UNIVERSITE de POITIERS

Institut de Recherche
sur l'Enseignement des Mathématiques

Avril 1988

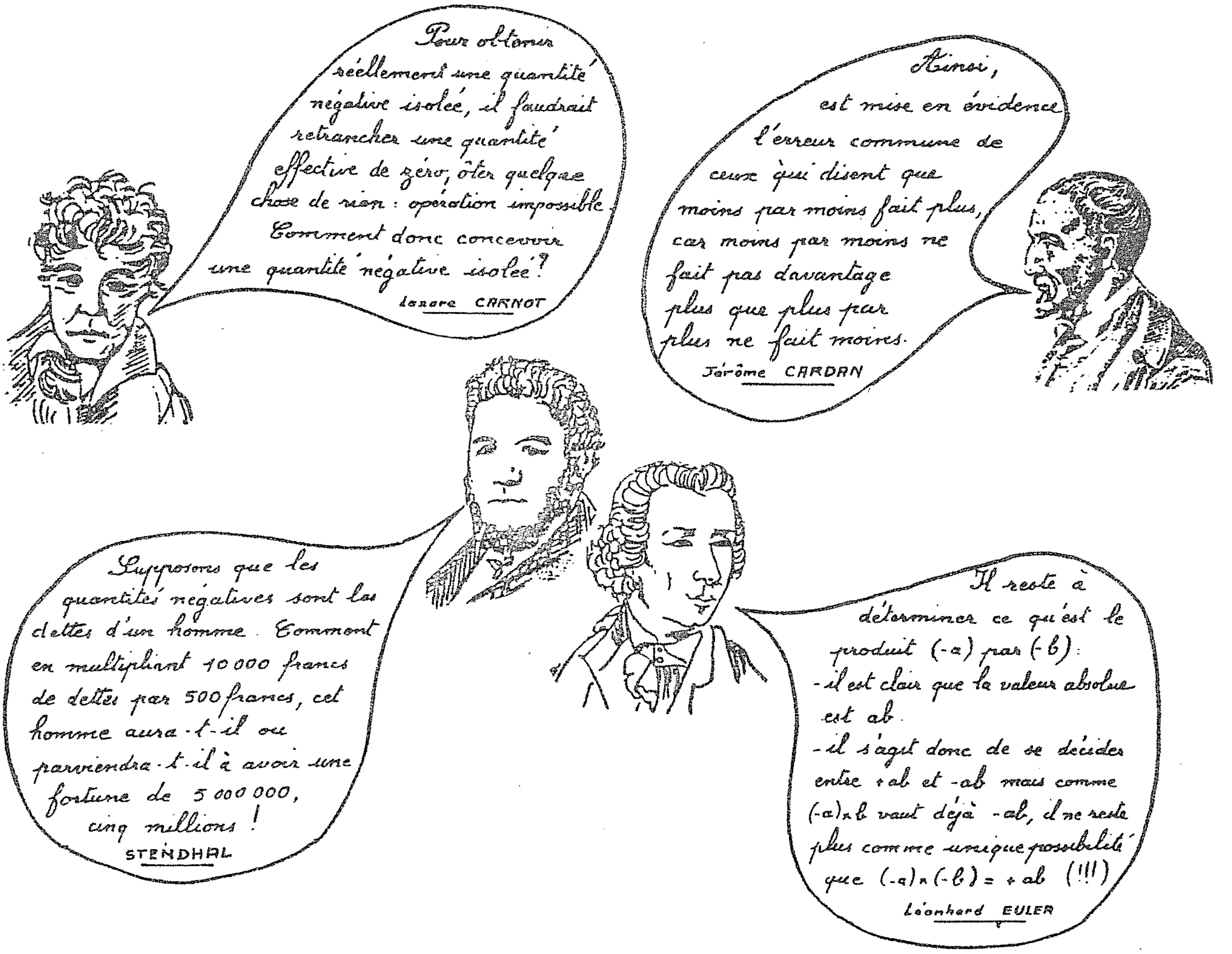
TRAVAUX NUMERIQUES en 4ème

Fascicule 1

HISTOIRE DES RELATIFS

CALCUL NUMERIQUE

COMPTE RENDU DE L'EXPERIMENTATION DES NOUVEAUX PROGRAMMES



GAUD D. - GUICHARD J.P. - MAROT M. - ROBIN C. - ROBIN M.

A V E R T I S S E M E N T

Ce document s'adresse aux enseignants de mathématiques et plus précisément aux professeurs de collège.

Ce document comporte deux volets :

- un volet historique,
- une mise en oeuvre en classe de 4ème en liaison avec l'expérimentation des nouveaux programmes.

Le premier volet ne peut pas être que culturel. Pour comprendre pleinement les difficultés d'une notion, pour bâtir une progression réfléchie d'une notion on ne peut ignorer les événements historiques qui mènent à la découverte de cette notion.

S O M M A I R E

APERCU HISTORIQUE SUR LES NOMBRES RELATIFS

APERCU HISTORIQUE SUR LES NOMBRES RELATIFS

1 - L'USAGE DES RELATIFS

Ce qui est à noter en premier est une énorme différence due à un fait de civilisation.

1. En Chine

Les Chinois ont utilisé depuis le 1er siècle de notre ère les nombres négatifs pour faire leurs calculs et résoudre des équations [1] ; ces nombres ne leur posent aucun problème : ils sont représentés par des baguettes noires et les positifs par des baguettes rouges que l'on manipule sur un échiquier pour résoudre tous les problèmes. Les règles de manipulation des nombres relatifs (addition, soustraction, multiplication) sont connues et utilisées constamment pour résoudre des systèmes d'équations à plusieurs inconnues [2].

2. En Inde

Les Indiens ont aussi très tôt utilisé les négatifs pour résoudre leurs équations. Au VIIème siècle Bhramagupta donne la règle suivante "une dette retranchée de zéro devient un bien et un bien retranché de zéro devient une dette" [3] .

3. En Occident

Les nombres négatifs apparaissent vers la fin du XVème siècle et au XVIème siècle, en même temps que les nombres complexes, chez des mathématiciens qui s'intéressent aux équations et à leurs racines : par exemple Chuquet (Triparti en la science des nombres 1484), Cardan (Ars Magna 1545),(voir [4]).

Mais d'autres mathématiciens de la même époque ou postérieurs, tel Viète, ne donnent pour les équations que des racines positives. D'autre part les règles de calcul sur ces nombres sont connues au XVème siècle et on les trouve déjà chez Diophante (vers 325-410) mais il s'agit en fait le plus souvent de règles de calcul "algébrique" concernant des quantités ou des grandeurs que l'on ajoute ou retranche et non de nombres positifs ou négatifs, comme le montrent les textes suivants de Cardan et Arnauld :

Définition X.

C'est un simple conseil de ne pas confondre les quantités défaillantes avec les quantités abondantes. Il faut ajouter entre elles les quantités abondantes, ajouter entre elles aussi les quantités défaillantes, et retrancher les quantités défaillantes des quantités abondantes, mais en tenant compte des espèces, c'est-à-dire n'opérer que sur les *semblables*; combiner les nombres entre eux; aussi les carrés; de même les cubes, etc.

Définition IX.

La multiplication de deux (quantités) défaillantes produit une (quantité) abondante; et la multiplication d'une (quantité) défaillante par une (quantité) abondante produit une (quantité) défaillante.

[5] .

SOVSTRACTION DES GRANDEURS COMPLEXES.

POUR soustraire une grandeur complexe d'une autre grandeur ou complexe ou incomplexe, il ne faut que l'y joindre en changeant tous les signes de la grandeur qu'on soustrait, & observant toûjours que le signe affirmatif est sous-entendu où il n'y en a point.

De $b + c.$ oster $m + n.$ } reste $b + c - m - n.$

De $b + c.$ oster $m - n + o.$ } reste $b + c - m + n - o.$

IL n'est pas difficile de juger pourquoy on change le *plus* sous-entendu en *moins* dans le premier terme de la grandeur à soustraire : car c'est en cela même que consiste la soustraction. Mais d'abord on est surpris de ce qu'il faut changer les signes des autres termes de *plus* en *moins* & de *moins* en *plus*. Et neanmoins cela est assez facile à comprendre, si on considere que pour oster *m moins p*, il ne faut pas oster *m* tout seul ; car ce seroit trop oster de *p* (puisque *m* est plus grand que *m* moins *p*) & ainsi ayant osté *m* parce qu'on a trop osté, il faut ajoûter *p* qui est ce qu'on a osté de trop. D'où il s'ensuit qu'il faut changer le signe de *moins* qui estoit avant *p*, & qui faisoit qu'en ostant *m* on ostoit trop, au signe de *plus* qui remet ce *p* qu'on avoit osté de trop.

Et par la même raison il faut changer en *moins* le signe de *plus* qui estoit avant *o*, parce qu'on n'osteroit pas assez si on ostoit cet *o* ; ce qui se fait en l'affectant du signe *moins* $- o.$ [6]

Note : les grandeurs complexes n'ont rien à voir avec les nombres complexes. Il s'agit en fait de grandeurs "composées" terminologie que l'on retrouve en arithmétique élémentaire où des expressions telles que 3h 20 mn 32 s sont appelées nombres complexes.
Voici la définition donnée par Arnauld [6] des grandeurs complexes et incomplexes.

XXXVII. IE les appelle *incomplexes* quand on considere une grandeur d'une ou de plusieurs dimensions à part, comme *b*, ou *c d*, ou *m n o*, sans y rien ajoûter ou en rien oster.

XXXVIII. ET je les appelle *complexes* quand on y en joint d'autres de mesme genre par un *plus* ou un *moins*, ou qu'on marque par un chiffre que la même grandeur se doit prendre plusieurs fois, comme $b + c$, ou $b + c + d$, ou $b + f - g$, ou $b c. + f g$, ou $b c + f g, - m n.$

Ou par des chiffres 3 *b*.

A partir de Viète (1541-1603) le calcul "algébrique" c'est-à-dire littéral va se développer et aux XVII et XVIIIème siècles, avec l'essor du calcul infinitésimal ses règles sont parfaitement maîtrisées mais elles ne concernent que des quantités positives au sens où les lettres ne représentent pas des quantités négatives. C'est ce qui apparaît clairement dans ce texte du Marquis de l'Hopital [7] .

REMARQUE.

8. Il eſt à propos de bien remarquer que l'on a toujours ſuppoſé en prenant les différences, qu'une des variables x croiſſant, les autres y, z, &c. croiſſoient auſſi ; c'eſt à dire que les x devenant $x + dx$, les y, z, &c. devenoient $y + dy$, $z + dz$, &c. C'eſt pourquoi s'il arrive que quelques unes diminuent pendant que les autres croiſſent, il en faudra regarder les différences comme des quantités négatives par rapport à celles des autres qu'on ſuppoſe croître, & changer par conſéquent les ſignes des termes où les différences de celles qui diminuent ſe rencontrent. Ainſi ſi l'on ſuppoſe que les x croiſſant, les y & les z diminuent, c'eſt à dire que les x devenant $x + dx$, les y & les z deviennent $y - dy$ & $z - dz$, & que l'on veuille prendre la difference du produit xyz ; il faudra changer
* Art. 5. dans la différence $xydz + xzdy + yzdx$ trouvée *, les ſignes des termes où dy & dz ſe rencontrent : ce qui donne $yzdx - xydz - xzdy$ pour la différence cherchée.

Donc ce ne sont pas des nombres relatifs qui sont utilisés contrairement à ce qui s'est passé en Chine et en Inde, les nombres négatifs ne sont utilisés que par certains mathématiciens dans la résolution des équations. En voici un exemple chez Albert Girard dans son Invention Nouvelle en Algèbre (1629), extrait de [4] où il résoud $x^3 = 300x + 432$ puis donne la solution "oubliée" par Viète son contemporain à propos de l'équation $124x - x^3 = 240$. Notez au passage que Viète n'écrira jamais $-x^3 + 124x = 240$ une telle équation.
(faction = coefficients et nous noterions (3), (2), (1) : x^3 , x^2, x).

(Folio F recto). — Item 1 (3) esgale à 300 (1) + 432, laquelle remise en ordre alterne ce sera 1 (3) — 300 (1) esgales à 0(2) + 432; les factions seront 0, — 300, 432 : donc trouvons trois nombres & c. Or l'un est 18; donc la somme des deux autres sera — 18, & leur produit 24; parquoy 1 (2) sera esgale à — 18 (1) — 24, les deux solutions seront $-9+\sqrt{57}$ & $-9-\sqrt{57}$, puis l'autre cy-dessus 18 feront les trois solutions requises : de mesme si 1 (4) est esgale à 4 (1) — 3, alors les quatre factions seront 0, 0, 4, 3, & partant les quatre solutions seront

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ -1+\sqrt{-2} \\ -1-\sqrt{-2} \end{array}$$

(Notez que le produit des deux derniers est 3) :

> (Folio F verso). — Touchant François Viete, qui surpasse tous ses devanciers en l'algebre; /- . . / il ne trouve que deux solutions (comme aussi en beaucoup de lieu dans ses livres) soit dit-il 124 (1) — 1 (3) esgale à 240 : Il ne trouve que 2 & 10, & je trouve encor — 12, car voicy les factions 0, — 124, — 240.

Mais leur utilisation est sujette à de nombreuses controverses, comme nous le verrons par la suite (quant à leur droit à l'existence et à la validité de certaines règles de calcul les concernant) jusqu'au milieu du XIXème siècle où alors ils acquièrent un statut à égalité avec les nombres positifs en particulier avec les travaux de Hankel (1867). Mais il faudra encore un siècle pour que leur usage se répande, en physique notamment [8] .

4. Conclusion

Cette brève perspective montre que la pratique et l'utilisation des nombres relatifs ont été bien antérieures à leur définition comme pour beaucoup d'autres notions mathématiques. D'autre part ces nombres, concrets pour les orientaux, "faux" pour les occidentaux [voir § 2.3.] sont apparus comme outil de calcul facilitant la résolution des équations pour lesquelles on ne retenait que les solutions positives. Il s'agit donc d'un outil théorique et algébrique. D'ailleurs dans les manuels scolaires du XXème siècle, jusqu'à une époque assez récente, les nombres positifs et négatifs étaient classés dans la partie algèbre et portaient le nom de **nombres algébriques**, (cf par exemple [9] - [10] - [11]). Ils sont aussi intimement associés à la notion de mesure algébrique.

<u>Note</u> : l'utilisation des nombres relatifs dans la vie pratique comme outil de codage (graduation d'une droite) n'a commencé qu'au XVIIIème siècle avec l'invention du thermomètre, mais il est à noter que Fahrenheit a choisi sa graduation pour éviter des températures négatives, et si Réaumur en 1732 choisit 0 pour point de fusion de la glace il faudra attendre un siècle pour que l'on s'habitue à l'expression de température au-dessous de zéro (cf. [8]).

[2]- LES OBSTACLES A LA COMPREHENSION DES RELATIFS

1. Zéro absolu - zéro relatif

Un premier obstacle est que le zéro est une limite infranchissable : en dessous de "rien", il ne peut rien y avoir.
Voici ce que dit Lazare Carnot (1753-1823), membre de l'Académie des Sciences :

> Pour obtenir réellement une quantité négative isolée, il faudrait retrancher une quantité effective de zéro, ôter quelque chose de rien : opération impossible. Comment donc concevoir une quantité négative isolée ?

(Géométrie de position 1803) (cf. [8] ou [12]).

> Avancer qu'une quantité négative isolée est moindre que 0, c'est couvrir la science des mathématiques, qui doit être celle de l'évidence, d'un nuage impénétrable et s'engager dans un labyrinthe de paradoxes tous plus bizarres les uns que les autres : dire que ce n'est qu'une quantité opposée aux quantités positives, c'est ne rien dire du tout parce qu'il faut expliquer ensuite ce que c'est que ces quantités opposées, recourir pour cette expression à de nouvelles idées premières semblables à celles de la matière, du temps et de l'espace, c'est déclarer qu'on regarde la difficulté comme insoluble, et c'est en faire naître de nouvelles, car si l'on me donne pour exemple de quantités opposées, un mouvement vers l'orient et un mouvement vers l'occident, ou un mouvement vers le nord et un mouvement vers le sud, je demanderai ce que c'est un mouvement vers le nord-est, vers le nord-ouest, vers le sud-sud-ouest, etc., et de quels signes ces quantités devront être affectées dans le calcul.
>
> *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, 1797. [12]

De son côté F.C. Busset, auteur d'un manuel très utilisé au milieu du XIXème siècle, fait porter l'échec de l'enseignement des mathématiques en France sur l'admission des quantités négatives. Il est choqué que l'on discute de savoir "s'il existe des quantités plus petites que rien". Pour lui, c'est "le comble de l'aberration de la raison humaine" et il critique Euler (sic) d'avoir admis de telles quantités [13] .

Voyez aussi l'article Négatif de d'Alembert au paragraphe 6.

2. Nature des négatifs

Comme on vient de le voir l'existence des nombres négatifs est niée : ce ne sont pas des nombres. D'ailleurs à la rubrique "nombre" des dictionnaires et encyclopédies ("Ozanam - 1691, Trévoux - 1743, d'Alembert - 1789) ne figure jamais le qualificatif négatif ou positif. Les nombres ne peuvent être que "positifs". Ce sont les quantités qui peuvent être négatives ou positives, comme le dit Cauchy dans son Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique (P. 102-103) (1821).

> Nous prendrons toujours la dénomination de *nombres* dans le sens où on l'emploie en Arithmétique, en faisant naître les nombres de la mesure absolue des grandeurs, et nous appliquerons uniquement la dénomination de *quantités* aux quantités *réelles positives* ou *négatives*, c'est-à-dire aux nombres précédés des signes + ou −. De plus, nous regarderons les quantités comme destinées à exprimer des accroissements ou des diminutions; en sorte qu'une grandeur donnée sera simplement représentée par un nombre, si l'on se contente de la comparer à une autre grandeur de même espèce prise pour unité, et par ce nombre précédé du signe + ou du signe −, si on la considère comme devant servir à l'accroissement ou à la diminution d'une grandeur fixe de la même espèce. Cela posé, le signe + ou − placé devant un nombre en modifiera la signification, à peu près comme un adjectif modifie celle du substantif. Nous appellerons *valeur numérique* d'une quantité le nombre qui en fait la base, quantités *égales* celles qui ont le même signe avec la même valeur numérique, et quantités *opposées* deux quantités égales quant à leurs valeurs numériques, mais affectées de signes contraires. (cité aussi dans [8]).

Si Cauchy donne des règles de calcul sur les quantités négatives isolées (cf.3.7), par contre 45 ans plus tard, il y a à peine un peu plus d'un siècle, Duhamel, professeur aussi à l'Ecole Polytechnique, écrit en 1866 :

> *Toute démonstration de règles sur les quantités négatives isolées, ne peut être qu'une illusion, puisqu'il n'y a aucun sens à attacher à des opérations arithmétiques sur des choses qui ne sont pas des nombres, et n'ont aucune existence réelle.* [8] .

3. Interprétation des racines négatives d'une équation

Où les négatifs auraient davantage le statut de nombre c'est comme racines d'équations. Mais là encore on ne parle pas de nombre mais de racine et qui plus est de racine fausse.

> Quelles sont les fausses racines.
>
> Mais souuent il arriue, que quelques vnes de ces racines sont fausses, ou moindres que rien. comme si on suppose que x designe aussy le defaut d'vne quantité, qui soit 5, on a $x + 5 \,\infty\, 0$, qui estant multipliée par $x^3 - 9xx + 26x - 24 \,\infty\, 0$ fait
>
> $$x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \,\infty\, 0$$
>
> pour vne equation en laquelle il y a quatre racines, a sçauoir trois vrayes qui sont 2, 3, 4, & vne fausse qui est 5.

[14] ou [12]

On peut remarquer que Descartes parle d'une racine fausse qui est 5, pas de -5. On peut faire la même remarque dans la suite où Descartes donne le moyen de faire que les "fausses" racines deviennent vraies :

> De plus il eſt ayſé de faire en vne meſme Equation, que toutes les racines qui eſtoient fauſſes deuienent vrayes, & par meſme moyen que toutes celles qui eſtoiẽt vrayes deuienent fauſſes : a ſçauoir en changeant tous les ſignes + ou -- qui ſont en la ſeconde, en la quatrieſme, en la ſixieſme, ou autres places qui ſe deſignent par les nombres pairs, ſans changer ceux de la premiere, de la troiſieſme, de la cinquieſme & ſemblables qui ſe deſignent par les nombres impairs. Comme ſi au lieu de
>
> $+x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \propto 0$
>
> on eſcrit
>
> $+x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 \propto 0$
>
> on a vne Equation en laquelle il n'y a qu'vne vraye racine, qui eſt 5, & trois fauſſes qui ſont 2, 3, & 4.
>
> Cõment on fait que les fauſſes racines d'vne Equation deuienẽt vrayes, & les vrayes fauſſes.

[14] .

On peut aussi remarquer dans le texte suivant que Descartes ne raisonne que sur les "valeurs absolues" et pour lui quand on ajoute 3 à la racine 5 celle-ci augmente mais quand on ajoute 3 à -4 on obtient -1 et la racine fausse 4 a diminué. A noter aussi 1 qui est une racine vraie et une fausse qui est aussi 1.

> Cõment on peut augmenter ou diminuer les racines d'vne Equation, ſans les connoiſtre.
>
> Que ſi ſans connoiſtre la valeur des racines d'vne Equation, on la veut augmenter, ou diminuer de quelque quantité connuë, il ne faut qu'au lieu du terme inconnu en ſuppoſer vn autre, qui ſoit plus ou moins grand de cete meſme quantité, & le ſubſtituer par tout en la place du premier.
>
> Comme ſi on veut augmenter de 3 la racine de cete Equation
>
> $x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 \propto 0$
>
> il faut prendre y au lieu d'x, & penſer que cete quantité y eſt plus grande qu'x de 3, en ſorte que $y - 3$ eſt eſgal a x, & au lieu d'xx, il faut mettre le quarré d'$y - 3$ qui eſt $yy - 6y + 9$ & au lieu d'x^3 il faut mettre ſon cube qui eſt $y^3 - 9yy + 27y - 27$, & enfin au lieu d'x^4 il faut mettre ſon quarré de quarré qui eſt $y^4 - 12y^3 + 54yy - 108y + 81$.

Et il eſt a remarquer qu'en augmentant les vrayes racines d'vne Equation, on diminue les fauſſes de la meſme quantité; ou au contraire en diminuant les vrayes, on augmente les fauſſes. Et que ſi on diminue ſoit les vnes ſoit les autres, d'vne quantité qui leur ſoit eſgale, elles deuienent nulles, & que ſi c'eſt d'vne quantité qui les ſurpaſſe, de vrayes elles deuienent fauſſes, ou de fauſſes vrayes. Comme icy en augmentant de 3 la vraye racine qui eſtoit 5, on a diminué de 3 chaſcune des fauſſes, en ſorte que celle qui eſtoit 4 n'eſt plus qu'1, & celle qui eſtoit 3 eſt nulle, & celle qui eſtoit 2 eſt deuenue vraye & eſt 1, a cauſe que $- 2 + 3$ fait $+ 1$. c'eſt pourquoy en cete Equation $y^3 - 8yy - 1y + 8 \infty 0$ il ny a plus que 3 racines, entre leſquelles il y en a deux qui ſont vrayes, 1, & 8, & vne fauſſe qui eſt auſſy 1. & en cete autre

Qu'en augmentant les vrayes racines on diminue les fauſſes, & au contraire.

$$y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 \infty 0$$

il n'y en a qu'vne vraye qui eſt 2, a cauſe que $+ 5 - 3$ fait $+ 2$, & trois fauſſes qui ſont 5, 6, & 7. [14]

En fait ces solutions négatives vont poser des problèmes aux mathématiciens car il faut alors les interpréter. Par exemple Lacroix dans ses Eléments d'Algèbre de 1800 tout comme Clairaut dans ses Elémens d'Algèbre de 1768 dit "toute solution négative marque que la quantité cherchée doit être prise dans un sens opposé à celui dans lequel elle l'a été d'abord" [13].

Mais (voir [13]) dans la septième édition de son livre en 1808 il qualifie les solutions négatives d'absurdes. Voici ce qu'il dit à propos de $60 + 7y = 46$: "la seule inspection de cette équation y fait reconnaître une absurdité. En effet, il n'est pas possible de former le nombre 46 en ajoutant quelque chose au nombre 60, qui seul surpasse déjà 46".

Il est intéressant de voir ce qu'il en est dans un traité d'Algèbre à l'usage des élèves des lycées dû à E. Tombeck (1878) (pages reproduites dans [15]).

On pourra noter la phrase "on les admet dans les calculs, bien qu'elles n'aient aucun sens par elles-mêmes" et le fait qu'on transfère les règles de calcul des polynômes aux quantités négatives.

142. On arrive souvent, en appliquant les règles précedemment données pour la résolution des équations, à des expressions de la forme -5, $-\frac{2}{3}$. Ces expressions, appelées des *quantités négatives*, sont formées de quantités arithmétiques que l'on appelle leurs *valeurs absolues*, précédées du signe —. Comme les symboles singuliers que nous avons déjà rencontrés, on les admet dans les calculs, bien qu'elles n'aient aucun sens par elles-mêmes, et elles fournissent à l'algèbre un des plus puissants moyens de généralisation dont elle dispose.

Par opposition aux quantités négatives, les quantités ordinaires ou arithmétiques, prennent le nom de *quantités positives.*

— Nous allons voir d'abord comment les quantités négatives se présentent dans les problèmes ; nous verrons ensuite quelles règles on leur applique, et quel usage on en fait, en les introduisant dans les calculs.

Usage des quantités négatives dans les problèmes.

143. 1er EXEMPLE. Proposons-nous ce problème, déjà résolu sur d'autres données :

Un père avait 58 ans en 1850; *son fils en avait* 30. *A quelle époque l'âge du père a-t-il été double de l'âge du fils?*

L'énoncé ne nous apprend pas si l'époque cherchée est antérieure ou postérieure à 1850. Supposons-la postérieure, et soit x le nombre d'années écoulées depuis 1850 jusqu'à cette époque.

x années après 1850, l'âge du père était $58+x$, l'âge du fils $30+x$, et d'après l'énoncé, l'on doit avoir :

$$2(30+x)=58+x. \qquad [a]$$

En résolvant cette équation, nous trouvons successivement :

$$60+2x=58+x,$$

$$2x-x=58-60,$$

$$x=58-58-2,$$

$$x=-2.$$

Ce résultat privé de sens nous apprend, non pas que le problème proposé est impossible, mais bien que nous avons eu tort de supposer l'époque inconnue postérieure à 1850.

Supposons-la donc antérieure, et soit x' le nombre d'années qui la séparent de 1850. A cette époque, l'âge du père était $58-x'$, l'âge du fils $30-x'$, et en vertu de l'énoncé, l'on doit avoir :

$$2(30-x')=58-x'. \qquad [b]$$

Résolvant cette équation, on trouve successivement :

$$60-2x'=58-x',$$

$$60-58=2x'-x',$$

$$x'=2.$$

Ainsi l'époque cherchée est arrivée deux ans avant 1850.

— Nous pouvons tirer de ce qui précède cette première conséquence :

Quand l'inconnue d'un problème est susceptible d'être comptée en deux sens, si, en résolvant le problème, on arrive à une quantité négative, on est averti par là, au moins en général, qu'on doit changer le sens attribué à cette inconnue dans la mise en équation.

144. Nous pouvons observer de plus que la vraie solution $x'=2$, du problème précédent, n'est autre chose que la quantité négative trouvée en premier lieu, prise en valeur absolue. Or ce n'est pas par hasard que ce fait se présente, et il devait nécessairement en être ainsi.

Pour le faire voir, nous remarquerons d'abord que la quantité négative -2, est solution de l'équation [a] qui l'a fournie, c'est-à-dire qu'en remplaçant x par -2 dans cette équation [a], on obtiendra une égalité vérifiée, pourvu que l'on convienne d'appliquer à cette quantité négative -2, les mêmes règles de calcul qu'aux termes soustractifs des polynomes.

Si en effet nous nous reportons à la suite des calculs faits pour résoudre cette équation, nous voyons que -2 satisfait à l'équation finale $x=-2$, puisqu'en y mettant -2 au lieu de x, on obtient l'égalité évidente $-2=-2$; par suite, -2 satisfait aux précédentes qui n'en diffèrent que par des réductions ou des inversions de termes. Par suite enfin, -2 satisfait à la première de ces équations, c'est-à-dire à l'équation [a].

Si donc, en substituant -2 à x dans l'équation [a], on lui satisfait, on lui satisfera en substituant $-x'$ au lieu de x, et en faisant après coup $x'=2$. Or, si dans l'équation [a], on met $-x'$ au lieu de x, elle devient :

$$2(30-x')=58-x',$$

c'est-à-dire précisément l'équation [b]. Cette équation [b] devait donc bien admettre la solution $x'=2$.

On déduit de là cette seconde conséquence :

Après qu'on a été averti, par la valeur négative obtenue pour x, *que l'on s'est trompé sur le sens attribué à cette inconnue dans la mise en équation, il n'est pas nécessaire de remettre le problème en équation. Il suffit, au moins le plus souvent, en même temps que l'on compte l'inconnue en sens inverse, de prendre pour sa valeur, la valeur absolue de la quantité négative trouvée d'abord.*

C'est en ce sens que l'on peut dire que $x=-2$ fournit la vraie solution du problème précédent.

D'ailleurs la comparaison de l'équation [b] à l'équation [a], montre que, pour avoir l'équation rectifiée du problème, il suffit de changer x en $-x'$, ou, ce qui revient au même, x en $-x$ dans l'équation primitive.

Pour terminer voici un exemple de manipulation de nombres négatifs à propos de la solution numérique d'une équation à partir de son expression littérale extraite des <u>Elemens d'Algèbre</u> de Clairaut (1768)

Exemple de l'usage des quantités connues faites négatives.

Première

LXIV.

Qu'on se propose, par exemple, de trouver quelles doivent être, dans le Problême précédent, les dépenses des deux sources, pour que la seconde fournissant de l'eau pendant six jours, tandis que la seconde en dérobe pendant trois jours, un réservoir de 180 muids soit rempli; & que la premiere source ensuite fournissant de l'eau pendant 3 jours, & la seconde pendant 4 jours, un réservoir de 320 muids soit rempli.

On n'aura qu'à faire dans la solution générale $a = 180$, $b = -3$, $c = 6$, $d = 320$, $e = 3$, $f = 4$.

Et l'on aura $dc = 1920$, $af = 720$, $ce = 18$, $bf = -12$, $ae = 540$, $db = -960$, & par conséquent $dc - af = 1200$, $ce - bf = 30$, $ae - db = 1500$, qui donnent $x = \frac{dc - af}{ce - bf} = 40$ & $y = \frac{ae - db}{ce - bf} = 50$, par lesquelles on apprend que la dépense de la premiere source est de 40 muids par jour, soit pour dérober comme elle fait dans la premiere opération; soit pour fournir, ainsi qu'il arrive dans la seconde; & que la dépense de la seconde est de 50 muids par jour qu'elle fournit dans chacune des deux opérations. Il étoit si naturel d'imaginer que b devoit être négatif dans cette application, & si aisé de s'en assurer en remontant à l'usage qu'on fait de cette lettre, en exprimant les conditions du Problême, qu'il est inutile de s'arrêter à le faire voir.

de

[16].

4. Les règles de calcul

Un des obstacles à l'adoption des nombres négatifs est le non fonctionnement de certaines règles connues pour les "positifs" et **considérées comme universelles** c'est-à-dire devant s'appliquer à tous les nombres.

En voici un exemple chez Carnot dans son ouvrage **La géométrie de position** (1803) :

"Soit cette proportion 1 : -1 :: -1 : 1 ; si la notion combattue était exacte, c'est-à-dire, si -1 était moindre que 0, à plus forte raison serait-il moindre que 1 ; donc le second terme de cette proportion devrait être moindre que le premier ; donc le quatrième devrait être moindre que le troisième ; c'est à dire, que 1 devrait être moindre que -1 ; donc -1 serait tout ensemble moindre et plus grand que 1 ; ce qui est contradictoire....

Une multitude de paradoxes ou plutôt d'absurdités palpables résulteraient de la même notion ; par exemple, -3 serait moindre que 2 ; cependant $(-3)^2$ serait plus grand que 2^2, c'est-à-dire qu'entre deux quantités inégales le carré de la plus grande serait moindre que le carré de la plus petite, ce qui choque toutes les idées claires qu'on peut se former de la quantité.

Passons à la seconde notion, qui consiste à dire que les quantités négatives ne diffèrent des positives qu'en ce qu'elles sont prises dans un sens opposé. Cette idée est ingénieuse ; mais elle n'est pas plus juste que la précédente. En effet, si deux quantités, l'une positive, l'autre négative, étaient aussi réelles l'une que l'autre et ne différaient que par leurs positions, pourquoi la racine de l'une serait-elle une quantité imaginaire, tandis que celle de l'autre serait effective ?

Pourquoi $\sqrt{-a}$ ne serait-elle pas aussi réelle que $\sqrt{+a}$?

Conçoit-on une quantité effective dont on ne puisse extraire la racine carrée ? Et d'où viendrait le privilège que la première, -a, aurait de donner son signe au produit $-a \times +a$? "(cité dans [8]).

Lacroix, quant à lui, distingue dans son traité de 1800 les opérations algébriques et arithmétiques :
"L'extension que les signes généraux employés dans l'algèbre donnent aux résultats, ne permet plus leur comparaison exacte avec ceux de l'arithmétique... La soustraction b-a, indiquée algébriquement, n'emporte pas nécessairement l'idée que b surpasse a". Mais il revient en arrière dans son traité de 1808 où il restreint la soustraction au cas où la différence est positive ou nulle [13] .

On voit donc que rapport, ordre, racine carrée, soustraction sont sources de problèmes lorsqu'on veut y mêler des nombres négatifs. Même pour l'addition Clairaut prend des précautions :

> On demandera peut-être si on peut ajoûter du négatif avec du positif, ou plutôt si on peut dire qu'on ajoûte du négatif. A quoi je réponds que cette expression est exacte quand on ne confond point ajoûter avec augmenter. Que deux personnes, par exemple, joignent leurs fortunes, quelles qu'elles soient, je dirai que c'est-là ajoûter leurs biens, que l'un ait des dettes & des effets réels, si ses dettes surpassent ses effets, il ne possédera que du négatif, & la jonction de sa fortune à celle du premier diminuera le bien de celui-ci, ensorte que la somme se trouvera, ou moindre que ce que possédoit le premier, ou même entierement négative.

[8] et [16]

Reste le problème de la multiplication, avec la fameuse règle des signes dont nous reparlerons au paragraphe 3, car sa justification a posé beaucoup de problèmes. Cependant nous pouvons dire que cette règle utilisée depuis au moins Diophante (voir 1.3.) est néanmoins sujette au doute. Par exemple Cardan (1505 - 1576) tantôt donne une version correcte de la règle des signes,

> *Plus ductum in plus* (*ducere in* veut dire multiplier par), *et divisum per plus; et minus ductum in minus, et divisum per minus producunt semper plus, et ita* (de même) *plus in minus, vel minus in plus, vel plus divisum per minus, vel minus per plus, producit minus.*

[5]

tantôt une version erronée,

> *Igitur minus in minus, seu alienum in alienum* (ce qui n'existe pas sur ce qui n'existe pas), *et minus in plus, seu plus in minus, quod est in alienum, seu alienum in id quod est, producunt minus solum, seu alienum.*
>
> C'est-à-dire : donc moins multiplié par moins, ou ce qui n'existe pas par ce qui n'existe pas, et moins multiplié par plus ou plus multiplié par moins, ne produisent jamais que moins, ou quelque chose qui n'existe pas.
>
> *Et ideo patet communis error dicentium quod minus in minus producit plus. Neque enim magis minus in minus producit plus quam plus in plus producat minus.*
>
> C'est-à-dire : et ainsi est mise en évidence l'erreur commune de ceux qui disent que moins par moins fait plus. Car moins par moins ne fait pas davantage plus, que plus par plus ne fait moins.

[5]

et même essaie de concilier les deux points de vue :

> *Et quia nos ubique diximus contrarium, idèo docebo causam hujus, quare in operatione minus in minus videatur producere plus, et quomodo debeat intelligi.*
>
> C'est-à-dire : et comme nous avons dit le contraire en divers endroits, j'enseignerai ici la raison pour laquelle, dans une opération, moins par moins paraît faire plus, et comment cela doit être entendu. [5]

et ce qu'il dit aussi à propos de la division laisse perplexe.

> « Nous avons écrit ailleurs que moins multiplié par plus, et moins multiplié par moins, produisent moins. Il en résulte que moins divisé par moins produit tantôt plus et tantôt moins. Ou bien si deux quantités négatives sont divisées l'une par l'autre, ce qui proviendra pourra être plus ou moins; mais toutes les choses qui sont divisées par plus donnent des semblables à ce qui est divisé : c'est-à-dire plus étant divisé par plus produit plus; et moins étant divisé par plus, il en sort moins. Ce qui est évident par la multiplication. » [5]

Il s'est même trouvé (cf. [13]) un certain Klostermann, correspondant de la Société royale des sciences de Göttingen, pour démontrer, en 1804, que moins multiplié par moins donne moins.

5. Confusion entre le signe d'opération et le signe du nombre

Alors que les Chinois utilisent par exemple deux couleurs différentes pour les positifs et les négatifs (voir 1.1.), en Occident cette distinction n'a été faite clairement qu'au début du XIXème siècle par des mathématiciens allemands (Wilkens 1800, Busse 1804, Forstemann 1817) qui notent $\bar{a}$ au lieu de $-a$, l'opposé de a, et définissent la soustraction par l'addition de l'opposé : $a - b = a + \bar{b}$. Busse montre que les problèmes de Carnot viennent essentiellement de cette confusion entre signe opératoire et signe du nombre (signe prédicatoire) et c'est aussi cette confusion qui rend fausse la démonstration de Klostermann (voir 2.4.) [13].

Cette confusion est en effet constante jusqu'à la fin du XIXème. Par exemple quand Descartes écrit $- 2 + 3 = + 1$ (voir 2.3.), $+ 3$ désigne une augmentation de 3 et on ne sait pas très bien si ce $+$ n'est pas en même temps signe d'une addition. De même dans le texte d'Arnauld (voir 1.3.), il est question de signes que l'on change, qui sont parfois sous entendus ; il semble donc qu'il s'agisse là de signes prédicatoires. Mais dans les explications il est fait par contre référence explicitement aux opérations : "oster", "ajouter". (On pourra aussi se reporter au paragraphe suivant). Cela est dû au fait qu'il s'agissait toujours de quantités à ajouter ou à soustraire, c'est-à-dire de quantités en plus ou en moins.

6. Un document intéressant

L'Encyclopédie méthodique mathématique issue de la Grande Encyclopédie de Diderot est un document de référence sur l'état des sciences à la fin du XVIIIème siècle.

Aussi est-il intéressant de voir où l'on en était à cette époque à propos des nombres relatifs en lisant les articles **Négatif** et **Quantité**.

grande quantité, & assez rapprochée pour qu'elle s'arrondisse par l'attraction mutuelle de ses parties. Mais M. Herschel ayant vu, dans toutes les *nébuleuses*, une quantité de petites étoiles, il y a lieu de croire que la blancheur ne vient que de la multitude de celles que nous ne pouvons distinguer. *Philos. Trans.* 1784. (*D. L.*)

NÉBULEUX, se dit du ciel lorsqu'il est obscurci par des nuages.

NÉFASTES; jours *néfastes* étoient ceux où l'on ne pouvoit rendre la justice. *V.* CALENDRIER.

NEG

NÉGATIF, adj. (*Alg.*), *quantités négatives, en algèbre*, sont celles qui sont affectées du signe —, & qui sont regardées par plusieurs mathématiciens, comme plus petites que zéro. Cette dernière idée n'est cependant pas juste, comme on le verra dans un moment. *V.* QUANTITÉ.

Les quantités *négatives* sont le contraire des positives: où le positif finit, le négatif commence. *Voy.* POSITIF.

Il faut avouer qu'il n'est pas facile de fixer l'idée des quantités négatives, & que quelques habiles gens ont même contribué à l'embrouiller par les notions peu exactes qu'il en ont données. Dire que la quantité *négative* est au-dessous du rien, c'est avancer une chose qui ne se peut pas concevoir. Ceux qui prétendent que 1 n'est pas comparable à -1, & que le rapport entre 1 & -1 est différent du rapport entre -1 & 1, sont dans une double erreur : 1.° parce qu'on divise tous les jours, dans les opérations algébriques, 1 par -1 : 2.° l'égalité du produit de -1 par -1, & de $+1$ par $+1$, fait voir que 1 est à -1 comme -1 à 1.

Quand on considère l'exactitude & la simplicité des opérations algébriques sur les quantités *négatives*, on est bien tenté de croire que l'idée précise que l'on doit attacher aux quantités négatives doit être une idée simple, & n'être point déduite d'une métaphysique alambiquée. Pour tâcher d'en découvrir la vraie notion, on doit d'abord remarquer que les quantités qu'on appelle *négatives*, & qu'on regarde faussement comme au-dessous du zéro, sont très-souvent représentées par des quantités réelles, comme dans la géométrie, où les lignes *négatives* ne diffèrent des positives que par leur situation à l'égard de quelque ligne au point commun. *Voyez* COURBE. De-là il est assez naturel de conclure que les quantités *négatives*, que l'on rencontre dans le calcul, sont en effet des quantités réelles auxquelles il faut attacher une idée autre que celle qu'on avoit supposée. Imaginons, par exemple, qu'on cherche la valeur d'un nombre x, qui, ajouté à 100, fasse 50, on aura, par les règles de l'Algèbre, $x + 100 = 50$, & $x = -50$; ce qui fait voir que la quantité x est

égale à 50, & qu'au lieu d'être ajoutée à 100, elle doit en être retranchée; de sorte qu'on auroit dû énoncer le problème ainsi : trouver une quantité x qui, étant retranchée de 100, donne 50 pour reste; en énonçant le problème ainsi, on auroit $100 - x = 50$, & $x = 50$; la forme *négative* de x ne subsisteroit plus. Ainsi, les quantités *négatives* indiquent réellement, dans le calcul, des quantités positives, mais qu'on a supposées dans une fausse position. Le signe — que l'on trouve avant une quantité, sert à redresser & à corriger une erreur que l'on a faite dans l'hypothèse, comme l'exemple ci-dessus le fait voir très-clairement. *Voyez* ÉQUATION.

Remarquez que nous ne parlons ici que des quantités *négatives* isolées, comme $-a$, ou des quantités $a - b$, dans lesquelles b est plus grand que a; car, pour celles où a-b est positif, c'est-à-dire, où b est plus petit que a, le signe ne fait aucune difficulté.

Il n'y a donc point réellement & absolument de quantité *négative* isolée : -3 pris abstraitement ne présente à l'esprit aucune idée; mais, si je dis qu'un homme a donné à un autre -3 écus, cela veut dire en langage intelligible, qu'il lui a ôté 3 écus.

Voilà pourquoi le produit de $-a$ par $-b$, donne $+ab$: car a & b étant précédés du signe — par la supposition, c'est une marque que ces quantités a, b, se trouvent mêlées & combinées avec d'autres à qui on les compare, puisque, si elles étoient considérées comme seules & isolées, les signes —, dont elles sont précédées, ne présenteroient rien de net à l'esprit. Donc ces quantités $-a$ & $-b$ ne se trouvent précédées du signe —, que parce qu'il y a quelqu'erreur tacite dans l'hypothèse du problème ou dans l'opération : si le problème étoit bien énoncé, ces quantités $-a$, $-b$, devroient se trouver chacune avec le signe $+$, & alors leur produit seroit $+ab$; car que signifie la multiplication de $-a$ par $-b$? c'est qu'on retranche b de fois la quantité *négative* $-a$: or, par l'idée que nous avons donnée ci-dessus des quantités *négatives*, ajouter ou poser une quantité *négative*, c'est en retrancher une positive; donc, par la même raison, en retrancher une *négative*, c'est en ajouter une positive; & l'énonciation simple & naturelle du problème doit être, non de multiplier $-a$ par $-b$, mais $+a$ par $+b$; ce qui donne le produit $+ab$. Il n'est pas possible, dans un ouvrage de la nature de celui-ci, de développer davantage cette idée; mais elle est si simple, que je doute qu'on puisse lui en substituer une plus nette & plus exacte; & je crois pouvoir assurer que, si on l'applique à tous les problèmes que l'on peut résoudre, & qui renferment des quantités *négatives*, on ne la trouvera jamais en défaut. Quoi qu'il en soit, les règles des opérations algébriques sur les quantités *négatives*, sont admises par tout le monde, & reçues généralement comme exactes,

[17] et [8]

quelqu'idée qu'on attache d'ailleurs à ces quantités. Sur les ordonnées négatives d'une courbe & leur situation par rapport aux ordonnées positives, *voyez* COURBE.

Nous ajouterons seulement à ce que nous avons dit dans cet article, que, dans la solution d'un problème géométrique, les quantités *négatives* ne sont pas toujours d'un côté opposé aux positives, mais d'un côté opposé à celui où l'on les a supposées dans le calcul. Je suppose, par exemple, que l'on ait l'équation d'une courbe entre les rayons partant d'un centre ou pole, que j'appelle y, & les angles correspondans que je nomme z; en sorte que y, par exemple, $= \frac{aa}{a + b \cos z}$, il est évident que, lorsque cos. z sera $= -1$, alors, si a est $> b$, y sera dans une position directement contraire à celle qu'elle avoit lorsque cos. $z = 1$, cependant l'une & l'autre valeur de y seront sous une forme positive dans l'équation. Mais, si a est $< b$, alors la valeur algébrique de y sera *négative*, & y devra être prise du même côté que quand cos. $z = 1$, c'est-à-dire, du côté contraire à celui vers lequel on a supposé qu'elle devoit être prise. Il se présente encore d'autres cas, en géométrie, où les quantités *négatives* paroissent se trouver du côté où elles ne devroient pas être; mais les principes que nous venons d'établir, & ceux que nous avons posés ou indiqués à l'*article* EQUATION, suffiront pour résoudre ces sortes de difficultés. Nous avons expliqué, dans cet article, en quoi les racines *négatives* des équations différoient des racines imaginaires; c'est que les premieres donnent une solution du problème envisagé sous un aspect un peu différent, & qui ne differe point même dans le fond de la question proposée; mais les imaginaires ne donnent aucune solution possible du problème, de quelque maniere qu'on l'envisage. C'est que les racines *négatives*, avec de légers changemens à la question, peuvent devenir positives, au lieu que les imaginaires ne le peuvent jamais. Je suppose que j'aie $bby = x^3 - a^3$, ou en faisant $b = 1$, $y = x^3 - a^3$; lorsque x est $< a$, y devient *négative*, & doit être prise de l'autre côté (*voyez* COURBE); pourquoi cela? c'est que, si on avoit reculé l'axe d'une quantité c, ce qui est absolument arbitraire, en sorte qu'au lieu des co-ordonnées x & y, on eût eu les co-ordonnées x & z, telles que z fût $= y + c$, alors on auroit eu $z = c + x^3 - a^3$; & en faisant $x < a$, z n'auroit plus été *négative*, ou plutôt auroit continué à être encore positive pendant un certain tems: d'où l'on voit que la valeur *négative* de y, $x^3 - a^3$, appartient aussi-bien à la courbe que les valeurs positives; ce qui a été développé plus au long au *mot* COURBE. Au contraire, si on avoit $y = \sqrt{xx - ca}$, & que x fût $< a$, alors on auroit beau transporter l'axe, la valeur de y resteroit imaginaire; ainsi, les racines *négatives* indiquent des solutions réelles, parce que ces racines deviennent positives par de légers changemens dans la solution; mais les racines imaginaires indiquent des solutions impossibles, parce que ces racines ne deviennent jamais ni positives ni réelles par ces mêmes changemens. *Voyez* EQUATION & RACINE.

Quand on a dit plus haut que le *négatif* commence où le positif finit, cela doit s'entendre avec cette restriction, que le positif ne devienne pas imaginaire. Par exemple, soit $y = xx - aa$, il est visible que, si $x > a$, y sera positif; que, si $x = a$, y sera $= 0$, & que, si $x < a$, y sera *négatif*. Ainsi, dans ce cas, le positif finit où $y = 0$, & le *négatif* commence alors; mais, si on avoit $y = \sqrt{xx - ax}$, alors $x > a$ donne y positif, & $x = a$ donne $y = 0$; mais $x < a$ donne y imaginaire.

Le passage du positif au *négatif* se fait toujours par zéro, ou par l'infini. Soit, par exemple, $y = x - a$, on aura y positif tant que $x > a$, y *négatif* lorsque $x < a$, & $y = 0$ lorsque $x = a$; dans ce cas, le passage se fait par zéro. Mais, si $y = \frac{1}{x - a}$, on aura y positif tant que x est $> a$, y *négatif* lorsque x est $< a$, & $y = \infty$ lorsque $x = a$; le passage se fait alors par l'infini.

Ce n'est pourtant pas à dire qu'une quantité qui passe par l'infini ou par le zéro, devienne nécessairement de positive, *négative*; car elle peut rester positive. Par exemple, soit $y = \overline{a - x}^2$, ou $y = \frac{1}{\overline{a - x}^2}$; lorsque $a = x$, y est $= 0$ dans le premier cas, & $= \infty$ dans le second; mais soit que a soit $> x$, ou que a soit $< x$, y demeure toujours positive. *V.* MAXIMUM. (*O*)

NÉGLIGER, v. act. (*Alg.*): on emploie ce mot dans certains calculs, pour désigner l'omission de plusieurs termes, qui, étant fort petits par rapport à ceux dont on tient compte, ne peuvent donner un résultat sensiblement différent de celui auquel on arrive en omettant ces termes.

Cette méthode est principalement d'usage dans les calculs d'*approximation*, *voyez* APPROXIMATION. Et elle est en général fondée sur ce principe, que, si on a une quantité très-petite x, les termes où entrera le quarré xx de cette quantité seront très-petits par rapport à ceux où entrera la quantité simple x; en effet, xx est incomparablement plus petit que x, puisque xx est à x :: comme x est à 1, & que x est supposée une très-petite partie limitée. A plus forte raison, les termes où se trouveroit x^3, x^4, sont très-petits par rapport à ceux qui contiennent x. Ainsi, on *néglige* tous ces termes, ou au moins ceux qui contiennent les puissances les plus hautes de x.

Cette méthode a été employée avec succès par les géometres, pour la solution approchée d'un grand nombre de problèmes; cependant on ne doit l'employer qu'avec précaution: car si, par exem-

Article QUANTITE

Les *quantités* sont proprement le sujet de l'algèbre, qui roule entièrement sur leur calcul. *Voyez* ALGEBRE & CALCUL.

On marque ordinairement les *quantités* connues par les premières lettres de l'alphabet, *a*, *b*, *c*, *d*, *&c.* & les *quantités* inconnues par les dernières, *z*, *y*, *&c.*

Les *quantités* algébriques sont ou positives ou négatives.

On appelle *quantité positive* celle qui est au-dessus de zéro, & qui est précédée, ou que l'on suppose être précédée du signe +; *voyez* POSITIF.

Quantités négatives sont celles qui sont regardées comme moindres que rien, & qui sont précédées du signe −, *voyez* NÉGATIF.

Puis donc que + est le signe de l'addition, & − celui de la soustraction, il s'ensuit qu'il ne faut pour produire une *quantité* positive, qu'ajouter une *quantité* réelle à rien; par exemple $o + 3 = + 3$; & $o + a = + a$. De même pour produire une *quantité* négative il ne faut que retrancher une *quantité* réelle de o; par exemple $o - 3 = - 3$; & $o - a = - a$.

Eclaircissons ceci par un exemple. Supposez que vous n'ayez point d'argent, & que quelqu'un vous donne cent écus; vous aurez alors cent écus plus que rien, & ce sont ces cent écus qui constituent une *quantité* positive.

Si au contraire vous n'avez point d'argent, & que vous deviez cent écus, vous aurez alors cent écus moins que rien; car vous devez payer ces cent écus pour être dans la condition d'un homme qui n'a rien & qui ne doit rien: cette dette est une *quantité* négative.

De même dans le mouvement local, le progrès peut être appellé une *quantité* positive, & le retour une *quantité* négative; à cause que le premier augmente & le second diminue le chemin qu'on peut avoir déja fait.

Si l'on regarde en géométrie une ligne tirée vers quelque côté que ce soit comme une *quantité* positive, celle que l'on menera du côté opposé sera une quantité négative. *Voyez* COURBE.

Selon quelques auteurs, les *quantités* négatives sont les défauts des positives.

Selon ces mêmes auteurs, puisqu'un défaut peut excéder un autre (car, par exemple, le défaut de 7 est plus grand que celui de 3); une *quantité* négative prise un certain nombre de fois, peut être plus grande qu'une autre.

D'où il suit que les *quantités* négatives sont homogènes entr'elles.

Mais, ajoutent-ils, puisque le défaut d'une *quantité* positive prise tel nombre de fois que l'on voudra, ne peut jamais surpasser la *quantité* positive, & qu'elle devient toujours plus défective: les *quantités* négatives sont hétérogènes aux positives; d'où ils concluent que les *quantités* négatives étant hétérogènes aux positives, & homogènes aux négatives, il ne peut y avoir de rapport entre une *quantité* positive & une négative, mais il peut s'en trouver entre deux négatives. Par exemple, $-3a : -3a :: 3 : 5$. Le rapport est ici le même que si les *quantités* étoient positives. Mais ils prétendent observer qu'entre 1 & −1, & entre −1 & 1, la raison est tout-à-fait différente. Il est vrai pourtant, d'un autre côté, que $1 : -1 :: -1 : 1$, puisque le produit des extrêmes est égal au produit des moyens; ainsi la notion que donnent ces auteurs des *quantités* négatives, n'est pas parfaitement exacte. *Voyez* NÉGATIF.

Addition des quantités. 1.° Si les *quantités* exprimées par la même lettre ont aussi le même signe, on ajoutera les nombres dont elles sont précédées, comme dans l'arithmétique ordinaire.

2.° Si elles ont différens signes, l'addition devient une soustraction, & l'on ajoute au restant le signe de la plus grande *quantité*.

3.° On ajoute les quantités exprimées par différentes lettres par le moyen du signe +, comme dans l'exemple suivant:

$$\begin{array}{l} 4a + 2b - 2c - 5d - 9 \\ 5a + 2b + 2c + 2d - 39 \\ \hline 9a + 4b - 3d - 48 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a - b \\ c \\ \hline a - b + c \end{array}$$

Soustraction des *quantités*. *Voyez* SOUSTRACTION.

Multiplication & division des *quantités*. *Voyez* MULTIPLICATION & DIVISION.

Combinaison des *quantités*. *Voyez* COMBINAISON, PERMUTATION, *&c.*

Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise deux *quantités* positives l'une par l'autre, il en résulte une *quantité* positive.

2.° Quand on multiplie ou qu'on divise une *quantité* négative par une positive, le produit & le quotient sont négatifs.

3.° En multipliant ou divisant deux *quantités* négatives l'une par l'autre, il en résulte une *quantité* positive.

4.° Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise une *quantité* positive par une négative, ce qui en vient est une quantité négative. (*E*)

~~QUARANTIEME, s. m. (*Arithmétiq.*) en fait de fractions ou nombres rompus de quelque sorte que ce soit, un *quarantième* s'écrit de cette manière $\frac{1}{40}$; on dit aussi un *quarante-unième*, un *quarante-deuxième*, un *quarante-troisième*, *&c.* & ces différentes fractions s'écrivent de même que celle ci-dessus, à l'exception que l'on met un 1, un 2, un 3, à la place du zéro qui est après le quatre, ce qui se marque ainsi $\frac{1}{41}$, $\frac{1}{42}$, $\frac{1}{43}$, *&c.* on dit encore *deux quarantièmes*, *trois quarantièmes*, *&c.* que l'on écrit de cette manière $\frac{2}{40}$, $\frac{3}{40}$, $\frac{4}{40}$. Le quarante-huitième de vingt sols est cinq deniers.~~

3 - LA REGLE DES SIGNES : UN CHOIX D'EXPLICATIONS

1. Les difficultés de Stendhal

Mon enthousiasme pour les mathématiques avait peut-être eu pour base principale mon horreur pour l'hypocrisie, l'hypocrisie à mes yeux c'était ma tante Séraphie, Mme Vignon, et leurs pr[êtres].

Suivant moi l'hypocrisie était impossible en mathématiques et, dans ma simplicité juvénile, je pensais qu'il en était ainsi dans toutes les sciences où j'avais ouï dire qu'elles s'appliquaient. Que devins-je quand je m'aperçus que personne ne pouvait m'expliquer comment il se faisait que : moins par moins donne plus ($- \times - = +$)?

(C'est une des bases fondamentales de la science qu'on appelle *algèbre*).

On faisait bien pis que ne pas m'expliquer cette difficulté (qui sans doute est explicable car elle conduit à la vérité), on me l'expliquait par des raisons évidemment peu claires pour ceux qui me les présentaient.

M. Chabert pressé par moi s'embarrassait, répétait sa *leçon*, celle précisément contre laquelle je faisais des objections, et finissait par avoir l'air de me dire :

« Mais c'est l'usage, tout le monde admet cette explication. Euler et Lagrange, qui apparemment valaient autant que vous, l'ont bien admise. Nous savons que vous avez beaucoup d'esprit (cela voulait dire : Nous savons que vous avez remporté un premier prix de *belles-lettres* et bien parlé à *M. Teste-Lebeau* et aux autres membres du Département), vous voulez apparemment vous singulariser. »

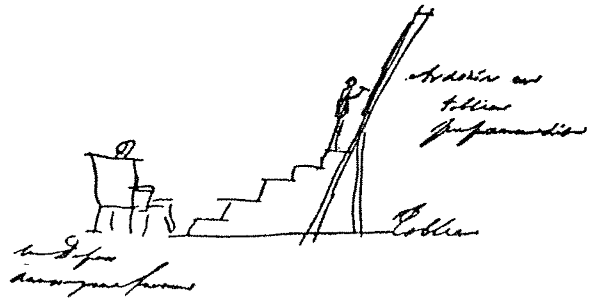
Quant à M. Dupuy il traitait mes timides objections (timides à cause de son ton d'emphase) avec un sourire de hauteur voisin de l'éloignement. Quoique beaucoup moins fort que M. Chabert, il était moins bourgeois, moins borné, et peut-être jugeait sainement de son savoir en mathématiques. Si aujourd'hui je voyais ces Messieurs huit jours, je saurais sur-le-champ à quoi m'en tenir. Mais il faut toujours en revenir à ce point.

Je me rappelle distinctement que, quand je parlais de ma difficulté de *moins par moins* à un *fort*, il me riait au nez ; tous étaient plus ou moins comme Paul-Émile Teysseyre et apprenaient par cœur. Je leur voyais dire souvent au tableau à la fin des démonstrations :

« *Il est donc évident* », etc.

Rien n'est moins évident pour vous, pensais-je. Mais il s'agissait de choses évidentes pour moi, et desquelles malgré la meilleure volonté il était impossible de douter.

Les mathématiques ne considèrent qu'un petit coin



[*Ardoise ou tableau proprement dit.* — *Tableau.* — *M. Dupuy dans son grand fauteuil.*]

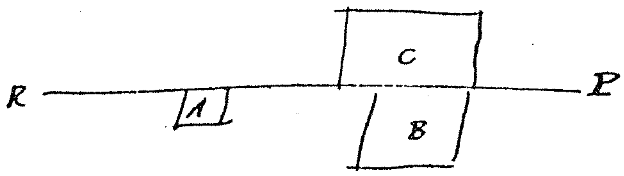
des objets (leur quantité), mais sur ce point elles ont l'agrément de ne dire que des choses sûres, que la vérité, et presque toute la vérité.

Je me figurais à quatorze ans, en 1797, que les hautes mathématiques, celles que je n'ai jamais sues, comprenaient *tous* ou à peu près tous les côtés des objets, qu'ainsi, en avançant, je parviendrais à savoir des choses sûres, indubitables, et que je pourrais me prouver à volonté, *sur toutes choses*.

Je fus longtemps à me convaincre que mon objection sur $- \times - = +$ ne pourrait pas absolument entrer dans la tête de M. Chabert, que M. Dupuy n'y répondrait jamais que par un sourire de hauteur, et que les *forts* auxquels je faisais des questions se moqueraient toujours de moi.

J'en fus réduit à ce que je me dis encore aujourd'hui : il faut bien que — par — donne + soit vrai, puisque évidemment, en employant à chaque instant cette règle dans le calcul, on arrive à des résultats *vrais et indubitables*.

Mon grand malheur était cette figure :



Supposons que RP soit la ligne qui sépare le positif du négatif, tout ce qui est au-dessus est positif, comme négatif tout ce qui est au-dessous ; comment, en prenant le carré B autant de fois qu'il y a d'unités dans le carré A, puis-je parvenir à faire changer de côté au carré C ?

Et, en suivant une comparaison gauche que l'accent souverainement traînard et grenoblois de M. Chabert rendait encore plus gauche, supposons que les quantités négatives sont les dettes d'un homme, comment en multipliant 10 000 francs de dette par 500 francs, cet homme aura-t-il ou parviendra-t-il à avoir une fortune de 5 000 000, cinq millions ?

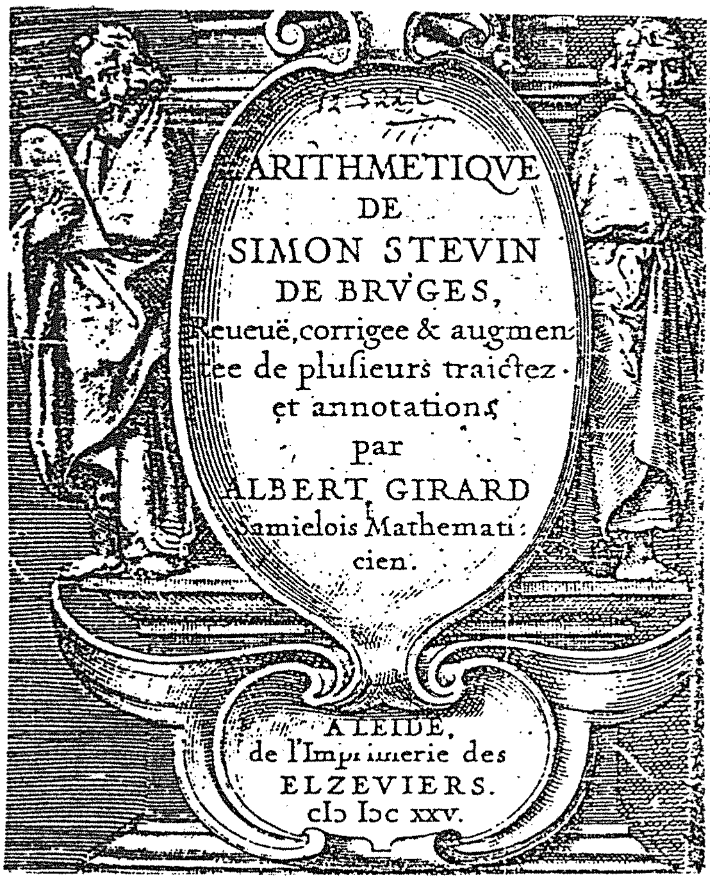
M. Dupuy et M. Chabert sont-ils des hypocrites comme les pr[êtres] qui viennent dire la [messe] chez mon grand-père et mes chères mathématiques ne sont-elles qu'une tromperie ? Je ne savais comment arriver à la vérité. Ah ! qu'alors un mot sur la logique ou l'art de *trouver la vérité* eût été avidement écouté par moi ! Quel moment pour m'expliquer la *Logique* de M. de Tracy ! Peut-être j'eusse été un autre homme, j'aurais eu une bien meilleure tête.

Je conclus, avec mes pauvres petites forces, que M. Dupuy pouvait bien être un trompeur, mais que M. Chabert était un bourgeois vaniteux qui ne pouvait comprendre qu'il existât des objections non vues par lui.

[18] et [8]

On notera l'obstacle auquel se heurte Stendhal : le modèle des gains et des pertes qui fonctionne pour l'addition des relatifs ne fonctionne plus pour la multiplication.

2. L'explication de Stevin : 1625



THEOREME.

Plus multiplié par plus, donner produict plus, & moins multiplié par moins, donner produict plus, & plus multiplié par moins, ou moins multiplié par plus, donner produict moins.

Explication du donné. Soit 8—5 multiplié par 9—7, en ceste sorte: —7 fois —5 font +35 (+35, par ce que, comme

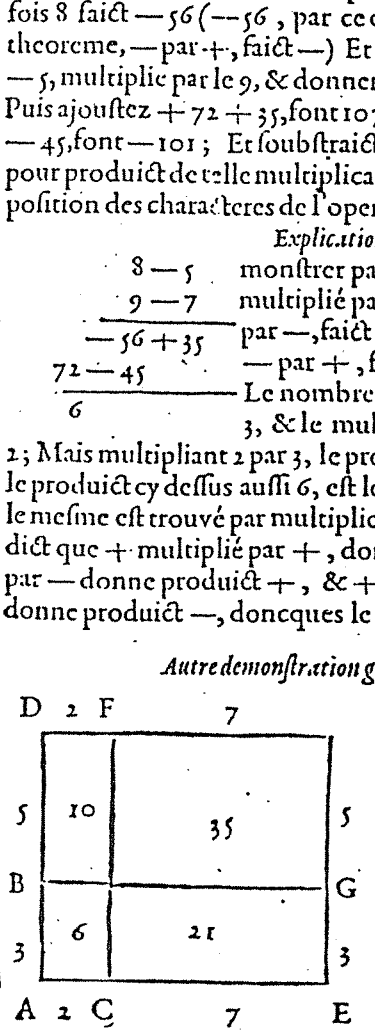
156 LE II. LIVRE D'ARITH.

comme dict le theoreme, —par—, faict +) Puis —7 fois 8 faict —56 (—56, par ce que, comme dict est au theoreme, —par +, faict —) Et semblablement soit 8 —5, multiplie par le 9, & donneront produicts 72—45; Puis ajoustez +72 +35, font 107. Puis ajoustez les —56 —45, font —101; Et soubstraict le 101 de 107 reste 6, pour produict de telle multiplication. De laquelle la disposition des characteres de l'operation est telle:

Explication du requis. Il faut demonstrer par ledict donné, que + multiplié par +, faict +, & que — par —, faict +, & que + par —, ou — par +, faict —. *Demonstration.* Le nombre à multiplier 8—5 vaut 3, & le multiplicateur 9—7 vaut 2; Mais multipliant 2 par 3, le produict est 6; Doncques le produict cy dessus aussi 6, est le vray produict: Mais le mesme est trouvé par multiplication, là ou nous avons dict que + multiplié par +, donne produict +, & — par — donne produict +, & + par —, ou — par +, donne produict —, doncques le theoreme est veritable.

$$\begin{array}{r} 8-5 \\ 9-7 \\ \hline -56+35 \\ 72-45 \\ \hline 6 \end{array}$$

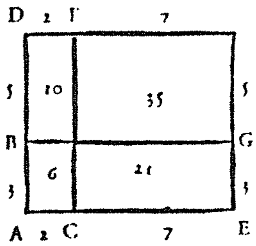
Autre demonstration geometrique.



Soit AB 8—5 (à sçavoir AD 8 — DB 5) Puis AC 9—7 (à sçavoir AE 9 — EC 7) leur produict sera CB: ou bien selon la multiplication precedante ED 72 — EF 56 — DG 45 + GF 35, Lesquelles nous demonstrerons estre egales à CB en ceste sorte. De tout le ED + GF, soubstraict EF, & DG, reste CB. *Conclusion.* Plus doncques multiplié par plus, donne produict plus. & moins multiplié par moins, donne produict plus, & plus multiplié par moins, ou moins multiplié par plus, donne produict moins; ce qu'il falloit demonstrer.

Plus multiplié par plus, donne produict plus, & moins multiplié par moins, donne produict plus, & plus multiplié par moins, ou moins multiplié par plus, donne produict moins.

Explication du donné. Soit 8—5 multiplié par 9—7, en ceste sorte: —7 fois —5 font +35 (+35, par ce que, comme dict le theoreme, —par—, faict +) Puis —7 fois 8 faict —56 (—56, par ce que, comme dict est au theoreme, —par +, faict —) Et semblablement soit 8 —5, multiplie par le 9, & donneront produicts 72—45; Puis ajoustez +72 +35, font 107. Puis ajoustez les —56 —45, font —101; Et soubstraict le 101 de 107 reste 6, pour produict de telle multiplication. De laquelle la disposition des characteres de l'operation est telle:



157 DE L'OPERATION.

On peut constater que l'explication de Stevin est fondée sur la distributivité et que Stevin prend la peine de faire deux "démonstrations" : l'une arithmétique et l'autre géométrique. Cette règle est introduite par Stevin pour pouvoir calculer des produits du type :
$(\sqrt{7} + \sqrt{5} - \sqrt{6})$ $(\sqrt{4} - \sqrt{8} + \sqrt{3})$ qu'il appelle "multinomie radicaux entiers".

3. L'explication de McLaurin (1748)

> *On pourroit de là déduire la regle des signes telle qu'on a coutume de l'énoncer, qui est que* les signes semblables dans les termes du multiplicateur & du multiplicande donnent + au produit, & les signes différens donnent — . *Nous avons évité cette maniere de présenter la regle, pour épargner aux Commençans l'expression révoltante* — par — donne +, *qui est cependant une conséquence nécessaire de la regle: on peut, comme nous avons fait, la déguiser, mais non l'anéantir ou la contredire; le Lecteur, sans s'en appercevoir, en a observé tout le sens dans les exemples précédens; familiarisé avec la chose, pourroit-il encore s'effaroucher des mots? s'il lui reste là-dessus quelque scrupule, qu'il fasse attention à la démonstration suivante qui attaque directement la difficulté.*
> + a — a = o, *ainsi par quelque quantité qu'on multiplie* + a — a, *le produit doit être* o*: si je le multiplie par* n, *j'aurai pour le premier terme* + na, *donc j'aurai pour le second* — na, *puisqu'il faut que les deux termes se détruisent. Donc les signes différens donnent — au produit. Si je multiplie* + a — a *par* — n, *par le cas précédent, j'aurai* — na *pour premier terme; donc j'aurai* + na *pour second, puisqu'il faut toujours que les deux termes se détruisent; donc — multiplié par — donne + au produit.*

[8]

McLaurin utilise la distributivité mais de façon plus formelle et générale en utilisant l'astuce du zéro. On peut noter le rôle que joue la démonstration pour McLaurin : éliminer les scrupules éventuels de ceux qui n'auraient pas été convaincus par les exemples.

4. Les explications de Clairaut (1768)

D'abord voici la méthode suivie par Clairaut pour introduire la règle des signes.

1. Calcul algébrique du type $a(b - c + d)$
2. Calcul algébrique du type $(a - b)(c - d + e)$

où a, b, c, d, e, sont des nombres entiers positifs.
La règle est utilisée sans être énoncée.

3. Résolution d'un problème (mise en équation) de deux façons différentes où l'une des deux conduit à des produits avec des nombres négatifs.
4. Conséquences : énoncé de la règle et attitude face aux solutions négatives.

ces opérations. Je n'ai pas cru devoir les donner plutôt, parce que les Commençans les suivent avec peine & avec dégoût, lorsqu'on les leur enseigne dans un temps où ils n'ont aucune idée des quantités sur lesquelles ils opèrent.

La multiplication est de toutes ces opérations celle qui arrête ordinairement le plus les Commençans, & dont l'explication embarrasse le plus les maîtres : ce principe qu'elle renferme, que deux quantités négatives donnent dans leur produit une quantité positive, est presque toujours l'écueil des uns & des autres.

Pour éviter d'y tomber, je n'établis ce principe qu'après avoir fait faire des opérations dans lesquelles on a dû en remarquer la nécessité. Je commence par enseigner à multiplier une quantité composée de plusieurs termes positifs & négatifs par un seul terme que je suppose toujours positif, parce que l'on ne s'accoutume pas ordinairement à considérer une quantité négative, comme existant seule. Cette multipli-

cation étant expliquée, je passe à celle où le multiplicateur est aussi-bien que le multiplicande composé de plusieurs termes positifs & négatifs, & je fais voir facilement que cette multiplication n'est autre chose que la première répétée autant de fois qu'il y a de termes dans le multiplicateur, & que, suivant que les termes de ce multiplicateur sont positifs ou négatifs, les produits qu'ils donnent, doivent être ajoutés ou retranchés.

Par ce moyen j'accoutume les Commençans avec la multiplication, sans que j'aie seulement besoin d'énoncer ces principes ordinaires, que *moins par plus* donne *moins*, *moins par moins* donne *plus*, &c. qui, en présentant à l'oreille une contradiction dans les mots, laissent presque toujours croire qu'il y en a dans les choses.

On pourroit croire d'abord que je n'ai fait qu'éluder la difficulté, & je n'aurois fait réellement que l'éluder, si je ne parlois pas de la multiplication des quantités purement négati-

s, par d'autres quantités aussi entié-
ment négatives, opération dans la-
uelle on ne [redacted] éviter la contra-
iction apparente [redacted] je viens de
arler. Mais je traite à fond de cette
[redacted], après en avoir montré
[redacted] Lecteur, en le condui-
sant à un Problê[redacted] l'on est obligé
de considérer des [redacted] négatives
indépendamment d'aucunes quantités
positives dont elles soient retranchées.

Lorsque je suis parvenu, dans [redacted]
Problême, au point où il s'agit de mul-
[redacted] diviser des quantités né-
[redacted] je prends
le parti qu'ont sans doute pris les pre-
miers Analystes qui ont eu de ces opé-
rations à faire, & qui ont voulu sui-
vre une route entiérement sûre, je
cherche une solution au Problême
par laquelle je puisse éviter toute es-
péce de multiplication ou de division
de quantités négatives, par ce moyen
j'arrive au résultat, sans employer d'au-
tres raisonnemens, que ceux sur les-
[redacted] on ne peut former aucun dou-
te; [redacted] je vois ce que doivent être ces

produits ou quotiens des [redacted]
gatives que m'avoit donnés la pre-
miere solution [redacted] n'est pas difficile
ensuite d'en tirer ces principes si fa-
meux que *moins* par *moins* [redacted]
&c.

Je délivr[redacted] ces principes de tout
ce [redacted] de choquant, & le Lec-
[redacted]vient en même-temps à con-
noître la nature des solutions négati-
ves des Problêmes; il apprend cette
vérité si utile, que lorsque [redacted] une
solution on arrive [redacted]
négative, elle doit être prise dans un
sens opposé à celui suivant lequel on
l'avoit employée, en exprimant les
conditions du Problême.

La premiere Partie de cet Ouvrage
traite uniquement des équations du
premier degré, soit à une, soit à plu-
sieurs inconnues, & de toutes les opé-
rations que demandent ces équations,
tant pour arriver à leur résolution, que
pour la rendre aussi simple qu'elle puis-
se être. Telle est, par exemple, la ré-
gle qu'il faut suivre pour trouver le
plus grand commun diviseur, laquelle

Voici la démonstration que Clairaut donne pour le produit de quantités négatives isolées.

L X.

On démontre que $-b$ par $-d$ est $+bd$, quoique ces quantités ne soient précédées de rien.

Pour nous assurer que la multiplication de — par — doit toujours donner +, au produit, voyons quelle lumière nous pouvons tirer de la méthode générale des multiplications donnée, art. X L V. Suivant cette méthode, on voit très-clairement que le produit d'une quantité telle que $a - b$ par une autre $c - d$, doit être $ac - bc - ad + bd$; & on voit par conséquent en même-temps que le terme bd qui est venu par la multiplication de b & de d a le signe +, tandis que ses produisans b & d ont le signe —. Il ne reste donc plus qu'à savoir si lorsque deux quantités négatives telles que $-b$ & $-d$ ne seront précédées d'aucune quantité positive, leur produit sera encore $+bd$. Or, c'est ce dont il est facile de reconnoître la vérité, puisque la méthode par laquelle on a découvert que le produit de $a - b$ par $c - d$ étoit $ac - bc - ad + bd$, ne spécifiant aucune grandeur particulière ni à a ni à c, doit avoir encore lieu lorsque ces quantités sont égales à zéro: or, en ce cas, le produit $ac - bc - ad + bd$ se réduit à $+bd$, donc $-b \times -d = +bd$.

L X I.

Les autres cas se démontrent de même.

Quant aux autres cas, c'est-à-dire, à la multiplication & à la division de + par —, on les justifieroit de la même manière.

5. L'explication d'Euler (1770)

Léonard Euler (1707-1783) fut assurément un virtuose du calcul. Dans ses articles scientifiques, il manie les nombres relatifs et complexes avec ingéniosité et hardiesse, sans trop soulever de questions au sujet de la légitimité de ses constructions. Mais dans un ouvrage destiné aux débutants (Euler 1770), il fait œuvre pédagogique et se trouve dans l'obligation de fournir des explications. Notamment il essaie de *justifier la règle des signes*. Nous découpons son argumentation en trois parties:

1. La multiplication d'une *dette* par un nombre positif n'offre guère de difficulté: trois dettes de a écus font une dette de 3a écus. Donc b x (-a) = -ab.

   On remarquera que dans cet exemple, la multiplication est une *opération externe*. L'argument est donc sans valeur si le multiplicateur n'est pas un entier naturel.
2. Par commutativité, Euler en déduit que (-a) x b = -ab.

   Argument sans valeur pour une loi externe, que signifie (-3) gains de a écus?
3. Il reste à déterminer ce qu'*est** le produit (-a) par (-b). Il est clair, dit Euler, que la valeur absolue est ab. Il s'agit donc de se décider entre +ab et -ab. Mais comme (-a) x b vaut déjà -ab, il ne reste plus comme unique possibilité que (-a) x (-b) = +ab. (! ! !)

Cette pirouette ne dépasse guère le niveau de la vulgarisation. Mais si Euler ne fournit pas ici de meilleure justification de la règle des signes, c'est sans doute qu'il n'en connaissait pas de plus valable. [8]

6. L'explication de Laplace (1795)

Dans les célèbres conférences pédagogiques que Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) fit à l'Ecole Normale Supérieure (pluviôse an III), il commence par manifester le même embarras que ses prédécesseurs, témoignant ainsi que la théorie des nombres relatifs n'était pas considérée comme facile. Mais il entrevoit les éléments de la solution:

«(La règle des signes) présente quelques difficultés: on a peine à concevoir que le produit de -a par -b *soit* le même que celui de a par b. Pour rendre cette identité *sensible*, nous observerons que le produit de -a par +b *est* -ab (puisque le produit n'est que -a répété autant de fois qu'il y a d'unités dans b). Nous observerons ensuite que le produit de -a par b-b *est* nul, puisque le multiplicateur est nul; ainsi le produit de -a par +b étant -ab, le produit de -a par -b *doit être* de signe contraire ou égal à +ab pour le détruire».

On notera dans ce texte:

a. la même maladresse que chez Euler pour démontrer b x (-a) = -ab.

b. la mise en évidence du rôle de la distributivité, dans la démonstration.

c. l'absence de référence à un modèle physique, (l'obstacle (6) est ainsi contourné) et une approche, *en apparence*, purement formelle.

d. Mais l'idée d'une extension formelle du système numérique ne semble pas avoir éffleuré l'esprit de Laplace. L'emploi des mots que nous soulignons («sensible», «doit être», etc) ne révèle-t-elle pas une croyance implicite en un système numérique préexistant, dont il suffirait de déchiffrer les propriétés? [8]

7. L'explication de Cauchy (1821)

D'après ces conventions, si l'on représente par A soit un nombre, soit une quantité quelconque, et que l'on fasse

$$a = +A, \quad b = -A,$$

on aura

$$+a = +A, \quad +b = -A,$$
$$-a = -A, \quad -b = +A.$$

Si dans les quatre dernière équations, l'on remet pour a et b leurs valeurs entre parenthèses, on obtiendra les formules

$$(1) \quad \begin{array}{l} +(+A) = +A, \ +(-A) = -A, \\ -(+A) = -A, \ -(-A) = +A. \end{array}$$

Dans chacune de ces formules le signe du second membre est ce qu'on appelle le produit *des deux signes du premier.* Multiplier *deux signes l'un par l'autre, c'est former leur produit. L'inspection seule des équations (1) suffit pour établir la* règle des signes*, comprise dans le théorème que je vais énoncer.*

1^er^ Théorème: Le produit de deux signes semblables est toujours +, et le produit de deux signes opposés est toujours -.

Cité dans [8]

8. L'explication de Hankel (1867)

La révolution accomplie par Hankel consiste à aborder le problème dans une *toute autre perspective*. Il ne s'agit plus de déterrer dans la Nature des exemples pratiques qui « expliquent » les nombres relatifs sur le mode métaphorique. Ces nombres ne sont plus *découverts*, mais *inventés*, *imaginés*.

Connaissant par exemple, les propriétés additives de $\mathbb{R}$ et la multiplication de $\mathbb{R}^+$, Hankel propose explicitement de prolonger la multiplication de $\mathbb{R}^+$ à $\mathbb{R}$ en respectant un *principe* de permanence: la structure algébrique cherchée doit avoir de bonnes propriétés.

L'existence et l'unicité du prolongement résulte du théorème suivant:

Théorème: La seule multiplication sur $\mathbb{R}$, qui prolonge la multiplication usuelle sur $\mathbb{R}^+$ en *respectant les distributivités* (à gauche et à droite) est conforme à la règle des signes.

Dès que l'on a formulé ce problème, la démonstration est triviale:

$$0 = a \times 0 = a \times (b + \text{opp } b) = ab + a \times (\text{opp } b)$$
$$0 = 0 \times (\text{opp } b) = (\text{opp } a) \times (\text{opp } b) + a \times (\text{opp } b)$$

D'où

$$(\text{opp } a) \times (\text{opp } b) = ab$$

D'ailleurs cette démonstration n'est même pas originale. Elle se retrouve essentiellement dans beaucoup de textes antérieurs, notamment chez MacLaurin et Laplace. Cependant, on notera une différence considérable: Laplace croit en l'existence, *a priori*, d'une multiplication des relatifs, dans la Nature. Selon lui, il ne reste qu'à la découvrir, et le raisonnement précédent prouve que cela n'est possible que conformément à la règle des signes .

9. L'explication de Neveu (1911)

Elle utilise pour modèle concret le déplacement d'un mobile à vitesse constante. Le livre est un manuel pour l'enseignement primaire supérieur.

30. — *Multiplication*. — *On appelle produit de deux nombres algébriques* a *et* b *un troisième nombre algébrique dont la valeur absolue est égale au produit des valeurs absolues des deux nombres, et qui est affecté du signe + si les deux nombres sont de même signe, et du signe — s'ils sont de signes contraires.*

Pour justifier cette définition, cherchons l'espace parcouru par un mobile qui se déplace d'un mouvement rectiligne uniforme avec la vitesse v pendant le temps t.

On a vu (n° 7) que l'espace e parcouru est donné par la formule :

$$e = vt.$$

Le mobile se déplaçant sur la droite XY, nous supposerons v positif, lorsque le mobile marche dans le sens de X vers Y, sens positif, et v négatif lorsque le mobile marche en sens inverse.

Fig. 9.

De même, t sera *positif* s'il s'agit d'un temps *avenir*, et *négatif* s'il s'agit d'un temps *passé*. Dans ce dernier cas, on cherche la position du mobile avant l'*époque actuelle*, ou origine des temps.

L'origine des distances O est le point où le mobile se trouve à l'origine des temps, c'est-à-dire au temps *zéro*, ou époque actuelle.

Le nombre algébrique qui mesure le segment compris entre l'origine O et la position finale du mobile au temps t représentera le produit vt généralisé.

— 1° Dans le cas où v et t sont positifs, le mobile est évidemment situé à droite de O au bout du temps t; de sorte que le nombre qui mesure le segment parcouru est positif.

Donc : *le produit de deux nombres positifs est un nombre positif.*

Ce produit n'est autre que le produit de deux nombres arithmétiques.

— 2° *Multiplication d'un nombre négatif par un nombre positif.*

Soit

$$v = -2 \quad \text{et} \quad t = +3 \text{ (évalué en secondes).}$$

La vitesse étant négative, le mobile se déplace dans le sens de Y vers X. Dans 3 secondes, le mobile sera en un

Fig. 10.

point A situé à *gauche* de O à une distance égale à 3 fois la vitesse 2 en valeur absolue, c'est-à-dire à la distance 6. On a donc :

$$\overline{OA} = -6.$$

Par suite, on a :

$$(-2)(+3) = -6.$$

Donc : *le produit d'un nombre négatif par un nombre positif est un nombre négatif.*

— 3° *Multiplication d'un nombre positif par un nombre négatif.*

Soit

$$v = +2 \quad \text{et} \quad t = -3.$$

La vitesse étant positive, le mobile se déplace dans le sens de X vers Y ; mais t étant négatif, il s'agit de trouver la position du mobile *il y a* 3 secondes. Il est évident qu'à ce moment le mobile était *à gauche* du point O à la distance 6 (*fig. 10*). On a donc :

$$(+2)(-3) = -6.$$

Donc : *le produit d'un nombre positif par un nombre négatif est un nombre négatif.*

— 4° *Multiplication d'un nombre négatif par un nombre négatif.*

Soit :

$$v = -2 \quad \text{et} \quad t = -3.$$

La vitesse étant négative, le mobile se déplace dans le sens de Y vers X ; or, au temps *zéro* il est au point O, donc *il y a* 3 secondes il était évidemment *à droite* de O à une distance OA égale à 6. Le segment $\overline{OA}$ étant positif, on a donc :

Fig. 11

$$(-2).(-3) = +6.$$

Donc : *le produit de deux nombres négatifs est un nombre positif.*

La définition se trouve donc justifiée.

— Ainsi, on résumé : 1° *le produit de deux nombres algébriques de même signe est positif.*

2° *Le produit de deux nombres algébriques de signes contraires est négatif.*

On a ainsi la *règle des signes* relative à la multiplication, et qu'on peut énoncer comme il suit :

$+$ *par* $+$ *donne* $+$,
$-$ *par* $-$ *donne* $+$,
$+$ *par* $-$ *donne* $-$,
$-$ *par* $+$ *donne* $-$.

31. — Remarque. — Si l'on compare les produits suivants :

$$(+2)(+3) = +6,$$
$$(-2)(+3) = -6,$$
$$(+2)(-3) = -6,$$
$$(-2)(-3) = +6,$$

on en tire les conséquences suivantes :

1° *Si, dans un produit de deux facteurs, on change le signe d'un facteur, le produit change de signe.*

2° *Si, dans un produit de deux facteurs, on change les signes des deux facteurs, le produit ne change pas de signe.*

— La définition du produit d'un nombre quelconque de facteurs est analogue à celle donnée en arithmétique, et l'on vérifie facilement que :

1° *Si, dans un produit de plusieurs facteurs, on change les signes d'un nombre impair de facteurs, le produit change de signe.*

2° *Si, dans un produit de plusieurs facteurs, on change les signes d'un nombre pair de facteurs, le produit ne change pas de signe.*

32. — **Puissance.** — Rappelons que : *la puissance* n *d'un nombre est le produit de* n *facteurs égaux à ce nombre.*

En appliquant la règle de la multiplication, on a successivement :

$$(-a)^2 = (-a)(-a) = +a^2,$$
$$(-a)^3 = (+a^2)(-a) = -a^3,$$
$$(-a)^4 = (-a^3)(-a) = +a^4,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

On voit donc que :

1° *Les puissances* paires *d'un nombre négatif sont* positives.

2° *Les puissances* impaires *d'un nombre négatif sont* négatives.

33. — **Division.** — *Diviser* a *par* b, *c'est chercher un nombre qui, multiplié par* b, *reproduise* a.

Ce nombre est le *quotient* de a par b.

Je dis que l'on peut écrire :

$$(+15):(-3) = -5.$$

10. Dans un bulletin de l'APMEP des années 80

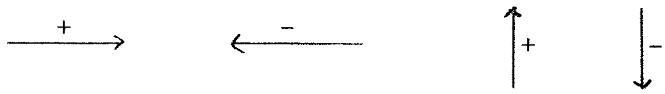
En vertu du principe de continuité....

```
4 × (-3) = - 12
3 × (-3) = -  9   + 3

2 × (-3) = -  6   + 3
1 × (-3) = -  3   + 3
0 × (-3) =    0   + 3

(-1) × (-3) =     + 3        donc    (-1) × (-3) = + 3
(-2) × (-3) =     + 3                (-2) × (-3) = + 6
(-3) × (-3) =     + 3                (-3) × (-3) = + 9
(-4) × (-3) =     + 3                (-4) × (-3) = + 12
  .       .     .                        .          .
  .       .     .                        .          .
  .       .     .                        .          .
```

11. Les aires orientées : l'histoire revisitée en 1788

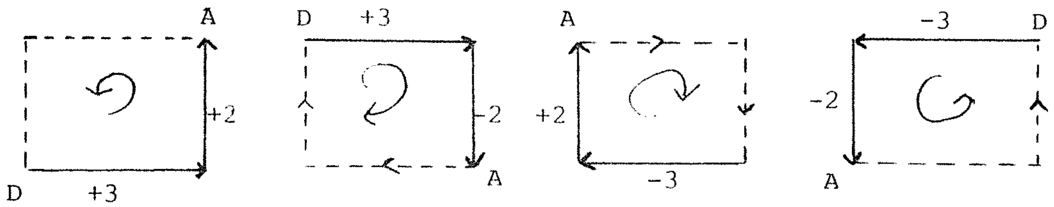
Voici la présentation donnée par un collègue de l'IREM de Lille [21] qui fait la synthèse de l'idée de déplacement et de la représentation du produit de deux nombres par un rectangle comme le faisait Euclide.

Une unité étant choisie un nombre relatif est représenté par un segment orienté, matérialisent un déplacement, soit horizontal, soit vertical :



La somme de deux relatifs se représente à l'aide de deux déplacements successifs.

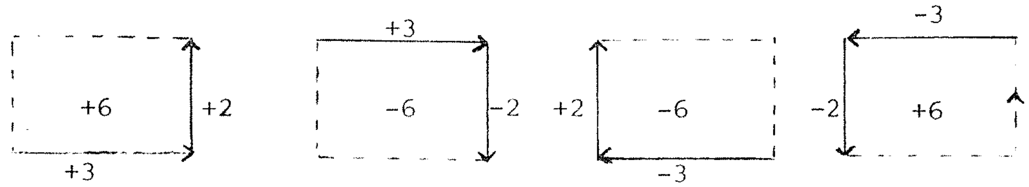
Pour le produit il procède ainsi :



(+3) × (+2) (+3) × (-2) (-3) × (+2) (-3) × (-2)

On n'obtient alors que deux sens de parcours possibles.
On attribue le signe + à celui dont on sait qu'il représente un produit positif : (+3) × (+2) = 3 × 2 = 6 = + 6

Donc on a :



(+3) × (+2) = + 6 (+3) × (-2) = -6 (-3) × (+2) = -6 (-3) × (-2) = + 6

4 - CONSEQUENCES POUR L'ENSEIGNEMENT

1. Le point de vue de Lacroix (1765-1843)

Je me suis convaincu de plus en plus, à chaque cours, que la considération des quantités négatives *isolées* était en général placée trop près du commencement, dans la plupart des livres élémentaires; et cela est d'ailleurs confirmé par l'histoire de la science, où l'on voit que l'explication des solutions négatives des problèmes est un des derniers progrès de l'analyse, dû à Descartes. Aussi la plupart des auteurs ne se sont adressés sur ce sujet qu'à la mémoire; et ceux qui, ne voulant pas en faire un objet d'autorité, ont cherché à expliquer la nature de ces quantités, ont eu recours à des comparaisons forcées, commes celles des *biens* et des *dettes*, qui ne conviennent qu'à des cas particuliers de cette théorie.

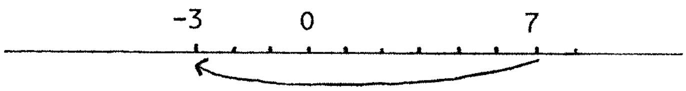
Ce n'est d'ailleurs que par l'application de l'Algèbre à la Géométrie, qu'on peut concevoir dans son ensemble la théorie des quantités négatives, puisque les principales circonstances de cette théorie sont des faits algébriques qu'il faut se contenter de bien constater et de classer ensuite dans l'ordre qui les fait le mieux ressortir. C'est aussi ce que j'ai tâché de faire, craignant, d'après une observation très répétée, l'obscurité que des détails métaphysiques trop étendus et trop multipliés jettent dans l'esprit des commençans; car on abuse aussi en Mathématiques du raisonnement, lorsqu'on s'obstine à ne pas reconnaître certains faits résultant des combinaisons du calcul, qui ne peuvent s'expliquer plus clairement que par eux-mêmes.

[21]

Connaissant maintenant le temps qu'il a fallu pour élaborer la notion de nombre négatif et toutes les difficultés que son apparition a créées, il nous reste à mettre à jour les obstacles qui vont s'opposer à la mise en place des relatifs chez les élèves et à ménager le franchissement de ces obstacles.

2. A propos des nombres relatifs

Pour l'élève de 6ème le zéro est absolu et toute soustraction n'est pas possible. Il s'agit donc de faire comprendre à l'élève que l'on crée de nouveaux nombres qui vont résoudre des problèmes impossibles. Pour faire une soustraction "impossible" au CM_2, du type 7-10, il faut aller au "dessous" de zéro.



3. A propos des opérations

Le bon sens, les bonnes images anciennes doivent évoluer : dans une notion tout ne se généralise pas, ce qui est dur à admettre et surtout à mettre en pratique.

Pour l'addition déjà il y a conflit : une addition de relatifs peut être obtenue à partir d'une addition arithmétique ou d'une soustraction arithmétique. Il faut donc utiliser des soustractions pour faire des additions ! Il faut donc que l'élève comprenne qu'il y a alors généralisation du sens de l'addition et que le + qui signifie "et" change de sens quand le nombre qui le suit est négatif. (cf. Texte de Clairaut 2.4.)

Seul est conservé le sens du "et" : "et ensuite", c'est-à-dire le sens de concaténation.

Pour la soustraction elle garde son nom mais perd son statut puisqu'on la remplace par une addition, celle du nombre opposé. Mais tout d'abord ce qui arrête l'élève c'est que pour lui "la différence c'est le nombre qu'il faut ajouter au plus petit pour obtenir le plus grand" alors que ce qui se généralise c'est "la différence c'est le nombre qu'il faut ajouter au second pour obtenir le premier". (cf. Lacroix 2.4.). Et même si l'élève comprend que 7 - 10 = -3 car c'est relativement immédiat, il a beaucoup de mal à comprendre que (-20) - (+2) soit possible.

4. A propos des écritures simplifiées

Des exercices sur des gains et des pertes traduits sous la forme + 3 - 5 + 1 confortent la perception du nombre comme absolu et du signe comme une affectation : augmentation ou diminution. C'est ce qui a été le cas jusqu'au XIXème siècle (cf. 2.5).De plus si le statut du nombre est flou, celui des opérations est aussi flou. Dans + 3 - 5 + 1 le signe - par exemple désigne une diminution mais en même temps une soustraction !
Face à de telles écritures, deux problèmes se posent :

- où est le nombre négatif ?
- où est l'opération ?

En effet quand j'écris + 3 - 5 (cf. Descartes 2.3.) je fais une soustraction avec des nombres entiers "positifs" et je donne un résultat négatif, + indique que j'ai 3 francs en poche par exemple et - que je perds 5 francs.
A proprement parler il ne s'agit ni d'une addition, ni d'une soustraction avec des relatifs. Si l'on veut que les relatifs aient leur statut de nombre avec leurs opérations il faudrait donc traduire je gagne 3 et je perds 5 par : (+3) + (-5) en mettant bien en évidence le sens de + (qui, lui, a changé alors de statut cf. 4.3).
Par contre une écriture simplifiée du type 3-5 désigne en fait une soustraction et devrait donc être interprétée ou traduite par (+3) - (+5).

5. La multiplication

Pour la multiplication il faut bien mettre en évidence que le modèle concret adopté pour l'addition ne fonctionne pas. On peut rechercher un autre modèle (cf.3.9. et 3.11) mais il faut se rappeler qu'originellement la règle des signes prend racine dans la distributivité donc dans les problèmes de calcul algébrique liés aux équations. Pour lui donner sens peut être vaudrait-il mieux la replacer dans son contexte.

6. A propos des modèles concrets

Des textes des paragraphes précédents montrent bien comment certains modèles concrets, donnés pour faire comprendre ou fonctionner une règle, peuvent soit en entraver la compréhension, soit être un obstacle à la compréhension d'une autre règle : par exemple, un modèle pour l'addition ne fonctionne plus pour la multiplication. C'est le problème de Stendhal (3.1.), c'est ce que rappelle aussi Lacroix (4.1.) et ce qui apparaît aussi dans les objections de Carnot (2.1.). Il faut donc bien avoir conscience, lorsqu'on donne de tels modèles pour faire comprendre, que l'on peut en même temps créer des obstacles, ce qui est peut-être inéluctable : mais il faudra alors prévoir ensuite leur dépassement par les élèves.
En ce qui concerne les relatifs l'important est de se rappeler que ces nombres ont pour fonction de résoudre des problèmes théoriques de type algébrique, et non des problèmes concrets : les modèles concrets ne sont que des aides pédagogiques, et qu'il n'est pas toujours possible, ni même souhaitable, d'en donner.

7. Conclusion

Pour l'enseignement des relatifs nous avons peut-être à tenir deux points de vue complémentaires.
Le point de vue moderne : les relatifs sont de nouveaux nombres pour lesquels on essaie d'étendre et de généraliser les opérations connues. Il s'agit alors de revenir sur le sens de ces opérations.
Le point de vue ancien : les relatifs s'imposent dans la résolution des équations et leurs règles d'emploidécoulant du calcul littéral. Il s'agit alors essentiellement d'un outil algébrique. Ceci devrait inciter à ne pas séparer calcul algébrique-littéral et calcul numérique.

CHAPITRE PREMIER

NOMBRES POSITIFS ET NOMBRES NÉGATIFS

20. — Soit à retrancher le nombre 7 du nombre 5. Au **sens même arithmétique**, cette opération est impossible ; on ne peut, en effet, retrancher 7 de 5.

Dans un but de *généralisation*, l'algèbre ne rejette pas cette opération. On convient de représenter le résultat par — 2 ; on écrit donc :

$$5 - 7 = -2.$$

Le nombre — 2 est dit un nombre *négatif*, et tout nombre précédé du signe + est appelé nombre *positif*.

Les nombres *positifs* et les nombres *négatifs* forment ce qu'on appelle les nombres *algébriques*.

L'introduction des nombres négatifs simplifie certaines questions et permet d'interpréter des résultats qui, tout d'abord, paraissent impossibles ou absurdes. C'est ce qui arrive dans tous les problèmes où la quantité demandée peut être comptée dans deux sens opposés, comme, par exemple, le temps *avenir* ou *passé* ; un gain ou une perte ; une distance qui peut être portée dans un sens ou dans un autre par rapport à une origine choisie ; une température, etc.

Ainsi, imaginons un joueur qui convient de représenter les *gains* qu'il réalise par des nombres *positifs* et les *pertes* par des nombres *négatifs*, puis reprenons l'opération indiquée par 5 — 7. Elle indique qu'une perte de 7 francs a succédé à un gain de 5 francs ; le résultat des deux opérations est donc une perte de 2 francs, qui, par conséquent, sera représentée par le nombre négatif — 2 ; ce qui donne un sens à l'égalité

$$5 - 7 = -2.$$

Si l'on veut exprimer que la perte — 7 *s'ajoute* au gain + 5, on écrira, en plaçant les nombres entre parenthèses :

$$(+5) + (-7),$$

et l'on voit que, en réalité, *ajouter* — 7 revient à *retrancher* 7 ; de sorte que l'on peut écrire :

$$(+5) + (-7) = +5 - 7 = -2.$$

• • •

Le signe + ou — placé devant le nombre arithmétique qui mesure la distance n'est donc pas ici un signe d'opération ; il est employé exclusivement pour indiquer le *sens* dans lequel la distance doit être portée.

Ainsi, un point A situé à la distance + 3 du point O sera à droite de ce point à une distance égale à 3 fois l'unité de longueur ; un point B situé à la distance — 2 du point O sera à gauche de ce point à une distance égale à 2 fois l'unité de longueur. De sorte que l'on écrira :

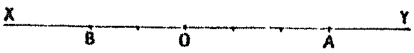


Fig. 2.

$$OA = +3,$$
$$OB = -2,$$

3 et 2 représentant des mètres, des décimètres, des centimètres, ..., suivant que l'unité de longueur est le mètre, le décimètre, le centimètre, ...

— Ainsi, en résumé : *un nombre positif est un nombre arithmétique précédé du signe* +.

Un nombre négatif est un nombre arithmétique précédé du signe —.

En général, *un nombre algébrique est un nombre positif ou négatif*.

22. — ***Valeur absolue d'un nombre algébrique.*** — On appelle *valeur absolue* d'un nombre algébrique, la valeur abstraction faite du signe.

Ainsi, les nombres algébriques + 2 et — 2 ont la même valeur absolue qui est 2.

La valeur obtenue en tenant compte du signe est la valeur *relative*.

Deux nombres algébriques de signes différents, mais de même valeur absolue, sont dits ***égaux et de signes contraires***. On les appelle encore des nombres *opposés*.

• • •

OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES ALGÉBRIQUES

24. — ***Addition.*** — *On appelle somme de deux nombres algébriques un troisième nombre algébrique obtenu comme il suit :*

1° *Si les deux nombres algébriques sont de même signe, leur somme est un nombre algébrique de même signe dont la valeur absolue est égale à la somme des valeurs absolues des deux nombres.*

2° *Si les deux nombres algébriques sont de signes contraires, leur somme est un nombre algébrique dont la valeur absolue est la différence des valeurs absolues des deux nombres, et qui a pour signe le signe du plus grand des deux nombres en valeur absolue.*

Ainsi, en plaçant chaque nombre avec son signe entre parenthèses, on écrira :

$$(+3) + (+5) = +8,$$
$$(-3) + (-2) = -5,$$
$$(+5) + (-3) = +2,$$
$$(+3) + (-5) = -2.$$

Pour justifier cette définition, nous allons faire la *somme* des deux segments ayant respectivement pour mesures les deux nombres algébriques dont on veut faire la somme.

Pour faire la somme de deux segments, on porte le second à la suite du premier dans le sens indiqué par le signe, en plaçant l'origine du second à l'extrémité du premier : *le segment compris entre l'origine du premier et l'extrémité du second est alors la somme des deux segments.*

• • •

28. — ***Soustraction.*** — *Retrancher* **b** *de* **a**, *c'est chercher un nombre tel qu'en l'ajoutant à* **b** *on retrouve* **a**.

Soit à calculer : 5 — (— 3).

Je dis que la différence est 5 + 3. En effet, si à ce nombre on ajoute — 3, on obtient :

$$5 + 3 - 3 = 5.$$

Donc 5 + 3 représente la différence cherchée. Ainsi, on a :

$$5 - (-3) = 5 + 3 = 8.$$

Retrancher — 3 revient donc à ajouter + 3 ; de sorte que la soustraction ainsi généralisée n'implique plus nécessairement l'idée de *diminution*, pas plus d'ailleurs que l'addition qui n'implique pas nécessairement l'idée d'*augmentation*. Aussi, pour éviter l'ambiguïté, on emploie les expressions *somme algébrique* et *différence algébrique*.

On aura de même :

5 - BIBLIOGRAPHIE

[1] Le matin des mathématiciens, Belin, 1985.

[2] HOE.J. Les systèmes d'équations polynômes dans le Siyuan Yujian, 1303.

[3] TATON. Histoire du calcul, Que sais-je ? n° 198, PUF.

[4] ITARD. Matériaux pour l'histoire des nombres complexes, brochure APMEP n° 2, 1969.

[5] MARIE.M. Histoire des Sciences mathématiques et Physqiques tome II, 1883.

[6] ARNAULD. Nouveaux éléments de Géométrie, 1667.

[7] DE L'HOPITAL. Analyse des infiniment petits, 1716.

[8] GLAESER. Epistémologie des nombres relatifs, in Recherches en didactique des mathématiques, vol 2.3., Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble, 1981.

[9] NEVEU. Cours d'Algèbre, Masson 1911.

[10] MAILLARD. Mathématiques 4ème, Hachette, 1959.

[11] LEBOSSE-HEMERY. Mathématiques 4ème, Nathan, 1965.

[12] DHOMBRES et Alia. Mathématiques au fil des âges, Gauthier-Villars, 1987.

[13] SCHUBRING G. Ruptures dans le statut mathématique des nombres négatifs, in Petit x n° 12 ; Irem de Grenoble, 1986.

[14] DESCARTES. La Géométrie, 1637.

[15] Petit x n° 3, Irem de Grenoble, 1983.

[16] CLAIRAUT. Elemens d'Algèbre, 1768.

[17] D'ALEMBERT et Alia. Encyclopédie méthodique Mathématiques, tome 2, 1785. Réédition ACL éditions 1987.

[18] STENDHAL. Vie de Henry Brulard, Gallimard 1973, (folio n° 447).

[19] STEVIN. L'Arithmétique, Leide 1625. (BM LA ROCHELLE).

[20] SIP.J. Les nombres relatifs au Collège, dans Bulletin Inter-Irem, Histoire des mathématiques (à paraître juin 1988).

[21] LACROIX. Essais sur l'enseignement, Bachelier, 1828.

CALCUL NUMERIQUE - EXPERIMENTATION EN 4ème

CALCUL NUMERIQUE - EXPERIMENTATION EN 4ème

CONDITIONS D'EXPERIMENTATION

Le collège

Collège de Vouneuil-sur-Vienne. Ce collège rural compte 530 élèves ; ces élèves sont issus pour la plupart de milieux ouvriers ou employés.

Les classes

Deux quatrièmes de 24 élèves sont concernées.
Ces élèves ont participé au suivi scientifique en 6ème-5ème sur la totalité des programmes de 6ème-5ème.
Les horaires de ces classes sont en parallèle.

L'équipe

Elle est composée de trois professeurs du collège et de l'ex-directeur d'études de mathématiques du centre de P.E.G.C.

Les contenus

Les contenus du programme ont été répartis en dominantes (nous appelons dominante un thème fédérateur qui nécessite un apprentissage spécifique).

En 4ème nous avons retenu les dominantes suivantes :

1) *Calculs numériques*

Exemples de contenus : fractions, relatifs, puissances....

2) *Calculs d'éléments métriques d'une figure*

Exemples de contenus : Pythagore, cosinus, sphère, triangle, rectangle....

3) *Calcul littéral*

Exemples de contenus : équations, conventions d'écritures, priorités opératoires, distributivité.

4) *Parallélisme et orthogonalité*

Exemples de contenus : réciproque de Pythagore, projection, triangle rectangle, médianes...

5) *Transformations*

Exemples de contenus : translations, rotations, vecteurs....

6) *Gestion de données*

Exemples de contenus : proportionnalité, application linéaire.

7) *Manipulation d'inégalités*

Exemples de contenus : inégalité triangulaire, relation d'ordre, inéquation...

L'ordre de présentation de ces dominantes dans le domaine numérique n'est pas important et certaines peuvent être coupées en plusieurs parties afin de ne pas lasser les élèves.

Présentation des contenus aux élèves - gestion des classes

La présentation des contenus, la gestion des classes sont élaborées en fonction des buts que nous nous sommes fixés :

- développer l'autonomie des élèves,
- faire en sorte que chacun atteigne les objectifs, ce qui nous oblige à tenir compte de l'hétérogénéité des classes.

Présentation des contenus

Sauf cas contraire, les contenus sont présentés de la manière suivante :

- *Une activité*

Pour définir une activité nous avons retenu les critères suivants :

. l'énoncé est court (en général) et **compris de tous les élèves**
. la réponse n'est pas évidente
. pour répondre, l'élève devra :

  - soit découvrir la connaissance visée
  - soit découvrir ce qu'il faudrait savoir pour résoudre le problème
  - soit mobiliser les notions antérieures.

Le problème est riche (plusieurs démarches sont possibles ou (et) plusieurs solutions sont possibles). L'élève peut formuler des questions intermédiaires (ce qui exclut un recours à un découpage a priori fait par le professeur).

- *Synthèse de l'activité* (effectuée collectivement)

. formulation des résultats et des démarches par les élèves,
. validation des résultats par la classe et le professeur,
. énoncé des objectifs par les élèves en accord avec le professeur.

- *Exercices didactiques et auto-tests*

- *Test*

Gestion des classes

Les élèves **sont groupés par 4** depuis la sixième, ce qui signifie que le travail est d'abord individuel puis des échanges ont lieu à l'intérieur des groupes. Ces échanges peuvent revêtir plusieurs formes :

- échanges de résultats,
- entraide.

Les groupes se sont constitués par affinité. Le professeur apporte soit des aides individuelles soit des aides aux groupes.
Les énoncés des activités et des exercices sont **sur fiches**.

Avant chaque série d'exercices didactiques, est imposé **un contrat** composé **d'un certain nombre d'exercices** et **d'une durée**.
Exemple : "les 6 premiers exercices sont obligatoires, durée de la fiche 2H".

Cela signifie pour l'élève, que ces 6 exercices doivent être faits à l'issue de ces 2H, libre à l'élève de s'avancer chez lui.

A l'issue des résolutions d'exercices didactiques nous nous efforçons de proposer aux élèves des **auto-tests** portant sur des objectifs purement techniques pour vérifier si ceux-ci sont atteints. Aucune contrainte n'est imposée à

l'élève pour ces auto-tests, il est libre de les faire ou non.
En cas de non atteinte des objectifs, les élèves peuvent consulter un recueil d'exercices supplémentaires auto-correctifs (à faire seul).

A l'issue du test des groupes de besoin peuvent être établis : on regroupe les élèves ayant des difficultés pour un réapprentissage bref (2 ou 3H maximum). Cela est permis par les horaires en parallèle.

Matériels utilisés

Outre le matériel classique (instruments de géométrie, calculatrice) les élèves ont à leur disposition un répertoire où sont consignés les résultats vus depuis la 6ème, le répertoire est complété cette année. (Annexe 1). Il suit l'élève de la sixième à la troisième.

LES PROGRAMMES

1. Nombres relatifs en écriture décimale ou fractionnaire : multiplication ; règle des signes. Division ; approximations décimales d'un quotient. Addition en écriture fractionnaire. Puissances entières d'exposant positif ou négatif. Ecriture des nombres en notation scientifique et en notation ingénieur ; ordre de grandeur d'un résultat. Conventions et priorités opératoires.

2. Généralisation des études précédentes aux calculs portant sur des écritures littérales. Développement d'expressions du style (a + b)(c + d). Exemples simples de factorisation. Réduction de sommes algébriques.

3. Ordre : comparaison de nombres relatifs en écriture décimale ou fractionnaire. Effet de l'addition et de la multiplication sur l'ordre.

4. Résolution de problèmes aboutissant à des équations, à des inéquations du premier degré à une inconnue.

Commentaires et capacités exigibles (projets)

Travaux numériques

La résolution de problèmes (issus de la géométrie, de la gestion de données, des autres disciplines, de la vie courante) constitue l'objectif fondamental de cette partie du programme. Elle nourrit les activités, tant dans le domaine numérique que dans le domaine littéral. Il convient de ne pas multiplier les exercices de technique pure.

La pratique du calcul exact ou approché sous différentes formes complémentaires (calcul mental, calcul à la main, emploi d'une calculatrice) a pour objectifs :

- la maîtrise de règles opératoires de base,
- l'acquisition de savoir-faire dans la comparaison de nombres,
- la réflexion et l'initiative dans le choix de l'écriture appropriée d'un nombre selon la situation.

Le calcul littéral sera introduit avec prudence.

Nombres relatifs en écriture décimale ou fractionnaire

Multiplication; règle des signes. Division ; approximation décimale d'un quotient. Addition en écriture fractionnaire.

Commentaires

Les élèves ont la pratique de la multiplication des nombres positifs en écriture décimale ou fractionnaire. L'extension de cette opération au cas des nombres relatifs s'appuie sur la règle des signes : on pourra s'en tenir aux justifications qui relèvent d'un modèle concret quand cela est possible, par exemple pour le produit d'un nombre relatif par un entier positif, et admettre le résultat dans les autres cas.

Toute étude théorique des propriétés de la multiplication est exclue.

L'usage de la touche $\frac{1}{x}$ pourra aider à l'introduction de la notion d'inverse d'un nombre relatif.

L'addition de deux nombres relatifs en écriture fractionnaire ou la recherche d'une simplification d'écriture peut demander dans certaines situations la détermination de multiples ou de diviseurs communs à deux nombres entiers.
Le plus petit multiple commun et le plus grand diviseur commun pourront être introduits en situation, mais aucune connaissance n'est exigible.

Capacités exigibles

- Effectuer le produit de nombres relatifs simples dans les différents cas de signes qui peuvent se présenter.
- Déterminer une valeur décimale approchée du quotient de deux nombres décimaux positifs.

- En calcul mental, écrit ou à la calculatrice, savoir utiliser les égalités :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \ , \ \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \ , \ \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

où a, b, c, d sont des nombres décimaux relatifs.

- Effectuer la somme de deux nombres relatifs en écriture fractionnaire.

<u>Puissances entières d'exposant positif ou négatif. Ecriture des nombres en notation scientifique et en notation ingénieur. Ordre de grandeur d'un résultat.</u>

Commentaires

Cette rubrique ne doit pas donner lieu à des calculs artificiels sur les puissances entières d'un nombre relatif. On s'en tiendra au cas d'exposants simples et l'on fera le lien entre les deux écritures ($\frac{1}{x}$, x^{-1}) de l'inverse d'un nombre relatif non nul.

Les activités insisteront sur l'usage des puissances de dix. Elles seront motivées par l'emploi de calculatrices, lesquelles utilisent la notation scientifique. La notation ingénieur n'est pas exigible.

Capacités exigibles

- Sur des exemples numériques, écrire un nombre décimal sous différentes formes faisant intervenir une puissance de 10.

Par exemple : écrire 18207,5 sous l'une des formes 182075.10^{-1} ; $1,82075.10^{4}$.

- Utiliser, en liaison avec les calculatrices scientifiques, les égalités
$10^{m}\ 10^{n} = 10^{m+n}$; $\frac{1}{10^{n}} = 10^{-n}$ où m et n sont des nombres entiers relatifs.

- Savoir utiliser, pour des exposants très simples, des égalités telles que :

$$a^{2} \times a^{3} = a^{5}, \ \frac{a^{2}}{a^{5}} = a^{-3} \ , \ (ab)^{2} = a^{2}b^{2}$$

où a et b sont des nombres relatifs non nuls.

- Encadrer un nombre positif par deux puissances de 10 successives.

Conventions et priorités opératoires.

Commentaires

Comme en cinquième sur les nombres positifs, l'étude de situations faisant intervenir des enchaînements d'opérations sur les nombres relatifs entraînera les élèves :

- à l'usage des priorités opératoires et aux conventions usuelles d'écriture,
- à l'organisation et à la gestion d'un programme de calcul, par exemple en plaçant ou en supprimant des parenthèses dans une expression correspondant à un calcul donné.

Capacités exigibles

- Sur des exemples numériques issus en particulier de situations géométriques ou de la vie courante écrire, en utilisant correctement des parenthèses, des programmes de calcul portant sur des sommes ou des produits de nombres relatifs. Organiser et effectuer les séquences de calcul correspondantes.

Généralisation des études précédentes aux calculs portant sur des écritures littérales. Développement d'expressions du style $(a + b)(c + d)$. Exemples simples de factorisation. Réduction des sommes algébriques.

Commentaires

On évitera de donner à ce paragraphe une place excessive.
Les activités de développement et de factorisation prolongent celles de la classe de cinquième qui prenaient appui sur l'expression $k(a + b)$. Elles devront répondre à un objectif précis (gestion d'un calcul numérique, résolution d'une équation) qu'il conviendra d'expliciter. Toute étude d'expressions à plusieurs variables introduites a priori est exclue, ainsi que tout exercice de virtuosité.

Les activités s'articuleront essentiellement suivant deux axes :

- utilisation d'expressions littérales pour des calculs numériques,
- utilisation du calcul littéral dans la mise en équation et la résolution de problèmes divers.

Le développement de certaines expressions du type $(a + b)(c + d)$ peut conduire à des simplifications d'écriture, mais les égalités remarquables ne sont pas au programme ; l'objectif est d'apprendre aux élèves à développer pas à pas $(a + b)(c + d)$ en une somme de quatre termes.

Capacités exigibles

- Sur des exemples numériques ou littéraux développer une expression du type $(a + b)(c + d)$.

- Effectuer une factorisation simple, le facteur pouvant être numérique ou littéral.

- Enchaîner deux mises en facteur, la première étant indiquée. Par exemple achever la factorisation de $a(a + 3) + 2a + 6$.

- Réduire une expression algébrique par regroupement de termes semblables.

- Savoir contrôler un développement ou une factorisation d'une expression littérale par des substitutions de valeurs numériques à la variable en jeu.

Ordre : comparaison de nombres relatifs en écriture décimale ou fractionnaire. Effet de l'addition et de la multiplication sur l'ordre.

Commentaires

La pratique de la comparaison de deux nombres relatifs acquise en classe de cinquième doit s'étendre au cas d'écritures fractionnaires. Les élèves apprendront à utiliser selon la situation un procédé direct de comparaison (écritures de même dénominateur ou de même numérateur, signe de la différence,...) ou, en l'argumentant, une procédure de comparaison s'appuyant sur des valeurs approchées des deux nombres.

Capacités exigibles

- Comparer deux nombres relatifs simples en écriture décimale ou fractionnaire.
- Ecrire les encadrements résultant de la troncature ou de l'arrondi à un rang donné d'un nombre positif en écriture décimale.
- Savoir utiliser le fait que des nombres relatifs de la forme $a + b$ et $a + c$ sont dans le même ordre que b et c.
- Savoir utiliser le fait que des nombres relatifs de la forme ab et ac sont dans le même ordre que b et c si a est strictement positif.

Résolution de problèmes aboutissant à des équations, ou des inéquations du premier degré à une inconnue.

Commentaires

Ces problèmes interviennent dans les différentes parties du programme.
On dégagera, sur les exemples étudiés, les différentes étapes du travail : mise en équation, résolution de l'équation, interprétation du résultat.
Pour les inéquations, on se limitera à une simple initiation.
Le programme porte uniquement sur des équations et inéquations du premier degré ; sont donc exclus des problèmes aboutissant par exemple à $(x - 2)(2x - 3) = 0$,

Capacités exigibles

- Mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une équation du premier degré à une inconnue.
- Déterminer, et placer graphiquement, les solutions d'une inéquation telle que $2x \geqslant 3,5$ ou $3x \leqslant -5$. (Coefficient de x positif).

NOS CHOIX

- **Deux dominantes** recouvrent la partie "travaux numériques" :

  - calculs numériques
  (fractions, relatifs, puissances,....)

  - calcul littéral
  (usage des lettres, mises en équation, résolution d'équation, conventions d'écritures...)

  Certains libellés du programme ont rapport avec ces deux parties voire avec d'autres parties.

  Exemples : les puissances interviennent aussi en calcul littéral, "les manipulations d'inégalité" interviennent aussi bien sur les fractions, les relatifs et même les écritures littérales qu'en géométrie (inégalité triangulaire).

  Conformément à l'esprit du programme nous évitons le cloisonnement. Ainsi : des résolutions d'équations apparaissent dans la partie calcul numérique (ce qui permet de revoir certains résultats de 5ème sans pour autant faire des révisions systématiques). Ceci est alors considéré comme un objectif secondaire.

- **Repérage des difficultés sur la partie calcul numérique**

  (Nous renvoyons à la brochure "Calcul littéral" en 5ème pour l'analyse des difficultés sur cette partie).

  * *Mathématiques pratiques et mathématiques théoriques*

  Par mathématiques pratiques nous entendons les mathématiques qui servent à résoudre des problèmes de la vie courante.

  Les mathématiques théoriques sont par opposition celles qui servent à résoudre des problèmes purement mathématiques.

  Au collège certaines notions n'ont de sens que dans un domaine précis (pratique ou théorique) d'autres interfèrent avec les deux.
  Les difficultés sont à deux niveaux :

  - **l'enseignant** : dans quelles mathématiques doit-il se placer ?

  - **l'élève** : dans quel domaine doit-il formuler un résultat ?

  Ainsi dans la dominante calcul numérique:

  - **L'élève**

  Il doit savoir, suivant le contexte, formuler le résultat dans le domaine requis.

  Exemple : $3x = 5$

  - $x = \frac{5}{3}$ s'il s'agit de trouver le nombre qui multiplie par 3 donne 5 (mathématiques théoriques),

  - $x = 1,66$ s'il s'agit de trouver le prix d'un cahier sachant que 3 valent 5 F.

- Le professeur

Deux exemples :

Les relatifs

Il s'agit essentiellement de mathématiques théoriques et non pratiques ; le problème est d'étendre le domaine de validité des opérations + ou ×, ou de réduire le domaine des équations du premier degré que l'on ne sait pas résoudre.

De ce point de vue deux phrases des projets de commentaires semblent dangereuses:

- *" L'extension de cette opération (multiplication) au cas des nombres relatifs s'appuie sur la règle des signes : on pourra s'en tenir aux justifications qui relèvent d'un modèle concret quand cela est possible, par exemple pour le produit d'un nombre relatif par un entier positif et admettre le résultat dans les autres cas".*

- *"Sur des exemples numériques issus en particulier de situations géométriques ou de la vie courante écrire en utilisant correctement des parenthèses, des programmes de calcul portant sur des sommes ou des produits de nombres relatifs".*

Le danger de la première phrase est que l'élève cherche une représentation mentale de la situation (–) × (–) qui ne contredise par les représentations mentales qu'on lui a plus ou moins données pour l'addition (dettes, recettes par exemple). Devant l'impossibilité d'une telle représentation il risque d'y avoir blocage (cf. Stendhal cité par Glaeser).

En ce qui concerne la deuxième phrase, est-il possible de trouver des situations géométriques ou de la vie courante qui portent sur le produit de nombres relatifs ?

L'inverse d'une fraction : exprimer sous forme d'une fraction, l'inverse ou le quotient de 2 fractions, semble relever plus du domaine théorique que du domaine pratique contrairement à la multiplication de 2 fractions positives qui peut être illustrée par de nombreux exemples concrets.

* *Ordres de grandeurs, valeurs approchées, valeurs exactes*

La distinction de ces 3 notions n'est pas clairement faite par les élèves et bien souvent les situations proposées ne font que renforcer des théorèmes en actes (résultats admis par les élèves par recours à l'expérience) qui sont faux. Ainsi pour eux :

- Une valeur approchée ne peut s'exprimer que sous la forme d'un décimal.
- Une valeur exacte ne peut être qu'une fraction ou un entier.
- Un ordre de grandeur est identique à une valeur approchée.

Exemples : - $\frac{1}{8}$ est une valeur exacte du résultat : $\frac{7}{8} - \frac{3}{4}$; 0,125 en est une valeur approchée.

- $\frac{22}{7}$ est la valeur exacte de π (cité par les élèves).

- $\frac{2,8}{1,2} \simeq 2$ est considéré comme une valeur approchée alors que c'est un ordre de grandeur.

* *Mélange entre les règles d'addition et de multiplication de fractions*

Cette difficulté doit être moins importante que les autres années car :

- des situations additives sur les fractions ont été rencontrées depuis la sixième,
- les élèves ont travaillé les différents sens de la fraction,
- les élèves sont habitués à représenter des fractions.

* *Les difficultés des notations sur les fractions*

Doit-on se contenter comme le prescrivent les capacités exigibles de la notation $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ ou introduire la notation :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} .$$

De même : $a : \frac{b}{c}$, $\frac{b}{c} : a$, ou $\frac{a}{\frac{b}{c}}$; $\frac{\frac{b}{c}}{a}$ ou $a / \frac{b}{c}$

ou a/b / c/d ....

* *Puissances*

Plusieurs difficultés.

- La lourdeur des programmes :

En une même année, les élèves doivent voir :

. les notations a^n et a^{-n},
. les priorités opératoires liées à l'emploi des puissances,
  2×3^2 , $(2 \times 3)^2$, $(-3)^4$, -3^4 ....
. les encadrements d'un nombre par des puissances de 10
. les notations ingénieur et scientifique,
....
Ce qui fait beaucoup en une seule année !

- L'usage de la calculatrice

. Les calculatrices diffèrent dans l'affichage des notations scientifique et ingénieur. Ainsi 0,03 peut être affiché 3.-02 ou 3^{-02}....
. Les affichages peuvent induire en erreur :

* 3.-0 2 peut être transformé en 2,98

* 2.03 peut être transformé en 8 (2^3) ou en 2,03.

. Doit-on faire usage des touches $\boxed{\text{exp}}$ ou $\boxed{x^y}$ ainsi que de celles donnant les notations scientifique et ingénieur ?

- Les puissances de 10 sont privilégiées

Il convient de faire fonctionner les puissances positives et négatives sur des nombres autres que 10, sinon nous risquons de voir apparaître des théorèmes-élèves erronés du type :

$$10^{-3} = 0,\underbrace{00}_{}1$$

$\hookrightarrow$ 3 zéros

$$2^{-3} = 0,\underbrace{00}_{}2$$

$\hookrightarrow$ 3 zéros

- Réinvestissement des puissances de 10 dans le programme

Toute notion vue doit être largement réutilisée (cf. l'esprit du programme) or cette partie peut-elle être facilement réinvestie si ce n'est sur la partie "sphère" en liaison avec la géographie ? A moins que les physiciens ne l'utilisent.

NOTRE DEMARCHE

Elle comporte 5 volets qui sont :

- addition de 2 fractions,
- comparaison de 2 fractions,
- multiplication de nombres relatifs,
- division de fractions,
- puissances.

PREMIERE PARTIE

Addition de 2 fractions

FEUILLE N° 1

ADDITION DE DEUX NOMBRES RELATIFS EN ECRITURE FRACTIONNAIRE

Activité 1

Au collège de Vouneuil : à la rentrée 1985 : 160 élèves sont en sixième
en septembre 1986 : - 10% redoublent
- 1 sur 16 va en CPPN
en juin 1987 : - $\frac{5}{9}$ des élèves vont en quatrième
- $\frac{1}{6}$ redoublent leur 5ème
- $\frac{1}{9}$ quittent le collège
- Les 27 qui restent vont en CPPN, en 5ème S_2 ou en 4ème L.

Quelles questions peut-on se poser ?

Objectifs

Activité 2

Donne la valeur exacte et une valeur approchée de $\frac{37}{1,02} - \frac{7}{0,3}$

Objectifs

Contrat : les exercices 1, 2, 3, 4, 5, 6,7, 9, 10, 12, 13, 14, 16 et 17 sont obligatoires. Les exercices 8, 11, 15 sont facultatifs.

Temps : le temps en classe sera de 4 heures.

FEUILLE N° 2

Ex 1 : Ecris sous la forme d'une seule fraction.
Le résultat trouvé est-il conforme à celui donné par la calculatrice ?

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ $\qquad$ $\frac{2}{5} + \frac{3}{4}$ $\qquad$ $\frac{5}{0,2} + \frac{1,2}{3,3}$ $\qquad$ $(-\frac{2}{3}) + \frac{7}{11}$

$\frac{2}{5} - \frac{7}{6}$ $\qquad$ $\frac{5}{4} \times \frac{2}{7}$ $\qquad$ $(-\frac{7}{9}) - \frac{4}{11}$ $\qquad$ $3 + \frac{5}{7}$

$\frac{3}{5} + \frac{8}{12} - \frac{4}{15}$ $\qquad$ $\frac{2}{6} - (-\frac{4}{3}) + \frac{3}{1,5}$ $\qquad$ $\frac{1}{3} - \frac{1}{4 \times 2}$

$3 \times (\frac{1}{3} + \frac{1}{9})$ $\qquad$ $(\frac{5}{6} + \frac{4}{3}) \times \frac{3}{2}$ $\qquad$ $\frac{4}{3+4} - (\frac{4}{3} + \frac{5}{6})$

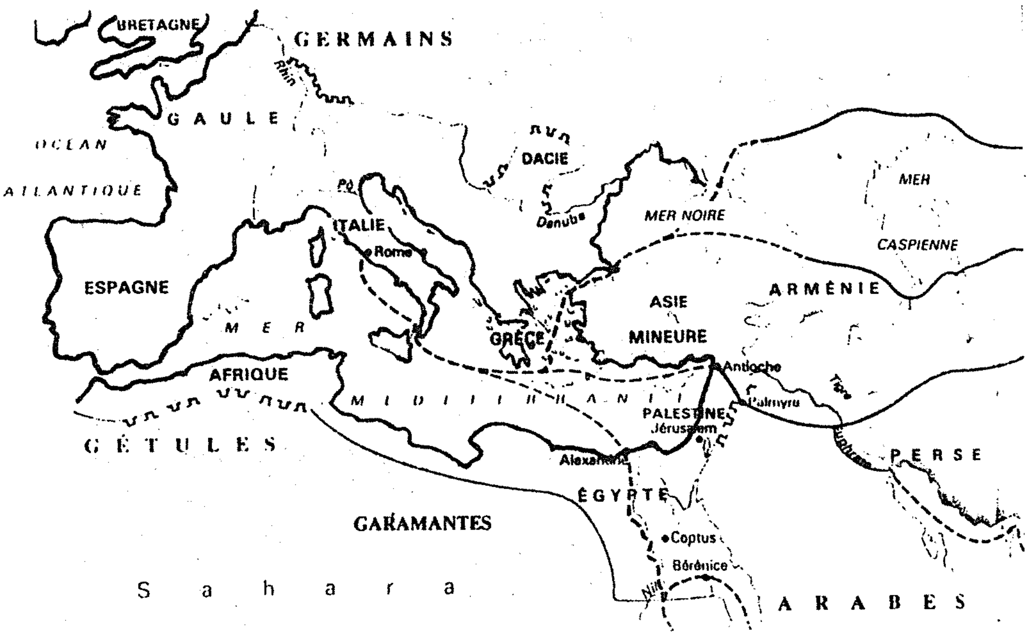
$-\frac{8}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{4}{5}$ $\qquad$ $\frac{1,6}{4,8} - \frac{3,7}{7,4}$ $\qquad$ $(2 - \frac{1}{3}) \times 3 + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5})$

Ex 2 : Prouve que :

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$$

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68} = \frac{6}{289} \times \frac{17}{3}$$

Ex 3 : Les fractions en Egypte antique (2 000 ans avant J.C.).

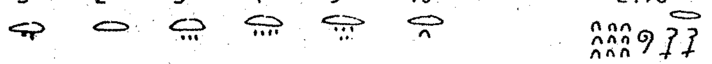


FEUILLE N° 3

Les Egyptiens connaissaient seulement des fractions de numérateur 1 et la fraction $\frac{2}{3}$.

Notation des fractions : à part $\frac{2}{3}$, les seules fractions exprimées sont les $\frac{1}{n}$; à part $n = 2$, $\frac{1}{n}$ se note par n, surmonté du hiéroglyphe qui signifie bouche ou part. $\overset{}{n}$ signifie donc "part n", ou $n^{\text{ième}}$ partie, que par abus de langage on représente par notre fraction $\frac{1}{n}$

$\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{2190}$



- Ainsi le scribe Ahmes écrit toute autre fraction comme somme de fractions différentes dont le numérateur est 1 :

  exemple :

$$\frac{5}{13} = \frac{1}{4} + \frac{1}{26} + \frac{1}{52} + \frac{1}{13}$$

Comment Ahmes aurait-il écrit :

$\frac{9}{20}$?

$\frac{5}{18}$?

- Voici comment il trouvait le double de $\frac{1}{7}$:

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{1}{14} + \frac{1}{14} + \frac{1}{7} = \frac{1}{28} + \frac{1}{28} + \frac{1}{14} + \frac{1}{7} = \frac{1}{28} + \frac{1}{4}$$

  Peux-tu vérifier la justesse du calcul ?

- Avec ta technique, peux-tu prouver que : $\frac{1}{28} + \frac{1}{4} = \frac{2}{7}$

- Peux-tu prouver que le tiers de $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ est égal à $\frac{1}{2} + \frac{1}{36}$?

<u>Ex 4</u> : Les $\frac{3}{4}$ d'un nombre ajoutés à ses $\frac{2}{5}$ donnent 46. Quel est ce nombre ?

<u>Ex 5</u> : Peux-tu trouver x pour que $\frac{7 + x}{15} = \frac{3}{4}$?

<u>Ex 6</u> : Les $\frac{2}{3}$ d'un champ rectangulaire sont partagés en 4 lots de même aire. Quelle fraction de l'aire du champ représente chaque lot ?

FEUILLE N° 4

Ex 7 : a et b sont deux nombres tels que :

$2{,}1 \times a = 0{,}35$

$39 \times b = 4{,}2$

Donne la valeur exacte et une valeur approchée de $a + b$ et de ab.

Ex 8 : Un champ est cultivé $\frac{2}{3}$ en pommes de terre, $\frac{1}{4}$ en haricots verts et le reste en fraises.
Quelle est la fraction de champ cultivée en fraises ?

Si les dimensions du champ sont 120 m et 72,5 m, quelle est l'aire de chaque parcelle ?

Ex 9 : Peux-tu trouver a pour que $\frac{a}{3} + \frac{5}{2} = 7$?

Ex 10 : On partage une somme entre 4 personnes. La première en a les $\frac{3}{18}$ la deuxième le quart, la troisième le cinquième.

Quelle fraction de la somme a la quatrième ?

Ex 11 : De combien doit-on augmenter le numérateur de la fraction $\frac{1}{3}$ pour obtenir $\frac{3}{4}$?

Ex 12 : Une colonie de fourmis mange les $\frac{2}{3}$ de sa réserve de grains de blé dans les deux premiers mois de l'hiver, puis le quart de ce qui lui reste les trois mois suivants. Elle possède encore 216 grains de blé.

Quelle était sa réserve avant l'hiver ?

Ex 13 : Prouve que :

$$\frac{6}{5 - 2 \times 2} = 9 - \frac{3 \times 7 - 6}{5}$$

$$\frac{7}{0{,}2} + \frac{9{,}2}{3{,}2} = \frac{58 + 35 \times 7}{8}$$

$$\frac{3{,}6}{2 + 3{,}2 \times 5} = \frac{2 + 7 \times 4}{72 \times 5} + \frac{3{,}5}{6 \times 5}$$

Ex 14 : Calcule : $165 \,\underline{|\, 99}$ et $5 \,\underline{|\, 3}$

Que constates-tu ? En es-tu sûr ? Pourquoi ?

FEUILLE N° 5

Ex 15 : On sait que $a = \frac{6}{7}$ et que $b = \frac{8}{5}$.

Donne la valeur exacte et une valeur approchée de :

$a + b$	$a - b$	$a \times b$
$a^2 + b^2$	$(a + b)^2$	$\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

Ex 16 : Un grand père partage sa fortune.

Il donne $\frac{1}{5}$ à son fils André, $\frac{2}{8}$ à sa fille Jeanne, le double de la part d'André à ses petits-enfants et le reste à la recherche contre le cancer.

Quel pourcentage de la fortune est consacré à la recherche ?

Ex 17 : Les $\frac{4}{9}$ d'un capital sont placés à 8% et le reste à 9%.

Les intérêts annuels sont de 1 540 F. Trouve le capital et le montant de chacune des parties.

OBJECTIFS

- Mettre en place le mécanisme de l'addition de fractions "relatives".
- Situer cette connaissance dans le contexte des autres connaissances.

Objectifs secondaires

- Réutiliser :
  - les règles opératoires connues : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$, $a \times \frac{c}{b}$, $\frac{a}{b} + \frac{c}{b}$
    $a + \frac{c}{d}$ a, b,c, d positifs
  - les multiplications de fractions
  - les connaissances sur les pourcentages
  - les priorités opératoires

- Résoudre des équations.
- Distinguer valeur exacte, valeur approchée, ordre de grandeur.
- Exécuter des programmes de calculs.
- Gérer des données.

SITUATION TEMPORELLE : septembre

ORGANISATION DE LA CLASSE

La classe est organisée suivant le schéma décrit page 44. Les élèves ont à leur disposition des calculatrices.

DEROULEMENT ET COMMENTAIRES

Activités n°1 et 2 durée 2h - (feuille n° 1)

Activité n° 1

Choix de l'activité

Cette activité permet d'introduire l'addition et la soustraction de 2 fractions. Elle permet en outre de revoir :

- le produit d'un entier par une fraction
- le calcul d'un pourcentage
- le calcul d'un taux de pourcentage
- le calcul d'une fraction de grandeur
- le passage fraction-pourcentage

En outre les nombres sont ceux qui correspondent à leur promotion (certains ont été arrondis à l'unité inférieure ou supérieure pour simplifier les calculs).

A noter que pour les élèves ce problème est concret.

La "4 L" correspond à la première année d'un cycle 4-3 sur 2 ans.

Déroulement prévu

- Recueil des questions que se posent les élèves.
- Recherche des réponses aux questions.

Déroulement effectif

Les élèves sont nullement déroutés par ce genre d'activité. Il est à noter que les premières questions concernent les nombres d'élèves, celles ayant trait aux pourcentages sont moins immédiates.

La synthèse des différentes questions est copiée sur un tableau papier mural. Voici une liste possible de questions que l'on a recueillies sur les deux classes.

En septembre 1986

1) Combien d'élèves de 6ème vont en 5ème ?
2) Combien d'élèves redoublent la 6ème ?
3) Combien d'élèves vont en CPPN ?
4) Combien d'élèves ne vont pas en 5ème ?
5) Quel pourcentage va en CPPN ?
6) Quel pourcentage va en 5ème ?
7) Quelle fraction redouble la 6ème ?

En septembre 1987

8) Combien d'élèves vont en 4ème ?
9) Combien d'élèves redoublent la 5ème ?
10) Combien d'élèves quittent le collège ?
11) Combien d'élèves restent au collège ?
12) Combien d'élèves ne vont pas en 4ème ?
13) Quel est le pourcentage d'élèves de 5ème qui vont en CPPN, 5ème S_2, 4ème L (lente).
14) Quelle est la fraction d'élèves de 5ème qui vont en CPPN, 5ème S_2, 4ème L (lente).
15) Quelle fraction d'élèves de 6ème représentent ceux qui vont en 4ème ?

A l'issue de cette synthèse le professeur demande ce qu'il faudra savoir faire pour répondre à ces questions et invite les élèves à se remémorer les techniques opératoires.

Les premiers objectifs sont inscrits sur le dossier

Je dois savoir : - *multiplier une fraction par un nombre*
- *calculer un pourcentage*
....

Il est demandé aux élèves de répondre à ces questions pour l'heure suivante.

Au début de la deuxième heure la feuille de questions est remise au tableau et les élèves proposent leurs solutions.

Les difficultés

Des mises au point sont nécessaires sur le calcul d'un taux de pourcentage et des explications concernant le problème sont fournies.

* *La question 8*

Les élèves ayant pris 134 comme nombre d'élèves de 5ème en 86-87 (nombre de 6ème diminué du nombre de redoublants et du nombre de CPPN), leurs calculs ne donnent pas un nombre entier d'élèves. Certains proposent d'arrondir ; le professeur interroge les élèves sur la provenance des élèves de 5ème en 86-87. Ils en concluent que le nombre de 5ème est au moins de 134 car il faut tenir compte des redoublants de 5ème, de ceux qui viennent de l'extérieur et dont on ne connaît pas le nombre.

La question reste donc ouverte sur le nombre de 5ème en 86-87. Habitués à représenter des situations par des dessins, les élèves proposent donc cette représentation.

redoublants 1/6	quittent le collège 1/9	5/9 qui vont en 4ème	27 qui vont en CPPN

Le calcul de la fraction représentée par les 27 élèves est effectué

par la somme de fractions. Puis la mise en équation $\frac{1}{6} \times x = 27$ permet de trouver le nombre d'élèves de 5ème.

* *La question 15*

Elle ne pose pas de problème technique mais l'analyse préalable permet de conclure que l'on ne peut répondre à cette question faute de données.

A la suite de cette synthèse la case "objectifs" est complétée sur le dossier.

Je dois savoir : - *ajouter des fractions*
- *calculer un taux de pourcentage*
- *transformer des fractions*
- *résoudre une équation.*

Activité n° 2

Choix de l'activité

Les nombres ont été choisis fractionnaires non décimaux. Il s'agit de faire différencier valeur exacte (domaine des "mathématiques théoriques") et valeur approchée (domaine des "mathématiques pratiques").

Déroulement

Les calculatrices sont à la disposition des élèves mais ils s'aperçoivent vite qu'elles n'apportent aucune aide pour la valeur exacte. La réduction au même dénominateur pour effectuer la différence ne pose pas de problème et des dénominateurs très variés sont choisis.

Pour trouver une valeur approchée le recours à la division n'est pas automatique, quelques élèves confondent ordre de grandeur et valeur approchée. Ainsi $\frac{37}{1{,}02}$ est transformé en $\frac{37}{1}$ puis en 37.

Il est donc nécessaire d'apporter une précision à ce sujet.

Les objectifs sont écrits sur le dossier :

Je dois savoir : - soustraire des fractions (mettre au même dénominateur)
- simplifier des fractions
- trouver une valeur approchée (division, calculatrice) et une valeur exacte (calcul).

EXERCICES

Durée et contrat sont précisés sur le dossier, les élèves doivent donc organiser leur travail.

Ex 1 : sa durée est environ 1 h 30 à 2 h en classe. Les élèves ont la possibilité de s'auto-corriger, une feuille avec les résultats étant donnée après une heure de travail.
Cet exercice permet une mise au point sur l'addition et la soustraction de nombres relatifs.

Les plus grandes sources d'erreurs portent sur :
- les additions et multiplications avec entiers et fractions
- les priorités opératoires pourtant connues
- la non simplification des termes ou facteurs avant les calculs ce qui entraîne l'usage de grands nombres.

Ex 2 : il ne pose aucun problème technique mais pose des problèmes de présentation des résultats.

Exemple :

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$$
$$\frac{2}{9} = \frac{3}{18} + \frac{1}{18}$$
$$\frac{2}{9} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

Ex 3 : il nous a semblé important d'introduire un côté culturel et historique dans les exercices. La carte était celle de leur livre d'histoire de 6ème.

Pour l'écriture de $\frac{9}{20}$ il y a eu parfois recherche des diviseurs de 20 inférieurs à 9 : $\frac{9}{20} = \frac{4}{20} + \frac{5}{20}$ puis simplification : $\frac{9}{20} = \frac{1}{5} + \frac{1}{4}$

Les résultats trouvés sont variés :

$$\frac{9}{20} = \frac{1}{20} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$$
$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{40} + \frac{1}{80} + \frac{1}{80} + \frac{1}{10} + \frac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \frac{1}{5} + \frac{1}{80} + \frac{1}{10} + \frac{1}{16}$$

$$\frac{5}{18} = \frac{1}{18} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}$$
$$= \frac{1}{36} + \frac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{9}$$

Le tiers de $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ est parfois compris comme le tiers de 1 ajouté à $\frac{1}{3}$ et à $\frac{1}{4}$.

Certains élèves ont donné les résultats avec les hiéroglyphes !

Ex 4 : le texte est souvent interprété par :"chercher les $\frac{3}{4}$ de 46 ajoutés aux $\frac{2}{5}$ de 46"

Une aide doit donc être apportée pour le décodage du texte, le problème est alors mis en équation (certains élèves en difficultés écrivent $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = 46$ ou $\frac{3}{4}\ x + \frac{2}{3} = 46$).

La mise en facteur de l'inconnue n'est pas faite systématiquement et il faut un retour au répertoire, cette notion est donc en cours d'acquisition et les exercices ultérieurs devront pallier ce manque.

Certains élèves résolvent le problème sans mise en équation bien qu'elle soit sous-jacente $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{23}{20} = 1,15$

$$46 : 1,15 = 40$$

Ex 5 : 3 procédures sont utilisées.

- Mise au dénominateur 15

$$\frac{7 + x}{15} = \frac{11,25}{15} \quad \text{puis calcul de} \quad x = 11,25 - 7$$

- Ecriture de $\frac{3}{4}$ sous forme décimale

$$\frac{7 + x}{15} = 0,75 \qquad 7 + x = 0,75 \times 15 \qquad 7 + x = 11,25 \qquad x = 11,25 - 7$$

- Mise au dénominateur 60 avec difficulté pour écrire le numérateur de la fraction (certains écrivent $\frac{28 + x}{60}$ bien qu'ils perçoivent qu'il y a un problème pour x et demandent conseil)

$$\frac{28 + 4 \times x}{60} = \frac{45}{60} \quad \text{puis} \quad 28 + 4 \times x = 45$$
$$4 \times x = 17$$
$$x = 17 : 4$$

Ex 6 : le recours au dessin est utilisé par certains, on retrouve l'apprentissage de la 6ème. Le calcul est alors mené à bien malgré une confusion chez quelques élèves pour le sens "du quart de $\frac{2}{3}$ " écrit comme $\frac{2}{3} : \frac{1}{4}$.

Ex 7 : on peut s'apercevoir que le problème du nombre décimal reste latent. Pour les élèves, lorsque l'on a $3 \times x = 5$ il en découle immédiatement que $x = \frac{5}{3}$ mais cette démarche n'est pas spontanée pour $2{,}1 \times a = 0{,}35$. Une mise au point est nécessaire.

Pour ces calculs la simplification n'est pas faite systématiquement, les élèves n'ayant pas "subi" d'exercices répétitifs avec simplification de fractions. Le professeur montre à chaque fois que l'occasion se présente que la simplification donne souvent des nombres simples avec des calculs réalisables de tête ce qui élimine des sources d'erreur.

Le retour au répertoire est nécessaire pour le sens de **ab** (oubli du signe ×) En 5ème il a été vu dans quels cas on pourrait supprimer le signe "×" mais il faut noter que cette "simplification" n'est pas du tout évidente pour l'élève (bien que rapidement traitée et utilisée dans de nombreux manuels).

Ex 9 : différentes procédures sont utilisées.

- mise au dénominateur 6 dans les deux membres

$\frac{2 \times a}{6} + \frac{15}{6} = \frac{42}{6}$ puis $2 \times a + 15 = 42$ et calcul de a

- écriture de $\frac{5}{2}$ sous forme décimale

$\frac{a}{3} + 2{,}5 = 7 \qquad \frac{a}{3} = 4{,}5 \qquad a = 13{,}5$

- changement de variable

$\frac{a}{3} + \frac{5}{2} = \frac{a}{3} + \frac{15}{6} = \frac{D}{6} + \frac{15}{6} = 7$

$\frac{D}{6} = \frac{42}{6} - \frac{15}{6} = \frac{27}{6}$

$\frac{27}{6} : 2 = \frac{a}{3} = \frac{13{,}5}{3} \qquad a = 13{,}5$

$\frac{a}{3} = 7 - \frac{5}{2} = \frac{14}{2} - \frac{5}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5 \qquad a = 3 \times 4{,}5$

$\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2} = 2 + \frac{3}{6}$ il faut donc ajouter $\frac{3}{6} + 4$ pour obtenir 7 donc $\frac{a}{3} = \frac{3}{6} + 4 = \frac{27}{6} = 4{,}5$; $a = 13{,}5$.

Ex 12 : la première difficulté provient du décodage du texte. Ensuite différentes procédures sont utilisées.

- Globalisation du problème avec mise en équation

$a - \frac{2}{3} \times a - (1 - \frac{2}{3}) \times \frac{1}{4} \times a = 216$

$a - \frac{2}{3} \times a - \frac{1}{12} \times a = 216.$

A ce stade la mise en facteur de a n'est pas du tout évidente car a n'est pas perçu comme $1 \times a$.

Les élèves conçoivent très bien que $1 \times a$ s'écrive a mais le passage contraire leur semble dénué de raison.
Une étude plus systématique de la factorisation sera menée en calcul littéral plus tard dans l'année. Ce type de factorisation est une réelle difficulté même pour les "bons" élèves.

Pour isoler a le problème est résolu en écrivant

$$\frac{12}{12} \times a \quad - \quad \frac{9}{12} \times a \quad = \quad 216.$$

- Le problème est scindé en plusieurs parties et la mise en équation ne se fait qu'en fin de recherche:

- recherche de la fraction qui reste, après les deux premiers mois,
- recherche de la fraction mangée pendant les 3 mois suivants,
- recherche de la fraction qui reste en fin d'hiver
- mise en équation $\frac{1}{4} \times x = 216.$

- Problème résolu graphiquement jusqu'à $\frac{1}{4} \times x = 216.$

Noter que cet exercice fait fonctionner la multiplication et l'addition de fractions.

Ex 13 : il permet de revoir les priorités opératoires y compris la priorité du "grand trait" de fractions.

Ex 14 : cet exercice permet de refaire le point entre les fractions et les divisions. Après calcul des divisions ; les élèves écrivent que les fractions sont égales car $\frac{165}{99} = \frac{5}{3}$ (: 33). D'autres se contentent de réponses plus imprécises : "*j'en suis sûr car 165 est multiple de 5 et 99 est multiple de 3*".

Ex 15 : cet exercice a été utilisé comme auto-test.

Ex 16 : le texte de l'exercice 16 est traduit de plusieurs façons :

- $\frac{1}{5} + \frac{2}{8} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right)$ puis $\frac{40}{40} - \frac{34}{40} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20} = \frac{15}{100}$
- $\frac{1}{5} + \frac{2}{8} + \frac{1}{5} \times 2$
- $\frac{1}{5} + \frac{2}{8} + \frac{2}{5} + a = 1$

Ex 17 : il faut revenir au sens des mots du texte : **capital** et **intérêt** ne font pas partie des préoccupations et du vécu des élèves.

A la fin du dossier un temps (30 mn) a été consacré à recenser les difficultés qui pouvaient subsister chez les élèves à la fin de cette série d'exercices. Les problèmes abordés sont :

- le sens de valeur exacte et valeur approchée, réponse d'un autre élève, "*la valeur approchée est un nombre mais pas la valeur exacte*"! Nous ne pouvons que nous interroger sur le statut de la fraction pour les élèves à ce stade.

- les techniques opératoires avec les nombres relatifs.

T E S T n° 1

FEUILLE N° 6

TEST - 4ème

Ex 1 : Ecris sous la forme d'une seule fraction, la plus simple possible, chacun des nombres suivants :

$- \frac{3}{5} + \frac{1}{4}$; $- \frac{2}{3} + \frac{4}{7}$; $\frac{1,2}{3,9} - \frac{0,8}{1,3}$;

$\frac{9}{100} - (-0,4)$; $\frac{3}{7} \times \frac{4}{9}$; $\frac{0,4}{4} \times \frac{6}{0,25}$;

$4 \times \frac{5}{12}$; $- \frac{10}{3} - 4$

Ex 2 : Ecris sous la forme d'une seule fraction, la plus simple possible, chacun des nombres suivants :

$\frac{3}{4} \times \frac{5}{9} + \frac{8}{9}$; $- \frac{13}{8} + \frac{1}{2} \times 2$;

$\frac{2}{3} + (- \frac{1}{4}, \frac{5}{3} \times \frac{3}{2}) \times (\frac{4}{5} - \frac{4}{6})$.

Ex 3 : Donne une valeur approchée de :

$$\frac{2,7 + 0,15 \times 6}{2,4 + 1,06 \times 5} + \frac{0,8}{3}$$

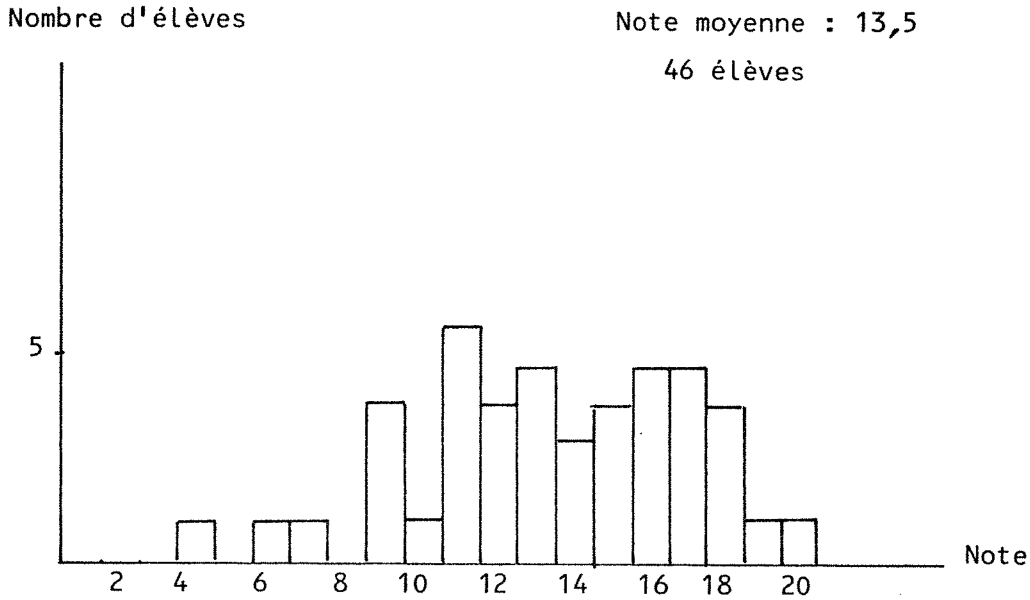
Ex 4 : Un alliage (le maillechort) utilisé pour du matériel de précision, est composé de cuivre, de nickel, et de zinc.
Il est composé de $\frac{4}{9}$ de cuivre, de $\frac{1}{3}$ de nickel.

1° - Quelle fraction représente le zinc ?
2° - Pour 50 kg d'alliage, combient faut-il de zinc ?
3° - Si on met 12 kg de cuivre, combien faut-il mettre de nickel ?

RESULTATS du TEST 1

Note moyenne : 13,5

46 élèves



Pourcentages de réussite

Ex 1								Ex 2					Ex 3	Ex 4		
1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3				1	2	3
										1er calcul	2e calcul	tout juste				
98%	70%	67%	54%	91%	76%	56%	52%	76%	54%	17%	33%	37%	37%	100%	72%	28%

Procédures utilisées pour la question 3 de l'exercice 4.

* $\frac{4}{9} \to 12$ kg $\quad \frac{12}{27} \to 12$ kg $\quad \frac{9}{27} \to 9$ kg $\quad$ 9 kg de Nickel
* $12 : \frac{4}{9} = 27$ kg d'alliage $\quad 27 \times \frac{1}{3} = 9$
* 12 kg $\to \frac{4}{9} \quad 12 : 4$ kg $\to \frac{1}{9}$

  3 kg $\to \frac{1}{9} \quad 3 \times 3 = 9$ kg
* 12 kg $\to \frac{4}{9} \quad (12 : 4) \times 3 = 9 \quad \frac{3}{9} \to 9$kg
* 12 kg $\to \frac{4}{9} \quad \frac{1}{9} \to 3$ kg $\quad \to \frac{1}{3} = \frac{3}{9} \quad 3 \times 3 = 9$ kg
* $12 \times \frac{4}{3} = 9$ kg.

DEUXIEME PARTIE

Comparaison de nombres en écritures fractionnaires

FEUILLE N° 7

Activité 1

A propos du nombre Π

1) Certains Egyptiens prenaient pour valeur du nombre Π : $3 + \frac{13}{81}$, d'autres $(\frac{16}{9})^2$.

Archimède a dit que Π était compris entre $3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{10}}$ et $3 + \frac{1}{7}$.

Les Babyloniens utilisaient pour valeur de Π : $3 + \frac{1}{8}$.

Compare ces nombres sans calculatrice.

2) Avec ta calculatrice, compare les nombres :

$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15}}$; $\frac{355}{113}$; $\frac{333}{106}$

Quelle est la meilleure approximation de Π ?

3) Bizarre, Bizarre* ....


Les Pyramides de Gizeh

La grande pyramide de Khéops est une pyramide régulière à base carrée. C'est-à-dire que la connaissance de sa hauteur et du côté de sa base la détermine parfaitement.

L'astronome Piazzi-Smith, en tenant compte du revêtement en partie disparu, lui restitue les dimensions originelles suivantes :

hauteur : 148,208 mètres
base : 232,805 mètres.

Divisons le double de la base par la hauteur

$\frac{2 \times 232,805}{148,208} = 3,1415982$

C'est-à-dire Π avec une erreur inférieure à 6 millionièmes ! Résultat troublant quand on sait que Π n'était connu, vraisemblablement, qu'à la grossière approximation de 3, au moment de la construction.

Que veut dire "erreur inférieure à 6 millionièmes" ?

Les historiens s'interrogent......... Pourquoi ?

* D'après Spécial Π du "Petit Archimède".

FEUILLE N° 8

Activité 2

Ecris une fraction entre $-\frac{40}{3}$ et $-\frac{53}{4}$

Objectifs

Contrat : tous les exercices sont obligatoires.

Temps : le temps en classe sera de 1 heure.

Ex 1 : après un orage dans la vigne de Jean, 7 pieds de vigne sur 15 sont détruits ; dans celle de Paul, il y en a 4 sur 9 de détruits. Comment savoir lequel est le plus malheureux ?

Ex 2 : compare 13 et $\frac{53}{4}$; $\frac{13}{9}$ et 1,5 ; $-\frac{3}{4}$ et $-\frac{5}{7}$;

$\frac{1,2}{2,1}$ et $\frac{1,6}{2,9}$; $\frac{722}{636}$ et $\frac{475}{523}$; $-\frac{2}{5}$ et $\frac{3}{4}$;

$\frac{37}{100}$ et $\frac{9}{25}$; $\frac{12}{1000}$ et 0,013.

Ex 3 : compare le tiers de la somme de 18,3 et du double de 4,2 avec le produit du triple de 16 et de la différence de 12,7 et de $\frac{123}{10}$.

Ex 4 : trouve une fraction entre

$\frac{5}{7}$ et $\frac{6}{9}$

$\frac{31}{20}$ et 1,5

$-$ 2,28 et $-$ 2,29.

Ex 5 : place les nombres suivants sur une droite graduée :

$-$ 2,3 ; $\frac{37}{10}$; 0,75 ; $-\frac{8}{5}$; 2 ; $\frac{2}{9}$

Ex 6 : range les nombres en ordre croissant :

3 ; $\frac{5}{3}$; $-\frac{4}{3}$; $\frac{17}{15}$; $-\frac{17}{12}$; $\frac{231}{225}$; $\frac{333}{106}$.

OBJECTIFS

- Apprendre à comparer des nombres par réduction au même dénominateur ou par quotient (utilisation de la calculatrice).
- Placer des nombres sur une droite graduée ou les mettre en ordre croissant.

Objectifs secondaires

* savoir distinguer valeur exacte et valeur approchée
* revoir les techniques antérieures de comparaison de 2 fractions positives (comparaison de fractions de même numérateur ou de même dénominateur, comparaison par recherche des parties entières, comparaison par division, comparaison par un dessin),
* savoir utiliser la calculatrice (touches $\boxed{\frac{1}{x}}$, $\boxed{\text{M in}}$, $\boxed{\text{MR}}$, ordre des opérations).

SITUATION TEMPORELLE

Cette partie s'est déroulée à la suite du test n° 1.

ORGANISATION DE LA CLASSE

La même que pour la partie "addition"

DUREE : 2h 30.

DEROULEMENT ET COMMENTAIRES

Activité n°1 et 2 (feuilles n° 7 et 8).

Activité n° 1

Choix de l'activité

Cette situation a été choisie pour son aspect historique.
Elle permet en outre :

- de comparer des nombres voisins positifs,
- de réinvestir l'addition des fractions,
- de transformer des fractions décimales en nombres décimaux,
- de distinguer valeur exacte et valeur approchée.

Procédures utilisées

Partie 1

. Réduction au même dénominateur $3 + \frac{13}{81} = \frac{243}{81} + \frac{13}{81} = \frac{256}{81}$

. Passage au nombre décimal $3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{10}} = 3 + \frac{1}{7 + 0,1} = 3 + \frac{1}{7,1} = 3 + \frac{10}{71}$

. Calcul de la valeur approchée par la division.

Partie 2

Souvent $3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15}}$ est transformé, d'abord à la main en $3 + \cfrac{1}{\cfrac{106}{15}}$

puis est déterminé avec la calculatrice.

Ce calcul entraîne une mise au point de l'utilisation de la calculatrice,
- ordre de calcul, usage de la touche $\boxed{\frac{1}{x}}$,
- utilisation de parenthèses,
- utilisation des touches $\boxed{\text{M in}}$ et $\boxed{\text{MR.}}$

La synthèse des résultats ouvre un débat :

"Quelle est la meilleure approximation de π *?*

* $\frac{355}{113}$ *car avec ma calculatrice quand je tape sur la touche* π*, je trouve les mêmes premiers chiffres*

* *Un élève dit que ce n'est pas vrai car* $\pi = \frac{22}{7}$ *, je l'ai appris à l'école primaire !"*

Il s'instaure un débat dans la classe à l'issueduquel est expliqué que π est un nombre inconnu dont nous ne connaissons que des valeurs approchées ; selon les cas une valeur approchée est plus intéressante qu'une autre ($\frac{22}{7}$ lorsque le rayon du cercle est 7 par exemple).

Le fait que $\frac{22}{7}$ soit une valeur approchée trouble les élèves. Beaucoup pensent en effet qu'une valeur approchée ne peut être qu'un décimal !

Partie 3

La lecture du texte sur les pyramides permet de revoir les valeurs approchées au dixième, centième, millième et de préciser la différence entre valeur exacte, valeur approchée et ordre de grandeur.

Activité 2

Choix de l'activité

- comparer des fractions négatives,
- initier à la densité des nombres rationnels.

Procédures

Les élèves réduisent au même dénominateur $-\frac{160}{12}$ et $-\frac{159}{12}$.

Pour quelques uns il n'y a pas de fractions entre les deux (160 et 159 se suivent).

Pour d'autres, il y a passage aux dénominateurs 36, 24 ou 120 pour pouvoir intercaler.
Cette activité permet de revoir l'ordre des nombres négatifs.

A la fin de ces deux activtés, les objectifs :

"savoir comparer des nombres relatifs,
savoir comparer des fractions relatives".

sont copiés sur le dossier.

EXERCICES

Ils sont faits pour la plupart sans problème.

Ex 2 : il permet de faire la synthèse sur les différents procédés possibles pour comparer des fractions,

. réduction au même dénominateur
. division
. comparaison avec 1
. écriture sous forme d'une somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1
. nombres négatifs plus petits que les nombres positifs.

Ex 3 : il a posé des difficultés liées au vocabulaire. Il donne l'occasion,

- de préciser les mots somme, produit, différence, terme
- d'utiliser des parenthèses pour montrer les priorités de calcul.

Ex 5 : quelques difficultés subsistent chez les élèves plus faibles pour classer $\frac{2}{9}$ et $-\frac{8}{3}$ par rapport à 1 et -1.

Ex 6 : il est réalisé par passage au quotient.

Ce qui a été noté sur le répertoire

$\boxed{F}$ractions

Les différentes façons de comparer deux fractions sont notées.

TROISIEME PARTIE

Multiplication des nombres relatifs

FEUILLE N° 9

MULTIPLICATION DES NOMBRES RELATIFS

Activité 1

Comment peux-tu expliquer à quelqu'un qui ne sait pas, ce qu'est - 3 ?

Activité 2

Peux-tu trouver x pour que l'égalité $(-2,5) \times x + 7 = 12$ soit vraie ?

Explique.

Même exercice avec $\frac{x}{-3} + (-4) = 7$

puis $(-2)((-x)-4) + 3,5 = -4,9$

Objectifs :

Qu'en pense la calculatrice ?

Contrat : Les exercices 1, 2, 3, 4, 5, 6 sont obligatoires.

Durée : 3 h.

Ex 1 : Prévois le signe du résultat, calcule le résultat puis vérifie avec ta calculatrice. Précise si l'on a une valeur exacte ou une valeur approchée.

$\frac{2}{3} \times (-3)$ $\quad -0,8 + 3,7$ $\quad \frac{-3}{4} \times \frac{3}{-4}$

$\frac{4}{6} \times \frac{-5}{4}$ $\quad (-7) \times 12,5$ $\quad 2 \times -\frac{4}{3}$

$\left[(-\frac{9}{2}) + \frac{7}{4}\right] \times (-\frac{3}{5})$ $\quad \frac{1}{3} \times (-\frac{2}{7}) \times (\frac{9}{-4})$

$\frac{1}{(-\frac{3}{2})} \times (-\frac{2}{5})$ $\quad \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{4}{5}}$ $\quad \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{4}{1}}$

Ex 2 : Calcule puis vérifie à la calculatrice :

$(-\frac{3}{2}) \times (-6,2) + 3 \times \frac{2}{4-(-2,5)\times(-1,2)}$

$(-\frac{2}{3}) \times (3 + (-4)) + (-6) \times 5$

$(\frac{3}{4} \times \frac{4}{5}) \times (1 + \frac{4}{-5})$

$(-\frac{5}{3} + \frac{3}{4}) \times \frac{5}{8}$ $\quad (-\frac{3}{4} \times -\frac{4}{5}) \times (1 + \frac{-4}{5 \times (-2)})$

$(-\frac{3}{9} - \frac{4}{3})(\frac{4}{5} - \frac{2}{7})$

FEUILLE N° 10

Ex 3 : x désigne un nombre relatif.
Peux-tu préciser le signe de $(-x)$; x^2 ; $-x^2$; $(-x)^2$; x^3 ?

Ex 4 : a et b sont deux nombres relatifs.
Explique pourquoi $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$

Ex 5 : Peux-tu trouver x pour que :

a) $(-7) \times x = 2$

b) $2(3 + x) - 4 = -7$

c) $(-2,5) \times (-x) = 3$

d) $(-3) \times x = -7$

e) $-(x + 9) = 7$

Ex 6 : Précise sans calculer, les signes des nombres :

$(-3,6)^5$; $(-\frac{2}{3})^4$; $(-7,9435)^2$

Ex 7 : Voici une transformation T du plan. Le plan est muni d'un repère.

T transforme un point en un autre point.

T transforme tout segment $[AB]$ en un segment $[A'B']$ où A' et B' sont les transformés de A et B.

Si M a pour coordonnées (x, y), son transformé M' a pour coordonnées (x', y')

$$x' = (-\frac{2}{3}) \times x + 3$$
$$y' = (-\frac{2}{3}) \times y + 2$$

Place les points P, A, F tels que P $(-1 ; 2)$, A $(\frac{1}{2} ; \frac{-3}{5})$
F $(1,3 ; -1)$.

Place les images P', A', F' de P, A et F.

Peux-tu expliquer pourquoi P' A' F' est un triangle ? Reconnais-tu la transformation ?

I' qui a pour coordonnées $(-5 ; 0)$ est l'image de I. Peux-tu trouver les coordonnées de I ?

Ex 8 : (à la maison).
Calcule les nombres $a = x^2 + (-y)$; $B = (-y) \times x^2$; $C = (-x) \times (-y)^2$;
$A - 2B$; $D = (-2) \times (-x)\, y + (-y)^3 + \frac{x+y}{x-(-y)} \times (-2)$ pour $x = 1/2$ et $y = -3$.

FEUILLE N° 11

AUTO-TESTS

1) Coche la case si la phrase est exacte :

- le produit de deux nombres positifs est positif ☐
- la somme de deux nombres de signes contraires est négative ☐
- le produit de deux décimaux est un décimal ☐
- le quotient de deux nombres négatifs est positif ☐
- la somme de deux nombres négatifs est positive ☐
- le produit de deux nombres de signes contraires est du signe du plus grand des deux nombres. ☐

2) Calcule :

$(-2) \times (-5)$; $(-\frac{2}{3}) \times (-4)$; $(-3) \times 7$

$(\frac{1}{2})^2 \times (-\frac{3}{7})$; $\frac{-2}{(-4) + (-7)}$; $\frac{8}{-2}$

$-\frac{3}{4} \times \frac{1}{-0,2 \times 3 - 1,9}$

3) x et y sont deux nombres négatifs, quel est le signe de $(-x) \times (-y)$; $-(xy)$?

4) Calcule :

$$\frac{\left[(-\frac{3}{5}) \times \frac{7}{6} + 2\right]^2}{0,2 \times (-3) \times (-0,25)}$$

OBJECTIFS

* Connaître et utiliser les règles de la multiplication des nombres relatifs.

Objectifs secondaires

* Aborder la division (opération inverse de la multiplication).
* Réutiliser les règles de l'addition, les priorités opératoires.
* Lier les opérations avec les équations (exercices didactiques de résolution).

SITUATION TEMPORELLE

Après la partie II "comparaison".

ORGANISATION DE LA CLASSE

Identique à la partie précédente.

DUREE : 4h 30.

DEROULEMENT ET COMMENTAIRES

Activité 1 et 2 (feuille n° 9)

Activité n° 1 (30 mn).

Choix de l'activité

C'est pour la multiplication que se pose le problème du concept de relatif. Il nous a donc paru important de savoir si le nombre relatif était ou non attaché à une représentation "concrète" (dépense ou dette ....). La confrontation des différentes explications peut alors faire évoluer les conceptions des élèves.

Déroulement

Réponses obtenues (sur les deux classes)

- c'est un nombre négatif,
- c'est un nombre relatif négatif,
- c'est l'opposé du nombre positif 3,
- c'est le contraire de 3,
- c'est 3 en dessous de 0,
- il est plus petit que 0,
- c'est 3 unités avant le 0,
- il est opposé à 3 par le 0,
- $-3 \quad 0 \quad 3$
- il peut représenter dans certaines circonstances un déficit,
- la longueur entre 0 et -3 est la même que celle entre 0 et 3,
- c'est 0 - 3 tandis que 3 c'est 0 + 3,
- c'est plus petit que (-2) mais plus grand que (-4),
- c'est 3 - 6,
- c'est un nombre abstrait (idée explicitée par l'élève).

Pour la plupart des élèves, -3 est perçu comme étroitement lié à 3 ou à 0.

La synthèse vise à faire comprendre que -3 appartient au domaine mathématique et ne représente rien de concret (mesure, dénombrement..).

Activité n° 2 (1 h).

Choix de l'activité

Pour savoir résoudre de telles équations il faut **nécessairement** connaître certaines règles (règle des signes). Cette situation confronte les élèves à ces règles.

La résolution de la 1ère équation est menée de plusieurs façons :

1) on s'arrête à l'étape $5 : (-2,5) = x$

ou $x = \dfrac{5}{-2,5}$

ou $(-2,5) \times x = 5$

Les élèves demandent une aide car ils décrètent ne pas savoir diviser par un nombre négatif. "*je n'ai pas appris*" dit un élève.

2) $(-2,5) \times x = 5$.
Le signe - gêne, alors on l'enlève $2,5 \times x = 5$
$x = 2$
puis on le rétablit $x = -2$.

3) $(-2,5) \times x = 5$. On effectue quelques essais en remplaçant x par des nombres positifs, les essais infructueux entraînent l'abandon de la recherche.

Le professeur distribue les calculatrices. Le résultat affiché (-2) étonne. Quelques élèves vont même jusqu'à mettre en doute la fiabilité de la calculatrice (les piles sont usées....).

D'autres calculs sont donnés par le professeur et les élèves découvrent les règles du produit et du quotient de nombres relatifs. Cette découverte provoque un étonnement chez les élèves qui finissent par admettre les règles à propos des signes.

La différence avec les règles de l'addition les déstabilise. Certains se reposent même la question du signe du produit de 2 nombres positifs !....

La synthèse est notée sur le répertoire

$\boxed{\text{R}}$elatifs

- Le produit (ou le quotient) de deux nombres relatifs de même signe est positif.

- Le produit (ou le quotient) de deux nombres relatifs de signe contraire est négatif.

Les deux autres calculs de l'activité 2 sont alors cherchés. Pour la 3ème équation, une mise au point est nécessaire sur le sens de $-x$.

La résolution s'effectue souvent à l'aide d'un changement de variable.

$$(-2)\,((-x) - 4) + 3,5 = -4,9$$
$$(-2) \times A = -8,4$$
$$A = -8,4 : (-2) = 4,2$$
$$(-x) - 4 = 4,2$$
$$(-x) = 8,2$$
$$x = -8,2$$

Des élèves (plus forts) utilisent la distributivité de la multiplication sur l'addition

$$-2\,((-x) - 4) = -2 \times (-x) - (-2 \times 4)$$

Les objectifs sont alors écrits sur le dossier :

Je dois savoir : - calculer le produit et le quotient de 2 nombres relatifs,
- résoudre une équation.

EXERCICES

Durée 3 h.

Ex 1

- Pour prévoir le signe, peu d'élèves se trompent.

Une précision est cependant nécessaire pour $-\frac{2}{3}$ perçu comme $\frac{-2}{-3}$ et non comme $\frac{-2}{3}$ ou $\frac{2}{-3}$ (le signe (-) placé devant est distribué aux 2 nombres).

- Les calculs sont d'abord effectués sans calculatrice puis contrôlés à l'aide de celle-ci.

- Quelques précisions sur les priorités opératoires s'avèrent encore nécessaires chez des élèves en difficulté.

- On peut encore noter quelques hésitations entre valeur exacte et valeur approchée.

Pour $\dfrac{-\frac{2}{3}}{-\frac{4}{5}}$ les élèves ne peuvent donner qu'une valeur approchée, par contre pour $\dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{4}{1}}$, ils peuvent donner la valeur exacte.

Ex 2 : pour le 1er calcul, la barre de fraction pose un problème pour l'ordre des calculs. Elle doit être considérée comme un couple de parenthèses (c'est une règle du calcul algébrique).

Ex 3 : après une recherche individuelle, une mise au point est nécessaire sur les notions d'opposé, de carré et leurs notations.

La présentation des résultats est faite sous forme de tableau.

x	+	-
opp.x = -x		
Le carré de x x^2		

Quelques élèves remarquent que :

- le carré d'un nombre est toujours positif,
- quand l'exposant est impair, le résultat est négatif. (Remarque faite après d'autres essais pour les exposants 5, 7...).

Ex 4 : il provoque un blocage, les élèves ne voient pas comment expliquer. La démarche utilisée chez les plus faibles est en fait une vérification sur des exemples.

L'exercice est fait à l'aide d'un tableau regroupant les signes de a et de b .

Synthèse copiée sur le répertoire.

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$$

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

Ex 5 : pour b) et e) quelques erreurs liées aux priorités opératoires et au signe - placé devant x.
Les difficultés sont surmontées grâce au changement de variable.

Ex 8 : il est donné en devoir à la maison considéré comme devoir d'essai. Les problèmes qui subsistent sont :

- la différence entre valeur exacte et valeur approchée,
- la signification de $-y^2$ confondu avec $(-y)^2$,
- le calcul de x^2 confondu avec $x \times 2$.

Les erreurs ont été moins nombreuses chez les élèves qui ont pris le soin d'écrire au début du devoir :

$$x = \frac{1}{2} \qquad -x = -\frac{1}{2}$$

$$y = -3 \qquad -y = 3.$$

Noter qu'à l'issue des exercices obligatoires les élèves ont souvent vérifié s'ils avaient atteint les objectifs avec l'auto-test.

QUATRIEME PARTIE

Divisions de fractions

FEUILLE N° 12

Activité

Est-il possible de trouver un nombre qui, multiplié par $\frac{3}{7}$ donne 1 ?

$\frac{3}{5}$ est le produit de $\frac{4}{9}$ et d'un autre nombre. Est-ce possible ?
Si oui de quel nombre s'agit-il ?

Objectifs

Contrat : Les exercices 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 sont obligatoires.

Durée : 3 h.

Ex 1 : Donne une valeur exacte de : $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}}$; $\frac{1}{3} : 4$; $-\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$

Ex 2 : Eric et Bernard s'associent pour acheter un ballon. Eric possède les $\frac{3}{4}$ du prix du ballon et Bernard les $\frac{2}{3}$. Après l'achat, il leur reste 7 F.
Quel est le prix du ballon ?
Qui a payé le plus ?

Ex 3 : Je multiplie un nombre par $\frac{3}{7}$. Au résultat, je retranche 11 et je trouve 187.
Quel est le nombre ?

Ex 4 : Résous les équations :

$\frac{2}{3} y = \frac{3}{4}$ $\qquad$ $y : \frac{2}{5} = \frac{3}{7}$

Ex 5 : $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ et $2 \times 6 = 3 \times 4$, es-tu d'accord ? observe $2 \times 6 = 3 \times 4$, est-ce général ?
Réciproquement, $5 \times 8 = 4 \times 10$ et $\frac{5}{10} = \frac{4}{8}$. Observe $\frac{5}{10} = \frac{4}{8}$, est-ce général ?

Ex 6 : $y = -\frac{2}{5}$ et $t = +\frac{1}{3}$. Donne les valeurs exactes et approchées de :

$A = \frac{1}{y} + \frac{1}{t}$; $B = \frac{y + t}{2}$; $C = \frac{2}{A}$; $D = -A + C \times (-B)$

Ex 7 : Trouve un nombre tel que, lorsque nous aurons enlevé le tiers et le quart de ce nombre, il reste 3.

Ex 8 : Les pommes pressées donnent en jus les $\frac{4}{11}$ de leur masse. On presse des pommes et la masse du résidu est 420 Kg.
Quel était la masse totale des pommes ?

Ex 9 : Par quel nombre faut-il multiplier $\frac{7}{3}$ pour obtenir 14 ?

FEUILLE N° 13

Ex 10 : Quelle doit être la longueur de la petite base d'un trapèze pour que son aire soit les $\frac{24}{7}$ de l'aire d'un carré de côté 8 cm. On sait aussi que sa hauteur est le tiers du côté du carré et que la grande base est le triple de la petite ?

Ex 11 : D'Artagnan dit aux mousquetaires : "j'ai dépensé 3 écus de plus que le cinquième de ma bourse et il me reste 6 écus de plus que la moitié de ce que j'avais en entrant ici".
Combien d'Artagnan avait-il en entrant ?

Ex 12 : Donne la valeur exacte de chacun de ces nombres :

$(1 : \frac{4}{5}) \times \frac{8}{-3}$; $\frac{-2}{-5} + \frac{11}{-7} : \frac{-5}{3}$; $(\frac{5}{3} + \frac{3}{4}) \times \frac{5}{26}$

$(\frac{5}{7} - \frac{4}{3}) : \frac{4}{5} - \frac{2}{7}$; $5 \times (3 - \frac{2}{-3}) + 4 \times \frac{5}{6} - (10 - \frac{1}{2})$

$\left[7 : (3 + \frac{1}{4})\right] \times \frac{2}{3} + \frac{3}{4}$

$$5 + 3 \times \frac{\frac{7}{2} - 2}{\frac{7}{4} - \frac{1}{2}}$$

FEUILLE N° 14

AUTO-TEST

Ex 1 : Donne les valeurs exactes de :

$A = \frac{2}{3} - 3 + \frac{1}{5}$ $\quad$ $B = (\frac{3}{5} \times (- \frac{1}{2}) + 1,2) (A - \frac{2}{15})$

$C = B^2 - \frac{1}{2 \times A^2}$ $\quad$ $D = 3 : \frac{1}{3}$ $\quad$ $E = \frac{1}{4} : - \frac{3}{8}$

$F = \dfrac{\frac{5}{6}}{9}$ $\quad$ $G = \dfrac{- \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}$ $\quad$ $H = \dfrac{-2}{\frac{1}{3}}$

$I = (\frac{2}{4} - \frac{1}{5} \times 3) : 3$ $\quad$ $J = \dfrac{(\frac{2}{3})^2 - \frac{5}{9} \times \frac{20}{25}}{\frac{3}{4}}$

Ex 2 : $A = \frac{42}{28} - \frac{17}{14}$ et $B = \frac{26}{24} + \frac{21}{36}$.

Donne le quotient exact de A par B .

OBJECTIFS

- Calculer, sous forme fractionnaire, le quotient exact de deux fractions "relatives".
- Trouver l'inverse d'une fraction.

Objectifs secondaires

- Mettre un problème en équation et résoudre ces équations.
- Réinvestir les techniques opératoires sur les fractions.
- Utiliser les priorités opératoires.

SITUATION TEMPORELLE

A la suite de la partie III "multiplication".

ORGANISATION DE LA CLASSE

Identique à celle de la partie "multiplication".

DUREE : 4 h.

DEROULEMENT ET COMMENTAIRES

Activité (1 h.) (Feuilles 12 et 13)

Choix de l'activité

La division de 2 fractions peut être résolue :

- par recours au calcul des 2 quotients on obtient en général une valeur approchée,
- par l'utilisation de la règle "on multiplie par l'inverse".

Pour obtenir cette deuxième résolution nous nous sommes donc placés dans le domaine théorique (recherche d'une valeur exacte).

Déroulement

1ère partie

Le problème est aussitôt mis en équation $\frac{3}{7} \times x = 1$.

Pour résoudre cette équation, différentes procédures sont utilisées.

- Utiliser la calculatrice. Cette technique est vite abandonnée car les élèves s'aperçoivent vite qu'ils n'obtiennent qu'une valeur approchée et que le produit de cette valeur approchée par $\frac{3}{7}$ n'est pas 1.
- Ecriture de 1 sous la forme de $\frac{21}{21}$ car 21 est à la fois multiple de 3 et de 7 (42 est aussi utilisé comme dénominateur).

Le problème est alors rapidement résolu

$$\frac{3}{7} \times x = \frac{21}{21} \qquad x = \frac{7}{3}.$$

- Quelques élèves raisonnent par recours au sens des opérations

$$\frac{3}{7} \times x = 1 \qquad 3 \times x = 7 \qquad x = \frac{7}{3}.$$

Les élèves remarquent que pour $\frac{3}{7}$ et $\frac{7}{3}$ les numérateurs et dénominateurs sont inversés ce qui a permis d'aborder la notion d'inverse.

2ème partie

Après une mise en équation du problème les élèves ont quelques difficultés à résoudre.

- Certains cherchent à écrire les fractions avec d'autres dénominateurs : 45 ou 135.

* $\frac{4}{9} \times a = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $\frac{4}{9} \times a = \frac{27}{45}$

Ils font alors un changement de variable en écrivant a sous la forme $\frac{x}{5}$ avec $x = \frac{27}{4}$ donc $x = 6{,}75$.

a est alors écrit $\frac{6{,}75}{5}$ et une écriture sous forme fractionnaire avec numérateur et dénominateur entiers est menée à bien : $a = \frac{6{,}75}{5} = \frac{675}{500} = \frac{27}{20}$

* $\frac{4}{9} \times a = \frac{81}{135}$ $\qquad$ 135 est choisi car $135 = 9 \times 5 \times 3$

$$\frac{4}{9} \times \frac{x}{15} = \frac{81}{135} \qquad x = \frac{81}{4} = 20{,}25$$

$$a = \frac{20{,}25}{15} = \frac{2025}{1500} = \frac{81}{60} = \frac{27}{20}.$$

- D'autres élèves écrivent $a = \frac{3}{5} : \frac{4}{9}$ et demandent de l'aide car ils disent ne pas savoir calculer le quotient de 2 fractions.

SYNTHESE

Elle porte sur la notion d'inverse et celle de quotient de deux fractions. Les procédures utilisées par les élèves sont recensées au tableau et une mise au point est faite.

. $a \times \frac{3}{7} = 1$ $\qquad$ a peut s'écrire $1 : \frac{3}{7}$ ou $\frac{1}{\frac{3}{7}}$ ou $\frac{7}{3}$

Le professeur définit alors le mot inverse :

Les fractions $\frac{3}{7}$ et $\frac{7}{3}$ sont des inverses.

$$1 : \left(\frac{3}{7}\right) = \frac{1}{\frac{3}{7}} = \frac{7}{3} \quad \text{et} \quad \frac{3}{7} \times \frac{7}{3} = 1.$$

Deux nombres inverses sont alors définis comme des nombres dont le produit est 1.

Le parallèle est alors fait avec l'opposé et la somme.

. Pour la 2ème équation, les élèves sont invités à réfléchir sur le lien entre a = $\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{9}}$ et a = $\dfrac{27}{20}$ trouvé par le calcul. La règle est alors découverte et le lien fait avec l'inverse d'une fraction.

Il faut noter que cette règle de quotient de deux fractions trouble la grande majorité des élèves. Ils comprennent la technique mais ne peuvent se l'expliquer par une image (contrairement à l'addition ou la multiplication où un dessin est possible).

Ce qui a été noté sur le répertoire

$\boxed{\text{F}}$ ractions

. **Inverse** d'une fraction

Le produit de deux nombres inverses est 1 .

$\frac{3}{7} \times \frac{7}{3} = 1$ $\frac{3}{7}$ et $\frac{7}{3}$ sont des inverses

$$\text{Inv.}\left(\frac{3}{7}\right) = 1 : \frac{3}{7} = \frac{1}{\frac{3}{7}} = \frac{7}{3}$$

a et b représentent des nombres

$$\text{inv}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{b}{a} \qquad \text{inv}\,(a) = \frac{1}{a} \qquad \text{inv}\left(\frac{1}{a}\right) = a$$

Deux nombres inverses ont le même signe.

. **Quotient** de deux fractions

Pour diviser par une fraction, on multiplie par son inverse.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \text{inv}\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Les objectifs sont donnés par les élèves et notés sur le dossier.

Je dois savoir : - *trouver l'inverse d'un nombre*
- *calculer, sous forme fractionnaire, le quotient de deux fractions "relatives".*

$\boxed{\text{EXERCICES}}$

Durée : 3 heures en classe.

- Les principaux problèmes rencontrés.

1) **Décodage du texte** pour les exercices 7, 8 et 10.

Par exemple à l'exercice 8, des élèves prennent 420 kg pour la masse de jus obtenu, ce qui les amène à écrire :

$$\frac{4}{11} \times x = 420.$$

Un schéma du type : $\text{pommes} \begin{cases} \nearrow \text{jus } \frac{4}{11} \\ \searrow \text{résidu} \end{cases}$ aide les élèves à mettre en équation.

Pour l'exercice n° 10 un dessin où figurent les données du texte permet de clarifier la situation et le calcul de l'aire est facilité par le recours au répertoire (la formule de l'aire du trapèze n'est pas exigible).

2) **Résolution d'équations**

- Lorsque l'inconnue est dans les deux membres :

$$\frac{3}{4} \times a + \frac{2}{3} \times a = a + 7 \quad \text{(ex. n° 2)}$$

- Lorsque l'on est amené à une factorisation du style :

$$b - \frac{1}{3} \times b - \frac{1}{4} \times b = 3 \quad \text{(ex. n° 7)}$$

Ici b n'est pas vu comme $1 \times b$.

Notons que ces deux points étaient des objectifs secondaires de cette partie. Ce type d'exercice sera repris lors du calcul littéral. Ces notions sont en cours d'apprentissage, il est utile de les rencontrer souvent avant de les formaliser.

- Des erreurs sont encore faites sur sens de $-x$. Certains hésitent également pour la résolution de l'équation de l'exercice n° 3 et écrivent :

$$\frac{3}{7} \times x - 11 = 187 \qquad \frac{3}{7} \times x = 187 - 11 .$$

Cette erreur persiste chez des élèves en difficulté.

- Ce qui semble bien acquis :

* la technique de la division
* la priorité opératoire dans le cas d'un grand trait de fraction.

$$5 + 3 \times \frac{\frac{7}{2} - 2}{\frac{7}{4} - \frac{1}{2}} \quad \text{(ex. n° 12) est bien traité.}$$

- L'exercice n° 12 a été donné en devoir à la maison et généralement bien réussi. Cet exercice est une synthèse de toutes les techniques opératoires et il permet de refaire le point sur valeur exacte et valeur approchée (8,6 a maintenant pour beaucoup d'élèves le même statut de valeur exacte que $\frac{43}{5}$).

Seules quelques erreurs de signes ou d'oubli de dénominateur sont commises.

Par exemple : $\frac{-2}{-5} = - \frac{2}{5}$

$$3 - \frac{2}{-3} = \frac{9}{3} - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\left(\frac{3}{5} + \frac{3}{4} \right) \times \frac{5}{26} = \left(\frac{20}{12} + \frac{9}{12} \right) \times \frac{5}{26}$$

$$= 29 \times \frac{5}{26}$$

T E S T n° 2

FEUILLE N ° 15

T E S T

Ex 1 : Complète le tableau :

a	inv(a)	opp(a)
$\frac{4}{5}$		
	-6	
		$\frac{2}{3}$

Ex 2 : Calcule et donne le résultat sous la forme la plus simple possible :

$4 - \frac{2}{3} =$

$\frac{5}{7} : 2 =$

$\frac{-12}{15} \times \frac{-14}{21} =$

$\frac{23}{-7} : \frac{5}{21} =$

$\left(\frac{-2}{8}\right)^3 =$

$3 \times (-0{,}4 + \frac{1}{3}) =$

$3^2 + \frac{1}{4} \times \frac{18}{5} =$

$(-\frac{3}{4}) \times 2 =$

$\frac{3}{5} - \frac{18}{12} \times \frac{4}{15} =$

$\frac{3}{7} - (\frac{2}{5} \times \frac{-10}{7}) =$

$(5 + \frac{1}{2}) : (7 - \frac{3}{4}) =$

$$\frac{\frac{3}{8} - \frac{9}{16}}{\frac{9}{2} \times \frac{3}{4} - 2} =$$

Ex 3 : Ordonne dans l'ordre croissant les nombres suivants :

$\frac{2}{9} \qquad -\frac{1}{5} \qquad 1 \qquad \frac{-2}{5} \qquad \frac{-140}{-22}$

Ex 4 : Trouve y pour que : $\frac{7}{12} \times y = \frac{4}{5}$

$-\frac{3}{7} \times y = 2$

$-y - \frac{3}{2} = \frac{7}{5}$

$-3 \times (10 + y) + 7 = 2$

FEUILLE N° 16

Ex 5 : Donne un ordre de grandeur de :

$$\frac{998}{97} \times \frac{793}{21} + 603$$

Donne une valeur approchée au centième de :

$$\frac{2 \times \frac{1}{9} - 0{,}4}{\frac{3}{7} - \frac{6}{5} \times \frac{10}{3}}$$

Et si tu as fini

Ex 6 : Donne :

a - le double de $\frac{2}{3}$

b - la moitié de $\frac{2}{3}$

c - le carré de $\frac{2}{3}$

d - le tiers de $\frac{2}{3}$

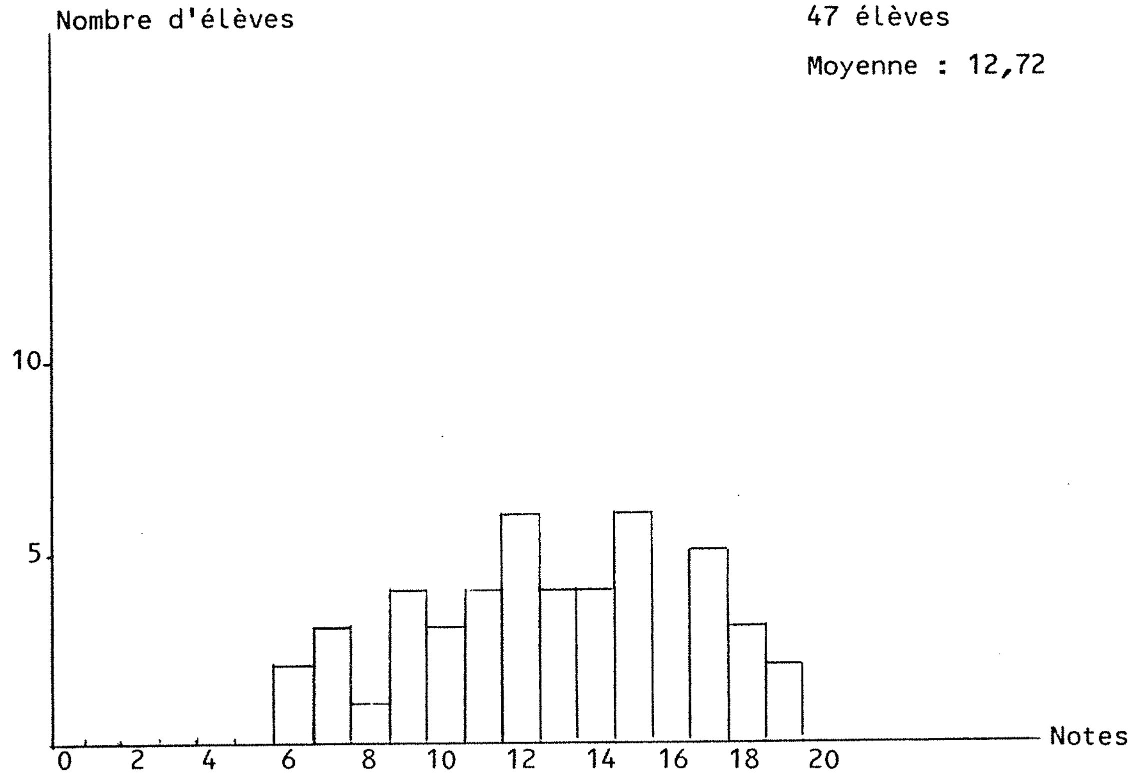
e - le triple de $\frac{2}{3}$

f - le quart de $\frac{2}{3}$

RESULTATS DU TEST 2

47 élèves

Moyenne : 12,72



Pourcentages de réussite par question

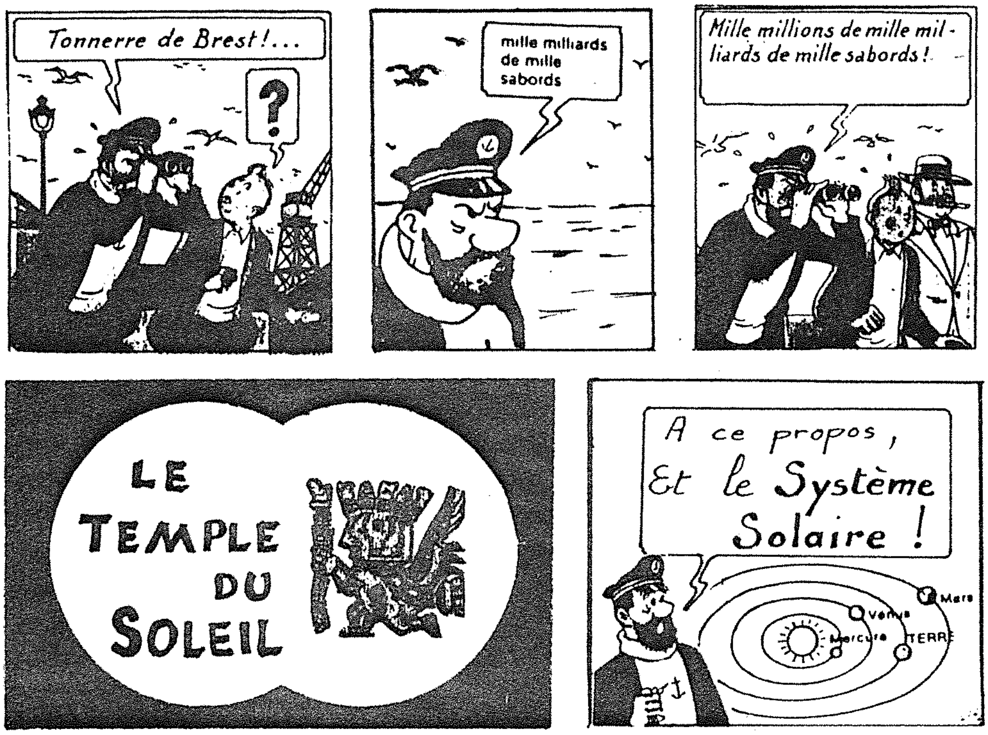
EX 1			EX 2												Ex 3	Ex 4				Ex 5	
tout juste	1 faute	2 fautes ou +	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		1	2	3	4	1	2
55%	34%	11%	96%	91%	96%	83%	62%	34%	74%	83%	70%	68%	83%	45%	57%	83%	77%	43%	15%	26%	28%

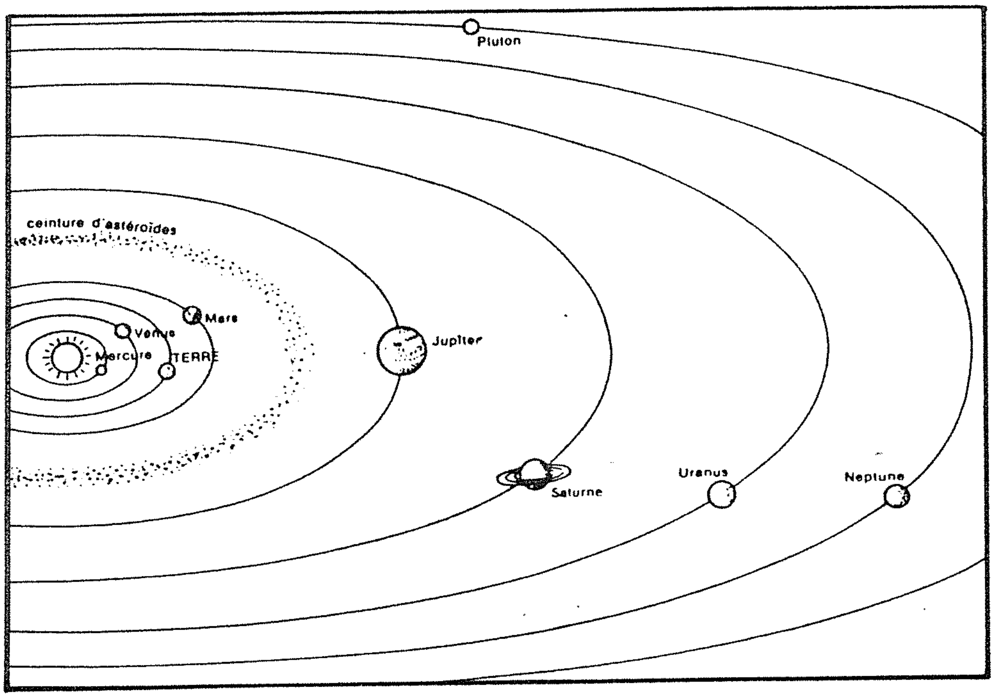
CINQUIEME PARTIE

Puissances

FEUILLE N° 17

Document n° 1





Plan général du système solaire.

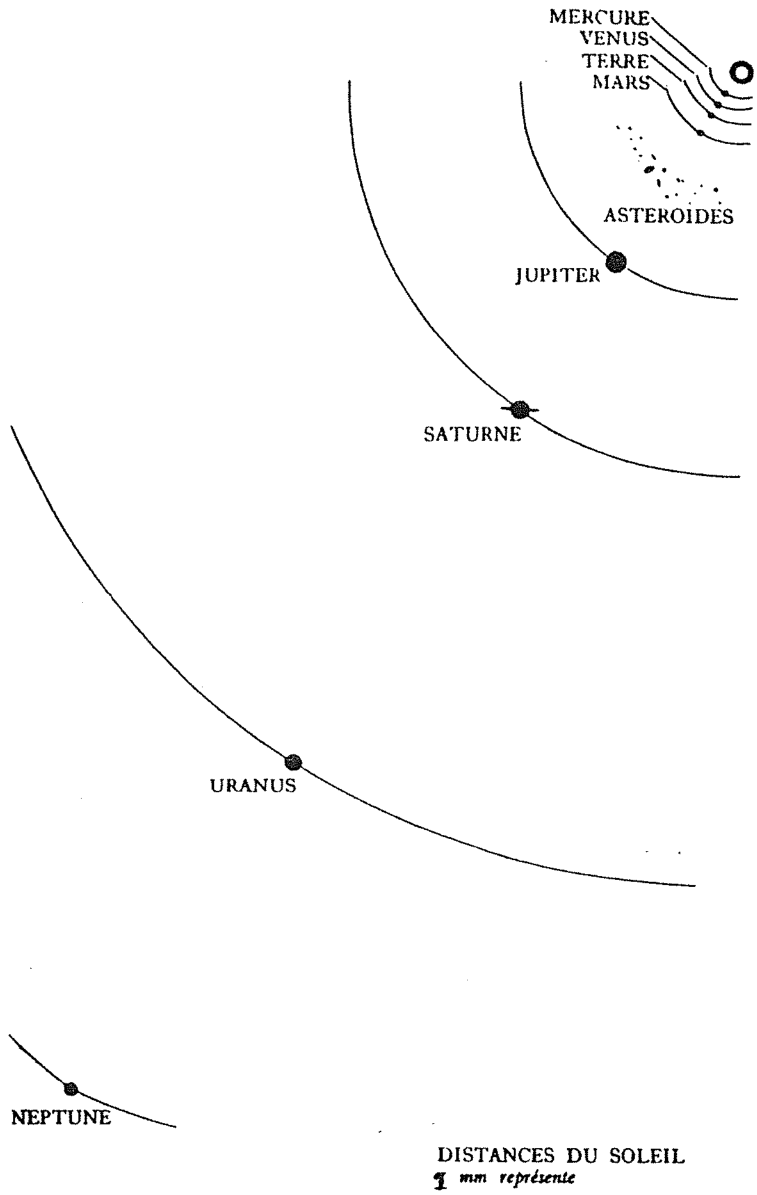
FEUILLE N° 18

Document n° 2

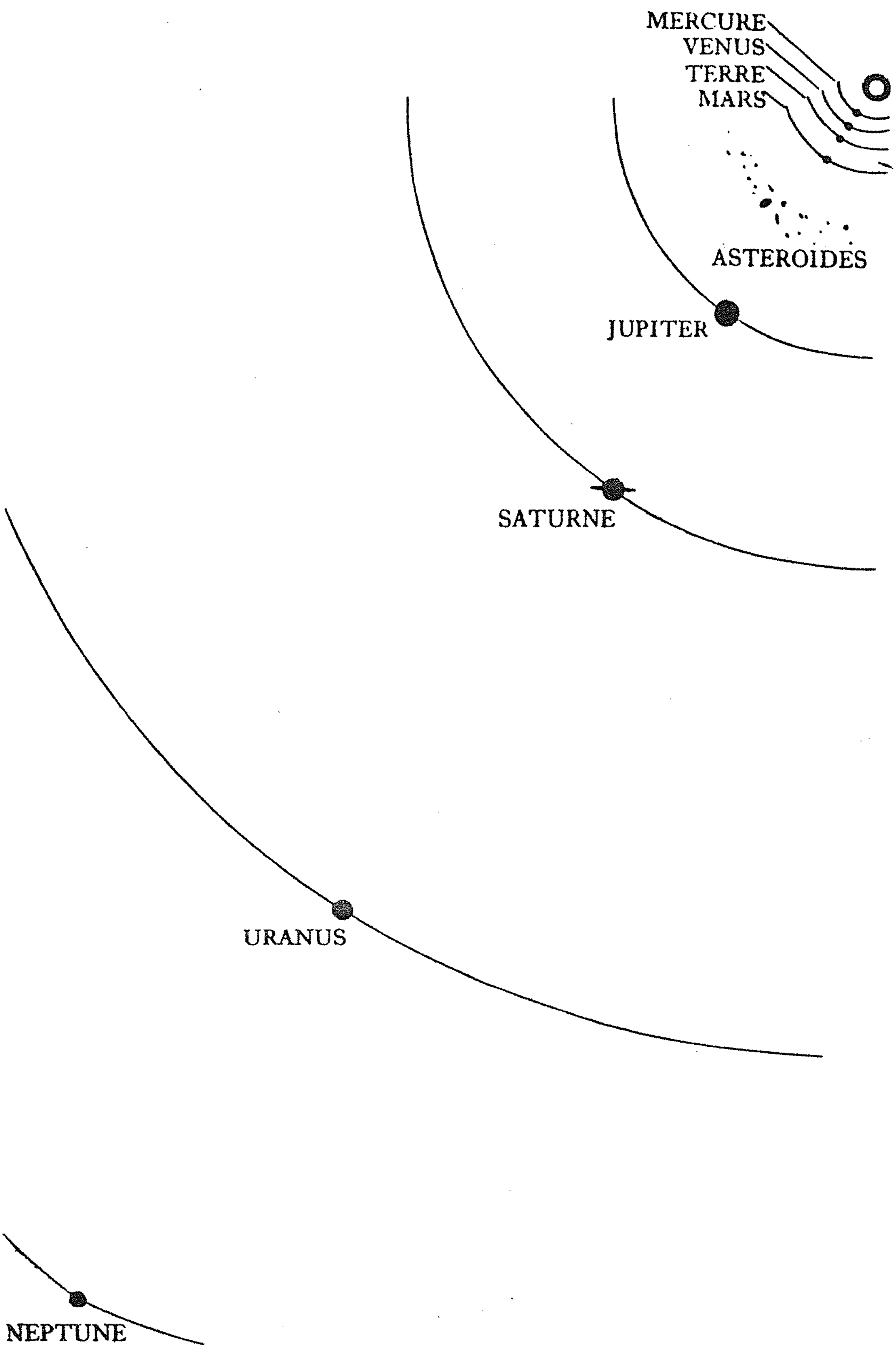
Pour te faire une idée des distances.

Distances des planètes au soleil

Attention : les planètes sont présentées en alignement pour la mise en page, mais elles ne le sont pas dans la réalité. (Quand la Terre, la Lune et le Soleil sont en alignement, il y a une éclipse).



Voir dessin original au verso.

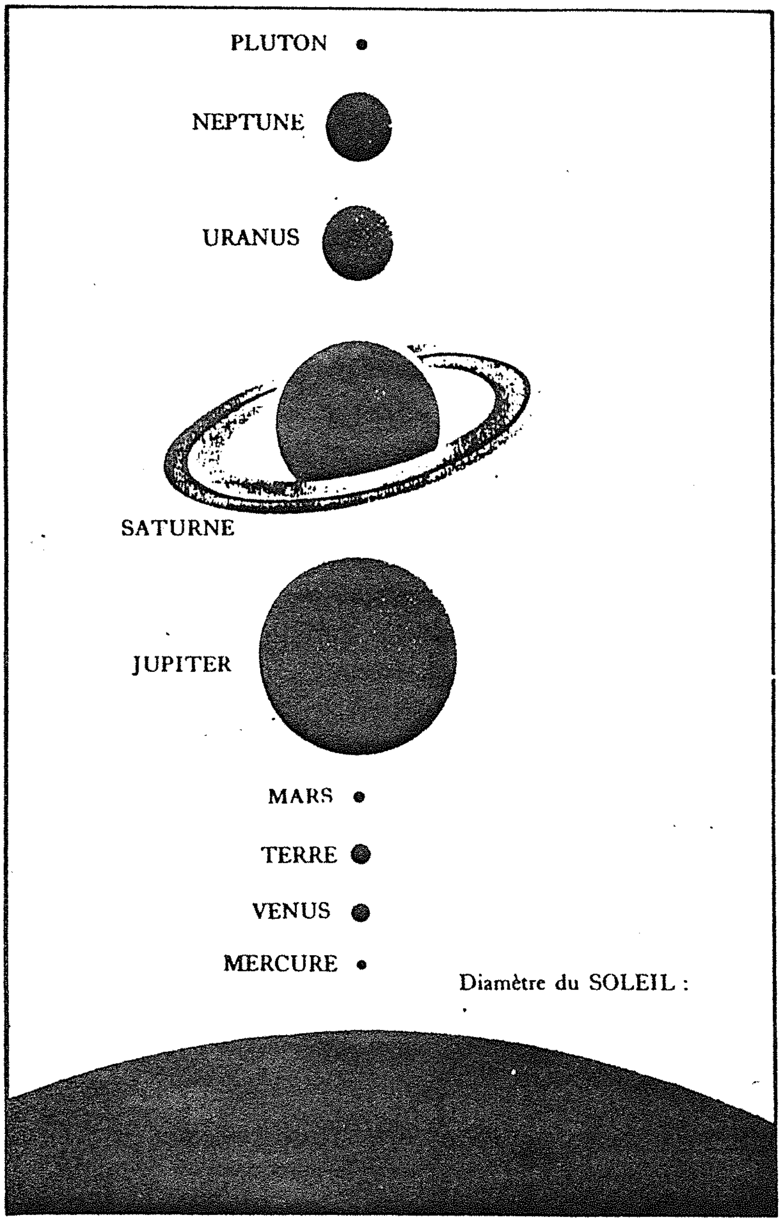


DISTANCES DU SOLEIL
1 mm représente

FEUILLE N° 19

Document n° 3

Diamètres comparés des Planètes du Système solaire.



FEUILLE N° 20

Document n° 4

	Distance moyenne au Soleil, arrondie en		Masse par rapport à la Terre	Diamètre moyen en	Diamètre moyen par rapport à la Terre	Durée de révolution autour du Soleil	Durée du jour en	Poids d'un objet de masse constante 1 kg	Température moyenne le jour à l'équateur	Nombre de satellites
Unités / Planètes	*million de km*	*heure-lumière minute-lumière seconde-lumière**	*masse de la Terre = 1*	*Km*	*diamètre de la Terre = 1*	*en jours terrestres ou années terrestres*	*jours et heures terrestres*	*en newton*	*en degré*	
MERCURE	58	3 mn 12 s	0,05	4 800	0,4	88 j	58 jours	3,6	+ 300	0
VENUS	108	6 mn	0,82	12 400	0,97	225 j	2 mois	9	+ 450	0
TERRE	150	8 mn 18 s	1	12 742	1	365 j	23 h 56 mn	10	+ 20	1
MARS	228	12 mn 36 s	0,11	6 800	0,53	1 an 327 j	24 h 37 mn	3,7	— 25	2
JUPITER	778	43 mn	318	140 000	11	11 a 314 j	9 h 55 mn	26	— 150 (?)	12
SATURNE	1 500	1 h 20 mn	95	115 000	9	29 a 167 j	10 h 14 mn	11	— 150	10
URANUS	3 000	2 h 40 mn	14,6	51 000	4	84 ans	10 h 42 mn	9	— 180	5
NEPTUNE	4 500	4 h 10 mn	17,2	48 000	3,5	164 a 280 j	15 h 48 mn	11	??	2
PLUTON	6 000	5 h 30 mn	0,9 (?)	6 à 12 000	1/2 à 1	248 ans	6 jours (?)	5	??	0 (?)

* *Vitesse de la lumière : 300 000 km/seconde*

1 seconde lumière = distance parcourue par la lumière en 1 seconde : 300 000 km

1 minute lumière = distance parcourue par la lumière en 1 minute : 300 000 × 60 = 18 000 000 km

1 heure lumière = distance parcourue par la lumière en 1 heure : 18 000 000 × 60 = 1 080 000 000 km

Masse de la Terre = 6×10^{24} kg.

(Les documents sont tirés du B.T. n° 821 (Pédagogie Freinet)

FEUILLE N° 21

Document n° 5

TABLE DE DIMENSIONS en mètres

Noyau atomique	10^{-14}
Atome	10^{-10}
Macromolécule (polymère)	10^{-8}
Cellule sanguine	10^{-5}
Puce	10^{-3}
Homme	10^{0}
Tour d'habitation	10^{2}
Mont Everest	10^{4}
La Terre	10^{7}
Jupiter	10^{8}
Le Soleil	10^{9}
Distance Terre-Soleil	10^{11}
Distance Soleil-Pluton	10^{13}
Une année lumière	10^{16}
Distance à l'étoile la plus proche	10^{17}
Une galaxie	10^{20}

Voici des questions que l'on peut se poser en examinant ces différents documents, essaie d'y répondre.

1 - Quel est le diamètre du Soleil d'après le document n° 3 ?

2 - En quoi peut nous aider le document n° 5 ?

3 - Quelle est l'échelle du document n° 2 ?
Un cm est représenté par combien de cm sur ce dessin ?

4 - Quelle est la masse volumique de la Terre en kg/m^3 ?

5 - Quelle distance représente une année lumière ?

6 - Les planètes ont-elles toutes la même masse volumique ?

La classe peut t'aider à répondre à des questions que tu te poses, quelles sont ces questions ?

FEUILLE N° 22

Objectifs :

Contrat : Les exercices 1, 4, 5, 7, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18 sont obligatoires.

Durée : 2 heures en classe.

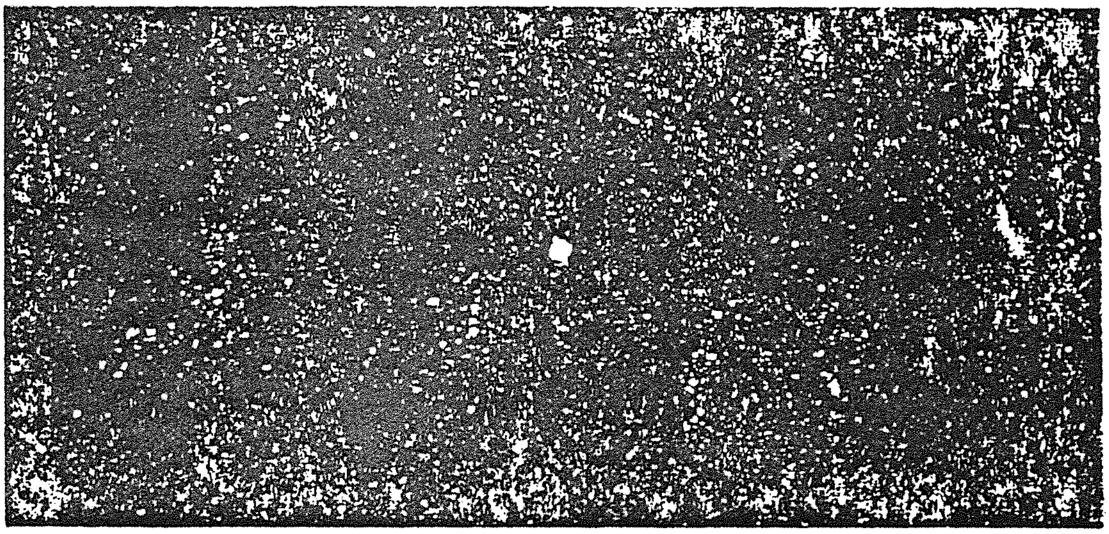
Ex 1 : Voici un extrait de l'Astronomie "Encyclopédie Bordas"

"Si on veut se faire une idée des dimensions relatives de la Terre, de la Lune et du Soleil, on peut se représenter la Terre comme une bille de 1 cm de rayon. La Lune serait située à 60 cm de la Terre et aurait un rayon de 2,7 mm".

A l'aide de ce texte peux-tu :

- calculer le diamètre de la Lune
- montrer que le Soleil ne pourrait pas passer entre la Terre et la Lune.

Ex 2 : Une étoile explose en direct (Astrapi)



Cette tache lumineuse dans la nuit est une étoile en train de mourir en produisant une gigantesque explosion : on appelle ça une "supernova". C'est par hasard qu'un astronome du Chili a remarqué les débuts de l'explosion le 23 février.

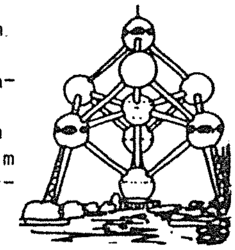
L'étoile a dû exploser il y a 180 000 ans. C'est seulement maintenant que sa lumière aussi puissante que 100 000 soleils, arrive jusqu'à la Terre. En fait, l'étoile serait située à .... km. Trouve ce nombre de Km.

FEUILLE N° 23

Ex 3 : Il était une fois un empereur hindou, Chiram, qui voulait récompenser un de ses sujets, Seta, pour son invention merveilleuse : le jeu d'échecs.
"Comment veux-tu être récompensé ?" dit Chiram.
"Donne-moi un grain de blé pour la première case de mon échiquier, répondit Seta, 2 grains pour la deuxième case, 4 grains pour la troisième case, le double pour la quatrième, et ainsi de suite, double ma récompense pour chaque case de l'échiquier, jusqu'à la soixante-quatrième".

Accordé ! dit Chiram.
Une charrette de l'époque contenait 1 mètre cube de blé et il fallait 32 grains de blé pour un centimètre cube.
Combien l'empereur aurait-il dû donner de charrettes à Seta ?

Ex 4 : L'Atomium de Bruxelles. *
Témoin de l'exposition universelle de 1958, l'atomium domine de ses 102 m le plateau de Heysel. Symbole de l'âge atomique, il représente un cristal de fer agrandi 200 milliards de fois. Sa structure, en acier revêtu d'aluminium, est composée de 9 sphères de 10 m de diamètre, reliées entre elles par des tubes de 29 m de long et 3 m de diamètre dans lesquels ont peut circuler.
Quelle est la taille du cristal de fer ?



Ex 5 : 10 grains de riz pèsent 0,23 g.
Combien y a t-il de grains dans un quintal de riz ?

Ex 6 : Un cube de fer de 56 g contient 6.10^{23} atomes.
Peux-tu trouver la masse d'un atome de fer ?

Ex 7 : Le micron ou millième de millimètre intervient en physique et dans la mesure d'éléments qui ne sont visibles qu'au microscope (on le note µ)

- les globules rouges du sang ont un diamètre d'environ 7 microns,
- l'épaisseur d'une feuille d'or est de 1,7 micron .

Exprime ces mesures en cm.
Le millimicron est un milliardième de mètre. Combien y a-t-il de millimicrons dans un micron?et dans un millimètre ?

L'angström (Å) est employé en microphysique, il vaut un dix-millième de micron.
Ecris des égalités avec le micron, le millimicron, l'angström, le mètre....

Ex 8 : Je vois un éclair et 10 s après j'entends le bruit du tonnerre. Sachant que la lumière se propage à 300 000 km/s et le son à 340 m/s, à quelle distance l'orage se trouve-t-il ?

Ex 9 : Les virus ont un diamètre de 300 nm. Combien faudrait-il mettre de virus à la file pour obtenir une longueur de 1 cm. (1 nm = 1 nanomètre = 10^{-9} m)

Ex 10 : Cite le nombre qui suit $10^6 + 10^3$.

* (Voir diapositives : Autour des Solides IREM de Poitiers

FEUILLE N° 24

Ex 11 : Un livre de 1 142 pages a une épaisseur de 25,5 mm. Quelle est l'épaisseur d'une feuille ?

Ex 12 : Ecris en puissance de dix :

Ex 13 : Une année-lumière vaut environ 10^{13} km.
Depuis le décret du 3 mai 1961, en France, on appelle :

10^{12} : un billion 10^{18} : un trillion

10^{24} : un quadrillion 10^{30} : un quintillion

Voici les distances du soleil à quelques planètes, étoiles ou nébuleuses.
Range ces astres du plus proche au plus éloigné du soleil.

Alpha du Centaure	: 380 billions de km
Sirius	: 8,26 années-lumière
Neptune	: 4,5 milliards de km
Mars	: 228 millions de km
Jupiter	: $7\ 792.\ 10^5$ km
Uranus	: 2,87 milliards de km
Nébuleuse d'Andromède	: 2 millions d'années-lumière
Saturne	: 1 428 000 000 km
Vénus	: $10\ 810\ 10^4$ km
Pluton	: 6.10^{-4} années-lumière
Mercure	: 59 140 000 km
La Terre	: 149,5 millions de km

Ex 14 : Notation ingénieur : notation sous la forme $a\ .\ (10^3)^n$ avec $1 < |a| < 1\ 000$.

Notation scientifique : (celle donnée par la calculatrice) notation sous la forme $a\ .\ 10^n$ où $1 < |a| < 10$.

Calcule $A \times B$ et écris sous les formes scientifique, ingénieur et décimale dans chacun des cas suivants :

$A = 3 \times 10^{-5}$ et $B = 2,8 \times 10^7$

$A = 27\ 500$ et $B = 3 \times 10^{-4}$

$A = 3 \times 10^5$ et $B = 2,5\ 10^3$

$A = 2,51$ et $B = 7\ 530$

FEUILLE N° 25

Même exercice avec $\frac{A}{B}$

$A = 3{,}75 \times 10^8$ et $B = 20$

$A = 21\ 000$ et $B = 500\ 000$

$A = 1{,}4.10^{-3}$ et $B = 7.10^{15}$

Ex 15 : Encadre par deux nombres entiers consécutifs multipliés par une puissance de 10.

Exemple : $1 \times 10^2 < 123 < 2 \times 10^2$

$< 0{,}021 <$ $\quad < 0{,}000\ 12 <$

$< 0{,}27 \times 10^4 <$ $\quad < 1\ 080\ 000 <$

Ex 16 : Ecris sous forme décimale chacune de ces sommes :

$A = 7 \times 10^2 - 2 \times 10^0 + 4 \times 10^{-3}$

$B = 12 \times 10^{-3} + 190 \times 10^{-2} - 19 \times 10^1$

Ex 17 : Ecris les nombres suivants sous la forme a . 10^n avec a et n entiers relatifs.

$A = 0{,}000\ 1 \times (-0{,}000\ 000\ 1) \times (-100)$ $\quad B = 0{,}05 \times 3\ 000\ 000$

$C = \frac{0{,}007}{0{,}5}$ $\quad D = 0{,}000\ 007 - 0{,}000\ 3$ $\quad E = (\frac{5}{2})^2 \times (-\frac{2}{5})^3$

$F = ((-0{,}01)^2)^3$ $\quad G = ((-0{,}2)^3)^2$

Ex 18 : Ecris sous forme d'entier relatif ou de fraction "relative" chacun des nombres

$(-\frac{2}{3})^{-3}$; $(-\frac{2}{5})^{-5} \times (\frac{1}{2})^8 \times 2^{13} \times 5^{-5}$; $(\frac{3}{5} \times (-\frac{5}{3})^3)^2$

$1^8 - 8^1 \times (-5)^2 \times 9^0$; $(0{,}03)^0 \times (-12)^1 \times 12^{-1} \times (-7)^2$

$25^{-1} \times 5^2 \times (-3)^4$; $0^{16} \times 897^{-3} - (7\ 894^0)^{7\ 894}$

$(-1)^{17} \times (-6^2)$; $-7^2 + (-7)^2$; $-8^2 - (-8)^2$

$-18^0 \times 47 \times 10^{-1}$; $-4^2 - (-4)^2 + (-4)^{-1}$

Ex 19 : Donne l'écriture décimale de chacun des nombres :

A = 8 dixièmes + 5 millièmes + 6 + 10^{-6}

B = 4 centièmes + 3 millièmes + 15 × 10^{-4}

C = 29 dixièmes + 193 centièmes + 9 × 10^{-5}

$D = \frac{283}{10} + \frac{0{,}4}{100} + 5 \times 10^{-5}$

OBJECTIFS

- Utiliser les notations puissances.
- Connaître et savoir appliquer les règles dans le cas où, m, n, p, a, sont numériques.

$(a^m)^p = a^{m \times p}$

$a^m \times a^p = a^{m + p}$

$$\frac{a^n}{a^p} = a^{n - p} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{a^{p - n}}$$

- Encadrer un nombre par deux entiers successifs multipliés par une même puissance de 10.
- Changer d'écriture,

$$\begin{array}{ccc} \text{écriture décimale} & \longleftrightarrow & \text{écriture scientifique} \\ & \nwarrow\!\searrow \quad \nearrow\!\swarrow & \\ & \text{écriture ingénieur} & \end{array}$$

- Connaître la notation 10^{-n}.

Objectifs secondaires

- Revoir les changements d'unités, la notion d'échelle, la notion de masse volumique.
- Calculer le volume d'une boule.
- Différencier valeur exacte, valeur approchée, ordre de grandeur.
- Lire un tableau, un document.

SITUATION TEMPORELLE

En décembre, pendant 8 heures (y compris test).

ORGANISATION DE LA CLASSE

Identique aux autres parties.

DUREE :

NOS CHOIX

- A propos de la calculatrice : celle-ci est utilisée mais la touche $\boxed{\text{exp}}$, est ignorée.

L'activité porte sur l'astronomie. En effet cela permet :
• un travail sur les grands nombres et donc de montrer l'intérêt d'une notation qui en facilite les écritures,
• de créer un lien avec la physique.

DEROULEMENT ET COMMENTAIRES

Activité : durée 3h (feuilles n° 17, 18, 19)

Les dossiers sont distribués aux élèves un jour ou deux avant le début du travail en classe afin qu'ils puissent en prendre connaissance. Les élèves ont bien accueilli les dossiers car le système solaire était étudié simultanément en Sciences-Physiques.

En classe, pendant 2 heures, les élèves cherchent les réponses dans l'ordre qui leur plaît. Le professeur circule de groupe en groupe pour enrichir les travaux et apporter l'aide nécessaire. La synthèse est réalisée au cours de la 3ème heure.

Pour les questions 1 et 2, les élèves ont recherché le centre du soleil en construisant les médiatrices de deux cordes. Cette méthode avait été vue en 6ème et est bien réutilisée. Ils ont ensuite comparé le diamètre du soleil au diamètre des autres planètes puis utilisé le document n° 4 pour trouver le diamètre réel du soleil.

Les résultats diffèrent, ce qui permet de s'interroger sur la validité d'une mesure. Quelques uns comparent leur résultat avec celui vu l'an dernier lors d'un exercice (cf. "Calcul Littéral au collège" p. 65).

Le professeur invite ensuite les élèves à confronter le résultat obtenu avec les nombres du tableau (document n° 5).

Ce tableau doit être expliqué :

- que signifie 10^9 ? Comment vérifier ? La touche $\boxed{x^y}$ est alors introduite.
- Que signifie 10^0 ? (réponses spontanées 0 et 10).
- Que signifie 10^{-3} ?

En conclusion on indique que le document n° 5 donne des ordres de grandeur.

Pour la question 3, les élèves sentent la nécessité d'utiliser les puissances de 10 pour les grands nombres. Quelques précisions sont apportées afin de limiter les erreurs liées aux mesures,

- prendre les bords des planètes,
- prendre une planète éloignée du soleil (le choix se porte sur Uranus ou Neptune).

A la question 4, quelques élèves demandent la formule pour calculer le volume de la terre (assimilée à une sphère).
Cette formule est notée dans le répertoire à V (volume).

La masse volumique, pourtant rencontrée en Sciences-Physiques ne semble pas connue de tous. Une mise au point est nécessaire (définition, unités).

Pour bien réaliser les calculs, il faut les organiser sur le papier avant d'utiliser la calculatrice. Les élèves utilisent différentes méthodes qui sont comparées lors de la synthèse.

Les calculs de la question 6 sont terminés à la maison.

SYNTHESE

Les questions sont reprises une à une et les propriétés sur les puissances, dégagées, sont notées sur le répertoire.

Pour les puissances de 10 d'exposant négatif, les élèves remarquent que le nombre de zéros significatifs est indiqué par l'exposant.

Le professeur demande alors la signification de 2^{-3}, la réponse 0,002 immédiate ne correspond pas à ce que donne la calculatrice. Après réflexion un élève parle d'inverse de 2^3, le calcul effectué donne le même résultat que la calculatrice.

Les propriétés des puissances sont alors formulées par les élèves, admises dans le cas général et copiées sur le répertoire.

Ce qui a été noté dans le répertoire

$\boxed{V}$ olume d'une boule de rayon R

$$V = \frac{4}{3} \Pi R^3$$

$\boxed{P}$ uissances : les lettres représentent des nombres.

<u>On admettra que</u> :	<u>Exemples</u>
$\underbrace{a \times a \times a \times \ldots\ldots \times a}_{n} = a^n$	$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5$
$a^0 = 1$	$10^0 = 1$
$a^1 = a$	$10^1 = 10$
$a^{-3} = \text{inv } a^3 = \dfrac{1}{a^3}$	$10^{-3} = \dfrac{1}{10^3} = \dfrac{1}{1000} = 0{,}001$
	$2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8} = 0{,}125$
$a^b \times a^c = a^{b+c}$	$10^8 \times 10^4 = 10^{12}$
$(a^b)^c = a^{b \times c}$	$(10^4)^3 = 10^{4 \times 3} = 10^{12}$
$\dfrac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$	$\dfrac{10^6}{10^4} = 10^{6-4} = 10^2$
$(a \times b)^c = a^c \times b^c$	$(10 \times 3)^2 = 10^2 \times 3^2$

EXERCICES

Durée : 4 heures.

Les objectifs sont énoncés par les élèves.

Objectifs : *savoir utiliser les puissances de 10*
savoir utiliser les propriétés sur les puissances.

Ex 1 : Le texte est bien compris, les élèves utilisent les documents précédents et maîtrisent bien la proportionnalité.
Quelques problèmes subsistent.

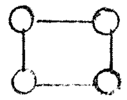
- Lecture de la calculatrice qui donne la notation scientifique :

$$6\ 371 \times 10^5 \rightarrow 6,\ 371 \times 10^8$$

- Confusion entre $6,\ 371 \times 10^8$ et $6,\ 371^8$.
  L'écriture est incorrecte mais les élèves ont voulu dire

$$6,\ 371 \times 100\ 000\ 000.$$

Ex 2 : La structure atomique n'ayant pas été étudiée en physique le texte est difficile à comprendre. Une explication est donnée, les atomes sont assimilés à des sphères et dessinés.



Le côté du cristal se calcule ensuite sans difficulté.

Pour les autres exercices les difficultés portent sur :

- La compréhension des textes
  - "nombres consécutifs multipliés par une même puissance de 10",
  - "puissances de 10 multipliées par un entier".
- Utilisation abusive de la calculatrice qui fait perdre tout sens à la puissance.

Pour y remédier des séances de calcul mental ont montré aux élèves que des calculs peuvent se faire rapidement après une organisation des calculs.

Exemples de calculs demandés menés mentalement.

$\dfrac{2 \times 10^3}{10^2}$ $(3 \times 10^2) \times (4 \times 10^{17})$ $\dfrac{10^5}{10^7}$; $\dfrac{10^{-5}}{10^{-2}}$; $\dfrac{2^6}{2}$;

$(10^2)^4$; $10^3 + 10^2$; $\dfrac{2^8}{4}$.

- Les différentes écritures $a \times 10^n$

Le passage à la notation scientifique et à la notation ingénieur nécessite une aide du professeur dans les groupes.
Cela est dû au fait que :

- pour certains nombres les notations sont les mêmes,
- les élèves ne voient pas la nécessité de la notation ingénieur.

La notation scientifique mieux comprise (car familière avec la calculatrice) est bien réutilisée par les élèves pour comparer les distances des planètes au soleil dans l'exercice 13 donné en devoir à la maison.

- Le calcul

- Les priorités opératoires avec les puissances :

  -2^8 et $(-2)^8$

- Le signe d'un produit, d'une puissance, d'un quotient.
- Le calcul de $(-\frac{2}{3})^{-3}$ qui cumule.

  ° la notations des puissances négatives

  ° la règle $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$,

  ° le signe d'une puissance.

- Confusion entre 10^{-5} et 0,000 05
- Confusion entre $a^b + a^c$ et $a^b \times a^c$.

NOS CONCLUSIONS sur cette partie

- La progressivité des apprentissages ne semble pas prise en compte sur cette partie. Les contenus paraissent trop lourds pour la 4ème. (Il y a risque de confusion entre les différentes notations).

- La calculatrice est utile mais y avoir recours systématiquement risque d'entraîner une perte de sens des notations. Des exercices de calcul mental (cf ce qui a été dit précédemment), des exercices de lecture (cf partie I Calcul Littéral en 4ème) peuvent permettre aux notions de prendre un sens.

- Notons aussi que dans le temps imparti nous n'avons pas pu développer la dernière partie de l'activité à savoir les questions que les élèves pouvaient se poser, ce qui est regrettable.

T E S T n° 3

FEUILLE N° 26

T E S T

Ex 1 : Trouve le nombre relatif qu'il convient de mettre dans $\square$ pour que l'égalité soit vraie :

$3\,472 = 3{,}472 \times 10^{\square}$; $0{,}005 = 5{,}7 \times 10^{\square}$

$19\,872 = 19{,}872 \times 10^{\square}$; $-\,27\,264 = -\,2{,}7264 \times 10^{\square}$

$1\,200\,000 = 1{,}2 \times 10^{\square}$; $0{,}000\,01 = 10^{\square}$

Ex 2 : Ecris les nombres ci-dessous sous forme décimale :

$7\,345 \times 10^{-6} =$

$-3{,}5 \times 10^{-3} =$

$0{,}03 \times 10^{5} =$

$2{,}7 \times 10^{-5}$

$19{,}237 \times 10^{2} =$

Ex 3 : Ecris sous forme du produit d'un entier par une puissance de 10 :

$-\,14{,}75 =$

$0{,}010\,305 =$

$-\,2\,300 =$

$10^{3} + 10^{2} =$

Ex 4 : Ecris sous la forme d'une seule puissance de 10 :

$10^{-3} \times 10^{5} \times 10^{0} =$; $(10^{2})^{3} =$

$(10^{-4}) \times 10^{5} =$; $\dfrac{10^{7} \times 10^{-3}}{10^{4}}$

Ex 5 : Encadre par deux puissances consécutives de 10 :

$< 4\,235 <$; $< 0{,}07 <$; $< 7{,}3$ millions $<$

FEUILLE N° 27

Ex 6 : Encadre les nombres donnés par deux entiers relatifs successifs multipliés par une même puissance de 10 :

< 0,41 < ; < 17 300 < ; < 0,007 4 <

Ex 7 :

Calcule : $2^{-4} =$

$(-4)^3 \times (4^{-3}) =$

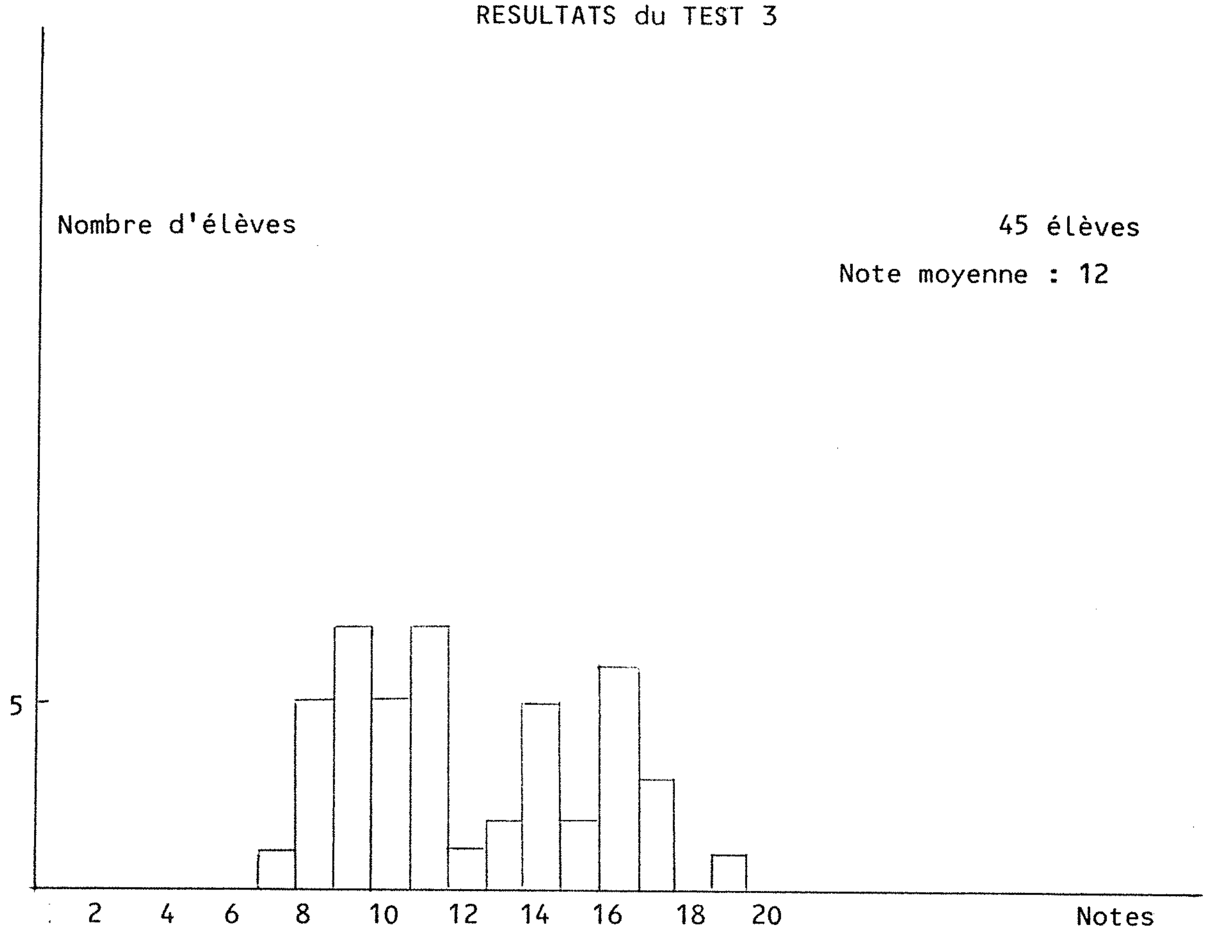
$\frac{5^2 \times 2^5}{-25} =$

A la calculatrice

On te donne $A = 2,25 * 10^3$ et $B = 3,75 * 10^{-4}$

Calcule $A * B$, $\frac{A}{B}$, $A + B$.

RESULTATS du TEST 3



AUTEURS : *D. GAUD - J.P. GUICHARD - M. MAROT - C. ROBIN - M. ROBIN*

TITRE : Travaux numériques en quatrième - Fascicule 1
- Histoire des nombres relatifs
- Calculs numériques en 4ème, compte rendu de l'expérimentation des nouveaux programmes.

EDITEUR : IREM de Poitiers

DATE : Avril 1988

NIVEAU : Collège

MOTS-CLE : Histoire des mathématiques - Nombres relatifs - Puissances Astronomie - Expérimentation - Opérations sur les nombres relatifs - Fractions.

RESUME : Le fascicule 1 comporte deux parties :
* Une approche historique de la notion de nombre relatif nécessaire à la compréhension des difficultés rencontrées par les élèves.
* Une mise en oeuvre commentée des parties suivantes du programme de quatrième :
- Nombres relatifs en écriture décimale et fractionnaire (produit)
- Puissances entières d'exposant positif ou négatif
- Conventions et priorités opératoires.

PREMIER TIRAGE : 800 exemplaires.

IREM - 40, avenue du Recteur Pineau - 86022 POITIERS ISBN 2-85954-019-9