j), une mise au point est nécessaire sur l'ordre des étapes de calcul.

Ce qui est noté dans le répertoire.

R Racines carrées : $\sqrt{a}$ n'existe que si a est positif.

L'équation $x^2 = a$:

- deux solutions si a est positif $x = \sqrt{a}$ et $x = -\sqrt{a}$,

- une solution si a est nul,

- n'a pas de solution si a est négatif.

C Carré d'un nombre :

- Le carré d'un nombre est toujours positif
- Deux nombres opposés ont le même carré.

Exercice 15

- Quelques élèves oublient souvent la 2ème solution $(-\sqrt{a})$.
- L'équation $(x + 1)^2 = 4$ est plus difficile, elle est résolue en classe entière, le professeur suggère un changement de variable $A = x + 1$. Les élèves trouvent ensuite les solutions. Le changement de variable est difficile pour les élèves alors que nous avions constaté en 6ème que le changement d'étiquettes était naturel (à approfondir).

TEST

Ex 1 :

Ecris sous forme d'un entier si possible ou sous forme $a\sqrt{b}$ avec b entier le plus petit possible :

$\sqrt{45}$; $\sqrt{\frac{28}{9}}$; $\sqrt{(-2)^2}$; $\sqrt{2} + \sqrt{50}$.

Ex 2 :

Ecris sous la forme $\sqrt{a}$:

$7\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{5}$.

Ex 3 :

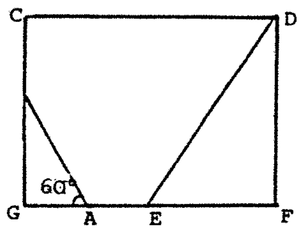
Résous les équations suivantes :

$y^2 = 14$ $t^2 = -8$

$x^2 - 4 = 0$ $4y^2 + 10 = 5$.

Ex 4 :

FGCD est un rectangle.
E est le milieu de [FG].
A est le milieu de [EG].
On donne : FD = 6 ; FG = $4\sqrt{3}$; B sur [GC] et $\widehat{GAB} = 60°$.



Tu justifieras toutes les étapes.

a) Montre que AB = $2\sqrt{3}$.

b) Montre que ED = $\sqrt{48}$.

c) Montre que le périmètre de EABCD est égal à $3 + 11\sqrt{3}$.

d) Montre que l'aire du triangle EFD est $\sqrt{108}$.

Si tu as fini :

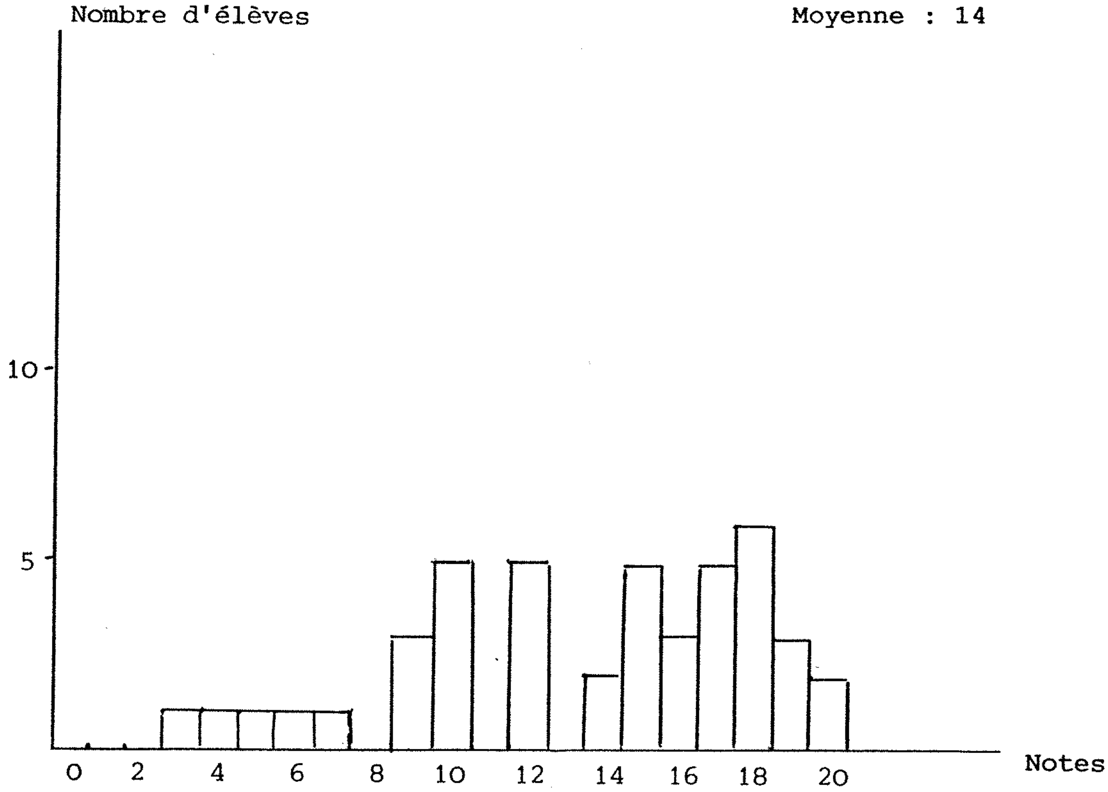
e) L'aire de EABCD est $16{,}5\sqrt{3}$. Est-ce vrai ? Justifie ta réponse.

Barême sur 30 : ex 1 : 5 points
ex 2 : 2 points
ex 3 : 6 points
ex 4 : 17 points.

RESULTATS DU TEST

Nombre d'élèves : 43

Moyenne : 14



Auteurs: *M.J. BACH - D. GAUD - J.P. GUICHARD - M. MAROT - C. ROBIN*
M. ROBIN.

Titre: 3ème - Fascicule 1
Calculs d'éléments métriques (1) : Thalès.
Systèmes d'équations. Equations de droites.
Travaux numériques (1) : calcul sur les racines.

Editeur: IREM de Poitiers.

Date: Mars 1989.

Niveau: Collège.

Mots-clé: Expérimentation - Troisième - Thalès - Racines carrées.
Equations de droites - Systèmes d'équations - Programme 3ème.

Résumé: Le fascicule propose une mise en oeuvre commentée des parties suivantes du programme de 3ème.
- Enoncé de Thalès.
- Systèmes de deux équations à deux inconnues.
- Equations de droites.
- Calculs sur les radicaux.

Premier tirage : 800 exemplaires.

IREM - 40, avenue du Recteur Pineau 86022 Poitiers Cedex **ISBN 2-85954-O2-3**