

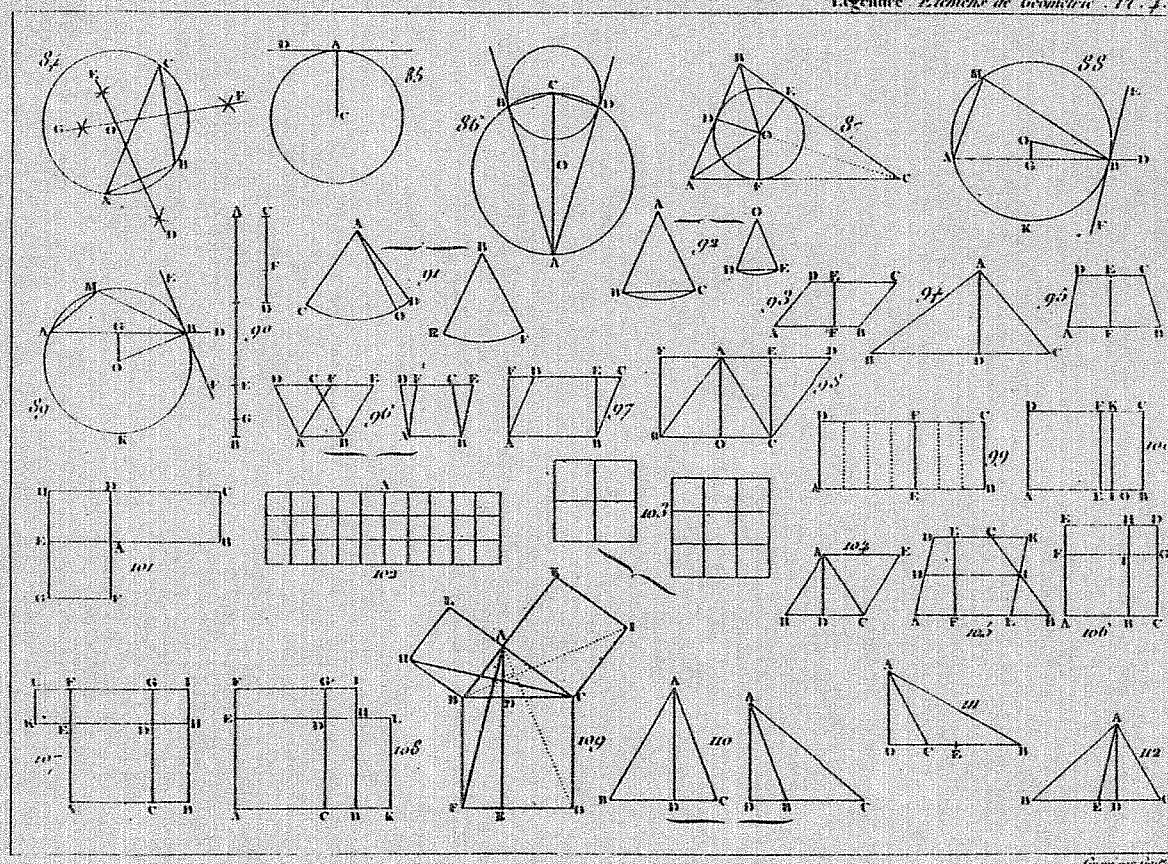
GEOMETRIE DE 4ème

Fascicule 2

compte rendu de l'expérimentation des programmes de 4ème

FORMULATION D'UNE DEMONSTRATION
MANIPULATIONS D'INEGALITES
TRANSFORMATIONS

Legende: *Eléments de Géométrie* Pl. 4.



Géométrie de 4ème

Fascicule 2

- FORMULATION D'UNE DEMONSTRATION
- MANIPULATIONS D'INEGALITES
- TRANSFORMATIONS

Introduction

PARTIE I - Formulation d'une démonstration

- * Réciproque du théorème de Pythagore
- * La médiane dans le triangle rectangle
- * La droite des milieux dans le triangle
- * Projections
- * Droites remarquables.

PARTIE II - Manipulations d'inégalités

PARTIE III - Transformations

Annexe - Fichier méthodologique (fin de 4ème).

Introduction

La démarche en géométrie a été décrite dans le fascicule 1 : **"Géométrie en 4ème"**. Rappelons que cette démarche a été conçue pour privilégier l'apprentissage de la démonstration. Ainsi dans le fascicule 1, nous avons abordé le calcul d'éléments métriques : Pythagore - Cosinus - Sphère.

Les parties "Pythagore" et "Cosinus" ont permis d'effectuer des démonstrations sur des problèmes comportant des données numériques.

Dans la partie "Formulation d'une démonstration" l'objectif principal est de systématiser l'apprentissage à la formulation d'une démonstration. Progressivement les figures deviennent "plus" génériques (les données numériques disparaissent).

Des méthodes de démonstrations nouvelles apparaissent ou sont complétées :

- comment démontrer que deux droites sont perpendiculaires ?
- comment démontrer qu'un point est milieu d'un segment ?
- comment démontrer que deux droites sont parallèles ?

Notre progression est la suivante :

FORMULATION D'UNE DEMONSTRATION

* *Réciproque de Pythagore.*

Il nous a paru important de dissocier l'énoncé direct et l'énoncé réciproque. Cela est conforme à notre méthodologie. L'énoncé direct permet de calculer des longueurs donc, à ce titre, doit figurer dans le calcul d'éléments métriques, la réciproque doit être vue avec les méthodes possibles pour démontrer que 2 droites sont perpendiculaires.

* *La "médiante" dans le triangle rectangle*

* *La droite des milieux dans le triangle*

A ce stade de notre progression, beaucoup d'exercices portent encore sur des considérations métriques : expressions d'une longueur en fonction d'une autre, égalité de 2 longueurs.

* *Projections*

* *Droites remarquables*

Les propriétés des hauteurs, médiatrices, médianes, bissectrices sont en partie connues, voire prouvées (médiatrice). En ce qui concerne les médianes et les hauteurs, les démonstrations de leurs concours sont techniques et difficiles ce qui justifie que nous les traitions en fin d'apprentissage.

♦ La partie **"manipulations d'inégalités"** est à mi-chemin entre l'algèbre et la géométrie. Les exercices doivent non seulement initier à

"l'inégalité triangulaire" et à "la distance d'un point à une droite", mais doivent être aussi un moyen pour apprendre à manipuler les inégalités.

Exemple : si $a \leq b$
 $\left\{ \begin{array}{l} \\ c \leq d \end{array} \right.$ alors $a + c \leq b + d$

Ces manipulations doivent être simultanément réinvesties dans des exercices portant sur la résolution d'inéquations.

- ♦ Dans la partie transformation, les objectifs principaux sont :
- apprendre à identifier une transformation (donc à définir ses caractéristiques),
 - savoir construire des figures transformées.

PARTIE I

FORMULATION D'UNE DÉMONSTRATION

RÉCIPROQUE DU THÉOREME DE PYTHAGORE.

Activité 1

Comment choisir les longueurs des côtés d'un triangle pour que celui-ci soit rectangle ?

OBJECTIFS:

Contrat : les exercices 1 à 5 sont obligatoires. L'exercice 6 est à faire en devoir.

Durée : 2 heures en classe.

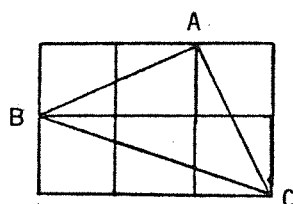
POUR SAVOIR SI TU AS COMPRIS L'ÉNONCÉ :

Ex 1 :

Construis les triangles dont les dimensions sont données ci-dessous. Ces triangles sont-ils rectangles ? Pourquoi ?

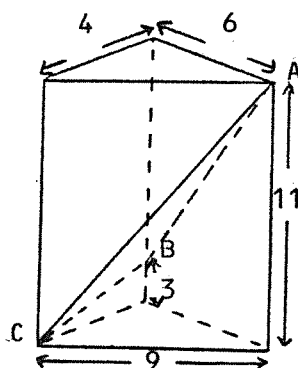
- PQS tel que : $PQ = 14$, $QS = 48$, $PS = 50$
- ULM tel que : $UL = 6,5$, $LM = 3,2$, $UM = 5,6$.

Ex 2 :



Le rectangle est formé de six carrés de côté 1.
Que peux-tu dire du triangle ABC ?
Prouve-le.

Ex 3 :



Voici le dessin en perspective d'un prisme droit.
Le triangle ABC est-il rectangle ?
Pourquoi ?

POUR DEMONTRER :

Pour ces exercices tu écriras les données, la conclusion, tu feras un dessin et un organigramme.

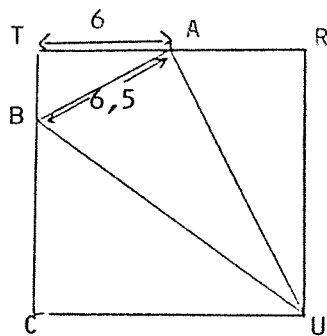
Ex 4 :

Construis un triangle TOI tel que $TO = 4,5$ $OI = 7,5$ $IT = 6$
Trace la médiane du triangle qui passe par O, elle coupe (TI) en M.
Calcule l'angle $\widehat{OMT}$.

Ex 5 :

Construis le triangle ABC tel que $AB = 8,4$ $BC = 10,5$ $AC = 6,3$.
Place C' le symétrique de C par rapport à A et B' le symétrique de B par rapport à A. Que peux-tu dire du quadrilatère $C'B'CB$? Démontre-le.

Ex 6 :



TRUC est un carré de côté 12. Le triangle ABU est-il rectangle ?
Calcule ses angles.

AUTO-TEST

Ex 1 :

HIG est un triangle tel que : $HG = 4$ $GI = 8$ $IH = 9$
Ce triangle est-il rectangle ? Pourquoi ?

EX 2 :

ABC est un triangle rectangle en B tel que $AB = 9,6$ et $AC = 12$.
D est un point de (AB) n'appartenant pas à [AB] et tel que $BD = 5,4$.
Le triangle ACD est-il rectangle ? Pourquoi ?

ACTIVITE

Durée 3/4 h.

Le texte de l'activité n'est pas bien compris, ils dessinent des triangles rectangles et disent pouvoir trouver le 3ème côté grâce à l'énoncé de Pythagore. Cet énoncé direct, étudié depuis plusieurs mois est un acquis sûr pour eux et ils ne réussissent pas à en s'en défaire.

Le professeur doit analyser le texte avec les élèves pour faire dégager la conclusion à laquelle on veut parvenir.

Des triplets de nombres sont alors choisis et les triangles réalisés, la condition sur les carrés des côtés est alors trouvée et validée par le professeur (mais non démontrée).

Lors de la synthèse, le point est fait sur ce que sont des énoncés réciproques. De tels énoncés ont déjà été rencontrés (milieu d'un segment, triangle isocèle...). Il s'agit ici de montrer que tout énoncé n'a pas forcément un énoncé réciproque vrai en citant des exemples :

- tout multiple de 6 est multiple de 3,
- un losange a les diagonales perpendiculaires.

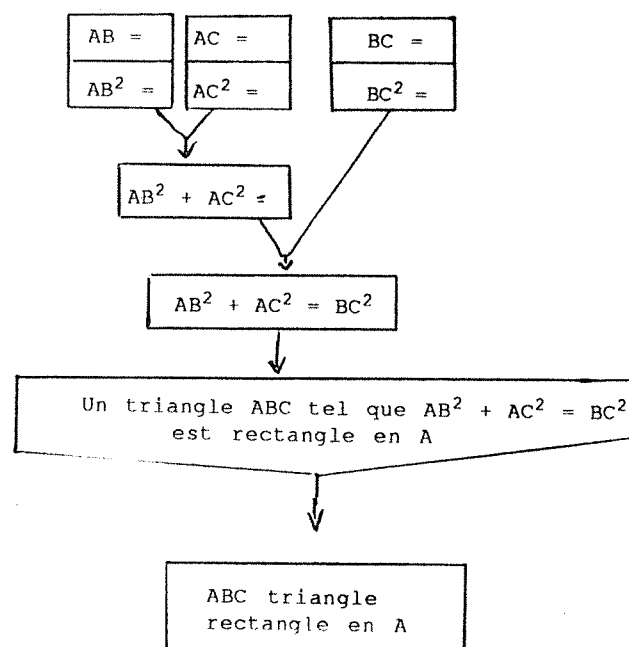
L'énoncé réciproque de Pythagore est formulé par les élèves. La mise au point est faite sur :

* son usage : montrer qu'un triangle est rectangle ou que deux droites sont perpendiculaires (nous pensons qu'en 4ème, le niveau de rigueur n'est pas tel qu'il faille imposer un énoncé pour passer "des droites perpendiculaires au triangle rectangle");

* les requis nécessaires à son utilisation.

Cet énoncé est noté sur la fiche **"comment démontrer qu'un triangle est rectangle"**

- en utilisant l'énoncé réciproque de Pythagore.



L'objectif, énoncé par les élèves, est noté sur le dossier.

Je dois savoir prouver qu'un triangle est rectangle en utilisant l'énoncé réciproque de Pythagore.

EXERCICES : durée 2 heures.

L'exercice n° 1 montre que les élèves ont compris l'enjeu.

En effet, ils ne font pas de dessin à l'échelle comme il était demandé. Une aide méthodologique doit être apportée pour la présentation des résultats car ils ont tendance à écrire l'égalité avant d'avoir fait les calculs.

Exemple : $PQ^2 + QS^2 = PS^2$

$$14^2 + 48^2 = 50^2$$

$$196 + 2304 = 2500$$

$$2500 = 2500.$$

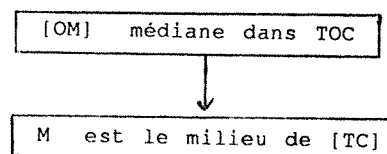
Les exercices 2 et 3 demandent que l'on utilise l'énoncé direct puis l'énoncé réciproque. On peut noter que l'énoncé direct introduit tôt dans l'année scolaire, réutilisé lors de l'étude des cosinus et de la sphère est maintenant très bien maîtrisé.

Pour l'exercice 3, la situation est matérialisée à l'aide d'une armature de cube dans laquelle un prisme est construit à l'aide d'une ficelle. Comme il est écrit dans le dossier, les exercices 4 à 6 font l'objet d'une démonstration plus rigoureuse, chaque étape étant justifiée. La résolution est présentée sous forme d'organigrammes.

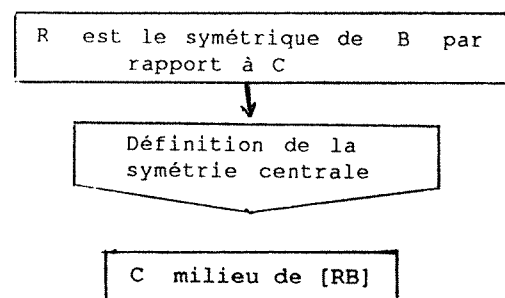
Hormis la réciproque de Pythagore, aucun énoncé nouveau n'est nécessaire à la résolution des exercices 4 et 5. Seule la définition de la médiane est notée sur le répertoire. Pour ne pas surcharger les démonstrations, aucun énoncé n'est écrit concernant la médiane et la symétrie centrale. Ainsi la fiche

"comment démontrer qu'un point est milieu d'un segment" est complétée par :

- en utilisant la médiane dans un triangle.



- en utilisant la symétrie centrale.



Les deux exercices 4 et 5 sont menés à bien par les élèves sans qu'une aide spécifique soit nécessaire.

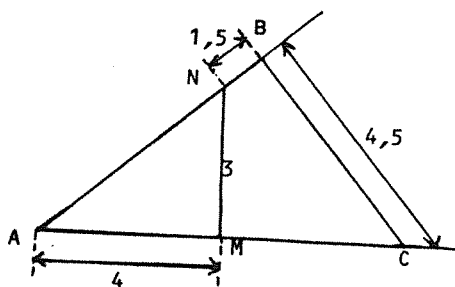
L'exercice 6 est fait à la maison, en devoir d'essai.

L'organigramme est généralement rédigé correctement. Un énoncé a souvent été oublié. Cette erreur provient certainement du libellé du texte, "un carré a les 4 côtés de même mesure".

Une erreur est cependant faite par quelques élèves qui calculent les angles par le cosinus dans le triangle ABU bien qu'ils viennent de démontrer que ce triangle n'est pas rectangle.

TEST

Ex 1 :



M est le milieu de $[AC]$. La droite (MN) est perpendiculaire à la droite (AC) .

- 1) Calcul AN . Justifie ton calcul.
- 2) Le triangle ABC est-il rectangle ? Justifie ta réponse.

Ex 2 :

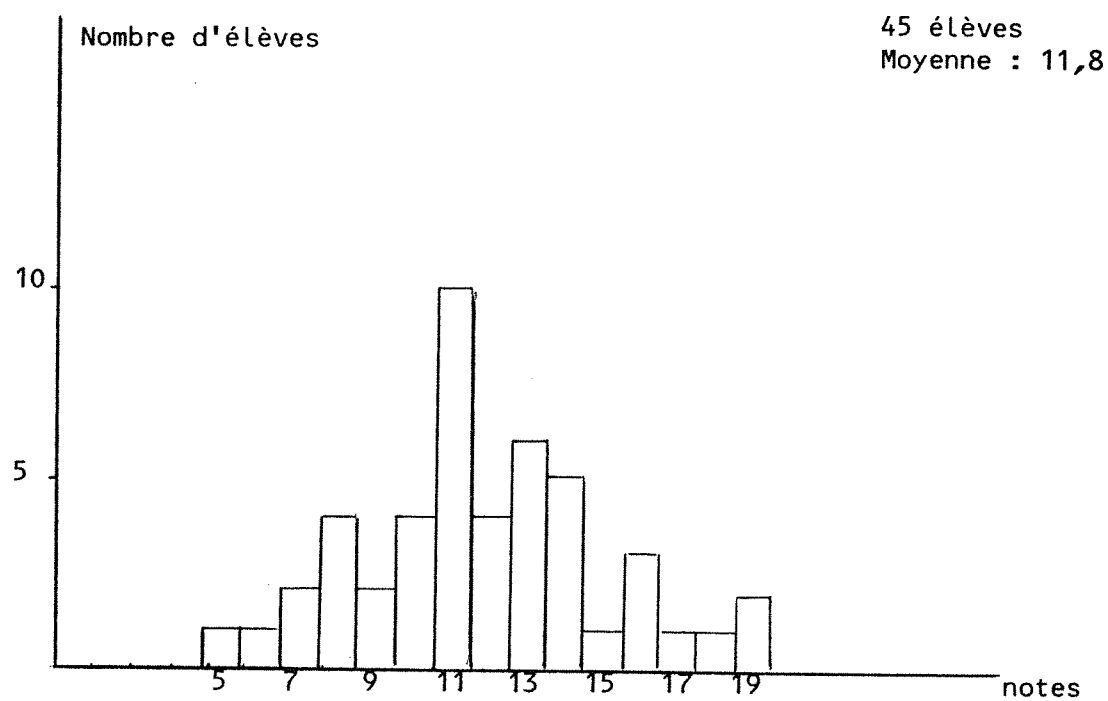
TRUC et BRUN sont deux losanges tels que C, U, N , soient alignés. Démontre que le triangle CRN est rectangle.

Pour chaque exercice, tu donneras :

- les données
- la conclusion
- l'organigramme

et si tu as fini, rédige la solution de chaque exercice.

RECIPROQUE DE PYTHAGORE



"LA MÉDIANE" DU TRIANGLE RECTANGLE.

Activité 2

Construis un triangle ABC tel que :

- M est le milieu de [BC]

- $AM = \frac{1}{2} \times BC$.

Qu'en penses-tu ? Prouve-le.

OBJECTIFS :

Contrat : les exercices 1 à 5 sont obligatoires.

Durée : 2 heures.

EXERCICES :

EX 1 :

$\mathcal{C}$ est un cercle de diamètre [BC] et de centre O.

A est un point du cercle.

Le triangle ABC est-il rectangle ? Pourquoi ? Formule en français ce que tu viens de démontrer.

Ex 2 :

Construis un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et un diamètre [AB] de ce cercle.

Soit D un point d'intersection de la médiatrice de [OA] avec le cercle.

On désigne par O' le symétrique de O par rapport à A.

Montre que (O'D) est tangente au cercle $\mathcal{C}$.

Ex 3 :

Un triangle ABO est isocèle en O. Place A', symétrique de A par rapport à O. Que dire de ABA' ? Prouve-le.

Ex 4 :

Trace deux droites (Δ) et (Δ') perpendiculaires en un point O.

Place un point A n'appartenant ni à (Δ) ni à (Δ').

Trace le symétrique de A par rapport à (Δ), appelle-le J.

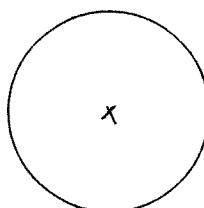
Trace le symétrique de A par rapport à O, appelle-le K.

Que dire de AKJ ? Justifie ta réponse.

Ex 5 :

Avec ta règle et ton compas, trouve une méthode pour tracer une tangente au cercle passant par A.

A
+

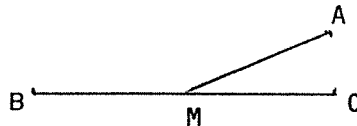


Médiane et triangle rectangle.

Activité : durée 1h 30.

Les élèves font d'eux-mêmes plusieurs dessins tels que $AM = \frac{1}{2} BC$ et en déduisent une conjecture : le triangle ABC est certainement rectangle en A.

Le professeur projette alors au rétroprojecteur le transparent :



M est le milieu de $[BC]$, $MA = \frac{1}{2} BC$ et $[MA]$ est mobile autour de M.

A chaque position du segment $[MA]$, on peut vérifier que le triangle ABC est rectangle en A. Les élèves remarquent également que le point A doit être sur le cercle de centre M et de diamètre $[BC]$.

La recherche de la démonstration est alors faite sous forme d'un organigramme.

Lors de la synthèse trois démonstrations différentes sont présentées par les élèves. Voici les démarches :

- * (1) et (2)
 - les triangles $\triangle ACM$ et $\triangle BMA$ sont isocèles en M
 - les angles $\widehat{MBA}$ et $\widehat{MAB}$ sont égaux
 - les angles $\widehat{MAC}$ et $\widehat{MCA}$ sont égaux.

$$(1) \quad \widehat{BAC} = \widehat{BAM} + \widehat{MAC} \\ = \widehat{MBA} + \widehat{MCA}$$

$$(2) \quad \text{dans le triangle MAC} \\ 2 \times \widehat{MAC} + \widehat{AMC} = 180^\circ$$

$$\text{Dans le triangle ABC :} \\ 180^\circ = \widehat{MBA} + \widehat{MCA} + \widehat{BAC}$$

$$2 \times \widehat{MAC} + (180^\circ - \widehat{BMA}) = 180^\circ$$

$$= 2 \times \widehat{BAC}$$

$$\text{d'où } \widehat{BAC} = 90^\circ$$

$$\widehat{MAC} = \frac{180^\circ - 180^\circ + \widehat{BMA}}{2} = \frac{\widehat{BMA}}{2}$$

$$\text{De même } \widehat{MAB} = \frac{\widehat{CMA}}{2}$$

$$\widehat{BAC} = \widehat{MAC} + \widehat{MAB} \\ = \frac{\widehat{BMA}}{2} + \frac{\widehat{CMA}}{2} = \frac{\widehat{BMC}}{2} = 90^\circ$$

On peut remarquer que le calcul littéral est spontanément réinvesti pour ces calculs d'angles.

- * (3) . Tracé de A' , symétrique de A par rapport à M
 - . Reconnaissance de $ACA'B$ comme un rectangle car les diagonales ont même mesure (les énoncés nécessaires à cette partie de démonstration n'ont pas encore été institutionnalisés et les élèves hésitent à les utiliser).

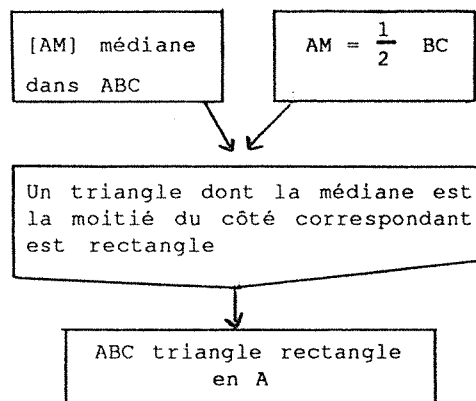
. $\hat{A}$ est droit car c'est un angle du rectangle.

Notons que les angles et la symétrie centrale sont réinvestis à bon es-
cien.

A la fin de cette synthèse le nouvel énoncé démontré lors de cette activité
est formulé par les élèves et noté sur la fiche.

"Comment démontrer qu'un triangle est rectangle".

- en utilisant la médiane



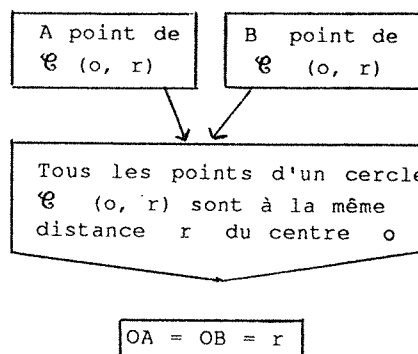
L'objectif est noté sur le dossier.

*Je dois savoir démontrer qu'un triangle est rectangle en utilisant la
médiane.*

EXERCICES : Durée: 2h 30.

La définition du cercle est nécessaire à la résolution de l'exercice 1. La
fiche **"comment démontrer que deux distances sont égales"** est
alors complétée.

- en utilisant les points d'un
cercle

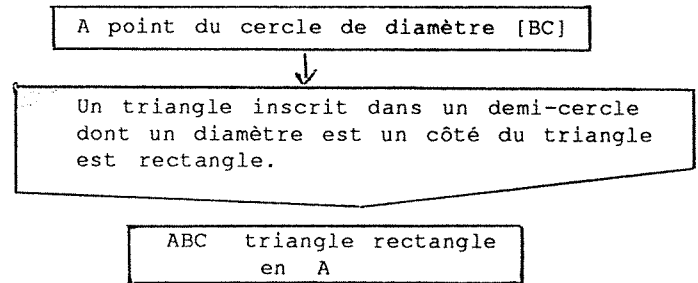


Cet exercice n° 1 est mené à bien mais la formulation du nouvel énoncé démontré semble difficile aux élèves car les mots "inscrit" ou "inscriptible" ne font pas partie du vocabulaire couramment utilisé.

Cet énoncé est noté sur la fiche

"comment démontrer qu'un triangle est rectangle".

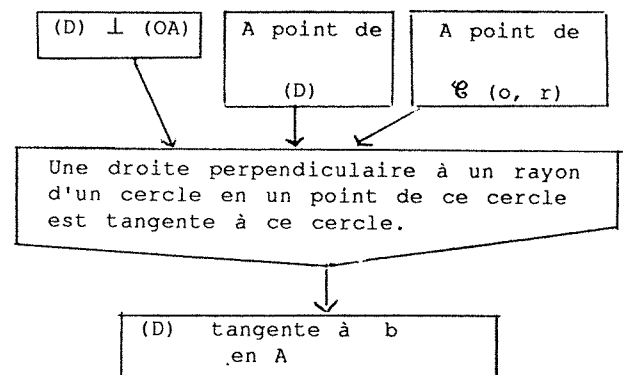
- en montrant qu'il est inscrit dans un cercle, le diamètre de ce cercle étant l'un des côtés du triangle



L'exercice 2, est l'occasion de définir la tangente à un cercle par une propriété caractéristique. La tangente est définie par les élèves comme une droite qui "frôle" le cercle ou "le touche en un point". Un retour au répertoire permet de rappeler la propriété de cette droite. Une nouvelle fiche est commencée :

"Comment démontrer qu'une droite est tangente à un cercle".

- en montrant qu'elle est perpendiculaire au rayon correspondant.



Cet exercice a posé plus de difficultés que les autres car l'égalité :

$DA = \frac{1}{2} OO'$ ne s'obtenait qu'après plusieurs intermédiaires

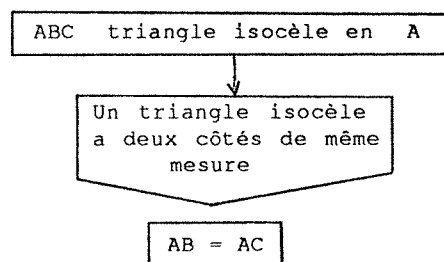
- . $OA = OD$ d'après la définition du cercle
- . $OD = DA$ car D est sur la médiatrice de $[OA]$
- . $DA = OA$ déduit des deux égalités précédentes
- . $OA = \frac{1}{2} OO'$ provenant de la symétrie centrale
- . $DA = \frac{1}{2} OO'$ déduit des deux égalités précédentes.

Une aide du professeur est nécessaire pour de nombreux élèves.

Les deux exercices suivants, par contre, sont facilement résolus. Ils sont l'occasion de compléter deux fiches :

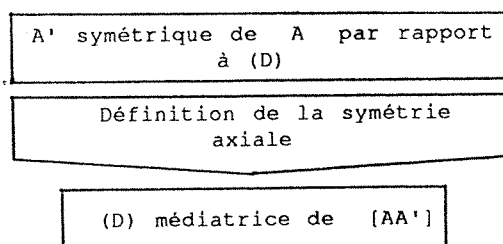
"Comment démontrer que deux distances sont égales".

- en utilisant le triangle isocèle.



"Comment démontrer qu'une droite est médiatrice d'un segment".

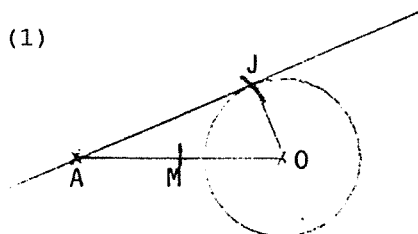
- en utilisant la symétrie axiale.



Aucun organigramme n'est demandé à l'exercice 5.

Deux méthodes sont proposées par les élèves.

(1)



. M est placé après le tracé de la médiatrice de $[OA]$.

. J est placé sur le cercle : $MJ = MO$

Cette construction est justifiée par les énoncés utilisés.

- (2) Mesure de AO et du rayon du cercle
Recherche de AJ par utilisation de la réciproque de Pythagore
J est placé.

Ces deux méthodes sont discutées par la classe. La première est jugée meilleure car elle ne fait appel qu'à des tracés comme il était demandé dans le texte de l'exercice.

Activité 2 (bis)

Dessine un triangle ABC rectangle en A. Soit M le milieu de [BC]. Montre que la "médiane" est égale à la moitié de l'hypoténuse.

OBJECTIFS :

Contrat : tous les exercices sont obligatoires.

Durée : 1 heure.

Ex 1 :

Construis un triangle TAC rectangle en A tel que $AC = 2$ et la médiane $AM = 3$. Justifie ta construction.

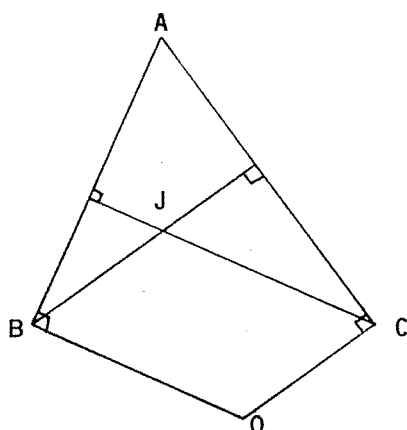
Ex 2 :

Trace un triangle quelconque PAF. H et K sont les projections orthogonales de P sur (AF) et de F sur (AP). [AM] est la médiane relative au côté [FP].

Que peux-tu dire de MHK ? Prouve-le.

Ex 3 :

Les données sont sur la figure.



a) que dire de JCOB ?

b) soit M le milieu de [AO]. BMC est isocèle, pourquoi ?

Triangle rectangle - partie 2 bis.

ACTIVITE :

Durée : 1 heure.

Dès la lecture du texte, les élèves prennent conscience que la propriété cherchée est la réciproque de celle rencontrée dans la partie 2.

Première démarche des élèves :

a) ABC est un triangle rectangle, on l'inscrit dans un cercle de diamètre l'hypoténuse, A est sur le cercle, OA, OB, OC sont égales, ce sont des rayons.

Il y a là confusion entre énoncé et énoncé-réciproque : nous avons vu à la partie 1, qu'un triangle inscrit dans un cercle est rectangle.

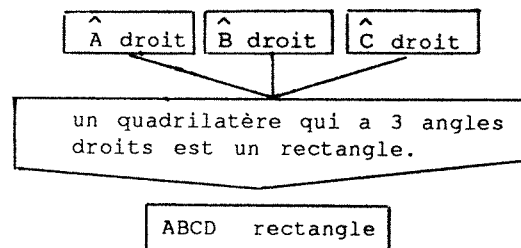
b) On trace A' symétrique de A par rapport au milieu de [BC].
On obtient un rectangle, ce qu'il faut prouver.

L'aide du professeur, est nécessaire pour mettre en place les énoncés utiles à la démonstration. Deux démarches différentes selon les classes.

Dans une classe

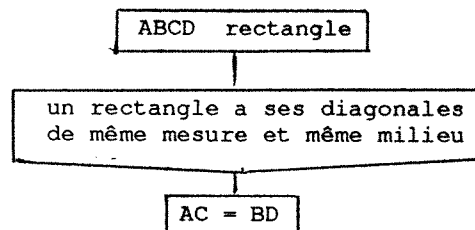
"Comment démontrer qu'un quadrilatère est un rectangle".

- en montrant qu'il a 3 angles droits.



"Comment démontrer que 2 longueurs sont égales".

- en utilisant les diagonales d'un rectangle.



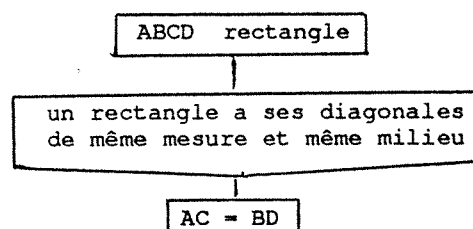
Les élèves font leur organigramme en utilisant les angles et la symétrie centrale, la symétrie centrale garde les angles, la somme des angles dans un triangle).

Dans l'autre classe

La démonstration est amorcée différemment :

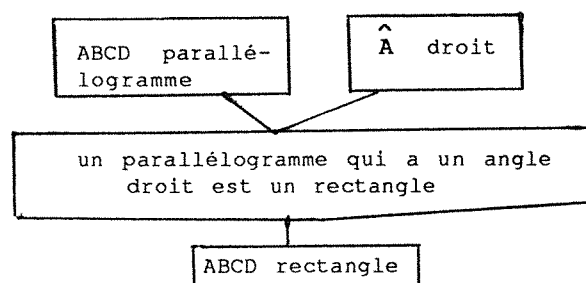
- "Comment démontrer que des longueurs sont égales".

- en utilisant les diagonales d'un rectangle.



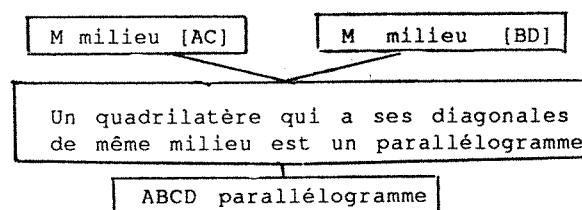
- "Comment démontrer qu'un quadrilatère est un rectangle".

- en montrant que c'est un parallélogramme qui a un angle droit.



- "Comment démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme".

- en montrant que ses diagonales ont même milieu.

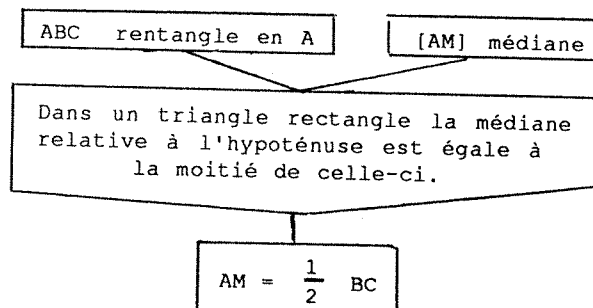


Les élèves construisent ensuite leur organigramme.

Le nouvel énoncé démontré est formulé par les élèves lors de la synthèse et copié dans le fichier.

"Comment calculer une longueur".

- en utilisant la médiane dans un triangle rectangle.



Le point est fait une nouvelle fois sur les énoncés et les énoncés réciproques.

L'objectif est ensuite noté sur le dossier.

Je dois savoir calculer une longueur en utilisant la médiane dans un triangle rectangle.

EXERCICES : durée 2 heures.

EX 1 :

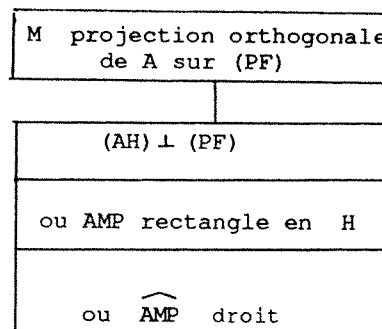
Pas de difficulté, la justification est correcte.

Ex 2 :

Les élèves demandent une précision sur la projection orthogonale, celle-ci est apportée et notée dans le fichier à :

"Comment démontrer que 2 droites sont perpendiculaires ou qu'un triangle est rectangle".

- en utilisant la projection orthogonale



L'organigramme long est réalisé correctement par la plupart des élèves.

Ex 3 :

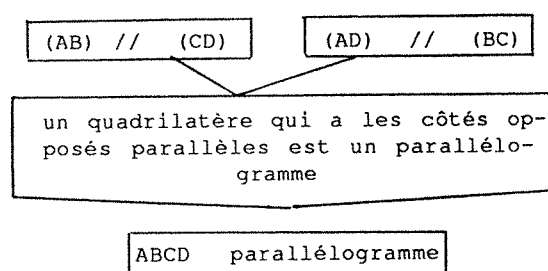
Au cours de cet exercice, le point est fait pour recenser les différentes façons permettant de démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme. A partir des propriétés notées en 5ème sur le répertoire,

- avec les côtés isométriques (pas possible ici)
- avec 2 côtés parallèles et isométriques (pas possible ici)
- avec les côtés parallèles deux à deux.

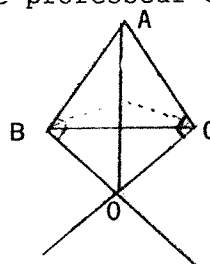
L'énoncé nécessaire est alors copié dans le fichier,

"Comment démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme".

- en montrant que les côtés opposés sont parallèles.



La première question est traitée rapidement. Quelques élèves bloqués pour la 2ème question demandent une aide, le professeur dessine alors au tableau la figure simplifiée suivante :

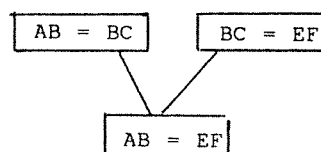


cela suffit pour les faire démarrer.

Le fichier est complété à la suite de cet exercice :

"Comment démontrer que 2 longueurs sont égales"

- en montrant qu'elles sont égales à une même 3ème.



AUTO-TEST

Ex 1 :

Un triangle rectangle a un angle aigu qui est le double de l'autre. Montre que l'hypoténuse est le double du petit côté.

Ex 2 :

ABC est un triangle rectangle en A. [AM] est une médiane.
A' est le symétrique de A par rapport à M.
Que dire de ABCA' ?
Prouve-le.

LA DROITE DES MILIEUX

Activité 3

Trace un triangle quelconque ABC, place I et J, les milieux respectifs de [AB] et de [AC].

Que peux-tu dire du triangle AIJ ?

EXERCICE

I et J sont les milieux respectifs des côtés [AB] et [AC] d'un triangle ABC.

I' est le symétrique de I par rapport à J.

a) Que peux-tu dire du quadrilatère AI'CI ? Prouve-le.

b) Que peux-tu dire du quadrilatère II'CB ? Prouve-le.

c) Démontre que (IJ) est parallèle à (BC)

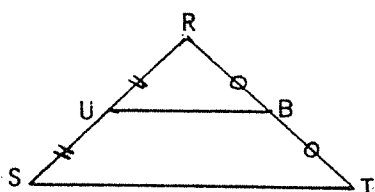
d) Démontre que $IJ = \frac{1}{2} BC$.

OBJECTIFS :

Contrat : les exercices 1 à 4 sont obligatoires, l'exercice 5 est à faire en devoir à la maison.

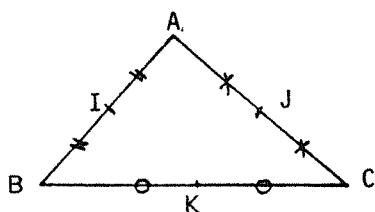
Durée : 3 heures en classe.

Ex 1 :



Note les angles égaux sur la figure.
Démontre-le.

Ex 2 :



a) Que peux-tu dire du quadrilatère IJKB ? Prouve-le.

b) Montre que le périmètre de AIJ est la moitié de celui de ABC.

c) Montre que l'aire de ABC est le quadruple de celle de AIJ.

Ex 3 :

Trace un triangle TOC puis construis le symétrique de TOC par rapport à T, le symétrique de TOC par rapport à O et le symétrique de TOC par rapport à C.

Quel est le rapport des périmètres de l'hexagone obtenu et du triangle TOC ?

Ex 4 :

$[AO]$ est un segment, (Δ) est une droite qui passe par O , $C = S_{(\Delta)}(A)$ et $B = S_O(A)$.

Que dire du triangle ABC ?

Ex 5 :

OURS est un quadrilatère quelconque. On note M, I, E, L les milieux respectifs de $[OU], [UR], [RS], [SO]$.

- a) Que dire du quadrilatère $MIEL$? Prouve-le.
- b) A quelle condition $MIEL$ peut-il être un losange ?
- c) A quelle condition $MIEL$ peut-il être un rectangle ?
- d) A quelle condition $MIEL$ peut-il être un carré ?

Droite des milieux

La droite des milieux dans le triangle permet une transition entre les géométries métrique et affine.

En effet des problèmes peuvent encore porter sur des longueurs; d'autres portent sur des propriétés affines.

- ♦ **OBJECTIFS** : - continuer l'apprentissage de la démonstration
- réutiliser les symétries, les angles, les aires....

♦ **DUREE** : 3 heures.

DEROULEMENT ET COMMENTAIRES

ACTIVITE : (1 HEURE)

Le dossier n'est pas distribué pour ne pas induire de réponse.

La consigne est écrite au tableau.

La recherche est active. Les conjectures trouvées sont les suivantes :

- $IJ = \frac{1}{2} BC$
- $(IJ) // (BC)$
- AIJ et ABC ont les mêmes angles.
- Aire $AIJ = \frac{1}{4}$ aire ABC
- $IJCD$, $AIDJ$, $BIDJ$ sont des parallélogrammes (D est le milieu de $[BC]$)
- AIJ est l'image de ABC à l'échelle $1/2$
- $BCJI$ est un trapèze
- IJ est une médiane dans les triangles AIC et ABJ
- Si on prend K milieu de $[BC]$ on a des parallélogrammes et des trapèzes.

Ces conjectures sont écrites au tableau. Certaines sont démontrées dans les exercices qui suivent. A l'issue de leur démonstration les propriétés seront institutionnalisées.

EXERCICES :

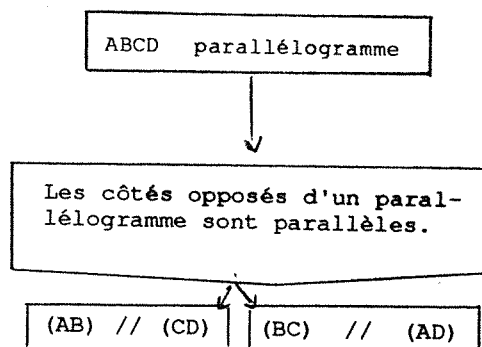
Dans l'apprentissage que nous avons donné, nous n'avons jamais décomposé un problème en questions intermédiaires. En général les élèves construisent leurs propres questions intermédiaires.

Nous pensons qu'ainsi ils s'approprient davantage le problème. Ici, ils demandent si les questions sont indépendantes ou enchaînées.

Pour les démonstrations les élèves sont amenés à utiliser des propriétés vues en 5ème mais non institutionnalisées comme outils démonstratifs. Ces propriétés sont alors transcrites dans le fichier méthodologique.

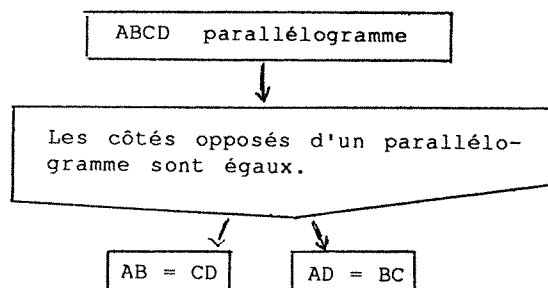
"Comment démontrer que 2 droites sont parallèles".

- en utilisant les côtés d'un parallélogramme.



"Comment démontrer que 2 distances sont égales".

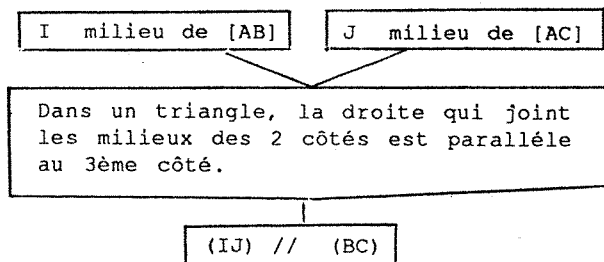
- En utilisant les côtés opposés d'un parallélogramme.



Lors de la synthèse, le professeur fait formuler sous forme d'énoncé (objet de connaissance) et sous forme de méthode démonstrative (outil) les résultats des questions c et d. Le fichier méthodologique est complété.

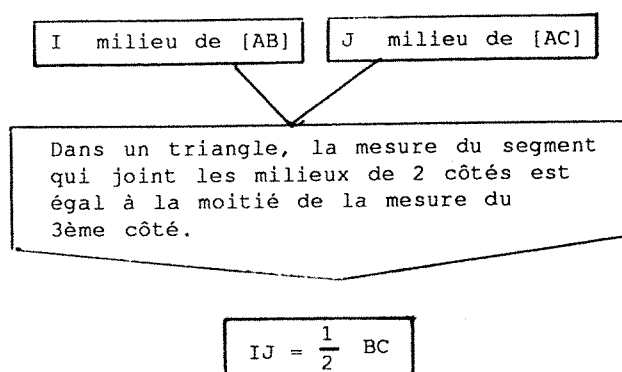
"Comment démontrer que deux droites sont parallèles".

- en utilisant les milieux des côtés dans un triangle.



"Comment trouver une distance".

- en utilisant les milieux des côtés dans un triangle.



L'objectif est copié :

Savoir utiliser les énoncés sur les milieux des côtés d'un triangle pour démontrer.

EXERCICES

Ex 1 :

Le triangle dessiné était, volontairement, presque isocèle pour obliger les élèves à réfléchir aux données de l'exercice.

Pour résoudre, les élèves utilisent sans hésiter les angles correspondants, notion étudiée en 5ème, qui est bien réinvestie.

Ex 3 :

La compréhension du problème permet de percevoir que les démonstrations se répètent.

Une synthèse permet de dégager 2 méthodes de résolution :

- en utilisant la médiane relative au côté [AB]
- en raisonnant sur les parallèles et perpendiculaires. A ce sujet un nouvel énoncé est introduit et noté sur la fiche :

"comment démontrer que 2 droites sont perpendiculaires".

- en utilisant parallèles et perpendiculaires.

$(D_1) // (D_2)$

$(D_1) \perp (D_3)$

Lorsque 2 droites sont parallèles,
toute droite perpendiculaire à
l'une est perpendiculaire à l'autre.

$(D_3) \perp (D_2)$

Les notations $S_{(\Delta)}$ et S_0 (non exigibles en 4ème) sont rencontrées dans cet exercice pour la première fois, elles sont donc expliquées aux élèves.

L'exercice 5 est fait en devoir à la maison. La question a), bien réussie, est traitée de 3 façons différentes :

- en montrant que MIEL a 2 côtés à la fois parallèles et de même mesure,
- en montrant que MIEL a les côtés opposés parallèles,
- en montrant que MIEL a les côtés opposés isométriques.

Les questions b) à d) sont mal comprises : il aurait fallu signaler dans le texte que l'on demandait une condition minimale sur le quadrilatère OURS. Certains élèves ont donné des conditions sur MIEL : par exemple pour que MIEL soit un losange il faut que $MI = IE$ car un parallélogramme qui a 2 côtés consécutifs isométriques est un losange.

Pour beaucoup d'élèves, la caractérisation minimale n'est pas acquise. D'autres ont raisonné sur OURS en disant : lorsque OURS est un rectangle, MIEL est un losange.

Une mise au point sur ces questions est faite lors du compte rendu du devoir. Les conditions suffisantes pour que MIEL soit losange, rectangle ou carré sont alors dégagées.

Pour ce devoir les élèves ont rédigé organigramme et solution en français. Il est à noter que les rédactions sont justes et clairement formulées.

PROJECTIONS

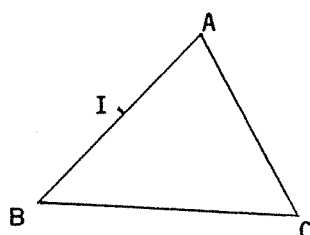
Activité 1

ABC est un triangle rectangle en C, I est le milieu de [AB].
J est la projection orthogonale de I sur [AC].
Que penses-tu de J ? Prouve-le.

Activité 2

ABC est un triangle rectangle en C, J est le milieu de [AC].
J' est la projection de J sur (AB) parallèlement à (BC).
Que dire de J' ? Prouve-le.

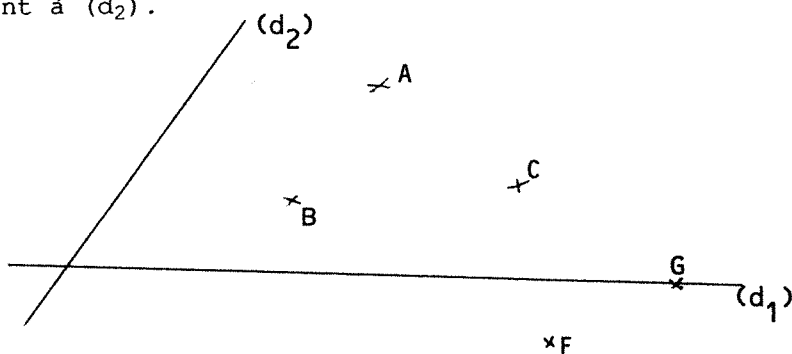
Activité 3



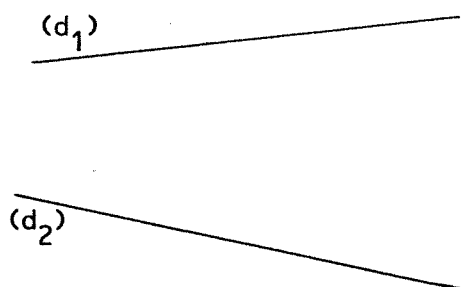
ABC est un triangle quelconque, I est le milieu de [AB].
J est la projection de I sur (AC) parallèlement à (BC).
Que dire de J ? Comment peux-tu utiliser les résultats précédents pour le démontrer ?

Activité 4

Construis A', B', C', F', G' projections respectives de A, B, C, F et G sur (d₁) parallèlement à (d₂).



Activité 5



Place deux points A et B sur la droite (d₁). Place M le milieu de [AB].
Trace A', B', M' projections respectives de A, B, M sur (d₂) parallèlement à (d₃).
Que dire de M' ?

OBJECTIFS :

Contrat : les exercices 1 et 2 sont obligatoires.

Durée : 1 heure 30 mn.

Ex 1 :

Trace le triangle TIC isocèle en I. Trace (D) et (D') perpendiculaires à (TC) respectivement en T et C. Une droite passant par I coupe (D) en A et (D') en A'.

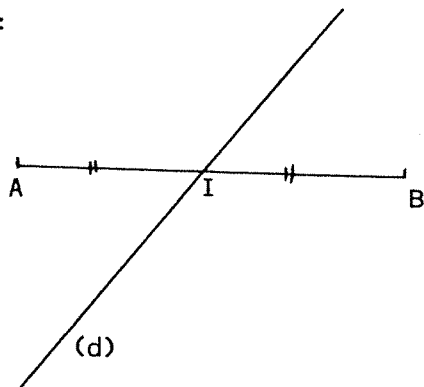
Quel est le milieu de [AA'] ? Démontre-le.

Ex 2 :

(D), (D') et (D'') sont trois droites concourantes en O. Place un point A sur (D) et le point B milieu de [OA]. Trace A' et B' les projections orthogonales de A et B sur (D'). Trace A'' et B'' les projections orthogonales de A' et B' sur (D'').

Démontre que (AA'') et (BB'') sont parallèles.

Ex 3 :



C et D sont les projections orthogonales de A et B sur (d).
Que dire de ACBD ? Prouve-le.

Projection

Activités (2 heures)

Un des objectifs des activités 1 et 2 est encore de faire comprendre la différence entre énoncé et énoncé réciproque. L'activité 3 a pour objectif de faire comprendre que la résolution d'un problème peut se ramener à la résolution de plusieurs problèmes connus.

Activité 1

Deux démarches sont utilisées dans la classe pour démontrer que J est le milieu de [AC].

1. Les élèves tracent la médiane [IC] et déterminent ainsi 2 triangles isocèles AIC et ICB.

La hauteur [IJ] dans le triangle AIC est axe de symétrie et donc médiane. Elle coupe [AC] en son milieu J.

2. Les élèves notent le cosinus de l'angle A dans les triangles rectangles AIJ et ABC.

$$\left. \begin{array}{l} \cos \hat{A} = \frac{AJ}{AI} \quad AJ = AI \times \cos \hat{A} \\ \cos \hat{A} = \frac{AB}{AC} \quad AB = AC \times \cos \hat{A} \end{array} \right\} \quad \frac{AJ}{AB} = \frac{AI}{AC} = \frac{1}{2}$$

Lors de la synthèse, les deux démarches sont proposées à la classe, la 2ème sera réutilisée par la suite.

Notons que l'absence de données numériques a gêné les élèves dans l'emploi du cosinus.

Activité 2

Pas de difficulté pour écrire le cosinus de $\hat{A}$ dans les 2 triangles rectangles.

Le passage de $\cos \hat{A} = \frac{AJ}{AI}$ à $AI = \frac{AJ}{\cos A}$ est plus délicat.

Cette partie permet de revoir le quotient de 2 fractions.

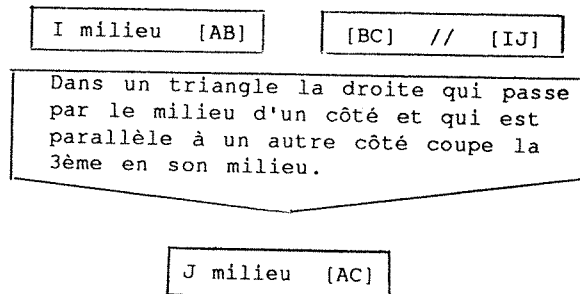
Activité 3

Cette partie est traitée oralement en classe entière. Pour retrouver les deux premières activités, les élèves proposent de tracer la hauteur. La démonstration est ensuite bien faite en utilisant les démarches précédentes (activité 1 et 2).

Le résultat obtenu est noté dans le fichier

"Comment démontrer qu'un point est milieu d'un segment".

- en utilisant un triangle.

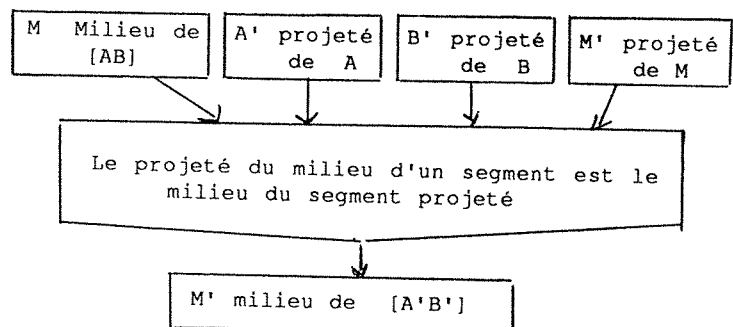


Activité 5

Réalisée oralement en classe entière en s'aidant des résultats de l'activité 3, les élèves proposent de tracer (AB') ce qui fait apparaître deux triangles. La démonstration est alors correcte.

La fiche **"Comment démontrer qu'un point est milieu d'un segment"** est complétée.

- en utilisant les projections.



L'objectif est alors formulé par les élèves et noté sur le dossier.

Je dois savoir démontrer qu'un point est milieu d'un segment en utilisant les projections.

EXERCICES

Durée : 1h 30.

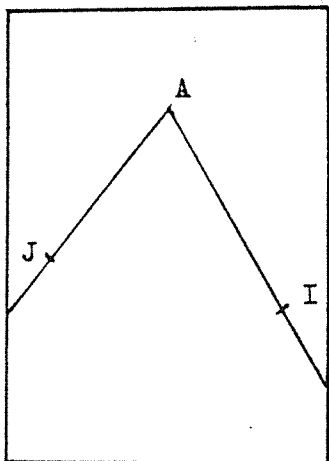
L'exercice n°1 pose problème car sa résolution suppose un tracé supplémentaire. L'analyse de la figure, des données et de la conclusion permet aux élèves de conclure : I doit être le projeté du milieu d'un segment. Ils pensent alors à utiliser l'axe de symétrie du triangle isocèle et imaginent comment les énoncés vont s'enchaîner. L'organigramme est alors réalisé.

Quelques élèves font une erreur dans l'exercice n° 2, en traçant (AA') et (BB') perpendiculaires à (D) et non à (D') . Une reprise collective du texte est nécessaire. Il est à noter que les élèves ne confondent plus les deux énoncés direct et réciproque.

DROITES REMARQUABLES DANS LE TRIANGLE

(Partie non expérimentée).

Activité



Le triangle ABC ne loge pas dans la feuille.

I et J sont les milieux respectifs de [AB] et de [AC].

Peux-tu tracer le cercle qui passe par les trois points A, B et C ?

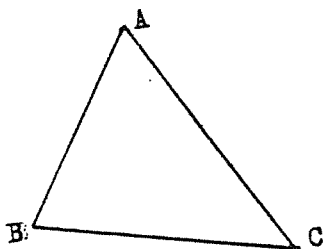
Explique et justifie.

OBJECTIFS :

Contrat : les exercices 5 et 7 sont facultatifs.

Durée : 2 heures 30 en classe.

Ex 1 :



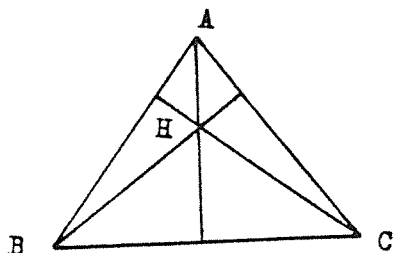
ABC est un triangle. Trace les parallèles aux côtés passant respectivement par A, B et C.

Ces parallèles se coupent en I, J et K.

a) Montre que A est le milieu de IJ, que B est le milieu de IK et que C est le milieu de JK.

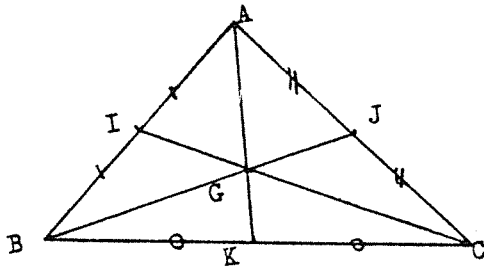
b) Que représentent les médiatrices du triangle IJK pour le triangle ABC pour le triangle ABC ? Que peux-tu en conclure ?

Ex 2 :



H est l'orthocentre du triangle ABC. Quel est l'orthocentre du triangle ABH ? Justifie.

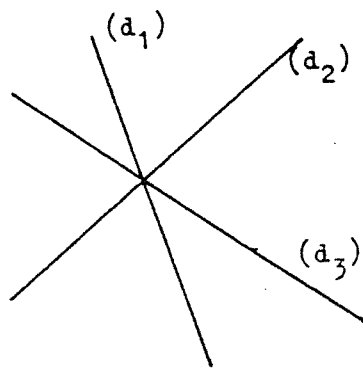
Ex 3 :



Trace A' symétrique de A par rapport à G .
 a) Montre que $BGCA'$ est un parallélogramme.
 b) Prouve que $GA = 2 GK$.

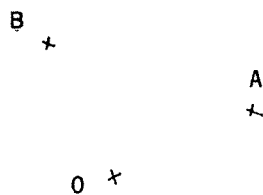
Ex 4 :

a)



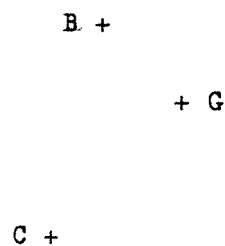
Les trois droites (d_1) , (d_2) et (d_3) sont les hauteurs du triangle ABC . Construis ce triangle.

b)



O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC . Construis ce triangle. Justifie.

c)



G est le centre de gravité du triangle ABC . Trace ce triangle. Justifie.

Ex 5 :

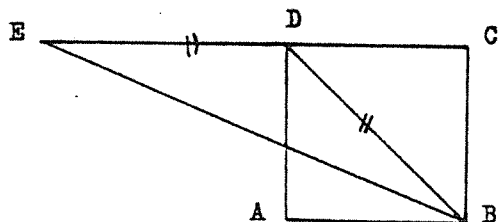
Les triangles ABC et DBC sont respectivement rectangles en A et D. Les droites (BD) et (AC) se coupent en H. Les droites (BA) et (CD) se coupent en E.

Démontrez que (EH) est perpendiculaire à (BC).

Ex 6 :

Démontrez que les bissectrices des angles d'un triangle sont concourantes.

Ex 7 :



ABCD est un carré. E est le point de (DC) tel que $ED = DB$.
Montrez que (BE) est la bissectrice de $\widehat{DBA}$.

Les mots hauteurs, médianes, médiatrices, bissectrices sont connus des élèves. Les propriétés de concours ont été constatées les années précédentes. Dans cette partie il s'agit de les démontrer.

CHOIX DE L'ACTIVITÉ

Cette activité permet de réinvestir des propriétés vues en 6ème et 5ème sur les médiatrices et le cercle.

OBJECTIFS DES EXERCICES

Exercice 1

- démontrer que des hauteurs sont concourantes en se ramenant à un problème connu.

Exercice 2

- comprendre le sens du mot orthocentre.

Exercice 3

- démontrer que les médianes sont concourantes
- réinvestir les énoncés du fichier.

Exercice 4

- construire en utilisant les propriétés de concours des hauteurs, des médianes et médiatrices.

Exercice 5

- démontrer en utilisant l'orthocentre.

Exercices 6 et 7

- revoir les propriétés des bissectrices.

PARTIE II

MANIPULATION D'INEGALITES

ACTIVITE 1 (Partie I)

Durée 20 mn.

Choisis trois nombres décimaux. Construis un triangle ayant ces trois nombres pour longueurs des côtés.

OBJECTIFS :

Contrat : les exercices 1, 2 et 4 sont obligatoires.

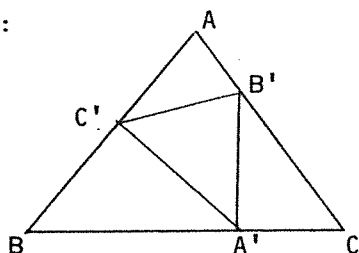
Durée : 1 heure.

Ex 1 :

Voici des triplets (groupe de trois nombres). Précise si ces nombres peuvent être les longueurs des côtés d'un triangle. Si oui, précise si le triangle est rectangle, isocèle ou équilatéral. Justifie ta réponse.

2	3	7
2,5	2	1,5
1	2	1
3	3	3
0,5	0,2	9

Ex 2 :



Démontre que le périmètre de $A' B' C'$ est plus petit que celui de ABC .

Ex 3 :

$PARL$ est un parallélogramme.

Démontre que la somme des longueurs des diagonales est inférieure au périmètre du parallélogramme.

Ex 4 :

TAC est un triangle. M est le milieu de $[AC]$.

Démontre que TM est inférieure à la demi-somme de TA et TC .

Ex 5 :

ABC est un triangle isocèle en A . Soit D un point de $[AC]$.

Démontre que $BD > DC$

ACTIVITE 2 (Partie II)

Durée : 45 mn

TOC est un triangle rectangle en T. Choisis un point M sur [OC].
On appelle P et Q les projections orthogonales de M sur (TC) et (OT).
Où faut-il placer M pour que QP soit le plus petit possible ?

OBJECTIFS :

Contrat : un exercice obligatoire.

Durée : 15 mn.

Ex 1 :

Démontre que la somme des longueurs des trois hauteurs d'un triangle est inférieure au périmètre de ce triangle.

ACTIVITE 3 (Partie III)

Place deux points A et B tels que $AB = 8$. I est le milieu de $[AB]$.
Où doit-on placer un point M pour que :

- et
- $d(M, (AB)) < 4,8$
 - $d(M, I) > 5$
 - $d(M, B) \leq 8$
 - $d(M, B) > d(M, A)$

OBJECTIFS :

Contrat : l'exercice 1 est obligatoire.

Durée : 2 heures.

Ex 1 :

(d) est la médiatrice du segment $[AB]$. Choisis un point M quelconque dans le demi-plan de frontière (d) qui contient le point B.
Montre que $MB < MA$.

Ex 2 :

Marque deux points A et B. Comment faut-il placer le sommet C pour que le triangle ABC soit quelconque ? (scalène)

Ces parties n'ont pas été expérimentées. Elles sont à relier avec la partie "Inéquations" (fascicule 2, Travaux Numériques) : les exercices des parties I et II ont pour objectifs d'apprendre à manipuler les règles de calculs sur les inégalités.

Partie I -

CHOIX DE L'ACTIVITÉ

Nous avons voulu faire ressortir le côté paradoxal de l'inégalité triangulaire : trois nombres quelconques ne sont pas nécessairement les mesures des côtés d'un triangle.

Cette activité permet, en outre, d'aborder le cas d'égalité qui conduit à l'alignement des trois points.

OBJECTIFS DES EXERCICES

Exercice 1 :

- connaissant 3 nombres, savoir si ces trois nombres peuvent être les mesures des côtés d'un triangle et si oui, savoir la nature du triangle.

Exercice 2 et 3 :

- additionner membre à membre des inégalités.

Exercice 4 :

- diviser les deux membres d'une inégalité par un nombre positif.

Exercice 5 :

- retrancher un même nombre des 2 membres d'une inégalité.

PARTIE II

CHOIX DE L'ACTIVITÉ

Cette activité peut être résolue par tâtonnement, par gestion de données (en posant $x = OM$ et en étudiant PQ en fonction de x , ou géométriquement en utilisant les propriétés du rectangle.

Pour démontrer le résultat il faut connaître la propriété de la distance d'un point à une droite.

Objectif de l'exercice :

- réinvestir les règles vues précédemment.

PARTIE III

CHOIX DE L'ACTIVITÉ

C'est une activité de synthèse et de découverte (régionnement du plan par la médiatrice). Ce dernier résultat validé provisoirement pour résoudre l'exercice est démontré à l'exercice 1. Les données du texte obligent à faire un dessin propre.

Objectif de l'exercice 2

Synthétiser les connaissances (triangle isocèle, équilatéral, rectangle).

PARTIE III
TRANSFORMATIONS

INSTEAD OF A CONCLUSION

— *from the book "The End of the World"* —

Activité 1

Un carrelage mal posé !

Un carrelage a été mal posé. Cependant Roger Nial en a fait un jeu.
Il a inventé un chemin pour aller de A à B, ce chemin correspond à un code.
Peux-tu trouver ce code ? (Feuilles 1, 2 et 3).

OBJECTIFS:

Ex 1 :

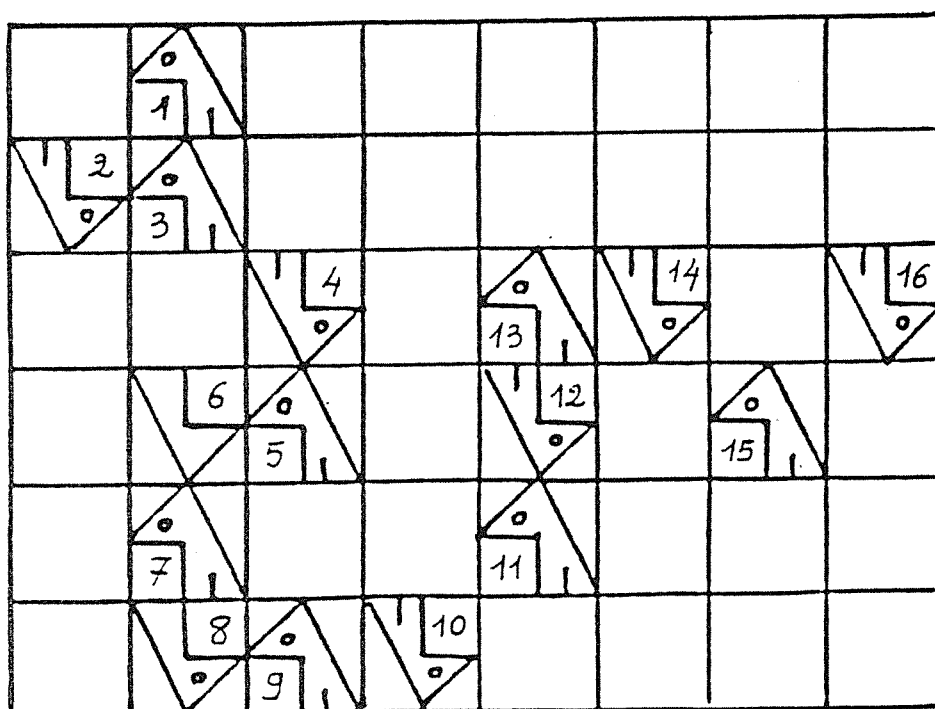
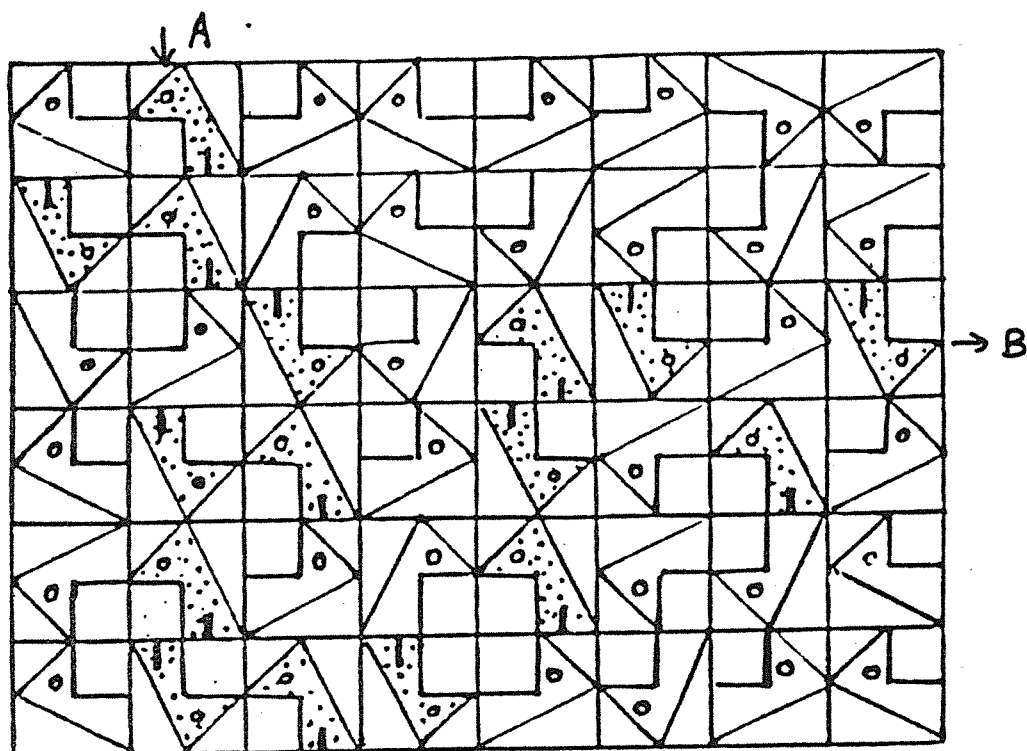
Sur la feuille 4, identifie les transformations.
Dans les cas où cela est possible, indique les éléments de la transformation (axes, centres de symétrie, de rotation, glissement,...).

Ex 2 :

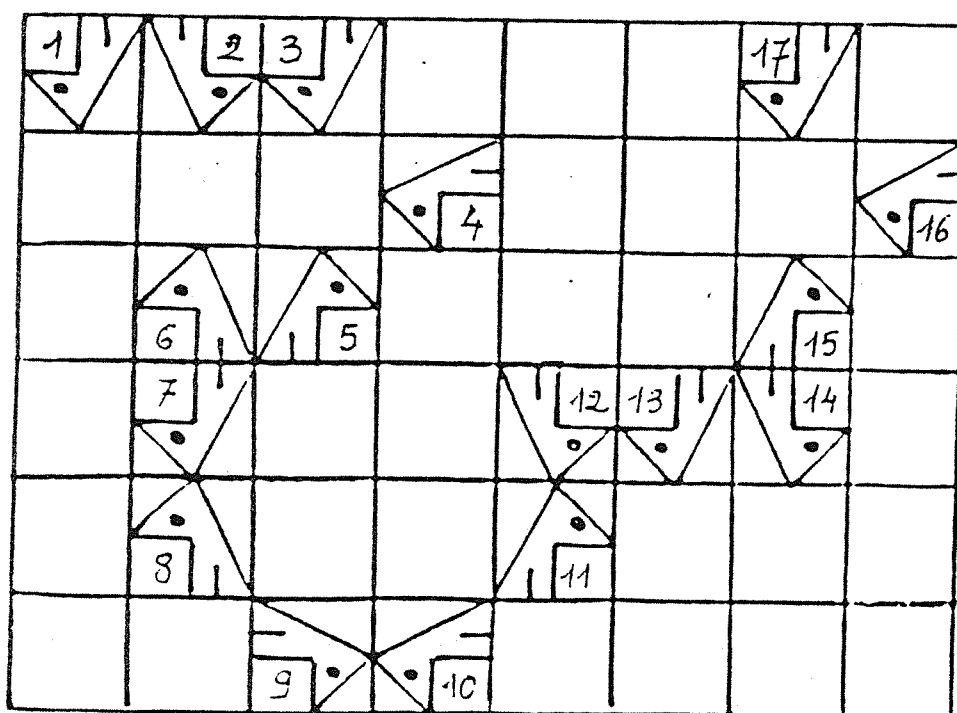
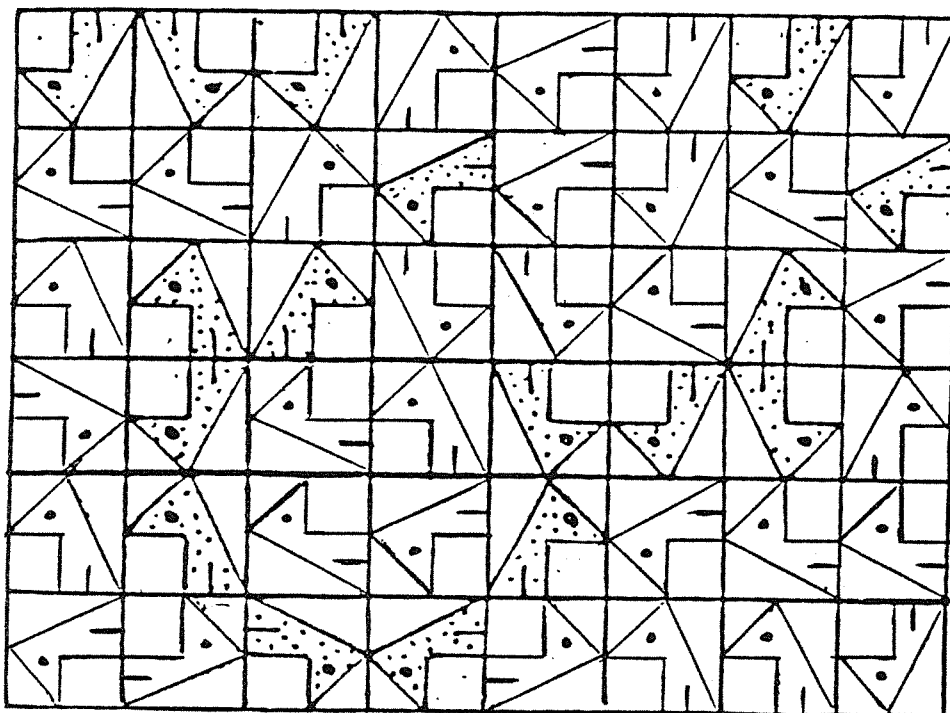
Feuille 5, comment passe-t-on du chinois n° 1 au chinois n° 2 ?
du chinois n° 1 au chinois n° 3 ?
du chinois n° 1 au chinois n° 4 ?
du chinois n° 1 au chinois n° 5 ?

Fais une recherche analogue avec les deux autres dessins.

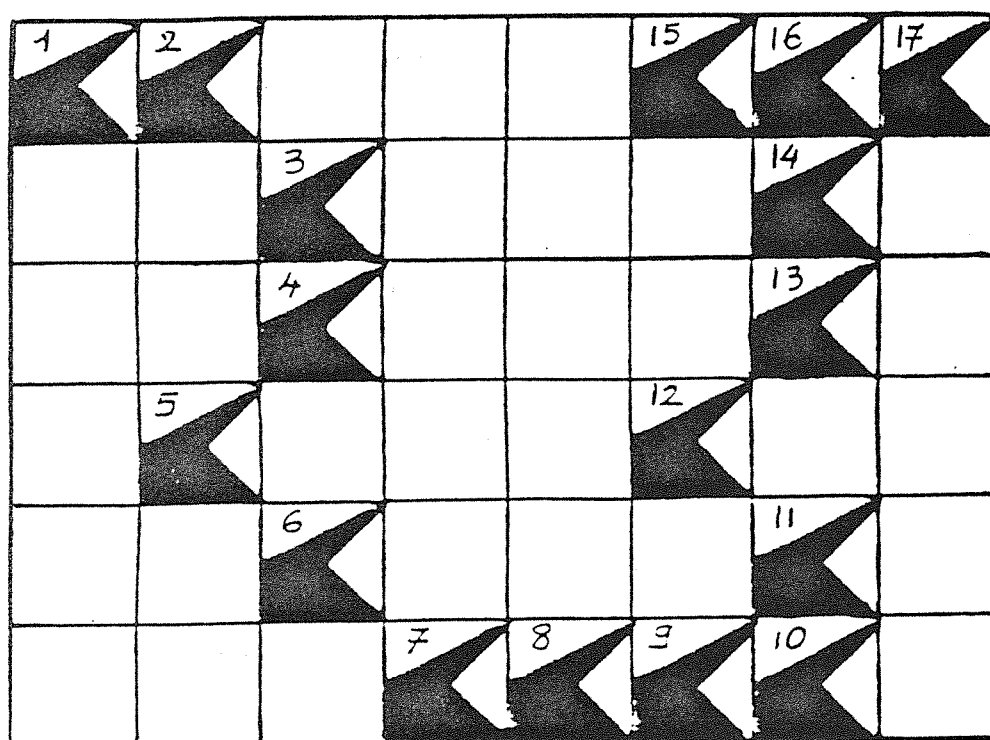
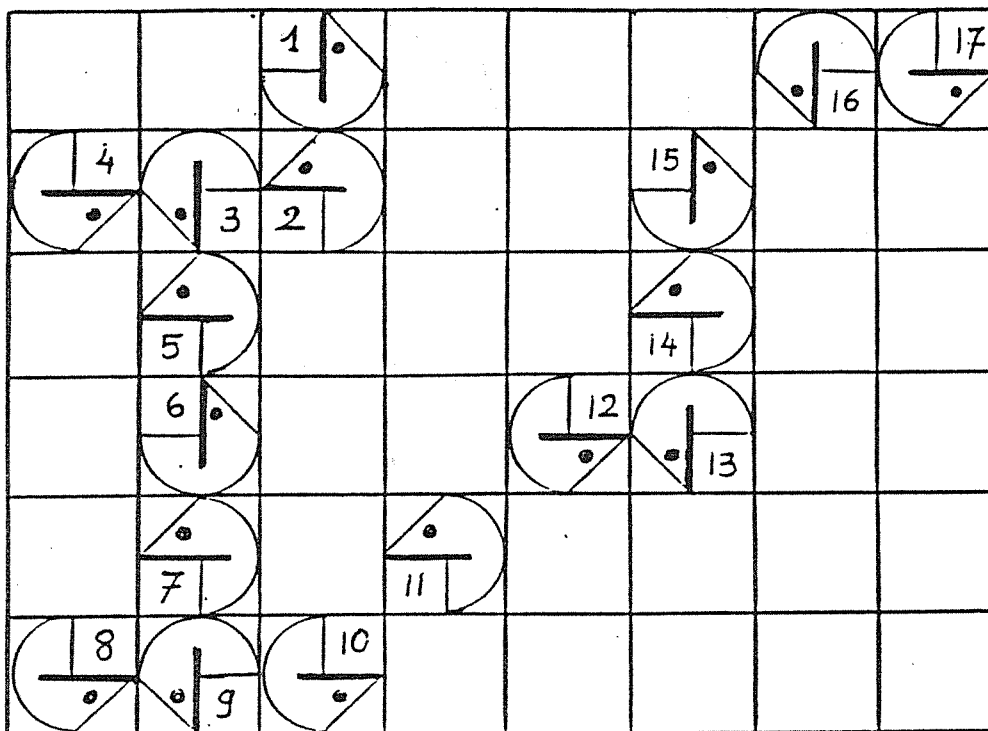
Feuille n° 1

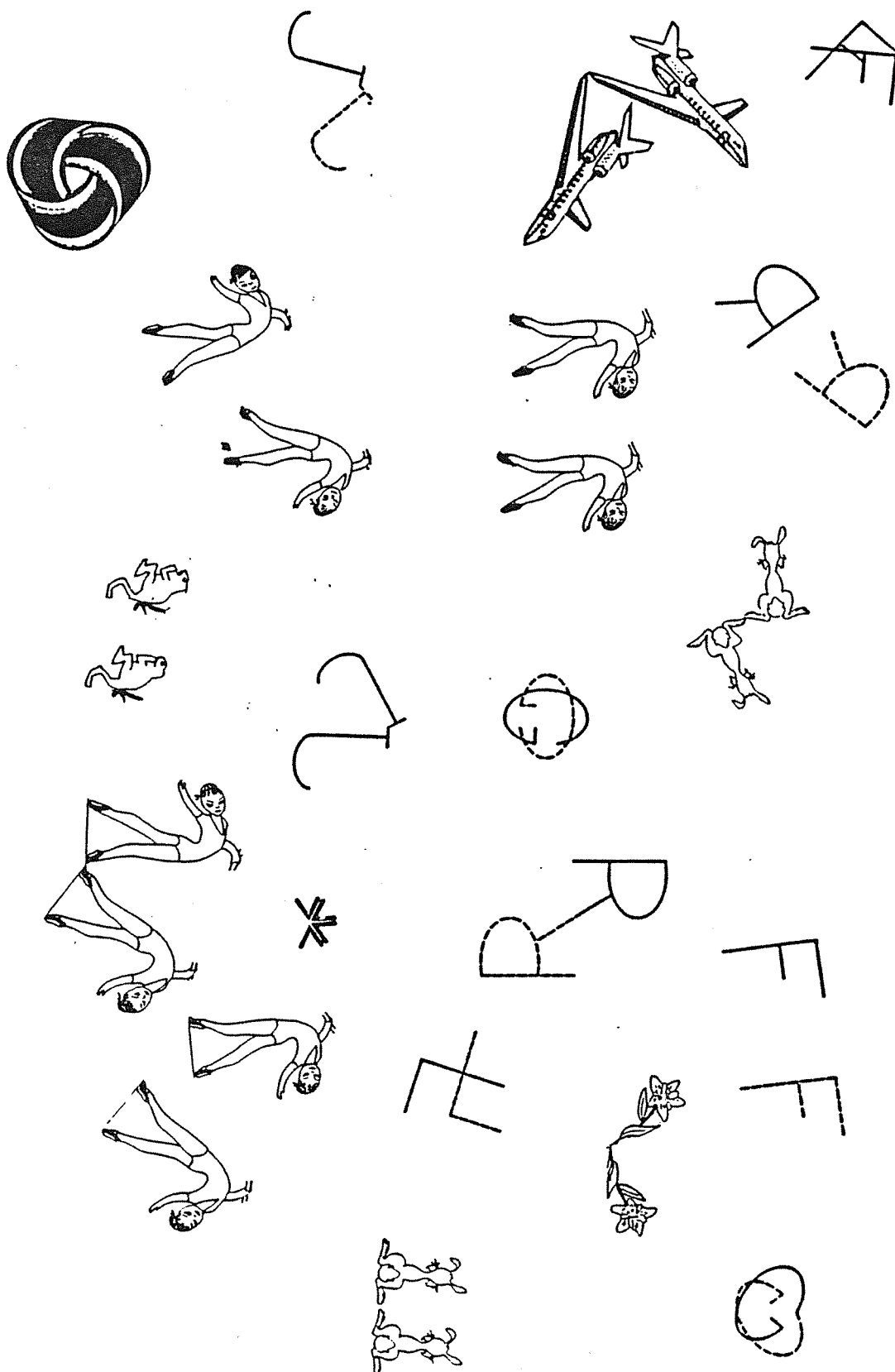


Feuille n° 2

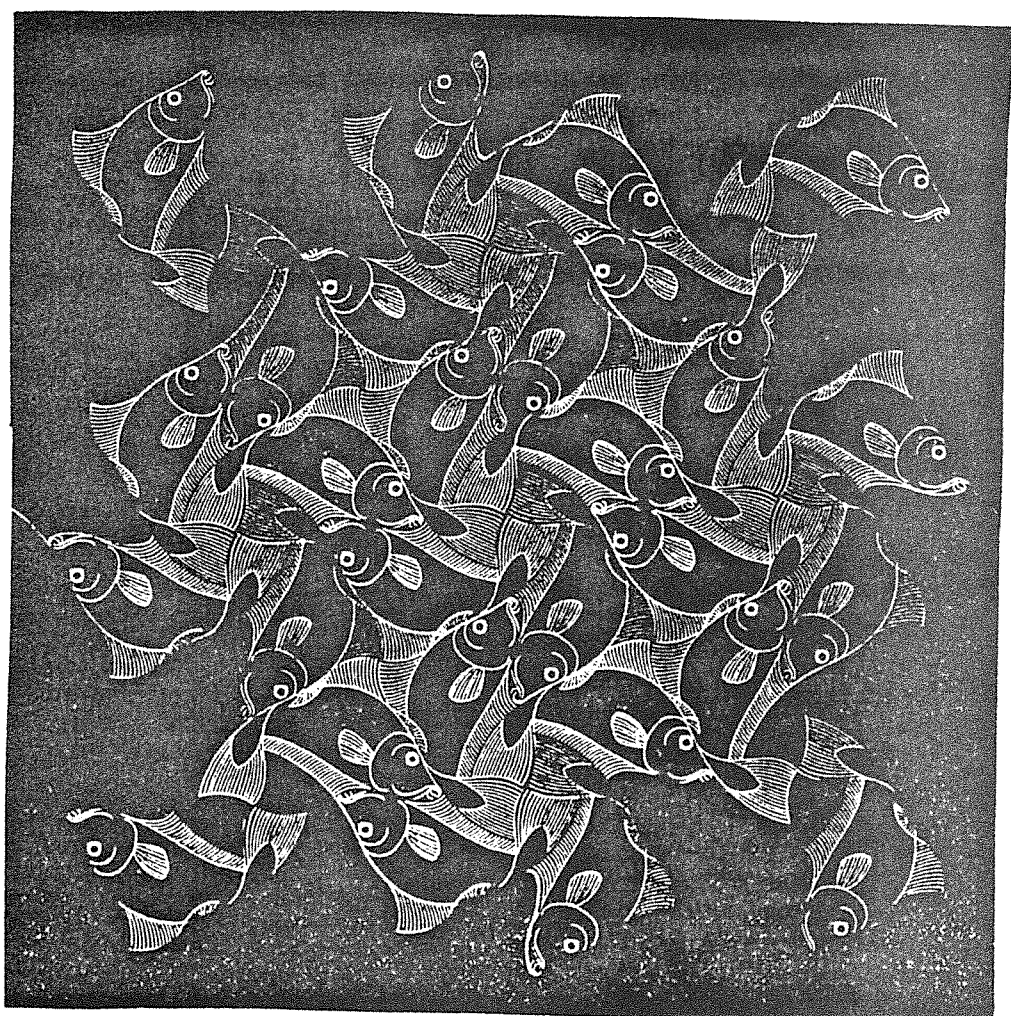
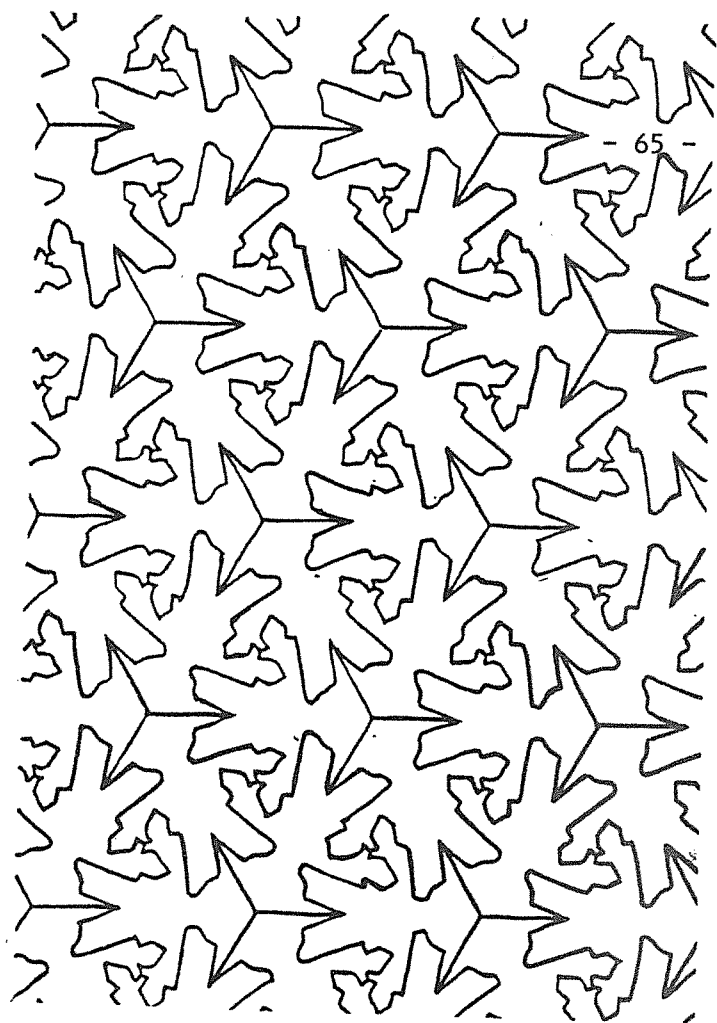
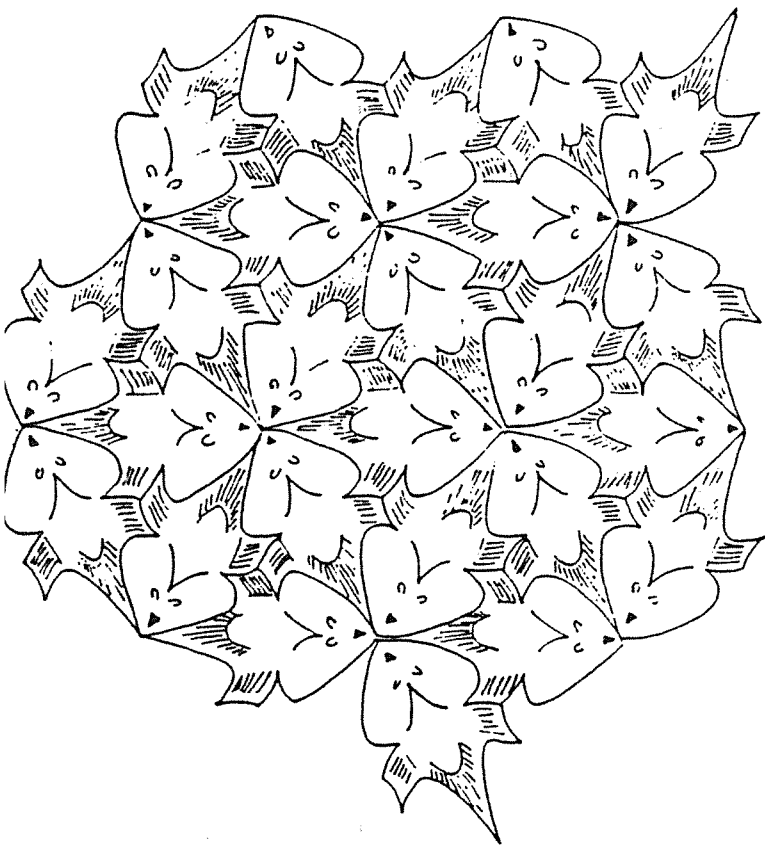


Feuille n° 3



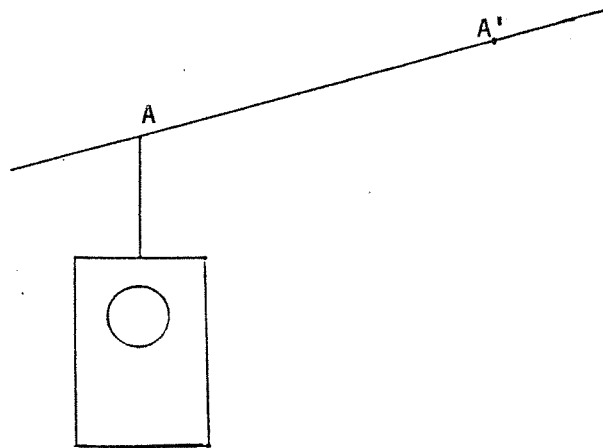


Feuille n° 5



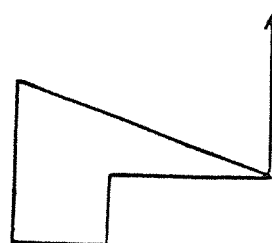
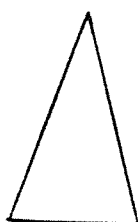
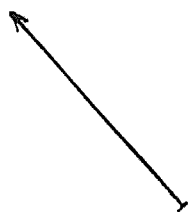
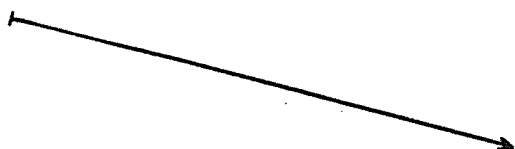
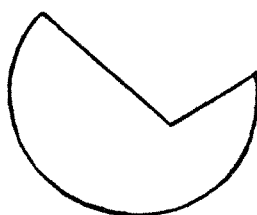
ACTIVITE 2

Construis à l'aide des instruments, avec une méthode la plus simple possible, l'image du téléphérique dans la translation qui amène A en A'.

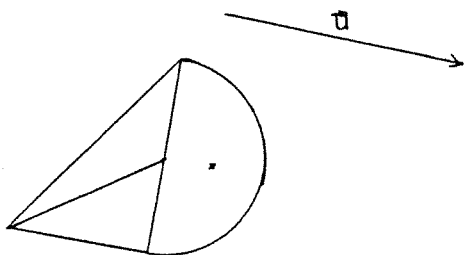


OBJECTIFS:

Dessine à main levée l'image de la figure dans la translation indiquée.

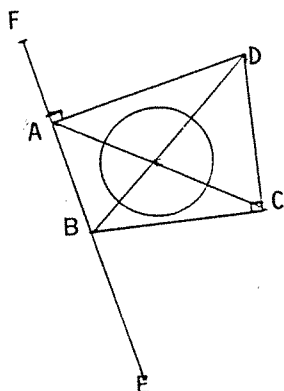


Ex 1 :



Construis l'image de cette figure dans la translation de vecteur $\vec{u}$. Explique.

Ex 2 :

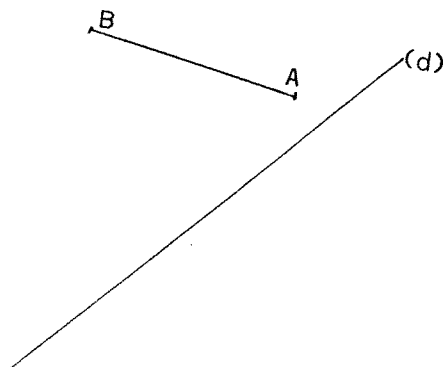


Construis l'image de cette figure dans la translation :

- a) de vecteur $\vec{AD}$ (en rouge)
- b) de vecteur $\vec{FB}$ (en vert)
- c) de vecteur $\vec{AC}$ (en bleu)

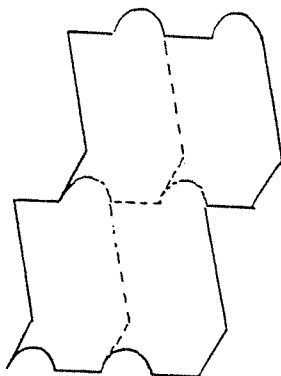
Explique.

Ex 3 :

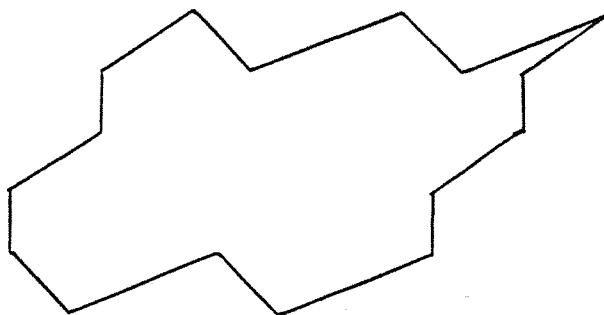


Construis l'image de cette droite (d) par la translation de vecteur $\vec{AB}$ puis de vecteur $\vec{BA}$. Explique.

Ex 4 : (facultatif).



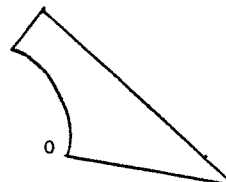
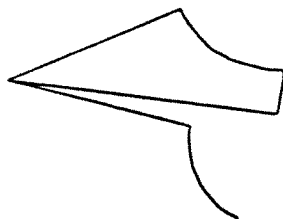
Comme dans l'exemple précédent, la figure suivante est composée de 4 motifs qui se déduisent les uns des autres par translation. Complète les motifs.



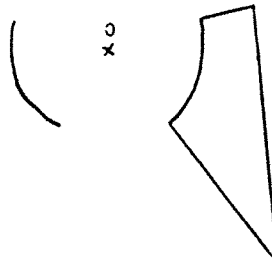
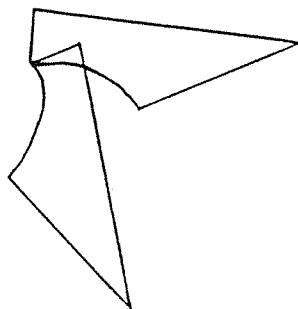
Activité 3

Complète à main levée les figures pour avoir une rotation de centre O .
Dans chaque cas, tu indiquerai :

- le sens de la rotation par une flèche
- le centre de la rotation O
- l'angle de rotation.

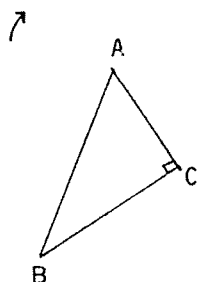


Angle de rotation : 72°



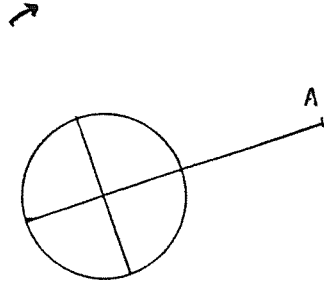
Objectifs :

Ex 1 :



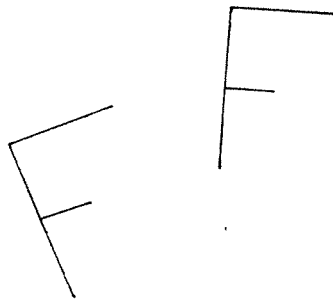
Construis la figure image du triangle ABC dans la rotation de centre A et d'angle $\hat{A}$. Explique.

Ex 2 :



Construis l'image de la figure par la rotation de centre A et d'angle 60° .
Explique.

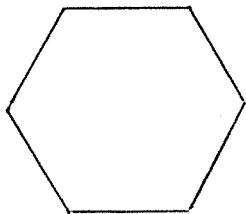
Ex 3 :



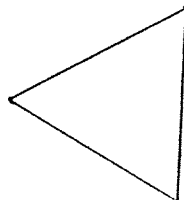
Cette figure présente une rotation.
Comment trouver le centre à l'aide
des instruments ? Comment pouvoir
mesurer l'angle ?

Ex 4 :

Les figures suivantes ont-elles un centre de rotation, un (des) axe(s) de symétrie ? Pourquoi ?



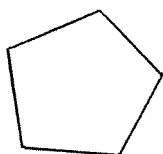
hexagone régulier



triangle équilatéral



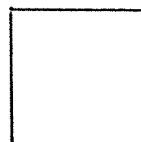
triangle isocèle



pentagone régulier

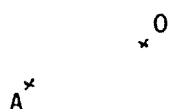


rectangle



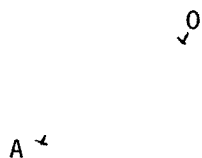
carré

Ex 5 :



O est le centre d'un triangle équilatéral dont A est un sommet.
Construis-le.
Explique.

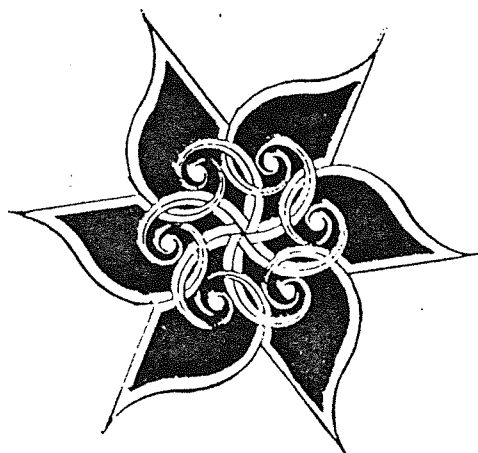
Ex 6 :



O est le centre d'un hexagone régulier dont A est un sommet.
Construis-le.
Explique.

Ex 7 :

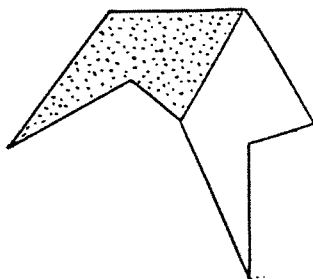
Constructions de rosaces



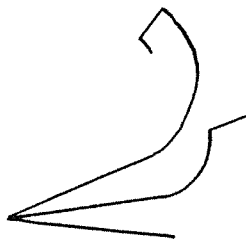
a) Voici une rosace.

Comment construit-on une rosace ?

b) Ceci est le début d'une rosace (le motif de base est pointillé).
Complète-la.



c) La rosace effacée !
Trouve le motif minimum et construis la rosace.



OBJECTIFS :

- 1) Savoir identifier une transformation ($\Rightarrow$ savoir différencier les différentes transformations).
- 2) Savoir construire une figure transformée en utilisant implicitement (ou explicitement ?) les conservations.

DUREE : 6h.

QUELQUES REMARQUES :

- Savoir identifier :

doit on exiger qu'un élève sache trouver les éléments caractéristiques des transformations ?

Cela pose problème. En ce qui concerne la rotation on peut, pour la reconnaître remarquer que les figures sont superposables et qu'elles ont été "tournées" sans avoir été retournées.

On utilise alors le théorème (implicitement) : "un déplacement qui n'est pas une translation est une rotation. Pour autant les éléments ne sont pas déterminés.

Deuxième problème : ne risque t-on pas de voir apparaître des théorèmes-élèves du type : "tout antidéplacement est une symétrie axiale"

ce qui sera énoncé :

"la figure est retournée donc c'est une symétrie".

- Conséquences :

La reconnaissance de la rotation passe essentiellement par "l'isométrie qui tourne" et qui ne retourne pas. Nous devons donc la mettre en évidence. Il faut aller au-delà de cette simple reconnaissance pour identifier les éléments. Pour la rotation par exemple on recherche avec du papier calque et la pointe du compas le centre par tâtonnement.

TRANSFORMATIONS

DUREE : 4h 30 en tout.

ACTIVITE 1

OBJECTIFS :

Découvrir et caractériser les transformations du programme.
Réinvestir les symétries déjà étudiées en 6ème-5ème.

DEROULEMENT ET COMMENTAIRES

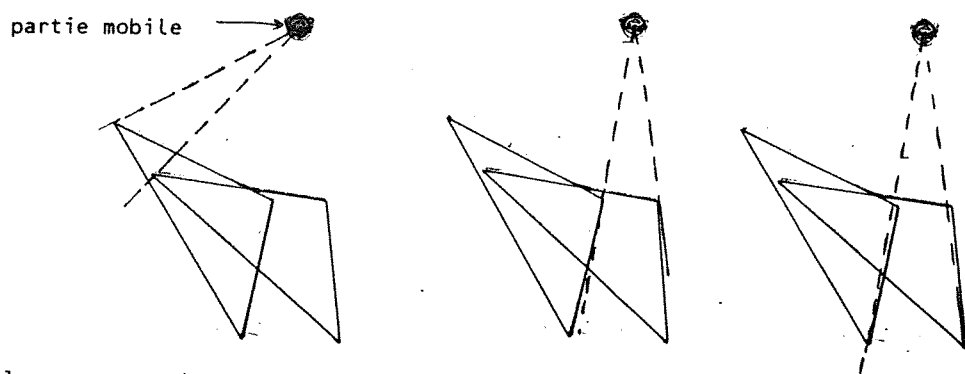
Les deux symétries sont rapidement reconnues, les axes et centres sont bien placés. Pour les rotations les élèves voient aussitôt le mouvement. La recherche des centres de rotation se fait pour certains à l'aide de calque. La translation est vue comme un glissement suivant une direction.

Lors de la synthèse, chaque dessin de carrelage est projeté à l'aide du rétroprojecteur et les transformations sont caractérisées.

Ainsi pour la symétrie axiale, la figure est retournée, l'axe est médiatrice des extrémités sont les points images.

Pour la symétrie centrale, la figure n'est pas retournée mais elle a tourné d'un demi-tour. Les segments dont les extrémités sont les points images ont tous le même milieu.

Dans l'activité, les rotations étaient de 90° ou 180° . Le domaine est étendu au cas général grâce à un transparent projeté.

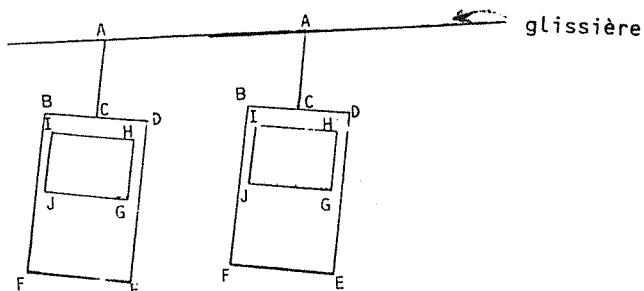


Il en ressort

° les trois éléments indispensables pour caractériser la rotation :
centre, angle, sens ;

° la place de la figure : tournée mais non retournée.

La translation est également illustrée au rétroprojecteur.



La notion de vecteur, comme invariant qui caractérise ce déplacement est dégagée. La figure image est vue comme glissée le long d'un rail, elle n'a pas tourné et n'est pas retournée.

Les élèves font remarquer que dans les quatre cas les figures images ont même forme et mêmes dimensions que les figures origines.

L'objectif est formulé par les élèves et noté sur le dossier :

Je dois savoir reconnaître une transformation et préciser ses éléments caractéristiques.

EXERCICES

Pour l'exercice 1 les élèves disposent de calque pour déterminer par tâtonnement les centres de rotation. Cet exercice est exécuté rapidement et corrigé en projetant les dessins au rétroprojecteur. Il n'y a pas d'erreur notable.

A l'exercice 2, la feuille des "Chinois" est projetée. Des chinois sont numérotés, le passage d'un chinois à l'autre ne pose pas de difficulté. Une rotation plus difficile à identifier a été découverte par tous à l'aide du calque.

Un travail analogue est fait sur les deux autres figures à la maison.

ACTIVITE 2

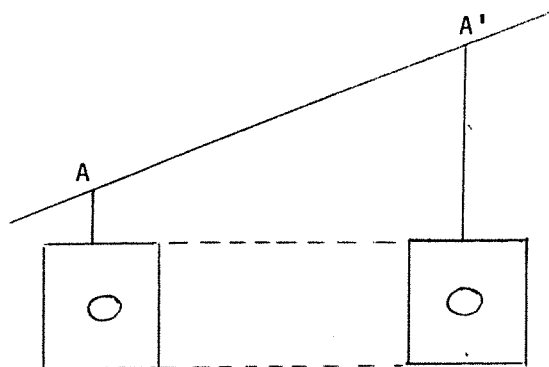
Les différentes méthodes utilisées sont explicitées par les élèves lors de la synthèse.

- * Tracés de segments parallèles à (AA') et de même mesure AA' pour chaque point caractéristique de la figure.

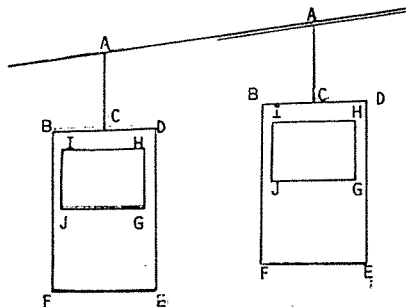
- * Tracé de la figure image en utilisant le fait que la figure image a les mêmes dimensions et n'a pas tourné.

- * Tracés utilisant des méthodes mixtes.

Une erreur a été commise par un élève, elle a été corrigée par les élèves du groupe.



Le transparent est alors projeté.



Les déplacements sont visualisés par des flèches antécédents-images.

Une fois le rétroprojecteur éteint, il reste au tableau des segments parallèles, de même longueur et orientés de A vers A', c'est l'occasion de faire le lien entre le vecteur et,

- les segments parallèles et de même longueur,
- le parallélogramme.

La notation $\overrightarrow{AA'}$ est introduite ainsi que les égalités $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'}$ en liaison avec les parallélogrammes.

Les objectifs sont notés sur le dossier.

Je dois savoir

- construire l'image d'une figure par translation
- trouver le vecteur caractérisant une translation.

EXERCICES

Les dessins à main levée permettent de mettre la notion en place. Les élèves ressentent le besoin de prendre quelques points repères en mesurant.

Deux erreurs sont apparues à l'exercice 2 :

- confusion entre vecteur $\overrightarrow{AD}$ et vecteur $\overrightarrow{DA}$
- translation de vecteur $2\overrightarrow{AD}$ et non de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

Des calques auto-correctifs sont mis à la disposition des élèves pour ces trois exercices.

ACTIVITE 3

La consigne a souvent dû être réexpliquée, les élèves ne voyant pas d'emblée que les mêmes éléments n'étaient pas demandés pour chaque dessin.

Pour le dernier dessin, une confusion a parfois été faite avec la symétrie orthogonale.

L'objectif est noté sur le dossier

Je dois savoir construire l'image d'une figure par rotation.

EXERCICES

Les exercices 1 et 2 ne posent pas de problème et sont réalisés rapidement.

Pour l'exercice 3, les élèves utilisent d'abord la recherche du centre par tâtonnement avec un calque comme pour l'exercice 1 de la partie 1.

La position précise du centre est trouvée après une bonne observation de la figure et en faisant le lien avec les médiatrices des cordes d'un cercle.

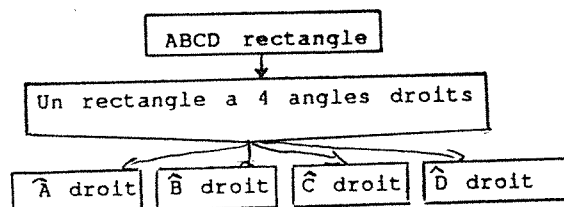
Cette position est admise et non justifiée.

Faute de temps en classe, le dossier est terminé à la maison.

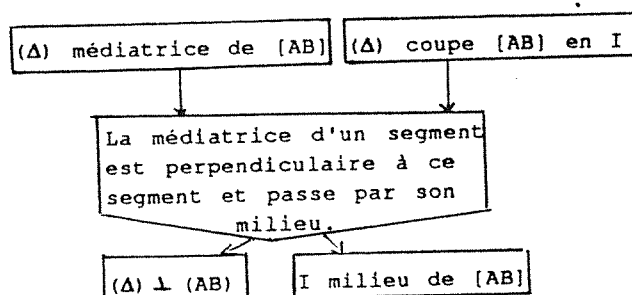
ANNEXE - FICHIER METHODOLOGIQUE (fin de 4ème)

COMMENT DEMONTRER QUE DEUX DROITES SONT PERPENDICULAIRES ?

1) En utilisant les angles d'un rectangle.



2) En utilisant la médiatrice d'un segment.



3) En utilisant l'énoncé réciproque de Pythagore.

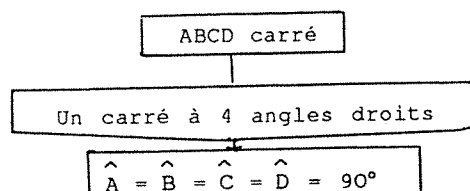
AB = ...	AC = ...	BC = ...
AB ² = ...	AC ² = ...	BC ² = ...

$$AB^2 + AC^2 =$$

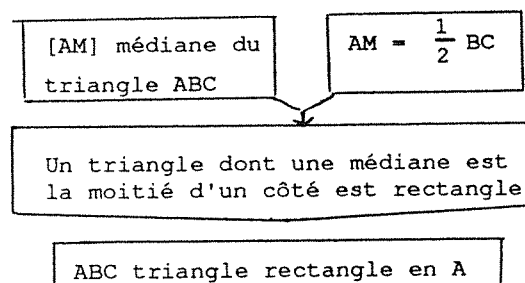
Un triangle ABC tel que $AB^2 + AC^2 = BC^2$ est rectangle en A.

ABC est un triangle rectangle en A

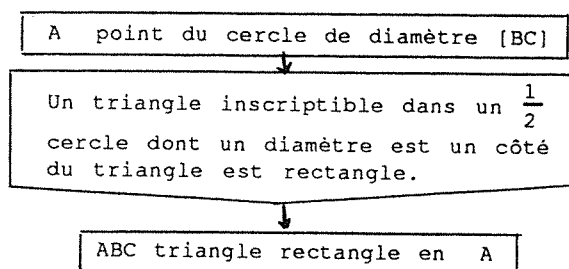
4) En utilisant les angles d'un carré.



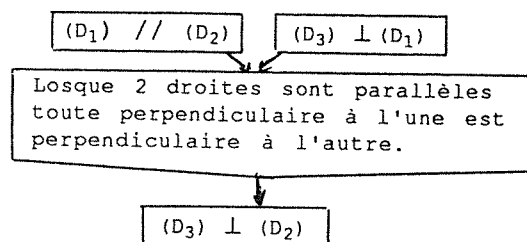
5) En utilisant la médiane dans un triangle.



6) En montrant qu'il est inscriptible dans un $\frac{1}{2}$ cercle.



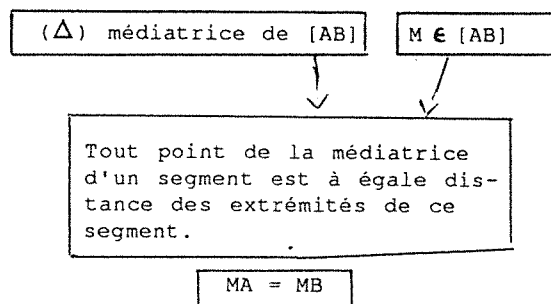
7) En utilisant des parallèles et des perpendiculaires.



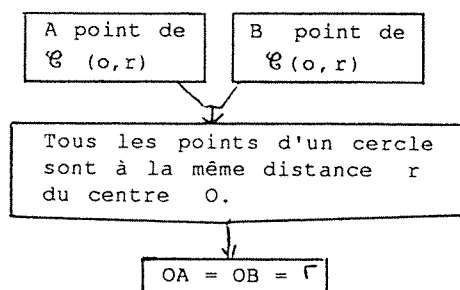
COMMENT MONTRER QUE DEUX DISTANCES SONT EGALES ?

1) En calculant.

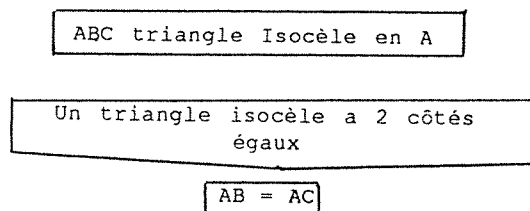
2) En utilisant la médiatrice d'un segment.



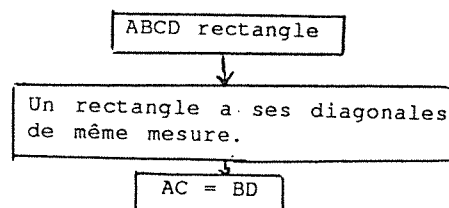
3) En utilisant les points d'un cercle.



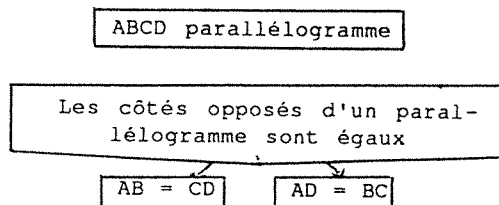
4) En utilisant le triangle isocèle.



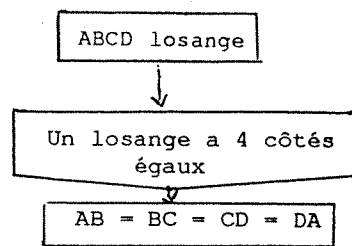
5) En utilisant les diagonales d'un rectangle.



6) En utilisant les côtés opposés d'un parallélogramme.

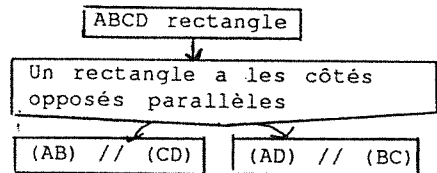


7) En utilisant les côtés d'un losange.

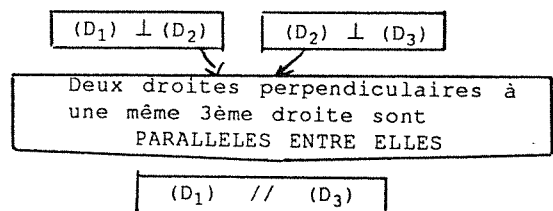


COMMENT MONTRER QUE DEUX DROITES SONT PARALLELES ?

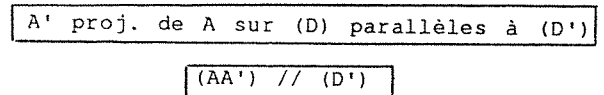
1) En utilisant les côtés opposés d'un rectangle.



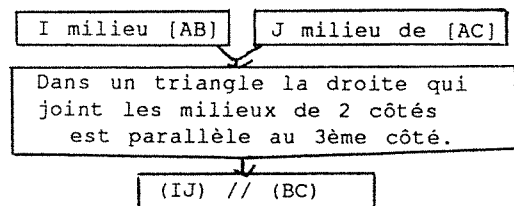
2) En montrant qu'elles sont perpendiculaires à une même 3ème droite



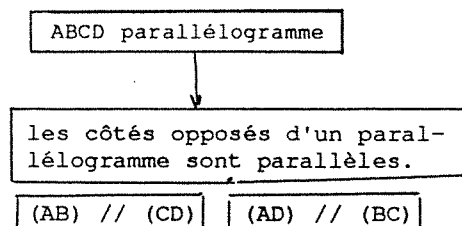
3) En utilisant les projections.



4) En utilisant les milieux des côtés d'un triangle.

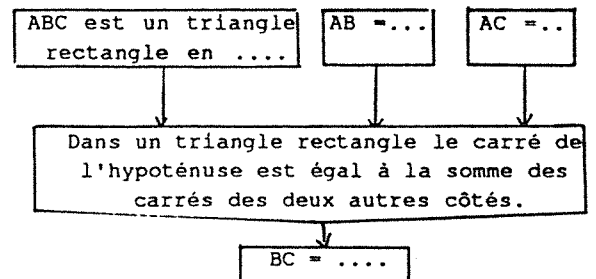


5) En utilisant les côtés opposés d'un parallélogramme

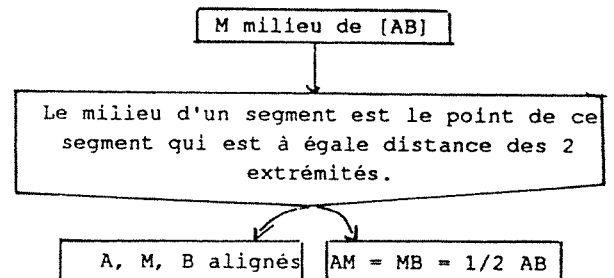


COMMENT CALCULER UNE LONGUEUR ?

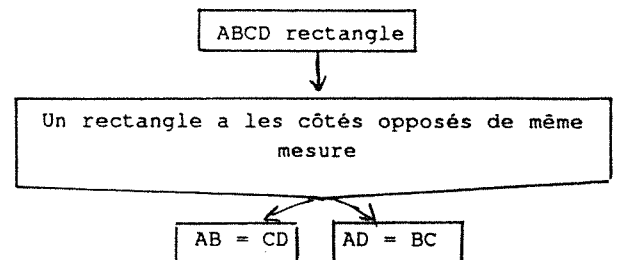
1) En utilisant l'énoncé de Pythagore



2) En utilisant le milieu d'un segment.

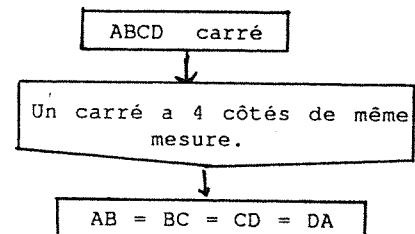


3) En utilisant les côtés opposés d'un rectangle.

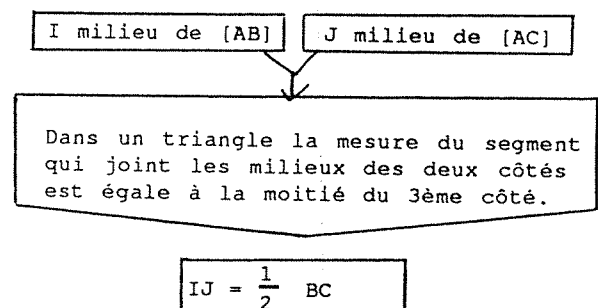


4) En utilisant le cosinus d'un angle dans un triangle rectangle.

5) En utilisant les côtés d'une carré.

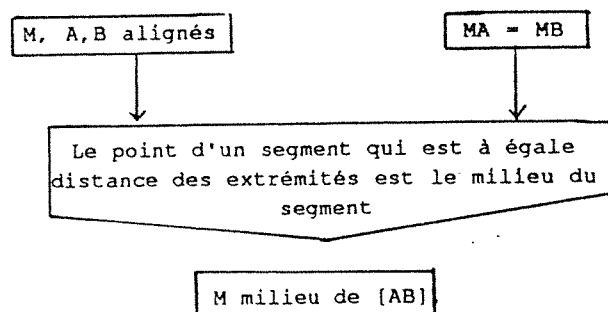


6) En utilisant les milieux des côtés dans un triangle.

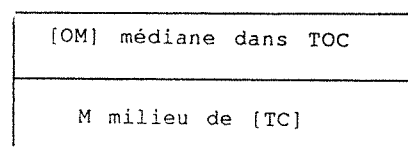


COMMENT MONTRER QU'UN POINT EST MILIEU D'UN SEGMENT ?

1) En montrant qu'il est sur le segment et à égale distance des extrémités.

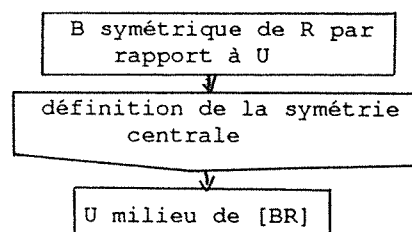


2) En utilisant la médiatrice d'un segment.

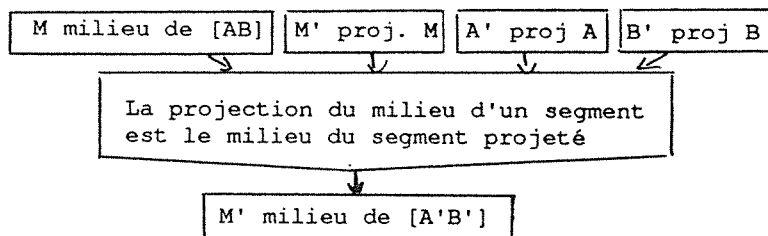


3) En utilisant une médiane dans un triangle.

4) En utilisant la symétrie centrale.

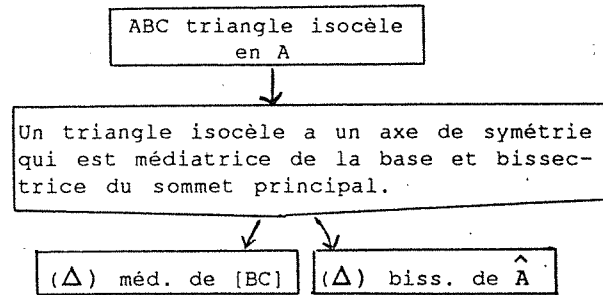


5) En utilisant les projections.

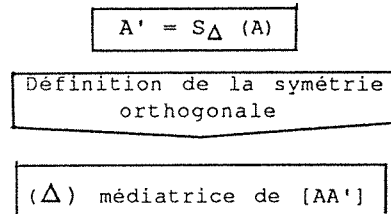


COMMENT MONTRER QU'UNE DROITE EST MEDIATRICE D'UN SEGMENT ?

1) En utilisant l'axe de symétrie d'un triangle isocèle.

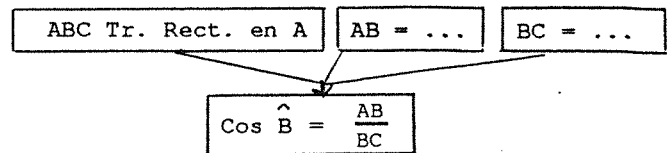


2) En utilisant la symétrie orthogonale.

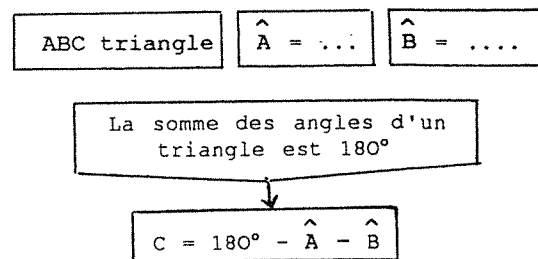


COMMENT TROUVER LA VALEUR D'UN ANGLE ?

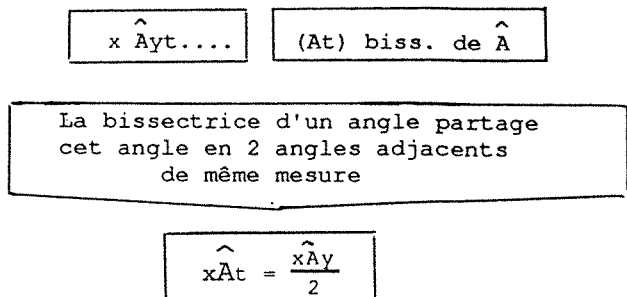
1) En calculant le cos dans un triangle rectangle.



2) En utilisant la somme des angles d'un triangle.



3) En utilisant la bissectrice d'un angle.



COMMENT MONTRER QU'UNE DROITE EST TANGENTE A UN CERCLE ?

1) En montrant qu'elle est perpendiculaire à un rayon.

$(\Delta) \perp (OA)$ A point de $\mathcal{C}$ (o, r)

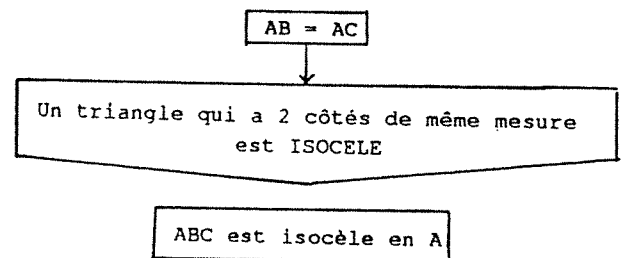
Un droite Δ à un rayon d'un cercle en un point de ce cercle est une tangente à ce cercle.

(Δ) tangente à $\mathcal{C}$ en A

COMMENT DEMONTRER QU'UN TRIANGLE EST ISOCELE ?

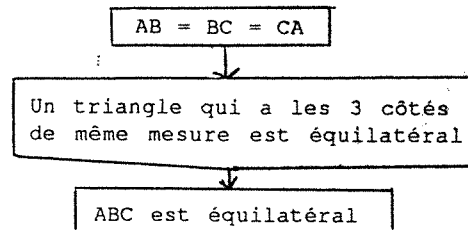
- 91 -

1) En montrant qu'il a deux côtés de même mesure.

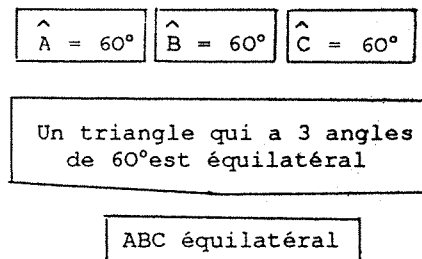


COMMENT MONTRER QU'UN TRIANGLE EST EQUILATERAL ?

1) En montrant qu'il a les côtés de même mesure.

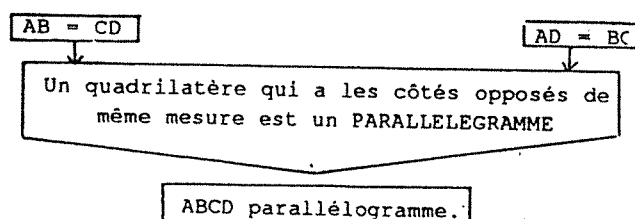


2) En montrant qu'il a 3 angles égaux de 60° .

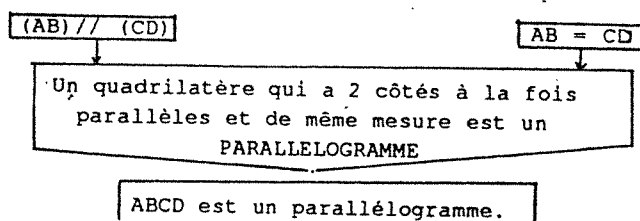


COMMENT DEMONTRER QU'UN QUADRILATERE EST UN PARALLELOGRAMME ?

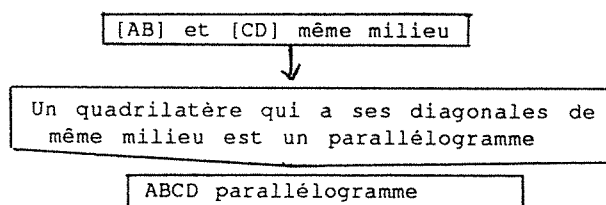
1) En montrant qu'il a les côtés opposés de même mesure



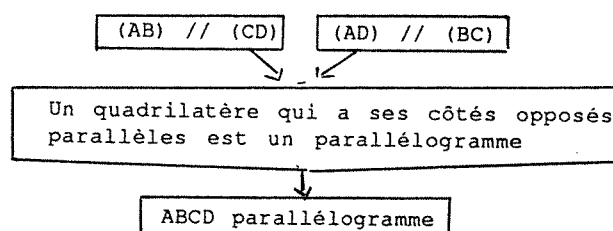
2) En montrant qu'il a deux côtés à la fois // et de même mesure.



3) En montrant que ses diagonales ont le même milieu.

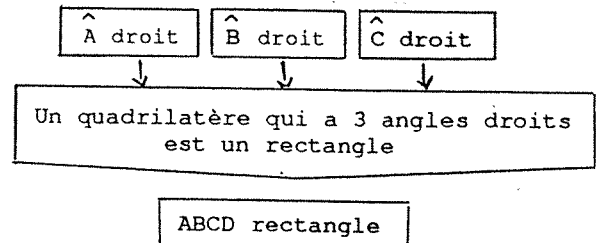


4) En montrant qu'il a ses côtés opposés parallèles.

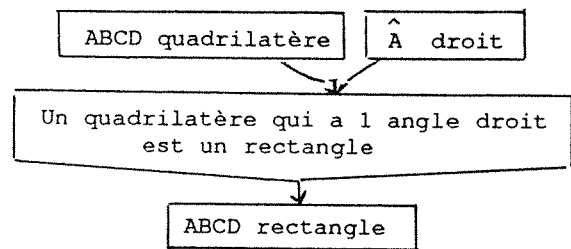


COMMENT DEMONTRER QU'UN QUADRILATERE EST UN RECTANGLE ?

1) En montrant qu'il a 3 angles droits.

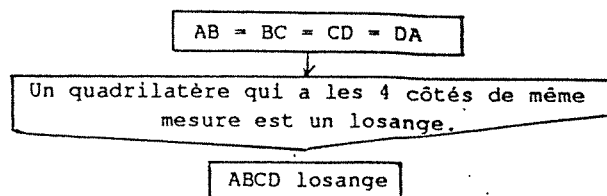


2) En montrant que c'est un quadrilatère qui a un angle droit.

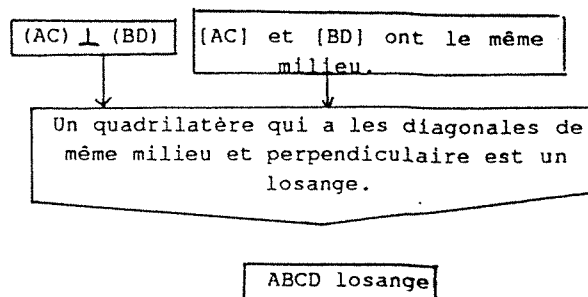


COMMENT MONTRER QU'UN QUADRILATÈRE EST UN LOSANGE ?

1) En montrant qu'il a 4 côtés de même mesure.

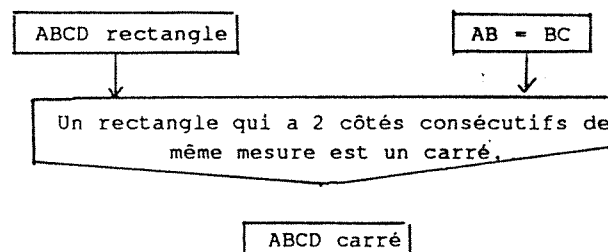


2) En montrant qu'il a les diagonales de même milieu et perpendiculaires.



COMMENT DEMONTRER QU'UN QUADRILATERE EST UN CARRE ?

1) En montrant que c'est un rectangle qui a 2 côtés consécutifs de même longueur.



COMMENT DEMONTRER QU'UNE DISTANCE EST INFÉRIEURE À UNE AUTRE ?

1) En utilisant l'inégalité triangulaire.

ABC triangle

Dans un triangle chaque côté
est inférieure à la somme des
deux autres

$$\begin{aligned} AB &< AC + CB \\ AC &< AB + BC \\ BC &< BA + AC \end{aligned}$$

2) En utilisant la distance d'un point
à une droite.

M Proj. de A sur (D)

B point de (D)

La distance d'un point à sa proj. sur
(D) est inférieure à la distance de
A à tout autre point de D

$$AM < AB$$

Auteurs: D. GAUD - J.P. GUICHARD - M. MAROT - C. ROBIN - M. ROBIN.

Titre: Géométrie de 4ème
Fascicule 2
- Formulation d'une démonstration
- Manipulations d'inégalités
- Transformations

Editeur: IREM de POITIERS

Date: Octobre 1988

Niveau: Collège

Mots-clé: Expérimentation - Quatrième - Orthogonalité - Parallélisme
Inégalité triangulaire - Rotation - Translation - Droites
remarquables du triangle

Résumé: Ce fascicule propose une mise en oeuvre commentée des parties
suivantes du programme de 4ème :
- Triangle rectangle
- Problèmes de plus courte distance
- Transformation de figures par translation ou rotation.

Premier tirage : 800 exemplaires.