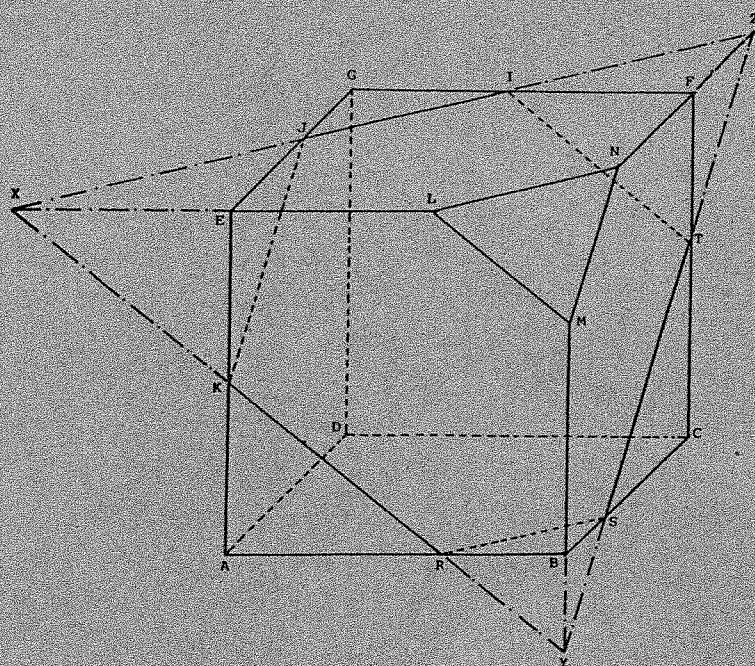


UNIVERSITE DE POITIERS

Institut de Recherche
sur l'Enseignement des Mathématiques

Février 1988

ELEMENTS POUR UNE INTRODUCTION
A LA GEOMETRIE DANS L'ESPACE
EN SECOND CYCLE



Pierre CHEVRIER
Jean-Claude DOBIGEON
Jean-Claude THIENARD

S O M M A I R E

* Avant-propos.....	page 1
* Eléments pour une introduction à la géométrie....	page 3
* Note : conventions de dessin.....	page 13
* Exemples d'activités.....	page 15
Annexe 1 : Les programmes.....	page 23
Annexe 2 : Texte de G. AUDIBERT : "l'enseignement de la géométrie de l'espace".....	page 31
Annexe 3 : Le dessin comme objectif avoué (dans "dessiner l'espace" , fascicule du maître, IREM de Lorraine).....	page 41
Annexe 4 : La perspective cavalière.....	page 43
Annexe 5 : La perspective centrale.....	page 45

AVANT-PROPOS

L'expérience de l'animation de stages IREM ayant pour thème "l'introduction de la géométrie dans l'espace" prouve que celle-ci est source de difficultés pour de nombreux collègues. L'importance du nombre de productions IREM sur ce sujet atteste également de cette difficulté. Les obstacles rencontrés sont de plusieurs ordres :

- 1/ Comment introduire les premières notions, si l'on souhaite éviter d'en faire un catalogue rébarbatif ?
- 2/ Quel est le noyau de théorèmes indispensables, à quel moment les introduire ? Comment les organiser en un tout cohérent ?
- 3/ Comment apprendre aux élèves à représenter les objets de l'espace, selon les règles de la perspective cavalière, alors qu'il est hors de question de les expliciter a priori (les règles de la perspective cavalière sont conséquences des propriétés de la projection cylindrique et ne peuvent trouver de justifications qu'a posteriori. Voir annexe p. 43). Comment apprendre aux élèves à voir dans l'espace, c'est-à-dire à imaginer ou matérialiser une configuration spatiale à partir d'une représentation ?
- 4/ Quelles activités, quels exercices proposer aux élèves ? Selon quels objectifs ?

Le présent document est essentiellement centré sur les points 1/ et 2/, secondairement sur les points 3/ et 4/ abordés, eux, dans la plupart des productions traitant de la géométrie dans l'espace. Il s'organise autour de l'idée que l'on peut, dans une première approche de la géométrie dans l'espace, éviter une présentation axiomatique du type de celles que l'on trouve dans la plupart des manuels scolaires. Il suffit pour cela de considérer la géométrie dans l'espace comme une modélisation de l'espace ambiant. Ce point de vue est détaillé dans "éléments pour une introduction à la géométrie de l'espace" et illustré dans "exemples d'activités".

Ce fascicule s'adresse exclusivement aux professeurs. Beaucoup de démonstrations ne sont donc pas mentionnées. Seules ont été reproduites celles qui ont valeur d'exemples eu égard à la démarche suivie.

Le texte renvoie à diverses annexes destinées à apporter d'autres informations ou éléments de réflexion. Elles peuvent être lues de façon indépendante.

Nous ne prétendons pas bien sûr détenir "la vérité". Notre objectif est avant tout de susciter ou d'alimenter la réflexion de chacun et le débat sur l'enseignement de la géométrie dans l'espace au lycée.

Toute réaction, critique ou suggestion sera bienvenue.

ELEMENTS POUR UNE INTRODUCTION A LA GEOMETRIE DANS L'ESPACE

I - REMARQUES DIDACTIQUES

Cette introduction est conçue comme une "mathématisation" de l'espace environnant. Le point de vue esquissé en premier cycle est d'une autre nature, il est plutôt celui de la représentation de l'espace. Il convient néanmoins d'y revenir pour son utilité dans la démarche envisagée, ainsi que pour en marquer les limites sur le plan mathématique (voir annexe : programmes 1er et 2nd cycles).

La démarche proposée ici, comprend trois étapes fondamentales :

- * Observation du réel dont on souhaite rendre compte
- * Introduction de langages propres à rendre compte des observations
- * Modélisation ou mathématisation de l'espace.

Ces trois aspects de la démarche seront évidemment abordés de façon concomitante; il conviendra néanmoins de bien les repérer et les séparer dans la mesure où ils ne renvoient pas au même niveau d'activité mathématique, ce afin de prévenir tout risque de confusion quant aux propositions qui seront admises et celles qui seront obtenues par voie démonstrative.

1/ Observation du réel dont on souhaite rendre compte

Nous insisterons d'autant plus sur cette phase, qu'elle fait l'objet d'une impasse quasi systématique dans les programmes, les manuels et par voie de conséquence dans l'enseignement (voir l'annexe 2 : texte d'Audibert, p. 31 et l'annexe 3 : le dessin comme objectif avoué, p. 41).

L'observation de formes, architecturales, d'objets usuels : boîtes, balles, etc..., et l'introduction à leur propos d'un vocabulaire permettant leur description, conduit à l'introduction de quelques notions primitives telles que droites, plans... et de quelques propriétés régissant leurs positions relatives. Ces propriétés sont d'observation sur les objets dont on cherche à "parler" et sont données comme vérités premières (axiomes) du modèle mathématique qu'on élabore.

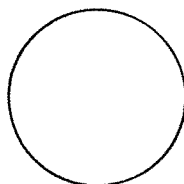
2/ Introduction de langages propres à rendre compte des observations

Le langage ordinaire suffit pour rendre compte des observations : un cube est un solide qui possède 6 faces qui sont des carrés... mais ne suffit pas dès que l'on cherche à étudier, que l'on cherche à répondre à des questions sur l'objet observé. La pensée a alors besoin pour se déployer de supports visuels : signes, dessins, démonstrations écrites, etc... . Il y a donc nécessité d'élaborer un code de représentation des objets de l'espace et notamment des plus simples : droites, plans, tétraèdres, cubes, cylindres, cônes, sphères...

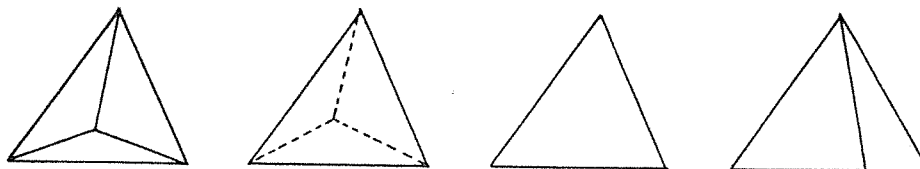
Il convient de bien faire remarquer l'aspect hautement symbolique et arbitraire de ces représentations, le fait qu'elles constituent un langage, qui, s'il est non parlé (non discursif) et par conséquent non démonstratif, est néanmoins réglé.

Il convient également de bien faire remarquer que la représentation n'est pas l'objet, que l'identification habituellement faite en géométrie plane, n'est plus possible ici et qu'il y a là une difficulté supplémentaire.

Les quelques dessins ci-dessous (représentations) sont suffisants pour faire saisir la difficulté liée au mode de représentation habituel (perspective cavalière) en raison des inévitables pertes d'informations qu'il comporte (une droite peut être représentée par un point, des segments égaux peuvent être représentés inégaux, des angles droits sont représentés obtus ou aigus, etc...)



Ce dessin représente une sphère
n'est pas une sphère



Ces dessins peuvent représenter un tétraèdre mais ne sont pas des tétraèdres.

Un tel dessin livré, tel quel, est susceptible de multiples décodages dont certains diffèrent nécessairement de celui du réalisateur.

On se reportera pour plus de détails aux annexes 2 p. 31 ; 4 p. 43 ; 5 p. 45.

3/ Modélisation ou mathématisation de l'espace. Notions primitives.

Pour décrire un cube, un parallélépipède, un tétraèdre, ... on est conduit à parler de faces, de portions de plans, d'arêtes, de droites, de sommets, de points, ..., et on est amené à énoncer comme vérités premières (et non d'évidence) du modèle mathématique que l'on construit pour rendre compte de la réalité visible des solides de l'espace ambiant que :

- 1) Etant donné deux plans P et Q (distincts), de deux choses l'une :
ou bien
a) ils ne se rencontrent pas ;
ou bien
b) ils se coupent suivant une droite.

(en **conformité** avec l'observation de l'intersection des deux faces de l'un des solides précédents, des pans d'un toit, etc...).

La situation a) suggérée par les faces opposées d'un cube, conduit à la :

Définition : deux plans P et Q tels que $P \cap Q = \emptyset$ seront dits parallèles.

Remarque :

Une fois l'espace modélisé, les questions se posent et n'ont de solutions que dans le cadre du modèle mathématique construit.

A titre d'exemple, tout problème sur le cube concerne le cube du modèle mathématique, objet de discours, et non pas l'objet réel observé. Ainsi, la question "les faces opposées d'un cube sont-elles parallèles ?" se pose si le cube est défini, par exemple, comme un polyèdre à six faces carrées. Une question de ce type permet de faire sentir aux élèves la distinction qu'il convient de faire entre la réalité dont on cherche à rendre compte et le modèle mathématique construit à cette fin, et de poser le problème de leur adéquation (voir page 8).

Soulever ce point subtil n'a pour objectif que de faire appréhender cette discussion. Ceci fait, l'adéquation du modèle mis en place à la "réalité" allant de soi pour les élèves, les propriétés évidentes du cube observé (faces carrées, faces opposées parallèles...) peuvent très bien être admises dans la classe pour le cube du modèle mathématique.

2) Etant donné une droite D et un plan P , de trois choses l'une :
ou bien

a) D est une droite de P ; $D \subset P$ (arête d'un polyèdre dans l'une des faces qu'elle définit), il est alors "clair", une droite étant définie par deux points, tout plan étant le plan habituel, que si $A \in P$, $B \in P$ alors $(AB) \subset P$.

Ou bien

b) $D \cap P = \emptyset$ (face d'un cube et arête d'une face opposée, cette propriété est-elle une vérité d'évidence ? Doit-elle être démontrée ? Peut-elle être démontrée ? Est-elle vraie, si la question a un sens, dans un cube réel, c'est-à-dire dans une matérialisation donnée ?).

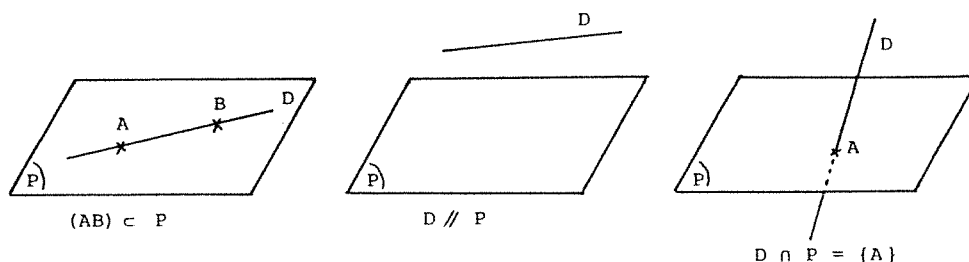
Ou bien

c) $D \not\subset P$ et $D \cap P \neq \emptyset$, dans ce cas, D et P se coupent en un point ; $D \cap P = \{A\}$ (multiples exemples de cette situation dans les polyèdres).

Les situations a) et b) conduisent à la :

Définition : une droite D est parallèle à un plan P si et seulement si $D \subset P$ ou $D \cap P = \emptyset$.

On a les représentations conventionnelles suivantes :



Pour plus de détails on se reportera à la note : conventions de dessins, (page 13).

Remarques :

Par une droite, on peut faire passer une infinité de plans (mais si l'on fixe un point hors de la droite, il passe un seul plan par la droite et par le point (langage volontairement naïf)).

Ceci est la modélisation mathématique de l'observation dans le monde réel d'une porte pivotant autour de son axe.

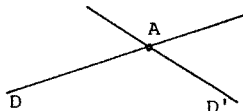
D'où :

3) Un plan est entièrement déterminé par trois points non alignés, une droite et un point hors de cette droite, deux droites concourantes, deux droites parallèles (voir ci-dessous).

4) Etant donné deux droites, de trois choses l'une :

ou bien

a) D et D' ont un point commun ($D \neq D'$), elles définissent alors un plan.



Ou bien

b) D et D' n'ont aucun point commun.

Si elles sont dans un même plan, alors elles sont parallèles au sens classique du terme.

Ou bien

c) Sinon (multiples exemples suggérés par l'observation des polyèdres), tout plan qui contient l'une ne contient pas l'autre.

On a la :

Définition : D est parallèle à D' si et seulement si $D = D'$ ou D et D' sont deux droites d'un même plan tel que $D \cap D' = \emptyset$.

Ce vocabulaire et ces propriétés de base "paraissent suffisants" pour commencer des activités. Celles-ci seront l'occasion de la découverte de théorèmes ainsi que de méthodes de démonstration. Les situations théorémiques et méthodologiques seront dégagées lorsqu'il apparaîtra qu'un même type de situation se répète. L'intérêt d'étudier un résultat en soi, une méthode de démonstration, d'avoir un résultat énoncé une fois pour toutes et donc utilisable pour d'autres démonstrations, apparaît alors dans son utilité, voire sa nécessité.

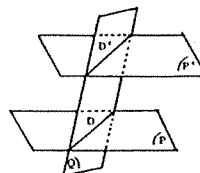
II - PREMIERES ACTIVITES

Section d'un tétraèdre ou d'un cube par un plan...
(Se reporter à : exemples d'activités p. 15)

1/ Une situation théorique

Lors de la résolution de ce type de problème, on rencontre à diverses reprises le fait que si un plan coupe deux plans parallèles, les intersections sont des droites parallèles. Il apparaît donc opportun de dégager le :

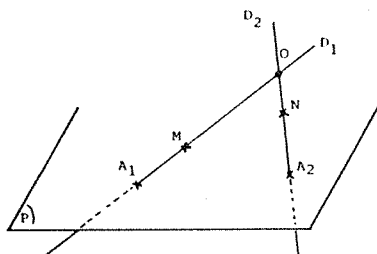
Théorème 1 : Si $P // P'$ et si $P \cap Q = D$, $P' \cap Q = D'$ alors $D // D'$.



On peut remarquer que l'énoncé contraposé (le faire énoncer, et mettre en évidence l'équivalence avec l'énoncé donné) fournit une autre forme utile du théorème.

2/ Quelques remarques à propos d'un exercice simple

On donne un plan P et deux droites D_1 et D_2 sécantes en O , qui rencontrent P en A_1 et A_2 . Soit M un point de D_1 et N un point de D_2 .



On se propose d'étudier l'intersection de la droite (MN) et du plan P dans le cas de la figure ci-contre.

Cet exemple permet d'illustrer la démarche en trois étapes décrite dans la première partie.

Etape 1 : celle de la matérialisation.

On peut matérialiser la situation avec le plan P de la table et deux règles D_1 et D_2 et une troisième que l'on fait passer par M et N . Cela permet de "voir" le résultat dans le monde réel. (MN) coupe P sur $(A_1 A_2)$ et cela peut permettre de comprendre la raison de ce fait en matérialisant le plan Q défini par les droites D_1 et D_2 , de percevoir que l'intersection cherchée est dans P bien sûr et dans Q et donc dans $Q \cap P = (A_1 A_2)$.

Etape 2 : celle de la représentation.

Le problème est de compléter la représentation ci-dessus en dessinant l'intersection cherchée.

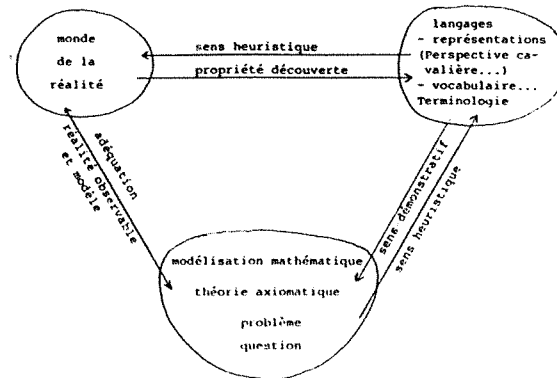
Peut-on la représenter arbitrairement ? Ce qui a été fait à l'étape 1 permet évidemment de répondre à la question par non ; le point cherché est sur (MN) et sur $(A_1 A_2)$ et donc à l'intersection de ces droites.

Cela résout le problème au niveau de la représentation, confirme l'idée selon laquelle celle-ci est langage réglé mais non discours démonstratif.

Etape 3 : celle du discours mathématique (réglé par les définitions, les propriétés axiomatiques et les théorèmes connus).

C'est à ce niveau que tout se justifie, notamment les règles du "langage des représentations", qui seront appliquées couramment dans la suite.

Les trois niveaux distingués précédemment et leurs relations dialectiques sont spécifiques du discours mathématique de la géométrie dans l'espace, dès lors que celle-ci est conçue comme modélisation de l'espace ambiant.

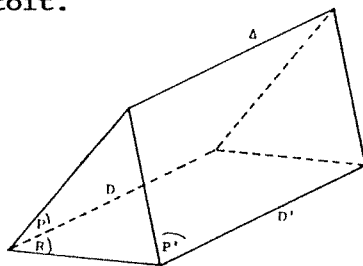


1) Quelle que soit leur origine, les questions et problèmes sont posés dans la théorie mathématique et ne peuvent recevoir de solution qu'à ce niveau.

2) Le problème posé, on cherche à se faire une idée, à l'aide de représentation ou de matérialisation : sens heuristique.

3) Lorsqu'une remarque utile apparaît à ces niveaux, on revient au niveau de la théorie, ou on cherche à la fonder et à l'exploiter.

3/ Une autre situation théorémique fréquemment rencontrée : celle du toit.



Elle peut donner lieu à deux formulations différentes :

Théorème 2 : Si $\Delta = P \cap P'$ et $\Delta // R$ $\Delta \not\subset R$
alors $D = P \cap R$ et $D' = P' \cap R$ sont
parallèles.

Théorème 3 : Avec les mêmes notations, si $D // D'$
alors $\Delta // R$ ($D \neq D'$).

L'appareil démonstratif (raisonnements par l'absurde) étant peut-être un peu compliqué, cet énoncé sera admis ou démontré en fonction du niveau des élèves auxquels on s'adresse; en tout état de cause, il semble opportun de faire remarquer qu'une démonstration est possible, autrement dit que cette propriété est une conséquence des définitions et donc du sens donné au mot parallèle.

Démonstration du théorème 2

Si D n'est pas parallèle à D' alors D et D' ont un point commun A qui est un point de P et un point de P' et donc de $P \cap P' = \Delta$. Ce qui est contradictoire avec $\Delta \cap R = \emptyset$ puisque $A \in R$.

Démonstration du théorème 3

Si Δ n'est pas parallèle à R alors $\Delta \cap R = \{A\}$, donc $A \in P$ et $A \in P'$ et par conséquent $A \in P \cap R$ et $A \in P' \cap R$. Ce qui signifie que $A \in D \cap D'$.

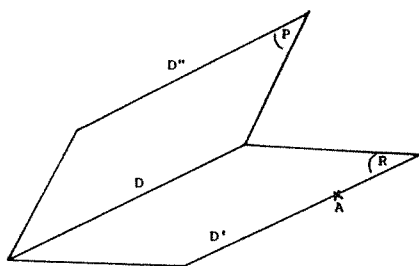
On aboutit ainsi à une contradiction avec le parallélisme de D et D' .

Conséquence utile : la transitivité du parallélisme des droites.

Dans la perspective qui est la nôtre : proposition à établir au moment où elle est nécessaire.

Théorème : Si $D // D'$ et $D'' // D$ alors $D'' // D'$

On suppose que les trois droites sont distinctes deux à deux.



Soit R le plan défini par D et D'

Soit P le plan défini par D et D''

D'une part D'' est parallèle à R puisque les points communs à D'' et à R sont des points communs à D'' et $P \cap R$ (car $D'' \subset P$) et donc à D'' et à D ; or $D'' \cap D = \emptyset$.

D'autre part soit $A \in D'$, le plan défini par D'' et A coupe R suivant une droite D'_1 et D'_1 est parallèle à D (théorème 2).

On en déduit que $D'_1 = D'$ d'après l'axiome d'Euclide.

D'' et D' sont donc coplanaires et $D'' \cap D' = \emptyset$ d'après ce qui précède. D'où le résultat.

Remarques :

1) Il n'y a pas unicité d'un ensemble cohérent de théorèmes opérationnels, et ceux présentés précédemment ne le sont qu'à titre d'illustration de la démarche proposée dans la partie I.

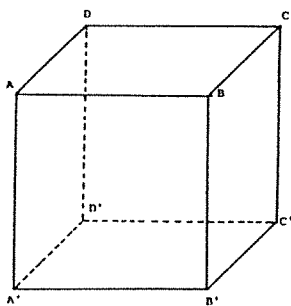
2) Les démonstrations qui ont été détaillées l'ont été dans le but de pouvoir dégager ce que nous avons appelé précédemment des situations méthodologiques.

4/ Deux situations méthodologiques

- 1) Pour déterminer le point d'intersection d'une droite D et d'un plan P , on est souvent amené à considérer D comme partie d'un plan Q (bien choisi) et à chercher $\Delta = P \cap Q$; le point cherché est alors à l'intersection de Δ et D .
- 2) Pour déterminer l'intersection de deux plans P et Q , on cherche à en déterminer deux points. Pour trouver un point, on cherche à déterminer l'intersection de l'un des plans avec une droite de l'autre, bien choisie (ce qui renvoie éventuellement à 1).

III - LES ORTHOGONALITES

Comme précédemment, les définitions qui vont être données, doivent être en relation avec les "objets réels" dont la théorie cherche à rendre compte. La démarche suivie dans ce paragraphe sera donc identique à celle suivie précédemment : on observe, on représente puis on modélise.



Considérons le cube $ABCD A'B'C'D'$

1/ Des droites comme (AA') et (AD) sont orthogonales (au sens connu du terme, puisqu'elles sont coplanaires et que $ADD'A'$ est un carré).

On dira de même que (BB') et (AD) sont orthogonales car (AA') et (BB') ont la même direction. De même (CC') et (AD) ... (CC') et $(A'D')$, etc...

Dans tous les cas, si on mène une parallèle à chacune de ces droites par A , on obtient les droites (AA') et (AD) qui sont orthogonales au sens habituel.

On introduira donc la notion d'orthogonalité de deux droites de l'espace par la :

Définition : Deux droites D et Δ sont orthogonales si et seulement si O étant un point donné, les parallèles D' et Δ' à D et Δ passant par O sont orthogonales au sens de la géométrie plane.

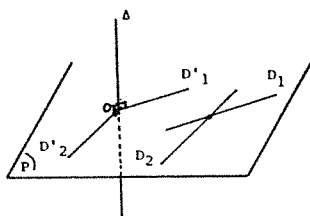
Remarques :

Il convient de faire remarquer :

- a) que la définition donnée ne dépend pas de O ;
- b) que l'orthogonalité est une relation symétrique.

2/ Une droite comme AB est orthogonale à deux droites sécantes du plan CBB' , (CB) et (CB') . On peut alors montrer, en application du théorème de la médiane qu'elle est orthogonale à toute droite de ce plan. D'où l'introduction de la notion d'orthogonalité d'une droite et d'un plan par la :

Définition : Une droite Δ est orthogonale à un plan P si et seulement si elle est orthogonale à deux droites concourantes de ce plan.



Propriété ou théorème : Si Δ est orthogonale à P alors elle est orthogonale à toute droite du plan P .

Cet énoncé, d'une grande importance dans les démonstrations, peut être admis dans une première approche.

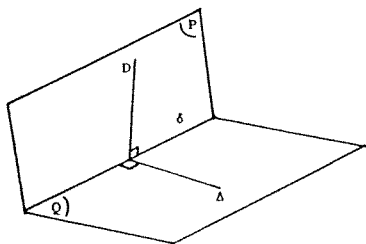
3/ Considérons les plans (CBB') et (ABC) . (ABC) contient la droite (AB) qui est orthogonale au plan (CBB') . On dira que le plan (ABC) est perpendiculaire au plan (CBB') .

Peut-on dire que (CBB') est perpendiculaire au plan (ABC) ? Pourquoi? Est-ce "une évidence"?

Plus généralement on aura la :

Définition : Un plan P est perpendiculaire à un plan Q si et seulement si P contient une droite D orthogonale à Q .

Problème : Q est-il perpendiculaire à P ? Autrement dit, Q contient-il une droite Δ orthogonale à P ?



Par hypothèse :

$D \subset P$ et D est orthogonale à Q donc D est orthogonale à $\delta = P \cap Q$.

Soit maintenant Δ une droite de Q orthogonale à δ . Δ est alors orthogonale à P puisque Δ est orthogonale à δ (définition) et Δ est orthogonale à D (car D est orthogonale à toute droite de Q).

On peut donc parler de plans perpendiculaires.

On dégagera au cours des activités les situations théorémiques jugées intéressantes et la situation méthodologique suivante :

┌ Pour montrer l'orthogonalité de deux droites, il suffira de
│ montrer que l'une des deux droites est orthogonale à un
│ plan contenant l'autre.

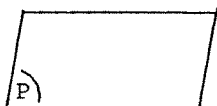
(Voir les exercices sur l'orthogonalité p 18).

N O T E

CONVENTIONS de DESSIN

DROITE : elle est représentée dans l'espace comme dans le plan.

PLAN :



Dessin d'un rectangle en perspective cavalière (le rectangle symbolisant le plan dans l'espace, de la même manière que le segment symbolise une droite) ; une lettre, placée dans un coin, permet de désigner le plan.



Il peut être représenté par ces dessins inachevés du parallélogramme.



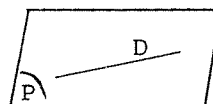
Dans le dernier cas, on peut interpréter le plan, comme défini par deux droites sécantes qui, seules, sont représentées.

Remarque :

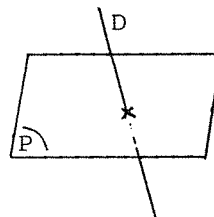
Dans la pratique, les plans étudiés peuvent être défini par 3 points non alignés et représentés par un triangle !

POSITIONS RELATIVES D'UNE DROITE ET D'UN PLAN :

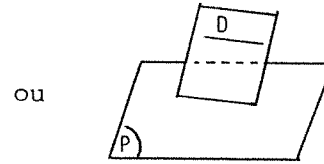
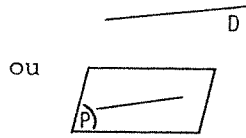
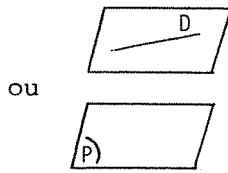
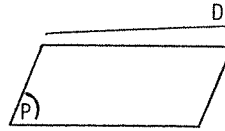
Droite D incluse dans le plan P :



Droite D sécante au plan P :

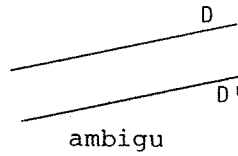


Droite parallèle au plan P

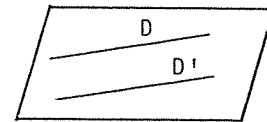


POSITIONS RELATIVES DE DEUX DROITES (DISTINCTES) :

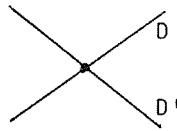
Droites parallèles :



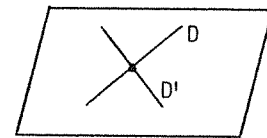
ou



Droites sécantes :

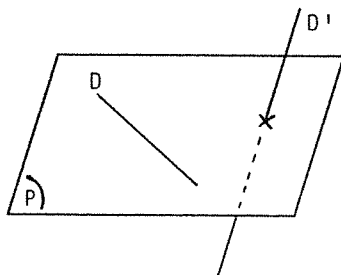


ou

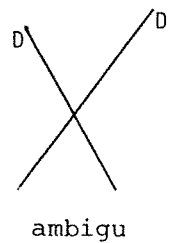


ambigu, on peut
"renforcer" le
point de concours

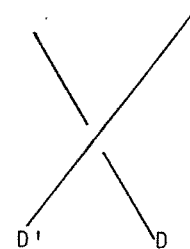
Droites non coplanaires :



ou



ou

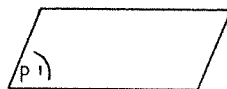
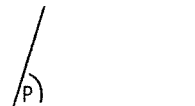


POSITIONS RELATIVES DE DEUX PLANS :

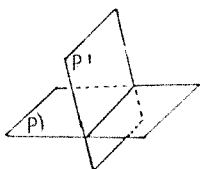
Plans parallèles :



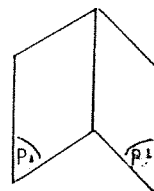
ou



Plans sécants :



ou



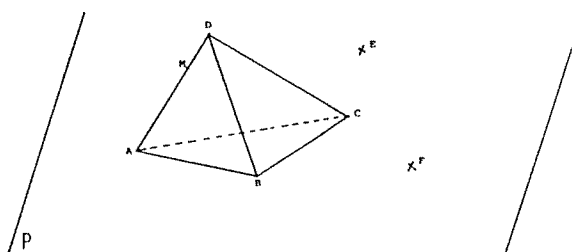
EXEMPLES D'ACTIVITES

Les exemples développés ici ont pour objet l'illustration du point de vue précédemment développé. Ils ont été conçus sans souci de progression pour une utilisation en classe.

PARALLELISME ET INCIDENCE

1/

La face (ABC) du tétraèdre ABCD est dans le plan P.
E et F sont deux points donnés du plan tels que (EF) n'est parallèle à aucun des côtés du triangle ABC. M est élément de [AD].
Construire en justifiant clairement la construction, l'intersection du tétraèdre et du plan (MEF).



Cet exercice a pour but de faire assimiler que le langage des représentations est réglé et qu'en conséquence des démarches démonstratives sont nécessaires pour pouvoir effectuer les constructions.

Il faut trouver l'intersection de (MEF) avec chacune des faces (ADB) (DBC) (ADC) (l'intersection avec 2 faces est suffisante).

Cherchons l'intersection de (ADB) avec (MEF).

L'intersection étant une droite, il suffit de trouver 2 points communs à ces deux plans :

a) M est élément de (MEF) et (ADB) donc $M \in (MEF) \cap (ADB)$

b) Pour trouver un deuxième point, il suffit de déterminer l'intersection de la droite (EF) et du plan (ADB) car $(EF) \subset (MEF)$.

L'intersection étant un point, nous allons le déterminer en trouvant deux droites coplanaires et sécantes (l'une élément de (MEF), l'autre de (ABD)).

$(EF) \subset (MEF)$ et $(AB) \subset (ABD)$, ces 2 droites sont coplanaires et sécantes par hypothèse. Soit $H \in (AB) \cap (EF)$. C'est le deuxième point cherché.

En effet :

$H \in (AB)$ donc $H \in (DAB)$

et

$H \in (EF)$ donc $H \in (HEF)$

alors $H \in (DAB) \cap (MEF)$

L'intersection de (MEF) avec (ABD) est (MH).

(MA) et (DB) sont coplanaires et sécantes, soit N le point d'intersection des droites (MH) et (DB).

L'intersection du plan (MEF) et de la face (ABD) du tétraèdre est [MN].

On utilise la même méthode pour trouver l'intersection de (DAC) avec (MEF).

M est un point commun aux deux plans (DAC) (car $M \in [AD]$) et (MEF).

(AC) et (EF) sont coplanaires et sécantes par hypothèse, soit G le point d'intersection des droites (AC) et (EF).

et $G \in (EF)$ donc $G \in (MEF)$
 $G \in (AC)$ donc $G \in (DAC)$ alors $G \in (MEF) \cap (DAC)$

On trace (MG), soit P le point d'intersection des droites (MG) et (DC).

((MG) et (DC) sont coplanaires et sécantes).

L'intersection du tétraèdre ABCD et du plan (MEF) est le triangle MNP.

Remarque :

Soit I l'intersection de (BC) avec (EF). On peut démontrer que les points N, P, I sont alignés.

2/

La figure ci-après représente un cube dont un coin a été coupé.

Tracer l'intersection du cube et du plan (P) passant par I et parallèle au plan (LMN).

Cet exercice, qui a le même objectif que le précédent, utilise un théorème que les élèves doivent connaître (cette situation étant très fréquente dans les exercices). C'est le théorème 1 énoncé en page 6.

Deux plans parallèles rencontrent un plan donné suivant deux droites parallèles.

(P) et (LMN) sont parallèles.

Leurs intersections respectives avec la face du cube (I) notée (ELNFG) sont deux droites parallèles. (Théorème).

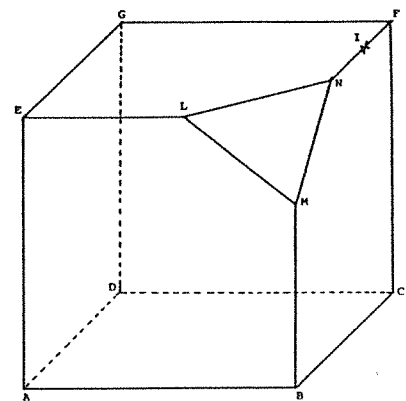
L'une de ces intersections est (LN).

Soit J le point d'intersection de (P) et de (EL), (IJ) est la droite d'intersection de (P) et de (ELNFG) de cette face. (IJ) est parallèle à (LN). (Théorème).

Les intersections de (P) et de (LMN) avec la face (EABML) sont deux droites parallèles. (Théorème).

(LM) est une de ces droites. Soit K le point d'intersection de (P) et (MB). (JK) est la droite d'intersection de (P) et de (EABML). (JK) est parallèle à (LM).

Il suffit de joindre K à I pour obtenir l'intersection de (P) avec la face (BCFNM).



(11)

Remarques :

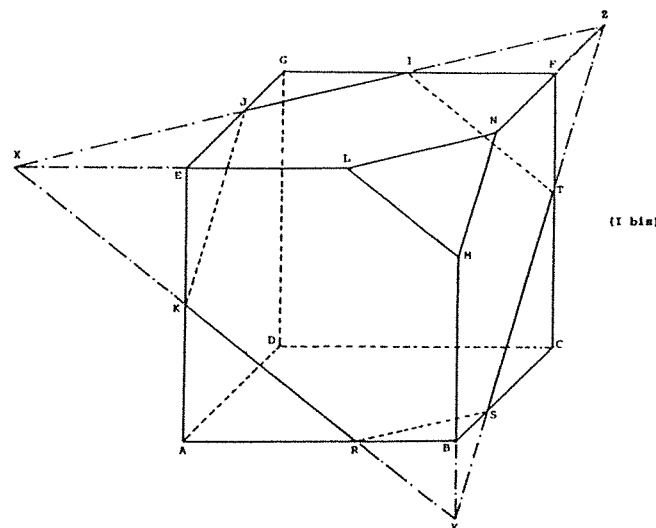
- 1) On peut démontrer que (KI) est parallèle à (MN).
- 2) On peut faire remarquer aux élèves que l'intersection d'un plan (P) parallèle à (LMN) avec le cube peut être un triangle, un quadrilatère, un pentagone, un hexagone.

L'intersection du cube (I bis) et du plan (P) parallèle à (LMN) passant par I est dans ce cas un hexagone noté (IJKRST).

Il y a deux façons de construire cet hexagone.

* Soit construire (IJ) parallèle à (ML) puis de J, construire (JK) parallèle à (MN) etc... "en tournant autour d'un cube".

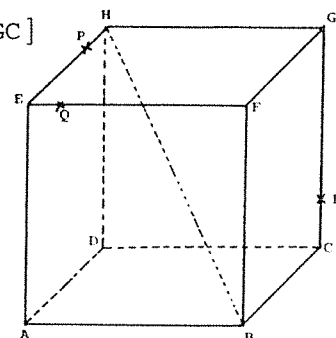
* Soit construire d'abord le triangle XYZ ; X étant l'intersection de (P) et de (EL) donc l'intersection de (IJ) et de (KR) etc...



Autres exercices non traités

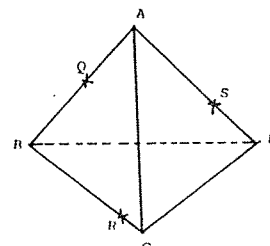
3/ ABCDEFGH est un cube $P \in [HE]$, $Q \in [EF]$, $R \in [GC]$

- a) Construire l'intersection de (PQ) et du plan (HGCD).
- b) Construire l'intersection de (PQR) et du cube.
- c) Construire l'intersection du plan (PQR) et de la diagonale [HB]



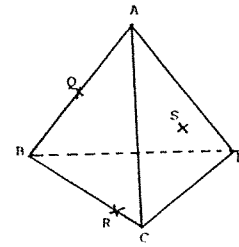
4/ Construire l'intersection des plans (HFC) et (EHDA) .

5/ Construire les contours de l'intersection de (SQR) avec le tétraèdre (ABCD) .

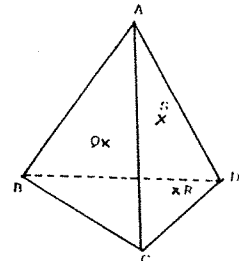


6/ Construire l'intersection du tétraèdre et du plan (P) passant par S et parallèle aux droites (AC) et (BD) .

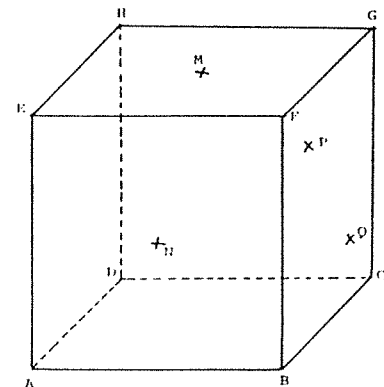
7/ S est dans la face (ACD) du tétraèdre (ABCD). Dessiner les contours de l'intersection du plan (QRS) et du tétraèdre.



8/ Q est dans la face (ABC)
R est dans la face (ACD)
S est dans la face (ABD)
Construire l'intersection du plan (QRS) et du tétraèdre (ABCD)



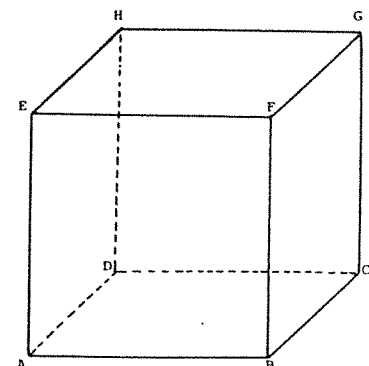
9/ (ABCDEFGH) est un cube
M est le centre de la face (EFGH)
N est le centre de la face (ABFE)
P et Q sont des points de la face (FGCB)
a) Montrer que (MN) est parallèle au plan (FBCG).
b) Tracer l'intersection des plans (MNP) et (FGCB).
c) Tracer l'intersection du plan (MNP) et du cube.
d) Tracer l'intersection du plan (MNQ) et du cube (question plus difficile pour les élèves).



ORTHOGONALITE

1/ (ABCDEFGH) est un cube
Démontrer que (HB) est orthogonale au plan (AFC).

Pour démontrer que (HB) est orthogonale au plan (AFC), on doit démontrer que (HB) est orthogonale à 2 droites sécantes du plan (AFC) (définition), par exemple (AC) et (FC).



a) Pour cela (voir note méthodologique page 12). Montrons que (AC) et (HB) sont orthogonales en montrant que (AC) est orthogonale à un plan, bien choisi contenant (HB): le choix qui s'impose est le plan (HFBD).

Montrons que (AC) est orthogonale au plan $(HFBD)$. Pour cela, on doit démontrer que (AC) est orthogonale à 2 droites sécantes de ce plan, par exemple (DB) et (FB) .

* $(ABCD)$ est un carré donc (AC) orthogonale à (DB) car les diagonales sont perpendiculaires.

* Pour démontrer que (AC) est orthogonale à (FB) , on réutilise la méthode précédente avec (FB) et le plan $(ABCD)$ (on démontre que (FB) est orthogonale à 2 droites sécantes de $(ABCD)$ par exemple (FB) orthogonale à (AD) et à (BC)).

b) On montre de la même façon que (HB) est orthogonale à (FC) d'où le résultat.

2/ Projection de l'angle droit

Cette activité requiert la connaissance de la définition de la projection orthogonale sur un plan P et de la propriété selon laquelle le projeté d'une droite non orthogonale à P est une droite. Dans cet exercice, on écrira projeté pour projeté orthogonal.

Problème :

Le projeté d'un angle droit peut-il être un angle droit ? Dans quelles conditions ?

Phase I :

On matérialise la situation avec une équerre et le plan de la table en plaçant le sommet A de l'angle droit dans le plan P et on laisse les élèves conjecturer le résultat.

a) Si l'un des côtés de l'angle droit est dans P alors le projeté de l'angle droit est un angle droit.

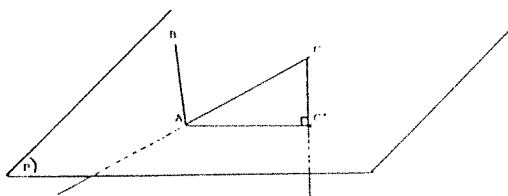
b) Si aucun des côtés de l'angle droit n'est dans P alors le projeté de l'angle droit n'est pas un angle droit.

Comment s'énonce la conjecture si $A \notin P$?

Phase II :

Le modèle mathématique permet-il de rendre compte de ces observations ? Autrement dit les énoncés précédents sont-ils démontrables dans le modèle ?

On peut supposer pour la démonstration que $A \in P$, puisque l'on peut se ramener à ce cas.



a) Supposons que $AB \subset P$, $\widehat{BAC}$ droit. Soit C' le projeté de C sur P .

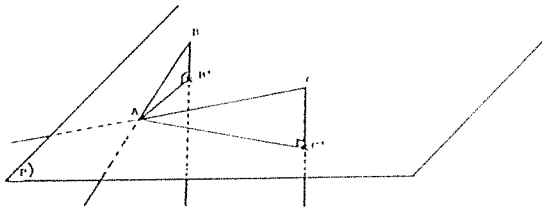
La question est : $\widehat{BAC'}$ est-il droit ?

(AB) est orthogonale à (AC) par hypothèse.
 (AB) est orthogonale à (CC') car (CC') est orthogonale à P et donc (CC') est orthogonale à toute droite de P (voir note méthodologique, p. 12).

Il en résulte que (AB) est orthogonale au plan (ACC') (par définition) et donc que (AB) et (AC') sont orthogonales.

Ceci démontre que le projeté d'un angle droit est un angle droit si l'un des côtés de l'angle droit est dans le plan de projection.

b) Supposons $AB \not\subset P$ et $AC \not\subset P$ et désignons par B' et C' les projetés des points B et C .



Si $\widehat{B'AC'}$ est droit, alors,

1) (AB') est orthogonale au plan (ACC') puisque (AB') est orthogonale à (AC') par hypothèse et (AB') est orthogonale à (CC') vu que (CC') est orthogonale à P et donc à toute droite de ce plan (voir note méthodologique p. 12).

2) (AB) est orthogonale au plan (ACC') puisque (AC) est orthogonale à (AB) par hypothèse et (AC') est orthogonale à (AB) , vu que (AC') est orthogonale à (AB') et à (BB') , mêmes arguments que précédemment.

De 1) et 2) il résulte que $(AB) = (AB')$ (par un point, on peut mener une seule droite orthogonale à un plan donné : situation théorémique qu'il convient d'étudier) et donc que $(AB) \subset P$ ce qui contredit l'hypothèse.

D'où le résultat.

Autres exercices non traités :

3/ $ABCD$ est un carré que l'on projette orthogonalement sur un plan (P) .

a) Que se passe-t-il si le carré est dans un plan perpendiculaire au plan (P) de projection ?

b) On suppose maintenant que le carré n'est pas dans un plan perpendiculaire à (P) .

A', B', C', D' sont les projections orthogonales respectives de A, B, C et D sur (P) .

1) Que dire de A', B', C', D' ? Justifier.

2) A quelle condition $A' B' C' D'$ est-il un losange, un rectangle, un carré ?

4/ $(ABCD)$ est un tétraèdre tel que les arêtes (AB) et (CD) soient orthogonales.

Soient M et N les projetés orthogonaux de A sur le plan (BCD) et de B sur le plan (ACD) .

a) Montrer que (CD) est orthogonale au plan (ABM) et au plan (ABN) .

b) En déduire que les droites (AM) et (BN) sont sécantes.

5/ (D_1) et (D_2) sont 2 droites orthogonales de l'espace.

(P) est un plan variable contenant (D_1) . Par un point A fixé de (D_2) on mène la perpendiculaire (AH) au plan P ($H \in P$) . Soit (Q) le plan contenant (D_2) et (AH) .

Montrer que, le plan (Q) est fixe, lorsque (P) varie.

Annexe 1

PROGRAMMES DE GEOMETRIE DANS L'ESPACE

Premier cycle

	Programmes 77 et 78	Programmes 86
sixième	en vigueur jusqu'en 85-86 Premières observations sur des solides	en vigueur à partir de 86-87 Parallélépipède rectangle : description, représentation en perspective, patrons.
cinquième	en vigueur jusqu'en 86-87 Observation d'objets physiques de l'espace. Plans horizontaux, droites verticales, droites horizontales, plans verticaux. Droites parallèles de l'espace, plans parallèles ; droite et plan perpendiculaires. Observation d'objets tels que cubes, prismes droits, cylindres droits, cylindres de révolution, pyramides, cônes de révolution. Calcul de volumes. Observations d'une sphère ; plan tangent en un point ; aire de la sphère ; volume de la boule. Observation de surfaces coniques et cylindriques ; plan tangent en un point.	en vigueur à partir de 87-88 Prismes droits simples et cylindre de révolution : description, représentation en perspective, patrons. Aperçus élémentaires sur le parallélisme et l'orthogonalité dans l'espace.
quatrième	en vigueur jusqu'en 87-88 Néant	en vigueur à partir de 88-89 Sphère ; section par un plan ; aire et volume.
troisième	en vigueur jusqu'en 88-89 Exercices de géométrie dans l'espace, par exemple : sphère (intersection avec un plan) ; cube (calcul de la diagonale) ; pyramide régulière (calcul d'éléments métriques).	en vigueur à partir de 89-90 Pyramide et cône de révolution, volume, section par un plan parallèle à la base. (effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur longueurs, aires et volumes, masses.

Second cycle

Seconde (texte du BO spécial n° 1 du 5.2.87)

L'objectif de cette partie est d'une grande importance pour la formation de l'ensemble des élèves. Il s'agit d'analyser et de représenter des objets de l'espace physique, de les représenter par des figures planes, de reconnaître et d'exploiter les configurations élémentaires intervenant dans ces problèmes et de calculer des distances, des aires, des volumes, ce qui permet à la fois d'investir la pratique de la géométrie plane dans des situations spatiales et de dégager quelques propriétés fondamentales de l'incidence, de l'orthogonalité et du repérage qui sont spécifiques à l'espace. Dans une telle perspective, la géométrie dans l'espace peut être utilisée durant toute l'année comme terrain pour mobiliser des acquis en algèbre, en analyse et en géométrie plane.

- * Propriétés d'incidence ; parallélisme. Orthogonalité ; plan médiateur.
- * Projections ; projections orthogonales. Coordonnées d'un point dans un repère cartésien.
- * Calcul de distances, d'aires, de volumes.

Toute étude axiomatique est exclue ; on admettra les propriétés nécessaires à la conduite des activités (propriétés d'incidence, orthogonalité d'une droite et d'un plan, propriété de Thalès, validité des théorèmes de géométrie plane dans les plans de l'espace). L'objectif essentiel est que les élèves connaissent les situations de base, sachent les utiliser pour raisonner et calculer et acquièrent une meilleure maîtrise des solides usuels.

Le calcul vectoriel et l'étude des transformations géométriques de l'espace ne sont pas au programme.

Thèmes (à titre indicatif) :

- 1/ représentation d'un solide par des projections orthogonales sur deux plans perpendiculaires bien choisis ;
- 2/ représentation par perspective cavalière ;
- 3/ exemples de figures admettant un centre, un axe, un plan de symétrie (cube, tétraèdre régulier, sphère, cylindre...).

Première et terminale A₁ et B

Géométrie :

Les activités géométriques répondent à deux objectifs principaux :

- entretenir la pratique des objets géométriques usuels du plan et de l'espace ;
- exploiter des situations géométriques comme source de problèmes, notamment en analyse, et, inversement, entretenir une vision géométrique grâce à la mise en oeuvre systématique d'activités graphiques (tracés de courbes, schémas,...) permettant de représenter les objets mathématiques étudiés dans les différentes parties du programme.

Comme en première, il n'y a pas de contenus spécifiques à la classe de terminale en géométrie, mais dans toutes les parties du programmes des exercices ou problèmes peuvent prendre appui sur une situation géométrique et demander la mise en oeuvre de connaissances simples acquises dans les classes antérieures.

Première $F_1 - F_2 - F_3 - F_4 + F_5 - F_6 - F_9 - F_{10}$

Le programme est organisé autour de trois objectifs essentiels :

- la description et l'étude de solides simples de l'espace ;
- en liaison avec l'enseignement de la physique et de la technologie, la pratique de techniques graphiques jointe à une réflexion sur cette pratique. On pourra exploiter les systèmes graphiques (écrans, tables traçantes) existant dans les établissements ;
- la pratique de l'outil vectoriel.

Le temps à consacrer à cette partie du programme est plus important dans les sections F_1 , F_4 et F_9 .

Outil vectoriel

a) Calcul vectoriel dans le plan et dans l'espace.

Vecteurs : somme et produit par un nombre réel. Bases orthonormales, repères orthonormaux.

L'extension à l'espace des propriétés des vecteurs du plan se fera de façon intuitive.

Pour faciliter la lecture de certains graphiques on pourra être amené à prendre des repères orthogonaux.

On précisera les règles élémentaires de la perspective cavalière, c'est-à-dire le report de cotes sur trois axes.

Dans les sections F_1 , F_4 et F_9 on pourra être amené à étudier la projection orthogonale d'un angle droit, mais aucune connaissance n'est exigible des élèves à ce sujet.

b) Produit scalaire dans le plan et dans l'espace.

Expression analytique du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormale.

On admettra l'extension à l'espace du produit scalaire et de ses propriétés.

Dans les sections F_1 , F_4 et F_9 on pourra être amené à définir le produit vectoriel et à donner ses propriétés élémentaires, mais aucune connaissance n'est exigible des élèves à ce sujet.

Solides usuels

Définition des tétraèdres, prisme, parallélépipède, cube, pyramide, cylindre et cône de révolution, sphère, tore.

Formules donnant les volumes et les aires de ces solides (admises).

Il est recommandé de pratiquer la géométrie dans l'espace tout au long de l'année. En liaison avec les cours de technologie, de multiples problèmes de géométrie dans l'espace peuvent conduire à des équations ou des fonctions (optimisation de volumes par exemple) mentionnées au début de ce programme. Les élèves des sections F sont entraînés au dessin de construction.

Travaux pratiques :

exemples de calculs de distances et d'angles dans les configurations usuelles (triangles, polygones réguliers, tétraèdre régulier, cube) ;

exemples de calculs d'aires et de volumes des solides usuels.

Terminale $F_1 - F_2 - F_3 - F_4 - F_5 - F_6 - F_9 - F_{10}$

Les activités géométriques répondent à deux objectifs principaux :

- entretenir la pratique des objets géométriques usuels du plan et de l'espace ;
- exploiter des situations géométriques comme source de problèmes, notamment en analyse, et, inversement, entretenir une vision géométrique grâce à la mise en oeuvre systématique d'activités graphiques (tracés de courbes, schémas...) permettant de représenter les objets mathématiques étudiés dans les différentes parties du programme.

Le programme de géométrie ne comporte que des travaux pratiques mettant en oeuvre les connaissances de géométrie du plan et de l'espace figurant aux programmes des classes antérieures, et notamment de seconde et première ; aucune autre connaissance n'est exigible des élèves. Le temps consacré à cette partie doit être adapté aux finalités de la section considérée.

Travaux pratiques :

exemples d'étude de problèmes portant sur les objets usuels du plan et de l'espace (calculs de distances, d'angles, d'aires, de volumes...).

On étudiera quelques exemples simples d'analyse de la forme d'un objet usuel (par projection cylindrique ou famille de sections planes) et de modes de génération de tels objets (surface de révolution...) ; aucune connaissance sur ces questions n'est exigible et toutes les indications utiles devront être fournies.

Première S et E

Exposé des motifs

En géométrie : les structures d'espace vectoriel abstrait et de groupe de transformations, sans impact réel à ce niveau, ont été retirées du programme. L'objectif essentiel est l'étude des configurations ; le calcul vectoriel et l'idée de linéarité d'une part, les transformations du plan d'autre part, y sont étroitement associés. En outre, le programme présente de front l'étude du plan et de l'espace ; il est souhaitable que cette interpénétration apparaisse au niveau de l'enseignement.

Géométrie

Le programme est organisé autour de quatre objectifs essentiels :

- l'approfondissement de la géométrie plane à travers l'étude des configurations et de l'action des transformations sur celles-ci ;
- la pratique de l'outil vectoriel ;
- la description et l'étude de configurations simples de l'espace ;
- la mise en oeuvre de figures à tous les stades de la recherche et de la rédaction.

En bref, il s'agit de développer une certaine maîtrise du plan et de l'espace physiques. Tout point de vue axiomatique est donc exclu pour l'ensemble de la géométrie.

Outil vectoriel et configurations

L'objectif est de fournir aux élèves trois outils pour l'étude de la géométrie du plan et de l'espace : étude directe des configurations, calcul vectoriel, emploi d'un repère adéquat. Il est essentiel de marquer les liens entre ces trois points de vue. Le calcul vectoriel n'est pas à considérer comme une fin en soi et le passage aux coordonnées doit tenir une place modeste ; il est essentiel de centrer les activités autour de l'étude des configurations.

Programme

* Points, vecteurs :

- extension du calcul vectoriel à l'espace (admise) ;
- bases et repères ;
- vecteurs colinéaires, vecteurs directeurs d'une droite ;
- alignement de trois points, parallélisme de deux droites ;
- vecteurs directeurs d'un plan, vecteurs coplanaires ;
- parallélisme de deux plans, d'une droite et d'un plan.

* Orthogonalité :

- extension à l'espace du produit scalaire et de ses propriétés (admise) ;
- orthogonalité de deux droites, d'une droite et d'un plan, vecteur normal à un plan ;
- plans perpendiculaires ;
- projection orthogonale sur un plan, projection orthogonale d'un angle droit ;
- bases orthonormales, repères orthonormaux (plan et espace), expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormale, de la distance dans un repère orthonormal.

Commentaire

* Points, vecteurs

Aucune construction théorique du calcul vectoriel dans l'espace n'est au programme, toute reconstruction des propriétés d'incidence à partir du calcul vectoriel est exclue.

A travers l'ensemble des activités de géométrie dans l'espace, on complétera les énoncés vus en seconde sur les propriétés d'incidence et de parallélisme et on marquera leur lien avec le calcul vectoriel. Les liens qui, en géométrie plane, associent l'addition des vecteurs à la translation, et la multiplication d'un vecteur par un nombre réel à l'homothétie s'étendent à l'espace. Cependant, l'étude de la translation et de l'homothétie dans l'espace n'est pas au programme.

* Orthogonalité

Les élèves doivent connaître les propriétés élémentaires de la projection orthogonale sur un plan (conservation de l'équipollence, du parallélisme, de l'alignement, du barycentre...) mais les démonstrations ne sont pas exigibles.

Terminale C et E

En géométrie de l'espace, l'objectif, plus modeste mais tout aussi essentiel, est de développer la maîtrise des objets usuels de l'espace physique déjà étudiés en première et de transformations élémentaires opérant sur ceux-ci. Ce développement doit être mené en interaction étroite avec celui de la géométrie plane.

Outil vectoriel et configuration :

Dans l'espace orienté : bases (ou repères) orthonormales directes, indirectes.

Produit vectoriel, notation $\vec{u} \times \vec{v}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$, expression analytique dans une base orthonormale directe.

Aucune théorie de l'orientation ne figure au programme, on s'appuiera sur les conventions physiques usuelles.

Les élèves doivent savoir utiliser le produit vectoriel pour calculer l'aire d'un parallélogramme ou d'un triangle, pour déterminer un vecteur normal à un plan et obtenir ainsi une équation cartésienne du plan défini par un point et deux vecteurs directeurs ou par trois points.

Travaux pratiques : exemples de calculs de distances et d'angles dans les configurations usuelles du plan et de l'espace.

Exemples d'emploi d'un repère orthonormal dans le plan ou dans l'espace.

Les élèves doivent être capables de calculer la distance d'un point à une droite du plan, à un plan ou à une droite de l'espace.

Transformations et configurations :

En géométrie de l'espace, on étudie l'action des transformations élémentaires sur les configurations usuelles mais l'étude systématique de transformations composées est hors programme, ainsi que la notion de transformation vectorielle associée.

Notions sur les transformations élémentaires de l'espace :

Translation. Homothétie, symétrie centrale. Réflexion (symétrie orthogonale par rapport à un plan). Rotation définie par son axe et son angle, demi-tour. Rotation induite dans un plan orthogonal à l'axe ; décomposition d'une rotation en produit de deux réflexions.

Les élèves doivent savoir que les transformations considérées transforment les droites en droites, les plans en plans, les sphères en sphères et conservent le parallélisme ; ils doivent connaître leur effet sur l'équipolence, les barycentres, les distances, les aires planes et les volumes.

Travaux pratiques :

exemples de recherche de symétries ou de rotations laissant invariant un solide usuel donné (tétraèdre, cube, octaèdre...).

Terminale D

Les activités géométriques répondent à deux objectifs principaux :

- entretenir la pratique des objets géométriques usuels du plan et de l'espace ;
- exploiter des situations géométriques comme source de problèmes, notamment en analyse et, inversement, entretenir une vision géométrique grâce à la mise en oeuvre systématique d'activités graphiques (tracés de courbes, schémas,...) permettant de représenter les objets mathématiques étudiés dans les différentes parties du programme.

Le programme de géométrie ne comporte que des travaux pratiques mettant en oeuvre les connaissances de géométrie du plan et de l'espace figurant aux programmes des classes antérieures, et notamment de seconde et de première ; aucune autre connaissance n'est exigible des élèves.

Enfin, en relation avec l'enseignement de la physique, on pourra être amené à donner quelques notions sur d'autres outils géométriques (produit vectoriel, barycentre...), mais aucune connaissance sur ces questions n'est exigible des élèves en mathématiques.

Travaux pratiques :

exemples d'étude de problèmes portant sur les objets usuels du plan et de l'espace (calculs de distances, d'angles, d'aires, de volumes...) et de problèmes issus de situations géométriques (études de fonctions, optimisations,...) ;
exemples de recherche de symétrie ou de rotations laissant invariant un solide usuel (tétraèdre régulier, cube, octaèdre régulier, cylindre de révolution,...).

Certaines situations en biologie et en sciences physiques font appel à quelques propriétés d'invariance par des transformations élémentaires de l'espace (translations, homothéties, réflexions, rotations) ; mais l'étude des propriétés de ces transformations n'est pas au programme.

Annexe 2

L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE DE L'ESPACE

par Gérard AUDIBERT, IREM de MONTPELLIER

Nous citons ici des extraits de l'article publié sous ce titre dans le bulletin APMEP n° 355 de septembre 1986. Cet article reprend les idées développées dans la brochure de l'IREM de MONTPELLIER "une problématique en géométrie de l'espace" (Audibert 85) et dans l'exposé fait aux Journées Nationales de l'APMEP, en octobre 85. On pourra trouver les références aux auteurs faites dans le texte dans le bulletin APMEP 355 ou la brochure IREM de MONTPELLIER.

Nos ajouts ou commentaires sont insérés en italique dans le texte.

LE PLAN ET L'ESPACE

CLAIRAUT (1741), LEGENDRE (1851), ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE (1866 a, b), HADAMARD (1898, 1901) ont toujours séparé très distinctement la géométrie plane et la géométrie de l'espace. Dans l'avertissement de la deuxième édition, HADAMARD J. (1898) écrit "je n'ai nullement été tenté de fondre la géométrie plane et la géométrie dans l'espace. Que cette fusion soit préférable au point de vue de la logique pure, je le veux bien. Mais, il me paraît que, pédagogiquement, nous devons penser tout d'abord à diviser les difficultés. Celle de "voir dans l'espace" en est une sérieuse par elle-même que je ne considère pas comme devant être ajoutée tout d'abord aux autres".

De 1950 à 1970, cette séparation du plan et de l'espace est préservée la plupart du temps. Pourtant, des dérogations à cette séparation apparaissent. DELTHEIL et CAIRE (1950), respectant en cela les programmes, introduisent les vecteurs dans leur première leçon sans faire aucune distinction entre le plan et l'espace ; ils procèdent de façon analogue avec la somme de vecteurs et avec le produit d'un vecteur par un nombre. Mais, par la suite, ils commencent à prendre en compte la séparation du plan et de l'espace ; c'est ainsi qu'après avoir donné une définition générale de la translation, ils séparent la "translation dans l'espace" et "la translation dans le plan" ; lors de l'étude de la composition des translations, ils écrivent : "soient dans le plan ou dans l'espace, deux translations données...". Et la plupart de leurs paragraphes prennent en compte de façon explicite tantôt le plan tantôt l'espace.

Le programme du 20 août 1965 des classes de seconde C dans son paragraphe III intitulé "éléments orientés - vecteurs" suggère de traiter les vecteurs sans que soit toujours bien distingués le plan et l'espace. LEBOSSÉ et HÉMERY (1961) présentent aux élèves de seconde C leur 21ème leçon sur les vecteurs sans distinguer le plan de l'espace. LEBOSSÉ et HÉMERY (1965) et COMMEAU (1963) qui s'appuient sur les programmes de terminale de 1962, abandonnent aussi le distinguo plan-espace pour introduire les transformations ponctuelles.

Mais c'est surtout les programmes de second cycle des années 1970 qui vont privilégier la fusion du plan et de l'espace dans le second cycle. Les BOEN (1970, 1971 c, d, e, 1973) sont explicites à ce sujet : on parle de " $\mathbb{R}^n$ pour quelques valeurs numériques de n (y compris $n = 1, 2$ ou 3)", "isomorphisme d'un espace vectoriel sur un autre" pour la classe de seconde C et T ; "la géométrie désigne dorénavant une construction mathématique, logique par nature, s'appuyant sur un système cohérent d'axiomes où interviennent au premier chef les structures algébriques (espaces vectoriels, groupes...) et topologiques ($\mathbb{R}, \mathbb{R}^n...$)" dit le commentaire pour la classe de première C. Les programmes, les commentaires, les livres de classe tendent tous à effacer la dichotomie plan-espace par le biais des vecteurs et des transformations.

Il faut attendre les années 80 pour que cette orientation soit radicalement modifiée en seconde et en première. Les programmes de seconde présentés par le BOEN (1981) proposent trois chapitres de géométrie plane et un quatrième chapitre de géométrie dans l'espace. Dans les programmes de première S et E, le BOEN (1982) propose un chapitre V de géométrie plane et un chapitre VI de géométrie dans l'espace. Mais, le programme de terminale C et E, présenté par le BOEN (1982), qui croit clarifier la situation plan-espace en créant un chapitre VII d'algèbre linéaire et un chapitre VIII de géométrie, pratique en fait la politique de l'autruche. Il refuse d'aborder les questions telles que : comment interfèrent, d'une part, combinaisons linéaires, sous-espaces, famille libre, famille génératrice... et d'autre part, droites, plans, parallélisme... ? Quels sont les rapports entre géométrie plane, géométrie de l'espace et espaces vectoriels dans notre enseignement ? Le paragraphe VIIa) présente aussi beaucoup d'ambiguïté face à la dichotomie plan-espace. L'analyse de l'enseignement de la géométrie vectorielle nous conduit à la question suivante :

Comment doit se présenter la dichotomie plan-espace dans l'enseignement de la géométrie en deuxième cycle ?

Dans le premier cycle où la séparation entre le plan et l'espace est nette, la progression suivie pour l'enseignement de la géométrie de l'espace ne semble pas très bien déterminée.

Si nous comparons les programmes des années 1970, ceux des années 1977-78 et les projets de la COPREM ou de l'Inspection Générale de 1985, nous notons d'importantes variations.

Comme le montre le BOEN (1968, 1971 a), la géométrie de l'espace est réservée par les programmes de 1970 aux classes de 6ème et 5ème. Puis, dans les années 1977-1978 (cf. BOEN (1977, 1978)) l'essentiel de cette géométrie est enseignée en cinquième. En 1985, les projets de l'Inspection Générale répartissent cet enseignement tout au long du premier cycle(*). Ces changements successifs nous obligent à poser la question :

(*) Les nouveaux programmes de 1er cycle évoqués sous le terme de projets 85 dans le texte, sont en vigueur à partir de 86-87 en sixième, 87-88 en cinquième, 88-89 en quatrième, 89-90 en troisième (voir annexe p.23).

Quelle progression doit suivre la géométrie de l'espace dans le premier cycle ?

Les programmes de 1970 et 1977-1978, parlent "d'objets géométriques et physiques", "d'observation", "de première étude concrète de l'espace". Cela amène les professeurs à dire que cette géométrie est peu de chose ; ils en viennent à n'accorder que peu de temps depuis 1977 à cette géométrie de cinquième, en laissant de côté tout l'aspect matériel qui s'y rattache. Cela provient du fait que l'enseignement des mathématiques n'a pas une position nette en ce qui concerne l'aspect expérimental de la géométrie dans l'espace. La question que nous nous posons est :

Dans le premier cycle, quelle place doit-on accorder en géométrie de l'espace à l'expérimentation faisant appel à des maquettes, à des des-sins ?

Il s'agit là d'une question particulièrement importante. Nous avons obtenu des éléments de réponse à cette question à l'occasion de nos recherches sur la géométrie plane (cf. [1], [2] et [3]).

La place donnée à l'expérimentation a des conséquences d'une part sur les démarches de pensée qu'on veut développer chez l'élève et d'autre part, sur la gestion du temps scolaire.

Avec les projets de 1985, apparaît pour la première fois dans le premier cycle, et cela dès la classe de sixième, la "représentation en perspective" (cavalière). Ces projets semblent avoir résolu la question suivante :

Quel rôle joue la représentation plane et en particulier la perspective cavalière en géométrie de l'espace ?

C'est sur le dessin et la représentation que se centre notre réflexion. Nous développons les questions qui s'y rattachent dans les paragraphes 3 et 4.

Une étude même succincte des actuels livres de cinquième nous montre que la notion de volume est l'axe principal de la géométrie dans l'espace dans le premier cycle. Les projets de 1985 semblent conserver cette priorité ; c'est ainsi que le volume de différents solides est proposé pour chacune des quatre classes, d'où les questions suivantes :

Quelle place doit occuper la notion de volume dans la géométrie de l'espace de notre premier cycle ?

Comment interfèrent la représentation de l'espace et la notion de volume ?

UNE PRISE DE CONSCIENCE

On peut être scandalisé par cette expérience des "Maths-modernes" de la décennie 70-80 qui a maltraité plusieurs millions d'élèves. Mais, comme elle a suscité une réflexion plus intense sur l'enseignement des mathématiques et qu'elle a accéléré la recherche en didactique, on peut toutefois y trouver un aspect positif. En particulier, une prise de conscience des difficultés propres à la géométrie de l'espace est maintenant explicite.

Lors de sa réunion du 2 mars 1984 consacrée à la géométrie, la COPREM reconnaît que la géométrie de l'espace est négligée à tous les stades.

Le groupe de recherches coordonnées (GRECO) portant sur la didactique et l'acquisition des connaissances scientifiques créé par le CNRS en 1984 consacre un de ses quatre thèmes à l'espace comme objet d'étude en mathématiques, en physique et comme support des représentations symboliques.

BERGER (1977 a, b, c, 1978 a, b, 1982) redonne quelques lettres de noblesse à la géométrie dans l'enseignement supérieur.

Plus près de nos classes, sur le terrain de la formation continue, divers documents de réflexion et d'action portant sur la géométrie voient le jour. Que ce soit en géométrie plane ou en géométrie de l'espace, divers fascicules dont ceux édités par les IREM de Bordeaux (1982), Lorraine (1983 a, b, c) ou encore ceux écrits par AMALBERTI et Coll. (1982), par BESSOT, CHABOURLET, EBERHARD, VERJUS, BICAIX (1983), par BOUDAREL et GOETGHELUCK (1983), par CONEJERO, GABRIEL, GROS, VACHE (1984), édités respectivement par les IREM de Marseille, de Grenoble, de Paris-Nord et de Montpellier sont des exemples parmi d'autres. Ils donnent des racines irremplaçables à une recherche fondamentale sur la géométrie de l'espace.

De nombreux colloques centrés sur la géométrie, attribuant à la géométrie de l'espace une place importante, prouvent l'urgence des problèmes. C'est le cas des colloques Inter-IREM de Clermont-Ferrand en juin 1980, d'Orléans en novembre 1980, de Caen en juin 1981, de Bordeaux en juin 1983, de St-Amand en décembre 1983 et de Marseille en juin 1984. C'est aussi le cas de rencontres internationales comme celles de Pallenza en 1981, de Mons en 1982 et de Louvain-la-Neuve en 1983. Les comptes rendus de ces rencontres sont présentés par : l'IREM de Clermont-Ferrand (1981), l'IREM de Lille (1981), l'IREM de Caen (1981), l'IREM de Lille (1982), l'IREM de Marseille (1984), la CIEAEM (1981), la sous-commission belge de la CIEM (1982), le groupe d'enseignement de Louvain-la-Neuve (1984).

Différentes optiques sont envisagées pour résorber les difficultés. MARION et OVAERT (1980) nous proposent une analyse globale de l'enseignement de la géométrie au lycée ; ils mettent l'accent sur une géométrie permettant la maîtrise des transformations, du linéaire, du fonctionnement du concept de groupe. GOUTHERON (1984) voit essentiellement dans la géométrie, l'apprentissage du raisonnement et le développement de l'esprit de recherche. Le groupe d'enseignement des mathématiques de Louvain-la-Neuve (1982) trouve dans la géométrie, un terrain idéal permettant de proposer à la classe une suite de situations problématiques ouvertes conduisant par paliers à la théorie mathématique. PEROL souhaite donner aux maquettes un rôle essentiel, conçoit du matériel à découper le polystyrène, publie les cahiers du filicoupeur ; PEROL (1978, 1981 a, b, 1982 a, b, 1983, 1984 a, b), PEROL et DESSEUX (1983), l'IREM de Clermont (1983 a, b, 1984) réalisent des activités de géométrie de l'espace fondées sur l'usage de la maquette. Pour BKOUCHE et SOUFFLET (1983), l'objectif premier de l'enseignement de la géométrie est la géométrie c'est-à-dire l'étude des situations spatiales. GABORIAU (1984), OLIVIER et TEROUANNE (1984), LEHMANN (1985) redonnent vigueur à des activités géométriques dans l'université.

La diversité et la richesse de ces points de vue, parfois contradictoires, n'empêchent pas que se dégage une question essentielle liée à la géométrie de l'espace, que nous trouvons posée dans le bulletin Inter-IREM n° 23 consacré à l'enseignement de la géométrie. En effet, BESSOT (1983) s'interroge dans ce bulletin sur le statut et le rôle des figures en géométrie et plus particulièrement en géométrie de l'espace. La même réflexion apparaît lors de la réunion du 2 mars 1984 de la COPREM : le statut du dessin, son rôle si l'on préfère, est à définir. VERGNAUD, BROUSSEAU, HULIN (1983) en présentant leur projet de GRECO écrivent : "...la conceptualisation de l'espace est en elle-même un objet d'étude intéressant pour la didactique. Les problèmes de la représentation des objets de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ forment à eux seuls un champ d'étude très important. Le statut du dessin est loin d'être connu et mérite d'être étudié en relation avec la conceptualisation des espaces euclidiens à 2 et 3 dimensions. C'est un problème central de l'enseignement de la géométrie et de la mécanique".

Nous voilà donc revenus aux deux principales questions :

Quel est le rôle du dessin en géométrie ?

Quel est le rôle de la représentation plane en géométrie de l'espace ?

Le paragraphe suivant, intitulé les règles de dessin, va examiner plus en détails ces deux questions.

LE DESSIN

D'une manière générale, les figures d'un livre utilisé pour l'enseignement des mathématiques, accompagnent le texte sans aucun commentaire technique. Comment prôner la rigueur en mathématique alors que la géométrie à trois dimensions s'appuie essentiellement sur ce qu'on appelle couramment "la vision de l'espace", notion on ne peut plus floue, éthérée, pour ne pas dire métaphysique ?

Puisque, de plus, les figures sont nombreuses dans un livre de géométrie, (on peut estimer qu'en moyenne on y rencontre une figure par page), nous devons nous poser une première question :

La non explication des règles régissant le tracé des figures a-t-elle une influence sur l'apprentissage de la géométrie de l'espace ?

Ce qui semble caractériser les règles de dessin c'est qu'elles sont diverses, non explicites et assez souvent contradictoires. Nos plus grands penseurs y voient là une loi propre à la géométrie qui n'a pas été sans influence sur notre enseignement. POINCARÉ (1912) déclare "on dit souvent que la géométrie est l'art de bien raisonner sur des figures mal faites. Ce n'est pas là une boutade, c'est une vérité qui mérite qu'on y réfléchisse. (Dans une figure mal faite), le dessinateur altère les proportions plus ou moins grossièrement, ses lignes droites ont des zigzags inquiétants, ses cercles présentent des bosses disgracieuses ; tout cela ne fait rien, cela ne troublera nullement le géomètre, cela ne l'empêchera pas de bien raisonner".

C'est une solution extrême. Celle qui résout toutes les questions qu'on peut se poser au sujet du dessin. Elle réduit le statut du dessin à celui d'un schéma aux règles variables, non explicites et connues au mieux de son seul auteur. HILBERT (1899) a adopté une démarche plus subtile dans les fondements de la géométrie. Tout en faisant un traité axiomatique, donc de logique pure, il n'abandonne cependant pas les figures. Il parseme simplement son texte de figures anonymes. Il n'y fait, à quelques exceptions près, jamais allusion. Le dessin devient alors un fantôme apparent pour les uns, invisible pour les autres. On arrive vite ainsi à la solution radicale qui consiste à supprimer le dessin. Rappelons que durant la décennie 70-80, le dessin était très rarement utilisé en géométrie vectorielle dans nos lycées.

Tout cela nous conduit à poser une question : devons-nous associer à une structure mathématique donnée des règles de dessin ? Si oui, lesquelles ?

Quelles sont notamment les règles de dessin associées usuellement aux quatre structures suivantes : la structure vectorielle ou affine réelle à deux dimensions, la structure vectorielle ou affine réelle à trois dimensions, la structure euclidienne à deux dimensions et la structure euclidienne à trois dimensions ?

En ce qui concerne l'enseignement de la géométrie, une question préalable se pose :

Faut-il distinguer structure et dessin ? Selon quelle progression pédagogique ?

Cette question risque d'être essentielle pour la didactique car c'est peut être en y répondant que nous mettrons le mieux en évidence les processus d'acquisition de certains concepts géométriques.

Puisque nous travaillons dans le champ conceptuel de la géométrie euclidienne à trois dimensions, ce sont avant tout les figures de l'espace qui vont nous préoccuper. Mais déjà avec cette première expression "figure de l'espace", nous sommes en pleine ambiguïté. En effet, qu'entend-on par là ?

HADAMARD (1898) définit une figure comme "un ensemble quelconque de points, de lignes, de surfaces et de volumes". Ce mot a la même acceptation pour des auteurs comme ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE (1866 a), LEBOSSÉ et HÉMERY (1965), CUNDY et ROLLET (1951). Dans ces ouvrages, elle est définie au moyen de cette phrase laconique, puis les figures se succèdent à la queue leu leu sans autres explications vraiment sérieuses.

LA REPRESENTATION

La construction de maquettes, les représentations planes les plus précises demandent un apprentissage lourd et sont peu économiques en temps. A l'inverse, des schémas sommaires où la perte d'information est importante, suffisent-ils à la pratique de la géométrie de l'espace ?

On est amené à se poser les questions suivantes :

Quelles représentations planes faut-il privilégier ?

Dans l'apprentissage de la géométrie de l'espace, comment doit se développer l'interaction entre l'objet de l'espace, maquette ou image mentale d'une part et le dessin représentant cet objet d'autre part ?

Nous disposons avec le dessin technique de certaines représentations de l'espace normalisées. Les vues présentées par l'AFNOR (1978) constituent la principale représentation des objets dans le domaine du dessin technique. *Une vue est une projection sur un plan suivant une direction de droite.* Les représentations dites "en perspectives" décrites par l'AFNOR (1953) mettent en oeuvre deux sortes de projection : les projections axonométriques et les projections cavalières. "Ces perspectives gagnent du terrain en dessin de travaux publics mais leur utilisation dans ce domaine devrait être beaucoup plus généralisée qu'elle ne l'est encore actuellement" selon KIENERT et PEILETIER (1980).

Plusieurs raisons nous ont entraîné à donner à la projection cavalière, appelée encore perspective cavalière et que nous notons de façon abrégée : PC, une place privilégiée dans notre étude de la géométrie de l'espace. Tout d'abord, la quasi totalité des dessins représentant des objets de l'espace utilisent en mathématique la perspective cavalière. *La perspective cavalière conserve l'alignement, le parallélisme, les rapports de distance entre points alignés, donc rend compte d'informations affines et métriques importantes (voir annexe p. 43).* La PC prend une place de plus en plus importante dans les innovations en didactique comme le prouvent les travaux de l'IREM de Lorraine (1983, a, b), de BOUDAREL et GOETGHELUCK (1983), COIMEZ (1984) et les dix problématiques de CARTRON et Coll. (1984), réflexions sur ce que pourrait être un renouvellement de l'enseignement des mathématiques au collège. Des recherches fondamentales comme celles de CARONPARGUE (1979) et nos propres pré-expérimentations en partie relatées dans les articles de FABRE (1982, 1984), PELOUZET (1984), BONAFAE (1985) nous obligent à poser la question suivante :

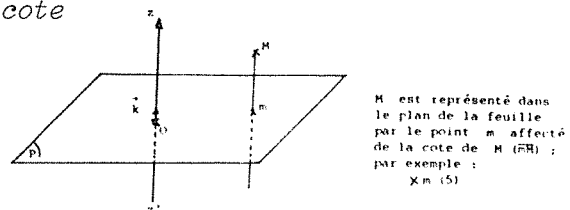
La PC n'est-elle pas la représentation de l'espace la plus adaptée aux démarches de pensée des élèves du secondaire travaillant dans le champ conceptuel de la géométrie euclidienne de l'espace ?

Nous devons toutefois être assez prudent avec la PC dans le premier cycle. Ainsi l'ellipse qui y joue un rôle important est d'un usage difficile pour nos jeunes élèves, et le cylindre de révolution prévu par les programmes de cinquième proposés par l'Inspection Générale en 1985, la sphère, sa section par un plan, le cône de révolution, sa section par des plans parallèles à la base, prévues par la COPREM pour les classes de quatrième et troisième, posent des problèmes de représentation que les recherches expérimentales n'ont, semble-t-il, pas encore abordé.

Un quatrième type de représentation est la représentation au moyen d'une épure en géométrie descriptive à deux plans de projection (dite géométrie de MONGE). Pour son étude théorique, on peut utiliser l'ouvrage élémentaire de MAILLARD et MILLET (1958) ou un ouvrage un peu plus complet comme celui de ROUBAUDI (1916). L'éclairage épistémologique qu'en donne DEFORGE (1981) est particulièrement intéressant pour comprendre l'évolution de cette représentation.

Un cinquième type de représentation est la perspective vraie, encore appelée perspective centrale, ou conique que nous notons de façon abrégée PV. Une étude théorique de cette perspective ainsi que de la PC est faite par ROSSIER (1946). C'est à Florence, au début du XVe siècle, (Quattrocento), que les peintres et les architectes ont mis au point sa première théorisation, déclare THUILLIER (1984) ; on peut se faire une idée de la valeur artistique de la PV en consultant VREDEMAN DE VRIES (1604-1906). Le support mathématique de la PV est constitué par la géométrie projective qui est présentée de façon très satisfaisante dans DELTHEIL et CAIRE (1951), ARTIN (1957), FRENKEL (1973), BERGER (1977 a, 1978 b), EFIMOV (1981). Sa richesse théorique et sa complexité technique n'empêchent pas d'utiliser la PV de façon élémentaire comme l'a montrée PAEZ SANCHEZ (1980) en introduisant le cadre en plexiglas. Notons que la PV est au centre des études réalisées par l'IREM de Caen dans ses "cahiers de la perspective" ; on consultera à ce sujet l'IREM de Basse-Normandie (1981, 1982). *La perspective centrale conserve l'alignement, le birapport, mais pas le parallélisme, ni la concourance, ni le rapport des distances entre points alignés, d'où une perte d'information importante sur le plan visuel (voir annexe p. 45).*

Un sixième type de représentation est la projection cotée associée à la géométrie cotée débouchant sur la topographie des surfaces ; elle est présentée par ROUBAUDI (1916) ou par des ouvrages de notre enseignement secondaire datant au moins d'une trentaine d'années comme DESBATS (1948). *Un point de l'espace est repéré par rapport à un seul plan à l'aide de sa projection sur le plan et de sa cote*



D'autres représentations sont encore utilisées : la perspective curviligne présentée par BARRE et FLOCON (1968) ; ROSSIER (1946) en propose encore d'autres ; la géographie nécessite l'élaboration des représentations planes des sphères qui sont étudiées entre autres par BERGER (1977 c) etc... Mais nous attribuons a priori dans le domaine de la didactique des mathématiques une moindre importance à ces représentations.

Nous avons distingué six représentations principales : les vues, les projections axonométriques, la perspective cavalière, l'épure, la perspective vraie, la projection cotée.

A leur propos, nous posons la question suivante :

Ces représentations sont-elles adaptées aux démarches de pensée des élèves du secondaire travaillant dans le champ conceptuel de la géométrie euclidienne de l'espace ?

LES ELEVES

Les programmes, les livres, l'histoire de l'enseignement, les traditions enseignantes nous ont permis d'approcher un certain nombre de questions. Mais ce sont avant tout les élèves qui orientent notre problématique. Par l'observation de ces derniers, nous pouvons séparer les questions principales des questions secondaires. Plus encore, nous pouvons répondre à un certain nombre de questions.

C'est ainsi que nos expérimentations en géométrie nous ont imposé une conclusion indubitable : en géométrie, nos élèves ont une activité pratique très importante réservée principalement au dessin.

Nous avons aussi pu prendre conscience du rôle privilégié de la perspective cavalière.

C'est ainsi qu'en 1984, nous avons proposé à des élèves le problème suivant :

Une salle de classe a pour dimension 7 m de long, 5 m de large et 3 m de haut. Un fil est tendu verticalement du plafond au sol. Une balle de revolver traverse la salle. Elle part d'un des coins du plafond et aboutit à la base d'un mur en son milieu. La balle se déplace en ligne droite à partir de ce coin et coupe le fil à 1,5 m au dessus du sol. A quelle distance de chaque mur le fil était-il placé ?

Ce problème que nous intitulons problème FIL ne nécessite pas l'usage de la P.C. , il évite même toute allusion à l'idée de dessin.

Examinons sommairement nos résultats.

Les élèves ayant fait appel à une perspective se répartissent selon le tableau ci-dessous.

Nombre d'élèves	Elèves ayant réalisé :
43	Une perspective cavalière
1	Une perspective centrale
1	Une perspective axonométrique
5	Une tentative de perspective cavalière
6	Une tentative de perspective centrale
3	Une vague ébauche de perspective
2	Une perspective cavalière et une tentative de perspective centrale
3	Une tentative de perspective cavalière et une tentative de perspective centrale

Nous constatons que l'usage de la P.C. est assez constant tout au long de la scolarité.

Nous aboutissons ainsi à l'hypothèse suivante :

Pour résoudre un problème de géométrie euclidienne de l'espace à trois dimensions, l'élève a besoin d'une représentation de l'espace constituée par un dessin dans lequel les trois directions principales, longueur, largeur, hauteur sont distinctes ; il a besoin d'une perspective. La perspective cavalière est la représentation la plus satisfaisante pour lui.

Les points que nous avons soulevés sont loin d'épuiser les questions posées à l'enseignement de la géométrie de l'espace. Nous avons surtout voulu dégager deux affirmations qui nous paraissent essentielles :

Le dessin joue en géométrie le principal rôle dans la démarche de pensée de nos élèves.

La perspective cavalière est un outil prioritaire en géométrie de l'espace pour les démarches de pensée de nos élèves.

Nous soumettons ces deux affirmations à la critique des lecteurs du Bulletin.

Annexe 3

LE DESSIN COMME OBJECTIF AVOUE

Ce texte est extrait du fascicule du maître : géométrie dans l'espace en classe de seconde IREM de Lorraine (p. 5 et 6).

Les textes officiels signalent que, à titre de thème d'étude, on peut parler de la représentation de l'espace en perspective cavalière ou en perspective fuyante. Je vous propose de faire du dessin l'objectif essentiel, et, en tout cas, le seul objectif avoué aux élèves. C'est toute l'originalité du fascicule d'exercices. Je ne prétends pas avoir découvert un procédé infaillible pour enseigner "la géométrie dans l'espace sans peine". Je pense cependant que l'on peut ainsi rendre l'étude de l'espace plus attrayante, et l'adapter à des publics ayant peu de goût pour les mathématiques.

Les auteurs du programme ont décrit, en préambule : "à la base de tout bon apprentissage il y a le contact avec une pratique sensorielle et concrète,..." et aussi : "la classe de mathématiques est, dans son rôle essentiel, un lieu de découverte, d'exploration de situations plus ou moins aisément maîtrisables...". C'est probablement pourquoi, dans beaucoup de manuels, vous trouverez, précédant l'habituel cours théorique, une page de beaux dessins décrivant une situation (considérée comme) "concrète". Les uns vous proposent de creuser des puits de pétrole, d'autres vous racontent la "bande de Moebius", d'autres vous montrent les solides de Platon. Bien souvent ces introductions n'ont strictement rien à voir avec la suite. Elles vont du ridicule au grotesque. Je pense que l'objectif que je vous propose est, d'abord, un moyen de respecter les consignes données par les textes officiels.

Dessiner l'espace est, pour vos élèves, une activité tout à fait nouvelle. Il est d'ailleurs facile de s'en rendre compte en leur proposant de représenter des objets simples : cube, cylindre,... C'est bien sûr une activité qui en étonnera plus d'un : en 60 exercices, on ne trouve qu'une seule question qui commence par "démontrer que"(*). Cela serait-il suffisant pour les persuader que les mathématiques peuvent être autre chose que ce qu'ils ont pris l'habitude de détester ? Notons aussi que pour les meilleurs élèves qui continueront l'étude de l'espace en 1ère S ou E, l'apprentissage du dessin est indispensable : il faudra qu'ils sachent noter les données d'un problème sur un croquis un peu réaliste.

(*) Pour bien comprendre ce que cette phrase a d'inhumain, il faudrait pouvoir se mettre dans la peau du "cancro" qui, en quatre ou cinq ans d'études, n'est pas parvenu une seule fois à "démontrer que..."

Le dessin de l'espace n'est jamais qu'une représentation conventionnelle de la réalité. Il ne donne jamais que des informations partielles sur les figures à trois dimensions. C'est pourquoi, très vite, avant de commencer les tracés, il va falloir raisonner pour savoir ce que l'on doit tracer. Il y a là **l'une des meilleures occasions** que l'on peut trouver en seconde, **de faire pratiquer** (i.e. découvrir et écrire) **la démonstration mathématique**. En effet :

* D'une part il s'agit d'un sujet neuf ; les démonstrations ne mettront donc en oeuvre qu'un tout petit nombre de propriétés (axiomes ou théorèmes). Ceci rend leur découverte plus facile, et évite que certains soient gênés par l'accumulation des retards.

* D'autre part la démonstration n'apparaîtra pas comme une exigence du professeur, mais comme une nécessité. **On aura besoin de se convaincre** que tel point est à tel endroit, ou que telle droite est parallèle à telle autre. Il est fort probable que, présentée ainsi, l'exigence de rigueur sera mieux acceptée que dans des exercices où la conclusion est évidente; (Il en existe encore beaucoup trop dans certains manuels).

Enfin je vous signale que les exercices de tracé (quelle que soit la classe et quel que soit le sujet) peuvent être traités à plusieurs niveaux. On peut bien sûr faire le dessin en expliquant, et en justifiant chaque trait. Mais on peut aussi se contenter de faire la figure en donnant la liste des tracés successifs, sans savoir les justifier correctement. On peut encore s'attacher à l'aspect décoratif du résultat, et ne faire aucun commentaire.

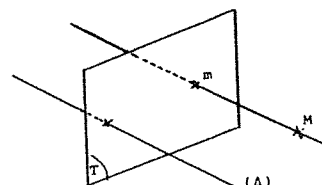
Bien sûr ces différents niveaux d'approfondissement n'auront pas la même valeur à vos yeux. Mais dans une classe non homogène, ils permettent à chacun de trouver une certaine satisfaction.

Annexe 4

LA PERSPECTIVE CAVALIERE

Représenter une configuration de l'espace en perspective cylindrique (ou parallèle), c'est dessiner son image par une projection sur un plan (T) parallèlement à une droite (Δ) sécante au plan (T).

Une telle projection (dite cylindrique) associe à un point M de l'espace, le point m d'intersection du plan (T) et de la parallèle à (Δ) passant par M.

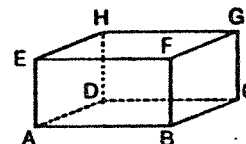


Dans l'espace physique, le tableau (T) est supposé être un plan vertical et (Δ) non perpendiculaire à (T) : on parle alors de **perspective cavalière**.

Cette technique de représentation se proposant de donner approximativement l'illusion visuelle des figures, celles-ci sont supposées opaques, placées entre le plan de projection et l'oeil d'un observateur. Les traits du dessin sont par convention normalisés de la façon suivante :

- les traits continus représentent les lignes vues ;
- les traits pointillés représentent les lignes cachées.

C'est le pointillé qui donne la "profondeur", qui permet de distinguer ce qui est visible de ce qui ne l'est pas.



Exemple : dessin d'un parallélépipède rectangle ABCDEFGH. Le tableau est vertical ; la base du parallélépipède est le rectangle horizontal ABCD ; les faces ABFE et CGHD sont supposées parallèles au tableau ; les arêtes (AD), (BC), (FG), (EH) sont perpendiculaires au tableau.

Les règles de dessin résultent des propriétés de la projection cylindrique :

Propriétés :

1. Une projection cylindrique est une application définie sur tout l'espace. Tout point m du plan (T) est l'image de tout point de la parallèle à (Δ) passant par m. Les parallèles à (Δ) sont appelées les **projetantes**. Les points invariants sont ceux de (T).

2. L'image d'une droite n'ayant pas la direction de projection est une droite. Deux droites parallèles n'ayant pas la direction de projection ont pour images deux droites parallèles.

3. La perspective cylindrique (f) de toute configuration (F) contenue dans un plan parallèle à (T) est déduite de (F) par translation. En effet, la restriction à un tel plan d'une projection de plan (T), coïncide avec la restriction à ce plan d'une translation. On dit que (f) représente (F) "en vraie grandeur". En pratique, le dessin n'est pas fait "en vraie grandeur", mais à une échelle.

4. Pour tout couple de bipoints parallèles (A, B), (C, D) et leurs images (a, b), (c, d) : $\frac{\overline{cd}}{\overline{ab}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$.
C'est le théorème de Thalès dans l'espace.

Ajoutons quelques particularisations métriques, utilisées dans le dessin technique en perspective cavalière.

Les perspectives cavalières des droites perpendiculaires au tableau (vertical) sont des parallèles appelées **fuyantes**. La direction des fuyantes peut être quelconque. L'angle des fuyantes avec l'horizontale est appelé **angle des fuyantes** et désigné par α . On appelle **rapport de réduction** le nombre k , constant, tel que pour tout segment [MN] perpendiculaire au tableau et son image mn : $mn = k MN$.

En dessin technique, on utilise souvent $\alpha = 45^\circ$ (ou 30° , ou 60°) et $k = \frac{1}{2}$.

La perspective cavalière conserve l'alignement, le parallélisme, les rapports de distances entre points alignés.

Annexe 5

LA PERSPECTIVE CENTRALE

(ou CONIQUE, ou FUYANTE, ou D'OBSERVATION, ou VRAIE)

Représenter une configuration de l'espace en perspective centrale, c'est dessiner son image par une projection conique, de centre donné O , sur un plan (T) ne contenant pas O .

Une telle projection associe à un point M de l'espace le point m d'intersection de la droite (OM) et du plan (T) (fig. 1)

O est appelé aussi le point de vue.

Cette situation est concrétisée par un observateur regardant un paysage d'un oeil à travers la vitre (O est l'oeil, (T) la vitre).

On peut aussi l'illustrer par la manipulation suivante (fig. 2), décrite dans Mathématiques 2e - Istra (p. 345):

Sur une planche, on fixe un cadre sur lequel on tend des élastiques. A l'avant de la planche est dressée une planchette percée d'un trou : l'oeilleton. On place à l'arrière de la planche un objet à étudier, ici deux droites parallèles. En plaçant l'oeil près de l'oeilleton, on tend les élastiques sur le cadre de façon à recouvrir les lignes de l'objet. On vérifiera facilement qu'à deux droites parallèles correspondent en général deux élastiques qui se croisent (voir la justification en III-2).

Cette manipulation schématise la vision. Le cadre peut être assimilé au plan de la rétine, l'oeilleton à la pupille. Le cadre peut encore être assimilé au film photo et l'oeilleton à l'objectif d'un appareil photo.

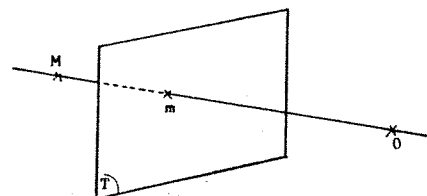


fig. 1

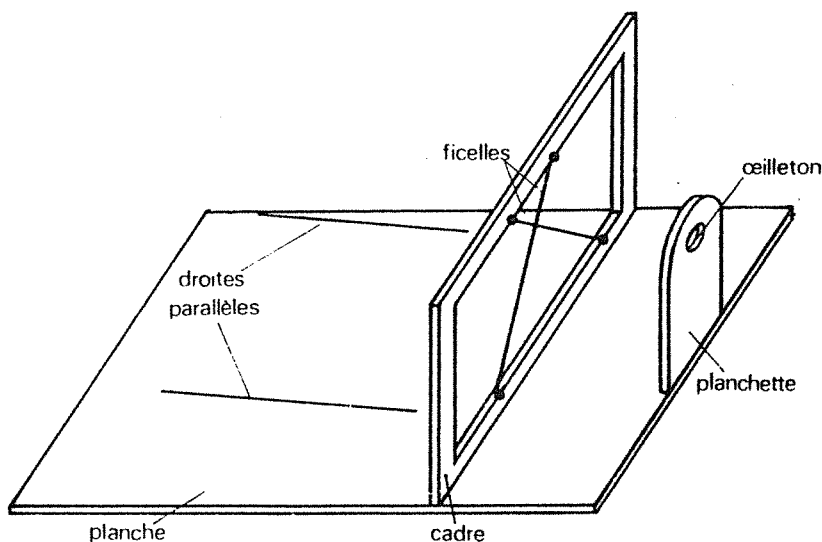


fig. 2

Les règles de dessin en perspective centrale sont assez compliquées. Ce sont les propriétés des projections centrales. Etudions-en quelques-unes :

I - PREMIERES REMARQUES

1/ Une projection conique centrale n'est pas une application définie sur tout l'espace ; l'image n'est pas définie pour les points du plan (N) passant par O, parallèle à (T) .

(N) est appelé **le plan neutre** (fig. 3). L'ensemble de définition est donc l'espace privé du plan neutre.

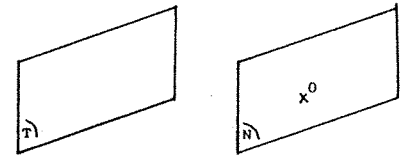


fig. 3

2/ Tout point m du plan (T) est l'image de tout point, distinct de O, de la droite (Om) . Si $M \in (Om)$, $M \neq O$, cette droite (Om) (ou (OM)) est appelé la projetante de M sur (T) (en m). Les droites (Om), $m \in (T)$ sont appelées les **projetantes**.

3/ Les points invariants sont les points de (T) .

II - IMAGE D'UNE DROITE

Soit (D) une droite non contenue dans (N) .

1/ (D) passe par O

L'image de (D) ($\neq \{O\}$) est le point d'intersection m de (D) et (T) (fig. 4) .

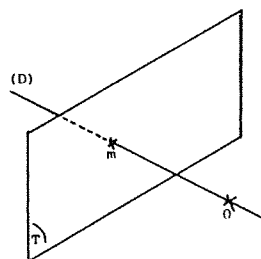


fig. 4

2/ (D) est parallèle à (T)

L'image de (D) est la droite (d) d'intersection du plan (T) et du plan contenant (D) et O . C'est une droite parallèle à (D). (fig. 5)

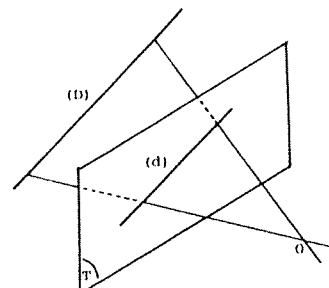


fig. 5

3/ (D) ne passe pas par O et coupe (T) en m .

Soit n le point d'intersection de (N) et (D) .

La droite (d) d'intersection du plan (T) et du plan contenant (D) et O est la droite (mf) où f est le point d'intersection de (T) et de la projetante (D_o) parallèle à (D) . (fig. 6). (d) est parallèle à On) .

L'image de (D) - {n} est (d) - {f} .

f est le point de fuite de (D) (plus un point de (D) "fuit vers l'infini", plus son image tend vers f) .

On remarque que (f) dépend seulement de la direction de (D). Il est le point de fuite commun à toutes les parallèles à (D) (ne passant pas par O) .

Exercice : A quelle condition sur 3 droites (D₁), (D₂), (D₃), leurs points de fuite sont-ils alignés ?

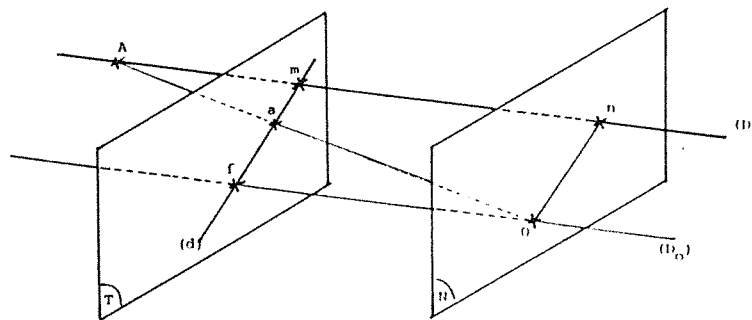


fig. 6

III - IMAGES DE DEUX DROITES PARALLELES

1/ (D) et (D') sont parallèles à (T) (fig. 7)

Leurs images sont deux droites parallèles (d) et (d') et parallèles à (D) et (D') (on applique II.2).

2/ (D) et (D') sont parallèles à (T) (et ne passent pas par O) (fig. 8).

Leurs images sont deux droites concourantes en f, (d) et (d'), privées de f, où f est le point d'intersection de (T) avec la projetante parallèle à (D) et (D'). (on applique II.3) .

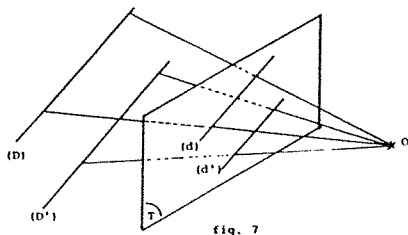


fig. 7

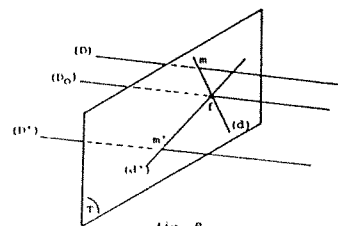


fig. 8

IV - IMAGES DE DEUX DROITES CONCOURANTES

(D) et (D') sont des droites non contenues dans (N), ne passant pas par O.

1/ (D) et (D') se coupent en I, hors de (N)

Les images de (D) et (D') sont des droites (d) et (d') (éventuellement privées d'un point) se coupant en i, image de I (fig. 9 et 10).

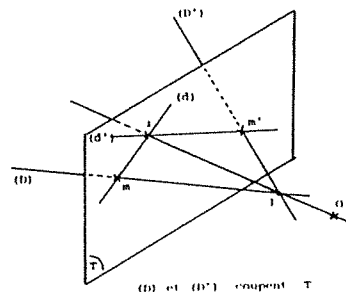


fig. 9

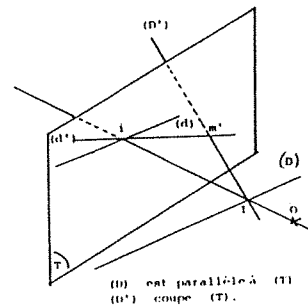


fig. 10

2/ (D) et (D') se coupent en I, point de (N)

Leurs images sont deux droites parallèles (d) et (d') (et parallèles à (OI)), privées des points de fuite de (D) et (D') (fig. 11).

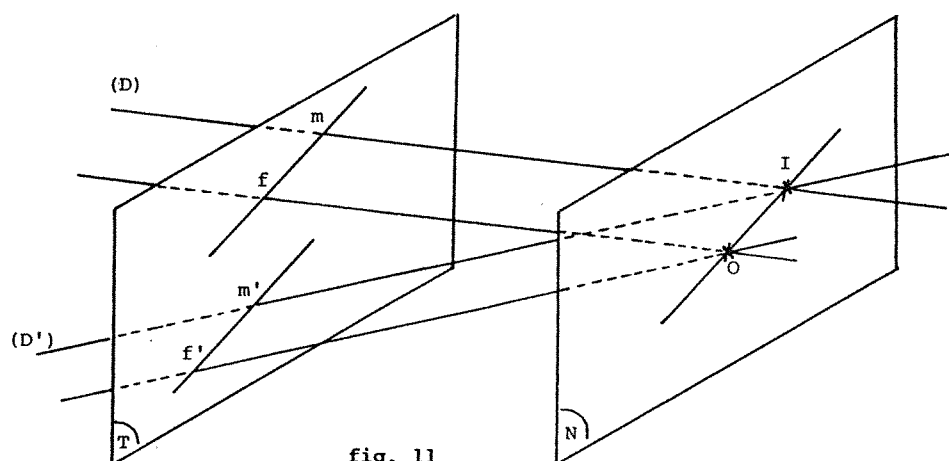


fig. 11

V - PROJECTION CENTRALE ET DISTANCE

Problème : comment sont transformés les rapports de distances entre des points par la projection centrale ?

1/ Points situés dans un plan frontal (plan parallèle à (T)).

Il y a conservation du rapport des distances ; en effet la restriction d'une projection centrale à un plan frontal coïncide avec la restriction à ce plan frontal d'une homothétie de centre O (d'après la propriété de Thalès) (fig. 12).

En particulier des segments "égaux" ont pour images des segments "égaux".

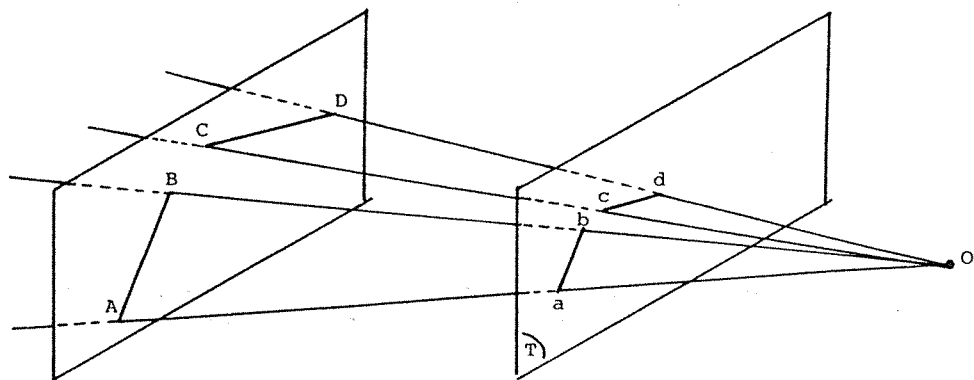


fig. 12

2/ Images de points alignés sur une droite non parallèle à (T)

L'égalité des distances n'est pas conservée ; de manière générale, les rapports de distances ne sont pas conservés.

Le birapport de 4 points est conservé.

Soient 4 points A, B, C, D sur une droite (D) , a, b, c, d leurs images par la perspective de centre O , de plan (T) (fig. 13). Plaçons-nous dans le plan contenant (D) et O (et donc (d)) et démontrons ces résultats.

* Si $AB = BC$ (fig. 14), on a $a\beta = \beta\gamma$ (β, γ étant les points de concours de la parallèle à (D) passant par a et de (OB) et (OC) respectivement), d'où $ab \neq bc$ car OB et OC ne sont pas parallèles.

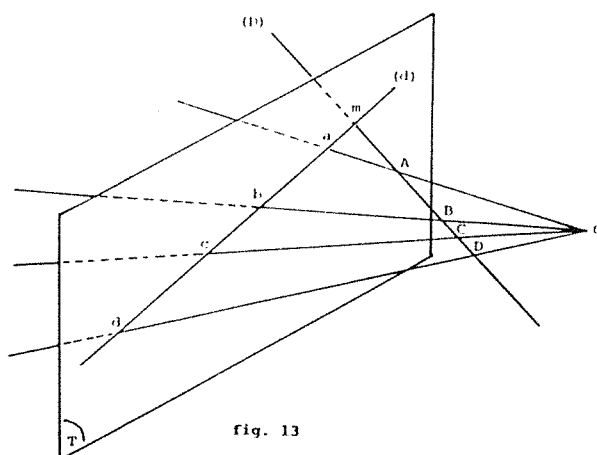


fig. 13

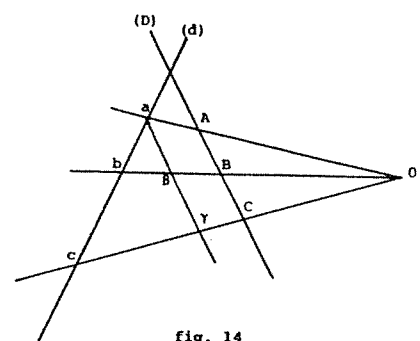


fig. 14

* **Cas général** : (fig. 15) le birapport de 4 points (A, B, C, D) est le réel :

$$(A, B, C, D) = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

On mène par B la parallèle à (OA) qui coupe (OC) en P, et (OD) en Q et par b, la parallèle à (OA) qui coupe (OC) en p et (OD) en q.

$$\text{On a } (A, B, C, D) = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{PB}} : \frac{\overline{OA}}{\overline{QB}} = \frac{\overline{QB}}{\overline{PB}}$$

$$\text{et } (a, b, c, d) = \frac{\overline{ca}}{\overline{cb}} : \frac{\overline{da}}{\overline{db}} = \frac{\overline{Oa}}{\overline{pb}} : \frac{\overline{Oa}}{\overline{qb}} = \frac{\overline{qb}}{\overline{pb}}$$

$$\text{or } \frac{\overline{QB}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{qb}}{\overline{pb}} \quad \text{d'où} \quad (A, B, C, D) = (a, b, c, d)$$

Une perspective centrale conserve l'alignement, le birapport mais ne conserve pas toujours la concourance, le parallélisme, le rapport de distances entre points alignés.

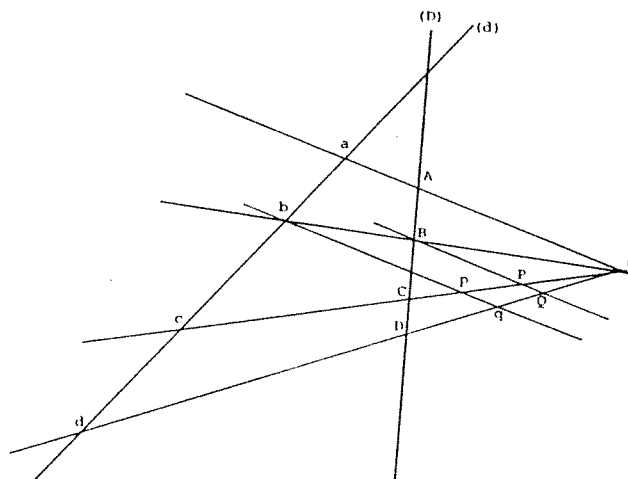
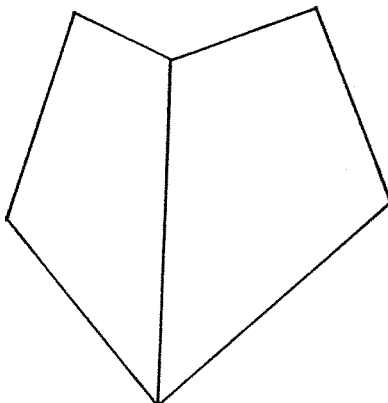
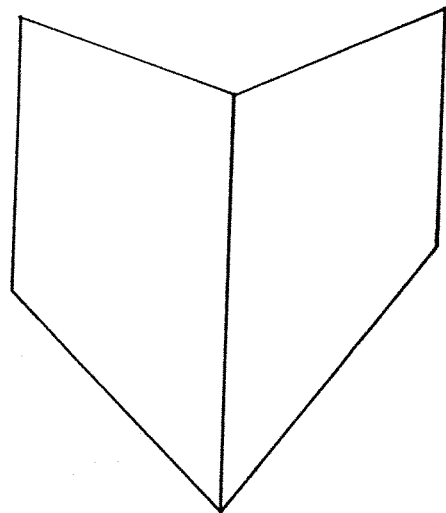
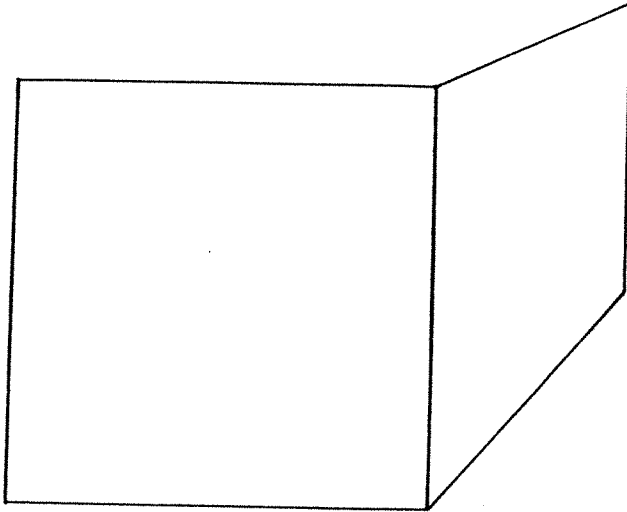


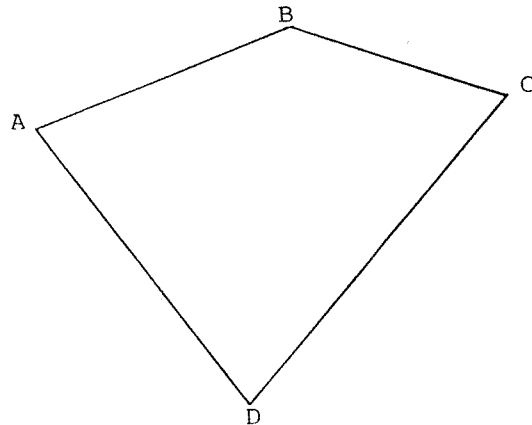
fig. 15

Exercices :

1/ Les dessins suivants représentent deux faces d'un cube vu en perspective centrale. Compléter chacun des dessins.



2/ ABCD est un carré dessiné en perspective centrale. Placer les milieux de ses côtés. Si maintenant ABCD est un échiquier, dessiner les carreaux (64).

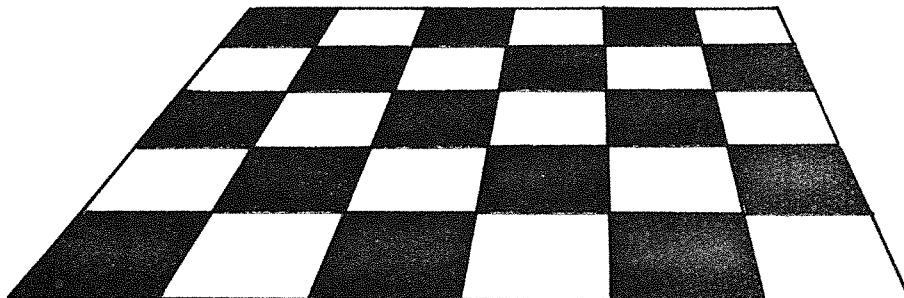


3/ Le dessin ci-dessous représente un damier rectangulaire formé de 30 carrés "égaux", en perspective centrale.

Quels sont les côtés parallèles au plan de projection (la feuille) ?

Où sont les points de fuites des autres côtés des carrés et de leurs diagonales ? Pourquoi sont-ils alignés ?

(voir aussi 4).



4/ (d'après Dimathème Mathématiques 2e - édition Didier 81)

On se propose de dessiner en perspective de centre O sur un plan vertical (T) un quadrillage situé dans un plan horizontal (plan de terre) (voir la représentation en perspective cavalière en figure 1). L'intersection de (T) et du plan de terre est la ligne de terre.

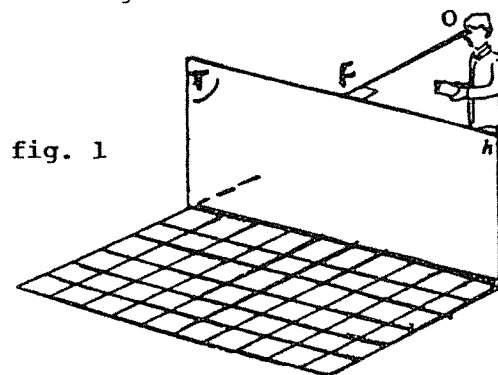


fig. 1

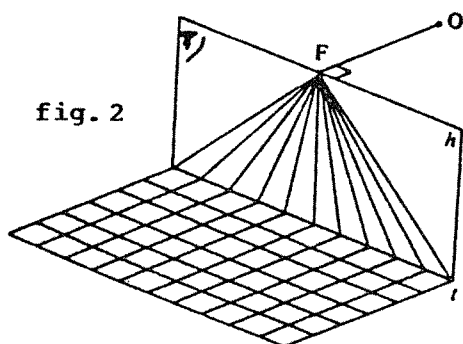


fig. 2

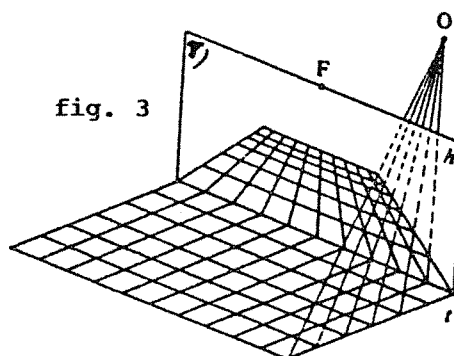


fig. 3

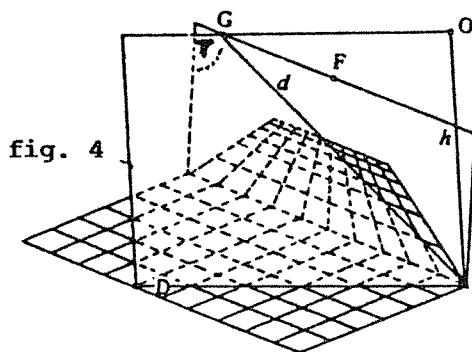


fig. 4

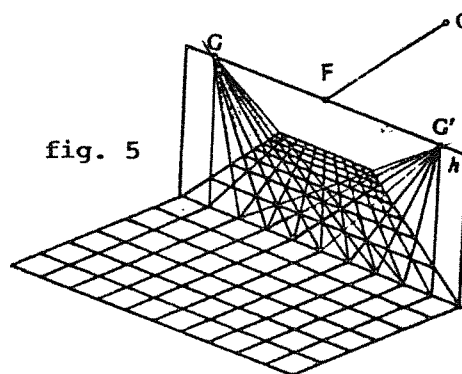


fig. 5

Expliquer les dessins successifs des figures 2, 3, 4, 5

F s'appelle le point de fuite principal (point de fuite des droites perpendiculaires au tableau, dont les images par la perspective centrale sont appelées fuyantes) ; G et G' sont les points de distance.

Etablir que $FG = FG' = FO$

