UNIVERSITE de POITIERS

Institut de Recherche
sur l'Enseignement des Mathématiques

Mai 1988

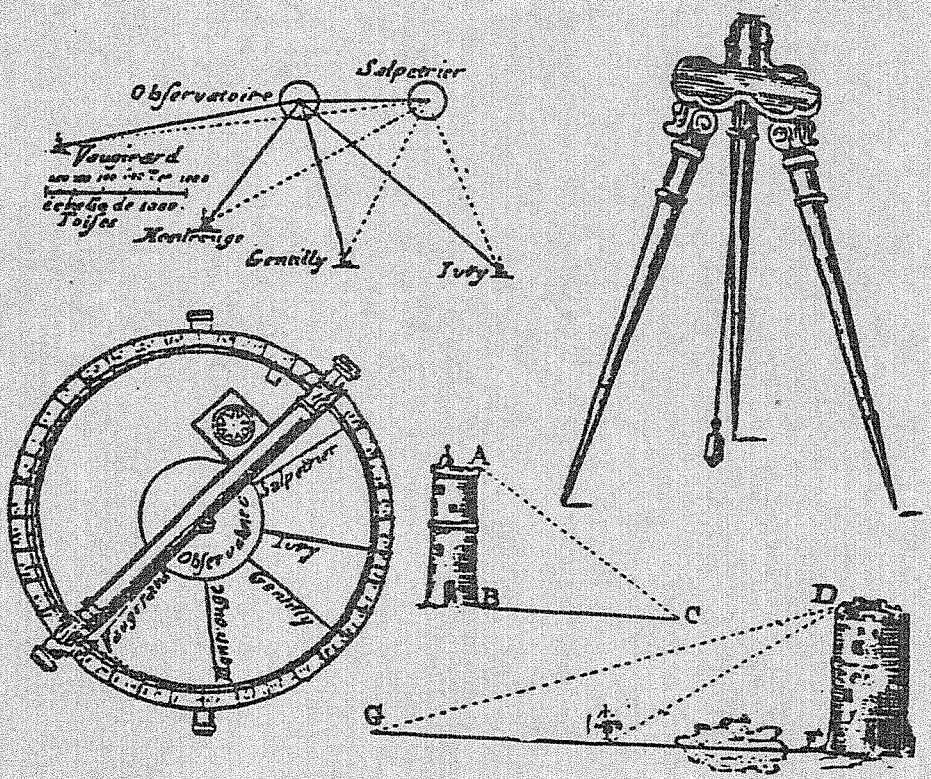
GEOMETRIE DE 4ème

Fascicule 1

Initiation à la démonstration

Calculs d'Eléments métriques

(compte rendu de l'expérimentation des programmes de 4ème)



GAUD. D - GUICHARD . JP - MAROT. M - ROBIN. C - ROBIN. M.

Géométrie de 4ème

Fascicule 1

- **INITIATION A LA DEMONSTRATION**

- **CALCULS D'ELEMENTS METRIQUES**
  (compte rendu de l'expérimentation des programmes de 4ème).

1ère Partie - Initiation à la démonstration. P. 1

Pour y voir plus clair sur la démonstration.

* 36 questions. P. 3

* **Aides** pour répondre :

- **Aide n° 1 :** Preuves et démonstrations. P. 5
- **Aide n° 2 :** Comment valide-t-on dans la communauté mathématique ? P. 19
- **Aide n° 3 :** Styles de démonstration. P. 27
- **Aide n° 4 :** Place et rôle de la démonstration et de la preuve dans l'activité mathématique. P. 41
- **Aide n° 5 :** Naissance de la démonstration. P. 51
- **Aide n° 6 :** Démonstration et enseignement. P. 59

2ème partie - Calculs d'éléments métriques. P. 79

- Conditions d'expérimentation. P. 81
- Démarche en géométrie. P. 83
- Calculs d'éléments métriques.
  . Pythagore P. 87
  . Cosinus P. 119
  . Sphère. P. 133

INITIATION A LA DEMONSTRATION

Questions pour approfondir la notion de démonstration.

Nous proposons au lecteur cette liste de questions. **La lecture des aides** lui permettra de se faire une opinion. En ce sens nous ne donnons aucune réponse.

1. Qu'est-ce qu'une démonstration juste ?
2. Qu'est-ce qu'une démonstration élégante ?
3. Qu'est-ce qu'une démonstration astucieuse ?
4. Enseigner les mathématiques est-ce apprendre à démontrer ?
5. Quelles différences peut-on faire entre les mots "preuve", "raisonnement", "démonstration", "vérification" ?
6. La mesure peut-elle être une preuve ?
7. Un enfant de six ans sait-il raisonner ?
8. Une démonstration peut-elle être juste et non convaincante ?
9. Une démonstration peut-elle être fausse et convaincante ?
10. Quel est le rôle de la figure dans une démonstration ?
11. Pourquoi doit-on démontrer en mathématique ?
12. Quelle est la place de la démonstration dans l'activité mathématique ?
13. Quelle est la place de la démonstration dans l'enseignement des mathématiques au collège ?
14. Quel est le rôle de la démonstration ?
15. Démontre-t-on ailleurs qu'en mathématiques ?
16. Peut-on faire des mathématiques sans démontrer ?
17. Qui a inventé la démonstration ?
18. Qu'est-ce que démontrer ?
19. Est-ce utile de démontrer ?
20. L'induction est-elle utile pour démontrer ?
21. L'apprentissage de la démonstration est-il réservé à la géométrie ?
22. Un dessin est-il preuve ?
23. Un élève est-il apte à faire des raisonnements par l'absurde?
24. Un résultat, vérifié un certain nombre de fois, est-il prouvé ?
25. Existe-t-il différents types de preuves ?
26. Quel effet peut produire un contre-exemple ?
27. Initier au raisonnement déductif est-ce apprendre à démontrer ?
28. Qu'est-ce qu'une démonstration rigoureuse ?
29. Le symbolisme est-il utile à la démonstration ?
30. Peut-on tout démontrer ?
31. Doit-on tout démontrer ?
32. Une démonstration par pliage est-ce une démonstration ?
33. Doit-on démontrer des propriétés évidentes ?
34. Le raisonnement ne peut-il être que déductif ?
35. Peut-on apprendre à démontrer ?
36. Quelles propriétés choisir pour initier à la démonstration ?

Questions	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Aides	1 2 3	3	3	4 6	1	1	6	1 2	2 4	1 6 4	2 4 6	4 2	6 1	4	5	4

Questions	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Aides	 5	1	2 4	4	6	1	6 5	4 1	1 3	 4	 6	2 3			3 6

Questions	32	33	34	35	36
Aides	1 4	1	4	6	6

AIDE N° 1

Preuves et démonstrations

Preuve = démonstration

Preuve ≠ démonstration

Les deux fonctions de la démonstration

Les preuves, les explications, la démonstration

Dessin et démonstration

Conclusion

Bibliographie

PREUVES ET DEMONSTRATIONS

1. Preuve = démonstration.

Les mots preuve et démonstration, qui font partie du langage courant, ont un champ d'utilisation relativement étendu : de la démonstration du représentant de commerce pour prouver la qualité de son produit à celle du théorème de Pythagore, de la preuve par neuf à celle de la culpabilité d'un assassin, les sens de ces mots varient selon le contexte jusqu'à devenir parfois synonymes. C'est le cas en mathématiques où les mots prouver, montrer, démontrer sont souvent employés l'un pour l'autre. Voici un exemple éloquent extrait du problème de Bac série C (Juin 1986. Nouvelle Calédonie).

"2. Montrer que F est dérivable sur $[0 + \infty[$

3. Démontrer que, pour tout $x > 0$, $F(x) \leq \int_0^x \frac{dt}{e}$.

4. Prouver que, pour tout $x > 0$, $F(x) \leq \int_0^{2x} e^{-2t}\, dt$."

Il pourrait être intéressant cependant de voir s'il n'y a pas des habitudes, des types de questions qui appellent plutôt un terme que l'autre. Par exemple si l'on feuillette les annales du Brevet 87 on est frappé de voir qu'apparaissent presque exclusivement montrer et démontrer (un seul "prouver" : Nice I).
D'autre part, en France on semble, dans les manuels, privilégier le mot démonstration pour les théorèmes alors que dans les pays anglo-saxons c'est le mot "proof" qui est usuel.

2. Preuve ≠ démonstration

Pourtant, même si dans sa pratique courante le mathématicien confond les mots preuve et démonstration, ces deux mots existent et sont nettement distingués en logique. Il suffit de consulter des dictionnaires pour y voir un peu plus clair.
Voici la définition du mot **démonstration** dans deux dictionnaires.

* "1. Opération mentale qui établit une vérité (preuve, induction) .
- Log. (opposé à preuve). Raisonnement déductif destiné à établir la vérité d'une proposition à partir de prémisses considérées comme vraies.
- Par ext. Tout ce qui sert à démontrer.V. Preuve ; argument; justification.
2. ....."[1].

* "**A.** Au sens étymol.: action de montrer.
B. Log. - Action de démontrer. Le processus qui démontre.
1. Au sens strict : opération mentale qui établit la vérité d'une proposition déductivement, c'est-à-dire en la rattachant par un lien nécessaire à d'autres propositions évidentes ou déjà démontrées. En ce sens n'est pas syn. de preuve.
2. Au sens large (syn. de preuve) : toute opération mentale qui établit la vérité d'une proposition, y compris la preuve (ou démonstration) indirecte et la preuve par les faits" [2].

En parallèle voici deux définitions du mot **preuve**.

* "Opération amenant l'intelligence d'une manière indubitable et universellement convaincante (du moins en droit), à reconnaître la vérité d'une proposition considérée d'abord comme douteuse.

La preuve est, en général, un raisonnement ; mais non pas toujours : elle peut consister en une présentation de faits qui lève le doute. De là vient que ce mot, en un sens pour ainsi dire matériel, s'applique aussi au fait, au document qui prouve quelque chose.
D'autre part, la preuve se distingue, par son caractère de vérité, des formes du raisonnement hypothético-déductif, où l'on montre seulement qu'il y a un lien nécessaire entre certaines prémisses et certaines conséquences, sans rien prononcer assertoriquement sur celles-ci. L'idée de **preuve** appartient au même ordre de notions logiques que celles de doute, de réfutation, de certitude" [3].

* "**A**. Processus intellectuel par lequel on prouve, c'est-à-dire par lequel on établit la vérité d'une assertion mise en doute.
Syn. : démonstration.
B. Ce qui est ou peut être mis en avant pour prouver.
Ce fait, ce témoignage, ce texte, sont des preuves de ce que j'avance. Preuves matérielles." [2].

Ce que l'on peut conclure de la confrontation de ces définitions c'est qu'au sens strict preuve et démonstration différent.

Premièrement par la **forme** . La démonstration a une forme "canonique" : c'est un raisonnement déductif qui relie une proposition à d'autres tenues pour vraies. Alors que la preuve peut prendre des formes diverses.

Deuxièmement par la **fonction**. La preuve sert à lever un doute. La démonstration sert à établir un lien nécessaire entre des "vérités".
Avant de développer ces deux points, citons une analyse de Foulquié qui fait bien le point sur preuve et démonstration.

"**Preuve**"est un terme du langage courant et il évoque un contexte psychologique et social : la preuve s'attaque à un doute ou à une objection réelle, elle a pour objet de faire partager une conviction.

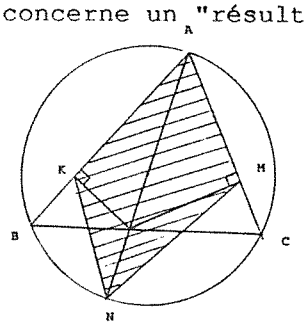
Démonstration est un terme du vocabulaire scientifique, et il évoque le processus de la pensée hypothético-déductive qui cherche à savoir, non pas ce qui est, mais ce qui serait si certaines conditions qui constituent la donnée du problème se trouvaient réalisées. De plus, si toutes les **démonstrations** peuvent être appelées **preuves**, toutes les preuves ne constituent pas des **démonstrations**.(...). Dans certains cas, pour prouver on se contente de produire un fait qui met fin au doute : nous avons là une preuve qui n'est pas une démonstration". (Cité dans l'article **preuve** de [2]).

3. Les deux fonctions de la démonstration.

Nous allons développer le deuxième point évoqué précédemment en nous plaçant dans le cas où la preuve prend la forme particulière de la démonstration, c'est-à-dire dans le cas usuel du mathématicien qui emploie indifféremment le mot prouver à la place de démontrer.
Nous pouvons alors distinguer deux types de démonstration.

La démonstration pour **convaincre.**
Cadre : concerne un "résultat" non évident.

Ex 1 :



Démontrer que :
aire AKNM = aire ABC.

Ex 2 : somme des 3 angles d'un triangle.
Elle a fonction de preuve : convaincre, être sûr, rendre évident.
Réponse à la question : **Est-ce vrai** ? Il s'agit donc de savoir.

Type de preuve particulier : codifié.

Dans ce cas, **démontrer = prouver**

La démonstration pour **expliquer.**
Cadre : concerne un "résultat" évident.
Ex 1 : si deux droites sont parallèles, toute droite qui coupe l'une coupe l'autre.

Ex 2 : si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses angles opposés ont même mesure.

Ex 3 : $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé : A(8;-2) B(2;6) C(0;2).
Montrer que le triangle ABC est rectangle.

Elle a fonction d'explication : montrer des liens logiques.

Réponse à la question : **Pourquoi est-ce vrai** ? Il s'agit donc de comprendre.

Type d'explication particulier : codifié.

Dans ce cas, **démontrer = montrer**

Nous retrouvons cette distinction dans les deux courants de pensée qui ont favorisé l'éclosion de la démonstration dans la mathématique grecque.
(Voir : **Naissance de la démonstration**) .

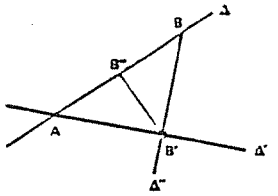
Toutefois elle n'est pas toujours facile à mettre au jour car elle est fonction du lieu d'où l'on parle, du niveau d'exigence où l'on se place : il n'y a pas d'évidence absolue (même chez les mathématiciens. Voir la citation de Thom Aide 2). Pour le commun des mortels si deux droites sont parallèles, toute droite qui coupe l'une coupe l'autre. Mais pour le mathématicien tant qu'il n'y a pas eu démonstration il subsiste un doute : c'est d'ailleurs le jeu qu'il joue ou qu'il se joue.
Néanmoins cette distinction nous paraît importante car elle permet de nous mettre au clair sur le pourquoi des démonstrations que nous faisons à nos élèves. Si nous faisons une démonstration pour convaincre les élèves que si deux droites sont parallèles toute droite qui coupe l'une coupe l'autre, nous faisons fausse route, car il faudrait que les élèves comprennent pourquoi cela pourrait être faux. Par contre si nous le faisons pour montrer

comment cet énoncé peut se rattacher à des propositions tennues pour vraies, nous donnons aux élèves des éléments pour comprendre quel est le jeu du mathématicien.
Si pour convaincre les élèves de la vérité du théorème de Pythagore, nous faisons une démonstration du type de la suivante :

THÉOREME DE PYTHAGORE

Soient deux axes portés par deux droites Δ et Δ' de directions distinctes qui se coupent en A, soit B un point distinct de A sur la droite Δ, B' l'image de B par la projection orthogonale de Δ sur Δ', k le rapport de cette projection. Le point B' est aussi la projection orthogonale de A sur la droite Δ'' déterminée par les points distincts B et B'; soit alors k' le rapport de projection orthogonale de l'axe porté par Δ sur un axe porté par Δ'' et B'' la projection orthogonale de B' sur Δ.

fig. 11



Nous avons les relations :

$$\overline{AB''} = k.\overline{AB'} \quad \text{et} \quad \overline{AB'} = k.\overline{AB} \quad \text{donc} \quad \overline{AB''} = k^2.\overline{AB}$$

de plus :

$$\overline{B''B} = k'.\overline{B'B} \quad \text{et} \quad \overline{B'B} = k'.\overline{AB} \quad \text{donc} \quad \overline{B''B} = k'^2.\overline{AB}$$

on en déduit que

$$\overline{AB} = \overline{AB''} + \overline{B''B} = k^2.\overline{AB} + k'^2.\overline{AB} = (k^2 + k'^2)\,\overline{AB}$$

donc :

$$\overline{AB} = (k^2 + k'^2)\,\overline{AB} \quad \text{et puisque} \quad A \neq B \quad \overline{AB} \neq 0 \quad k^2 + k'^2 = 1.$$

Cette relation a été obtenue en supposant $\Delta \not\perp \Delta'$ et $\Delta' \perp \Delta''$.
Si maintenant $\Delta \not\perp \Delta'$ et $\Delta' \perp \Delta''$ alors $|k| = 1$ et comme alors $\Delta \perp \Delta'' : k' = 0$, on a encore :

$$k^2 + k'^2 = 1 + 0 = 1.$$

THEOREME DE PYTHAGORE (PREMIERE FORME)

Si k et k' sont les rapports de projections orthogonales d'un même axe sur deux axes de supports perpendiculaires, on a la relation :

$$k^2 + k'^2 = 1$$

THÉORÈME DE PYTHAGORE (DEUXIÈME FORME)

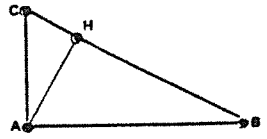
Si M et N sont deux points d'une droite Δ et M' et N' les projections orthogonales de ces points sur une droite Δ', si k est le rapport de projection orthogonale d'un axe porté par Δ sur un axe porté par Δ', on a :

$$\overline{M'N'} = k.\overline{MN} \quad \text{donc} \quad |\overline{M'N'}| = |k|.|\overline{MN}|$$

ce qui se traduit par :

$$d(M', N') = |k|.d(M, N)$$

fig. 8



Soient alors A, B et C trois points distincts du plan Euclidien, tels que les droites (AB) et (A, C) soient orthogonales.
Si k et k' sont les rapports de projections orthogonales, d'un axe porté par (BC) sur deux axes portés respectivement par (AB) et (AC) on a :

$$d(A, B) = |k|.d(B, C) \quad \text{et} \quad d(A, C) = |k'|.d(B, C)$$

or comme (AB) $\perp$ (AC) l'application de la première forme du théorème de Pythagore nous donne :

$$k^2 + k'^2 = 1$$

donc :

$$[d(A, B)]^2 + [d(A, C)]^2 = k^2\,[d(B, C)]^2 + k'^2\,[d(B, C)]^2 = (k^2 + k'^2)\,[d(B, C)]^2$$

et finalement :

$$[d(A, B)]^2 + [d(A, C)]^2 = [d(B, C)]^2$$

Nous avons bien des chances de ne convaincre personne. Par contre un découpage type puzzle chinois (voir partie Pythagore 2ème séquence : réfléchir sur la démonstration. Deuxième exemple*) risque d'être bien plus efficace. Mais nous aurons donné là une preuve (au sens strict) et non une démonstration.
D'autre part cette distinction des deux fonctions de la démonstration permet de construire un apprentissage de la démonstration par deux biais :
- des preuves de plus en plus élaborées,
- des explications de plus en plus élaborées.

Ces deux biais sont les deux fonctions entre lesquelles "hésite la démonstration : une fonction psychologique (déterminer l'assentiment) et une fonction logique (organiser les propositions en système)", comme le dit Blanché [5]. Nous terminerons ce paragraphe avec son analyse.

Si l'on met au premier plan la vérité du contenu, alors démonstration et définition deviennent de simples moyens pour l'établir. Le rôle de la définition sera de faire concevoir exactement le sens des termes qui composent les propositions, celui de la démonstration de faire admettre la vérité de celles-ci. Définition et démonstration relèvent alors, à proprement parler, de la rhétorique ; leur fonction est essentiellement psychologique : pédagogique ou didactique. Dans l'autre hypothèse, au contraire, elles n'ont plus qu'une fonction logique : relier tous les termes et toutes les propositions en un ensemble systématique. Or il est clair, d'abord que les deux exigences, efficience psychologique et rigueur logique, tirent parfois en des sens opposés, ensuite que, dès qu'on s'attache à la première, on rend la valeur d'une démonstration ou d'une définition relative, et même doublement relative : une démonstration ou une définition n'est plus bonne ou mauvaise, elle est seulement meilleure ou moins bonne qu'une autre ; et cette qualité, à son tour, varie selon le lecteur ou l'auditeur. Pédagogiquement, la bonne définition, la bonne démonstration, c'est celle que l'élève comprend. Cela peut mener loin. Pour l'enfant, la vraie définition de l'ellipse n'est pas celle qu'il apprend par cœur, mais quelque chose comme : *un rond allongé* ; la bonne démonstration n'est pas celle qu'il écrit sur son cahier, c'est la figure qui l'accompagne. Seulement, si la bonne démonstration est l'argument efficace, où s'arrêtera-t-on ? On connaît l'anecdote de ce précepteur princier qui, à bout de ressources, parvint néanmoins à faire admettre son théorème en s'écriant enfin, excédé : Monseigneur, je vous en donne ma parole d'honneur !

Il semble que, chez les mathématiciens eux-mêmes, les deux fonctions n'aient pas toujours été clairement dissociées. On comprendrait mal, sinon, que certains aient partagé l'étonnement que provoque, chez le profane, mainte démonstration d'Euclide : pourquoi s'évertuer à nous persuader par un raisonnement difficile de choses dont nous sommes d'avance parfaitement assurés ? ou même à démontrer le plus évident par le moins évident ? La *Logique* de Port-Royal compte parmi les « défauts qui se rencontrent d'ordinaire dans la méthode des géomètres » celui de « prouver des choses qui n'ont pas besoin de preuves ». Quelques-uns cherchent des explications et des excuses, comme fait Clairaut (1) : « Qu'Euclide se donne la peine de démontrer que deux cercles qui se coupent n'ont pas le même centre, qu'un triangle renfermé dans un autre a la somme de ses côtés plus petite que celle des côtés du triangle dans lequel il est renfermé : on n'en sera pas surpris. Ce géomètre avait à convaincre des sophistes obstinés, qui se faisaient gloire de se refuser aux vérités les plus évidentes ; il fallait donc qu'alors la géométrie eût, comme la logique, le secours des raisonnements en forme, pour fermer la bouche à la chicane. » Et Clairaut ajoute : « Mais les choses ont changé de face. Tout raisonnement qui tombe sur ce que le bon sens décide d'avance, est aujourd'hui en pure perte, et n'est propre qu'à obscurcir la vérité, et à dégoûter les lecteurs. » Même conception fondamentale du rôle de la démonstration chez le philosophe Schopenhauer qui, moins indulgent, juge franchement « absurde » la méthode d'Euclide et cette manie de substituer le discours à l'intuition : c'est comme si un homme, dit-il, se coupait les deux jambes afin de marcher avec des béquilles.

Cependant, l' « absurdité » même qu'on y trouve ne devrait-elle pas faire soupçonner qu'on se méprend peut-être sur les intentions d'Euclide ? Qu'on puisse, comme fait Pascal, regarder le raisonnement géométrique comme un modèle de l'art de convaincre, lui-même partie de l'art de persuader, n'implique pas que telle soit sa fonction première et essentielle. En fait, nous savons que beaucoup des propositions d'Euclide étaient connues avant lui, et il n'y a guère de doute qu'elles fussent admises comme vraies par tous les experts. Mais il restait à les organiser logiquement, à les relier les unes aux autres par un réseau serré. C'est apparemment ce qu'a voulu faire, en tout cas ce qu'a réellement fait Euclide. Et tel est bien maintenant le propos de plus en plus avoué du mathématicien. Depuis l'époque de Clairaut, les choses ont encore une fois « changé de face ». « Dans le système de tous les jugements vrais, écrivait déjà Bolzano, règne une connexion objective indépendante du fait contingent que nous la connaissons subjectivement ; c'est par elle que certains jugements sont le fondement des autres (1). » Dégager ces connexions objectives, tel apparaît désormais le vrai but de la démonstration dans une théorie déductive. En même temps que la certitude subjective, la vérité matérielle des propositions est laissée de côté, et la mathématique devient hypothético-déductive. Dès le début du XIX^e siècle, cette séparation entre les deux conceptions de la science et de la démonstration mathématiques avait été marquée, avec une netteté parfaite, par un philosophe aujourd'hui bien oublié, victime du discrédit dans lequel est tombée l'école écossaise. « En mathématiques, remarquait Dugald Stewart (1), nos raisonnements ... ont pour but, non de constater des *vérités* concernant des existences réelles, mais de déterminer la filiation logique des conséquences qui découlent d'une *hypothèse* donnée. Si, partant de cette *hypothèse*, nous raisonnons avec exactitude, il est manifeste que rien ne saurait manquer à l'évidence du résultat ; car ce résultat se borne à affirmer une liaison nécessaire entre la supposition et la conclusion... On ne peut dire de ces propositions qu'elles sont *vraies* et *fausses*, au moins dans le sens où on le dit des propositions relatives aux faits... Lorsqu'on dit de ces propositions qu'elles sont les unes *vraies*, les autres *fausses*, ces épithètes se rapportent uniquement à leur connexion avec les *data*, non à leur relation avec des choses actuellement existantes ou à des événements futurs. »

(1) *Eléments de géométrie*, 1741 ; cité par F. Gonseth, *La géométrie et le problème de l'espace*, t. II, p. 141.

(1) *Philosophie der Mathematik*, 1810 ; cité par J. Cavaillès, *Méthode axiomatique et formalisme*, p. 46-47.

(1) *Eléments de la philosophie de l'esprit humain*, vol. II, 1813, trad. L. Peisse, p. 106-7. C'est l'auteur qui souligne.

[5]

*(Voir aussi [7] ou PLOT n° 27 ou [8])

4. Les preuves, les explications, la démonstration
Voici les définitions proposées par N. Balacheff dans [6].

"...les expressions raisonner, prouver, démontrer, sont souvent considérées comme synonymes par les mathématiciens, particulièrement lorsqu'il s'agit d'enseignement. Cela constitue à notre sens un obstacle aux recherches sur ces questions.
Nous appelons ***explication*** *un discours visant à rendre intelligible le caractère de vérité, acquis pour le locuteur, d'une proposition ou d'un résultat. Les raisons avancées peuvent être discutées, refusées ou acceptées.*
Nous appelons ***preuve*** *une explication acceptée par une communauté donnée à un moment donné. Cette décision peut être l'objet d'un débat dont la signification est l'exigence de déterminer un système de validation commun aux interlocuteurs.*
Au sein de la communauté mathématique ne peuvent être acceptées pour preuve que des explications adoptant une forme particulière. Elles sont une suite d'énoncés organisés suivant les règles déterminées ; un énoncé est connu comme étant vrai, ou bien est déduit de ceux qui le précèdent à l'aide d'une règle de déduction prise dans un ensemble de règles bien défini. Nous appelons ***démonstrations*** *ces preuves.*
Nous réservons le mot ***raisonnement*** *pour désigner l'activité intellectuelle, la plupart du temps non explicite, de manipulation d'informations pour, à partir des données, produire de nouvelles informations..."*

Nous retrouvons là des éléments vus aux paragraphes précédents. Or si nous voulons pouvoir repérer parmi les preuves et les explications données celles qui relèvent du nom de démonstration il faut dégager les caractéristiques de celles-ci. Il nous semble que nous pouvons tous nous mettre d'accord sur les caractéristiques suivantes :

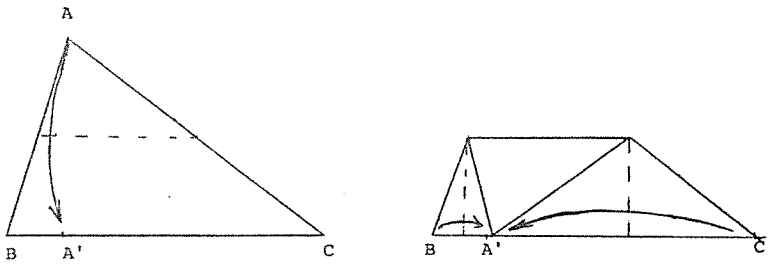
- ses objets sont idéaux
- c'est une explication reliant,
  . de façon **déductive**
  . les **données** du problème au résultat
  . n'utilisant que des énoncés **répertoriés**, autorisés.

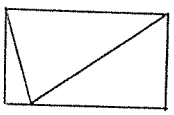
C'est donc une explication à caractère **interne**.
Donc des preuves ou explications n'ayant pas ces caractéristiques ne pourront s'appeler démonstration.

Voici des exemples (voir aussi partie Pythagore 2ème séquence).

Ex 1 : somme des angles d'un triangle [7].

"... il peut aussi en connaître une démonstration. En voici une qui nous vient de Chine et qui se fait par pliage:





Pour nous ceci est une **preuve**, mais pas une démonstration : l'enchaînement des étapes est non verbal et ne fait aucune référence explicite à des énoncés mathématiques. Si de plus l'élève découpe un triangle et le plie effectivement (ce qui est vivement recommandé !), le triangle n'est pas un objet idéal, mais un objet physique sur lequel on manipule. Cependant on peut noter qu'il y a là une bonne idée qui pourrait, peut-être, être "traduite" en démonstration.

Ex 2 : Dessine cinq points R, H, O, M, B de telle façon que :

- *B soit le milieu de [RO] et de [HM]*
- *RO = 5 cm et HM = 9 cm*
- *(RO) soit perpendiculaire à (HM).*

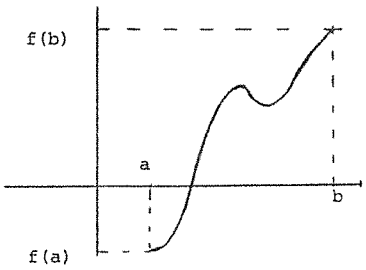
Que dire de RHOM ? Pourquoi ? (extrait de [9]).

Voici deux réponses :

"c'est un losange car ses quatre côtés ont la même longueur"
"c'est un losange car ses diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu".

Chacune de ces réponses est une **explication** qui est juste. Mais aucune n'est une démonstration.
Pour la première si j'ajoute :"ils mesurent tous 5 cm", alors j'ai affaire à une **preuve** de type empirique. J'ai bien une explication de type déductif (malgré la présentation), utilisant des énoncés répertoriés (caractérisation du losange) mais qui ne fait pas référence aux **données** du problème, et pour laquelle la **figure** est un objet physique sujet à des mesures instrumentales.
Pour la deuxième il pourrait s'agir d'une **preuve** du même type :"j'ai vérifié avec mon équerre que les diagonaless sont perpendiculaires et avec ma règle (et mon compas) que B est le milieu des diagonales". Par contre si j'ajoute :"d'après les données du problème" j'ai alors affaire à une **démonstration**.

Ex 3 : Pour toute fonction f continue sur [a, b] telle que f (a). f(b) < 0, l'équation f(x) = 0 a au moins une racine x_0.



Si f(a). f(b) < 0, la courbe coupe nécessairement l'axe des abscisses en un point dont l'abscisse est solution de l'équation f(x) = 0 (voir dessin).

Ce type d'explication était la méthode de démonstration courante au début du XIXème siècle. Mais en 1817 Bolzano la trouve insuffisante : il est intéressant de voir les raisons qu'il donne. On pourra pour cela consulter [10]. D'après nos critères c'est seulement une preuve.

Donc, mesure, pliage, découpage, dessin peuvent fournir des preuves mais pas des démonstrations. De même la vérification d'un résultat sur plusieurs exemples peut constituer une preuve (c'est le cas en sciences expérimentales, voir aussi la citation de Balacheff à la fin du paragraphe), mais n'est pas une démonstration. Quant aux explications fournies, même enchaînées déductivement, elles peuvent être justes sans pour cela constituer une démonstration. Pour avoir droit à ce label, et c'est ce qu'il faut que l'élève comprenne, il y a des conditions **supplémentaires** à remplir :

- on doit remonter aux "causes premières" c'est-à-dire aux données du problème,
- on doit justifier les étapes par des énoncés connus.

Cela montre qu'avant de faire faire des démonstrations à l'élève on doit susciter chez lui la production de preuves et d'explications. Celles-ci vont évoluer avec l'âge des élèves et la richesse des situations rencontrées : elles seront le terrain sur lequel la démonstration prendra son sens en s'en différenciant. Voici pour terminer une hiérarchie établie par N. Balacheff à partir d'expériences :

L'empirisme est dans cette hiérarchie le premier type de preuve que nous rencontrons. Il consiste à tirer de l'observation d'un petit nombre de cas la certitude de la vérité d'une assertion.
L'expérience cruciale est un procédé de validation d'une assertion dans lequel l'individu pose explicitement le problème de la généralisation et le résoud en pariant sur la réalisation d'un cas qu'il reconnaisse pour aussi peu particulier que possible. Ainsi dans le cas du dénombrement des diagonales d'un polygone c'est le cas de cette élève qui propose à propos de leur conjecture "on va faire une immense figure pour vérifier" ou le cas de cette élève qui, à la suite d'un différend avec son partenaire, propose "essaie une fois avec 15 et puis si ça marche, ben ça veut dire qu'ça marche avec les autres". Ainsi l'expérience cruciale consiste à provoquer un événement sur lequel "on ne se fait pas de cadeau" en affirmant que "si cela marche, alors cela marchera toujours". Cette démarche qui reste fondamentalement empirique se distingue de l'empirisme naïf en ce que le problème de la généralisation est effectivement posé et que l'élève se donne un moyen de décider autrement que péremptoirement.
L'exemple générique *consiste en l'explicitation des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet présent non pour lui-même, mais en tant que représentant caractéristique d'une classe d'individus. La formulation dégage les propriétés caractéristiques et les structures d'une famille en restant attachée au nom propre et à l'exhibition de l'un de ses représentants.*

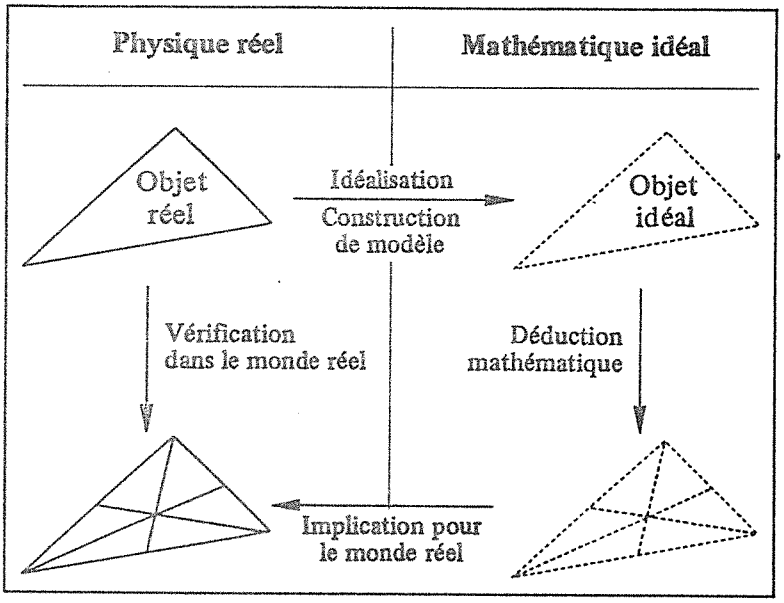
L'expérience mentale *invoque l'action en l'intériorisant et en la détachant de sa réalisation sur un représentant particulier. Elle reste marquée par la temporalité anecdotique, mais les opérations et les relations fondatrices de la preuve sont désignées autrement que par le résultat de leur mise en oeuvre, ce qui était le cas pour l'exemple générique.*
C'est là, quelque part entre l'exemple générique et l'expérience mentale que s'opère le passage des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles. Une marque de ce passage est une évolution des moyens langagiers mis en oeuvre." [6]

5. Dessin et démonstration.

Le dessin, la figure, permettent bien évidemment de conjecturer un certain nombre de propriétés plus ou moins évidentes. Il permet aussi par mesurage, découpage, assemblage, pliage..., de fournir des preuves, de vérifier, de conforter ou d'infirmer des conjectures. Mais quand il s'agit de démonstration son statut change : la figure n'est plus que la représentation d'un objet idéal auquel on ne peut se référer dans la démonstration que par sa définition ou par une caractérisation, c'est ce qu'exprime clairement le texte suivant de Platon [11] ainsi que le tableau extrait de [12]…

"....tu sais, j'imagine, que ceux qui s'appliquent à la géométrie, à l'arithmétique ou aux sciences de ce genre, supposent le pair et l'impair, les figures, trois sortes d'angles et d'autres choses de la même famille, pour chaque recherche différente ; qu'ayant supposé ces choses comme s'ils

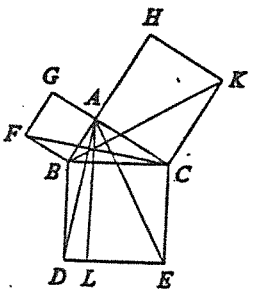
les connaissaient; il ne daignent en donner raison ni à eux-mêmes ni aux autres, estimant qu'elles sont claires pour tous ; qu'enfin, partant de là, ils déduisent ce qui s'ensuit et finissent par atteindre, de manière conséquente, l'objet que visait leur enquête.
Je sais parfaitement cela, dit-il.
Tu sais donc qu'ils se servent de figures visibles et raisonnent sur elles en pensant, non pas à ces figures mêmes, mais aux originaux qu'elles reproduisent ; leurs raisonnements portent sur le carré en soi et la diagonale en soi, non sur la diagonale qu'ils tracent, et ainsi du reste; des choses qu'ils modèlent ou dessinent, et qui ont leurs ombres et leurs reflets dans les eaux, ils se servent comme d'autant d'images pour chercher à voir ces choses en soi qu'on ne voit autrement que par la pensée.[11]



Néanmoins pourrait-il y avoir des démonstrations en géométrie sans figure ? Pour cela nous vous proposons la lecture d'une démonstration célèbre d'un théorème célèbre extrait de [12].

PROPOSITION XLVII

Dans les triangles rectangles, le carré du côté opposé à l'angle droit est égal aux carrés des côtés qui comprennent l'angle droit.



Soit *ABC* un triangle rectangle, que *BAC* soit l'angle droit; je dis que le carré du côté *BC* est égal aux carrés des côtés *BA, AC*.

Décrivons avec *BC* le carré *BDEC*, et avec *BA, AC* les carrés *GB, HC*; [1,46] et par le point *A* menons *AL* parallèle à l'une ou l'autre des droites *BD, CE*; et joignons *AD, FC*.

Puisque chacun des angles *BAC, BAG* est droit, les deux droites *AC, AG*, non placées du même côté, font avec la droite *BA* au point *A* de cette droite, deux angles de suite égaux à deux droits; donc la droite *CA* est dans la direction de *AG*. [1,14]

La droite *BA* est dans la direction *AH*, par la même raison.

Et puisque l'angle *DBC* est égal à l'angle *FBA*, étant droits l'un et l'autre, si nous leur ajoutons l'angle commun *ABC*, l'angle entier *DBA* sera égal à l'angle entier *FBC*. [N. C. 2)

Et puisque *DB* est égal à *BC*, et *FB* à *BA*, les deux côtés *AB*, *BD* sont égaux respectivement aux deux côtés *FB*, *BC*; mais l'angle *ABD* est égal à l'angle *FBC*; donc la base *AD* est égale à la base *FC*, et le triangle *ABD* est égal au triangle *FBC*. [1,4]

Mais le parallélogramme *BL* est double du triangle *ABD*, car ils ont la même base *BD* et ils sont entre les mêmes parallèles *BD*, *AL* [1,41]; le carré *BG* est double du triangle *FBC*, car ils ont la même base *BF* et ils sont entre les mêmes parallèles *FB*, *GC*. [1,41]; et les grandeurs qui sont doubles de grandeurs égales sont égales entre elles; donc le parallélogramme *BA* est égal au carré *GB*. Ayant joint *AE*, *BK*, nous démontrerons semblablement que le parallélogramme *CL* est égal au carré *HC*; donc le carré entier *BDEC* est égal aux deux carrés *GB*, *HC*. [C. N. 2]

Mais le carré *BDEC* est décrit avec *BC*, et les carrés *GB*, *HC sont décrits avec BA*, *AC*; donc le carré du côté *BC* est égal aux carrés des côtés *BA*, *AC*. Donc dans les triangles, etc.

Sans figure pourrions-nous faire une telle démonstration ?
La suivre ? La trouver ? La comprendre ?
Le rôle de la figure est-il indispensable ? ou simplement commode ? ou franchement nuisible ?
Faut-il faire des figures volontairement fausses, ou les tracer à main levée (cf.l'adage "démontrer c'est raisonner juste sur des figures fausses")?
Quoi qu'il en soit il faudra que l'élève perçoive clairement que lorsqu'il s'agit de démonstration la règle du jeu est de ne faire intervenir des figures que par des données (ou hypothèses) et par leurs définitions ou caractérisations; par contre, la figure peut avoir un rôle important pour aider à trouver la démonstration, pour vérifier un calcul ou une conjecture.

6. Conclusion.

Notre objectif en 4ème-3ème est d'abord d'amener l'élève à comprendre que parmi les différents types de preuves et d'explications que l'on peut donner, en mathématiques on en privilégie un qui a des exigences bien définies et que l'on appelle la démonstration.
En mathématiques, prouver cela voudra désormais dire donner ce type particulier de preuve qu'est la démonstration et c'est là une des spécialités des mathématiques.
Ensuite notre objectif est d'apprendre à l'élève à fournir de telles preuves, à construire de telles explications.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Le Petit Robert 1986.
[2] FOULQUIE. Dictionnaire de la langue philosophique 1962.
[3] LALANDE. Vocabulaire technique et critique de la philosophie 1968.
[4] QUEYSANNE REVUZ. Mathématique 3ème, Nathan 1972 ou 1974.
[5] BLANCHE. L'Axiomatique, PUF.
[6] BALACHEFF. Preuve et démonstration en mathématiques au collège, in Recherches en didactique des mathématiques. Vol.3.3. La Pensée Sauvage 1982.
[7] PLOT n° 31. Pliages et mathématiques. (Supplément) APMEP. Irem d'Orléans, 1985.
[8] Tout (ou presque) ce que vous avez toujours voulu savoir sur le Théorème de Pythagore sans jamais oser le demander. Irem de Paris-Nord, 1980.
[9] Suivi Scientifique 1986-1987. Nouveaux programmes de 5ème, Bulletin inter-IREM Premier cycle, Irem de Lyon.
[10] DHOMBRES et Alü. Mathématiques au fil des âges. Gauthiers-Villars, 1987.
[11] PLATON. La République Livre VI.
[12] DAVIS. J.D. HERSH.R. L'Univers mathématique. Gauthier-Villars, 1985.

Aide n° 2

Comment valide-t-on un résultat dans la communauté des Mathématiciens ?

L'autorité scientifique

Certaines démonstrations sont illisibles

Certaines démonstrations sont incompréhensibles

Les démonstrations sont souvent entachées d'erreurs

Les résultats sont souvent validés par des preuves et non par des démonstrations

L'année des ordinateurs

Bibliographie

Comment valide-t-on un résultat dans la communauté des mathématiciens ?

Un résultat ou un énoncé sont-ils validés nécessairement par une démonstration ?

L'autorité scientifique de celui qui énonce un résultat peut servir (ou non) de caution à la justesse du résultat.)

"On s'est intéressé à des nombres construits de la façon suivante (on appelle cela des séries de Riemann) : on prend par exemple les cubes de tous les entiers, on calcule leur inverse

$\frac{1}{1^3}$; $\frac{1}{2^3}$; $\frac{1}{3^3}$; $\frac{1}{4^3}$ *.etc, et on ajoute tous les nombres ainsi obtenus. On voit par des arguments mathématiques que cette somme est un nombre réel, noté* $\zeta(3)$ *pour rappeler que chacun des termes de la série est l'inverse d'un cube. Notons que* ζ *est appelée la fonction dzéta de Riemann. Le nombre* $\zeta(3)$ *est-il ou non rationnel ?*

La réponse à des questions semblables est connue depuis longtemps :

$$\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\ldots\ldots$$

ou

$$\zeta(4) = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots\ldots$$

sont des nombres irrationnels, on savait même que

$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$;

mais pour $\zeta(3) = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \ldots\ldots\ldots$ *on ignorait la réponse lorsqu'en 1978, Apery a annoncé qu'il avait prouvé l'irrationnalité du nombre* $\zeta(3)$*. L'annonce de ce résultat par Apéry eut lieu quelques mois avant le Congrès International des mathématiciens d'Helsinski en 1978, sous une forme tellement provocatrice que les auditeurs, tous spécialistes de théorie des nombres, chahutèrent le conférencier et ne prirent pas son résultat au sérieux. Malgré tout, certains comprirent que ce "vieux" monsieur renommé pour une certaine extravagance, qu'il cultive avec soin affirment ses relations, avait peut-être eu une intuition décisive à un âge (60 ans) où beaucoup pensent à leur retraite. Plusieurs chercheurs se penchèrent quand même sur la "démonstration" d'Apery.*

Ce travail s'avéra long et difficile d'autant plus qu'aux demandes de précisions, Apéry répondait par des boutades, même durant le Congrès où on reconnaissait en quelque sorte le bien fondé de son affirmation.
Aujourd'hui des démonstrations complétées, améliorées, ont été publiées, notamment par F. Beukers ; d'autres sont probablement en cours de publication. "Bien que l'intuition qui a guidé Apéry reste mystérieuse, sa démonstration a été épurée et a acquis droit de cité" (Nordon et Rousseau).
Ce résultat est connu et restera probablement connu sous le nom de théorème d'Apéry. Mais qui l'a réellement "prouvé" ?
Donnons le verdict de deux spécialistes de théorie des nombres : C. Batut et M. Mendès-France :

"Quoi qu'il en soit, Apéry a découvert la démonstration. (C'est-à-dire, il en a décrit toutes les étapes). Mais il n'a pas voulu démontrer (c'est-à-dire, il n'a pas voulu écrire en syntaxe mathématique les détails de la démonstration). Peu de temps après la conférence de Marseille, Henri Cohen (alors de l'Université de Bordeaux, maintenant à Grenoble) et A. Van der Poorten (Australien), avec l'aide de D. Zagier (Américain) ont réussi à combler les trous apparents et à "légaliser" les calculs d'Apéry. Leur tâche était difficile et si l'exploit d'Apéry est tout à fait étonnant, l'exploit de Cohen, de Van der Poorten et de Zagier n'en est pas moins remarquable".[1].*

Mais des résultats admis, à une époque (à cause de la signature de l'auteur), par la communauté des mathématiciens se sont révélés faux après plusieurs décennies comme le montre l'histoire du théorème de Cauchy.

"Dans son cours d'analyse, Cauchy affirmait en 1821 que :
a) la somme d'une série convergente de fonctions continues est une fonction continue ;
b) toute fonction continue admet une intégrale de Cauchy.
Mais en 1842, Seidel publiait un contre-exemple pour le premier résultat et Heine (1821-1881) en 1870 pour le second, c'est-à-dire respectivement vingt ans et cinquante ans plus tard".[1]…

Certaines démonstrations actuelles ne peuvent être vérifiées car illisibles (trop longues et dans des domaines trop pointus). Comment vérifier une démonstration de 300 pages ? Qui se sent la compétence et l'envie d'ainsi sacrifier des mois pour une vérification dans un domaine qui n'est jamais exactement le sien ?
Le consensus des "pontes" est jugé plus important que la rigueur de la démonstration comme l'illustre l'exemple cité par A. Bouvier.

"Au congrès international des mathématiciens de 1970, la solution d'une célèbre conjecture fut annoncée par Feit et Thomson. Sa preuve ne fut rendue publique qu'en 1974 avec une démonstration de trois cents pages, l'une des plus longues publiées à cette époque. Peut-on affirmer qu'il n'y ait aucune erreur dans cette preuve ? On prétend que chacun des deux chercheurs a rédigé la moitié de la démonstration, mais que ni l'un ni l'autre n'a lu la moitié qu'il n'a pas rédigée ! L'important n'est pas de savoir si cette rumeur est fondée ; il faut retenir qu'elle a pu se propager, aidée en cela par d'excellent mathématiciens et sembler tout à fait plausible aux autres spécialistes.
S'il n'y a qu'une erreur toutes les trente pages, dans la démonstration de Feit et Thomson, statistiquement, il y en aurait au total au moins dix. Pourtant, personne ne pense à remettre en question la validité de cette preuve. En serait-il de même dans l'enseignement ?"[1].

Des démonstrations sont rejetées car incompréhensibles. (voir ce qu'en dit R. Thom).
"Une démonstration d'un théorème (T) peut se définir comme un chemin qui, partant de propositions empruntées au tronc commun et de ce fait intelligibles par tous, conduit par étapes successives à une situation psychologique telle que (T) y apparaît comme évident. La rigueur - au sens usuel, non formalisé - de la démonstration se constate au fait que chaque étape

* Nous préférerions dire une preuve. Apéry n'a pas voulu l'affiner pour qu'elle devienne une démonstration.

est parfaitement claire à tout lecteur, compte tenu des extensions de sens déjà opérées dans les étapes antérieures. En mathématique, si on rejette une démonstration, c'est plus souvent parce qu'elle est incompréhensible que parce qu'elle est fausse. Cela vient en général de ce que l'auteur submergé en quelque sorte par la vision de sa découverte, a indûment gonflé le présupposé commun.
Peu après, des collègues viennent expliciter ce qui avait été admis implicitement par l'auteur, ce qui comble les lacunes et rend complète la démonstration. La rigueur, comme l'intendance, suit toujours."[2].

Les démonstrations sont souvent entachées d'erreurs.
"Un éditeur du "Mathematical Reviews" revue américaine publiant des analyses critiques des articles de recherche, estimait que 50% des articles publiés sont entachés d'erreurs." [1].

Bouvier ajoute :

Des démonstrations et résultats faux abondent donc ; le besoin de prouver du chercheur semble si fort qu'il se convainc avant même d'avoir le moindre argument réellement convaincant pour d'autres. De plus, comme W.Higginson le fait remarquer, les scientifiques ont de la difficulté "à voir les évidences qui entrent en contradiction avec leurs hypothèses et beaucoup sont près de refuser d'abandonner leurs conjectures réfutées." [1].
Souvent les erreurs sont facilement repérables par les spécialistes du sujet. Mais comme le remarquent Bouvier et Thom (ci-dessus) les chercheurs fournissent plus des preuves à leurs conjectures que des démonstrations. Souvent ce sont d'autres chercheurs (cf. Apéry) qui transforment les preuves en réelles démonstrations en explicitant les points obscurs ou précisant le domaine de validité des résultats.

Les résultats sont bien souvent validés par des preuves non par des démonstrations.
Sur l'importance d'une preuve voici ce que répond Atiyah.

"Une preuve est importante comme vérification de votre compréhension. Je peux penser que je comprends. Mais la preuve est la vérification que j'avais compris, c'est tout. C'est la dernière étape dans l'opération - l'ultime vérification - mais ce n'est pas la première chose du tout.[3].
Pour le mathématicien, la validité d'un résultat repose sur sa conviction intime qui elle-même repose plus sur des preuves que sur des démonstrations dans le sens où nous l'entendons.
Néanmoins toute la communauté s'accorde pour dire que théoriquement on pourrait tranformer les preuves en démonstrations ou rectifier les erreurs en relisant.
"Nous croyons que la mathématique est destinée à survivre, et qu'on ne verra jamais les parties essentielles de ce majestueux édifice s'écrouler du fait d'une contradiction soudain manifestée ; mais nous prétendons que cette opinion repose sur autre chose que l'expérience. C'est peu, diront certains. Mais voilà vingt cinq siècles que les mathématiciens ont l'habitude de corriger leurs erreurs et d'en voir leur science enrichie, non appauvrie ; cela donne le droit d'envisager l'avenir avec sérénité." [4].

Dernièrement d'autres formes de validation sont apparues avec l'arrivée des ordinateurs.

"Au dix-neuvième siècle, la question suivante fut posée : toute carte géographique du plan peut-elle être coloriée de quatre couleurs seulement, de façon à ce que deux régions adjacentes ne soient pas de la même couleur ? Essayez vous-même de trouver une carte de géographie qui nécessite cinq couleurs pour être coloriée selon la règle énoncée.
Ce problème, dit problème des quatre couleurs, suscita de nombreuses recherches ; ce défi posé à la communauté mathématique semblait d'autant plus exaltant que le même problème, pour des cartes dessinées sur des surfaces autre que le plan ou la sphère avait déjà été résolu.
La solution du problème des quatre couleurs n'a été obtenue qu'en 1976.
Au début des années 70, la communauté mathématique avait acquis la conviction que ce problème pourrait être résolu à condition d'étudier une liste finie, mais gigantesque, de cartes particulières. Vers 1972, Appel et Haken décidèrent de s'attaquer à cette question en utilisant des ordinateurs très puissants. Une première estimation fit apparaître que le temps de calcul nécessaire serait de l'ordre de 100 000 heures, c'est-à-dire dix ans.
Ils changèrent leur tactique et entamèrent un dialogue avec la machine à qui ils demandaient d'effectuer un certain nombre de calculs particuliers dont ils tiraient des observations pour envisager d'autres calculs, puis d'autres observations, puis d'autres vérifications, etc. Vers 1975, après avoir modifié à plusieurs reprises le programme de l'ordinateur, ils arrivèrent à le programmer, à la façon des ordinateurs qui jouent aux échecs: non seulement ils appliquent les règles données au départ, mais ils font des progrès, ils apprennent des trucs et des astuces ; aux échecs, l'ordinateur qui a joué un coup perdant, ne le jouera plus.
Un phénomène fantastique se produisit : l'ordinateur se mit en enseigner ses trucs aux chercheurs, eux-mêmes se déclarant surpassés ! Ce nouveau type de dialogue se poursuivit et permit à Appel et Haken d'imaginer une nouvelle stratégie [utilisant encore l'ordinateur NDRL] qui, pendant l'été 1976, fournit la preuve de l'exactitude de la conjecture : toute carte du plan est coloriable avec quatre couleurs."*
La "preuve" qui fait appel à l'ordinateur n'est-elle pas une preuve de physicien : "ça marche avec 3 ordinateurs, c'est toujours vrai"? - Est-ce une démonstration ?

Le fonctionnement de la communauté des mathématiciens ne doit-il pas nous inciter à réfléchir sur la validation des énoncés telle que nous la pratiquons en classe ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BOUVIER. La mystification mathématique, Hermann.
[2] THOM. Pourquoi la mathématique ?
[3] Didactique des mathématiques, le dire et le faire, Nathan.

Aide n° 3

Styles de démonstrations

Preuves élégantes, astucieuses.

Démonstrations élégantes, astucieuses.

Démonstrations rigoureuses.

.La rigueur évolue avec le temps
.Quand peut-il y avoir démonstration rigoureuse ?
.La formalisation, l'axiomatisation ne se font-elles pas au détriment du sens ?
.Dans notre enseignement.

Bibliographie.

Styles de démonstrations

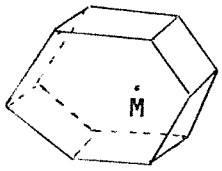
Il s'agit de styles de démonstrations et non de styles de preuves.
Une preuve peut être astucieuse, élégante sans avoir la forme d'une démonstration mathématique.

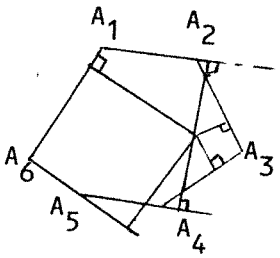
Preuves élégantes, astucieuses.

Exemple 1 :

Soit A_1 ..... A_n un polygone (P) convexe. M un point à l'intérieur de ce polygone. D_1 .... D_n les perpendiculaires issues de M au côté $(A_i\ A_i + 1)$ ou bien il existe au moins une droite D_i qui coupe un segment $[A_i, A_{i+1}]$ ou bien D_n coupe $[A_n\ A_1]$.

Preuve :





Imaginons un prisme droit de base P et de hauteur h. Disposons une masse cylindrique en M telle que :
- l'axe du cylindre est perpendiculaire au polygone (P) et passe par M,
- la masse du solide se réduit à cette masse.

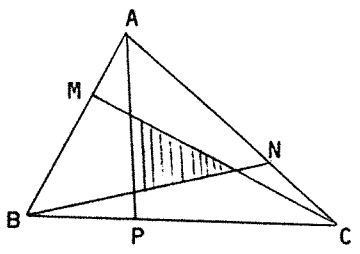
Posons ce solide sur l'un quelconque de ses côtés. Si la conclusion est fausse ce solide est en mouvement perpétuel.

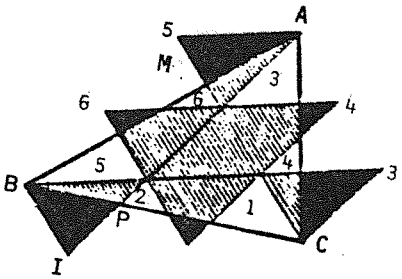
Exemple 2 :

De nombreuses preuves peuvent être obtenues par découpages et pliages. C'est considéré comme astucieux par beaucoup d'entre nous.

Les points M, N et P divisent les segments dans le rapport 1/2. L'aire hachurée est le septième de l'aire du triangle ABC.

Preuve :





Démonstrations élégantes et astucieuses.

Qualifier d'élégantes, d'astucieuses ou rigoureuses des démonstrations est subjectif.
Elégantes, astucieuses ? quelques exemples pour se faire un jugement.

Exemple 3 :

Démontrer que :

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad . \quad a > o, \quad b > o \ .$$

(Moyenne harmonique ≤ moyenne géométrique ≤ moyenne arithmétique.

Démonstration 1 par le calcul.

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\,ab}{a+b} < \sqrt{ab}$$

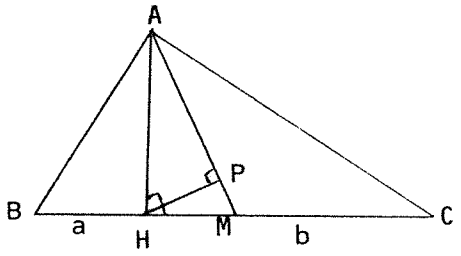
$$\Leftrightarrow \quad a + b - 2\sqrt{ab} \geq o$$

$$\Leftrightarrow \quad (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq o \text{ ce qui est vrai.}$$

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq o \quad \text{ce qui est vrai.}$$

Démonstration 2 par la géométrie

Construisons un triangle ABC rectangle en A tel que, si H est le pied de la hauteur issue de A, on ait : BH = a, CH = b.
Appelons AM la médiane issue de A.



$$AM = \frac{BC}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$AH = \sqrt{BH.HC} = \sqrt{ab}$
(relation métrique dans le triangle rectangle).

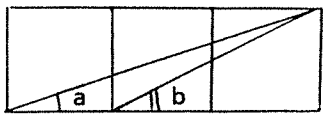
Dans le triangle (APH)

$$AP \times AM = AH^2$$

$$\text{donc } AP = \frac{AH^2}{AM} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

or AP ≤ AH ≤ AM c.q.f.d.

Exemple 4 :



Le rectangle est formé de 3 carrés. Que vaut a + b ?

Démonstration 1 :

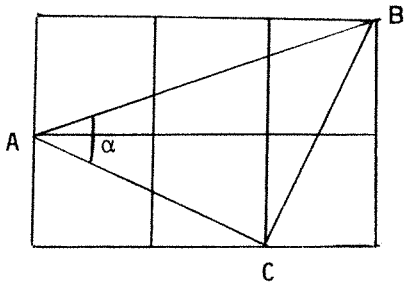
$$tg\ a = \frac{1}{3}$$

$$tg\ b = \frac{1}{2}$$

$$tg(a + b) = \frac{tga + tgb}{1.-tga\ tgb} = 1$$

donc $a + b = 45°$.

Démonstration 2 :
Complétons la figure :

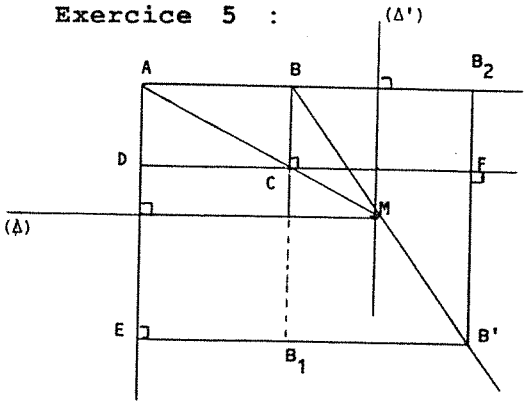


$\alpha = a + b$

ABC est rectangle isocèle
$AB^2 = 10$
$BC^2 = 5$
$AC^2 = 5$

Donc $\alpha = 45°$

Exercice 5 :



ABCD est un rectangle
M un point de AC,
B' est le symétrique de B par rapport à M,
E et F sont les projections orthogonales de B' sur (AD) et (DC)
E, M et F sont alignés. Pourquoi ?

Démonstration 1.

Prenons le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

. C(1,1) M (α , α)

. Coordonnées de B' : $\alpha = \frac{1 + x}{2}$ $ß = \frac{y}{2}$

d'où B'(2α - 1, 2ß)

E (O, 2α) F (2α 1,1)

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 2\alpha - 1 \\ -2\alpha + 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \overrightarrow{EM} & \alpha \\ & -\alpha \end{pmatrix}$ les vecteurs sont colinéaires.

(Noter que le choix du repère est astucieux).

Démonstration 2.

Soit s la symétrie par rapport à(Δ), s' la symétrie par rapport à Δ' s_M la symétrie par rapport à M

$s_M(A) = A'$, $s'(A) = E$ A' est sur (EB') car (EB') = s_M(AB)

$s'(C) = F$ car $s'(C) \in (DC)$ ((DC) ⊥ (Δ')) et BB_1 $B'B_2$, est un rectangle donc s' (BC) = (B' B_2)

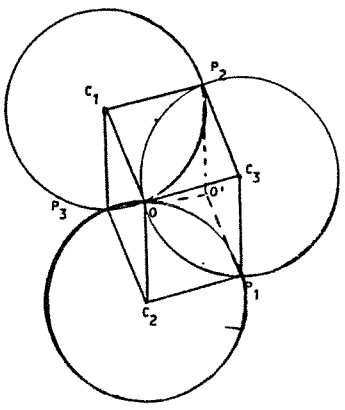
A'M et C sont alignés.

s'(A), s'(M) et s'(C) sont donc alignés.

Exemple 6.

Trois cercles de même rayon r se coupent en O. Ils se coupent deux à deux aux points P_1, P_2 et P_3. Démontrer que P_1, P_2, P_3, sont situés sur un cercle de rayon r.

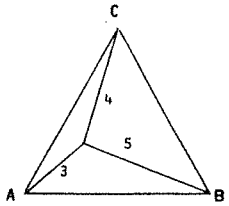
Démonstration :



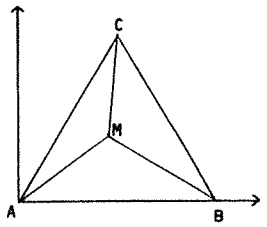
Les quadrilatères (C_1 P_2 C_3 O), (C_1 O C_2 P_3) et (C_3 P_1 C_2 O) sont des losanges. Ils forment la perspective d'un cube. Traçons les arêtes cachées qui se coupent en O'.
On a : $O'P_1 = O'P_2 = O'P_3 = r$ [1] .

Exemple 7.

Le triangle ABC est équilatéral. Un point M est situé à 3cm de A, à 5cm de B et à 4cm de C. Quelle est l'aire du triangle ABC.



Démonstration 1 par analytique.



Prenons un repère tel que A(O, O), B(a, O), le point C a pour coordonnées $(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2})$. Exprimons MA^2, MB^2, MC^2, avec M (x, y) afin de déterminer x et y.

$MA^2 = x^2 + y^2 = 9$ (1)

$MB^2 = (x - a)^2 + y^2 = 25$ (2)

$MC^2 = (x - \frac{a}{2})^2 + (y - \frac{a\sqrt{3}}{2})^2 = 16$ (3)

Nous avons ainsi un système de trois équations à trois inconnues. On détermine ainsi a puis l'aire du triangle ABC.

(2) - (1) donne $- 2a\,x + a^2 = 16$ d'où $x = \frac{a^2 - 16}{2a}$ et dans (1)

$y^2 = 9 \times x^2 = \frac{a^4 + 68a^2 - 256}{4a^2}$.

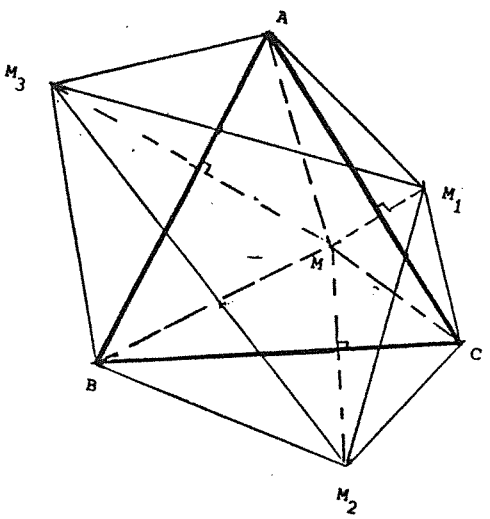
En reportant dans (3).

$$\frac{256}{4a^2} + \frac{a^4 + 68a^2 - 256}{4a^2} - ay\sqrt{3} + \frac{3a^2}{4} = 16$$

ce qui donne $a^4 - 50a^2 + 193 = 0$

D'où on calcule a et $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Démonstration 2.



3, 4, 5 est un triplet pythagoricien.
Ce n'est certainement pas un hasard ! Montrons que le triangle $M_1\,M_2\,M_3$ est rectangle.

$M_1\,AM_3 = M_1\,CM_2 = M_2\,BM_3 = 120°$.
On a $x = 2b \sin 60 = b\sqrt{3}$
D'où $M_1\,M_3 = 4\sqrt{3}$ $M_1\,M_2 = 3\sqrt{3}$
$M_2\,M_3 = 5\sqrt{3}$. Par suite $M_2\,M_3^2 = M_1\,M_2^2\,M_1\,M_3^2$.

L'aire de ces triangles est $2 \times \frac{x}{2} \times b \cos 30 = \frac{xb}{2}$.

L'aire de l'hexagone est donc égale à :

$A(M_1 M_2 M_3) + A(AM_1 M_3) + A(M_1 C_1 M_2) + A(M_2 BM_3)$

$= \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times 4\sqrt{3} + \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 4 + \frac{1}{2} \quad 5\sqrt{3} \times 5 +$
$\frac{1}{2} \; 3\sqrt{3} \times 3 = 18 + 25\sqrt{3}.$

A(ABC) est la moitié de l'aire de l'hexagone. D'où le résultat.

On peut noter certains critères qui sont souvent utilisés pour qualifier d'astucieuse ou d'élégante une démonstration.

- L'outil utilisé est performant donc abrège la démonstration. Cela peut se faire aux dépens de la compréhension du problème.
- L'outil est bien considéré par la communauté des enseignants : la solution géométrique pure est préférée à une solution analytique.
- L'outil est tout à fait inattendu pour résoudre le problème.

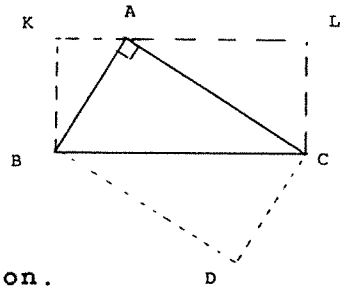
On peut remarquer qu'astuce et élégance sont affaire de spécialistes (personnes qui connaissent suffisamment de mathématiques et ont été formées de la même façon) et de culture.

Démonstration rigoureuse.

*** Des exemples**

Les démonstrations suivantes sont-elles rigoureuses ?

Exemple 1



ABCD est un triangle rectangle en A, H est le pied de la hauteur issue de A. Démontrer que AH x BC = AB x AC.

Démonstration.
Construisons les rectangles BKLC et ABDC.
Les aires des deux rectangles sont égales: l'aire commune est le double de l'aire du triangle ABC. Or l'une des aires est AH X BC l'autre est AB x AC.

Est-ce rigoureux ?
* Les constructions sont-elles possibles ? Doit-on les expliciter ? si oui sous quelles formes ?
Pour (BKLC) :
- je trace la parallèle (Δ) à BC passant par A,
- la perpendiculaire à BC passant par B coupe (Δ) en K. Doit-on le démontrer?
- la parallèle à (BK) en C coupe (Δ) en L. Doit-on le démontrer ?

* Doit-on justifier que (BKLC) est un rectangle.
(BKLC) est un rectangle car (BK) // (LC) car deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles. (KL) // (BC) et (KB) ⊥ (BC).
Donc (BKLC) est un parallélogramme qui a un angle droit ; c'est un rectangle.

* Tous les outils utilisés lors de cette démonsrtration sont ils "fiables"?

Qu'est-ce qu'une aire ? Un triangle a-t-il une aire ? A-t-on le droit de les ajouter ? Qu'est ce qui nous autorise à dire que les aires de (ABC) et de (BCD) sont égales ?

Exemple 2

Extrait de "Géométrie" par A.BECHE 1933 P.90-91.

§2. — *Relations de grandeur entre deux arcs de même rayon et les cordes qui les sous-tendent.*

THÉORÈME

172. — *Dans un même cercle ou dans deux cercles égaux, deux arcs égaux sont sous-tendus par deux cordes égales.*

(*Hyp.*). — Soient les arcs égaux $\overset{\frown}{AMB}$, $\overset{\frown}{A'M'B'}$ respectivement situés sur les circonférences égales O, O' (*fig. 122*).

(*Concl.*). — Je dis que les cordes AB, A'B' sont égales.

(*Dém.*). — En effet, les arcs $\overset{\frown}{AMB}$, $\overset{\frown}{A'M'B'}$ étant égaux, on peut les superposer de manière que leurs extrémités coïncident : A' avec A, B' avec B. Dans ces conditions, les cordes AB et A'B' ayant mêmes extrémités coïncident ; donc, elles sont égales.

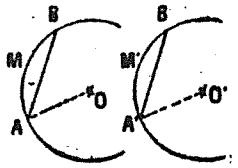


Fig. 122.

Est-ce rigoureux ?

*** La rigueur évolue avec le temps.**

Pourquoi un résultat admis à une époque a-t-il été refusé par les mathématiciens à une autre époque si ce n'est par le manque de rigueur de la démonstration.

Exemple : (Bolzano).

Dans la méthode de démonstration la plus courante, on s'appuie sur une vérité empruntée à la géométrie : à savoir que toute ligne continue à courbure simple dont les ordonnées sont d'abord positives, puis négatives (ou inversement), doit nécessairement couper quelque part l'axe des abscisses en un point situé entre ces ordonnées. Il n'y a absolument rien à objecter ni contre la justesse ni contre l'évidence de ce théorème géométrique. Mais il est tout aussi manifeste qu'il y a là une faute intolérable contre la

bonne méthode qui consiste à vouloir déduire les vérités des mathématiques pures (ou générales) (c'est-à-dire de l'arithmétique, de l'algèbre ou de l'analyse) des considérations qui appartiennent à une partie appliquée (ou spéciale) seule, à savoir à la géométrie.... [3].

"Tout mathématicien acceptera l'affirmation que la rigueur n'a pas toujours eu les mêmes critères, et qu'il existe bien une histoire (et même une préhistoire si l'on croit à la naissance de la rigueur au dix-neuvième siècle). Mais alors, pourquoi prétendre la rigueur achevée en notre fin de vingtième siècle et ainsi la mathématique débarrassée de l'erreur ?..."[2].

*** Quand peut-il y avoir démonstration rigoureuse ?**

Il ne peut y avoir de démonstration "rigoureuse" qu'au sein d'une théorie axiomatique où objets et relations "primitives" ont été spécifiés, et les axiomes qui les relient énumérés de façon exhaustive....[4].

Cela suffit-il à garantir la rigueur des démonstrations ?
Pour être complètement sûr, ne devrait-on pas éviter d'employer le langage courant souvent ambigu ?

"On arrive ainsi à la conclusion qu'un texte mathématique suffisamment explicite pourrait être exprimé dans une langue conventionnelle ne comportant qu'un petit nombre de "mots" invariables assemblés suivant une syntaxe qui consisterait en un petit nombre de règles inviolables : un tel texte est dit formalisé"...
..."La vérification d'un texte formalisé ne demande qu'une attention en quelque sorte mécanique, les seules causes d'erreur possibles étant dues à la longueur ou à la complication du texte ;
..."Par contre, dans un texte non formalisé, on est exposé aux fautes de raisonnement que risquent d'entraîner, par exemple, l'usage abusif de l'intuition, ou le raisonnement par analogie. En fait, le mathématicien qui désire s'assurer de la parfaite correction, ou, comme on dit, de la "rigueur"
d'une démonstration ou d'une théorie, ne recourt guère à l'une des formalisationd complètes dont on dispose aujourd'hui, ni même le plus souvent
aux formalisations partielles et incomplètes fournies par le calcul algébrique et d'autres similaires ; il se contente en général d'amener l'exposé à un point où son expérience et son flair de mathématicien lui enseignent que la traduction en langage formalisé ne serait plus qu'un exercice de patience (sans doute fort pénible)"...

..."La méthode axiomatique n'est à proprement parler pas autre chose que cet art de rédiger des textes dont la formalisation est facile à concevoir.[7].

Pourquoi, pour atteindre la rigueur absolue ne formalise t-on pas les mathématiques ?

Si la mathématique formalisée était aussi simple que le jeu d'échecs, une fois décrit le langage formalisé que nous avons choisi, il n'y aurait plus qu'à rédiger nos démonstrations dans ce langage, comme l'auteur d'un traité d'échecs écrit dans sa notation les parties qu'il se propose d'enseigner, en les accompagnant au besoin de commentaires. Mais les choses sont loin d'être aussi faciles, et point n'est besoin d'une longue pratique pour s'apercevoir qu'un tel projet est absolument irréalisable ; la moindre démonstration du début de la Théorie des Ensembles exigerait déjà des centaines de signes pour être complètement formalisée.[7].

Voici à titre d'exemple un texte formalisé.

GIUSEPPE PEANO

(pp. 1-20)

ARITHMETICES PRINCIPIA.

§ 1. De numeris et de additione.

Explicationes.

Signo N significatur *numerus* (*integer positivus*).
» 1 » *unitas*.
» $a+1$ » *sequens a*, sive *a plus 1*.
» $=$ » *est aequalis*. Hoc ut novum signum considerandum est, etsi logicae signi figuram habeat.

Axiomata.

1. $1 \in N$.
2. $a \in N . \supset . a = a$.
3. $a, b \in N . \supset : a = b . = . b = a$.
4. $a, b, c \in N . \supset \therefore a = b . b = c : \supset . a = c$.
5. $a = b . b \in N : \supset . a \in N$.
6. $a \in N . \supset . a + 1 \in N$.
7. $a, b \in N . \supset : a = b . = . a + 1 = b + 1$.
8. $a \in N . \supset . a + 1 - = 1$.
9. $k \in K \therefore 1 \in k \therefore x \in N . x \in k : \supset_x . x + 1 \in k :: \supset . N \supset k$.

Definitiones.

10. $2 = 1 + 1 ; 3 = 2 + 1 ; 4 = 3 + 1$; etc.

Theoremata.

11. $2 \in N$.

Demonstratio:

P 1 . ⊃ :	$1 \in N$	(1)
1 [a] (P 6) . ⊃ :	$1 \in N . \supset . 1 + 1 \in N$	(2)
(1) (2) . ⊃ :	$1 + 1 \in N$	(3)
P 10 . ⊃ :	$2 = 1 + 1$	(4)
(4) . (3) . (2, 1 + 1) [a, b] (P 5) : ⊃ :	$2 \in N$	(Theorema).

* La formalisation, l'axiomatisation ne se font-elles pas au détriment du sens ?

"On n'a pas, je crois, tiré de l'axiomatique hilbertienne la vraie leçon qui s'en dégage ; c'est celle-ci : on n'accède à la rigueur absolue qu'en éliminant la signification ; l'absolue rigueur n'est possible que dans et par l'insignifiance. Mais s'il faut choisir entre rigueur et sens, je choisirai sans hésitation le sens. C'est ce choix qu'on a toujours fait en mathématique, où on opère pratiquement toujours dans une situation semi-formalisée, avec un métalangage qui est le langage ordinaire, non formalisé. Et toute la profession se contente de cette situation impure et n'en demande pas de meilleure.
On a d'ailleurs, très probablement, surestimé l'importance de la rigueur en mathématique.
"Les férus d'axiomatique feraient bien de réfléchir au problème philosophique suivant : pourquoi le langage ordinaire n'est-il pas axiomatisable" [6].

Cette perte de sens est caractérisée par l'anecdote de H. Freudenthal [8] qui décrit une théorie mathématique des assemblées.

"Une assemblée est un ensemble ordonné <A,P,p,s,C1,C2,c,i1,i2,D,i3> constitué de :
une partie bornée A de l'espace euclidien ;
un ensemble fini P, celui des participants ;
deux éléments p et s de P appelés président et secrétaire ;
un ensemble fini C1 dont les éléments sont appelés chaises ;
un ensemble fini C2 dont les éléments sont appelés tasses de café ;
un élément c appelé clochette ;
une injection i1 de P dans C1;
une application i2 de C2 dans P ;
un ensemble ordonné D1 l'ensemble des discours ;
une application i3 de D dans P dont l'image contient p.
Si i3 est une surjection, on dit généralement que tout le monde a eu le crachoir".

*** Dans notre enseignement.**

Dans notre enseignement le langage utilisé en mathématique n'est pas formalisé même si nous utilisons quelques symboles. La démonstration "rigoureuse" ne peut donc jamais l'être absolument.
Par conséquent contentons-nous (quand nous le pouvons !) d'expliciter le niveau d'exigence de rigueur.
- Certaines étapes évidentes n'ont nul besoin d'être explicitées au collège.

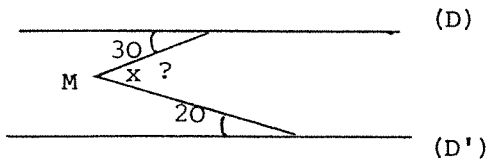
Exemple.
ABC sont trois points distincts alignés sur une droite (D).
Démontrer que (AB) = (BC).

Démonstration :

*A∈(d), B∈(d) or par deux points distincts il ne passe qu'une seule droite donc (AB) = (d).
*De même (BC) = (d).

Or deux choses égales à une même troisième sont égales entre elles donc (AC) = (AB).
- D'autres étapes non explicitées à un niveau donné devront l'être à un niveau supérieur. Ainsi convenons **que le niveau de rigueur doit évoluer** de la 6ème à la 3ème (et même plus loin dans le cursus).

Exemple :
(D) et (D') sont parallèles que dire de x ?



En cinquième les élèves tracent la parallèle (Δ) à (D) passant par M et calculent x par les angles alternes-internes. L'étape
(Δ) // (D') peut être passée sous silence en 5ème mais doit apparaître en 4ème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] - Polya. La découverte des Mathématiques. Dunod.
[2] - N.Balacheff. Préface à l'édition française de Preuves et démonstrations de Lakatos. Hermann.
[3] - Bolzano cité par le groupe IREM, Histoire et Epistémologie in Mathématiques au fil des âges. Gauthier-Villars.
[4] - Dieudonné. Pour l'honneur de l'esprit humain. Hachette.
[5] - Peano, cité par le groupe IREM, Histoire et Epistémologie in Mathématiques au fil des âges, Gauthier-Villars.
[6] - Thom. Pourquoi la mathématique ? U.G.E.
[7] - Bourbaki. Introduction à la théorie des ensembles.
[8] - L'univers mathématique, Gauthier-Villars.

Aide n° 4

Place et rôle de la démonstration et de la preuve dans l'activité mathématique

Peut-on faire des mathématiques sans démontrer ?

L'activité mathématique est-elle faite essentiellement de démonstrations ?

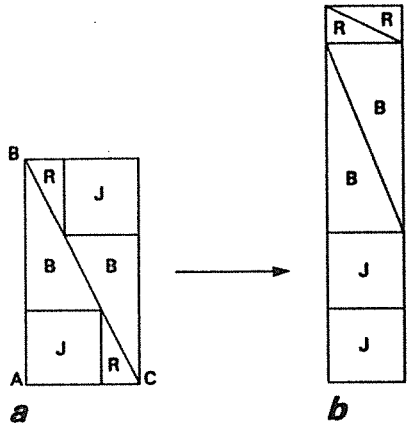
Place de la démonstration dans l'activité mathématique de l'élève.

Bibliographie.

Place et rôle de la démonstration et de la preuve dans l'activité mathématique.

Peut-on faire des mathématiques sans démontrer ?

* L'histoire des mathématiques nous apprend que de nombreuses civilisations faisaient des mathématiques sans démontrer (au sens où on entend le mot "démontrer"). Ainsi les Chinois (IIIième siècle avant notre ère) utilisant "le principe de rapièçage pour les figures géométriques".



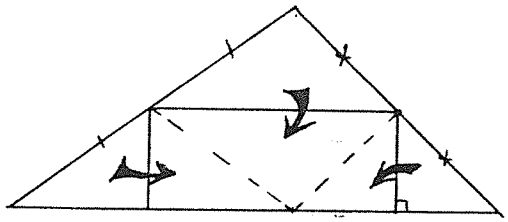
Calcul du côté du carré inscrit dans un triangle rectangle (Liu Hui, IIIe siècle de notre ère) : assemblant comme en (b) les pièces correspondant à deux exemplaires du triangle rectangle initial (a), on forme un rectangle de longueur AB + AC et d'aire S. Comme l'aire totale de toutes ces pièces n'a pas changé en passant de (a) à (b) et qu'au départ S = AB × AC, on trouve que le côté du carré est égal à (AB × AC)/(AB + AC). Nous avons noté J, R, B ces pièces car Liu Hui utilise des figures colorées en jaune, rouge et bleu.

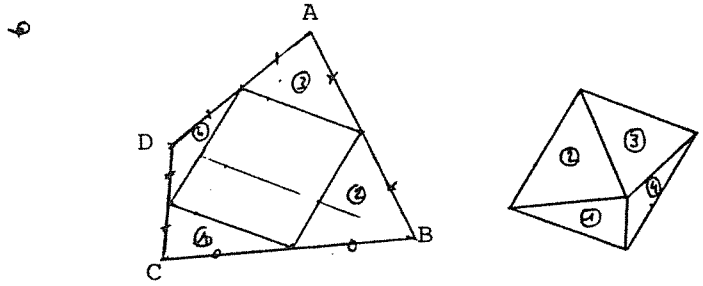
[7]

* Dans nos classes ne nous arrive-t-il pas de faire des mathématiques sans démontrer mais en fournissant des preuves ? Ainsi le pliage, le découpage sont utilisés.

Exemples :

° La somme des angles d'un triangle est 180°.





Par découpage le quadrilatère ABCD a une aire double de celle du quadrilatère ayant pour sommets les milieux de ses côtés.
* Il est intéressant de constater qu'à une même époque les mathématiciens fournissaient des explications en algèbre et en arithmétique qui n'étaient pas des démonstrations alors qu'en géométrie les explications fournies en étaient.

Exemple en arithmétique (Stevin)

THEOREME.

Plus multiplié par plus, donner produict plus, & moins multiplié par moins, donner produict plus, & plus multiplié par moins, ou moins multiplié par plus, donner produict moins.

Explication du donné. Soit 8 — 5 multiplié par 9 — 7, en cette sorte ; — 7 fois — 5 font + 35 (+ 35, par ce que, comme

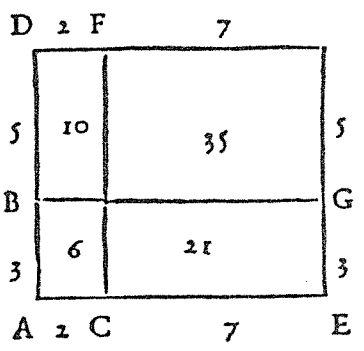
comme dict le theoreme, — par —, faict +) Puis — fois 8 faict — 56 (— 56, par ce que, comme dict le theoreme, — par +, faict —) Et semblablement sont — 5, multiplie par le 9, & donneront produicts 72 — Puis ajoustez + 72 + 35, font 107. Puis ajoustez les — — 45, font — 101 ; Et soubstraict le 101 de 107 reste pour produict de telle multiplication. De laquelle la position des characteres de l'operation est telle:

8 — 5
9 — 7
— 56 + 35
72 — 45
6

Explication du requis. Il faut monstrer par ledict donné, que multiplié par +, faict +, & que par —, faict +, & que + par — — par +, faict —. *Demonstration.* Le nombre à multiplier 8 — 5, 3, & le multiplicateur 9 — 7 2 ; Mais multipliant 2 par 3, le produict est 6 ; Donc le produict cy dessus aussi 6, est le vray produict : M le mesme est trouvé par multiplication, là ou nous are dict que + multiplié par +, donne produict +, & par — donne produict +, & + par —, ou — pa donne produict —, doncques le theoreme est verita

le nous demonstrerons estre egales à C B en ceste sorte. De tout le E D + G F, soubstraict E F, & D G, reste C B. *Conclusion.* Plus doncques multiplié par plus, donne produict plus. & moins multiplié par moins, donne produict plus, & plus multiplié par moins, ou moins multiplié par plus, donne produict moins ; ce qu'il falloit demonstrer.

Autre demonstration geometrique.



Soit A B 8 — (sçavoir A D 8 — F 5) Puis A C 9 — (à sçavoir A E 9 — C 7) leur produ sera C B : ou bien lon la multiplica precedante E D — E F 56 — D G. + G F 35, Lesq

Notons qu'il paraissait difficile dans certains domaines de l'analyse, de l'algèbre ou de l'arithmétique d'aller au-delà d'explications (qui ne sont pas des démonstrations). En effet les objets sur lesquels portaient les travaux n'étaient pas clairement définis (par exemple les nombres relatifs ont acquis leur statut de nombre à la fin du 19ème siècle par Hankel). En géométrie par contre l'axiomatisation d'Euclide permettait de faire des démonstrations.

On peut penser que jusqu'au XIXème siècle les domaines mathématiques autres que la géométrie restaient à explorer. Pour avancer il suffisait donc d'utiliser des résultats dont on était intimement convaincu qu'ils étaient justes. De nombreux résultats et théories furent ainsi découverts.
A contrario on peut aussi penser que le souci de rigueur des Grecs a été un frein à leurs découvertes, notamment sur les nombres.

L'activité mathématique est-elle faite essentiellement de démonstration ?

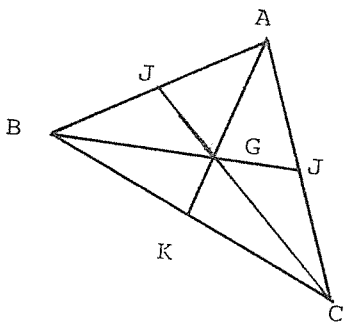
La démonstration (ou la preuve) est-ce le dernier maillon de toute activité mathématique ?
Nous donnons deux éléments de réflexion.

**** La place de la démonstration dans la résolution de problèmes selon Polya.***

La résolution d'un problème comporte selon lui 4 phases.
1. Comprendre le problème (voir clairement où celui-ci se situe).
2. Trouver des relations entre les données et l'inconnue, éventuellement considérer des problèmes auxiliaires, faire un plan.
3. Exécuter le plan.
4. Examiner la solution.

La démonstration n'intervient que dans la troisième phase pour s'assurer que le plan n'a pas de faille. Mais selon Polya c'est la partie heuristique (phases 1 et 2) qui est la plus importante comme en témoignent ses ouvrages:
"Comment poser et résoudre un problème?", "Les mathématiques et le raisonnement plausible", "la découverte des mathématiques" ; qui sont des cours d'heuristique.
Voici le fonctionnement que préconise Polya sur un exemple :
construire un triangle connaissant les longueurs des 3 médianes.

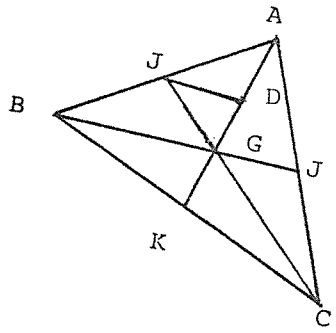
1) Compréhension du problème :
* supposons le problème résolu :



Le triangle se divise en 6 triangles, je connais les médianes, je ne connais pas les côtés.
Comment construire un triangle ?

2) Elaboration d'un plan.
Recherche du plan
a) Pour construire un triangle il faut 3 données (3 côtés ou 2 angles un côté, deux côtés un angle).

b) Si un des 6 petits triangles (exemple AGJ) était construit on pourrait construire (ABC). Or on ne connaît que deux côtés pour chacun de ces triangles, pour chacun de ces triangles une des longueurs des médianes n'est pas utilisée.
c) Il faut rechercher un triangle en utilisant les longueurs des 3 médianes.



Dans (AGI)(AG) est connu, (GI) est connu. La longueur de [BJ] n'est pas utilisée.
On fait intervenir le point D milieu de [AG].
Le triangle (DIG) peut être construit.

d) Plan :
- construire (DIG)
- construire (ABG)
- construire (ABC).

3) Exécution du plan
C'est dans cette phase qu'interviennent les démonstrations et les justifications des constructions.
La démonstration nous assure que notre raisonnement inductif est correct.

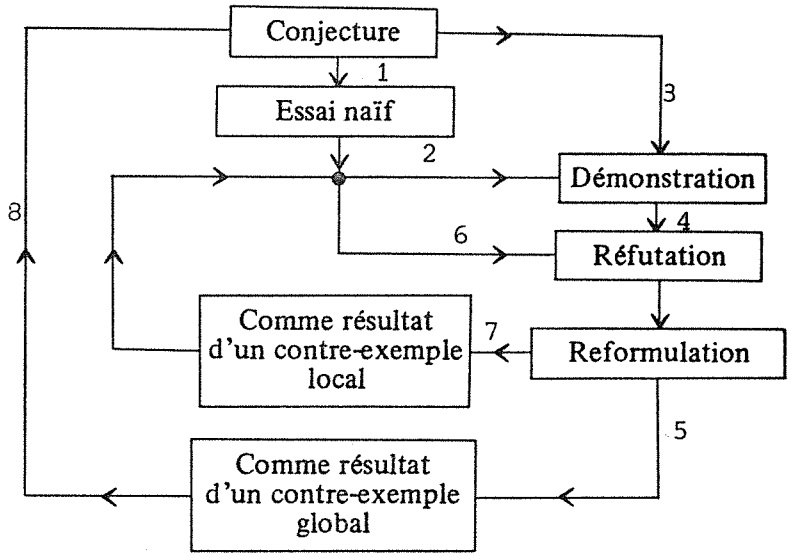
4) Examen de la solution
Ce n'est pas vraiment utile sur cet exemple car aucune discussion n'est nécessaire.

**** La place et le rôle de la preuve dans la création des mathématiques selon I.Lakatos.***

Pour Lakatos (1922-1974). La preuve n'est pas le point final de la résolution d'un problème ou de l'élucidation d'une conjecture. Il n'y a pas d'un côté la preuve et de l'autre les réfutations. La résolution ne peut se faire que par une dialectique preuve-réfutations. Ce faisant on procède par induction.

"A partir d'un problème ou d'une conjecture, il y a une recherche simultanée de démonstrations et de contre-exemples. De nouvelles démonstrations élucident les vieux contre-exemples, de nouveaux contre-exemples sapent les anciennes démonstrations. Pour Lakatos, "démonstration", dans ce contexte de mathématiques informelles, ne signifie pas un procédé mécanique qui apporte la vérité en une chaîne incassable depuis les hypothèses jusqu'aux conclusions. Cela signifie plutôt explications, justifications, élaborations qui rendent la conjecture plus plausible, plus convaincante, tandis qu'elle devient plus détaillée et plus précise sous la pression des contre-exemples.
Chaque étape de la démonstration est elle-même sujette à la critique, qui peut être le simple scepticisme ou encore la production d'un contre-exemple à propos d'un argument particulier. Un contre-exemple qui défie une seule étape de l'argument est appelé par Lakatos "contre-exemple local" ; un contre-exemple qui défie, non l'argument, mais la conclusion elle-même, est dit "global".[2].

Un exemple de tel fonctionnement peut se schématiser ainsi :



Examinons maintenant le fonctionnement de ce schéma.
(Pour plus de détails consulter [1]) au travers de l'exemple développé par Lakatos.

Conjecture : S - A + F = 2 ou S, A et F désigne respectivement le nombre de sommets, d'arêtes et de faces d'un polyèdre.

a) —③→ : démonstration (l'aspect heuristique de la démonstration est caché!)

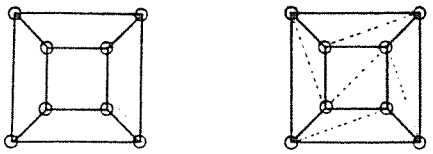
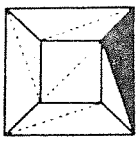
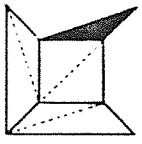


Figure 1

Figure 2



(a)



(b)

Figure 3

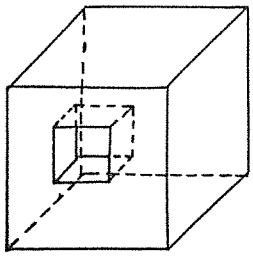
1. Imaginons le polyèdre creux et sa surface faite d'un caoutchouc mince. Si nous découpons l'une des faces, nous pouvons étirer la surface restante à plat sur le tableau, sans la déchirer. Les faces et les arêtes vont peut-être se déformer, des arêtes devenant courbes, mais ni S ni A ne seront modifiés, si bien que S - A + F = 1 dans le graphe plat si et seulement si S - A + F = 2 pour le polyèdre initial. Souvenez-vous que nous avons ôté une face. (La figure 1 montre le graphe plat obtenu dans le cas d'un cube).

2 Maintenant nous triangulons notre carte (on dirait effectivement une carte géographique) : c'est-à-dire que nous traçons des diagonales (éventuellement curvilignes) dans les faces polygonales (éventuellement curvilignes). En traçant chaque diagonale nous augmentons à la fois A et F d'une unité, ce qui ne modifie pas S - A + F (fig. 2).

3. Maintenant, nous enlevons un à un les triangles du graphe triangulé. Pour enlever un triangle, nous enlevons soit un côté, ce qui fait disparaître simultanément une face et une arête (fig. 3 (a)), soit deux côtés et un sommet, dans ce cas une face, deux côtés et un sommet disparaissent (fig.3(b). Alors, si S - A + F = 1 avant qu'un triangle ne soit enlevé. [1].

b) Si pour le cube (fig. 2) on commence par enlever un triangle à l'intérieur du cube la preuve est fausse. Nous avons ici un contre-exemple local. La preuve n'est pas rejetée mais à reformuler. -(7)→-(2)→

c) Contre-exemple global. -(4)→-(5)→-(8)→



(Un cube avec un "cube creux" à l'intérieur).

Il remet en cause la conjecture (nombre de faces 12, nombre d'arêtes 24, nombre de sommets 16).
Ce contre-exemple (monstre) peut être relégué : il faut alors redéfinir la conjecture (ici définir ce que l'on entend par polyèdre) ou admettre que la conjecture n'est pas valable pour tous les polyèdres ; c'est-à-dire qu'il y a des exceptions (exemple : tout polyèdre sans trou est tel que s - a + f = 2).
Ce contre-exemple global ne remet pas en cause la preuve. Selon Lakatos la preuve même si elle ne prouve pas ce que l'on a cherché à prouver, peut-être créatrice de mathématiques.

Dans ce fonctionnement la recherche des réfutations joue un rôle aussi grand que la recherche de preuve. Les réfutations aident à préciser la preuve (celle-ci tend à devenir une démonstration).
La méthode décrite, Lakatos l'a baptisée méthode de preuve et réfutations.

Il l'a résumée en 5 règles.

Règle 1. *En présence d'une conjecture, mettre en chantier sa preuve comme sa réfutation. Examiner la preuve avec précaution pour préparer une liste de lemmes non triviaux (la preuve-analytique) ; trouver des contre-exemples à la fois à la conjecture (aspect global) et aux lemmes suspects (aspect local).*

Règle 2. *En présence d'un contre-exemple global, écarter votre conjecture, ajouter à la preuve-analytique un lemme convenable, réfuté par le contre-exemple, et remplacer la conjecture écartée par une version améliorée en lui incorporant ce lemme sous forme de condition. Ne pas accepter qu'une réfutation soit écartée comme un monstre. Essayer d'expliciter tous les "lemmes cachés".*

Règle 3. *En présence d'un contre-exemple local, vérifier s'il n'est pas non plus global. Si oui, il est aisé d'appliquer la Règle 2.*

Règle 4. *En présence d'un contre-exemple local et non global, essayer d'améliorer la preuve analytique en remplaçant le lemme refuté par un autre qui ne le soit pas.*

Règle 5. *En présence de contre-exemples quel qu'en soit le type, essayer de trouver par une spéculation déductive un théorème plus profond pour lequel ce ne sont plus des contre-exemples.[1].*

Place de la démonstration dans l'activité mathématique de l'élève.

Mais comme l'ont montré Polya et Lakatos, la démonstration n'est qu'un moment de l'activité mathématique.
Celle-ci est essentiellement constituée de résolutions de problèmes (de "vrais problèmes") dans lesquels la partie heuristique est très importante.

En conséquence, à côté d'exercices plus didactiques sur la démonstration, ne convient-il pas de mettre les élèves en recherche sur de tels problèmes afin que la démonstration reprenne tout son sens ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] LAKATOS, Preuves et démonstration, Hermann.
[2] DAVIS HERSH, L'Univers mathématique, Gauthiers-Villars.
[3] POLYA, Comment poser et résoudre un problème ? Dunod.
[4] POLYA, La découverte des mathématiques, Dunod.
[5] STEVIN, l'Arithmétique, Leide 1625 (BM. La Rochelle).
[6] IREM de Poitiers, Travaux numériques en 4ème (Histoire des relatifs).
[7] MARTZLOFF, les mathématiques chinoises in "le matin des mathématiciens" Belin.

Aide n° 5

Naissance de la démonstration

Une certitude

Pourquoi en Grèce ?

Que retenir ?

La démonstration n'existe-t-elle qu'en mathématiques ?

Bibliographie.

Naissance de la démonstration.

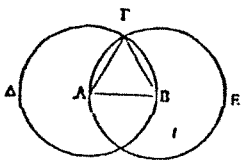
Une certitude

Tout le monde est d'accord pour dire que la démonstration, telle que nous la pratiquons en mathématiques, vient de la Grèce antique, vers le Vème siècle avant Jésus Christ, et que son avènement a partie liée avec la naissance de la philosophie : c'est le "miracle" grec, l'émergence d'une rationalité qui marquera la pensée occidentale jusqu'à Descartes, et qui influence encore la pensée actuelle. Un exemple en est la mathématique axiomatique de notre siècle ; ainsi le tout début du traité de Bourbaki, **Eléments de mathématiques**, commence par une référence à la Grèce.

"Depuis les Grecs, qui dit mathématique dit démonstration ; certains doutent même qu'il se trouve, en dehors des mathématiques, des démonstrations au sens précis et rigoureux que ce mot a reçu des Grecs et qu'on entend lui donner ici. On a le droit de dire que ce sens n'a pas varié, car ce qui était une démonstration pour Euclide en est toujours une à nos yeux ; [1].
Bourbaki a raison, car pour une majorité d'entre nous, enseignants, les canons de la démonstration selon Euclide sont ceux que nous voulons inculquer à nos élèves en 4ème, parfois même depuis la 6ème, et nous en pensons l'apprentissage essentiellement à partir de la géométrie "pure", celle d'Euclide. Nous ne pouvons nier la qualité de démonstration à celles produites par Euclide dans ses **Eléments** : même si parfois nous ne les trouvons pas assez rigoureuses (cf. &. Styles de démonstration) elles restent pour nous des modèles. On pourra en juger à travers l'exemple
suivant :

Proposition première

Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral.
Exposition. Soit AB une droite donnée et finie.
Détermination. Il faut construire sur la droite finie AB un triangle équilatéral.
Construction. Du centre A et de l'intervalle AB, décrivons la circonférence BΓΔ (dem.3); et de plus, du centre B et de l'intervalle BA, décrivons la circonférence AΓE ; et du point Γ , où les circonférences se coupent mutuellement, conduisons aux points A, B les droites ΓA, ΓB (dem. I).



Démonstration. Car, puisque le point A est le centre du cercle BΓΔ, la droite AΓ est égale à la droite AB (déf. 15) ; de plus, puisque le point B est le centre du cercle AΓE, la droite BΓ est égale à la droite BA ; mais on a démontré que la droite ΓA était égale à la droite AB ; donc chacune des droites ΓA, ΓB est égale à la droite AB; or, les grandeurs qui sont égales à une même grandeur, sont égales entre elles

(not. I) ; donc la droite ΓA est égale à la droit ΓB ; donc les trois droites ΓA, AB, BΓ sont égales entre elles.
Conclusion. Donc le triangle ABΓ (déf.24) est équilatéral, et il est construit sur la droite donnée et finie AB. Ce qu'il fallait faire. [2].

Mais pourquoi en Grèce ? Pourquoi à cette époque, le Vème siècle avant J.C.

On pourra se reporter utilement à l'article de G. Arsac [3] auquel nous allons faire quelques emprunts. Tout d'abord une citation de J.P. Vernant que donne Arsac.

Ce n'est certainement pas le fait du hasard et la raison surgit en Grèce comme une conséquence de cette forme si originale d'institutions politiques qu'on appelle la Cité. Avec la Cité, et pour la première fois dans l'histoire de l'homme, le groupe humain considère que ses affaires communes ne peuvent être réglées, les décisions d'intérêt général prises, **qu'au terme d'un débat public et contradictoire,** *ouvert à tous et où* les **discours argumentés** *s'opposent les uns aux autres. Si la pensée rationnelle est apparue dans des cités grecques d'Asie Mineure comme Milet, c'est parce que les règles du jeu politique dans le cadre de la cité - débat public, argumenté, librement contradictoire,* **étaient devenues aussi** la **règle du jeu intellectuel"**

quelques lignes plus loin J.P. Vernant ajoute :

"A contrario, il ne peut y avoir de démonstration en mathématiques dans une civilisation d'où le débat, la discorde sont bannis, car la démonstration s'adresse à un interlocuteur **qu'il faut convaincre,** *qui a donc le droit d'être a priori en désaccord. Donc, pas de démonstration à proprement parler dans les mathématiques babyloniennes, égyptiennes, hindoues, chinoises".*

Si les jeux agonistiques ou combats d'arguments, menés par les sophistes, qui se faisaient en public et donnaient lieu à l'attribution de prix, ont modelé l'esprit grec et se sont certainement transférés sur les mathématiques, il faut dire aussi que le travail des mathématiciens grecs a été d'affiner ces méthodes oratoires au point qu'elles deviennent un modèle pour l'argumentation philosophique, comme en témoigne ce passage du Ménon de Platon :

"Nous allons donc, si je ne me trompe, essayer de découvrir la qualité d'une chose dont nous ignorons la nature. Que ta toute-puissance du moins me fasse une très légère concession : accorde-moi d'examiner "par hypothèse" si la vertu peut s'enseigner ou non. Je prends ces mots, "par hypothèse", dans le sens des géomètres. Quand on leur demande, à propos d'une surface, par exemple, si tel triangle peut s'inscrire dans tel cercle, un géomètre répondra : "je ne sais pas encore si cette surface s'y prête ; mais je crois à propos, pour le déterminer, de raisonner par hypothèse de la manière suivante : si telles conditions se présentent, le résultat sera ceci, et dans telles autres conditions, il sera cela. Ainsi est-ce par hypothèse, que je puis te dire ce qui arrivera pour l'inscription du triangle dans le cercle, si elle sera possible ou non.

"Un autre mode de pensée a certainement aussi façonné la méthode des mathématiciens c'est celle des philosophes éléates pour lesquels : "le monde sensible, celui des apparences et des phénomènes, ne peut pas être l'objet d'une connaissance véritable, non contradictoire. La vérité est inaccessible par l'observation, elle n'est accessible qu'à la pensée pure" . [3]

Ils raisonnent alors sur des objets idéaux (voir texte de Platon dans Aide, preuves et démonstrations). Ils utilisent souvent des raisonnements indirects, par exemple le raisonnement par l'absurde que l'on retrouve souvent chez Euclide (36% des raisonnements des livres VII et IX sont de ce type cf. l'étude de Itard dans [4]) et que l'on retrouve aussi dans des manuels de mathématiques de 4ème comme premier exemple de démonstration, à propos de la transitivité du parallélisme.
Un deuxième apport des éléates est la dialectique dont le père est Zénon d'Elée (bien connu pour ses paradoxes dont celui d'Achille et de la tortue). Cette façon de dialogue qu'est la dialectique a des règles bien établies : définitions préalables, demandes et déductions. Ce sont ces règles qui ont donné sa forme à l'édifice euclidien, c'est-à-dire à la première axiomatique connue. Mais cet édifice, **les Eléments**, est une organisation du savoir de l'époque, et dans cette organisation la démonstration joue un rôle d'enchaînement des propositions : l'aspect débat s'est estompé. En témoigne la définition que donne Aristote de la démonstration : "ce que nous appelons **savoir** c'est **connaître** par le moyen de la **démonstration**. Par démonstration j'entends le syllogisme scientifique". [5] . Or syllogisme veut dire, étymologiquement, assemblage de propositions (sun-logoi). Les **Eléments** vont ensuite devenir la référence : c'est ce que l'on cherchera à imiter. On sera alors plus sensible à la forme qu'au fond. C'est ce que l'on retrouve chez Descartes ("les longues **chaînes** de raison dont usent les géomètres....") [6] ou chez Leibniz ("la connaissance démonstrative n'est qu'un enchaînement des connaissances intuitives dans toutes les connexions des idées médiates". [7]. C'est en fait l'image classique de la démonstration qui est venue jusqu'à nous : il ne s'agit plus de mettre à l'épreuve une affirmation, mais d'enchaîner des propositions.(Voir Aides : preuves et démonstration/démonstration et enseignement)

Que retenir ?

L'important est de savoir
1 - Que l'origine de la démonstration est liée au débat et c'est donc peut-être en organisant de tels débats de preuves, en classe, que l'on pourrait arriver à la démonstration.

2 - Que ce type de raisonnement qu'est la démonstration est historiquement et culturellement situé, il répondait à des finalités précises et relevait d'une conception du monde qui n'est plus la nôtre.
Il faut donc revoir le rôle que peut jouer la démonstration au sein des mathématiques actuellement (cf.place et rôle de la démonstration et de la preuve dans l'activité mathématique).

3 - Que l'utilisation de la démonstration dans les **Eléments** d'Euclide et dans toute axiomatique (dont les Eléments sont le modèle) comme procédé d'exposition joue un rôle théorique, est le travail du théoricien, cet aspect pourrait donc être omis dans l'enseignement, à moins que... comme le pensent beaucoup, l'apprentissage de cette exposition n'ait des vertus formatrices. Mais alors il faudrait peut être enseigner une théorie complète : mais comment sera perçu alors le choix des axiomes ? ses finalités éventuelles, c'est ce que dit Arsac [3] :
"Est-il besoin de souligner aussi combien la rationalité scientifique contemporaine est différente, et combien, au contraire, elle tient à subir l'épreuve de l'expérience. Cette rationalité a marqué les mathématiques, auxquelles nous n'avons plus le même rapport que les Grecs : les critiques adressées par Descartes au XVIIème siècle à la mathématique grecque marquent déjà nettement une coupure. Contrairement à ce que pensent certains mathématiciens, nos mathématiques, à la différence de celles d'Euclide, sont marquées par le rapport au concret. A fortiori, l'enseignant de mathématiques, qui intervient auprès de ses élèves en général dans le cadre d'une formation scientifique globale, me semble devoir être conscient de la

différence qui nous marque par rapport à Euclide, Platon et Zénon. Il n'a donc pas à reproduire purement et simplement la démarche, nécessaire en son temps, des premiers mathématiciens qui ont utilisé l'axiomatique et la démonstration. La place de la nécessaire abstraction par rapport au concret, de la démonstration, de l'axiomatique, la construction des concepts, ne se fait plus avec pour arrière-plan la pensée de Platon ou celle de Parménide.

La démonstration n'existe-t-elle qu'en mathématiques ?

Si la démonstration est originellement et essentiellement grecque, est-elle spécifique du domaine mathématique comme semble l'affirmer Bourbaki dans la citation faite au début ? En fait nous avons déjà vu que Socrate sous la plume de Platon incite à l'utilisation de ce type de raisonnement en philosophie. Mais Leibniz voit aussi dans d'autres domaines que les mathématiques des démonstrations de même nature.

Théophile: *"Il y a des exemples assez considérables des démonstrations hors des mathématiques, et on peut dire qu'Aristote en a donné déjà dans ses premiers analytiques. En effet la logique est aussi susceptible de démonstrations que la géométrie, et l'on peut dire que la logique des géomètres, ou les manières d'argumenter qu'Euclide a expliquées et établies en parlant des propositions, sont une extension ou promotion particulière de la logique générale. Archimède est le premier, dont nous avons des ouvrages, qui ait exercé l'art de démontrer dans une occasion où il entre du physique, comme il a fait dans son livre, De l'Equilibre. De plus, on peut dire que les jurisconsultes ont plusieurs bonnes démonstrations ; surtout les anciens jurisconsultes romains, dont les fragments nous ont été conservés dans les Pandectes. Je suis tout à fait de l'avis de Laurent Valle, qui ne peut assez admirer ces auteurs, entre autres parce qu'ils parlent tous d'une manière si juste et si nette et qu'ils raisonnent en effet d'une façon qui approche fort de la démonstrative, et souvent est démonstrative tout à fait. Aussi ne sais-je aucune science, hors de celle du droit et celle des armes, où les Romains aient ajouté quelque chose de considérable à ce qu'ils avaient reçu des Grecs.*

Tu vegere imperio populos, Romane, memento
Hae tibi erunt artes : pacique imponere morem,
Parcere subjectis, et debellare superbos (*).

(*) "Toi, Romain, souviens-toi qu'il t'appartient d'étendre ton empire sur les peuples, tels seront tes arts à toi, et de dicter les lois de la paix, d'épargner les vaincus et d'abattre les superbes "Virgile.Enéide [7].

Cette manière précise de s'expliquer a fait que tous ces jurisconsultes des Pandectes, quoique assez éloignés quelquefois les uns du temps des autres, semblent être tous un seul auteur, et qu'on aurait bien de la peine à les discerner, si les noms des écrivains n'étaient pas à la tête des extraits ; comme on aurait de la peine à distinguer Euclide, Archimède et Apollonius en lisant leurs démonstrations sur des matières, que l'un aussi bien que l'autre a touchées. Il faut avouer que les Grecs ont raisonné avec toute la justesse possible dans les mathématiques, et qu'ils ont laissé au genre humain les modèles de l'art de démontrer : car si les Babyloniens et les Egyptiens ont eu une géométrie un peu plus qu'empirique, au moins n'en reste-t-il rien.

Et que dire de la présentation "More geometrico" à la façon d'Euclide, de l'Ethique de Spinosa [8]?

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI. Eléments de mathématiques. Livre I - Théorie des ensembles. Hermann.

[2] EUCLIDE. Eléments. Trad. Peyrard. Blanchard.

[3] ARSAC. Thèses contemporaines sur l'apparition de la démonstration dans las mathématiques. Séminaire IMAG.

[4] EUCLIDE. Livres arithmétiques. Trad. Itard. Hermann.

[5] ARISTOTE. La logique.

[6] DESCARTES. Discours de la méthode.

[7] LEIBNIZ. Nouveaux essais sur l'entendement. Garnier - Flammarion.

[8] SPINOZA. Ethique. Collection Idées NRF.

Aide n° 6

Démonstration et enseignement

La place de la démonstration dans les nouveaux programmes de collège.
- Textes
- Réflexions.

Evolution possible vers la démonstration
- Difficultés rencontrées dans l'apprentissage
. Construction des connaissances
. Les obstacles.

- Choix didactiques
. La démonstration a deux fonctions
. Faire comprendre l'utilité d'une démonstration
. Apprendre à faire des démonstrations.

- Conclusions

DEMONSTRATION ET ENSEIGNEMENT

La place de la démonstration dans les nouveaux programmes de collège

1 - Les textes

Au cours des quatre années de collège, les élèves reçoivent une formation commune. L'un des 3 objectifs généraux communs à toutes les disciplines est "de développer la pensée logique".

Ainsi dans la partie "orientation et objectifs" (page 18) on peut lire :

"Les élèves doivent devenir progressivement capables d'observer des réalités, d'analyser des idées et des concepts, de les organiser pour construire des raisonnements, de commencer à argumenter de manière rigoureuse...".

Considérons l'enseignement des mathématiques en particulier ; à la lecture des programmes, on s'aperçoit que le mot démonstration n'apparaît nulle part, mais par contre, il est question de raisonnement, de raisonnement déductif, de séquences déductives. Est-ce synonyme ?

Dans la partie I, "Nature et objectifs" (p.77), on peut lire,

"Développer les capacités de raisonnement : observation, analyse, pensée déductive".

Dans la partie II "Instructions générales, méthodes" (p.81) on trouve,

"Ménager des séquences déductives motivantes de plus en plus prolongées, nombreuses et de difficultés progressives au long des quatre années de collège".

En ce qui concerne les programmes des quatre années, le travail effectué doit permettre,

En 6ème-5ème

"de s'initier progressivement au raisonnement déductif".

En 4ème

"de s'entraîner progressivement au raisonnement déductif".

En 3ème

"de s'entraîner constamment au raisonnement déductif".

Les compléments et les commentaires précisent les travaux permettant initiation et entraînement.

En 6ème.

Dans la partie "travaux géométriques" des compléments figures planes :
"les travaux faciliteront la mise en place de courtes séquences déductives".

Et a propos de la partie "symétrie orthogonale" par rapport à une droite:

"Les travaux permettront sous la direction du professeur de mettre en oeuvre de brèves séquences déductives".

En 5ème.
Dans le document de travail, on peut noter toujours dans la partie géométrie plane :

"Les diverses activités de géométrie plane habitueront les élèves à expérimenter et à conjecturer. Elles permettent la mise en oeuvre de brèves séquences déductives mettant en jeu les outils mathématiques du programme".

A propos de la symétrie centrale :

"Les propriétés de la symétrie centrale sont à relier à la caractérisation du parallélogramme, aux caractérisations angulaires du parallélisme... sur ces points aucune démonstration n'est exigible des élèves".

En 4ème.
Dans le document provisoire sur les compléments au programme, on peut lire:

"Les travaux mathématiques de la classe de 4ème prolongent ceux de 6ème et de 5ème... ils accentuent progressivement, sans rupture avec l'esprit des classes antérieures, l'entraînement au raisonnement déductif tout en évitant les exigences prématurées de formulation....

"En particulier il [le professeur] lui revient de déterminer selon le niveau de sa classe les résultats qui seront démontrés et ceux qui seront admis..."
"De nouveaux outils, notamment les projections, le théorème de Pythagore, les translations, viennent s'ajouter aux outils des classes antérieures ; à ces enrichissements correspond un développement des capacités de découverte et de démonstration".

En 6ème comme en 5ème.

"On évitera de prouver des propriétés perçues comme évidentes".

2 - La lecture de ces textes suggère quelques réflexions.

a) L'initiation au raisonnement déductif apparaît dès la 6ème, qu'entend-on par là ?
- Est-ce apprendre à faire de courtes démonstrations à une ou deux étapes à partir de propriétés données (type 4ème, ancien programme)?
- Est-ce apprendre à utiliser des arguments qui ne sont pas nécessairement des énoncés ou à utiliser des énoncés pertinents par rapport à la figure mais non par rapport aux données ?
Mais obtient-on alors nécessairement des démonstrations ?

b) Le raisonnement ne semble-t-il pas se réduire dans les commentaires de 6ème-5ème au raisonnement de type direct, si.....alors ?

Exemple :

En 6ème : *Si deux segments de même milieu sont perpendiculaires, ce sont les diagonales d'un losange.*

En 5ème : *Si un quadrilatère a ses diagonales de même milieu alors c'est un parallélogramme.*

De ce point de vue ne s'agit-il pas dès la 6ème d'un apprentissage concernant l'enchaînement logique des énoncés ?

Quelle place accorder aux autres types de raisonnements évoqués dans les programmes des collèges ?

c) Notons que les programmes oscillent entre les deux fonctions de la démonstration : preuve et explication (voir aide: Preuve et démonstration). On peut noter :

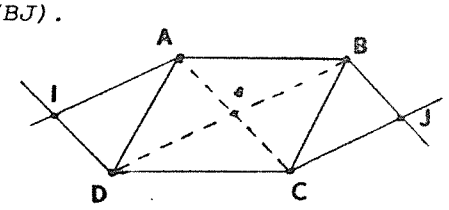
Ainsi la fonction explicative apparaît dans le livre des programmes P.18-19: "les élèves doivent devenir progressivement capables d'observer des réalités, d'analyser des idées et des concepts, de les organiser pour construire des raisonnements...", mais la fonction de preuve apparaît aussi p.18-19, "commencer à **argumenter**" et dans les instructions générales p.81..."ménager des séquences déductives **motivantes**...".
Dans les compléments 6,5,4 il en est de même : la fonction de preuve apparaît dans la phrase "les diverses activités de géométrie plane habitueront les élèves à expérimenter et conjecturer"(complément de 5ème), la fonction d'explication apparaît aussi : "Des travaux permettront sous la direction du professeur de mettre en oeuvre de brèves séquences déductives" (compléments de 6ème).

d) Les projets des commentaires pour la quatrième et à un moindre degré les commentaires de 6ème-5ème incitent à raisonner en utilisant les transformations, mais n'est-ce pas là accroître la difficulté ?

Le paradoxe pédagogique de ces transformations est que leur intérêt réside essentiellement en la puissance et l'efficacité de l'outil qu'elles constituent mais, bien que leur description et leur étude soient relativement simples, savoir s'en servir à bon escient est une toute autre affaire. En effet, même au premier cycle l'étude des symétries centrale et orthogonale, des translations, ne pose pas de difficultés insurmontables mais quel abîme entre la quasi évidence, pour l'élève de quatrième, que l'image d'une droite parallèle et son utilisation dans un exercice pour démontrer une propriété.

En classe de quatrième

Les hypothèses sont :
(A, B, C, D) est un parallélogramme de centre O. Les droites (AI) et (DI) sont respectivement parallèles à (BD) et (AC), idem pour les droites (CJ) et (BJ).



La question est par exemple, prouver que les points I, O et J sont alignés.

Il est clair (en utilisant le résultat cité plus haut) que la symétrie centrale de centre O échange les points I et J, d'où le résultat, avec en prime le fait que O soit le milieu de [IJ]. Cette dernière particularité, qu'on peut d'abord essayer de faire deviner en faisant réaliser des dessins très soignés, pourrait être le déclic faisant penser à l'emploi de la symétrie centrale (interaction dessin-raisonnement).
Mais, expérience faite, il s'avère qu'obtenir ce type de raisonnement d'un élève de quatrième est très difficile car il bute sur deux points :

a) Appréhender suffisamment la symétrie centrale pour y penser et avoir envie de s'en servir est très difficile à ce niveau, même pour de bons élèves, et même si on essaie d'y inciter les élèves par une observation attentive de la configuration, comme indiqué plus haut.

b) A supposer qu'un "entraînement..." intensif les habitue à avoir ce réflexe, ou bien si on donne d'entrée l'indication d'utiliser cette symétrie centrale et même des questions intermédiaires demandant par exemple quelle est l'image de la droite (AI)... etc.., nous avons constaté que subsiste une grosse difficulté (de type ensembliste) : comprendre vraiment que l'intersection des droites (AI) et (DI) a pour image l'intersection des droites (BJ) et (CJ).

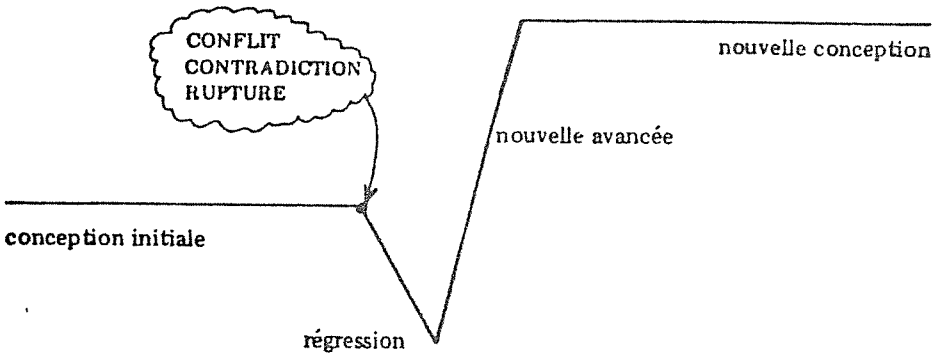
Si on essaie de creuser ce que peut alors être la compréhension des élèves, on s'aperçoit que la plupart veulent bien accepter, à la rigueur..., cette explication du maître, mais qu'elle ne les convainc absolument pas et qu'ils préfèrent une résolution de cet exercice, plus longue, utilisant plusieurs fois le Thalès du milieu.[1].

Evolution possible vers la démonstration

1) Difficultés rencontrées dans l'apprentissage.

* Construction des connaissances.

Aujourd'hui, on sait qu'apprendre c'est changer de structure cognitive, dépasser les idées toutes faites et les conceptions initiales fausses. "Le sujet atteint un certain équilibre, régresse, puis avance à nouveau. Il rencontre des conflits et des contradictions qu'il ne surmonte pas aussitôt."



Cette citation de Bouvier est précisée dans le texte de Berbaum suivant :

"Commençons donc par faire le point sur les conceptions de l'apprentissage. On estime actuellement que l'apprentissage intellectuel est un processus qui consiste, pour l'apprenant, à intégrer les données nouvelles aux connaissances déjà acquises antérieurement. C'est ce que l'on appelle habituellement "comprendre", qui, pris au sens littéral, correspond à cette insertion des éléments nouveaux dans la structure constituée par les éléments anciens, pour "faire que le nouveau soit compris dans l'ancien". La structure à laquelle nous faisons allusion ici est appelée structure cognitive. Il faut se la représenter comme un réseau de concepts, de notions et d'attributs dont nous disposerions comme base de notre activité mentale. Au cours de notre activité de mémorisation, nous incluons ces données nouvelles au milieu des données anciennes, tout en remaniant ainsi cette structure. Le résultat de ce travail est la constitution de représentations. On peut parler d'images mentales, sans vouloir dire par là que la représentation corresponde nécessairement à une élaboration de type

visuel. Il peut s'agir aussi bien d'images auditives ou cénesthésiques que visuelles. Ce sont ces représentations que nous construisons et reconstruisons constamment lorsque nous recevons des informations nouvelles. Mais on comprendra aisément que, pour qu'une telle construction puisse avoir lieu, il importe que des "points d'ancrage" existent. Une information nouvelle qui ne trouverait pas des éléments auxquels se rattacher ne pourrait être retenue. Nous abordons là le problème des prérequis nécessaires à un apprentissage, mais aussi celui des représentations que possèdent les élèves et par rapport auxquelles doit être conçue la formation qui leur est proposée. En effet, s'il s'agit pour l'élève de suivre une formation donnée, ceci ne pourra se faire de manière bénéfique que s'il possède les "bases" sur lesquelles peuvent se fixer les données nouvelles. Si, par contre, on souhaite élaborer une formation à l'intention d'un public donné, il importera de commencer par s'informer sur la nature des représentations qui lui sont propres. Chaque élève a ses propres représentations. C'est à partir d'elles qu'il s'agira de construire les concepts qui correspondent à l'état actuel des connaissances telles qu'elles sont partagées par la communauté scientifique. On parle du passage des percepts aux concepts par l'intermédiaire des représentations, structures transitoires toujours à reprendre,toujours remises en question, mais qui peuvent aussi constituer des obstacles à l'évolution vers les concepts".

* Les obstacles dans l'apprentissage de la démonstration.

La notion d'obstacle.
Un obstacle se manifeste par des erreurs qui se reproduisent et persistent ; elles ne doivent rien au hasard.
Brousseau (R.D.M. 42) distingue trois types d'obstacles,
- les obstacles épistémologiques,
- les obstacles ontogéniques,
- les obstacles didactiques.

*** Les obstacles épistémologiques** (p.178 - RDM 42).
"Les obstacles d'origine proprement épistémologique sont ceux auxquels on ne peut ni ne doit échapper, du fait même de leur rôle constitutif dans la connaissance visée. On peut les retrouver dans l'histoire des concepts eux-mêmes...".

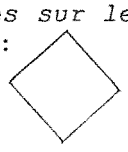
Exemple : *la symétrisation de $\mathbb{N}$ pour la multiplication est un obstacle épistémologique à l'émergence des nombres décimaux chez l'élève (historiquement les fractions ont précédé les décimaux).*

*** Les obstacles ontogéniques** (RDM 4.2 p.177).
"Les obstacles d'origine ontogénique sont ceux qui surviennent du fait des limitations (neurophysiologiques entre autres) du sujet à un moment de son développement....".

Exemple : *La notion d'infini pour un enfant de 5 ans.*

*** Les obstacles didactiques.**
"Les obstacles d'origine didactique sont ceux qui semblent ne dépendre que d'un choix ou d'un projet du système éducatif (RDM 4.2).

Exemple : *Lorsque l'on dispose systématiquement les carrés sur leur base et les losanges sur la pointe, les élèves appellent ceci : un losange (sous-entendu qui est non carré).*



Comment se manifestent ces obstacles dans l'apprentissage de la démonstration ?

- Les obstacles ontogéniques.

* Pour que l'enfant soit capable de démonstration il faut qu'il ait atteint le stade des opérations formelles.

La pensée formelle s'épanouit durant l'adolescence. L'adolescent, par opposition à l'enfant, est un individu qui réfléchit en dehors du présent et élabore des théories sur toutes choses, se plaisant en particulier aux considérations inactuelles. L'enfant ne réfléchit au contraire qu'à l'occasion de l'action en cours, et n'élabore pas de théories, même si l'observateur, notant le retour périodique de réactions analogues, peut discerner une systématisation spontanée dans ses idées. Or, cette pensée réfléchie caractéristique de l'adolescent prend naissance dès 11-12 ans, à partir du moment où le sujet devient capable de raisonner de manière hypothético-déductive, c'est-à-dire sur de simples assomptions sans relation nécessaire avec la réalité ou avec les croyances du sujet, et en se fiant à la nécessité du raisonnement lui-même (vi formae), par opposition à l'accord des conclusions avec l'expérience.

PIAGET, *"La psychologie de l'intelligence".*
Armand Colin 1967, p.157.158.

PIAGET distingue quatre stades :

- le stade sensori-moteur,
- le stade symbolique
- le stade des opérations concrètes
- le stade des opérations formelles.

Les opérations concrètes et formelles sont des actions réversibles (ouvrir-fermer) mais les premieres sont attachées à des objets réels.
* D'autre part l'affectif joue un grand rôle lors de débuts de preuves, rôle d'autant plus grand que l'élève est jeune (" il a raison parce que je l'aime bien").

- Les obstacles épistémologiques

* La démonstration mathématique va pour l'élève à l'encontre de la logique naturelle, de la logique courante et du principe d'économie de logique". [10].

Exemple:

- Si tu ranges ta chambre, Jean, tu auras un chocolat !
Jean a eu un chocolat, donc il a rangé sa chambre ! (logique courante).

- Le père de Jean est plus grand que sa mère. Tous les pères sont plus grands que les mères. (logique naturelle).

- Constater une propriété sur deux ou trois exemples et en déduire l'universalité de cette propriété (logique courante ou naturelle).

- Les nombres qui se terminent par 2 sont des multiples de 2, ceux qui se terminent par 3 sont des multiples de 3 : (principe d'économie de logique [11]).

* La démonstration mathématique suppose un passage des objets physiques (le triangle isocèle que je trace et qui n'est pas isocèle) à l'objet idéal qui est réellement isocèle.

* La démonstration suppose l'acceptation des règles précises : n'utiliser que des énoncés et des données et les enchaîner logiquement.

- Les obstacles didactiques.

Quel type d'apprentissage veut l'institution ?

Initier au raisonnement déductif en 6ème-5ème ?
Entraîner au raisonnement déductif en 4ème-3ème ?

S'agit-il de raisonnement déductif ou de démonstration ?

Un exemple d'obstacle.
Dans les manuels de 6ème figurent des démonstrations type 4ème actuelle. Pour l'élève qui en effectue brutalement ne crée-t-on pas des obstacles didactiques en passant sous silence (ou trop rapidement) des questions du type :

- "ça se voit",
- "on peut le mesurer",
- "le compas, c'est précis, ...ça prouve",
- "pourquoi aller chercher ce discours alors qu'on l'a vérifié" ?

Le risque est que l'élève ne comprenne pas l'utilité d'un tel discours et alors :
- soit il le refuse ("ça ne sert à rien")
- soit le discours est "illogique" : énoncé avec des données incorrectes...(les règles ne sont pas comprises),
- soit l'élève se soumet à l'autorité du professeur sans en comprendre l'enjeu : si çà fait plaisir au professeur autant le faire (il y a la note!!).

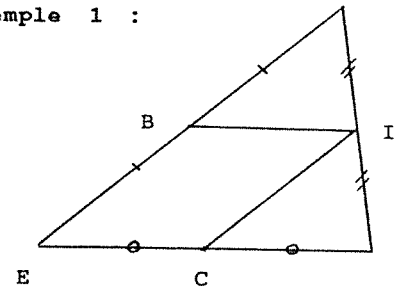
Toute démarche **crée des obstacles de type didactique.** On peut limiter leur importance mais surtout les repérer pour, le moment venu, organiser leur franchissement.

2) Choix didactiques.

Un objectif du collège, est à notre avis, qu'un élève sache rédiger une démonstration et qu'il sache pourquoi une démonstration est nécessaire.
Pour cela il faut organiser le franchissement des obstacles précédemment cités tout en évitant de créer trop d'obstacles didactiques.

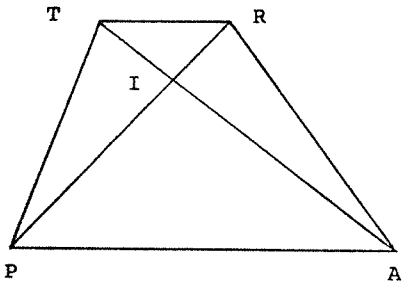
1) **La démonstration a deux fonctions** : il ne faut pas les confondre.
La démonstration a deux fonctions : l'une de preuve, l'autre d'explication (voir Aide "Preuve et démonstration").
Rappelons que dans sa fonction de preuve le rôle de la démonstration est de **savoir si un résultat est vrai** (cela concerne des résultats non évidents), dans sa fonction d'explication le rôle de la démonstration est d'expliquer pourquoi le résultat est vrai. (Cela concerne des résultats évidents).

Exemple 1 :



Démontre que BICE est un parallélogramme.
(La démonstration est ici une explication : il est **évident** que BICE est un parallélogramme).

Exemple 2 :



TRAP est un trapèze.
Démontre que ITP et RIA ont même aire.
La démonstration a un rôle de preuve.
Le problème **n'est pas évident.**

Il ne faut pas confondre ces deux fonctions. Or, nous constatons que bien souvent ces deux fonctions sont confondues : dans bien des problèmes, on veut que les démonstrations prouvent là où elles ne sont capables que d'expliquer. Dans ces problèmes les preuves sont pour l'élève plus de nature pragmatique (vue, mesure, multiplicité de l'expérience).

2) **Faire comprendre l'utilité d'une démonstration.**

* ***Comprendre l'utilité d'une démonstration c'est :***

a) comprendre qu'une constatation (par exemple vue) ne suffit pas il faut expliquer tout résultat ou le prouver.

b) Comprendre que preuve et explication doivent avoir une certaine forme : celle d'une démonstration. Cette compréhension n'est possible que si l'élève a assimilé que :

° les objets sont idéaux et non physiques (un triangle isocèle n'existe qu'idéalement),

° les explications et preuves que l'on privilégie sont des raisonnements qui utilisent uniquement les données et des énoncés validés.
Le passage le plus délicat est incontestablement le point b.

Exemple LOSA

Construis un quadrilatère LOSA tel que
(LS)⊥(OA)
[LS] et [OA] aient le même milieu.
Que peux-tu dire de LOSA ? Explique.

L'élève peut fournir une **explication externe au problème** (sans recours aux données, avec recours à la mesure, au pliage ...)

LOSA est un losange car il a ses quatre côtés de même longueur "(sous-entendu "j'ai mesuré)".
L'élève peut fournir une **explication interne** (recours aux données).

"LOSA est un losange car [LS] et [OA] sont perpendiculaires et ont même milieu".

Remarque:
L'explication semble ici interne mais rien ne dit que l'élève n'a pas eu recours à la mesure (et non à l'énoncé : un quadrilatère qui a ses diagonales perpendiculaires et de même milieu est un losange).

L'élève peut fournir **une démonstration** :

"[LS] et (OA] sont perpendiculaires et ont le même milieu or un quadrilatère qui a des diagonales perpendiculaires et de même milieu est un losange, donc LOSA est un losange.

La difficulté majeure va donc être de faire évoluer le type d'explication c'est-à-dire passer progressivement de l'explication externe (vue, mesure, pliage) à l'explication "interne" (recours aux données et à la logique) puis à la démonstration.
Notons que la démonstration ici ne prouve rien. Ce n'est pas sa fonction.

- Lors d'un problème ne relevant pas de l'évidence, le professeur va demander des preuves. Le rôle de celles-ci va être de convaincre la classe de la véracité d'un résultat conjecturé. Ainsi un débat entre élèves devra être organisé afin qu'il puisse y avoir échange d'arguments.
Le débat prendra fin quand la classe aura été convaincue par un argument. Là est la difficulté : cet argument peut être une démonstration mais bien souvent en collège elle n'en sera pas. Dans ce dernier cas **comment atteindre la démonstration**, car pour les élèves le problème est terminé (tout le monde est convaincu). Bien entendu la preuve fournie **peut être peaufinée** pour devenir une réelle démonstration mais c'est un exercice didactique où l'utilité de la démonstration ne prend pas sens.

**** Comment faire comprendre l'utilité d'une démonstration.***

a) Habituer l'élève à expliquer: un moyen peut être les **constructions questionnées.**

Tout problème de construction doit être suivi d'une question du type "explique" "pourquoi" ?.... pour habituer l'élève à aller au-delà de la constatation. Dans ces problèmes "explicatifs", des explications internes et externes sont fournies. Il convient de faire comparer les différentes explications et de montrer que celles-ci ne sont pas de même nature :

1) Certaines recourent à la vue, sont-elles fiables ? (illusions d'optique).

2) D'autres recourent à la mesure (les mesures sont-elles les mêmes pour tous les élèves ?).

3) D'autres recourent au pliage, au découpage, sont-elles fiables ? (Pythagore : deuxième partie, compte-rendu de l'expérimentation.)

4) D'autres recourent à des énoncés pertinents par rapport à la figure mais non par rapport aux données (exemple LOSA, l'explication est externe) car recourt à la mesure).

5) D'autres recourent à des énoncés pertinents par rapport aux données.

Il nous semble important de **ne rejeter en début d'apprentissage aucune explication.**
En effet même dans une explication externe (LOSA) qui nécessite la mesure il peut y avoir utilisation **d'un énoncé pertinent par rapport à la figure** et, à notre sens il y a alors **initiation au raisonnement déductif.** On perçoit alors tout l'intérêt des problèmes explicatifs.

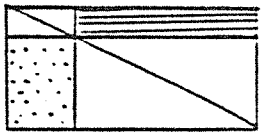
b) Habituer l'élève à manipuler les énoncés, à recourir aux données.
Un moyen peut être **les constructions justifiées.**

Exemple : construire un carré dont une diagonale mesure 7 cm. Justifie ta construction.

Pour construire un tel carré l'élève doit nécessairement utiliser les données et **implicitement** (au moins) utiliser l'énoncé :"un quadrilatère qui a deux diagonales perpendiculaires égales et de même milieu est un carré. La justification n'est qu'une **explicitation** de la construction.
Notons cependant que dans les problèmes de constructions et dans les problèmes d'explications, les statuts des énoncés ne sont pas les mêmes : dans le premier type de problème ce sont **des outils pour construire,** dans l'autre des **outils pour expliquer.**

c) Passer de l'explication externe à l'explication interne : au moyen; peut être des problèmes de preuves.
Comme il a été dit précédemment les problèmes de preuves (on cherche à convaincre) permettent, lors de débats, d'échanger des arguments. La preuve est l'argument qui va convaincre l'ensemble de la classe. Les débats permettent souvent de passer de l'explication externe (qui utilise en particulier la mesure) à l'explication interne.

Exemple :



Laquelle des aires pointée et hachurée est la plus grande ?

Dans cet exemple, le débat permet d'abord de confronter les mesures et de montrer devant la multiplicité des résultats que l'on ne peut conclure. Les autres preuves alors recherchées sont en général internes (égalités et différences d'aires).
Ainsi pour favoriser le passage explication externe - explication interne on peut :

- proposer des problèmes ouverts [9],

- présenter de manière ouverte des notions par des activités (voir les comptes-rendus de l'expérimentation des nouveaux programmes de l'IREM de Poitiers).

d) Le passage de l'objet physique à l'objet idéal.

Le passage de l'explication externe à l'explication interne s'accompagne du changement de statut de la figure. Celle-ci d'abord physique (sur laquelle ont peut mesurer, que l'on peut plier, ou découper), devient idéale : la

figure n'est plus alors qu'une aide pour raisonner, elle ne peut plus être utilisée dans les explications que par référence à sa définition mathématique, c'est-à-dire de façon interne.
Ce passage est facilité par la distinction valeur exacte (calculée)/ valeur approchée (mesurée). Ainsi en 4ème, l'énoncé de Pythagore, le cosinus permettent la distinction valeur exacte/valeur approchée et donc la distinction objet idéal/objet physique.

Exemple : un triangle isocèle en A est tel que AB = 7 cm et la hauteur AH = 6 cm. Est-il équilatéral ?
Pour un géomètre, la réponse est oui, pour le mathématicien la réponse est non car ce dernier fait référence à une figure idéale : seule la "stricte" égalité des 3 côtés permet de répondre oui.

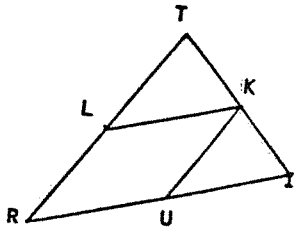
e) Apprendre à faire des démonstrations

Ces étapes étant franchies, reste à apprendre à agencer les énoncés.

1 - Pour cela, il est nécessaire que le rôle des énoncés change : ceux qui sont objets de connaissance ou outils pour construire doivent devenir outils de démonstration : à cette fin il faut les faire analyser d'une manière différente.
Exemple un quadrilatère qui a 4 côtés de même longueur est un losange.
L'analyse démonstrative de l'énoncé donne :
Question : comment démontrer que l'on a un losange ?
Réponse : en sachant qu'il a 4 côtés de même longueur.
Autrement dit l'énoncé est devenu une méthode pour apprendre à démontrer.

2 - Pour que ces méthodes soient opérationnelles il faut habituer les élèves en début d'apprentissage à raisonner par conditions suffisantes (analyse ascendante)

Exemple :



Démontre que RUKL est un parallélogramme

* Comment démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme ?
Choix de la méthode : en sachant qu'il a des côtés parallèles.
* Comment démontrer que 2 droites sont parallèles ?
.....

3 - Pour que l'élève puisse apprendre à démontrer il est nécessaire de le libérer des efforts de mémoire au moins en début d'apprentissage. Ainsi :

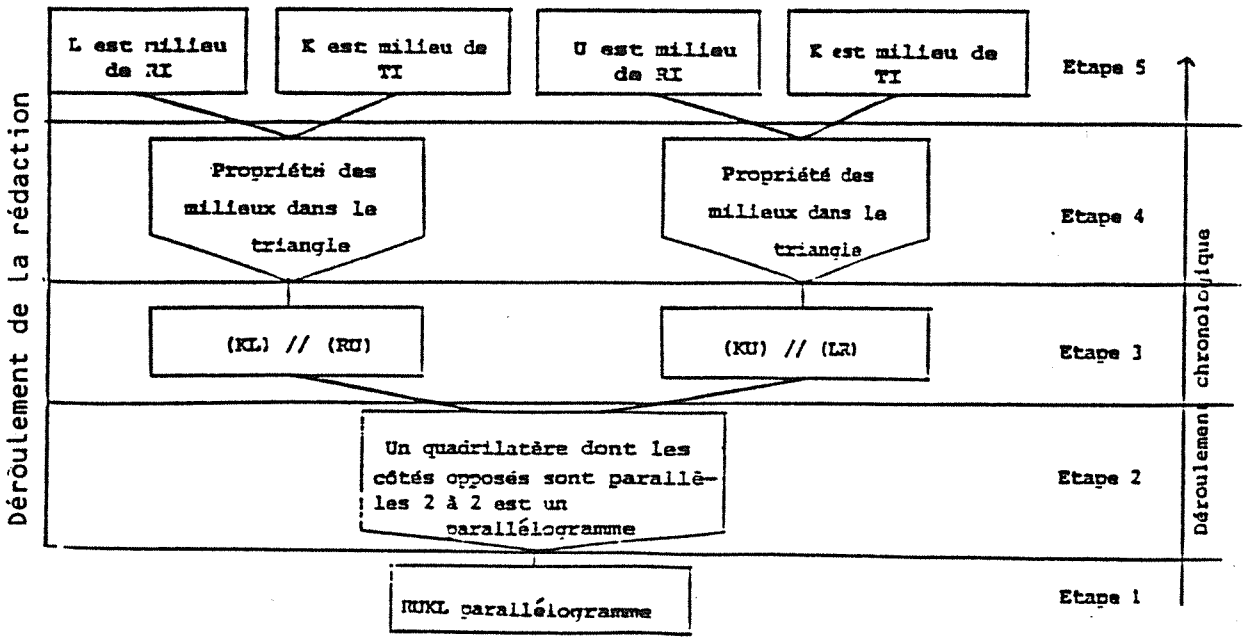
- les méthodes peuvent être classées dans un fichier méthodologique "comment démontrer que..."

Exemple de fiche :

Comment démontrer que l'on a un triangle équilatéral ?

. En sachant qu'il a 3 côtés de même longueur.
. En sachant qu'il a 3 angles égaux.

- le raisonnement étant ascendant et la rédaction descendante il est souhaitable que l'élève garde trace de son raisonnement. L'usage des organigrammes est alors efficace. Sur l'exemple précédent.



Conclusions

L'objectif est qu'un élève sache, en fin de 4ème, faire une démonstration simple et qu'il comprenne pourquoi il fait cette démonstration.

En sixième-cinquième.
Initier au raisonnement déductif dans deux directions.
- Explications : cela peut se faire sous forme de constructions questionnées ou des justifications de constructions (cf. ce qui a été écrit plus haut).

- Des débats de preuves : ceux-ci peuvent avoir lieu à propos
. de problèmes ouverts,
. d'activités pour introduire les notions,
. de calculs d'aires, d'angles [2],
. de dessins à main levée.

Comme nous l'avons mentionné, la pratique conjointe des explications et des débats de preuves permet l'évolution du type d'explication.

En quatrième.
Mettre en place la démonstration. Pour cela il faut :
- définir précisément ce qu' est une démonstration,
- faire différencier les objets physiques des objets idéaux,
- apprendre à agencer les énoncés.

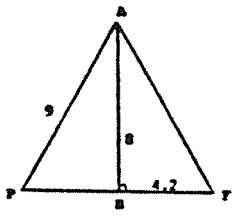
Notre choix est d'abord d'organiser les contenus de quatrième pour que les élèves franchissent au mieux ces passages obligés.
La progression que nous proposons est la suivante :

1 - Pythagore et le cosinus car :

- les problèmes sont à données numériques,
- la distinction valeur exacte - valeur approchée facilite la compréhension de la différence entre objets physiques et objets idéaux,
- les problèmes permettent de mettre en place le fichier méthodologique en analysant sous forme d'outils démonstratifs des énoncés déjà connus (sur les triangles, quadrilatères).

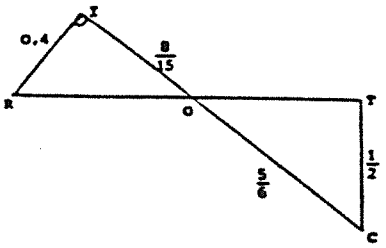
Exemples

Ex 1 :



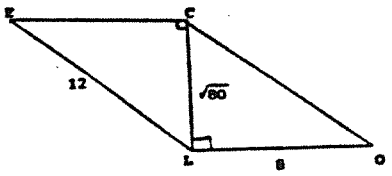
PAF est-il isocèle ? Pourquoi ?

Ex 2 :



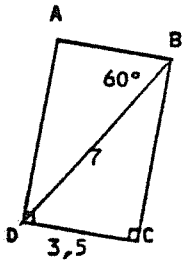
Que dire du point O ? Explique.

Ex 3 :



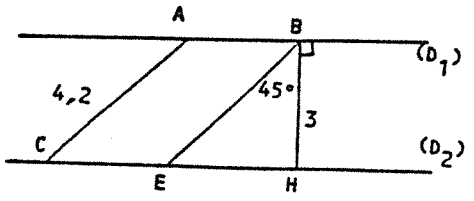
Que dire de ECOL ? Pourquoi ?

Ex 4 :



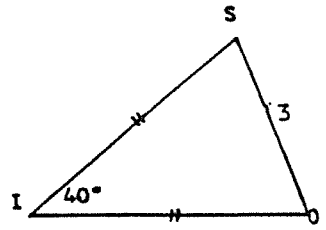
Que dire du quadrilatère ABCD ? Justifie.

Ex 5 :



Les droites (D_1) et (D_2) sont parallèles,
BH = 3, AC = 4,2 et HBE = 45°.
ABEC est-il un parallélogramme ? Démontre.

Ex 6 :

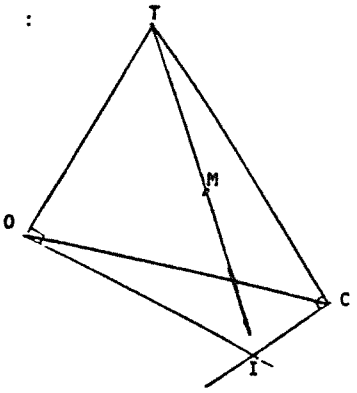


Calcule l'aire et le périmètre de ce triangle isocèle.
Précise si les valeurs sont exactes ou approchées.

2 - Triangle rectangle

L'énoncé de la propriété de la médiane d'un triangle rectangle permet le passage de la figure particulière à la figure générale : les figures sont sans données numériques. Mais les démonstrations sont relativement simples car les élèves démontrent des égalités de longueurs à l'aide de méthodes aussi utilisées en algèbre du type : comment démontrer que A = B ?
- En partant de A et allant à B.
- En partant de B et allant à A.
- En partant de A et allant à C et en partant de B et allant à C.
(cf. Démontrer et prouver en algèbre. Suivi scientifique 87-88).

Exemple :

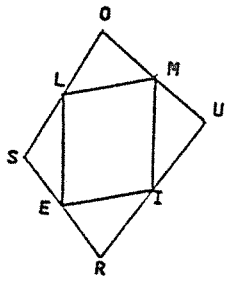


TOC est un triangle.
Les perpendiculaires à (OT) en O et à (TC) en C se coupent en I. On note M le milieu de IT.
Que dire de MOC ? Démontre ton affirmation.

3 - La droite des milieux dans le triangle, projection.

Les figures sont sans données numériques et bien que certaines propriétés soient métriques (BC = 2IJ), les démonstrations font intervenir des propriétés affines.

Exemple :



OURS est un quadrilatère M, I, E, L sont les milieux des côtés [OU], [UR], [RS], et [SO]. Que dire de MIEL. Démontre-le.

4 - Les droites remarquables du triangle.

Les droites sont connues, leurs propriétés ne le sont pas (orthocentre, centre de gravité). Les démonstrations sont sophistiquées. Elles font intervenir des méthodes difficiles (points de concours) qui sont peu ou pas réinvesties au collège.

LA PLACE DES TRANSFORMATIONS

Pour la rotation et la translation, il s'agit d'un travail d'initiation, d'une connaissance de ces transformations par la construction d'images de figures et d'étude de figures simples invariantes.
Ces transformations et les symétries vues en 6ème-5ème peuvent éventuellement intervenir dans des activités de recherche (problèmes ouverts) pour trouver des constructions, mais en aucun cas dans des démonstrations utilisant l'aspect ponctuel des transformations (qui est hors programme) comme :
- démontrer qu'un point est image d'un autre par une transformation,
- utiliser des points comme intersection d'ensembles transformés.

Exemple : *ABC est un triangle isocèle de sommet principal A.*
O est un point de l'axe de symétrie de ABC, (BO) et (AC) se coupent en C', (CO) et (AB) se coupent en B'.

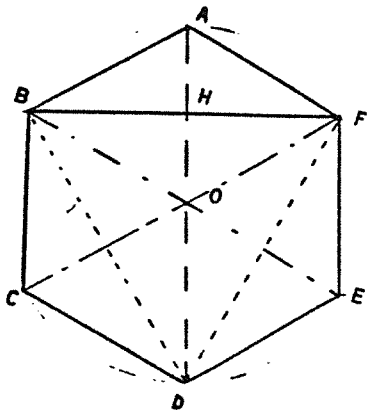
Démontrer que AB'C' est isocèle.
Un tel exercice n'a pas, pour nous, sa place en premier cycle.
Par contre un réinvestissement des symétries vues en 6ème-5ème peut être fait :

- par utilisation de propriétés simples ("définition", conservations) dans des démonstrations.

Exemple : un triangle ABO est isocèle en O. Construis le point, A' symétrique de A par rapport à O.
Que dire de ABA'? Démontre-le.

- Par utilisation des axes et centres de symétrie de figures connues, en particulier les polygônes réguliers et le cercle : cela permet d'obtenir rapidement des propriétés de la figure que l'on peut ensuite utiliser pour des calculs

Exemple :



ABCDEF est un hexagone régulier.
1. donc (AD) est un axe de symétrie.
Donc :
(AD) $\perp$ (BF) (d'où calcul de BH, AH, HO, FDB...)
BD = DF (d'où CDF isocèle)
BE = FC ...

2. O centre de symétrie.
Donc :
BFEC parallélogramme
(d'où BFEC rectangle, calcul de CE....).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Inter IREM de géométrie.
[2] IREM de Poitiers, Géométrie en cinquième
[3] N. BALACHEFF, Processus de preuve et situations de validation, IMAG.
[4] I. LAKATOS, Preuves et démonstrations, Hermann.
[5] G. BROUSSEAU, Obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, Recherches en didactique des mathématiques, n°42.
[6] A. BOUVIER, La mystification mathématique, Hermann.
[7] BOUVIER, BERBAUM, DEVELAY, Apprentissage et didactique. IREM de Lyon.
[8] IREM de Poitiers, Pour apprendre à démontrer.
[9] IREM de Lyon, La pratique du problème.
[10] IREM de Grenoble, Apprentissage du raisonnement.
[11] M. MANTE, Initiation au raisonnement déductif et le nouveau programme de Collège, Suivi scientifique 5ème.

CALCULS D'ELEMENTS METRIQUES

Pythagore, Cosinus d'un angle, Sphère

CALCULS D' ELEMENTS METRIQUES

CONDITIONS D'EXPERIMENTATION

Le Collège

Collège de Vouneuil-sur-Vienne. Ce collège rural compte 530 élèves ; ces élèves sont issus pour la plupart de milieux ouvriers.

Les classes

Deux quatrièmes de 24 élèves sont concernées.
Ces élèves ont participé au suivi scientifique en 6ème-5ème sur la totalité des programmes de 6ème-5ème.

L'équipe

Elle est composée de trois professeurs du collège et de l'ex-directeur d'études de mathématiques du centre de P.E.G.C.

Les contenus

Les contenus du programme ont été répartis en dominantes (nous appelons dominante un thème fédérateur qui nécessite un apprentissage spécifique).
En quatrième nous avons retenu les dominantes suivantes :

1)Calcul numérique
Exemples des contenus : fractions, relatifs, puissances...

2) Calculs d'éléments métriques d'une figure
Exemples de contenus : Pythagore, cosinus, sphère...

3) Calcul littéral
Exemples de contenus : équations, conventions d'écritures, priorités opératoires, distributivité.

4) Parallélisme et orthogonalité
Exemples de contenus :triangle rectangle, réciproque de Pythagore, projection, médianes.

5) Transformations
Exemples de contenus : translations, rotations, vecteurs....

6) Gestion de données
Exemples de contenus : proportionnalité, application linéaire, statistiques.

7) Manipulation d'inégalités
Exemples de contenus : inégalité triangulaire, relation d'ordre, inéquations...
L'ordre de présentation de ces dominantes n'est pas important dans le domaine numérique, certaines peuvent être coupées en plusieurs parties afin de ne pas lasser les élèves.

Présentation des contenus aux élèves - gestion des classes.

La présentation des contenus, la gestion des classes sont élaborées en fonction des buts que nous nous sommes fixés :

- développer l'autonomie des élèves,
- faire en sorte que chacun atteigne les objectifs, ce qui nous oblige à tenir compte de l'hétérogénéité des classes.

Présentation des contenus

Sauf cas contraire, les contenus sont présentés de la manière suivante :

- *Une activité*

Pour définir une activité nous avons retenu les critères suivants :
. l'énoncé est court (en général) et compris de tous les élèves,
. la réponse n'est pas évidente,
. pour répondre, l'élève devra :
- soit découvrir la connaissance visée,
- soit découvrir ce qu'il faudrait savoir pour résoudre le problème,
- soit mobiliser les notions antérieures.

Le problème est riche (plusieurs démarches sont possibles ou (et) plusieurs solutions sont possibles). L'élève peut formuler des questions intermédiaires (ce qui exclut un recours à un découpage a priori fait par le professeur).

- *Synthèse de l'activité* (effectuée collectivement)
. formulation des résultats et des démarches par les élèves,
. validation des résultats par la classe et le professeur,
. énoncé des objectifs par les élèves en accord avec le professeur.

- *Exercices didactiques et auto-tests*

- *Test*

Gestion des classes

Les élèves sont groupés par 4 depuis la sixième, ce qui signifie que le travail est d'abord individuel puis des échanges ont lieu à l'intérieur des groupes. Ces échanges peuvent revêtir plusieurs formes :

- échanges de résultats,
- entraide.

Les groupes se sont constitués par affinité. Le professeur apporte soit des aides individuelles soit des aides aux groupes.
Les énoncés des activités et des exercices sont sur fiches.

Avant chaque série d'exercices didactiques, est imposé un contrat composé d'un certain nombre d'exercices et d'une durée.
Exemple : "les 6 premiers exercices sont obligatoires, durée de la fiche 2 heures.
Cela signifie pour l'élève, que ces 6 exercices doivent être faits à l'issue de ces 2 heures, libre à l'élève de s'avancer chez lui.

A l'issue des résolutions d'exercices didactiques, nous nous efforçons de proposer aux élèves des auto-tests portant sur des objectifs purement techniques pour vérifier si ceux-ci sont atteints. Aucune contrainte n'est imposée à l'élève pour ces auto-tests, il est libre de les faire ou non.
En cas de non atteinte des objectifs, les élèves peuvent consulter un recueil d'exercices supplémentaires auto-correctifs (à faire seul).

A l'issue du test des groupes de besoin peuvent être établis : on regroupe les élèves ayant des difficultés pour un réapprentissage bref (2 ou 3 heures maximum). Cela est permis par les horaires en parallèle.

Matériels utilisés

Outre le matériel classique (instruments de géométrie, calculatrice) les élèves ont à leur disposition un répertoire où sont consignés les résultats vus depuis la 6ème, le répertoire est complété cette année. (Annexe 1). Il suit l'élève de la sixième à la troisième.

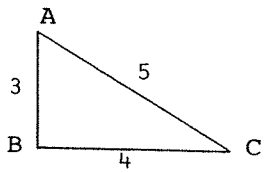
DEMARCHE EN GEOMETRIE

Introduction

Le programme comporte deux objectifs :
- mettre en place des notions nouvelles (théorème de Pythagore, cosinus, rotation....)
- mettre en place la démonstration.

L'apprentissage de la démonstration est concomitant à l'acquisition des connaissances. Il faut cependant être conscient que certaines parties du programme permettent d'assurer au mieux la progressivité de l'apprentissage de la démonstration. C'est ce qui nous a guidés dans le choix de notre démarche.
Nos élèves ont été familiarisés avec l'explication, l'argumentation* en cinquième : des situations ont fait prendre conscience que les explications, les preuves ne sont pas toutes du même type (mesure, vue, logique...).
En quatrième il importe de faire comprendre que toute assertion énoncée (non admise) doit être non seulement expliquée ou prouvée mais que cette explication ou cette preuve doit avoir la forme d'une démonstration (cf. aide "preuves et démonstrations"....). Cela ne signifie pas que l'on rejette les autres types d'explications ou preuves fournies ; mais celles-ci changent de statut ou doivent être affinées.

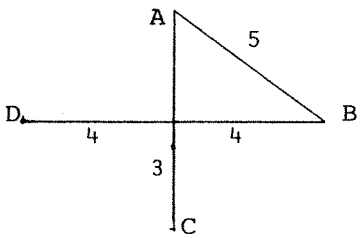
Exemple :



Le triangle ABC est-il rectangle ?

L'usage de l'équerre **fournit** une **preuve ou une explication** en 6ème-5ème, mais ne fournit pas une explication en 4ème.

Exemple :



Que dire de ABCD ?

*Voir "Géométrie plane en 5ème" : Aire et initiation à la preuve.

L'usage d'un instrument pour mesurer les côtés est ici une preuve en 6ème-5ème. Celle-ci doit être affinée pour devenir une démonstration en 4ème (utilisation d'énoncés en particulier Pythagore).

Le passage à la démonstration nécessite une explication du jeu mathématique qui consiste à :

- distinguer objets physiques et objets idéaux
- analyser les données
- utiliser des énoncés validés
- appliquer des règles de déduction.

Certains de ces points sont en cours d'acquisition, plus ou moins avancée. L'analyse des données d'un problème est nécessaire dès la sixième, pour construire des figures par exemple.

Certains énoncés sont connus : ils le sont en tant **qu'objet de connaissance** et en tant **qu' outil** pour construire et non en tant **qu'outil** pour démontrer (cf. R. Douady - Dialectique outil-objet R.D.M. 7.2).Ce qui signifie que les élèves ne savent pas nécessairement les analyser.

Exemple : "un quadrilatère (convexe) qui a deux côtés parallèles et de même longueur est un parallélogramme".
Cet énoncé sert à démontrer que l'on a des parallélogrammes. Pour pouvoir s'en servir il faut que l'on ait un quadrilatère, deux côtés parallèles et de même longueur.
Notons que ces énoncés même rencontrés en 6ème-5ème doivent être remémorés et classés suivant leur usage.
La distinction objet physique, objet idéal n'est pas clairement faite pour un certain nombre d'élèves. (Le recours à la mesure, à la vue, est encore rencontrée). Cette distinction va de pair avec la distinction mathématiques pratiques, mathématiques théoriques. En mathématiques pratiques, $\frac{5}{3} = 1,66$; pour déterminer l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les autres côtés mesurent 3 et 5 un dessin à l'échelle suffit, et le triangle 7, 7, 10 est rectangle... En mathématiques théoriques, le problème est tout autre.....

Notre démarche en géométrie

Afin d'expliciter au mieux les règles du jeu mathématique et afin de les faire pratiquer dans des bonnes conditions nous avons choisi la démarche suivante :

- **Calculs d'éléments métriques** et utilisation de ces calculs pour démontrer des propriétés.

Ces calculs concernent deux parties du programme :
- théorème de Pythagore direct
- le cosinus d'un angle.

Cette partie permet d'assurer un palier entre les figures comportant des données numériques et les figures générales (sans données numériques). D'autre part, les raisonnements conduisent à des résultats numériques, ils peuvent donc être vérifiés par la mesure. Les raisonnements faux sont palpables.

- **Orthogonalité et parallélisme**

Dans cette partie, il s'agit de faire apprendre aux élèves à enchaîner les énoncés (cf. Pour apprendre à démontrer). De tels enchaînements ont été

rencontrés dans les calculs d'éléments métriques, il s'agit de systématiser.

Les parties du programme concernées sont :
* Le triangle, médianes, centre de gravité, hauteurs, bissectrices, triangle rectangle , cercle circonscrit, orthogonalité et parallélisme (réciproque de Pythagore, projection du milieu..)

- **Transformations**
Les translations (vecteurs), rotation sont vues en tant qu'objets et non en tant qu'outils. En particulier l'usage des transformations pour démontrer peut être rencontré mais pas systématisé.

- **Manipulation d'inégalités**
Cette partie est reliée à ce qui concerne l'inégalité en algèbre.

PYTHAGORE

Nous avons décomposé cette partie en 3 séquences :

1ère séquence
Savoir utiliser le théorème de Pythagore.

2ème séquence
Réflexions autour de la démonstration de Pythagore.

3ème séquence
Utilisation du théorème de Pythagore pour démontrer.

1ère SEQUENCE

Savoir utiliser le théorème de Pythagore.

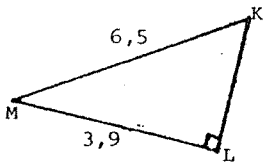
Activité 1

Choisis deux nombres puis trace un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont ces deux nombres pour mesures.
N' y a-t-il pas un moyen de calculer l'hypoténuse lorsque l'on connaît les deux autres côtés?

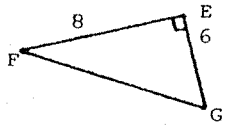
OBJECTIFS :

Contrat :Exercices obligatoires : 1-2-3-4-6-7-8-9-10-11-12-15-16-17-19-22.
Durée : 4 heures.

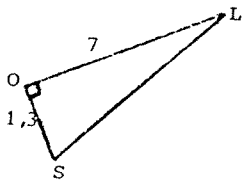
Ex 1 :



Le triangle EFG est rectangle en E.
Calcule FG.

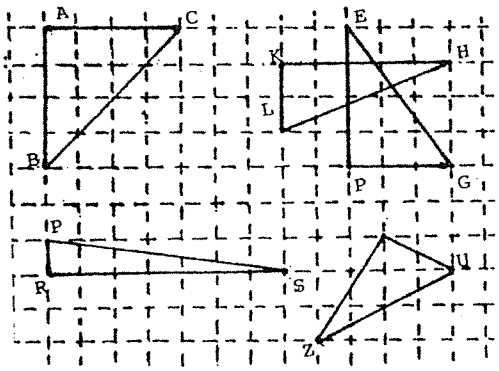


Le triangle KLM est rectangle en L.
Calcule KL.



Le triangle SOL est rectangle en O.
Calcule LS.

Ex 2



Ces triangles sont construits sur un quadrillage à mailles carrées de côté 1.
Poue chacun de ces triangles, donne la mesure des trois côtés.

Ex 3 :

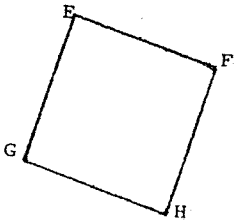
ABC est un triangle tel que AB = 6 et BC = 5. Trouve le troisième côté.

Ex 4 :

TAC est un triangle rectangle en T, TC mesure les $\frac{2}{3}$ de TA et l'hypoténuse mesure 6.
Détermine la longueur des deux autres côtés.

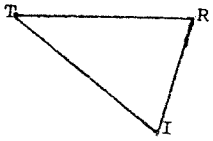
Ex 5 :
Trace un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 5.
Sur la demi-droite [AC) place le point C' tel que AC' soit le double de AC l'hypoténuse du nouveau triangle rectangle ABC' est-elle le double de l'hypoténuse du triangle ABC ? Justifie.

Ex 6 :



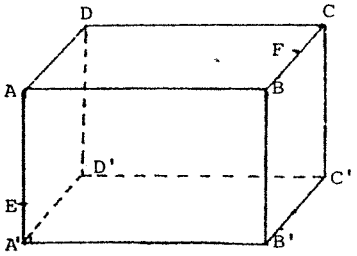
EFHG est un carré de côté 2. Calcule la mesure de sa diagonale.

Ex 7 :



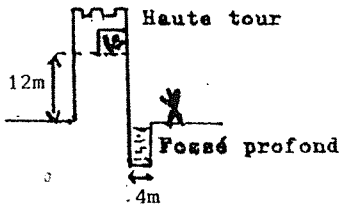
TRI est un triangle isocèle en T et TR = 6.
Quelle est la mesure de chacun des autres côtés.

Ex 8 :



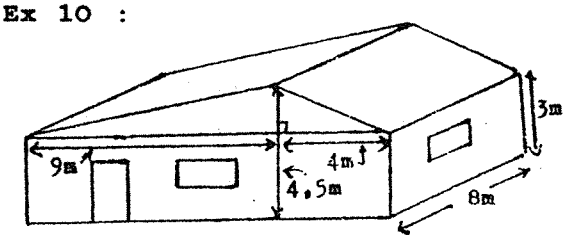
Une araignée veut se rendre de E à F où sommeille une mouche, en restant sur la surface du pavé.
Calcule la longueur du chemin le plus court.
AD = AA' = 4 cm, AB = 6 cm
AE' = 1 cm, CF = 1,5 cm.

Ex 9 :



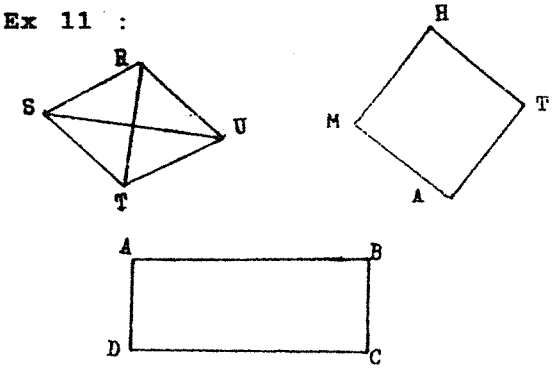
Quelle taille minimale d'échelle doit prévoir le malheureux pour délivrer sa bien-aimée enfermée par un père cruel.

Ex 10 :



Calcule l'aire du toit de cette maison. Pour couvrir le toit, il faut prévoir 20 tuiles au m^2. Quelle est la quantité de tuiles à acheter ?

Ex 11 :



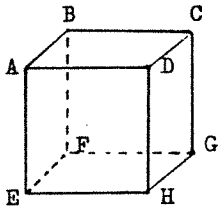
Calcule l'aire et le périmètre de chacune de ces figures.

RSTU est un losange, RS = 5 et SU = 6.

ABCD est un rectangle, AB = 7 et BD = 8.

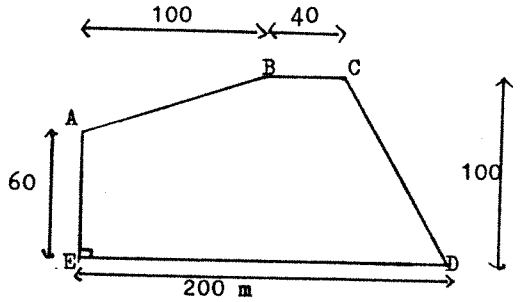
MATH est un carré, AH = 8.

Ex 12 :



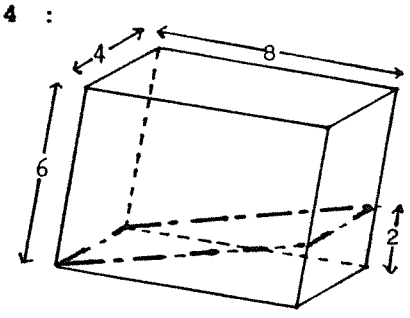
Ce cube a pour arête 4 cm. Calcule l'aire et le périmètre du triangle ACG.

Ex 13 :



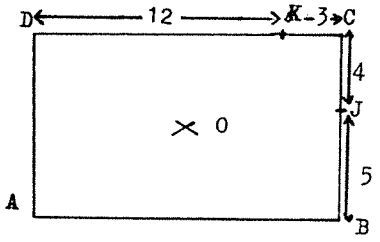
Les côtés [BC] et [ED] sont parallèles. Calcule l'aire et le périmètre de cette pièce (les côtés sont en mm).

Ex 14 :



On coupe ce pavé suivant la ligne en pointillé. Calcule l'aire latérale des deux morceaux obtenus.

Ex 15 :

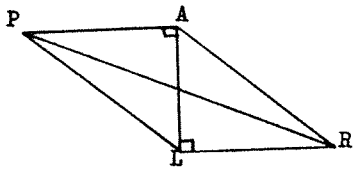


ABCD est un rectangle de centre O. (KO) coupe (AB) en I et (JO) coupe (AD) en L. Calcule le périmètre du quadrilatère IJKL.

Ex 16 :

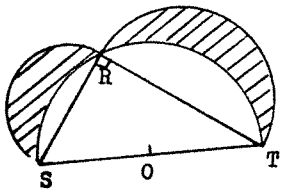
Construis deux carrés de côtés quelconques. Construis, à la règle et au compas un carré dont l'aire est la somme des aires des deux autres carrés. Donne ton programme de construction et justifie-le.

Ex 17 :



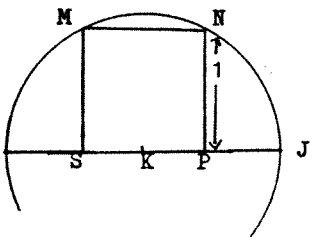
Les diagonales du parallélogramme PARL mesurent 14 et 9. Calcule son aire et son périmètre.

Ex 18 :



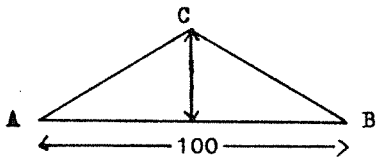
R est un point quelconque du demi-cercle de diamètre [ST]. SRT est un triangle rectangle en R. Compare l'aire hachurée et l'aire du triangle RST.

Ex 19 :



MNPS est un carré de côté 1. K est le milieu de [SP].Le cercle de centre K et de rayon [KN] coupe en J la demi-droite [KP).Calcule les distances KJ, JM et JN.

Ex 20 :



Une ficelle a 100 m de long. On l'allonge de 1 m et on la tend au milieu comme le montre la figure. A quelle hauteur h se trouve le point C ?

Ex 21 :

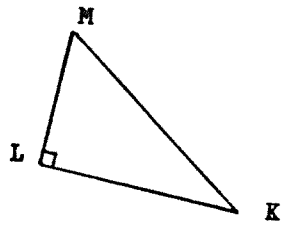
Construis un triangle $OA_1\ A_2$ rectangle isocèle en A_1 tel que $OA_1 = 1$.
Place le point A_3 tel que $OA_2\ A_3$ soit un triangle rectangle en A_2 et $A_2\ A_3 = 1$.

Calcule OA_2 et OA_3 .

Construis un segment de longueur $\sqrt{12}$. Justifie ta construction.

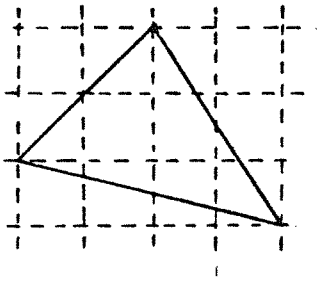
AUTO-TEST

Ex 1 :



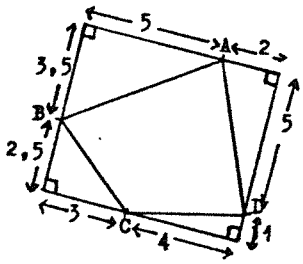
KLM est un triangle rectangle en L, KM = 17 et LM = 8. Calcule KL.

Ex 2 :



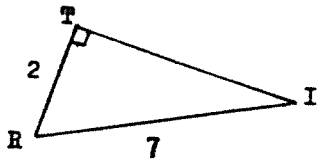
Calcule l'aire et le périmètre de ce triangle. Les mailles du réseau sont des carrés de 1 cm de côté.

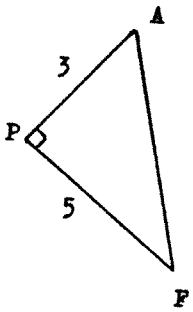
Ex 3 :



Calcule le périmètre et l'aire de ABCD.

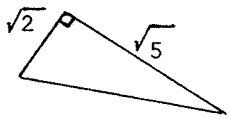
Ex 4 :





Calcule l'aire et le périmètre de chacun de ces triangles.

Ex 5 :



Calcule le côté qui manque.

Analyse a priori des difficultés.

Elles sont de 3 types.

Liées au théorème de Pythagore lui-même.
- Reconnaître les triangles rectangles quelles que soient les positions des côtés de l'angle droit par rapport au bord des feuilles.
- Reconnaître un triangle rectangle dans une figure complexe.
- Formuler le théorème quelle que soit la dénomination du triangle PQR, TOC ou ABC.

- Manipuler le symbole $\sqrt{\ }$

Liées au contexte démonstratif.
- Repérer les données du texte ou de la figure.
- S'assurer des requis pour utiliser le théorème de Pythagore.
- Justifier l'angle droit par référence à un énoncé.
- Distinguer valeur exacte et valeur approchée.

Liées au contexte des problèmes.
- Mathématiser une situation de la vie courante.

Objectifs

* Connaître le théorème de Pythagore.

* Savoir l'utiliser pour calculer des longueurs.

Objectifs secondaires
- Revoir les énoncés sur les triangles et quadrilatères.
- Analyser ces énoncés pour élaborer un fichier "démonstration" ("comment démontrer que").
- Justifier une propriété par référence à un énoncé.
- Apprendre à écrire données et conclusions d'un problème.
- Distinguer valeur exacte et valeur approchée.
- Revoir les aires, les périmètres, le pavé.

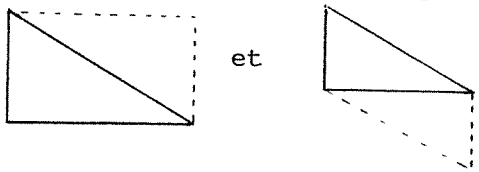
- Utiliser la touche $\sqrt{\ }$ de la calculatrice.

Déroulement et commentaires.

Les élèves disposent de calculatrices scientifiques.

- ***ACTIVITÉ*** : Durée 1h 30 y compris la synthèse.
Cette activité vise à faire intérioriser le problème aux élèves : "il doit exister une formule permettant de calculer l'hypoténuse d'un triangle connaissant les deux côtés".
Le mot hypoténuse est recherché dans le répertoire puis la recherche s'organise dans les groupes.
Quelques démarches :

- A partir des aires :
* Recherche d'une formule algébrique en calculant l'aire de deux façons :



dans ce genre de démarche les élèves s'interdisent la mesure :

* Recherche en **mesurant** la hauteur, alors, en calculant l'aire du triangle de 2 façons, le calcul de l'hypoténuse est effectué.
La consigne doit être alors reprécisée.

- A partir des angles :
Une formule est cherchée à partir des mesures d'angle.

- A partir d'un tableau de données :
(Cette méthode est adoptée par tous les élèves après qu'ils aient éventuellement utilisé les méthodes précédentes). Les élèves relèvent pour chaque triangle les mesures des côtés et analysent le tableau pour conjecturer une formule. Différentes formules sont alors trouvées puis rejetées; un contre-exemple étant fourni. Celles-ci sont parfois compliquées, pas toujours facilement rejetées compte tenu des erreurs de mesure.
Dans une classe deux groupes ont conjecturé la formule de Pythagore. Aucun exemple ne l'infirmant, les groupes ont recours à un dictionnaire pour vérifier. Dans l'autre classe une aide collective est nécessaire pour découvrir la formule. Le tableau des valeurs des côtés des triangles rectangles tracés est dressé. A ce tableau le professeur adjoint les carrés des côtés.

a	b	c

puis

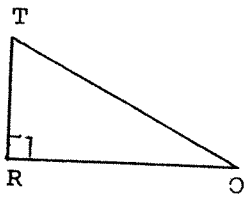
a	a^2	b	b^2	c	c^2

La formule est alors trouvée.
Lors de la synthèse le professeur valide la conjecture tout en précisant que la recherche précédente ne peut en assurer la véracité. Les élèves formulent en français l'énoncé.
A la fonction "à quoi peut servir cet énoncé ?" les réponses données sont :
- à calculer l'hypoténuse d'un triangle rectangle
- à calculer le côté d'un triangle rectangle
- à calculer la diagonale d'un rectangle
- à calculer la hauteur d'un triangle rectangle (hauteur principale).

Les réponses prouvent que les élèves ont compris l'enjeu de l'activité et ils n'ont aucun mal à annoncer les objectifs. Leur attention est alors attirée sur les conditions d'application de l'énoncé de Pythagore : il faut un triangle rectangle. Notons que les élèves doivent rechercher chez eux qui était Pythagore.

Ce qui est écrit sur le répertoire.

T Triangle rectangle.



Enoncé de Pythagore dans le triangle TRO. Le triangle TRO est rectangle en R : $TR^2 + RO^2 = TO^2$.

Enoncé général :
Dans un triangle rectangle la somme des carrés des côtés de l'angle droit est égale au carré de l'hypoténuse.

LES EXERCICES : Durée 4 heures, le contrat est précisé sur leur feuille. Pour tous les exercices, les élèves doivent préciser le triangle auquel ils veulent appliquer l'énoncé de Pythagore et ensuite écrire la formule en utilisant les lettres de la figure. (Nous avons volontairement varié les noms des sommets).

Ex 1 : Les élèves considèrent souvent une valeur décimale comme étant une valeur approchée, cet exercice permet de revenir sur cette difficulté. L'usage de la touche $\sqrt{}$ est expliqué à propos des cas 2 et 3.

Ex 2 : Le premier triangle a pour hypoténuse $\sqrt{32}$. Il faut à ce propos préciser :
- la notation $\sqrt{32}$ (les élèves proposaient 32 $\sqrt{x}$ suivant en cela la calculatrice)
- la nature de $\sqrt{32}$: ce n'est pas un décimal ni une fraction, c'est le nombre qui multiplié par lui-même donne 32 et par conséquent c'est la valeur exacte de l'hypoténuse. La calculatrice permet de donner une valeur approchée ou un encadrement.

Le triangle ZUT n'étant pas rectangle, il est affirmé que l'on ne peut calculer ses côtés !

Ex 4 : Les lettres apparaissent rapidement après que les données soient écrites. Les difficultés sont d'ordre algébrique.

* $(\frac{2}{3}\ y) \times (\frac{2}{3}\ y) = \frac{4}{9}\ y^2$

* $y^2 + \frac{4}{9}\ y^2 = (1 + \frac{4}{9})\ y^2$, y^2 n'étant pas vu comme $1 \times y^2$.

Ex 6 : Cet exercice constitue une première approche de la démonstration. En effet, les élèves utilisent le triangle EFH sans préciser pourquoi ce triangle est rectangle. Il est alors convenu pour les exercices suivants qu'avant d'effectuer tout calcul, il faut écrire les données du problème et justifier la présence de l'angle droit en utilisant les données et les énoncés.

Ex 8 : Cette situation a déjà été rencontrée en cinquième. Il s'agissait alors de mesurer le plus court chemin sur un dessin de patron en vraie grandeur ou à l'échelle. Cet exercice montre aux élèves qu'avec l'utilisation d'énoncés le dessin change de statut, il n'est pas nécessaire de le faire à l'échelle pour trouver le résultat. Cependant il est indispensable de faire un schéma pour comprendre la situation.

Ex 9 et 10 : Une mathématisation des situations est nécessaire et les résultats ne peuvent être que des valeurs approchées.

Ex 11 : L'utilisation de l'énoncé de Pythagore n'est pas immédiat dans les trois cas. Les élèves doivent justifier les étapes de leur raisonnement (angles, mesures) en utilisant les énoncés connus sur les quadrilatères. De telles justifications ont déjà été faites oralement en 5ème (voir

fascicule "Géométrie en 5ème - Initiation à la preuve). Une formulation écrite est maintenant exigée.

Ex 16 : L'énoncé de Pythagore est formulé dans cet exercice dans un autre cadre : celui des aires. Les élèves ajoutent les aires des deux carrés puis tentent de tracer le côté du nouveau carré ce qui n'est pas possible compte tenu des contraintes. Une aide est nécessaire pour faire le lien avec le triangle rectangle.

Ex 22 : Cet exercice permet de revenir sur le sens de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ $((\sqrt{2})^2) = 2.....$

Les auto-tests ont été utilisés par quelques élèves lors de la préparation du contrôle.

Tests : deux tests ont été passés à l'issue de cette première séquence. Un seul était prévu, mais les résultats presque décevants par rapport à notre attente nous ont conduits à rechercher les causes de l'échec. Il est apparu après l'analyse que nous avions une grande responsabilité (voir l'analyse ci-après), aussi a-t-on fait passer aux élèves un second test "isomorphe".

Analyse a posteriori du test n° 1

Ex 1 : Bien souvent les élèves tronquent l'écriture décimale de $3,75^2$: 14,0625 est tronqué en 14,06 ou même en 14, certainement pour ne pas dépasser la taille "habituelle" des nombres. Cette taille "habituelle" est due à notre apprentissage même : n'apprend-on pas à négliger certaines décimales suivant le contexte ? Ainsi la valeur "exacte" trouvée est $\sqrt{23}$ ($\sqrt{14 + 9}$) ou $\sqrt{23,06}$ ($\sqrt{14,06 + 9}$ ce qui ne peut être considéré comme juste.
Cette erreur ne se produit pas pour SRT : La valeur exacte $\sqrt{640}$ est trouvée.

Ex 2 : Généralement nous essayons d'expliciter au maximum le contrat didactique (c'est-à-dire l'ensemble des règles implicites ou explicites qui régissent les rapports élèves-professeur). Or dans ce texte nous ne l'avons pas fait. "Que dire du triangle DEC ?" La réponse attendue était "DEC est isocèle".
Or qu'ont répondu les élèves ?
- son aire est ...
- son périmètre est ...
- c'est la moitié du rectangle...
- ....

Voici ce que nous a répondu un élève (note de l'élève : 7)

"Ce qu'on peut dire du triangle EDC
- Son aire est la moitié de celle du rectangle ABCD car quand on trace la hauteur du triangle passant par E coupant le segment [BC] en F on remarque que [ED] est la diagonale d'un rectangle AEDF et que comme la diagonale d'un rectangle partage le rectangle en 2 parties égales, l'aire de EFD est égale à l'aire de AEB. Et encore avec la hauteur du triangle EF on remarque que [EC] est la diagonale du rectangle EBCF et comme encore la diagonale d'un rectangle partage le rectangle en 2 parties égales.
- EC est le côté de ce triangle et aussi l'hypoténuse du triangle EBC.

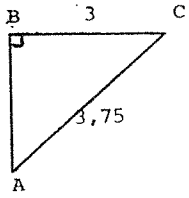
- DE est le côté de ce triangle et aussi l'hypoténuse du triangle AED. (Donc que ses côtés [DE] et [EC] sont les hypoténuses des 2 triangles AED et EBC)."

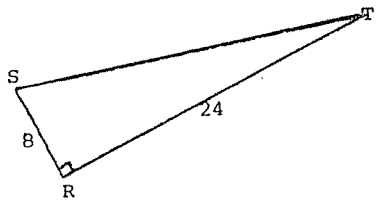
Ces réponses sont conformes d'ailleurs aux attitudes que l'on veut faire acquérir par les **activités**. Des questions ouvertes **même habituelles** doivent donc être bannies en test.
Les élèves ont perdu énormément de temps avec cette question et n'ont pas terminé le test.
Nous avons noté cependant des points positifs qui sont confirmés par le deuxième test.

- Les élèves savent utiliser l'énoncé de Pythagore et la touche $\sqrt{\ }$
- Ils savent écrire les données.
- Beaucoup savent distinguer valeur exacte et valeur approchée.
- Ils font un schéma pour raisonner et non un dessin exact.

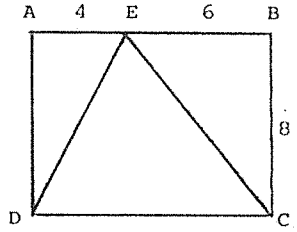
TEST n° 1

Ex 1 - Calcule la valeur exacte et une valeur approchée du troisième côté du triangle, dans chacun des cas suivants :





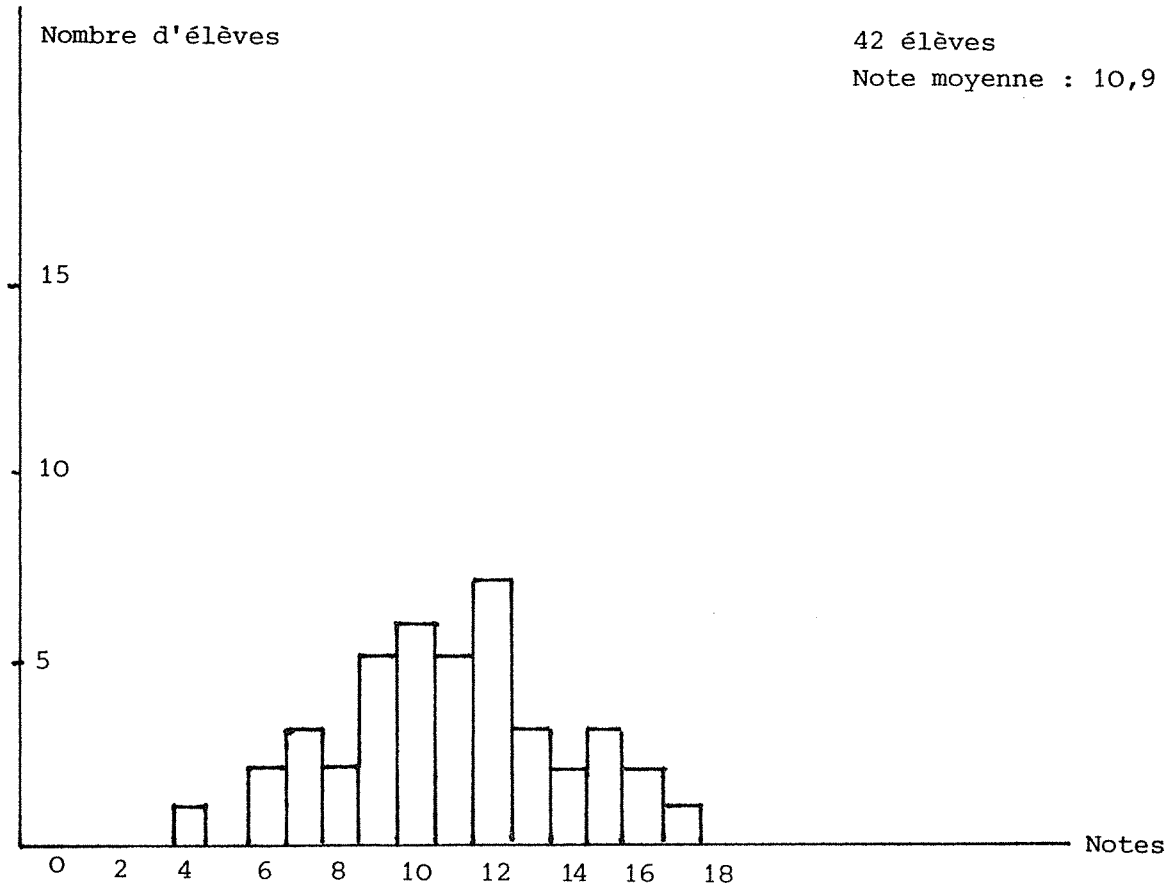
Ex 2 - ABCD est un rectangle.
Que dire du triangle EDC ? Justifie tes affirmations.



Ex 3 - ABC est un triangle tel que AB = 5.
[AH] est la perpendiculaire à (BC), issue de A, et coupe [BC] en H. AH = 3 et $HC = \frac{1}{3} \times HB$.
Calcule la valeur exacte de BC et celle de AC.
Justifie tes affirmations.

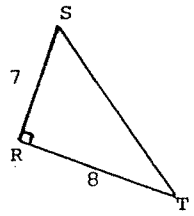
Calcule l'aire et le périmètre du triangle ABC.
Précise si chacune des valeurs est exacte ou approchée.

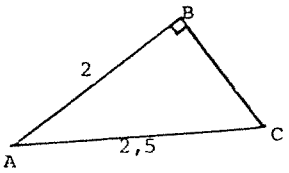
Test n° 1

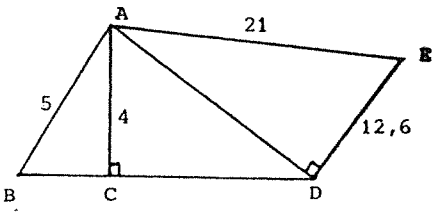

Nombre d'élèves
42 élèves
Note moyenne : 10,9
15
10
5
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
Notes

TEST n° 2.

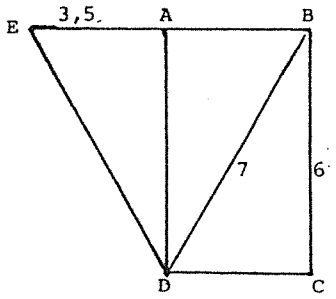
Ex 1 : Donne la valeur exacte de chacun des côtés non marqués sur les dessins.
Quand la valeur exacte n'est pas un nombre décimal, donne une valeur approchée au dixième.



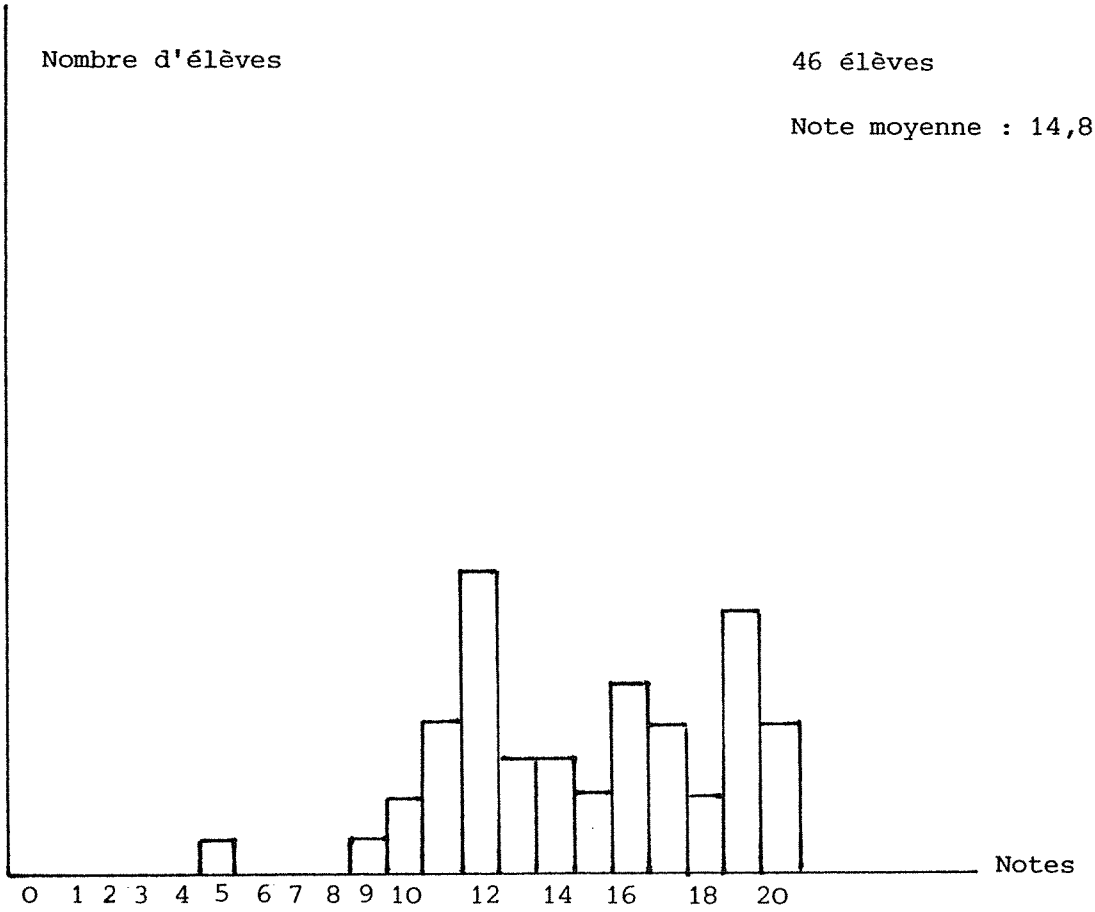




Ex 2 : Pense à justifier en citant les propriétés utilisées.
ABCD est un rectangle.
a) Le triangle EBD est-il isocèle en D ?
L'est-il en E ?
b) Calcule une valeur approchée de l'aire du triangle EBD.



Test n° 2



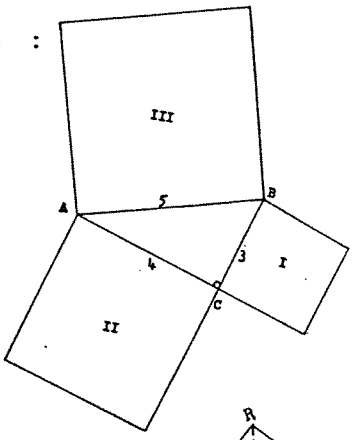
Remarques : 3 sur 46 utilisent mal l'énoncé de Pythagore.

2ème SEQUENCE

Réfléchir sur la démonstration.

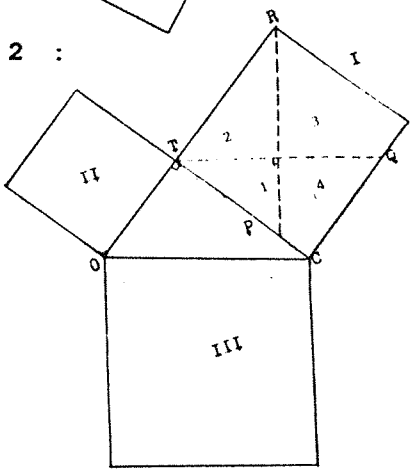
Activité

Figure 1 :



ABC est un triangle rectangle dont les côtés mesurent : 3, 4 et 5.
Les quadrilatères I, II, III sont des carrés.
Vérifie que l'aire du carré III est égale à la somme des aires des carrés I et II.
Qu'est-ce que cela prouve ?

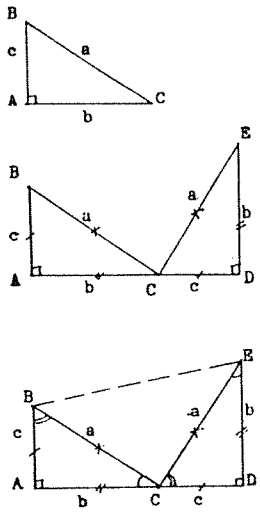
Figure 2 :



TOC est un triangle rectangle.
Les quadrilatères I, II, III sont des carrés.
(TQ) est parallèle à (OC)
(RP) est perpendiculaire à (TQ)

Peux-tu à l'aide des pièces 1, 2, 3, 4 et II reconstituer le carré III ?
Qu'est-ce que cela prouve ?

Figure 3 :



Voici comment le président Garfield (USA 1831 - 1881) a prouvé le théorème de Pythagore.

Il s'agit de montrer que :
$a^2 = b^2 + c^2$

Je place le point D sur la demi-droite [AC), D à l'extérieur de [AC] tel que CD = AB.
Puis je trace (ED) perpendiculaire à (AD) en D, tel que ED = AC.
Le triangle ECD est alors identique au triangle ABC.

Je dis: "ABED est un trapèze".
Pourquoi ?

Je calcule l'aire du trapèze de deux manières différentes : l'une en utilisant la formule de l'aire du trapèze, l'autre en faisant la somme des aires des 3 triangles, puis en comparant les deux résultats je trouve la relation.

Aire du trapèze par la formule $\frac{1}{2} \times (c+b) \times (c+b)$

$= \frac{1}{2} \times (c^2 + 2 \times b \times c + b^2)$

Aire du trapèze par les triangles Aire de ABC $= \frac{1}{2} \times b \times c$

Aire de CDE $= \frac{1}{2} \times b \times c$

Aire de BCE $= \frac{1}{2} \times a^2$
car le triangle BCE est rectangle et isocèle.
Pourquoi ?

Aire du trapèze : $\frac{1}{2} \times b \times c + \frac{1}{2} \times b \times c + \frac{1}{2} \times a^2$

Je compare les deux façons :

$$\frac{1}{2} \times (c^2 + 2 \times b \times c + b^2) = \frac{1}{2} \times b \times c + \frac{1}{2} \times b \times c + \frac{1}{2} \times a^2$$

$$= \frac{1}{2} \times (b \times c + b \times c + a^2$$

$$c^2 + 2 \times b \times c + b^2 = b \times c + b \times c + a^2$$
$$= 2 \times b \times c + a^2$$

$$c^2 + b^2 = a^2$$

As-tu compris ?

OBJECTIFS

Cette séquence vise à faire distinguer différents types d'explication :
3 exemples d'explications sont fournies :
* 1 exemple numérique
* 1 découpage
* une démonstration.

Ce que nous voulons montrer :
* Un exemple numérique ne suffit pas à démontrer une généralité, **un contre-exemple à ce propos doit être mentionné.**
Contre-exemple possible :
Peut-on en déduire que tous les nombres ayant 0 comme chiffre des unités sont multiples de 3 sous prétexte que 30 l'est.
* Un découpage peut être une preuve (on est convaincu) mais il peut y avoir des doutes. Là aussi un contre-exemple est nécessaire. La preuve est externe à la figure.
* Une démonstration est une explication interne qui est constituée de données et d'énoncés enchaînés logiquement.

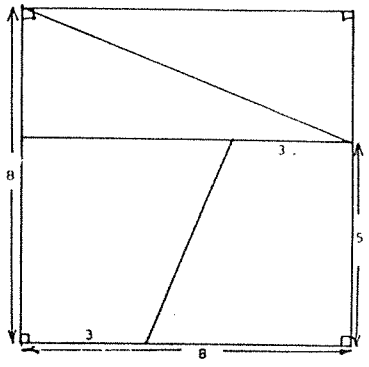
Durée : 2 H (y compris la synthèse) :

Déroulement
L'objectif est de réfléchir sur le statut des preuves.
Le dossier est distribué aux élèves. Ils doivent lire et discuter de ces 3 preuves. Le professeur n'intervient que pour apporter une information sur les textes ou expliquer une partie d'un texte (par exemple la 3ème partie).
La synthèse n'est faite que lorsque les élèves ont terminé les activités I et II et réfléchi sur la partie III.
Pour la partie 1.
Le professeur doit préciser aux élèves le sens de la question posée. Ils ne comprennent pas ce que l'on attend d'eux, pour eux il n'y a pas de problème, le résultat est normal car ils utilisent déjà l'énoncé de Pythagore. (Voir partie 1 du travail).
Le professeur rappelle que lors de l'activité 1 sur Pythagore, ils avaient fait différents dessins, des mesures et dégagé une propriété qui semblait vraie pour tous les triangles. Lors de la synthèse, c'est le professeur qui a validé cette propriété en disant : "*cette propriété semble vraie, rien ne le prouve pour le moment, mais moi je vous dis qu'elle est vraie*".
Le professeur annonce que le but de cette activité 2 est d'étudier différentes façons de prouver que l'énoncé de Pythagore est bien vrai.
"Pour chacune de ces 3 parties, a-t-on une preuve dans le cas général et pourquoi"?

Synthèse

Partie 1. Les élèves comprennent bien que l'on prouve que l'aire du carré III est égale à la somme des aires des carrés I et II. A la question *"est-ce que cet exercice prouve que la relation est toujours vraie ?"* les élèves répondent non car les 3 mesures sont particulières, on est seulement sûr que la relation existe dans ce cas particulier.
Partie 2. Ici on n'a pas de mesures pour les côtés, le puzzle semble donc réalisable pour n'importe quel triangle rectangle et les élèves pensent que ce découpage constitue une preuve.

Le découpage (2) est alors proposé:



Consigne :
Cette figure est un carré. Pourquoi ?
Découpe les quatre pièces, peux-tu à l'aide de ces quatre pièces former un vrai rectangle (autre que ce carré) ?
Calcule les aires de ce carré et du rectangle.
Explique le résultat.

Après calcul des aires, ils reviennent sur leur affirmation au sujet du découpage. Le professeur fait remarquer qu'il ne faut pas pour cela bannir tout découpage, il peut aider à conjecturer, mais ne peut constituer une preuve irréfutable.
Partie 3. La démonstration est reprise avec les élèves pour préciser certains points et expliquer des passages. La démonstration photocopiée sur transparent, est projetée à l'aide du rétroprojecteur.
Le professeur s'assure que les élèves ont bien compris le but :
"montrer que le carré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit".
Les élèves justifient l'existence du trapèze en disant que (BA) et (ED) sont deux droites perpendiculaires à (AD). Pourtant l'énoncé *"deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre elles"* n'a jamais été validé.

Le passage $(c + b) \times (c + b) = (c^2 + 2 \times b \times c + b^2)$ est expliqué par le professeur. Les élèves connaissent la propriété $k(a + b) = ka + kb$ mais la double distributivité, même si elle a déjà été rencontrée n'a jamais été étudiée. Un changement de variable est fait et l'égalité est ainsi prouvée.
Le fait que BCE soit un triangle rectangle en C est justifié par les élèves.
* les triangles ABC et CED ont mêmes mesures
* la somme des angles d'un triangle est 180°
* la somme des angles BCA et ECD est 90°
* l'angle ACD vaut 180°
* l'angle BCE vaut 90° par différence.
Les élèves utilisent implicitement des cas d'égalité des triangles.

Après l'explication de cette 3ème partie, la question est alors posée aux élèves. *"Parmi ces 3 preuves, laquelle nous permet d'être sûrs de la véracité de l'énoncé de Pythagore dans le cas général ?*

Les élèves semblent bien comprendre la différence entre ces 3 types de preuves. Le professeur insiste sur le fait que la 3ème ne fait intervenir ni mesure, ni découpage. Elle s'appuie seulement sur des propriétés internes à la figure, et chaque étape peut être justifiée par une propriété connue.

3ème SEQUENCE.

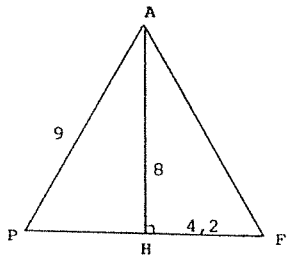
Savoir utiliser l'énoncé de Pythagore pour démontrer.

OBJECTIFS :

Contrat : Les exercices 1 à 7 sont obligatoires.

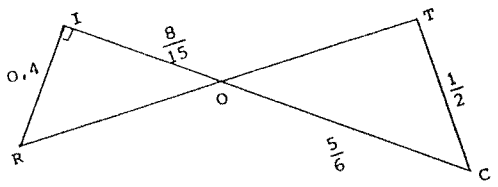
Temps : Nous consacrerons 7 heures en classe à ce travail.

Ex 1 :



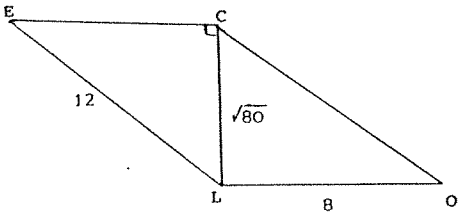
PAF est-il isocèle ?

EX 2



Que dire du point O ?

Ex 3 :



Que dire de ECOL ?

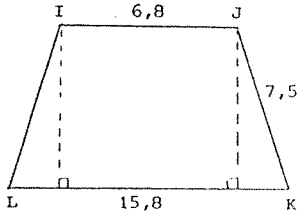
EX 4 :
[AB] est un segment de longueur 7 cm. I est son milieu. C est un point de la médiatrice de [AB] tel que CI = 6 cm.
Que dire de ABC ?

Ex 5 :
ABCD est un rectangle tel que AB = 5 et AC = 7. Construis-le.
Qu'en penses-tu ?

Ex 6 :
[AB] est segment de longueur 8 cm et de milieu O.
(Δ) est la perpendiculaire à [AB] en O. Sur (Δ), place un point M à 5 cm de B. Place un point N tel que :

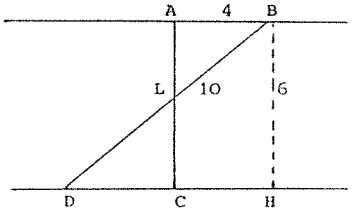
. N soit un point de (Δ)
. N ne soit pas sur la demi-droite [OM) et,
. NO = 3 cm
Que penses-tu du quadrilatère ANBM ?

Ex 7 :



IJKL est-il un trapèze isocèle ?

Ex 8 :



ABHC est un rectangle.
. EH = 6 cm
. BD = 10 cm
. AB = 4 cm
Que dire de ABCD ?

Objectifs

- Savoir utiliser l'énoncé de Pythagore pour démontrer.

Objectifs secondaires :
- Distinguer objet physique et objet idéal.
- Repérer données et conclusion dans un texte.
- Apprendre à raisonner par conditions suffisantes.
- Analyser les énoncés en s'aidant d'un organigramme.
- Utiliser l'organigramme pour apprendre à démontrer.
- Remplir le fichier démonstration.

Choix de la situation

- Les figures comportent des données numériques.
- Le calcul des éléments montre que la vue, la mesure ne sont pas fiables.
- Les situations permettent de revoir des énoncés (connus en tant qu'objet ou outil pour construire et non en tant qu'outil pour démontrer.)

Durée : 7 h.

Déroulement et commentaires

Ce dossier est donné aux élèves à la suite de la 2ème séquence.
Ils énoncent donc "l'objectif" *"je dois savoir démontrer en utilisant l'énoncé de Pythagore"* et le notent sur le dossier.

Pour chacun de ces exercices, les élèves doivent écrire les données du texte, la conclusion et éventuellement faire un dessin. Puis une analyse ascendante du problème est menée grâce à un questionnement du type *"comment démontrer que ....?"*.
Le professeur intervient alors pour valider les énoncés : il s'agit ici de les analyser pour pouvoir les utiliser dans une démonstration.
Tout au long de cette séquence, les élèves mettent en place et complètent une série de fiches *"comment démontrer que"* (voir annexe 1) : chaque énoncé est noté au moment où il est rencontré dans une démonstration et son fonctionnement est expliqué à l'aide d'un organigramme.

Ex 1 :
Les énoncés abordés sont :

- *Comment démontrer qu'un triangle est isocèle ?*
  * *en montrant qu'il a 2 côtés de même mesure.*
- *Comment montrer que 2 distances sont égales ?*
  * *en calculant.*
- *Comment calculer une distance ?*
  * *en utilisant l'énoncé de Pythagore.*

Ces 3 fiches sont alors commencées et les énoncés notés. Les élèves font ensuite les calculs nécessaires pour vérifier si le triangle est isocèle et si oui pour quels côtés. Ensuite, ils rédigent l'exercice en notant l'énoncé utilisé.
A ce stade, aucune forme précise n'est exigée pour la rédaction, il est seulement demandé de noter l'énoncé de Pythagore, de dire dans quel triangle rectangle on travaille et de détailler les calculs. Le travail effectué lors de la 1ère partie est réinvesti et complété.

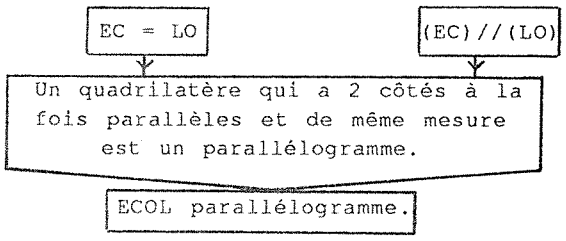
Ex 2 :
Une nouvelle fiche est commencée : (avec l'énoncé correspondant).

"Comment démontrer qu'un point est milieu d'un segment"?
** En montrant qu'il est sur le segment et à égale distance des 2 extrémités.*

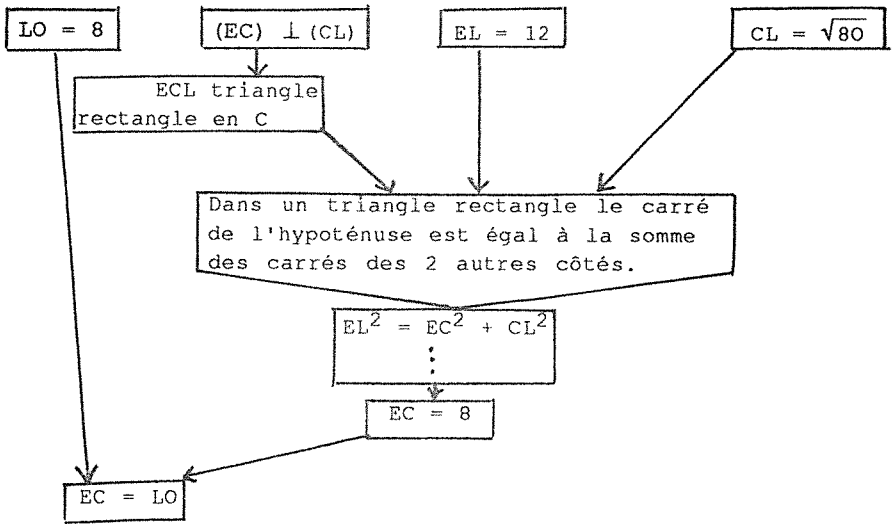
Les élèves effectuent ensuite les calculs et rédigent l'exercice cette rédaction est corrigée par le professeur comme exercice d'essai.

Ex 3 :
Pour cet exercice, deux méthodes sont utilisables.
Les élèves connaissent de nombreux énoncés concernant le parallélogramme ; le professeur demande de sélectionner les énoncés qui pourront être utilisés compte tenu des données de l'exercice.
La fiche *"Comment démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme?"* est élaborée, les 2 énoncés sont notés.
Pour chaque méthode, l'analyse et la réalisation de l'exercice est menée par un organigramme (du bas vers le haut).
Exemple : en montrant que ECOL a 2 côtés à la fois parallèles et de même mesure.
L'organigramme est scindé en 3 parties.

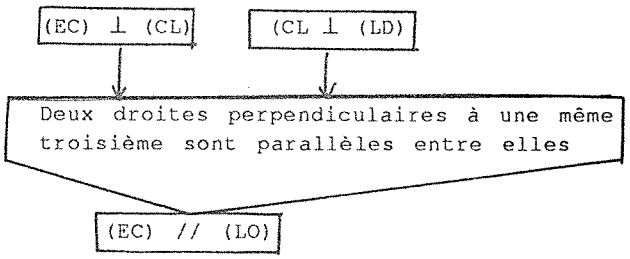
- Comment montrer que ECOL est un parallélogramme ?



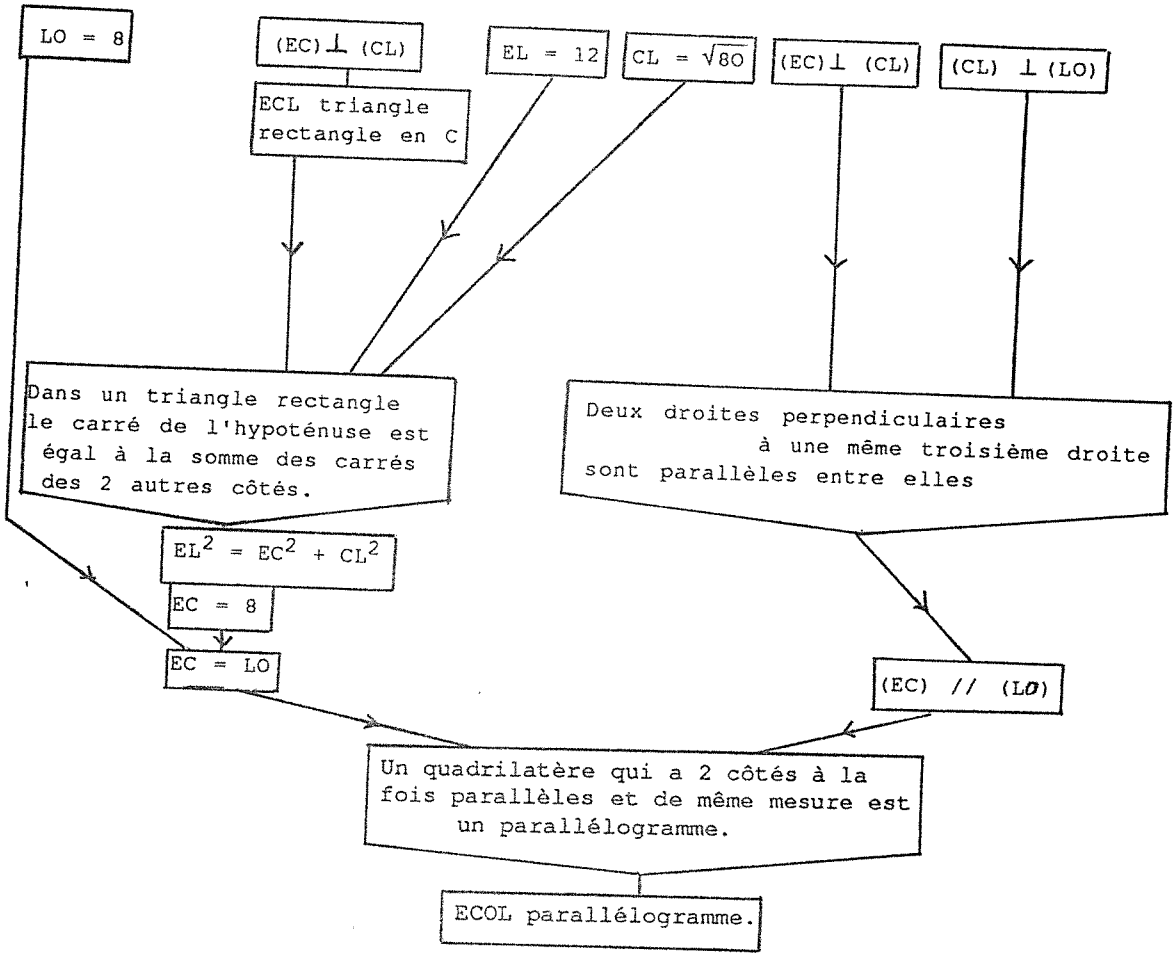
- Comment montrer que EC = LO ? : utilisation de l'énoncé de Pythagore dans le triangle ECL rectangle en C pour le calcul de EC.



- Comment montrer que 2 droites sont parallèles ?
Une nouvelle fiche est faite avec l'énoncé et l'organigramme de l'exercice est fait.



Le professeur montre alors au rétroprojecteur que ces 3 petits organigrammes se complètent pour obtenir la résolution de l'exercice.



Cet organigramme est alors utilisé pour effectuer la rédaction de l'exercice.
L'organigramme ayant 3 parties, la rédaction comportera 3 paragraphes, chaque paragraphe comportant ce que l'on sait, l'énoncé utilisé et ce que l'on déduit. Par exemple :

"on sait que (EC) (CL) et que (CL) (LO), or deux droites perpendiculaires à une même 3ème droite sont parallèles entre elles donc (EC) // (LO)".

La rédaction est alors dite oralement puis rédigée par écrit à la maison.
Le même travail permet de trouver l'organigramme de la démonstration faisant intervenir les côtés opposés isométriques.

Ex 4 : Le triangle ABC peut être isocèle et même équilatéral.
Pour démontrer que les 2 distances CA et CB sont égales, deux méthodes sont possibles. La fiche *"comment montrer que 2 distances sont égales"* est alors complétée :

1) en calculant (déja marqué)
2) en utilisant la médiatrice d'un segment.

L'énoncé sur la médiatrice est explicité. Les élèves peuvent alors faire l'organigramme pour démontrer que le triangle est isocèle en C.

La question *"est-il équilatéral ?"* est alors posée et la fiche *"comment montrer qu'un triangle est équilatéral"* est commencée.
Les élèves font facilement les calculs nécessaires et en déduisent qu'il n'est pas équilatéral.
Cet exercice est rédigé à la maison…

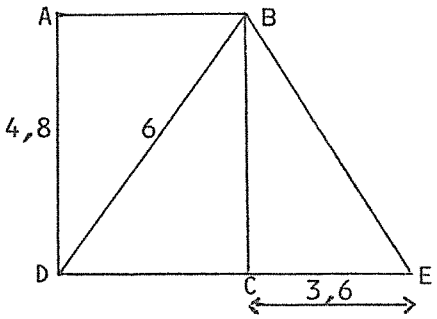
Ex 5 : Sur le dessin à l'échelle ce rectangle semble carré. La question est alors posée et les élèves proposent de nombreux énoncés pour montrer qu'un quadrilatère est un carré, l'énoncé qui peut être utilisé ici étant moins bien connu que d'autres.
Pour calculer BC, il est nécessaire de montrer que le triangle ABC est rectangle en B.
Deux nouvelles fiches sont élaborées.
"Comment montrer qu'un quadrilatère est un carré ?".
**en montrant que c'est un rectangle qui a 2 côtés consécutifs isométriques.*
"Comment montrer que deux droites sont perpendiculaires ?".
**en utilisant les angles d'un rectangle.*
Les calculs faits sans problème donnent un résultat surprenant, le quadrilatère semblant carré. Cet exercice permet donc de montrer une fois de plus que la mesure ne suffit pas, seul le calcul peut amener ici une certitude. Les élèves ne disent plus maintenant *"il est presque carré"* ou *"pas tout à fait carré"*. Les notions d'objet physique et d'objet idéal semblent se mettre en place progressivement.

Ex 6 : Les deux méthodes utilisables pour montrer que le quadrilatère est un losange sont données par les élèves
* *en montrant que les 4 côtés sont isométriques,*
* *en montrant que les diagonales sont perpendiculaires et de même milieu.*
Les énoncés sont notés sur la fiche *"comment montrer qu'un quadrilatère est un losange".*

Un autre énoncé est nécessaire pour calculer les distances OA et OB en utilisant le milieu O de [AB]. La fiche *"comment calculer une longueur"* est complétée par un deuxième énoncé :
* *en utilisant le milieu d'un segment.*
Les élèves choisissent l'une ou l'autre des méthodes pour la démonstration et élaborent l'organigramme. Certains ont besoin d'aide car l'organigramme comporte beaucoup d'étapes. La difficulté réside plus dans l'organisation matérielle de l'organigramme que dans le raisonnement.

Ex 7 : Pour démontrer que ABCD est un parallélogramme, l'énoncé a déjà été rencontré, les élèves consultent leurs fiches et commencent la recherche.
Un autre énoncé est nécessaire pour montrer que CH = 4.
La fiche *"comment montrer que 2 distances sont égales"* est complétée par:
- *en utilisant les côtés opposés d'un rectangle.*
L'exercice est alors recherché individuellement, le professeur intervenant pour aider certains élèves à organiser leur travail.
Il est à noter que pour des élèves qui débutent l'apprentissage de la démonstration, cet exercice comporte comme l'exercice 6, de nombreuses étapes.

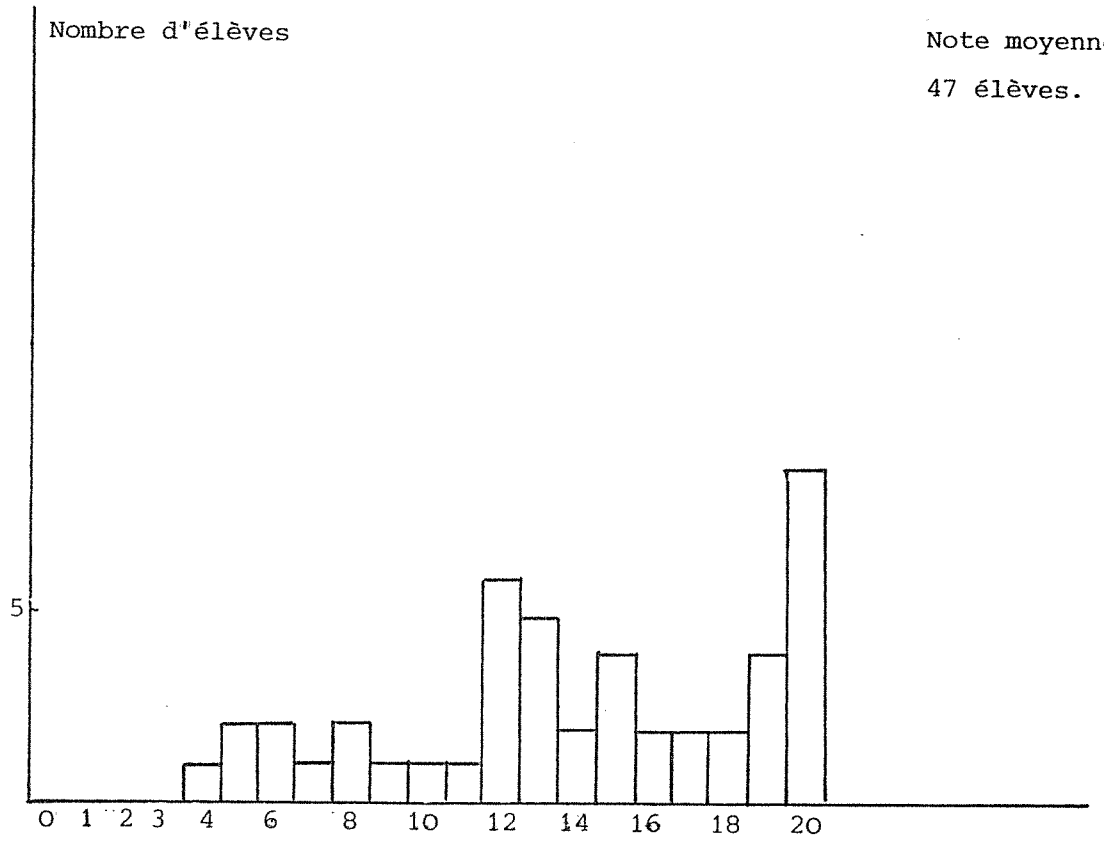
Test n° 3



ABCD est un rectangle.
Le triangle BDE est-il isocèle ?
Justifie ta réponse.

(Tu écriras les données, la conclusion, l'organigramme n'utilisant que des énoncés des fiches, la rédaction).

Test n° 3



Note moyenne 14,2

47 élèves.

CONCLUSION

A l'issue de cette troisième partie, il nous semble que les élèves :
- distinguent correctement les objets physiques et les objets idéaux,
- ont compris les règles du jeu : les données et les énoncés doivent "s'enchaîner",
- ont compris qu'une démonstration peut se décomposer en morceaux et qu'il suffit d'étudier morceau par morceau.

Des erreurs d'apprentissage ont lieu et sont nécessaires :
- mauvais choix de l'énoncé (celui-ci est alors réanalysé par l'élève),
- "cercle vicieux".

COSINUS D'UN ANGLE

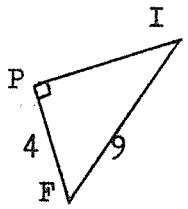
Activité
Trace des triangles rectangles dont un des angles mesure 60° ou 66° ou 53° ou 76° ou 41° ou 26° (une mesure par groupe).
Outre l'angle, ces triangles ont des points communs, lesquels ?

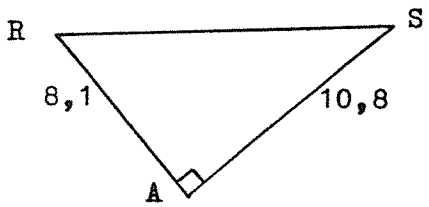
OBJECTIFS :

Contrat : Exercices obligatoires :1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16.
Devoir à la maison : 10 et 17.

Durée : 4 heures en classe.

Ex 1 : Trouve une valeur approchée à 1° près de chacun des angles de ces triangles.



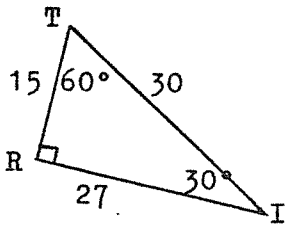


Ex 2 : A l'aide de la calculatrice, trouve une valeur exacte si possible ou une valeur approchée au centième de cos 35°, cos 60°, cos 20°, cos 88°, cos 27°.

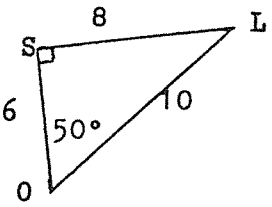
Ex 3 : Donne un encadrement à un degré près de l'angle $\widehat{x}$ dans chacun des cas suivants : cos $\widehat{x}$ = 0,73, cos $\widehat{x}$ = 0,12, cos $\widehat{x}$ = 0,5.

Ex 4 : Dans le devoir d'Hélène, le professeur a relevé ces 3 erreurs, explique-les.

a)

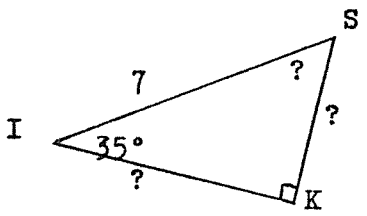


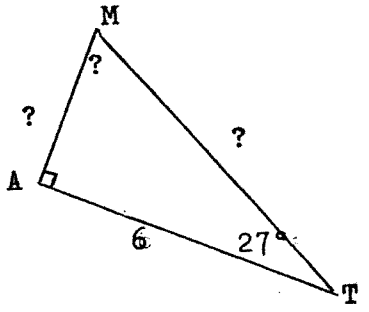
b)



c) Dans le triangle ABC rectangle en B, on a cos $\widehat{BAC}$ = 1,2.

Ex 5 : Calcule les côtés et angles qui manquent pour chacun de ces triangles.
Précise si les valeurs sont exactes ou approchées.

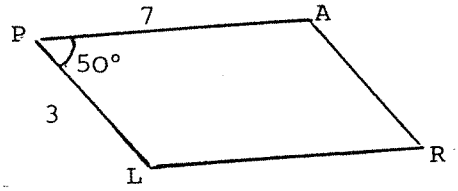




Ex 6 : Sans chercher un encadrement de $\widehat{K}$ et sans utiliser ton rapporteur, construis un triangle IJK tel que cos $\widehat{IKJ}$ = 0,42. Donne ton programme de construction et justifie-le.

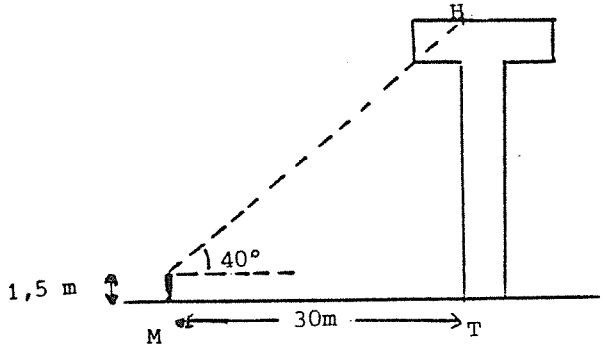
Ex 7 : Construis un triangle rectangle dont un côté de l'angle droit mesure 2,6 et l'hypoténuse 4,7. Construis un autre triangle rectangle dont un côté de l'angle droit mesure 2,1 et l'hypoténuse 3,8.
Ces deux triangles ont-ils les mêmes angles ? Justifie ta réponse.

Ex 8 :



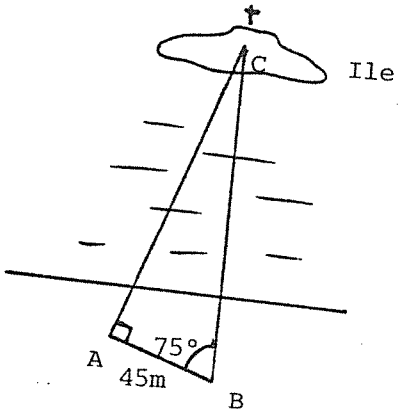
Calcule une valeur approchée au dixième de l'aire de ce parallélogramme.

Ex 9 :



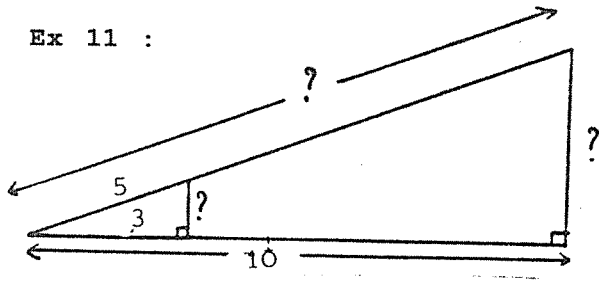
On s'est placé à 30 m d'un château d'eau HT que l'on voit sous un angle de 40°.
Trouve la hauteur du château d'eau à 50 cm près.

Ex 10 :



Un géomètre veut mesurer la distance qui le sépare d'un point inaccessible, par exemple la croix C qui est plantée sur l'île qu'il voit au loin.
Muni de son goniomètre, il se place en un point A du rivage et parcourt 45 m dans la direction perpendiculaire à (AC). Il arrive en B et détermine par une nouvelle visée l'angle $\widehat{ABC}$, il trouve 75°.
A quelle distance se trouve la croix?

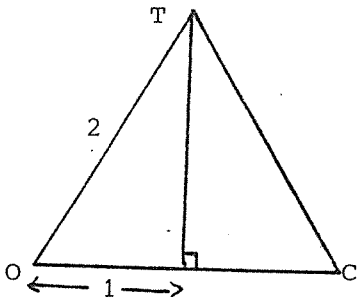
Ex 11 :



Trouve les trois valeurs qui manquent.

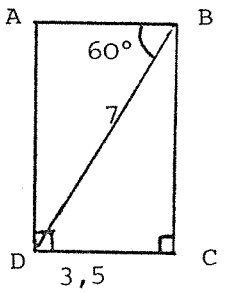
Pour les exercices 12 à 16, tu prouveras avec précision tes affirmations.

Ex 12 :



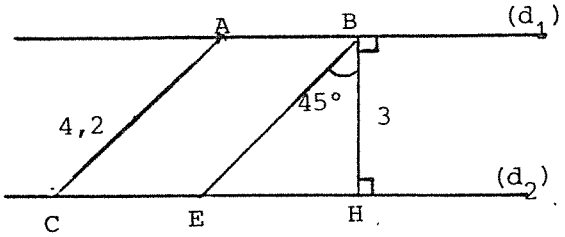
Que peux-tu dire du triangle TOC ? Justifie.

Ex 13 :



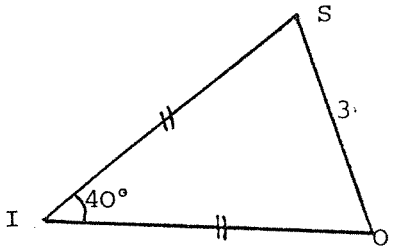
Que dire du quadrilatère ABCD ? Justifie.

Ex 14 :



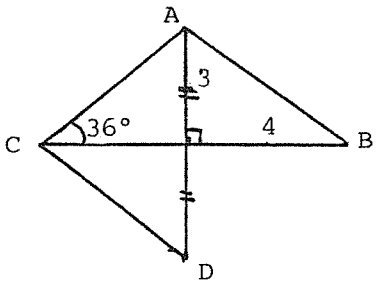
Les droites (D_1) et (D_2) sont parallèles, BH = 3, AC = 4,2 et $\widehat{HBE}$ = 45°. ABEC est-il parallélogramme ?

Ex 15



Calcule l'aire et le périmètre de ce triangle isocèle. Précise si les valeurs sont exactes ou approchées.

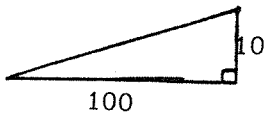
Ex 16 :



ABCD est-il un losange ? Justifie.

Ex 17 : Sur la route de Bonnes, tu as sûrement vu le panneau

qui signifie que la route a une pente de 10 %.
Sur une route dont la pente est de 10 %, la dénivellation est de 10 m pour un déplacement horizontal de 100 m.



a) Une route est dans un plan qui fait un angle de 15° avec un plan horizontal et sur une autre on a ce panneau :

Quelle route est la plus pentue ?

b) Que signifie "une route a une pente de 100 %" ?

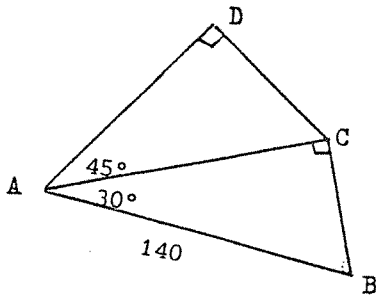
c) Sur les pistes d'une station de ski, on peut lire :

Teleski de la Pointe
altitude de départ 2 875 m
altitude d'arrivée 3 175 m
longueur de la piste 700 m.

Calcule la pente de la piste et l'angle de la piste avec l'horizontale.

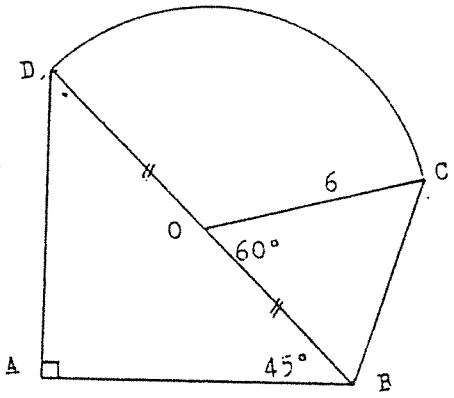
AUTO-TEST.

Ex 1 :



Calcule les longueurs de tous les segments de cette figure.
Dis si les valeurs sont exactes ou approchées.

Ex 2 :

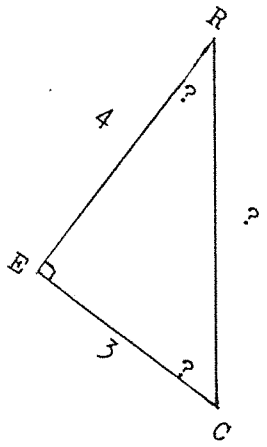


O est le milieu de [DB], OC = 6, $\widehat{DBA} = 45°$ et $\widehat{COB} = 60°$.
Calcule l'aire et le périmètre de cette figure.

Ex 3 :

MNP est un triangle rectangle en M, MN = 7 et MP = 24.
Donne un encadrement à un degré près de la mesure de $\widehat{N}$.

Ex 4 :



Calcule les côtés et angles qui manquent.
Précise si ces valeurs sont exactes ou approchées.

Ex 5 : LOSA est un losange de 30 cm de périmètre et tel que LS = 12 cm.
Donne un encadrement de la valeur de l'angle $\widehat{ALO}$ et calcule l'aire du losange.
Prouve avec précision tes affirmations.

Nos choix

Le cosinus peut être vu comme :
- un rapport de projection orthogonale,
- un moyen pour calculer des angles connaissant des longueurs et inversement.

Autrement dit le cosinus peut être un moyen pour initier à l'énoncé de Thalès ou à la trigonométrie.
("La trigonométrie plane étudie les relations qui existent entre les côtés et les lignes trigonométriques des angles de polygônes plans, en particulier de triangles" Taton - Histoire du calcul).
Notre point de vue est de privilégier l'aspect trigonométrique du cosinus : l'essentiel est de faire comprendre qu'il existe une relation entre des longueurs et des angles.
Notre démarche se déroule en trois phases :
- découverte du cosinus,
- utilisation du "cosinus" pour calculer,
- utilisation du "cosinus" pour démontrer.

Objectifs

- Calculer le cosinus d'un angle et donner la valeur de cet angle dans un triangle rectangle.
- Calculer une distance connaissant le cosinus d'un angle dans un triangle rectangle.

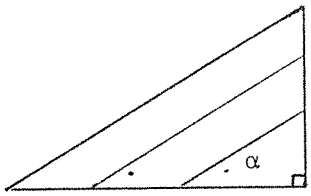
Objectifs secondaires

- Utiliser la calculatrice pour trouver la valeur approchée d'un cosinus ou d'un angle (cos et Inv cos).
- Rechercher les éléments manquant dans un triangle rectangle : angles et côtés.
- Réinvestir l'énoncé de Pythagore.
- Poursuivre l'apprentissage de la formulation d'une démonstration.

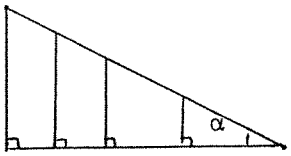
SITUATION DANS LE TEMPS
Après un travail sur le calcul littéral, au mois de février.

Déroulement et commentaires

Activité : Durée 1 heure.
Les six groupes de la classe travaillent à partir d'un angle différent. Ils dessinent différents triangles ayant l'angle choisi et observent.
Voici les principales remarques énoncées.
- Les triangles ont les mêmes angles (remarque justifiée par la somme des angles d'un triangle).
- On peut utiliser l'énoncé de Pythagore car les triangles sont rectangles.
- Les triangles ont la même forme.
- Les proportions sont gardées, les dessins semblent être "à l'échelle".
- Des élèves réalisent ces dessins pour montrer la proportionnalité entre les côtés correspondants des différents triangles (le mot "proportionnalité" n'est pas prononcé).



(1)



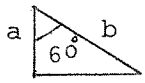
(2)

Pour le premier dessin, le parallélisme des hypoténuses est prouvé oralement par l'égalité des angles correspondants (énoncé qui n'a pourtant pas été institutionnalisé en 5ème).

Dans le deuxième dessin, le parallélisme est prouvé oralement par les droites perpendiculaires à une même troisième droite.
Dans le groupe qui avait des triangles avec un angle de 60°, les élèves remarquent que le côté de l'angle droit qui est un côté de l'angle de 60° mesure environ la moitié de l'hypoténuse et ceci pour tous les triangles tracés. Le professeur demande de poursuivre l'étude en choisissant un autre angle parmi les six cités dans l'activité pour voir si la remarque reste la même.

Dans les autres groupes, pour trouver une relation entre les côtés les démarches le plus souvent utilisés sont :
- somme, différence, produit des mesures des côtés,
- quotient des mesures (qui vient en dernier).

Lors de la synthèse, les dessins (1) et (2) sont projetés au rétroprojecteur et commentés par les auteurs. Les élèves du groupe
qui avait un angle de 60° énoncent leur remarque interprétée par eux par



$\frac{a}{b} = 0,5$

Cette remarque fait renaître la curiosité et la recherche dans les différents groupes.
Les résultats des groupes sont organisés en tableau.

Angles	20°	41°	53°	60°	66°	76°
Valeur de $\frac{a}{b}$	0,9	0,7	0,6	0,5	0,4	0,25

Un élève remarque aussitôt que plus l'angle est grand, plus le rapport est petit.
Le professeur **valide** donc le fait que ce rapport est une caractéristique de l'angle appelée cosinus. Un angle est caractérisé par sa mesure et par son cosinus.
Le lien est alors fait avec la calculatrice où les touches Cos et INV Cos sont utilisées. A cette occasion, les élèves vérifient les résultats trouvés dans le tableau. Il est fait remarquer que toutes les valeurs trouvées sont approchées, sauf celle de cosinus 60°.

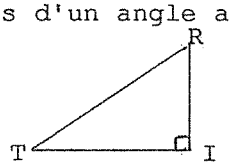
Ainsi se dégage que le Cosinus d'un angle peut être trouvé,
- avec la calculatrice,

- avec un triangle rectangle (on fait le rapport du côté adjacent à l'angle et de l'hypoténuse).

Le professeur demande alors :
- à quoi peut servir cette nouvelle notion ?
- quelles sont les données minimales que l'on doit connaître dans un triangle rectangle pour pouvoir en déduire les angles et les côtés ?
Le lien est alors fait avec l'énoncé de Pythagore.

Ce qui a été noté sur le répertoire

C cosinus d'un angle aigu.



Dans le triangle TRI rectangle en I :
$\text{Cos } \widehat{T} = \frac{TI}{TR}$ $\text{Cos } \widehat{R} = \frac{RI}{TR}$.

Les objectifs sont formulés par les élèves et notés sur le dossier.

Je dois savoir:
- utiliser la calculatrice pour trouver le cosinus d'un angle et un angle dont on connaît le cosinus.
- Calculer un côté ou un angle d'un triangle rectangle lorsque je connais deux côtés ou un côté et un angle.

* **Exercices** : Durée 4 heures.

Les exercices de 1 à 11 sont des exercices d'application directe du cours. Ils mettent aussi en oeuvre :
- la calculatrice (touches [Cos] et [Inv Cos]),
- l'énoncé de Pythagore,
- la somme des angles d'un triangle,
- valeurs exactes et approchées.

Quelques erreurs de notation sont faites au 1er exercice, erreurs dues à l'utilisation de la calculatrice. Ainsi cos 35° était noté 35° cos et Inv cos $\frac{4}{9}$ $\simeq$ 63° pour $\text{Cos } F = \frac{4}{9}$ donc $F \simeq 63°$.
La question c) de l'exercice 4 permet de préciser la valeur extrême du cosinus d'un angle aigu. Les élèves ne sont d'ailleurs pas étonnés, ils ont expliqué que c'était normal car dans un triangle rectangle les côtés de l'angle droit sont toujours de mesure inférieure à celle de l'hypoténuse.
A l'exercice 5, une difficulté liée au calcul est introduite :
trouver IK lorsque l'on connaît $\widehat{I}$, IS et $\text{Cos } \widehat{I} = \frac{IK}{IS}$, difficulté accrue pour l'autre triangle avec $\cos \widehat{T} = \frac{AT}{TM}$ lorsque $\widehat{T}$ et AT sont connus.
Le problème est résolu par recours au sens des opérations.

Pour la majorité des élèves, l'exercice 6 n'est pas résolu spontanément.

Le professeur doit rappeler l'activité où l'on a tracé de nombreux triangles rectangles ayant même angles donc même cosinus , et engager les élèves à tracer un croquis du triangle et à écrire le cosinus de $\widehat{IJK}$ comme rapport de deux côtés du triangle.
Les notions d'objet physique et objet idéal, de valeur exacte et valeur approchée sont revus avec l'exercice 7. En effet les cosinus ne sont différents qu'à partir du millième.

L'exercice 9 exige la mathématisation de la situation, le triangle rectangle utile n'était pas tracé sur le dessin.

L'exercice 11 pose plus de difficultés surtout pour obtenir les valeurs exactes de AD et de DE. En effet, dans leur majorité, les élèves calculent une valeur approchée de l'angle $\widehat{A}$ en travaillant dans le triangle ABC et en déduisent une valeur approchée de AD et de DE par l'utilisation du cosinus de l'angle $\widehat{A}$ dans le triangle ADE. Le professeur doit apporter une aide en demandant de donner des valeurs exactes (ce qui suffit pour certains groupes) et de ne pas calculer le cosinus de $\widehat{A}$

Les exercices 12 à 17 sont des exercices d'initiation à la démonstration. Le fichier "comment démontrer que" est complété au fil des exercices et de nouveaux énoncés sont analysés et institutionnalisés.

Ainsi, avec **l'exercice n° 12**, on complète les fiches :

- *Comment démontrer qu'un triangle est équilatéral,*
* *en montrant qu'il a 3 angles de 60°.*

- *Comment trouver un angle :*
* *en calculant son cosinus dans un triangle rectangle,*
* *en utilisant la somme des angles d'un triangle.*

Ces fiches ainsi complétées, les élèves cherchent individuellement l'organigramme. La rédaction est faite à la maison et vérifiée en classe.

Pour cet exercice, quelques élèves ont fait la démonstration en montrant que les 3 côtés étaient égaux. Ce raisonnement correct ne peut aboutir, seules des valeurs approchées pour les mesures des côtés sont obtenues.

Pour l'exercice 13 on complète la fiche -
"Comment démontrer qu'un quadrilatère est un rectangle".
- En montrant qu'il a 3 angles droits.

Les autres énoncés nécessaires à la démonstration sont déjà connus et notés sur les fiches.

A l'exercice 14 le côté BE est calculé en utilisant le cos $\widehat{B}$ dans le triangle rectangle BEH. L'organigramme n'est pas fait pour cet exercice, seule une courte rédaction est demandée, l'organigramme ne se prêtant pas à ce genre d'exercice.

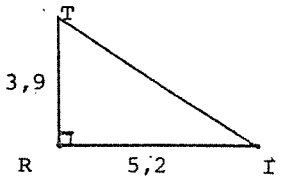
A l'exercice 15 la symétrie orthogonale est réinvestie.
La fiche :
"comment démontrer que deux droites sont perpendiculaires" est complétée,
- en utilisant la médiatrice d'un segment.

Une nouvelle fiche est élaborée :
"comment démontrer qu'une droite est médiatrice d'un segment",
- en montrant qu'elle est axe de symétrie d'un triangle isocèle.

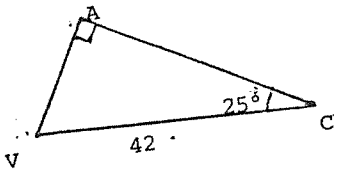
Les calculs pour trouver les valeurs de la hauteur et de IS ne présentent pas de difficulté, mais une aide est nécessaire pour la réalisation de l'organigramme. Les étapes sont nombreuses et souvent les élèves négligent la justification d'étapes qui leurs semblent évidentes. Les erreurs faites sont plus des omissions que des fautes de raisonnement.

TEST

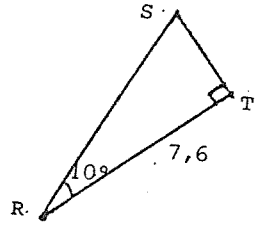
Ex 1 :



A l'aide d'un calcul, donne un encadrement des angles $\widehat{T}$ et $\widehat{I}$ à un degré près.

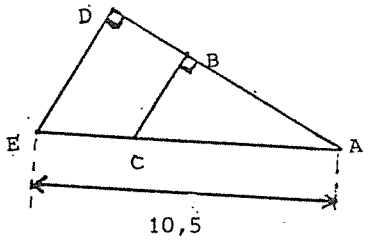


A l'aide d'un calcul, donne une valeur approchée au centième de AC.



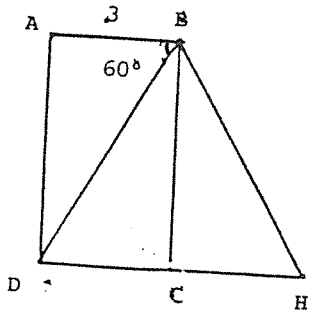
A l'aide d'un calcul, donne une valeur approchée au dixième de RS.

Ex 2 :



Calcule la valeur exacte de AD.

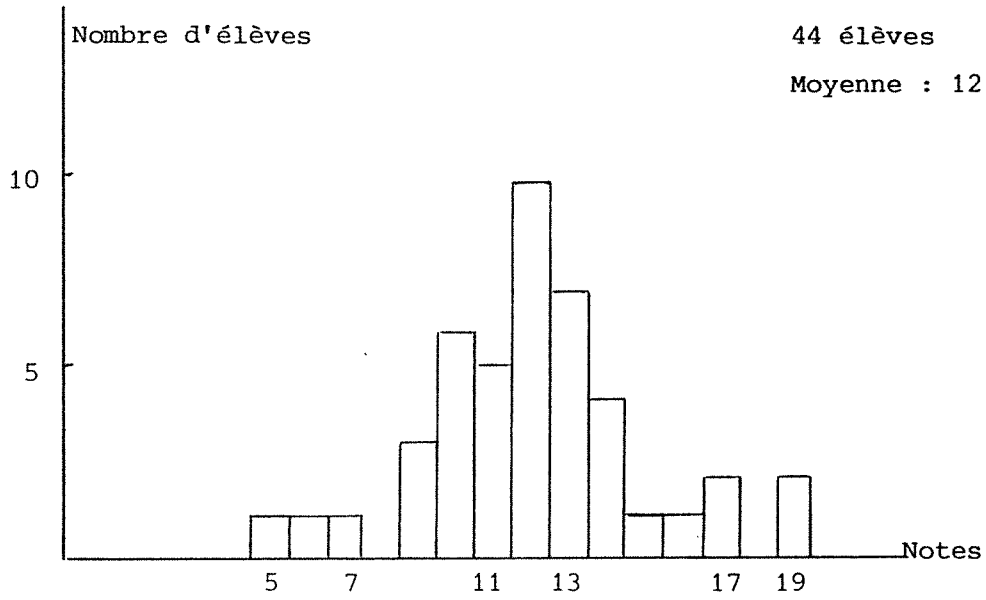
Ex 3 :



Pour cet exercice, écris les données et la conclusion, fais un organigramme et la rédaction.

ABCD est un rectangle tel que AB = 3 et $\widehat{ABD} = 60°$
H est le point de [DC] tel que DH = 6.
Que dire de BDH ? Prouve-le.

TEST - Cosinus

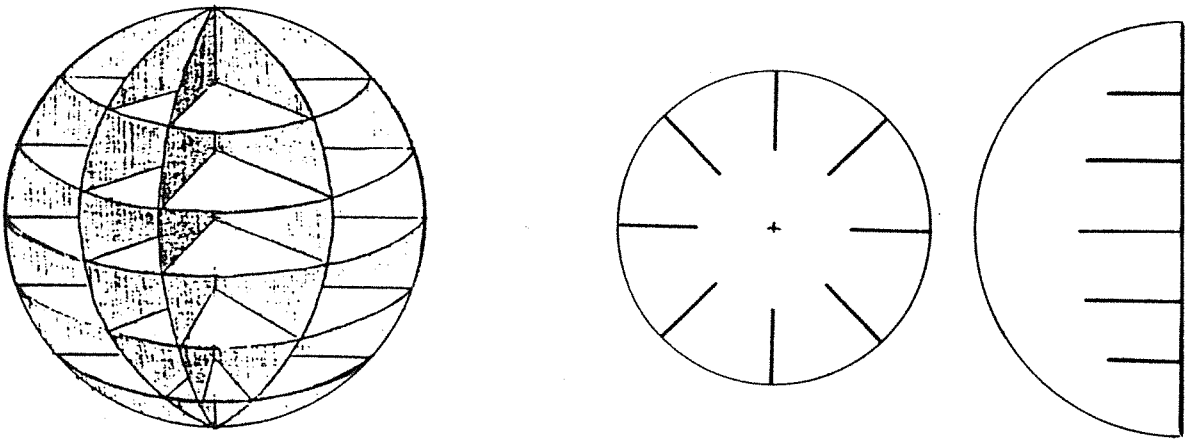


SPHERE

Activité n° 1
Recherche le patron d'une sphère.

Activité n° 2
Une sphère a 5 cm de rayon. On coupe une calotte sphérique d'épaisseur 1 cm à l'aide d'un "tranchoir".
Dessine, en vraie grandeur, la section obtenue.

Activité n° 3
Les dessins suivants t'expliquent comment construire une sphère.
Construis une sphère de rayon 5 cm avec trois disques (tu utiliseras du carton souple) régulièrement espacés.



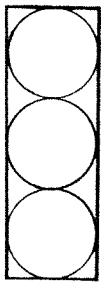
OBJECTIFS :

Contrat :tous les exercices sont obligatoires sauf 2c. Durée 2 heures

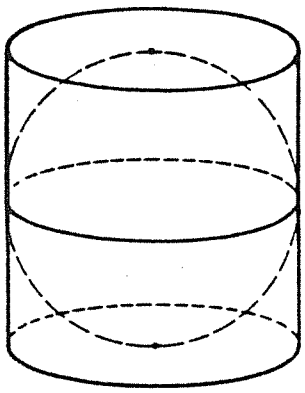
Ex 1 :
On coupe une sphère de rayon R par un plan perpendiculaire à un rayon et aux $\frac{4}{5}$ du rayon à partir du centre.
Calcule le rayon du cercle d'intersection en fonction de R.

Ex 2 :
a) Recherche dans un dictionnaire ce qu'on appelle "latitude d'un lieu" sur la surface de la Terre et ce qu'est un "parallèle".
Quelle est la longueur d'un parallèle qui correspond à une latitude de 45° ? de 30° ?
b) Recherche dans un dictionnaire ce qu'on appelle "longitude d'un lieu" sur la surface terrestre et ce qu'est un "méridien".
Deux villes sont situées à la même latitude 40° Nord, l'une a pour longitude 30° Ouest et l'autre 25° Est.
Quelle distance sépare ces deux villes à la surface de la terre si l'on suit un parallèle ?
c) Est-ce la plus courte distance entre ces deux villes sur la surface de la terre ?
Un avion relie ces deux villes en suivant le trajet le plus court, quelle distance parcourra-t-il ?

Ex 3 :
Une boîte cylindrique sans rebord contient trois balles de tennis qui, sans être serrées, ne peuvent bouger.
Dessine le patron de la boîte.
(diamètre d'une balle = 6,5 cm).

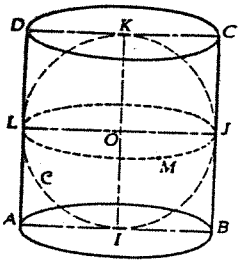


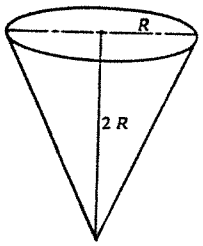
Ex 4 :
Introduction historique



En l'an 212 avant J.C., un légionnaire romain tue un citoyen de Syracuse, âgé de 75 ans : ce citoyen est Archimède.
Sur la tombe d'Archimède, quelques amis représenteront une sphère placée à l'intérieur d'un cylindre, la hauteur et le diamètre du cylindre ayant même mesure que le diamètre de la sphère.
Ce dessin évoque une expérience simple donnant un résultat remarquable. Si le cylindre est rempli d'eau, le volume de liquide déplacé par la sphère est exactement le double du volume de l'eau qui reste.
Les résultats de cette expérience, Archimède les a justifiés par le calcul.
Nous vous proposons, dans le problème suivant, de retrouver, notamment, ces résultats.

Une sphère loge exactement dans un cylindre.
a) Montre que l'aire de la sphère est égale à l'aire latérale du cylindre.
b) Montre que le volume de la boule est les $\frac{2}{3}$ du volume du cylindre.
Retrouve les résultats de l'expérience (introduction).
c) Montre que l'eau qui reste entre le cylindre et la boule remplirait exactement un cône de rayon **R** et de hauteur **2R**.





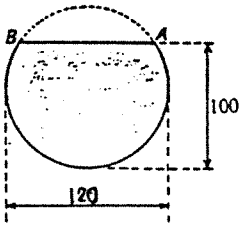
(Rappels : l'aire d'une sphère de rayon R est $4\pi R^2$; le volume de cette sphère est $\frac{4}{3}\pi R^3$; le volume d'un cylindre de base B, de hauteur h est Bh; le volume d'un cône de base B, de hauteur h est $\frac{1}{3}$ Bh.)

Ex 5 :
Une boule de pétanque a pour diamètre 9 cm.
Quel est le rayon d'une boule dont le volume est le double du volume de la boule de pétanque ?

Ex 6 :
Etudie les variations du volume d'une sphère en fonction de son rayon R.

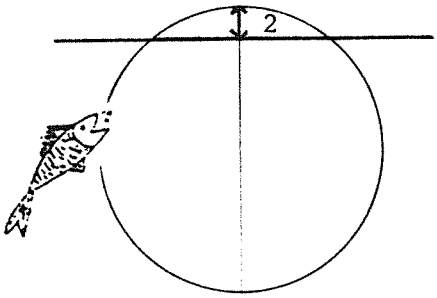
AUTO-TESTS.

Ex 1 :



Un aquarium a la forme d'une sphère incomplète comme l'indique le dessin. Calcule le diamètre de l'ouverture AB.

Ex 2 :

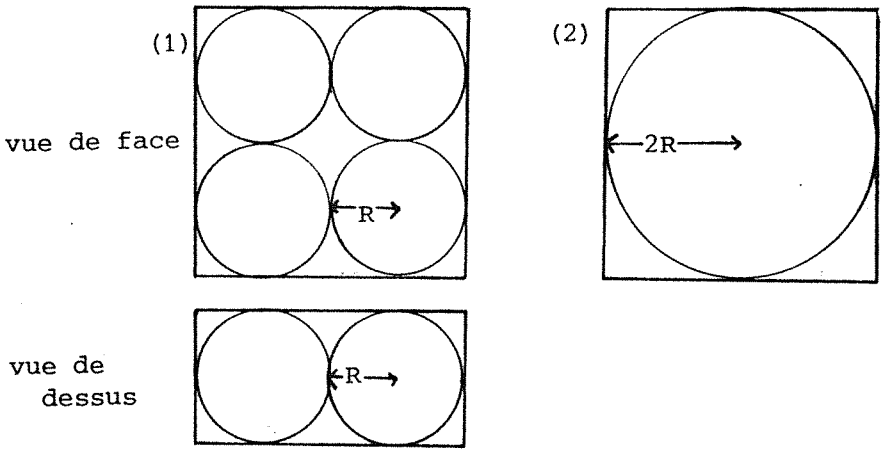


Une boule de 10 cm de diamètre flotte sur l'eau. Son point le plus haut dépasse le niveau de l'eau de 2 cm.
Quel est le diamètre du cercle délimité par l'eau sur la balle ?

Ex 3 :
Prouve que le volume restant en (2) est le double du volume restant en (1).

(1) Une boîte avec quatre boules de rayon R.

(2) Une boîte avec une boule de rayon 2R.



Nos choix

Nous avons, outre les connaissances propres à la sphère, choisi des activités, des exercices qui permettent de réinvestir des connaissances :
- de 6ème et 5ème concernant les volumes,
- de géométrie plane de 4ème (Pythagore et Cosinus),
- sur le calcul littéral et éventuellement les puissances de 10.

Objectifs

- Montrer que le patron d'une sphère est impossible.
- Savoir que la section par un plan perpendiculaire au rayon est un disque et calculer son rayon. (Pythagore, Cosinus d'un angle).
- Calculer l'aire et le volume d'une sphère.

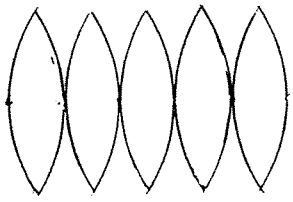
Objectifs secondaires.
- Utiliser les connaissances géographiques (méridiens, parallèles, latitude, longitude).
- Utiliser la proportionnalité (longueurs des arcs, angles).
- Réutiliser le calcul littéral.
- Manipuler la calculatrice.

Durée :
Activité 1 : 15 à 20 mn
Activité 2 : 30 mn
Activité 3 : 20 mn en classe, terminée à la maison
Exercices : 2 h.

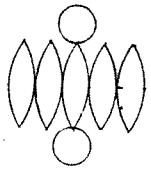
Déroulement et commentaires.

Activité 1 :
Réactions des élèves :
- certains recherchent dans leur livre de géographie, d'autres préfèrent imaginer.
- Lors de la synthèse, différentes propositions sont présentées :

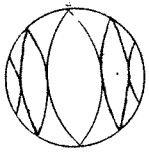
1) fuseaux identiques dessinés avec des cercles de grands rayons.



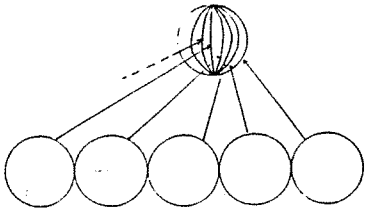
2) Fuseaux identiques, plus petits avec deux disques pour assembler ou "boucher les trous" (précision donnée par l'élève).



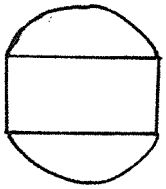
3) Fuseaux limités par un cercle.



4) Disques accolés par un diamètre et pliés.



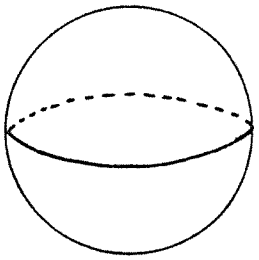
5) Rectangle surmonté de 2 "triangles" (les côtés sont des arcs de cercle).



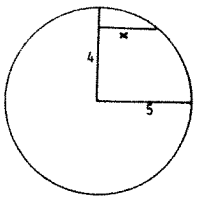
La synthèse permet de :
* Montrer les défauts de chacune des propositions,
- existence de plis dans les assemblages des fuseaux,
- existence de trous avec les disques accolés par un diamètre.

* Faire sentir que le patron de la sphère n'existe pas :
- la sphère n'a qu'une face, on ne peut pas la déplier,
- la surface de la sphère n'est pas plane.

* Faire dessiner la sphère en perspective cavalière : dessin proposé facilement par les élèves.

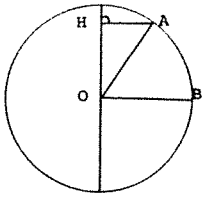


Activité 2 :
Pour la majorité des élèves la forme de la section ne fait aucun doute, un groupe cependant pense à une ellipse. Une manipulation est proposée avec des boules de polystyrène et le fil à couper le polystyrène.
Le résultat est validé par le professeur et admis par les élèves.
Pour touver le rayon, des élèves réalisent un dessin en vraie grandeur, mesurent et trouvent 3 cm. D'autres utilisent directement l'énoncé de Pythagore pour calculer x.



Les résultats découverts sont admis et validés par le professeur,
- une sphère a une infinité d'axes de symétrie et de plans de symétrie qui passent par le centre,
- une section de sphère par un plan perpendiculaire à un rayon est un cercle.

Activité 3 :
Pour construire la sphère en vraie grandeur, il est nécessaire de calculer le rayon des disques, pour cela les élèves se situent dans un plan perpendiculaire à l'équateur et utilisent l'énoncé de Pythagore.
L'orthogonalité de (OH) et (AH) est admis.



La construction de la sphère est achevée à la maison.
Ces activités ont intéressé vivement les élèves et les recherches furent fructueuses.

Ce qui a été noté à l'issue des activités :

Objectifs : je dois savoir :
- que la section d'une sphère par un plan est un disque et calculer son rayon,
- calculer l'aire et le volume d'une sphère.

Exercices (2 h.)
A l'exercice 1, les difficultés sont liées au calcul littéral.
La situation traduite par un dessin codé, la mise en équation est bien réalisée par un grand nombre d'élèves. Pour les autres les erreurs les plus fréquentes sont :

* $x^2 + (\frac{4}{5})^2 = R^2$ $\frac{4}{5}$ du rayon mal traduit

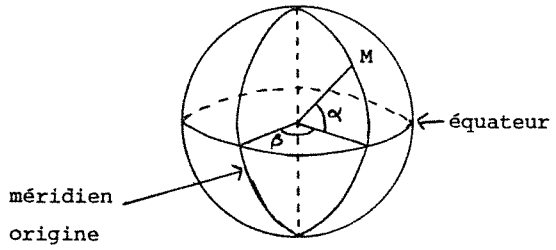
* $x^2 + \frac{4}{5} R^2 = R^2$ oubli des parenthèses $(\frac{4}{5} R)^2$

* $x^2 + \frac{9}{25} R = R^2$ $(\frac{4}{5} R)^2$ mal calculé R x R non vu encore comme R^2.

* $x^2 = R^2 - \frac{4}{5} R^2$ mal résolue car R^2 n'est pas vu comme 1 x R^2.

L'expression "en fonction de" semble encore mal maîtrisée par des élèves en difficulté.

Exercice 2 :
Deux difficultés majeures apparaissent dans cette partie :
- ramener une situation de l'espace à une situation plane (bon choix du plan sécant à la sphère),
- se repérer sur la sphère : comprendre que pour se repérer il faut :
* choisir 2 plans, l'un perpendiculaire à l'équateur, l'autre parallèle à l'équateur,
* savoir que 2 angles suffisent pour localiser un point.



α : par rapport à l'équateur (latitude)
β : par rapport au méridien origine (longitude).

A ces deux difficultés s'ajoute celle de comprendre les définitions données dans le dictionnaire et de les retrouver sur la sphère terrestre. Une explication collective est nécessaire.
Les sphères construites lors de l'activité 3 sont un support indispensable pour la compréhension de ces notions.

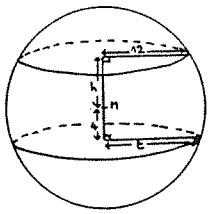
A la question b), une aide est nécessaire pour retrouver les 2 plans :
- le plan perpendiculaire à l'équateur (longueur du parallèle 40°)
- le plan parallèle à l'équateur pour l'écart angulaire de 55° et la distance entre les deux villes.

Exercices 4 - 5 :
Ces exercices permettent d'utiliser le calcul littéral et la mise en équation. Ces deux parties souvent rencontrées dans les exercices semblent mieux maîtrisées par les élèves.

Exercice 6 :
Pas de difficulté pour les calculs. Quelques erreurs sont rencontrées dans la réalisation du graphique.

TEST

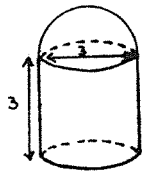
Ex 1 :
On coupe cette sphère de rayon 15 par deux plans parallèles à l'équateur. Le point **M** est le centre de la sphère.



a) Calcule **h**. Précise si cette valeur est exacte ou approchée.
b) Calcule **t**. Précise si cette valeur est excate ou approchée.

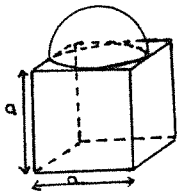
Ex 2 :
Archimède (-287 ; -212) disait que l'aire de la sphère est quatre fois l'aire d'un disque de même rayon. Qu'en penses-tu ? Prouve-le.

Ex 3 :



Ce solide est formé d'un cylindre et d'une demi-sphère.
Par un calcul, donne une valeur approchée au dixième du volume de ce solide.

Ex 4 :

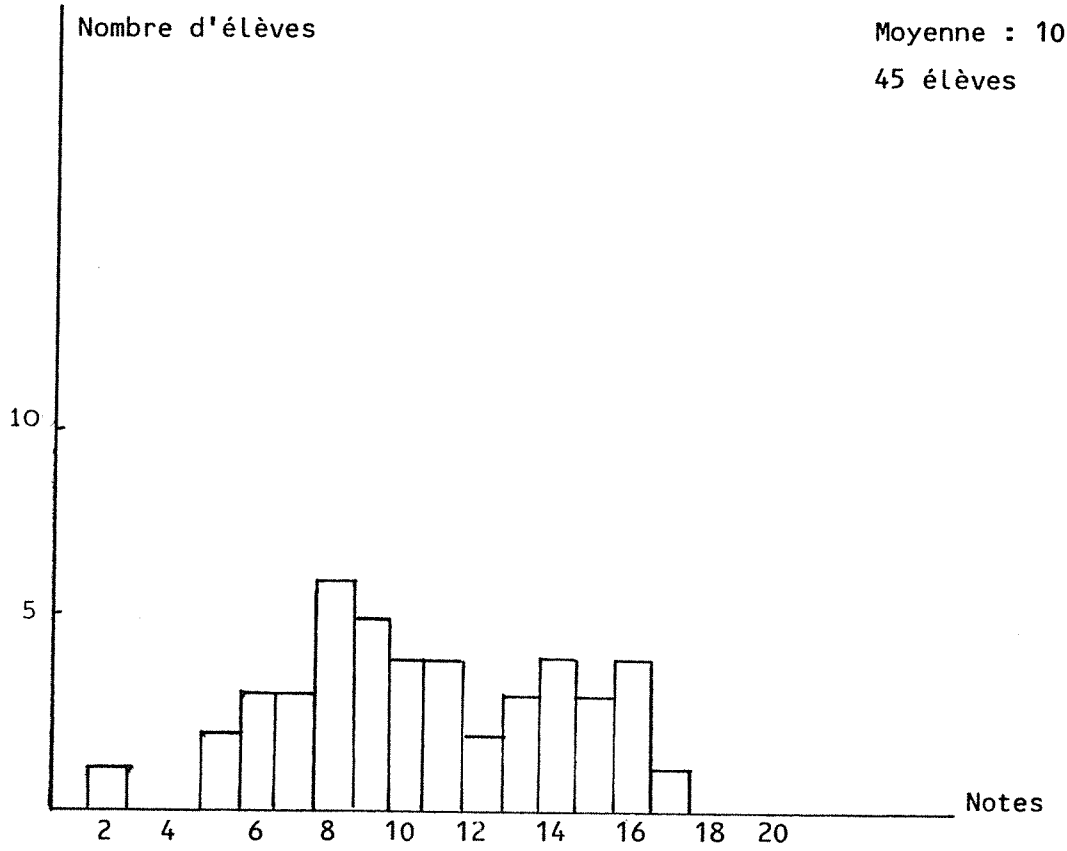


Ce solide est formé d'un cube et d'une demi-sphère.
Exprime son volume en fonction de a.

Ex 5 :
L'aire d'une sphère S_1 est 9 fois plus grande que l'aire d'une sphère S_2. Exprime le rayon R_1 de la sphère S_1 en fonction du rayon R_2 de la sphère S_2.

Ex 6 :
Le rayon d'une boule B_1 est 10^2 fois plus grand que celui d'une boule B_2. Montre que le volume de B_1 est un million de fois celui de B_2.

T E S T



Barême : Ex 1 : (5) - Ex 2 : (2) - Ex 3 : (4) - Ex 4 : (3) - Ex 5 : (3) Ex 6 : (3).

Les difficultés rencontrées sont dues principalement :
- à des confusions entre rayon et diamètre (exercices 3 et 4),
- à des calculs littéraux encore mal maîtrisés :

$(\frac{a}{2} = \frac{a3}{2})$

$(10^2\ R^2)^3 = 10^2\ R^{2^3}$

- à une mauvaise compréhension de l'expression "en fonction de",

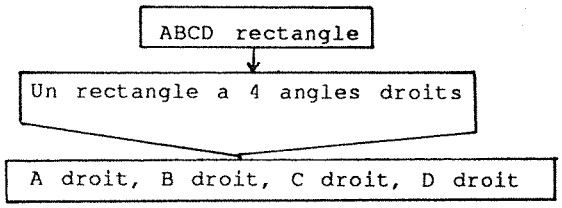
- à une mauvaise connaissance des formules de volume.

Remarque :
Il semble cependant que, même si des élèves se sont trompés entre rayon et diamètre, la connaissance de la sphère est acquise.
Le barême que nous avons adopté ne montre pas les acquisitions des élèves sur ce sujet, il pénalise les erreurs de calcul numérique ou littéral de manière importante.

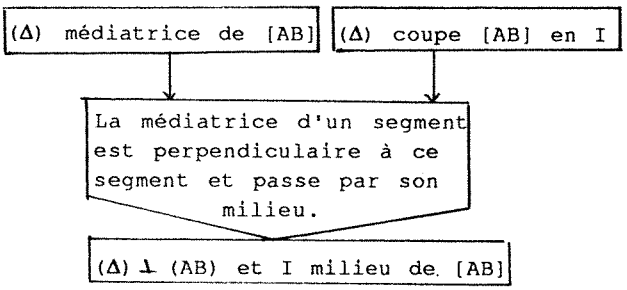
Annexe 1 Fiches "Comment démontrer que".*

COMMENT DEMONTRER QUE DEUX DROITES SONT PERPENDICULAIRES ?

1) En utilisant les angles d'un rectangle.



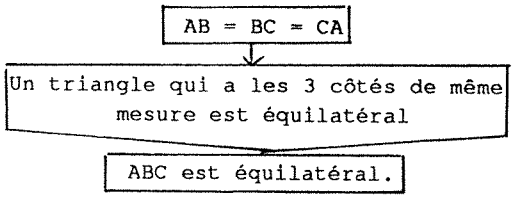
2) En utilisant la médiatrice d'un segment.



* Le fichier complet paraîtra dans le fascicule 2

COMMENT MONTRER QU'UN TRIANGLE EST EQUILATERAL ?

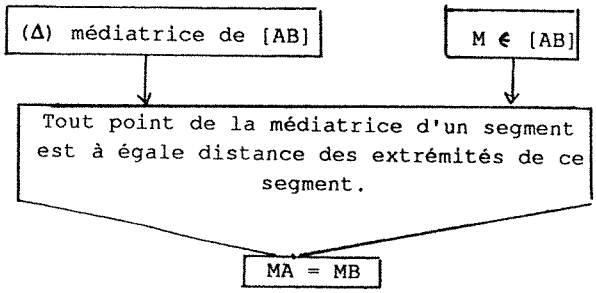
En montant qu'il a les 3 côtés de même mesure.



COMMENT MONTRER QUE 2 DISTANCES SONT EGALES ?

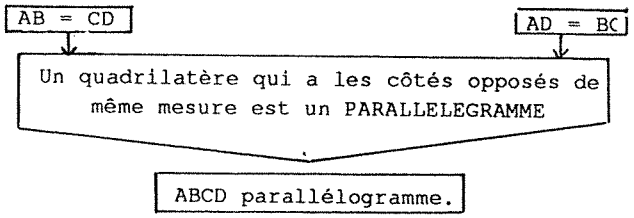
1) En calculant.

2) En utilisant la médiatrice d'un segment.

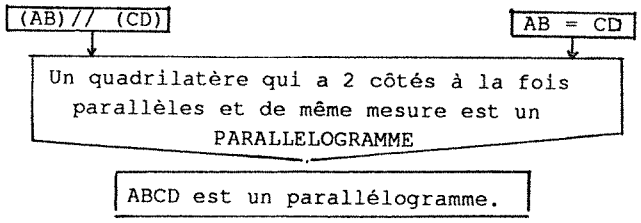


COMMENT DEMONTRER QU'UN QUADRILATERE EST UN PARALLELOGRAMME ?

1) En montrant qu'il a les côtés opposés de même mesure



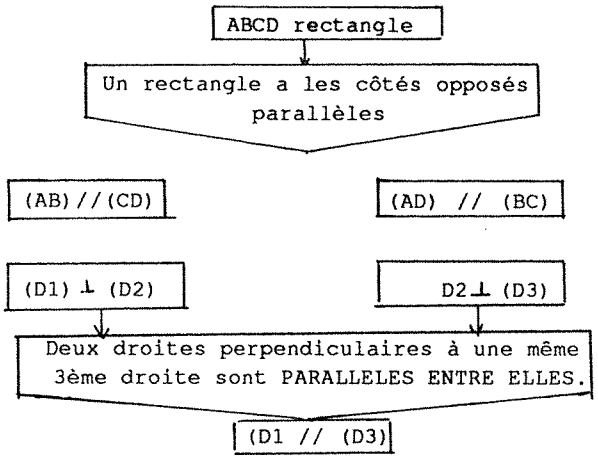
2) En montrant qu'il a deux côtés à la fois // et de même mesure.



COMMENT MONTRER QUE DEUX DROITES SONT PARALLELES ?

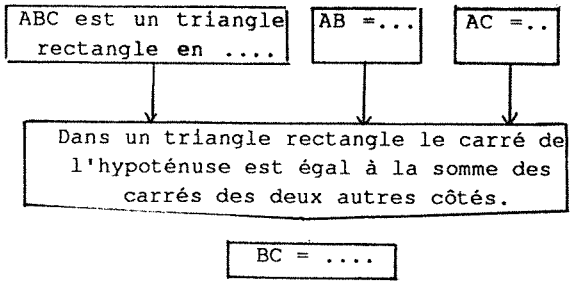
1) En utilisant les côtés opposés d'un rectangle.

2) En montrant qu'elles sont perpendiculaires à une même 3ème droite.

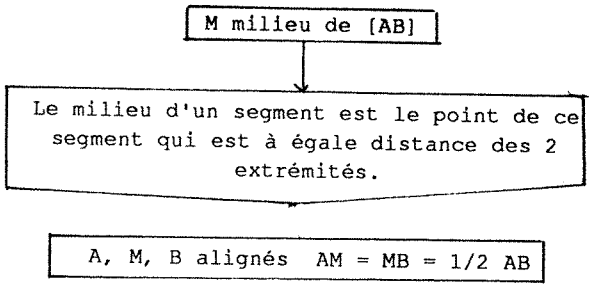


COMMENT CALCULER UNE LONGUEUR ?

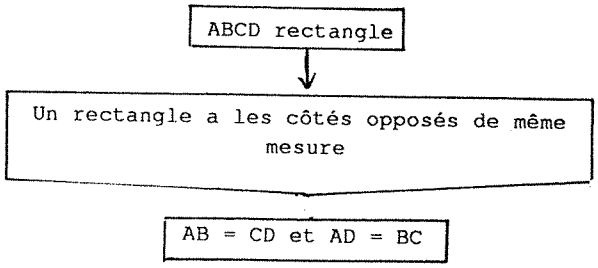
1) En utilisant l'énoncé de Pythagore



2) En utilisant le milieu d'un segment.

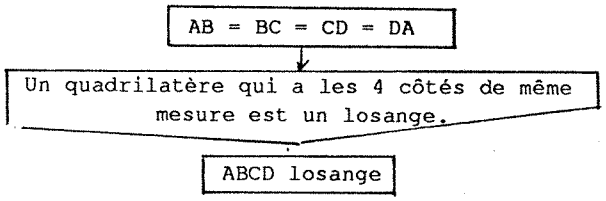


3) En utilisant les côtés opposés d'un rectangle.

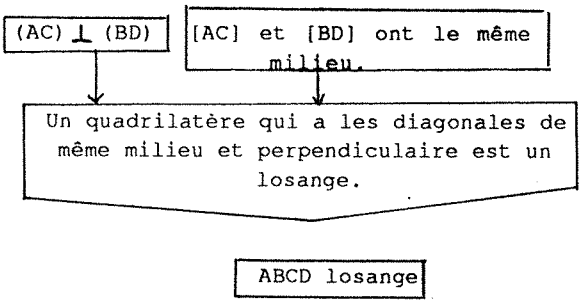


COMMENT MONTRER QU'UN QUADRILATERE EST UN LOSANGE ?

1) En montrant qu'il a 4 côtés de même mesure.

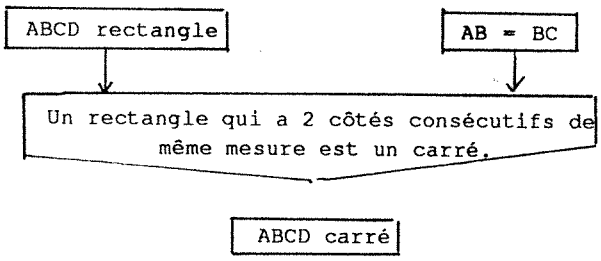


2) En montrant qu'il a les diagonales de même milieu et perpendiculaires.



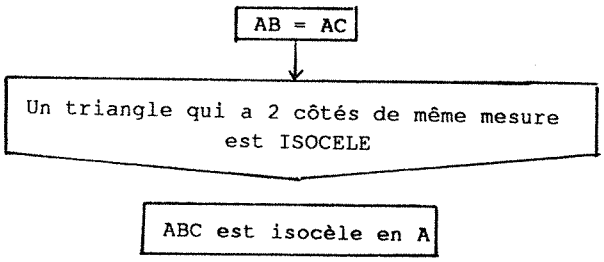
COMMENT DEMONTRER QU'UN QUADRILATERE EST UN CARRE ?

1) En montrant que c'est un rectangle qui a 2 côtés consécutifs de même longueur.



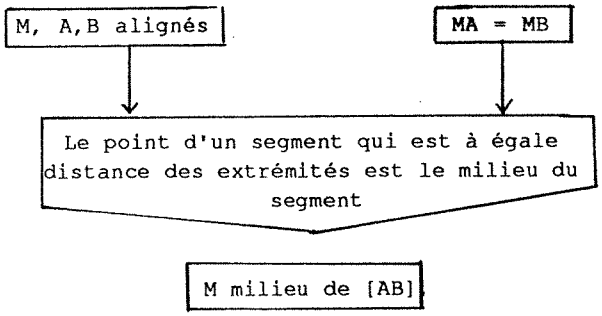
COMMENT DEMONTRER QU'UN TRIANGLE EST ISOCELE ?

1) En montrant qu'il a deux côtés de même mesure.



COMMENT MONTRER QU'UN POINT EST MILIEU D'UN SEGMENT ?

1) En montrant qu'il est sur le segment et à égale distance des extrémités.



Auteurs : *D. GAUD - J P. GUICHARD - M. MAROT - C. ROBIN - M. ROBIN.*

Titre : Géométrie de 4ème.
Fascicule 1
* Initiation à la démonstration
* Calculs d'éléments métriques

Editeur : IREM de Poitiers

Date : Mai 1988

Niveau : Collège

Mots-clé : Histoire des mathématiques - Démonstration, Expérimentation, Pythagore, Cosinus, Sphère, Apprentissage de la démonstration.

Résumé : La première partie de ce fascicule est une réflexion sur la notion de démonstration. Celle-ci est étayée par une analyse historique et une analyse du fonctionnement actuel des praticiens des mathématiques. Suite à cette réflexion des conséquences didactiques sont tirées et une démarche pour l'apprentissage de la démonstration au collège est élaborée. Dans la deuxième partie nous proposons une mise en oeuvre commentée de cette démarche en classe de 4ème (mise en oeuvre complétée avec la fascicule 2). Les contenus abordés sont : théorème de Pythagore, cosinus et sphère.

Premier tirage : 800 exemplaires.

IREM - 40, avenue du Recteur Pineau - 86022 POITIERS **ISBN 2-85954-020-2**