UNIVERSITE de POITIERS

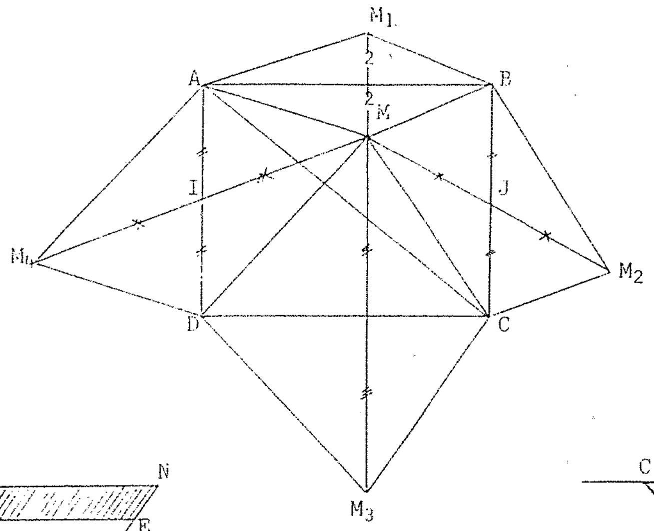
Institut de Recherche
sur l'Enseignement des Mathématiques

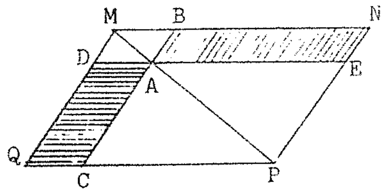
Décembre 1987

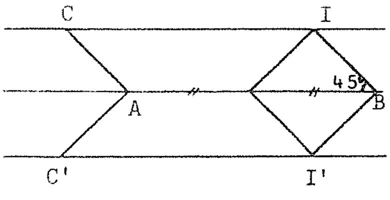
GEOMETRIE PLANE

en cinquième

AIRES - INITIATION A LA PREUVE







compte rendu de l'expérimentation des programmes 1986

sixième-cinquième

D. GAUD
J.P. GUICHARD
M. MAROT
C. ROBIN
M. ROBIN

S O M M A I R E

INTRODUCTION

CONDITIONS D'EXPERIMENTATION

- Les classes

Trois cinquièmes sont concernées dont deux ont les horaires en parallèle. Tous les élèves de ces classes ont participé au suivi scientifique en 85-86, leur programme de 6ème a donc été celui entré en vigueur en septembre 1986.

- Le collège

Il compte 500 élèves, recrutés dans un milieu rural, et qui sont pour la plupart issus de milieux d'ouvriers et d'employés.

- L'équipe

Elle comprend 3 professeurs du collège de Vouneuil/Vienne et le directeur d'études du centre PEGC.

- Les contenus

Le programme a été décomposé en dominantes ; celles-ci ne sont pas disjointes, les contenus interfèrent.

*Les dominantes**

- géométrie dans l'espace
- fractions
- initiation à la preuve
- symétrie centrale
- calculs numérique et littéral
- nombres relatifs
- proportionnalité.

A partir de ces dominantes, nous avons organisé un planning de l'année. Voici, à titre d'exemple, celui du premier trimestre :

- géométrie dans l'espace I : dessiner l'espace
- fractions et pourcentages
- l'outil symétrie centrale
- "opérations" sur les fractions
- géométrie dans l'espace II : étude d'un objet.

- Les élèves

Ils possèdent un répertoire qui leur sert de cahier de cours - le répertoire est le **même** que celui utilisé en 6ème.

* Par dominantes nous entendons un thème fédérateur qui nécessite un apprentissage spécifique.

PRESENTATION DES CONTENUS AUX ELEVES

Ceux-ci sont présentés suivant le schéma ci-après :

- Une activité

Pour définir une activité nous avons retenu les critères suivants :

. l'énoncé est court et compris de tous les élèves (chaque élève peut envisager ce que peut être une réponse),

. la réponse n'est pas évidente, pour répondre l'élève devra :

- soit découvrir la connaissance visée
- soit découvrir ce qu'il faudrait savoir pour résoudre le problème
- soit mobiliser les notions antérieures

. le problème est riche (plusieurs réponses possibles ou (et) plusieurs résolutions possibles). L'élève peut formuler des questions intermédiaires (ce qui exclut un recours à un découpage a priori du problème par le maître).

* *Synthèse (collective)*.

- Formulation des résultats par les élèves.
- Validation de certains de ces résultats par les élèves.
- Enoncés d'objectifs par les élèves en accord avec le professeur.

* *Exercices didactiques* avec éventuellement des tests d'évaluation formative ou des auto-tests.

* *Test*

A l'issue de ce test des groupes de niveau peuvent être instaurés. Un test identique est alors passé avec les élèves du groupe faible et seule cette dernière note est retenue.

L E S   A I R E S

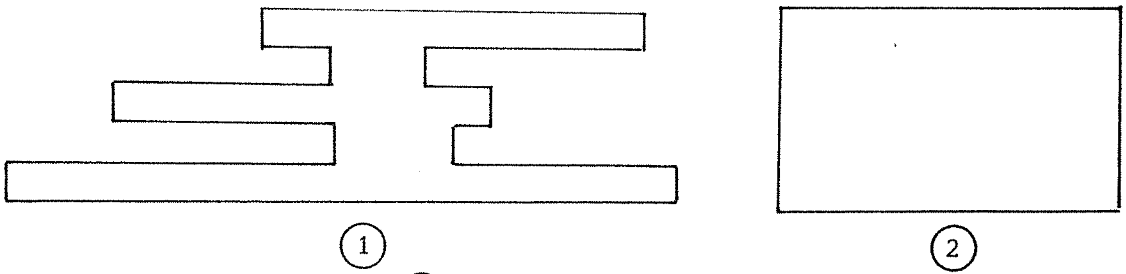
LES AIRES

ANALYSE A PRIORI DES DIFFICULTES RENCONTREES

- Aire et surface

La perception visuelle fait que bien souvent l'élève se réfère plus à la place occupée (éventuellement en "rebouchant les vides") qu'à l'aire réelle.

Exemple :

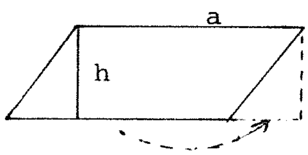


(1) apparaît plus grand que (2) à bien des élèves (cf. Petit x n° 6).

- Elaboration des formules

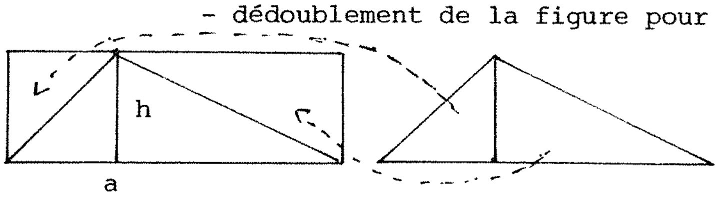
Classiquement les justifications des formules ou les preuves sont faites par découpage et recollement ou par dédoublement de la figure et recollement.

Exemple : - découpage et recollement pour le parallélogramme :



d'où $S = a \times h$

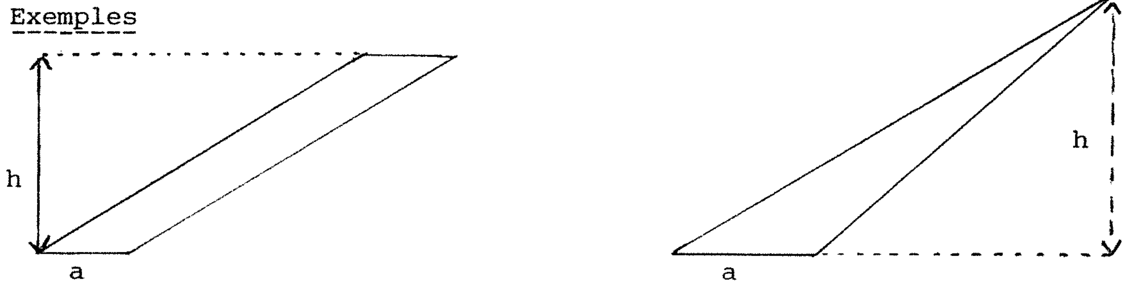
- dédoublement de la figure pour le triangle



d'où $S = \frac{1}{2} \times a \times h$

La formule est alors validée pour **tous** les parallélogrammes (ou triangles.)
Or de telles manipulations sont-elles toujours licites ?

Exemples



Il y a, là, matière à faire réfléchir les élèves sur la preuve.

- Application des formules

L'application des formules suppose qu'il y a une identification entre les lettres et les valeurs qu'elles représentent. Il faut cependant prendre garde qu'appeler systématiquement L longueur, l largeur, h hauteur et b base, peut conduire les élèves à des "automathismes" nuisibles.

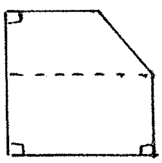
Ainsi à la question posée à des élèves : que représente y quand on dit "ajoute 3 et 2y ?" certains répondent que y peut être le nombre de yaourts ou de yachtes mais certainement pas le nombre de quelque chose qui ne commence pas par y (cf. Petit x n° 5).

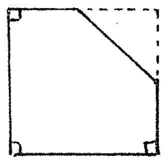
Peut-être faudrait-il s'habituer à dire :
si x désigne la longueur et si y désigne la largeur alors l'aire est $a = x \times y$ et ensuite varier les notations.

- Reconnaissances des surfaces dont on connait l'aire

Le calcul de l'aire d'une figure complexe nécessite :
- l'observation de celle-ci
- l'analyse de celle-ci
- soit l'identification des figures élémentaires qui composent la figure initiale pour lesquelles une formule d'aire est connue,
- soit de compléter la figure pour faire apparaître des figures élémentaires.

Exemples :





Ce dernier point peut être entravé par la position de la figure initiale par rapport aux bords des feuilles.

- Les unités

Les élèves fonctionnent trop souvent par analogies abusives (peut-être en sommes-nous les premiers responsables !).

Exemple 1 : un carré de côté 4 a pour aire 4×4, donc :
un carré de côté 6 a pour aire 6×6
(l'analogie est correcte).

Exemple 2 : $1cm^2$ est l'aire d'un carré de côté 1
$2cm^2$ est l'aire d'un carré de côté 2
(l'analogie est incorrecte).

Exemple 3 : De même dans l'exemple suivant :
3kg d'oranges valent 24 F, un kilo vaut 3 fois moins,
0,75kg d'oranges valent 6 F, un kilo vaut 0,75 fois moins,
(en réalité on en a plus !!).

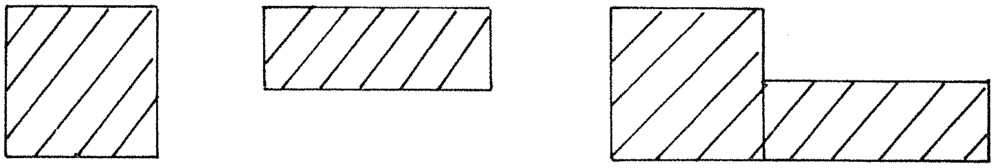
Nous pensons qu'un élève maîtrise les unités d'aires s'il sait :
- évaluer la longueur d'un côté d'un carré dont l'aire est 2 (ou 10 ou....)
- qu'en multipliant par n le côté, l'aire est multipliée par n^2.

Pour les conversions, les élèves travaillent sur des grands nombres, ce qui est cause de nombreuses erreurs dues principalement à l'appréhension qu'ils ont de ces grands nombres et au fait que les ordres de grandeur ne sont pas maîtrisés (quelle différence un élève fait-il entre 10^4 et 10^6 ?).

• Aire et périmètre

Ces deux grandeurs ne fonctionnent pas de la même façon :

- le calcul du périmètre est matérialisable par une ficelle qui suit le pourtour de la figure. Par contre si on accole deux figures les périmètres ne s'ajoutent pas.



- Le calcul d'aire est plus difficilement matérialisable ; par contre si on accole deux figures les aires s'ajoutent.

Nous pensons qu'un élève distingue bien ces deux notions quand, partant d'une figure, il est capable, en lui enlevant un morceau, de trouver une figure d'aire plus petite et de périmètre plus grand.

Remarque : il en est de même pour aire et volume.

TEXTES OFFICIELS

Programmes

Travaux géométriques

Dans le plan, transformation de figures par symétrie centrale en exploitant des situations-problèmes nécessitant des manipulations, des dessins et des mesures :
Construction de l'image : d'un point, d'une figure simple.
Mise en évidence de la conservation des distances, de l'alignement, des angles et des aires.
Exemples d'utilisation de ces propriétés.
Caractérisations angulaires du parallélisme.
Construction et caractérisations du parallélogramme.
Exemples d'autres figures simples ayant centre(s) et axe(s) de symétrie.

Triangle : somme des angles, aire, construction du cercle circonscrit.

Organisation et gestion de données

A base géométrique :
Echelles.
Calcul : de l'aire d'un parallélogramme, d'un triangle, du volume d'un prisme droit, de l'aire d'un disque, de l'aire et du volume d'un cylindre de révolution.

Commentaires

Les élèves seront familiarisés avec l'écriture littérale des formules d'aire et volume du programme.

Aire du parallélogramme $S = b\,h$

Aire du triangle $S = \frac{b\,h}{2}$

Aire du disque $S = \pi \times R^2$

Capacités exigibles

- Evaluer à partir de l'aire d'un rectangle, l'aire d'un parallélogramme, l'aire d'un triangle.
- Utiliser les formules d'aire et volume du programme.

NOS OBJECTIFS

La phrase "utiliser les formules d'aires du programme" (capacités exigibles) est imprécise. Elle recouvre nombre d'objectifs qui sont pour nous les suivants :

- Connaître les formules d'aire pour le carré, le rectangle, le parallélogramme, le triangle, le disque.
- Savoir reconnaître dans une figure des surfaces élémentaires pour en calculer l'aire.
- Savoir décomposer une surface en surfaces connues et choisir les éléments pertinents à mesurer, pour calculer l'aire de la surface initiale.
- Savoir compléter une surface pour obtenir une surface connue.
- Connaître les unités d'aire et savoir convertir.
- Savoir donner un encadrement de l'aire d'une surface donnée.
- Savoir distinguer aire et périmètre (en particulier savoir que ces deux grandeurs sont indépendantes).

A ces objectifs, il convient d'ajouter :

- Savoir utiliser un formulaire
- Savoir distinguer aires et périmètres.

L'ETUDE

Les aires ne constituent pas une dominante en cinquième, car aucun apprentissage spécifique nouveau ne devrait être nécessaire. On rencontre celles-ci de nombreuses fois dans les programmes (6ème et 5ème : constructions, fractions, écritures littérales, initiation à la preuve, gestion de données).

Cependant nous nous sommes aperçus que pour beaucoup d'élèves le concept d'aire n'était pas encore acquis. Un apprentissage est nécessaire.

Plan de l'étude :

- Concept d'aire.
- Calculs d'aires et constructions.
- Test.

Il faut noter que cette étude s'est déroulée entre les parties II et III de l'initiation aux écritures littérales (voir [8]).

L E S   A I R E S

1ère partie

LES AIRES (1ère partie)

ACTIVITE - durée 1h 30mn.

Objectifs : - différencier aire et périmètre
- faire acquérir le concept d'aire
- utiliser les formules d'aire des figures élémentaires.

Méthode : comparaison d'aires.

Matériel : par groupe de 4 élèves.

. 10 figures (7 en bois, 3 en carton) p. 12.
. matériel mis à la disposition des groupes :
- papier quadrillé 5 × 5, 10 × 10
- réseau triangulaire
- papier blanc
- papier millimétré
- papier calque
- ficelle
- calculatrices
- règles, équerres, rapporteurs.

Consigne :

On veut peindre une face de chaque objet (on ne s'intéresse pas à l'épaisseur), classe les objets de la plus petite aire à la plus grande selon la quantité de peinture nécessaire.

DEROULEMENT ET COMMENTAIRES

Les groupes s'activent rapidement, numérotent les objets et s'organisent :

- dans de nombreux groupes : chaque élève utilise une procédure différente puis les résultats sont confrontés au sein du groupe

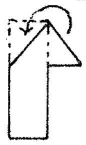
- dans d'autres groupes, les élèves se répartissent les objets, utilisent la même méthode puis classent les objets

- dans un groupe, les élèves étudient en même temps le même objet avec la même méthode ce qui demande beaucoup de temps.

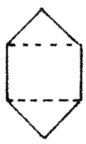
Quelques procédures utilisées :

* Calcul des aires : à partir des aires de figures élémentaires.

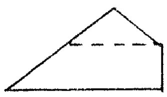
. Directement : triangle, rectangle, carré.
. Après découpage en figures élémentaires.



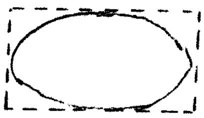
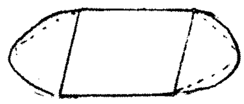
déplacement du triangle pour obtenir un rectangle



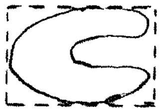
un rectangle + 2 triangles



un trapèze + 1 triangle

un rectangle - 4 triangles ou 2 triangles + 1 parallélogramme

à partir d'un rectangle ou découpage intérieur

* "Inclusion" des pièces lorsque cela est possible.

* Décalquage des figures sur différents quadrillages puis comptage des carrés ou des triangles.

  . Les élèves choisissent un quadrillage et mettent toutes les figures sur ce quadrillage.
  Les élèves ont acquis que la comparaison n'est possible qu'avec la même unité.
  L'aire unité (carré ou triangle) est souvent confondue avec le centimètre carré.

  . Un élève est passé du quadrillage 10 × 10 au 5 × 5 puis au papier millimétré par souci de précision.

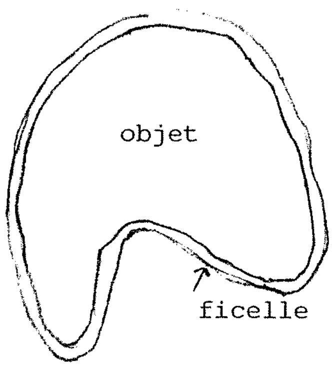
* Utilisation de la ficelle (par quelques élèves seulement).

  Ces élèves :

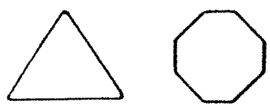
  . pensent que pour comparer les aires il suffit de comparer les périmètres

  . pensent que aire et périmètre varient dans le même sens (dépendance des notions)

  . confondent aire et périmètre (concepts).



La ficelle entoure l'objet. Puis avec cette ficelle un carré est fait (la longueur de la ficelle est le périmètre de l'objet).
L'aire du carré est ensuite donnée égale à l'aire de l'objet. Cette procédure est rejetée car l'objet "loge" dans le carré.



Le triangle et l'hexagone ont le même périmètre, pourtant le triangle pourrait loger dans l'hexagone.

Quelques élèves astucieux utilisent la ficelle pour trouver le rayon du disque et ceux de la couronne : mesure du périmètre puis division par 3,14 et par 2.

SYNTHESE

Les objets posés sur le rétroprojecteur sont classés par un groupe. Certains ont des aires très voisines, le classement est remis en question par les autres groupes.

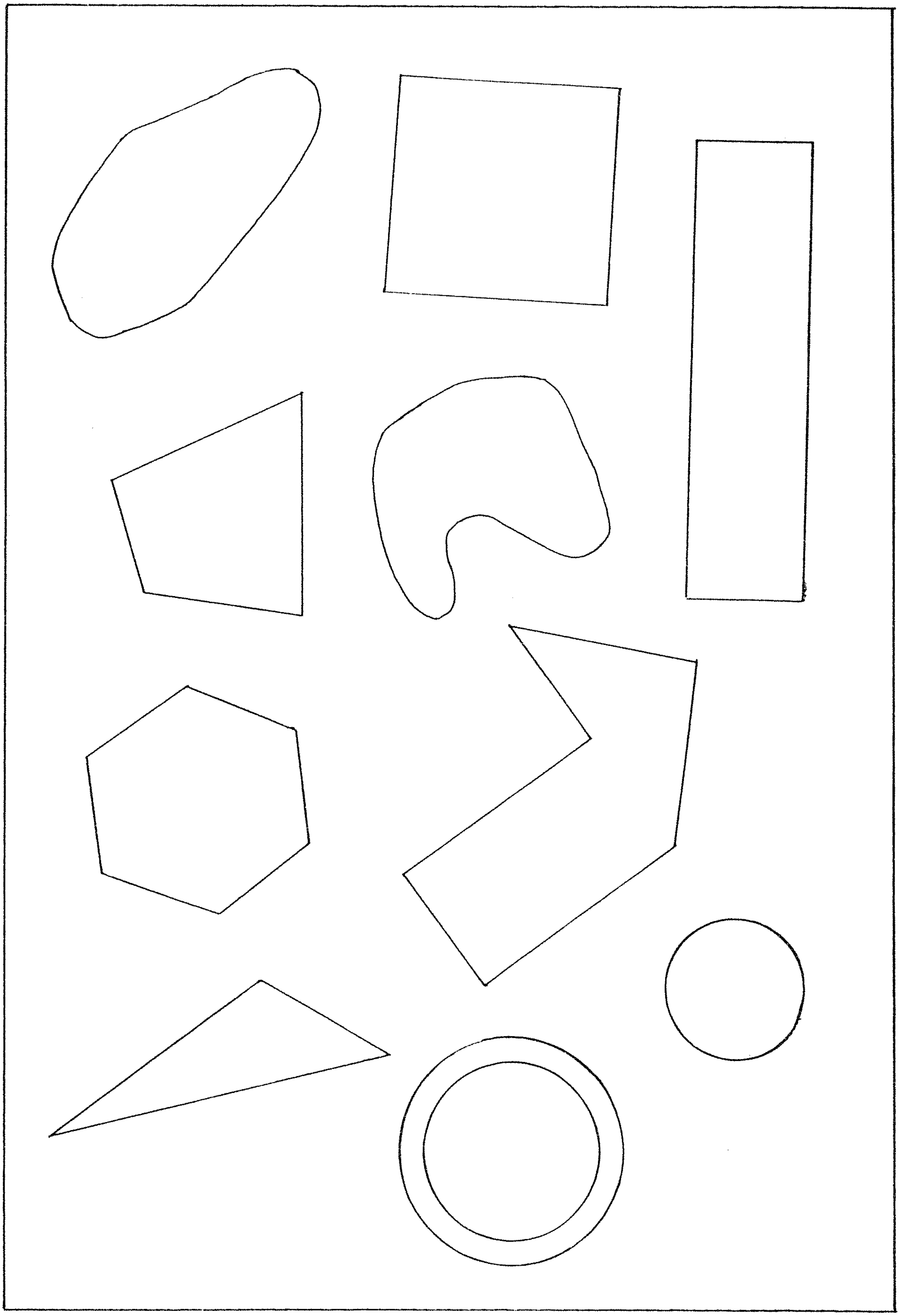
La discussion permet de faire

- remarquer que les calculs ne peuvent être exacts : on a seulement une valeur approchée ou un encadrement de chaque aire
- préciser que l'unité est importante. C'est l'occasion de rappeler les unités d'aire usuelles.

On en conclut que toute figure plane a une aire que l'on peut calculer ou évaluer lorsque l'on fixe une unité.

Ce travail est prolongé par la recherche de figures différentes ayant une aire égale à $1cm^2$. De nombreuses figures sont trouvées, ce qui permet de faire remarquer que $1cm^2$ n'est pas seulement l'aire d'un carré de 1cm de côté.

LES OBJETS



(Les dessins ont été réduits pour les besoins de la mise en page).

L E S   A I R E S

2ème partie

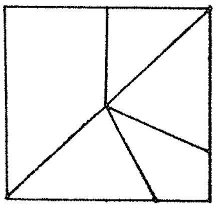
FEUILLE N°1

ACTIVITE

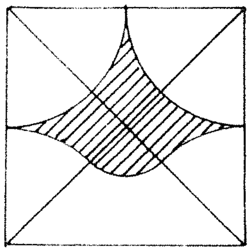
Comment, à partir de l'aire du rectangle, trouver l'aire du triangle ?
l'aire du parallélogramme ?

EX 1 - Trace un rectangle ABCD tel que AB = 7cm et AC = 9cm.
Place I et J les milieux de [BC] et [AD].
Choisis un point M à l'intérieur du rectangle.
Place M_1 le symétrique de M par rapport à la droite (AB)
Place M_2 le symétrique de M par rapport à I
Place M_3 le symétrique de M par rapport à la droite (DC)
Place M_4 le symétrique de M par rapport à J

Quel est le rapport des aires du polygone $M_1 BM_2 CM_3 DM_4 A$ et du rectangle ABCD ?



EX 2 - Le carré a 71cm de côté.
Calcule l'aire de chaque partie du puzzle.
Le dessin est à l'échelle.



Ex 3 - Donne le programme de construction de la figure.
Calcule l'aire de la partie hachurée.

Ex 4 - Dessine un triangle d'aire $24cm^2$ dont la base mesure 8cm.

Ex 5 - Un trapèze a une hauteur de 3cm. Sa grande base mesure 10cm.
Peux-tu le tracer pour que son aire soit $24cm^2$?

Ex 6 - Dessine un parallélogramme de hauteur 3cm. Son périmètre est 25,8cm, son aire est $27{,}6cm^2$.

Ex 7 - Trace un cercle de centre O et de rayon R
Trace un polygone dont tous les côtés sont tangents au cercle.
Appelle p son périmètre.
Vérifie que l'aire du polygone est $\frac{1}{2}$ p.R
Peux-tu expliquer cette formule ?

LES AIRES (2ème partie)

ACTIVITE - durée 1h (feuille n° 1)

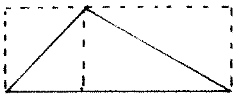
Objectifs : faire retrouver les formules d'aire du triangle et du parallélogramme (formules utilisées jusqu'à présent à partir du formulaire) ; à l'aide :

. de l'aire du rectangle
. du calcul littéral vu précédemment.

Consigne : comment trouver l'aire du triangle et du parallélogramme à partir de celle du rectangle ?

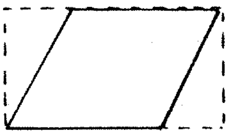
Commentaires :

Aire du triangle : les triangles dessinés d'abord sont souvent rectangles ou isocèles puis quelconques.



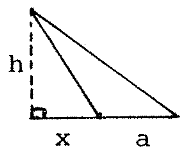
Le passage aux $\frac{1}{2}$ rectangles permet de retrouver la formule.

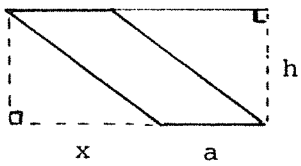
Aire du parallélogramme :



Déplacement d'un triangle puis comparaison avec l'aire du rectangle obtenu.

Lors de la **synthèse**, le professeur propose des situations où les procédures précédentes sont inopérantes :





Les aires sont alors calculées par différences d'aires de rectangle et de triangles rectangles à l'aide du calcul littéral (nouvelle preuve de l'utilité de celui-ci (voir partie I - II [8]).

EXERCICES SUR LES AIRES - durée 3h 30mn.

L'exercice 1 permet de :

- revoir la construction d'un rectangle à partir d'un côté et d'une diagonale
- revoir la construction du symétrique d'un point
- utiliser les propriétés des symétries (conservation des aires).

Les résultats obtenus ne dépendent pas de la position du point M et sont généralisables (approche de la preuve).

A l'exercice 2, les élèves commencent par mesurer les dimensions sur le dessin puis calculent,

- l'échelle
- les dimensions réelles de chaque figure. L'échelle $\frac{4}{71}$ ne s'avère pas "pratique", ce qui les pousse à rechercher une autre stratégie liée à l'analyse de la figure.

Très vite, les fractions-partage sont réinvesties.

* Le carré est partagé en huitièmes et en seizièmes et l'aire de chaque partie calculée à partir de celle du carré.

* Les dimensions nécessaires au calcul de l'aire de chaque figure sont calculées à partir du côte du carré : $\frac{1}{2} \times 71$; $\frac{3}{4} \times 71$, puis l'aire est calculée par utilisation de la formule.

Pour l'exercice 3, chaque élève écrit individuellement son programme de construction après l'analyse de la figure (l'aide apportée à l'exercice 2 porte ses fruits).

Il subsiste encore des difficultés pour écrire correctement le programme de construction des arcs de cercle, pour lesquels il faut préciser centre, rayon et extrémités.

L'aire est ensuite calculée sans difficultés, les fractions sont bien utilisées.

Dans les exercices 4 à 7, le calcul littéral est utilisé à bon escient et, sans intervention du professeur, les élèves traduisent les textes par des égalités en ligne et résolvent les équations. L'usage des lettres semble avoir pris du sens et le traitement d'une équation paraît en bonne voie d'acquisition.

A l'exercice 7, devant les difficultés de construction une information collective est nécessaire :

- sur la définition de la tangente à un cercle,
- sur la propriété de la tangente : perpendiculaire au rayon correspondant (nécessaire pour construire),
- sur la manière d'effectuer la recherche afin de dépasser les vérifications réalisées à partir des mesures sur le dessin puis des calculs des aires et de passer à la généralisation de la formule,
- sur la distributivité de la multiplication sur l'addition qui apparaît ici sous la forme mise en facteur :

transformation intuitive de la part des élèves de

$$A = \frac{a \times R}{2} + \frac{b \times R}{2} + \frac{c \times R}{2} \cdots\cdots$$

en $A = \frac{p \times R}{2}$

Les feuilles 2 et 3 sont données aux élèves en travail à la maison. Un repérage sur le plan du collège est réalisé à l'aide du rétroprojecteur.

Plusieurs méthodes sont utilisées :

- découpage en figures élémentaires, calcul des aires de chacune par des formules puis évaluation de l'aire totale.

Dans l'exercice 1, la recherche du centre d'un cercle est faite par les médiatrices de segments pouvant correspondre à des cordes.

- Inscription de la figure (1) dans un rectangle puis calcul approché de l'aire du rectangle en enlevant les aires des figures "en trop", ou quadrillage de ce rectangle en 130 parties : puis comptage des vides : il reste 87 parties puis calcul de l'aire du rectangle et de la figure ($\frac{87}{130}$ × aire du rectangle).

- Réalisation d'un quadrillage 1 × 1 et calcul du nombre de carreaux. Les résultats sont parfois donnés par un encadrement.

A l'exercice 2, la plupart des élèves a appliqué l'échelle $\frac{1}{1000}$ à l'aire calculée au lieu de l'appliquer aux dimensions.

Quelques-uns, sans réellement pouvoir se justifier ont fait

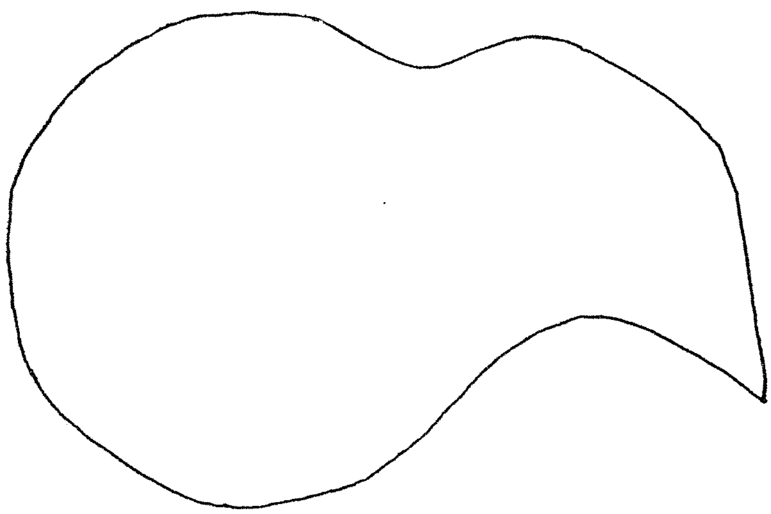
aire dessin × 1000 × 1000 = aire réelle.

Une mise au point sur la signification et l'utilisation de l'échelle est nécessaire.

FEUILLE N° 2

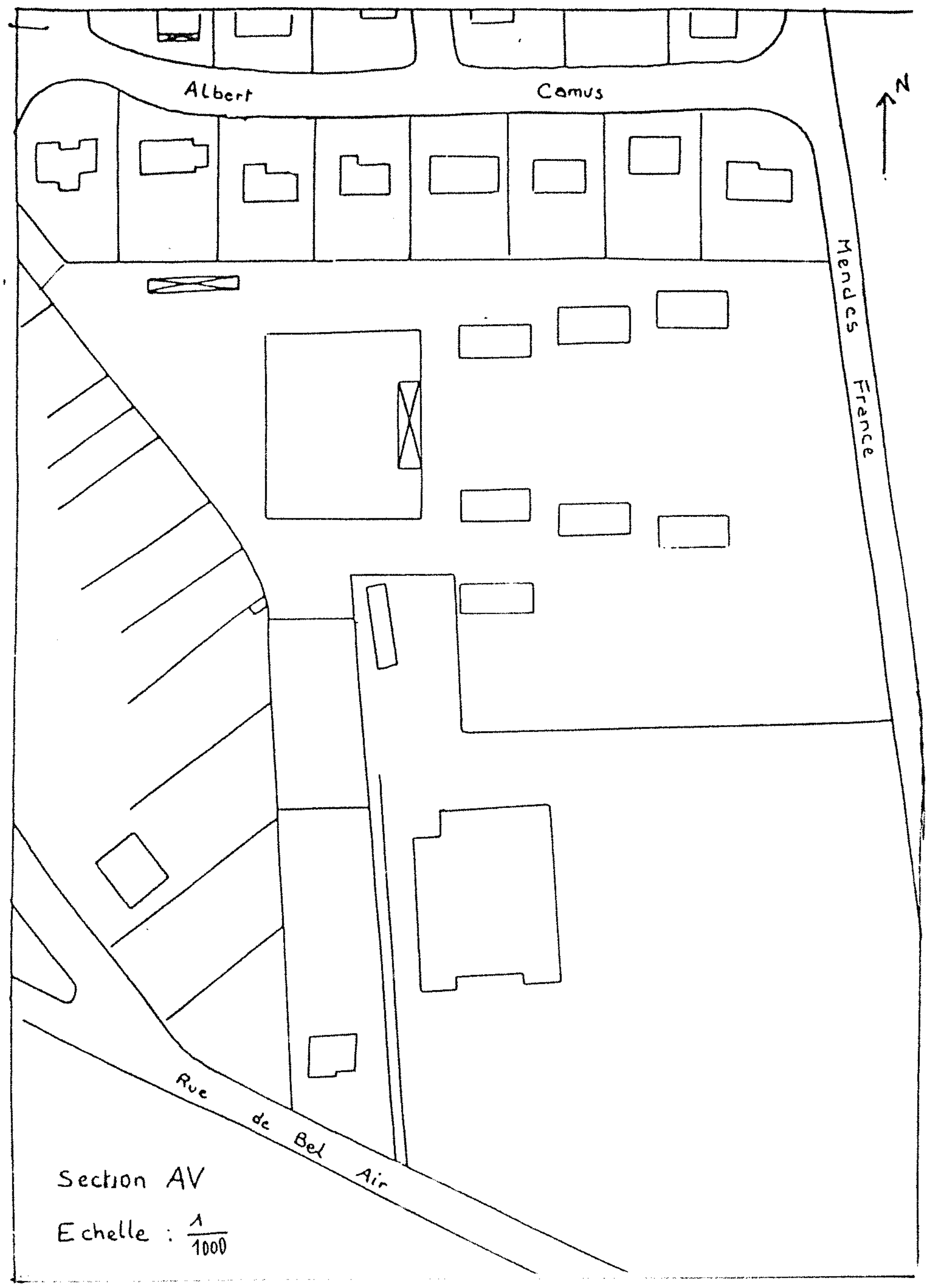
DEVOIR

Ex 1 - Evalue l'aire de cette figure. Explique ta méthode et détaille tes calculs.



FEUILLE N° 3

Ex 2 - Evalue l'aire du collège. Explique ta méthode et détaille tes calculs.



(Ce dessin a été réduit à l'échelle d' $\frac{1}{2}$ pour des raisons de mise en page).

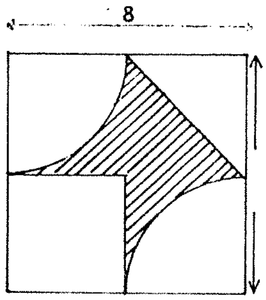
T E S T sur les Aires

3ème partie

FEUILLE N° 4

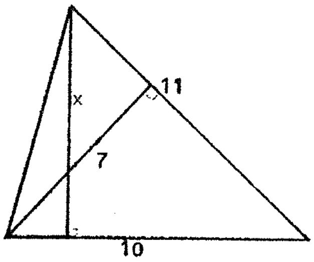
TEST

Ex 1 - Calcule l'aire de la partie hachurée :



Pour les exercices 2, 3 et 4, traduis le texte par une EGALITE EN LIGNE AVEC UNE LETTRE, fais le calcul puis le dessin s'il est demandé.

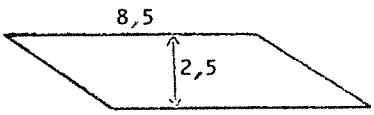
Ex 2 -



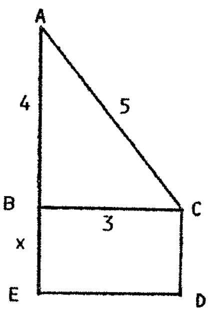
Que vaux x ?

Justifie ta réponse.

Ex 3 - Un triangle isocèle a la même aire que le parallélogramme ci-dessous. La hauteur du triangle mesure 4,8cm. Dessine-le.



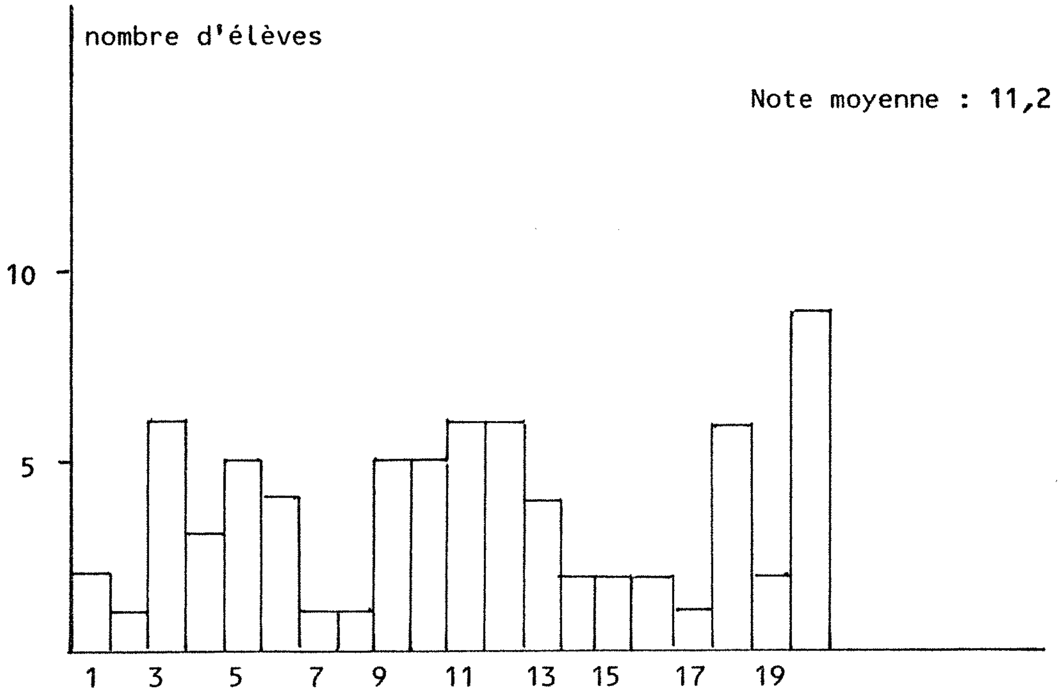
Ex 4 -



1°- Trouve x pour que le triangle ABC et le rectangle BCDE aient la même aire.

2°- Quel est le périmètre du trapèze ABDC ?

T E S T (aires)



Pourcentage de réussite

Ex 1	Ex 2	Ex 3	Ex 4 1°)	Ex 4 2°)
43%	77%	50%	56%	46%

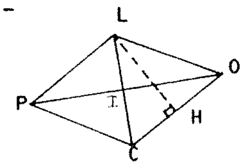
L E S   A I R E S

4ème partie

ANNEXE

DEVOIR à la maison

Ex 1 -



PLOC est un losange de centre I. Son côté mesure 7,5cm, ses diagonales mesurent 12cm et 9cm.
Calcule l'aire du périmètre de PLOC.
Calcule LH.

Ex 2 - RSAU est un parallélogramme tel que RS = 2cm, que son périmètre soit 14cm et que sa hauteur [UT] mesure 1,8cm.

a) Trace ce parallélogramme et donne ton programme de construction.

b) L'aire de RSTU est 8,1cm^2; calcule l'aire de UTA.

INITIATION A LA PREUVE au collège

ANALYSE DES DIFFICULTES

Preuve et démonstration

La démonstration est une forme de preuve qui est elle-même une forme d'explication [1].

La démonstration en mathématiques apparaît comme l'étape la plus sophistiquée d'un processus d'explication. Elle ne peut prendre sens que si elle s'inscrit dans un processus où petit à petit évoluent les types d'explications que l'on peut donner à la question **pourquoi** ? Encore ne faudrait-il pas attendre que les élèves puissent faire des démonstrations (au sens de la démonstration enseignée en quatrième) pour **poser** ou **leur faire poser** cette question.

Pour favoriser l'apparition d'explications et de preuves plusieurs conditions sont requises :

- il doit y avoir **conjecture** de la part des élèves,
- il faut un enjeu pour que l'élève aille au-delà de la conjecture :
  1 - envie de se convaincre lui-même
  2 - envie de convaincre ses **pairs**.

Le cas 2 est plus fréquent, il nécessite l'organisation de débats sur les conjectures.
Si la géométrie constitue un domaine privilégié pour apprendre à **rédiger une démonstration**, l'algèbre est un moyen, tout comme la géométrie, susceptible de fournir des situations où apparaissent des explications et des preuves.

Initiation au raisonnement déductif en géométrie

En géométrie, on peut représenter l'évolution **explication** → **preuve** → **démonstration** et sa prise en compte dans un enseignement progressif soit par le schéma suivant :

La vue : - observation → illusion
- évidence

La mesure : - expérimentation approximation
- vérification →
(les cas particuliers)

La raison : - démonstration → validation
- justification
(le cas général)

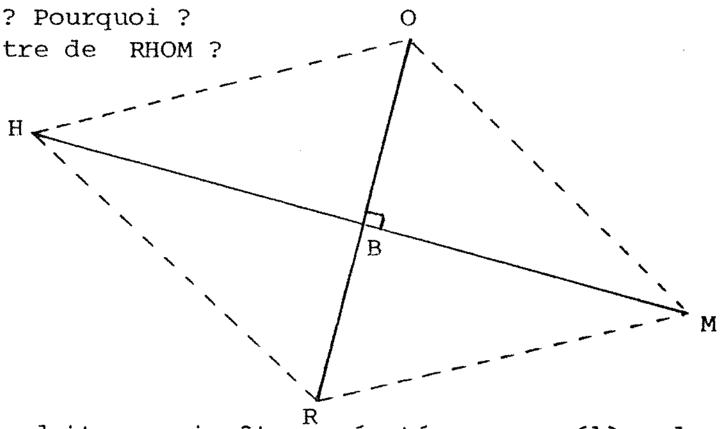
soit sous forme de tableau disant comment répondre à la question pourquoi ?

Moyens	Avantages	Inconvénients
En observant la figure : ça se voit (la vue)	Permet de se faire une idée	Pas totalement sûr (illusions, les tracés ne peuvent être exacts).
En faisant des mesures (la mesure)	Permet de vérifier son idée	Pas totalement sûr (imprécision des instruments de mesure.
En donnant des raisons : je l'ai prouvé, démontré (la logique)	Permet d'être sûr de ce que l'on dit	Il faut connaître les règles et être sûr du point de départ.

DEUX EXEMPLES :

Exemple 1 - Dessine cinq points R, H, O, M, B de telle façon que :
. B soit le milieu de [RO] et [HM]
. RO = 5cm et HM = 9cm
. (RO) soit perpendiculaire à (HM).

1. Que dire de RHOM ? Pourquoi ?
2. Quel est le périmètre de RHOM ?



Une telle construction doit pouvoir être exécutée par un élève de sixième et elle fait partie des compétences exigibles pour un élève de cinquième.

Pour la première partie de la question 1, il s'agit de savoir identifier une figure usuelle connue. Ce genre de savoir-faire fait partie des capacités exigibles en sixième (reconnaître une figure).

On peut noter que ces deux premiers points sont tout à fait dans l'esprit des nouveaux programmes de 6ème-5ème puisque l'objectif fondamental en est la description et le tracé de figures simples.

Pour la deuxième partie de la question 1, il s'agit de justifier la réponse. A ce niveau (6ème-5ème), il nous parait important d'accepter tout type de justification et de les confronter. **Que peuvent dire les élèves ?** (Il est intéressant de relever les réponses et de les analyser. (Voir exemple 2). C'est un losange car :

(1) ses 4 côtés ont la même longueur (je le vois et/ou je l'ai vérifié en mesurant).

(2) ses diagonales sont perpendiculaires et ont le même milieu (je le sais d'après le texte).

On voit sur cet exemple que peuvent apparaître **simultanément** les trois niveaux du tableau.

En ce qui concerne la deuxième question :

- pour les élèves de sixième-cinquième il s'agira de mesurer (niveau 2 du tableau) et de donner une valeur approchée du périmètre en précisant bien que cette **valeur est approchée.** Ceci ne pose pas de problèmes car les élèves ne trouvent pas tous le même résultat, il est alors intéressant de faire préciser le seuil de tolérance de l'erreur.

- Pour les élèves de quatrième, le calcul pourra être fait (théorème de Pythagore) et la valeur sera exacte : ce sera la **même pour tous. La mesure** ne servira plus qu'à vérifier mais son rôle tout en ayant changé de statut (ce n'est plus une **preuve**), restera fondamental voire indispensable.

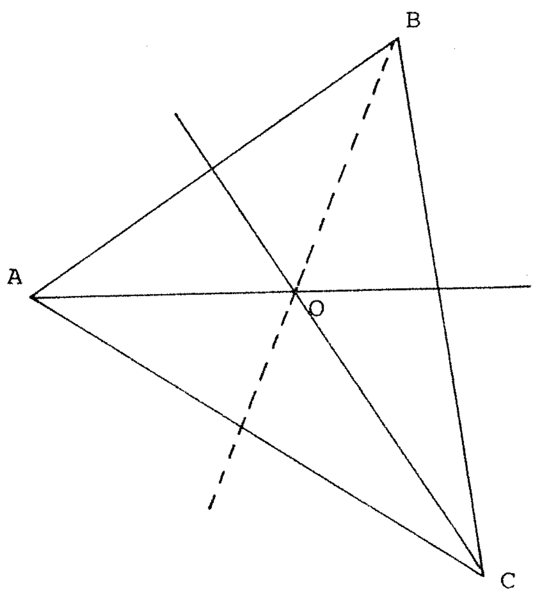
Avec cette question, on voit que les niveaux peuvent apparaître différemment suivant la classe considérée et il convient de préciser aux élèves le niveau du tableau auquel nous nous sommes placés.

Exemple 2 - a) Dessine un triangle ABC tel que AB = 6cm ; BC = 7cm et AC = 7cm.
b) Quelle est la nature du triangle ABC ? Pourquoi ?
c) Donne la mesure de l'angle $\widehat{C}$.
d) Trace les bissectrices des angles $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$. Elles se coupent en O.
Que peux-tu dire de la droite (BO) ? Pourquoi ?

Voici les réponses à la quatrième question des élèves d'une classe de 5ème, classées selon la note globale obtenue au contrôle par ordre décroissant (la note figure entre parenthèses).

1.(20) (BO) est la bissectrice de $\widehat{B}$ car toutes les bissectrices se coupent en un même point.
2.(18,5) (BO) est elle aussi une bissectrice parce qu'elle coupe $\widehat{B}$ en deux angles égaux.
3.(17,5) (BO) est la bissectrice de l'angle $\widehat{B}$ car toutes les bissectrices se coupent en un même point.
4.(17,5) Je peux dire de la droite (BO) que c'est la bissectrice de l'angle $\widehat{B}$ parce que les bissectrices se croisent toujours en un même milieu.
5.(17,5) La droite (BO) est une bissectrice parce qu'elle passe par le sommet et divise l'angle en deux angles égaux.
6.(17,5) C'est une bissectrice car les bissectrices d'un triangle se coupent en un même point.

7.(17,5) La droite (BO) est une bissectrice car dans un triangle les bissectrices se coupent en un même point qui est le centre.
8.(16,5) La droite OB est une hauteur parce qu'elle est perpendiculaire à la droite AC et passe par le sommet B.
9.(16,5) La droite (BO) est la bissectrice de l'angle B car elle passe par un sommet et divise l'angle en 2 angles égaux.
10.(16) (BO) est la bissectrice de $\hat{B}$ parce qu'elle partage le secteur angulaire B en deux secteurs égaux.
11.(15,5) La droite (BO) est la bissectrice de $\hat{B}$ car elle coupe $\hat{B}$ en 2 moitiés égales.
12.(15,5) La droite (BO) est la bissectrice de l'angle $\hat{B}$ parce qu'elle le partage en deux angles égaux.
13.(15) Je peux dire que la droite [BO] coupe le segment [AC] au milieu [BO] est une médiane.
14.(15) (BO) est la médiane de (AC).
15.(14) La droite BO est la bissectrice de l'angle $\hat{B}$. Car elle coupe B en 2 parties égales.
16.(13) Si je trace la droite (BO) ça donnera une hauteur. Pourquoi?: parce que les côtés sont opposés.
17.(12,5) -
18.(12) La droite (BO) est une bissectrice.
19.(12) -
20.(11) La droite (BO) se croise avec la droite AO car ce sont des bissectrices.
21.(10) -
22.(9,5) BO est perpendiculaire à CO.
23.(7,5) (BO) est une hauteur car elle passe par le sommet et le côté opposé au sommet.
24.(7) -
25.(5,5) Qu'elle est perpendiculaire à la droite (AO)
26.(4,5) -



Constats :

1) Bissectrice : 14 réponses

5 du type : car les bissectrices se coupent en même point (1, 3, 4, 6, 7)
(on constate qu'elles correspondent aux meilleures copies).

7 du type : car elle coupe l'angle en deux angles égaux (2, 5, 9, 10, 11, 12, 15).

2 incomplètes (18, 20).

2) Médiane : 2 réponses (13, 14) acceptable vu les erreurs de mesure et de tracé.

3) Hauteur : 3 réponses (8, 16, 23) ou perpendiculaires 2 réponses (22, 25)
Quelle représentation de la perpendiculaire les élèves ont-ils ?

4) Sans réponse : 5

On peut à partir de ces réponses engager un débat en classe et analyser les arguments fournis.
Pour hauteur ou perpendiculaire un oeil exercé ne s'y trompe pas ; l'observation suffit, mais l'utilisation d'une équerre peut enlever les derniers doutes.

Par contre pour la médiane, si on admet que la précision sur les tracés est de 1 mm en plus ou en moins il peut y avoir là débat sur les moyens de savoir quelle est la vérité (ou les bonnes réponses ?...).
Mais à quelle vérité se référera-t-on ? Vérité empirique, expérimentale ou intellectuelle ?

Ainsi pour que l'activité de démonstration enseignée en 4ème prenne du sens il faut qu'elle soit l'aboutissement d'un enseignement où les différents types de preuves soient pris en compte et où la tâche de l'enseignant est de préciser leur statut et de les faire évoluer.

COMMENT FAIRE EVOLUER VERS LA DEMONSTRATION EN GEOMETRIE

L'étape ultime est l'apprentissage à la formulation d'une démonstration en quatrième [2,10]. Avant de l'atteindre, il faut que notre enseignement soit centré en sixième-cinquième sur l'évolution vue → mesure → logique.
Pour cela on peut,

1 - effectuer un aménagement des rédactions de nos exercices,
2 - élaborer des situations où les élèves seront capables de fournir des preuves,
3 - présenter de manière plus ouverte les notions, ce qui est conforme au programme qui préconise un enseignement par les activités.

1) *Effectuer un aménagement des rédactions de nos exercices*

* Ne pas se contenter de constructions, mais proposer des **constructions questionnées** (on voit - on mesure).

Exemple : construire un triangle ABC tel que AB = 7cm, BC = 3cm et AC = 8cm.
Placer I, J et K les milieux respectifs de [AB] , [BC] et [AC].

Que peux-tu dire de AKJB ? **Pourquoi ?**

Dans ce type d'exercice, les élèves sont censés avoir des figures superposables. Une difficulté supplémentaire apparaît lorsque la conjecture porte sur une configuration générique.

Exemple 1 : le même exercice que le précédent sans préciser les longueurs des côtés.

Exemple 2 : que vaut la somme des angles d'un triangle ?
Pourquoi ?

Il convient dans ces exercices d'insister sur **les cas particuliers** et sur les vérifications possibles :

- on trace tous les triangles
- on recherche des arguments **internes** à la figure (ce qui est alors un pas vers la preuve voire la démonstration).

* Faire justifier les constructions par recours à une (ou des) propriétés validées par le professeur.

Exemple : **les** élèves ont à leur disposition leur tableau où figurent les propriétés des quadrilatères [4 P.35], et ont à résoudre des exercices du type :

- Trace une droite (D). Place A un point n'appartenant pas à (D). Construis un losange ABCD dont (D) est un axe de symétrie.

  Quelles propriétés utilises-tu ?

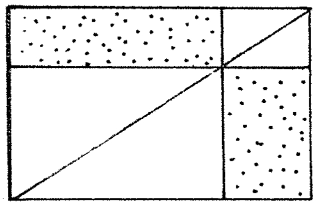
2) *Elaborer des situations où les élèves sont capables de fournir des preuves.*

Les objectifs sont de :

- s'interroger sur ce que l'on sait ou ce que l'on ne sait pas,
- comprendre qu'il faut fournir une explication interne et non externe à la figure donc de réfléchir sur les outils que l'on s'autorise à utiliser.

(Explication interne : ce que l'on sait par les données et par les propriétés déduites des données ;
explication externe : ce que l'on voit, mesure ou vérifie en utilisant divers instruments.)

Exemples : *

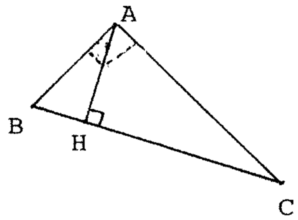


Lequel des rectangles pointillés a la plus grande aire ?

Pourquoi ?

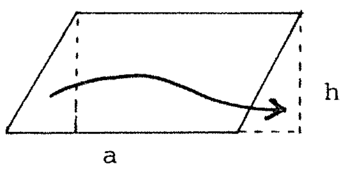
* TOC est un triangle I est le milieu de [TC]
Lequel des triangles OTI et OCI a la plus grande aire ?
Pourquoi ?

*



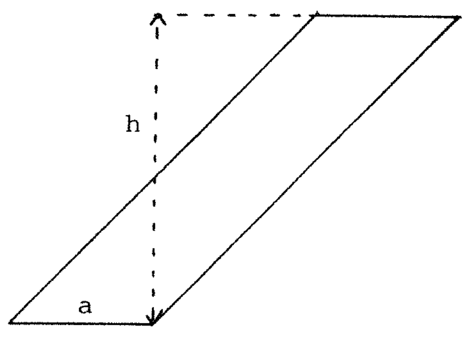
Compare AH × BC et AB × AC.
Lequel est le plus grand ?
Pourquoi ?

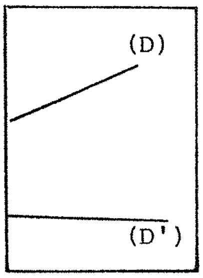
* Un parallélogramme a pour côté a et pour hauteur **h** .
Trouve la formule de l'aire.
L'explication généralement donnée est la suivante :



s = a × h

mais cette explication est-elle une preuve ?.....

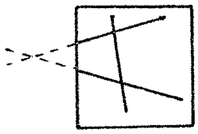


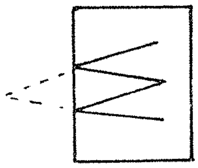
* 

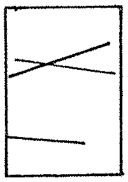
Le rectangle représente une feuille. (D) et (D') se coupent hors de la feuille.

Détermine l'angle de (D) et (D') sans utiliser d'autres feuilles.

Remarque : lors de la passation dans une classe de cinquième trois explications sont apparues :

- Tracé d'un triangle 

- Tracé d'un parallélogramme 

- Tracé de droites parallèles 

Les deux premières ont été admises comme preuves, la dernière rejetée car *"on n'avait aucun résultat sur lequel s'appuyer comme la somme des angles d'un triangle est 180°"*.

* Construire trois triangles équilatéraux : ATI, TIC et TOC.
Que dire des points A, T et O ?
Pourquoi ?

Pour d'autres exercices de ce genre consulter ([5] - [6] - [7]).

Les exemples précédents sont relatifs aux aires, aux angles, car ces notions permettent la mesure; le calcul et l'oeil est souvent trompé.

3) *Présenter de manière plus ouverte les notions*

Les programmes précisent que les notions doivent être introduites par des activités. Celles-ci doivent en particulier "créer rapidement une situation assez riche pour provoquer des conjectures..." donc permettre d'obtenir des explications ou des preuves.

Exemple : la médiatrice ([4] p.86)

Place deux points R et S distants de 8cm. Place 3 points à égale distance de R et S.

Les élèves travaillent par groupes et chaque groupe consigne ses résultats sur un même transparent. Puis les transparents sont superposés puis discutés. Lors de la discussion une distinction est faite entre :

- ce que l'on ne sait pas sûrement : on dirait une droite perpendiculaire à [RS].

- Ce que l'on sait de manière sûre : le milieu de [RS] fait partie des points placés.....

Nous avons dit plus haut que l'étape ultime est **d'apprendre à formuler** une démonstration. En effet, il est illusoire de penser que les élèves puissent par eux-mêmes fournir des démonstrations telles qu'elles sont enseignées en 4ème (programme 76). Ce type de discours s'apprend ([2] ou [10]).

En effet, il faut apprendre à :

- repérer les données et le résultat,
- tisser les liens logiques entre les objets géométriques eux-mêmes : "**si** un parallélogramme a un angle droit **alors** c'est un rectangle."

A ce propos les transformations géométriques sont-elles appropriées pour cet apprentissage ?

• Initiation à la preuve en algèbre

Calcul numérique

Le calcul numérique est peu utilisé dans des situations de preuve. Pourtant, il suffirait de modifier les énoncés pour en faire apparaître.

Exemple :* au lieu de dire : calcule $A = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)$ on pourrait dire " $B = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$ et $C = \frac{7}{5}$.
Prouve que C et 2B sont égaux".

* De même on pourrait aussi dire : "démontre que $\frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$" au lieu de "exprime $\frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ sous la forme $a + b\sqrt{2}$ (a et b entiers relatifs).

Calcul littéral

L'un des intérêts de l'utilisation des lettres en algèbre est de **généraliser** des situations sur les nombres. Or, ces généralisations sont des preuves ou des démonstrations [8].

Exemples :

* Choisis un nombre, prends son double, ajoute-lui 1. Elève au carré. Ajoute 3 au résultat. Recommence avec plusieurs nombres. Qu'en penses-tu ? Pourquoi ?

* Trace deux cercles concentriques dont les rayons diffèrent de 1. De combien different les périmètres ? Pourquoi ?

* Choisis deux multiples de 7. Fais leur somme. Recommence avec des multiples de 7 différents. Qu'en penses-tu ? Pourquoi ?

* Le carré d'un nombre impair est-il pair ou impair ? Pourquoi ?

* Voici un extrait de la table de Pythagore.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	4	6	8	10	12	14	16
3	3	6	9	12	15	18	21	24
4	4	8	12	16	20	24	28	32
5	5	10	15	20	25	30	35	40
6	6	12	18	24	30	36	42	48
7	7	14	21	28	35	42	49	56
8	8	16	24	32	40	48	56	64

Trace un rectangle suivant les lignes du quadrillage. Fais le produit des "extrêmes" et des "moyens" (ici : 6×28 ; 12×14)
Recommence.
Qu'en penses-tu ?

Ainsi, en cinquième, on peut facilement concilier apprentissage au calcul littéral et initiation à la preuve.

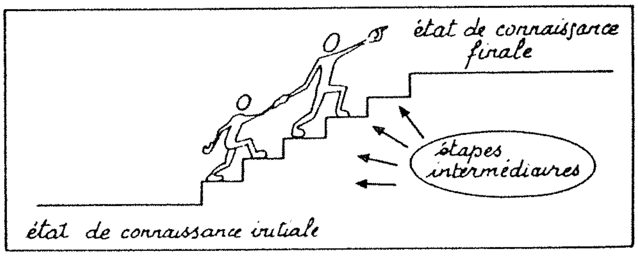
● A propos des conceptions sous-jacentes de l'apprentissage

L'objectif de l'apprentissage de la démonstration est qu'un élève sortant de collège sache rédiger de courtes démonstrations telles que nous les enseignons en quatrième.* Deux démarches sont possibles pour atteindre cet objectif.

Première démarche

Pour que l'élève réussisse à rédiger une démonstration comportant 3 ou 4 énoncés, 3 ou 4 chaînons déductifs ("donc") il faut commencer tôt (sixième) et progressivement. Ainsi, en sixième, on proposera des séquences déductives avec un énoncé, un chaînon déductif, puis petit à petit, on augmentera les nombres d'énoncés et de chaînons.

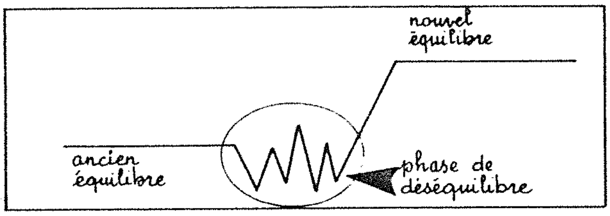
Ce faisant, pense-t-on, les élèves comprendront, à force d'en faire, l'intérêt d'un tel travail.



(p. 228 suivi scientifique 6ème)

Deuxième démarche

Pour que l'élève réussisse à rédiger une démonstration et comprenne pourquoi on le fait il faut qu'il en saisisse l'enjeu. Ainsi, en sixième-cinquième, on s'emploiera à créer des situations de déséquilibre afin de pouvoir en 4ème-3ème réorganiser les connaissances. (Ex. Voir, mesurer ne suffit pas).



(p. 229 suivi scientifique 6ème).

Notre point de vue relève de la deuxième démarche.

* Programme 1976

UNE DEMARCHE POUR LE PREMIER CYCLE

* *Sixième-cinquième*

- Initier à la preuve en géométrie,
  . par des constructions questionnées
  . par des justifications de constructions
  . par l'instauration de débats autour des conjectures (à l'aide des activités)
  . par des situations spécifiques qui amèneront à prendre conscience de l'utilité de la preuve et qui permettront de la faire évoluer (vue → mesure → logique).
- Prendre en compte la preuve dans des situations relevant du calcul numérique ou de l'initiation au calcul littéral.

* *Quatrième-troisième*

- Initier à la preuve en analyse et géométrie.
- Initiation au raisonnement par conditions suffisantes.
- Apprendre à formuler une démonstration.
- Bien distinguer les niveaux de réponses demandées en utilisant un vocabulaire ah hoc : vérifie, prouve, démontre, donne une valeur exacte, approchée....

TEXTES OFFICIELS

Sur la démonstration

Sixième

"..... s'initier progressivement au raisonnement déductif".

Cinquième

"..... s'initier progressivement au raisonnement déductif".

Quatrième

"..... s'entraîner au raisonnement déductif".

Troisième

"..... s'entraîner constamment au raisonnement déductif".

Rien n'est exigible en 5ème.

Sur les contenus abordés

Programme

- caractérisations angulaires du parallélisme
- constructions et caractérisations du parallélogramme
- triangle : somme des angles, aire, construction du cercle circonscrit.

Commentaires

Sur la démonstration

Les diverses activités de géométrie plane habitueront les élèves à expérimenter et à conjecturer. Elles permettent la mise en oeuvre de brèves séquences déductives mettant en jeu les outils mathématiques du programme.

On prendra garde de ne pas demander aux élèves de prouver des propriétés perçues comme évidentes.
Rien n'est exigible sur la démonstration à l'issue de la cinquième.

Sur les contenus abordés

Dans le plan, transformation de figures par symétrie centrale

a - Construction d'images. Mise en évidence de conservations, caractérisations angulaires du parallélisme. Parallélogramme.

Comme en sixième, l'effort portera sur un travail expérimental (demi-tour, pliages...) permettant d'obtenir un inventaire abondant de figures simples, à partir desquelles se dégageront de façon progressive les propriétés conservées par symétrie centrale, ces propriétés prenant alors le relais dans les programmes de construction.

La symétrie centrale n'a à aucun moment à être présentée comme une application du plan dans lui-même. Suivant les cas, elle apparaîtra sous la forme :

- de l'action d'une symétrie centrale donnée sur une figure
- de la présence d'un centre de symétrie dans une figure.

Les élèves doivent connaître les propriétés élémentaires de la symétrie centrale :

- conservation des distances, de l'alignement, des angles
- parallélisme d'une droite et de son image.

Ces propriétés sont à relier à la caractérisation du parallélogramme, aux caractérisations angulaires du parallélisme (angles formés par deux droites parallèles à une sécante) ; sur ces points aucune démonstration n'est exigible des élèves. Elles permettent aussi de relier l'aire du triangle et celle du parallélogramme.

Pour les angles on utilisera le vocabulaire suivant :

angles complémentaires, angles supplémentaires, angles adjacents, angles opposés par le sommet, angles alternes-internes, angles correspondants.

Compétences exigibles

- Construire le symétrique :
d'un point, d'une droite, d'une demi-droite, d'un segment, d'une ligne polygonale, d'un cercle.

- Reconnaître dans une figure simple un centre de symétrie, ou un axe de symétrie.

- Relier les propriétés du parallélogramme à celles de la symétrie centrale.

- Utiliser les propriétés relatives aux angles formés par deux droites parallèles et une sécante.

- Evaluer à partir de l'aire du rectangle l'aire d'un parallélogramme, l'aire d'un triangle.

b - Figures simples ayant centre (s) ou axe (s) de symétrie.

Les problèmes de construction consolideront les connaissances relatives aux quadrilatères usuels. Ils permettront de mettre en oeuvre droites et cercles et de revenir sur la symétrie axiale et les axes de symétrie.

L'initiation à la caractérisation de figures se poursuit, mais une propriété caractéristique sera toujours formulée à l'aide de deux énoncés séparés (par exemple : si un quadrilatère est parallélogramme, alors ses diagonales ont le même milieu ; si dans un quadrilatère les diagonales ont le même milieu, alors le quadrilatère est un parallélogramme).

Triangle

Les activités se placeront dans le cadre des différentes rubriques du programme.

Elles permettront d'insister sur les notions d'angle et d'aire.

Le recours aux "cas d'égalité" des triangles pour l'étude des figures géométriques est exclu.

Les diverses activités de géométrie plane habitueront les élèves à expérimenter et à conjecturer. Elles permettront la mise en oeuvre de brèves séquences déductives mettant en jeu les outils mathématiques du programme.

On prendra garde de ne pas demander aux élèves de prouver des propriétés perçues comme évidentes.

Compétences exigibles

Reproduire, sur papier quadrillé et sur papier blanc, un parallélogramme donné (et notamment les cas particuliers du rectangle, du losange, du carré) en utilisant les propriétés relatives aux côtés, aux diagonales et aux angles.

Utiliser les propriétés (côtés et diagonales, angles, éléments de symétrie) :

- du parallélogramme
- du rectangle
- du losange
- du carré.

Utiliser, dans une situation donnée, la somme des angles d'un triangle, les angles d'un triangle équilatéral ou d'un triangle isocèle.

Tracer le cercle circonscrit à un triangle.
Tracer un triangle connaissant :
- les longueurs des trois côtés,
- les longueurs des deux côtés et l'angle compris entre ces côtés,
- la longueur d'un côté et les deux angles qui lui sont adjacents.

EXPERIMENTATION EN 5ème

Tout au long de l'expérimentation depuis la sixième les élèves travaillent sur des activités qui permettent de conjecturer. Les vérifications des conjectures sont faites par la mesure, la vue ou la logique.

De même dès la sixième, les élèves ont été habitués à formuler les propriétés permettant leurs constructions.

Dans de telles situations des débats sur la preuve ont eu lieu dans certains groupes (débats qui parfois ont été élargis à la classe). Les preuves sont acceptées par la classe, rarement le professeur donne son point de vue. Ainsi certaines de ces preuves étaient de réelles démonstrations, d'autres des vérifications, des mesures....

L'objectif de ce qui suit est de faire évoluer le type de preuve afin d'arriver au troisième niveau : la logique (recherche d'éléments contenus dans la figure qui permettent de prouver). Ainsi, on s'efforce :

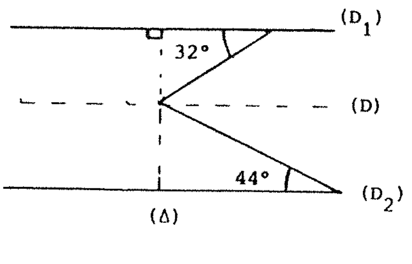
- de montrer que la vue, la mesure sont insuffisantes,
- de montrer la différence entre une preuve expérimentale et une preuve intellectuelle,
- de réfléchir sur les outils (énoncés) que l'on s'autorise à utiliser : quels sont les énoncés que l'on connaît ?
- de montrer l'efficacité des énoncés connus.

Il nous semble prématuré à ce niveau d'avoir des exigences quant à la formulation de la preuve.

Compte tenu du programme nous avons travaillé sur trois thèmes : les aires, les angles et le parallélogramme qui permettent une évolution dans l'apprentissage :

AIRES	ANGLES	PARALLELOGRAMME
Dans le champ conceptuel de l'élève. Notion bien manipulée.	Dans le champ conceptuel de l'élève.	Dans le champ conceptuel de l'élève, mais notion moins bien manipulée
Les conjectures semblent paradoxales quelquefois ; la vue ne suffit pas.		
La mesure est possible. Les résultats sont différents. Ce qui amène la formulation d'autres arguments.	La mesure est possible. Les résultats sont différents. Ce qui peut amener la formulation d'autres arguments.	La mesure n'est pas toujours possible.
	Permet de réfléchir* sur les énoncés dont on est sûr et ceux pour lesquels on ne l'est pas.	Permet de réfléchir sur les énoncés dont on est sûr et ceux pour lesquels on ne l'est pas
		Montrer "la puissance" des énoncés.

*Pour l'exercice des angles :



- Si les élèves tracent la perpendiculaire (Δ) à (D_1), l'est-elle à (D_2) ?
- Si les élèves tracent la parallèle (D) à (D_1), l'est-elle à (D_2) ?

AIRES ET DEMONSTRATIONS

1ère partie

FEUILLE N° 5

AIRES ET DEMONSTRATIONS

Activité 1

Construis un parallélogramme TRUC tel que :
TR = 6cm ; RU = 4cm, TU = 5cm.
Place un point M sur [TU].

La parallèle à (TR) passant par M coupe (RU) en N et (TC) en N'

La parallèle à (RU) passant par M coupe (CU) en P et (TR) en P'

Compare les aires de PMN'C et P'MNR. Explique

Objectifs

Ex 1 - Construis un triangle MON tel que :
MO = 7 ; $\widehat{NOM} = 45°$; $\widehat{OMN} = 72°$.

Place I le milieu de [MO] .

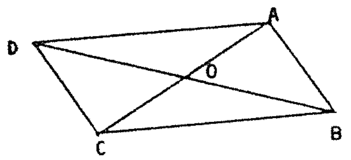
Lequel des deux triangles MIN et OIN a la plus grande aire ?

Le plus grand périmètre ?

Le résultat sur les aires est-il vrai quelles que soient les dimensions du triangle ? Pourquoi ?

Application (facultatif)

O est le centre du parallélogramme ABCD, lequel des quatre triangles



OAB
OBC
OCD
ODA
a la plus grande aire ? Pourquoi ?

Ex 2 - Trace deux droites parallèles (D_1) et (D_2) distantes de 4cm.
Sur (D_1), place A et B tels que AB = 5cm.

Construis le triangle ABM tel que :
$\widehat{ABM} = 50°$
$M \in (D_2)$

Construis le triangle ABN tel que :
BN = 8cm
$N \in (D_2)$

Lequel des deux triangles a la plus grande aire ?

Peut-on généraliser ?

FEUILLE N° 6

Ex 3 - Trace un triangle ABC rectangle en A tel que BC = 7cm, AB = 3cm.

Place H intersection de la droite (BC) avec la hauteur du triangle passant par A.

Compare AH × BC et AB × AC.

Ce résultat est-il vrai dans n'importe quel triangle rectangle ?

Prouve-le.

Ex 4 - TRAP est un trapèze de bases [PA] et [TR].

Ses diagonales se coupent en I.

Lequel des deux triangles TIP et RIA est le plus grand ?

Pourquoi ?

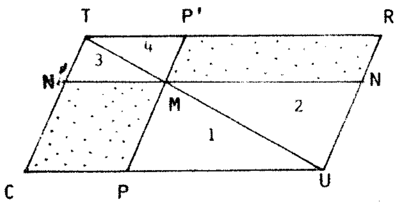
Aires et démonstrations

ACTIVITE - durée 3h (Feuilles n° 5 et 6) Début mai.

Objectifs : ceux annoncés dans le paragraphe "expérimentation en 5ème".

Activité n° 1 : durée 1h.

Choix de la situation - Les surfaces sont dissemblables, les aires des parallélogrammes ne semblent pas égales.



- La situation permet si besoin est (à la demande de la classe) de pouvoir réfléchir sur les niveaux de rigueur : pourquoi 1 = 2 ?

Est-on sûr que PMN'C et P'RNM soient des parallélogrammes ?

La position de M sur [TU] est laissée libre dans le but de créer des conjectures.

Déroulement et commentaires

Sur la construction :

- l'usage du compas n'est pas spontané pour certains élèves,
- le point M est placé assez souvent au milieu de la diagonale.

Sur la preuve :

Les élèves calculent d'emblée l'aire en traçant les hauteurs. Les conclusions sont alors divergentes :

-"on ne peut pas comparer, cela dépend de M,
- les deux ont la même aire,
- celui du bas est plus grand que l'autre (ou le contraire : celui du haut est plus grand que l'autre....)".

Les débats sont relancés dans certains groupes par le professeur : quelle est votre conclusion ? Etes-vous sûr de votre mesure ? Certains proposent de refaire d'autres figures.

L'idée que la mesure est insuffisante apparaît alors et d'autres arguments sont avancés : les parallélogrammes TRUC, TP'MN' et MNUP sont découverts. Les élèves procèdent par comparaison et soustraction de manière très dynamique.

"Ca égale ça, ça égale ça comme les deux grands sont égaux alors les parallélogrammes le sont aussi" (1 = 2 , 3 = 4 comme TUC et TUR ont même aire....).

Le fait qu'une diagonale partage un parallélogramme en deux triangles égaux est une évidence. Personne ne met en doute le fait que MN'CP et MNRP' soient des parallélogrammes. Il semble, à ce stade de l'apprentissage, inutile d'exiger un tel niveau de rigueur.

Lors de la synthèse, l'accent est mis sur les différents types d'explications fournies :

- la mesure est insuffisante, les résultats sont différents d'un élève à l'autre.

- Pour prouver : **les données du texte** sont suffisantes (les énoncés utilisés étant des théorèmes en acte). En outre cette preuve montre que l'on n'a pas besoin de connaître la position de M sur la diagonale, ni les dimensions du parallélogramme TRUC. A noter que ce sont les élèves qui ont dégagé les données nécessaires au raisonnement (TRUC parallélogramme, M sur la diagonale).

Sur le dossier est noté l'objectif.

Je dois savoir prouver une affirmation.

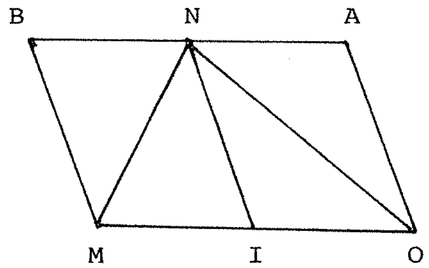
(Cette formulation apparemment vague, a du sens pour les élèves).

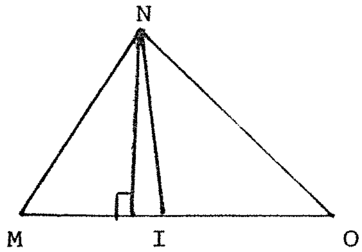
EXERCICES : durée 2h.

Exercice 1 : le calcul des aires est effectué :

- soit parce que l'insuffisance de la mesure n'a pas été perçue par l'activité,
- soit pour chercher la conjecture (cas le plus fréquent).

Deux explications sont alors fournies :





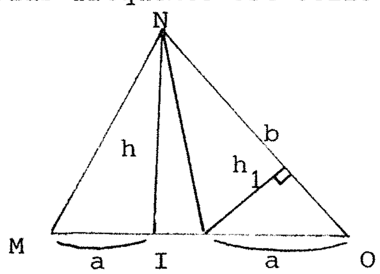
1 - Tracé de la parallèle à (MO) passant par N.

- Tracé des parallèles à (NI) passant par M et O.
- AOMB, NAOI et BNIM sont reconnus être parallélogrammes (non justifié).
- NAOI et NIMB ont même aire car les hauteurs et les bases ont même mesure.
- Les triangles NIM et NOI ont même aire car "c'est la moitié".

2 - Tracé de la hauteur relative à MO.

- Les triangles MIN et NOI ont des bases égales et la même hauteur donc même aire.

Cette preuve nécessite en général un apport du professeur. En effet la démarche la plus fréquente est celle-ci :



Aire de MIN $= \dfrac{a \times h}{2}$

Aire de NOI $= \dfrac{b \times h_1}{2}$

L'intervention du professeur porte sur les différentes façons de calculer l'aire d'un triangle, ce qui permet de débloquer la situation.

A l'issue de la mise en commun, des explications sont devenues des preuves, les élèves sont invités à réfléchir sur les données du texte qui ont permis les preuves. Ils en concluent que ces preuves sont valables quelles que soient les dimensions du triangle.

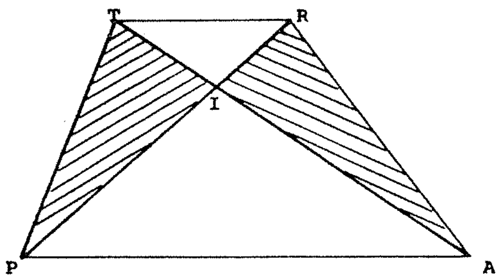
Pour les exercices 2 , 3 et 4 les consignes ont été les suivantes :

- repérer les données du texte,
- faire un dessin,
- prouver son affirmation.

Exercice 2 : des discussions ont lieu à propos de la position de N (deux positions possibles) et des conséquences de cette position pour la conjecture.

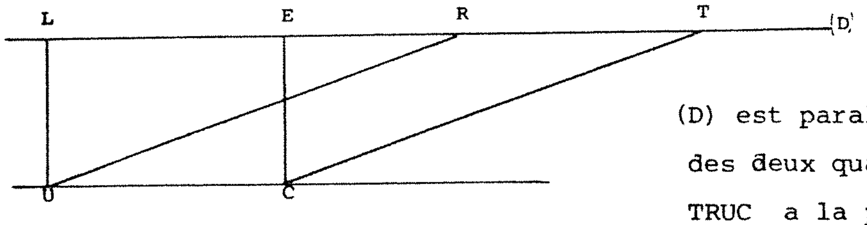
Exercice 4 : il est plus difficile. Les conjectures diffèrent et d'autres mesures sont nécessaires. La preuve par différence d'aire n'est établie que par certains élèves.

A titre d'information nous mentionnons ces autres situations d'aires et démonstrations.

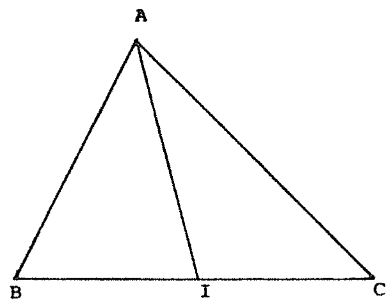


TRAP est un trapèze de bases [PA] et [TR]

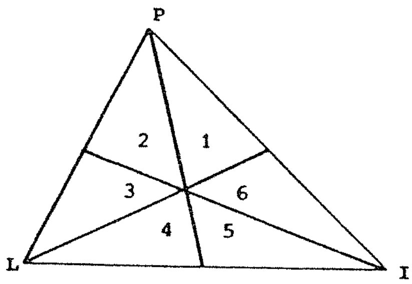
Lequel des deux triangles TIP et RIA est le plus grand ?



(D) est parallèle à (UC). Lequel des deux quadrilatères UCEL et TRUC a la plus grande aire ?

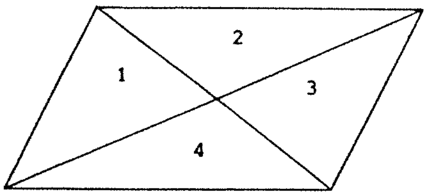


I est le milieu de [BC] Quel est le plus grand des deux triangles ABI et IAC ?

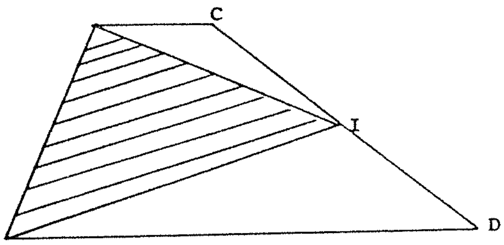


On a tracé les trois médianes du triangle PLI.

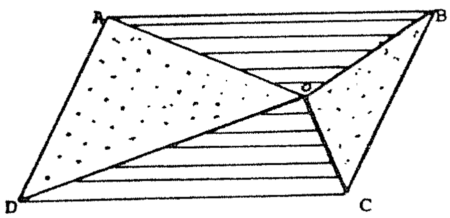
Classe du plus petit au plus grand les triangles 1, 2, 3, 4, 5 et 6.



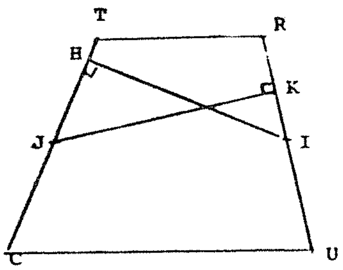
Classe du plus petit au plus grand les triangles 1, 2, 3 4 ?



Que vaut l'aire du triangle hachuré par rapport à l'aire du trapèze?
(I est le milieu de [CD]).



O est un point quelconque à l'intérieur du parallélogramme ABCD. Laquelle des deux surfaces, hachurée ou pointée, a la plus grande aire ?



TRUC est un trapèze.
I et J sont les milieux de [TC] et [RU]. Lequel des produits JK × RU et IH × TC est le plus grand ?

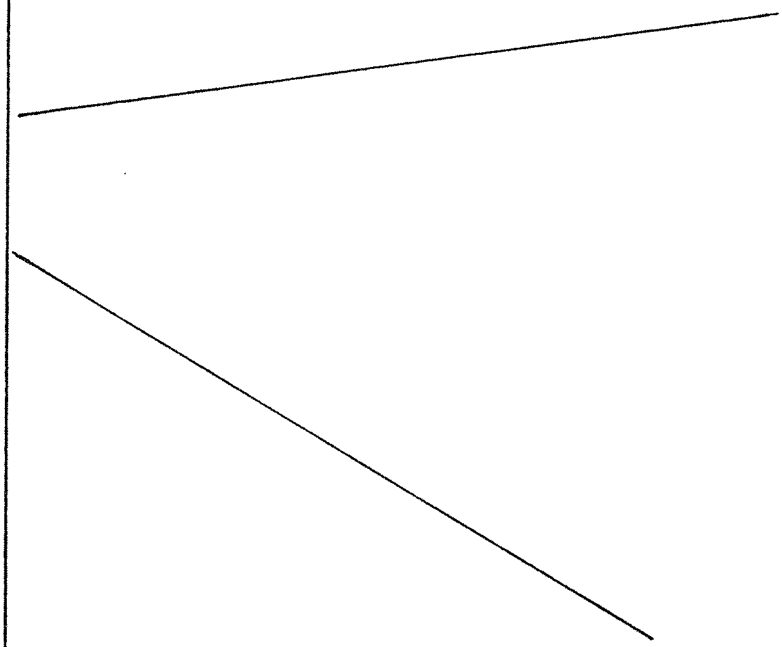
ANGLES ET DEMONSTRATIONS

2ème partie

FEUILLE N° 7

Activité 2

Donne une méthode permettant de mesurer l'angle de ces deux droites.
Ta méthode est-elle juste ?
Pourquoi ?



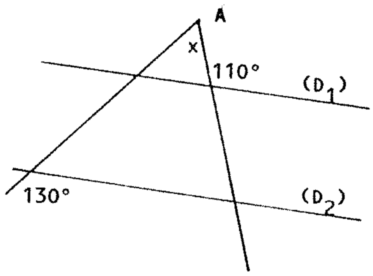
FEUILLE N° 8

Objectifs

Ex 1 - Recherche les angles égaux dans un parallélogramme. Justifie ta réponse.
Recherche les angles égaux dans un losange. Justifie ta réponse.

Ex 2 - Trace un triangle PUR rectangle en U.
Trace la hauteur passant par U.
Recherche les angles égaux. Justifie.

Ex 3 -

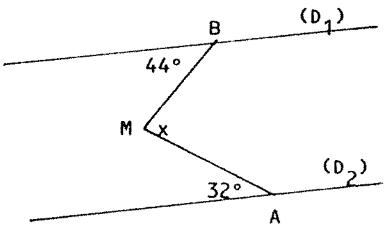


$(D_1$ // (D_2), x est la mesure de $\widehat{A}$.

Que vaut x ?

Justifie ta réponse.

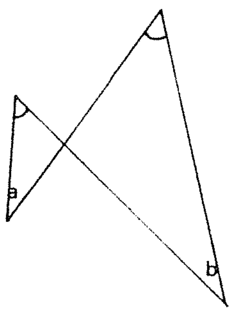
Ex 4 -



(D_1) // (D_2), x est la mesure de $\widehat{AMB}$.

Que vaut x ? Justifie.

Ex 5 -



a et b sont-ils égaux ?

Pourquoi ?

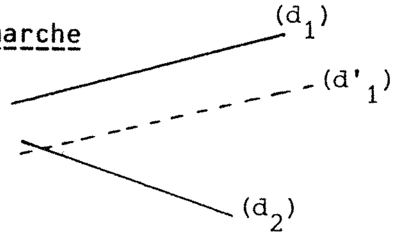
● Angles

ACTIVITE - durée 1h (feuille 7)

Elle est appréhendée comme un jeu par les élèves, chaque groupe voulant trouver plus de méthodes que le groupe voisin.

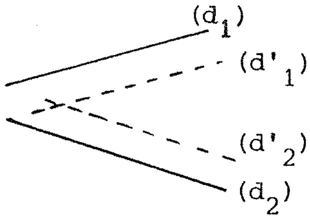
Cinq démarches sont utilisées

1ère démarche



- Tracé d'une droite (d'_1) parallèle à (d_1) et sécante à (d_2) puis mesurage de l'angle de (d'_1) et (d_2)

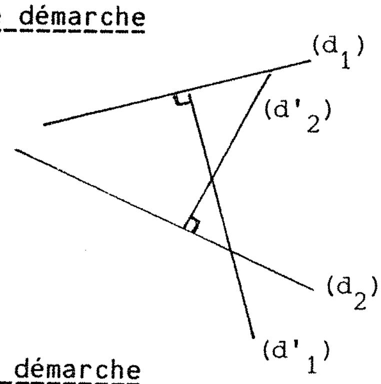
une variante



- Tracé de (d'_1) parallèle à (d_1)
- Tracé de (d'_2) parallèle à (d_2)

  et mesurage de l'angle de (d'_1) et (d'_2).

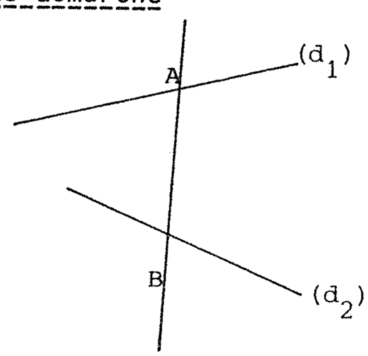
2ème démarche



- Tracé de (d'_1) perpendiculaire à (d_2)
- Tracé de (d'_2) perpendiculaire à (d_2)
- Mesure de l'angle de (d'_1) et (d'_2),

  Des hésitations entre les mesures possibles apparaissent, le plus "petit" qui semble mieux convenir est adopté.

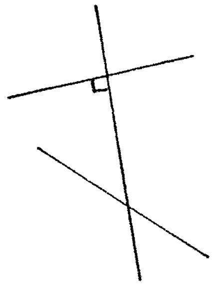
3ème démarche



Tracé d'une droite (AB) sécante à (d_1) et (d_2) qui détermine un triangle ABC, C est le sommet qui serait en dehors de la feuille.
Utilisation de la somme des angles d'un triangle.

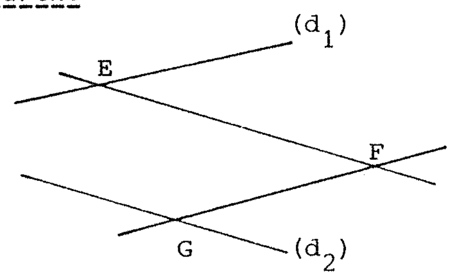
Angle = $180° - (\widehat{A} + \widehat{B})$
(Mesure de $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ puis calcul).

une variante



- Tracé d'un triangle rectangle.

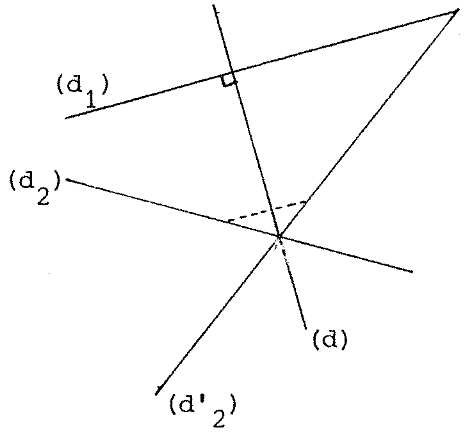
4ème démarche



- Tracés de (EF) parallèle à (d_2) et (GF) parallèle à (d_1) qui déterminent un parallélogramme EFGH (H point en dehors de la feuille).
- L'angle $\widehat{F}$ est alors mesuré et donné comme angle des 2 droites car ce sont 2 angles opposés d'un parallélogramme.

Cette propriété n'avait pas encore été rencontrée.

5ème démarche



- Tracé de la droite (d) perpendiculaire à (d_1).

  Cette droite (d) est considérée comme axe de symétrie de la figure et les élèves tracent (d'_2) image de (d_2) dans la symétrie axiale d'axe (d) en symétrisant un seul point de (d_2).
- L'angle de (d'_2) et de (d_1) est donné comme angle de (d_1) et (d_2) car la symétrie axiale conserve les angles.

SYNTHESE

Toutes les méthodes sont exposées et rassemblées au tableau par les représentants des groupes et le professeur demande de discuter les différentes méthodes. Une différence est faite entre les méthodes s'appuyant sur un résultat connu (3 et 5) et les autres.

Cette synthèse est l'occasion d'institutionnaliser d'autres énoncés (sur les angles déterminés par 2 droites parallèles et une sécante, sur les angles du parallélogramme).

Une fiche destinée à apporter une aide méthodologique (p.57) pour la résolution des exercices est établie (d'autres fiches du même type seront établies en 4ème). Elle est complétée au fur et à mesure des résolutions d'exercices.

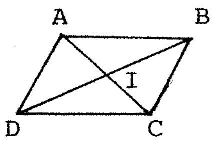
L'objectif est dégagé par les élèves et noté sur le dossier :

Je dois savoir trouver la valeur d'un angle.
Je dois savoir montrer que des angles sont égaux en utilisant les propriétés.

EXERCICES DE LA PARTIE ANGLE (feuille n° 8) durée 2 h.

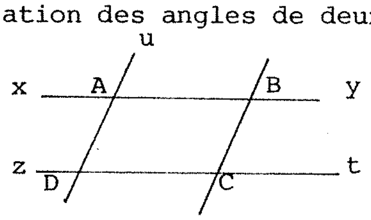
Pour la première partie de l'exercice 1 deux démarches ont été utilisées.

- Utilisation de la symétrie centrale.



I étant centre de symétrie du parallélogramme, l'angle $\widehat{DAB}$ a pour image l'angle $\widehat{BCD}$. La symétrie centrale conserve les angles. Les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ sont égaux. (La propriété admise $\widehat{A} = \widehat{C}$ est alors démontrée).

- Utilisation des angles de deux parallèles et une sécante.



. $\widehat{BCD} = \widehat{ADz}$ comme angles correspondants, le parallélisme de (AD) et de (BC) est justifié par le parallélisme des côtés opposés d'un parallélogramme.

. $\widehat{ADz} = \widehat{xAu}$ comme angles correspondants.

. $\widehat{xAu} = \widehat{DAB}$ comme angles opposés ce qui permet de conclure à l'égalité des angles opposés d'un parallélogramme.

A la demande du professeur, une comparaison des angles adjacents est réalisée. La deuxième démarche se prêtait mieux à cette démonstration. Les angles supplémentaires sont alors introduits.

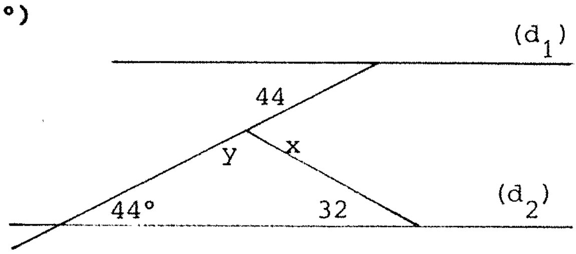
La comparaison des angles formés par les diagonales est rapidement faite.

Pour les angles du losange les élèves ont utilisé la symétrie orthogonale.

Pour l'exercice 2 une aide méthodologique du professeur est nécessaire.

Pour l'exercice 4 plusieurs démarches sont proposées par les élèves.

1°)

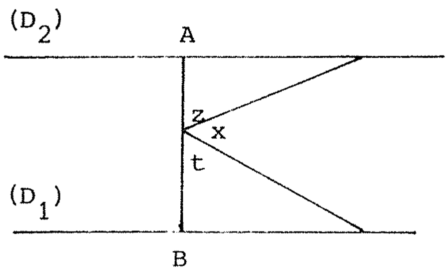


$y = 180 - (44 + 32)$

$x = 180 - y$

ils en ont conclu rapidement que $x = 44 + 32$

2°)



on cherche z dans les triangles t rectangles.

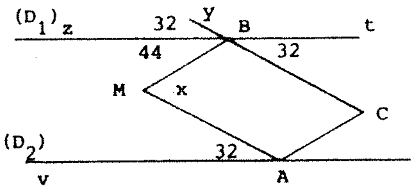
puis $x = 180° - (z + t)$.

(D_1) et (D_2) sont parallèles.

Il ne fait aucun doute pour les élèves que si (AB) est perpendiculaire à (D_1), elle est aussi perpendiculaire à (D_2).

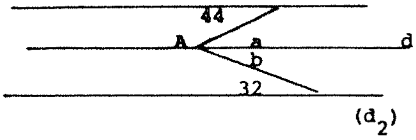
En est-on sûr ?

3°)



Tracé du parallélogramme MBCA
$\widehat{vAM} = \widehat{zBy}$ angles correspondants
$\widehat{zBy} = \widehat{tBC}$ angles opposés par le sommet
Calcul de MBC
Calcul de x avec les angles adjacents d'un parallélogramme.

4°) Proposé par un élève



Par A, je trace la parallèle à (d_1)
Je l'appelle (d).
a = 44° (alterne-interne)
comme (d) est parallèle à (d_2) on a
b = 32° et x = a + b = 76°.

Le professeur : *"est-on sûr que (d) est parallèle à (d_2) ?"*
Réponse : *"comme (d) est parallèle à (d_1) et que (d_1) est parallèle à (d_2), c'est forcé que (d) soit parallèle à (d_2), et cela se voit".*

Pour montrer qu'il faut se méfier de ce que l'on voit, le professeur passe des illusions d'optique.(IREM d'ORLEANS : illusions d'optique pour rétroprojecteur).

Ce qui a été noté

* Sur le répertoire

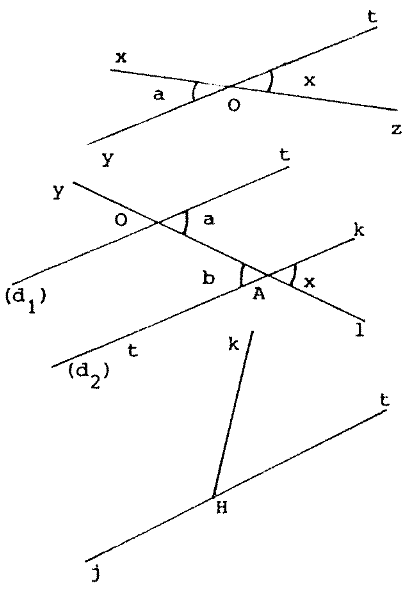
$\boxed{\text{P}}$ arallélogramme

Dans un parallélogramme,
- les angles opposés sont égaux
- les angles adjacents sont supplémentaires.

$\boxed{\text{L}}$ osange

Dans un losange,
- les angles opposés sont égaux
- les angles adjacents sont supplémentaires.
- chaque diagonale est axe de symétrie et bissectrice de 2 angles opposés.

$\boxed{\text{A}}$ ngles



- $\widehat{xoy}$ et $\widehat{toz}$ sont opposés par le sommet.

Deux angles opposés par le sommet sont égaux, a = x.

- (d_1) parallèle à (d_2)
$\widehat{tOl}$ et $\widehat{kAl}$ sont des angles correspondants. tOl et yAt sont alternes-internes.

Deux angles correspondants sont égaux.

Deux angles alternes-internes sont égaux.

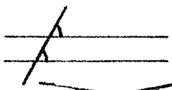
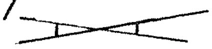
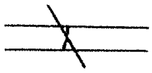
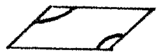
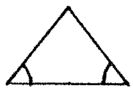
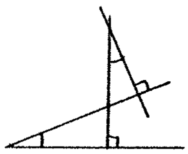
- jHk et kHt sont supplémentaires.

La somme de deux angles supplémentaires vaut 180°.

FICHES METHODOLOGIQUES

Comment savoir si deux angles sont égaux ?

- en les calculant
  . somme des angles d'un triangle
  . supplémentaires : somme = 180°

- en regardant s'ils sont :
  . correspondants 
  . opposés par le sommet 
  . alternes - internes 
  . opposés dans un parallélogramme 
  . symétriques
    - par symétrie orthogonale
    - par symétrie centrale
  . situés à la base d'un triangle isocèle 
  . dans un triangle équilatéral
  * . à côtés parallèles 
  * . à côtés perpendiculaires 

Comment savoir si deux droites sont perpendiculaires ?

- En sachant que l'une est parallèle, et l'autre perpendiculaire, à une même droite.

Comment savoir si deux droites sont parallèles ?

- En montrant qu'elles sont parallèles à une même troisième.

* Il est précisé que pour ces deux cas il faut s'assurer que les angles sont soit tous les deux aigus, soit tous les deux obtus.

<u>A titre d'information nous mentionnons d'autres situations d'angles et démonstrations.</u>

Ex 1 - Trace un polygone régulier convexe. Que vaut la somme des angles ?

Peux-tu généraliser ?

Ex 2 - Construis ABC tel que $\widehat{BAC} = 60°$

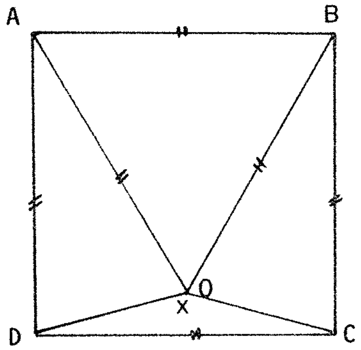
A l'extérieur du triangle, place M et N tels que les triangles ABM, ACN soient équilatéraux.

Que peux-tu dire des points A, N et M ? Justifie ta réponse. (MB) et (CN) se coupent en P.

Que penses-tu du triangle MNP ? Pourquoi ?

Comment en être sûr ?

Ex 3 -



x est la mesure de $\widehat{COD}$

Que vaut x ?

Explique pourquoi.

Ex 4 - Trace un triangle isocèle LOK tel que :

LO = KO

LK = 5cm

$\widehat{KOL} = 35°$

Place M et N extérieurs au triangle tels que MOL et NOK soient des triangles équilatéraux. Les droites (ML) et (KN) se coupent en C.

Que vaut $\widehat{LCK}$? Dis pourquoi.

Ex 5 - Trace un parallélogramme ABCD.

Trace les bissectrices des angles $\widehat{BCD}$ et $\widehat{ABC}$. Elles se coupent en I. Que vaut $\widehat{BIC}$? Explique.

Ex 6 - Trace un parallélogramme ABIC

Trace la bissectrice de l'angle $\widehat{IAC}$ et sa parallèle (d) passant par I.

Montre que (d) est la bissectrice de $\widehat{BIA}$.

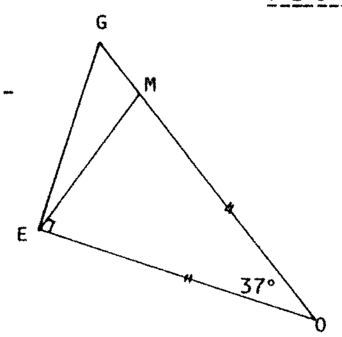
TEST

3ème partie

FEUILLE N°9

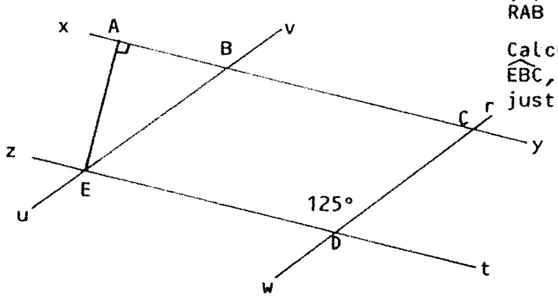
TEST

Ex 1 -



Le triangle OME est isocèle en O, l'angle $\widehat{GEO}$ est droit, l'angle $\widehat{MOE}$ mesure 37°. Calcule la mesure de chacun des angles $\widehat{EMO}$ $\widehat{GEM}$ et $\widehat{EGM}$. Pour chaque calcul d'angle, explique ta méthode et dis pourquoi elle est bonne.

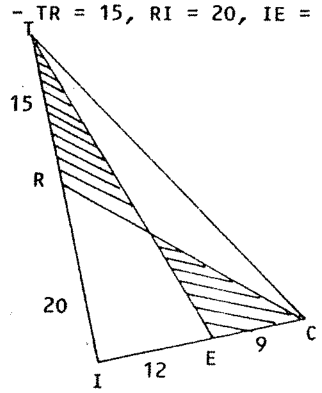
Ex 2 -



On a (xy)//(zt), (uv)//(rv), $\widehat{EDC}$ = 125° $\widehat{RAB}$ est droit.

Calcule la mesure de chacun des angles $\widehat{EBC}$, $\widehat{BED}$, $\widehat{ABE}$. Détaille chaque calcul et justifie-le avec précision.

Ex 3 - TR = 15, RI = 20, IE = 12, EC = 9, $\widehat{TIC}$ est droit.

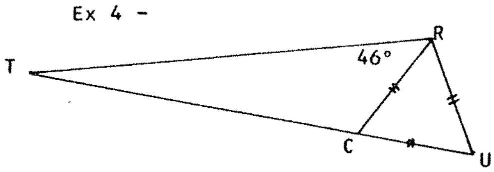


a) Calcule l'aire du triangle TIE.

b) Calcule l'aire du triangle RIC.

c) Lequel des deux triangles hachurés a la plus grande aire ? Explique pourquoi.

Ex 4 -

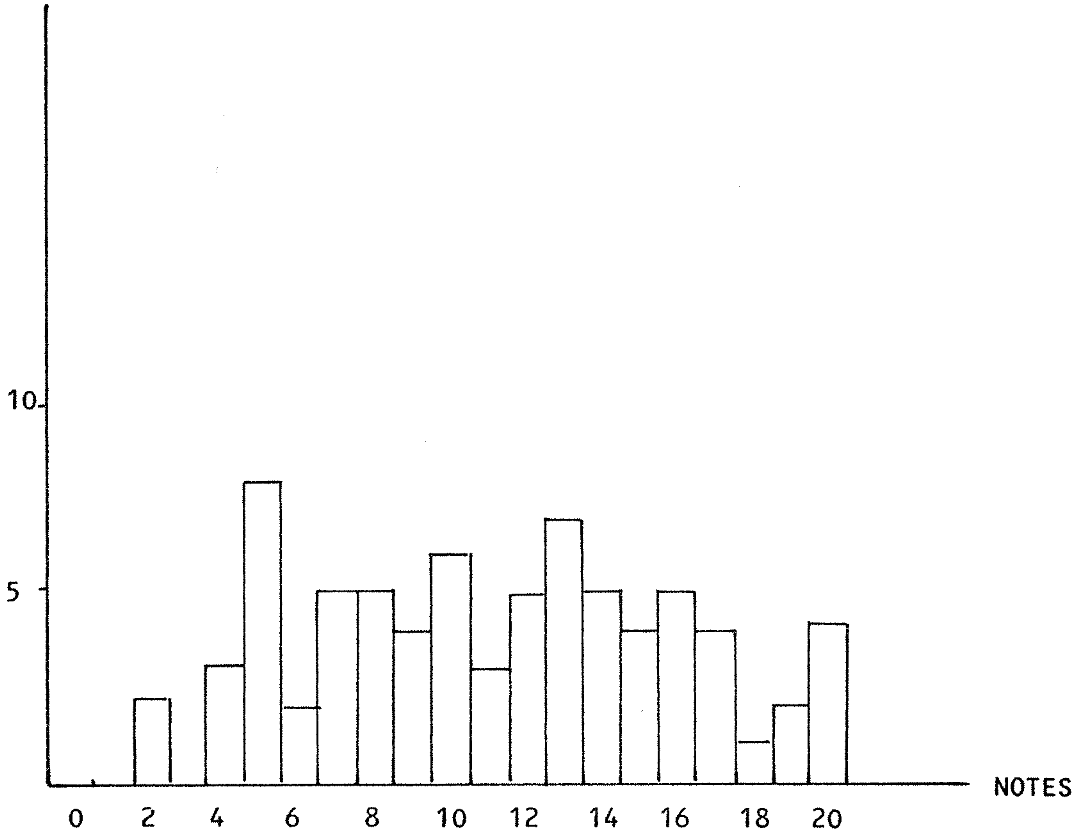


RUC est un triangle équilatéral, $\widehat{TRC}$ = 46° Calcule la mesure des angles $\widehat{CRU}$, $\widehat{RTC}$. Détaille chaque calcul d'angle et justifie-le avec précision.

T E S T - 5ème
(feuille n°9)

Nombre d'élèves

Moyenne : 11,32



Pourcentages de réussite (réponses bien justifiées)

EX. 1			EX. 2			EX. 3			EX. 4	
$\widehat{EMO}$	$\widehat{GEM}$	$\widehat{EGM}$	$\widehat{EBC}$	$\widehat{BED}$	$\widehat{ABE}$	aire TIE	aire RIC	parties hachurées	$\widehat{CRU}$	$\widehat{RTC}$
56%	35%	54%	65%	43%	43%	79%	83%	23%	75%	48%

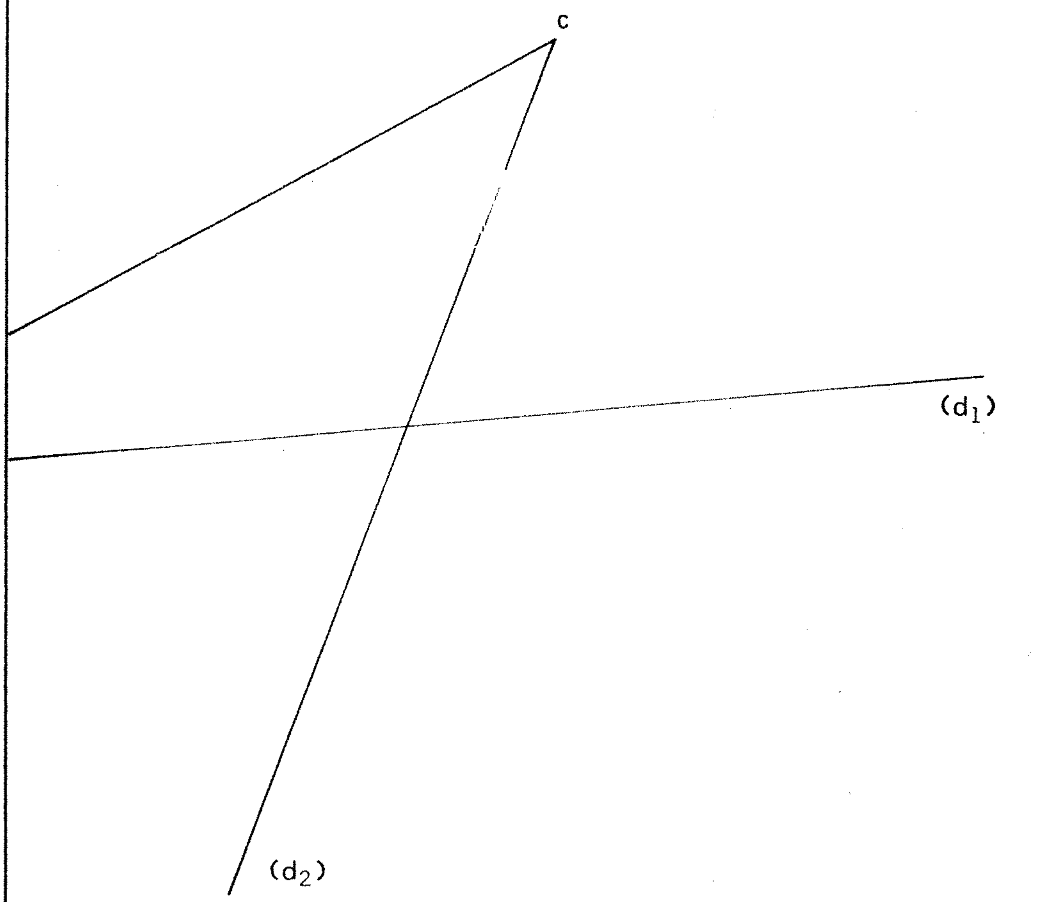
UTILISATION DES ENONCES POUR PROUVER

4ème partie

FEUILLE N° 10

Autour du parallélogramme

Activité : un parallélogramme a pour sommet C et pour diagonales (d_1) et (d_2). Donne une méthode pour déterminer le périmètre du parallélogramme.
Justifie ta méthode.



FEUILLE N° 11

Objectifs :

Les exercices 1, 2, 3, 5, 6 et 8 sont obligatoires.

Ex 1 - Dessine deux segments [TU] et [RC] tels que :

TU = 5

RC = 8,2

[TU] et [RC] aient le même milieu I

$\widehat{TIR} = 35°$

Laquelle des deux longueurs TR et CU est la plus grande ? Pourquoi ?

Ex 2 - Trace un parallélogramme BACI tel que BA = 7cm ; AC = 2,8cm ;

ABI = 45°. Donne ton programme de construction et justifie-le. Place M le milieu de [BA].

Trace le symétrique de BACI par rapport à (BA). Appelle I' et C' les symétriques de I et C.

Trace [MI] et [MI']. Repasse en noir tous les segments sauf [CI] et [C'I'].

Laquelle des longueurs MB et MA te semble la plus grande ? En es-tu sûr ?

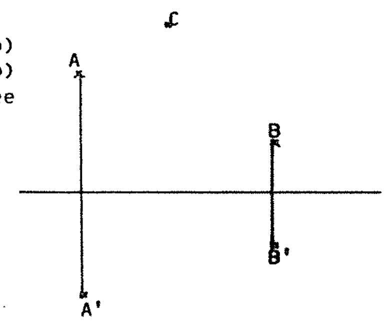
Ex 3 - Trace un parallélogramme XYZT tel que XY = 7,2cm ; XT = 3,5cm ; $\widehat{XYZ} = 41°$.

La perpendiculaire à (XY) passant par le milieu I de [XY] coupe (ZT) en A.

Trace la parallèle à (XT) passant par A.

Laquelle des deux longueurs AX et AY est la plus grande ? Explique.
Détermine le périmètre et l'aire du quadrilatère XYZT.

Ex 4 - A et A' sont symétriques par rapport à (D)
B et B' sont symétriques par rapport à (D)
Construis en utilisant la règle non graduée le symétrique de C.
Justifie ta réponse.



FEUILLE N° 12

Ex 5 - Trace un cercle de rayon 5cm. Dessine deux diamètres. Ils coupent le cercle en C et B pour le premier **en O et I pour le deuxième**

Que dire de COBI ? Dis pourquoi.

Ex 6 - Trace un triangle isocèle en I tel que EQ = 6,3cm et $\widehat{EIQ} = 50°$.
Trace M le symétrique de I par rapport à (QE).
Que penses-tu de MEIQ ?
Justifie ta réponse.

EX 7 - Trace un cercle de centre O et un diamètre [PR]. A est un point du cercle.
Trace les triangles APR, OPA.
Combien vois-tu de triangles isocèles ? Justifie ta réponse.
Que penses-tu de PAR ? Dis pourquoi.

EX 8 - Dessine cinq points R, H, O, M, B tels que :
. B soit le milieu de [RO] et [HM]

. RO = 5cm et HM = 9cm

. (RO) soit perpendiculaire à (HM).

a) Que dire de RHOM ? Pourquoi ?
b) Quel est son périmètre ?
c) Quelle est son aire ?

• Utilisation des énoncés pour prouver

ACTIVITE - 1/2 heure (feuille n° 10)

Il y a eu deux types de comportement :

1 Les élèves qui ont bien compris le texte et ont tracé le parallélogramme puis donné son périmètre, en justifiant leur construction par :

- un parallélogramme a ses diagonales de même milieu : M est le milieu des diagonales.
- les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles.

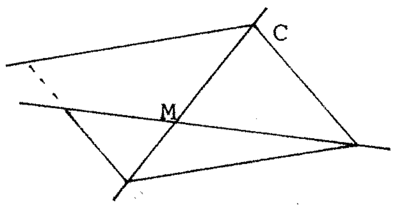
La détermination du périmètre est justifiée par l'énoncé :

"dans un parallélogramme les côtés opposés sont de même longueur."

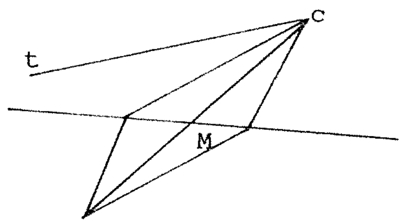
$$p = (FE + EC) \times 2.$$

Le travail fait dans les dossiers précédents sur la preuve (en particulier sur les aires) explique qu'ils hésitent à mesurer pour donner une valeur de p.

2 Les élèves qui n'ont pas bien compris le texte et le dessin. Les erreurs sont de 2 types.



M n'est pas à l'intersection des diagonales.



M est le centre du parallélogramme mais (ct) n'est pas pris comme côté.

Quelques-uns ont peut-être été gênés par le fait que le dessin restait incomplet. Ils voulaient le parallélogramme en entier sur la feuille.

Objectifs : savoir construire, observer, prouver une réponse en utilisant des énoncés.

EXERCICES durée 2h (feuilles 11 et 12).

Exercice 1 : pour prouver leur réponse les élèves utilisent les cas d'égalité des triangles puis se voyant obligés de chercher une autre preuve justifient

* par le parallélogramme
* par la symétrie centrale.

On peut cependant se demander, si les cas d'égalité des triangles ne sont pas des théorèmes en acte ?

Exercice 2 : la construction du parallélogramme se révèle pour certains difficile.

$\widehat{ABI} = 135°$ au lieu de 45° (utilisation du rapporteur)

$\widehat{BAC} = 45°$ confusion entre les angles.

La rédaction des programmes de construction s'avère pénible. Les élèves ne veulent pas se donner la peine de rédiger leur méthode et de la justifier.

Exercice 3 : la justification par : (AI) est la médiatrice de $[XY]$ et A lui appartient, n'est presque jamais apparue.
La preuve est apportée par la symétrie orthogonale et la conservation des distances.
Les élèves calculent le périmètre car il est connu exactement (les côtés sont donnés dans le texte) mais écrivent l'aire sous la forme :

$\frac{XY \times h}{}$ ou $7,2 \times h$ (h : hauteur). Une distinction entre les valeurs exactes et approchées doit être faite.

Exercice 5 : pas de difficulté, les élèves pensent aux diagonales de même milieu et isométriques.

Exercice 8 : la construction se déroule sans difficulté. Elle est justifiée par les propriétés des diagonales. La remarque sur l'aire et le périmètre est la même qu'à l'exercice 3.

Conclusion

A la suite de cet apprentissage spécifique nous sommes unanimes pour dire que l'attitude des élèves a changé : ils distinguent correctement la vue, la mesure et les arguments internes à la figure. La plus grande part de cet apprentissage se fait oralement ce qui est logique puisque la preuve naît du débat entre élèves. Le passage à l'écrit est difficile et nécessite un apprentissage.
Cependant le contrôle est écrit et individuel, il y a donc rupture.
Ceci explique en partie les résultats moyens obtenus. Comment améliorer ?
Peut-être en instaurant d'autres types de contrôle (oral ou écrit individuel après débat en groupe...) ou en insistant sur l'écrit (mais n'est-ce pas empiéter sur le programme de 4ème ?).

BIBLIOGRAPHIE

1 - Preuve et démonstration en mathématiques au collège.
N. BALACHEFF
Recherche en didactique des Mathématiques Vol. 3.3.

2 - Pour apprendre à démontrer - géométrie de 4ème
J.P. GUICHARD, D. GAUD.
IREM de Poitiers

3 - Illusions d'Optique pour rétroprojecteur
IREM d'Orléans

4 - Reproduction de figures planes en 6ème
IREM de Poitiers

5 - Aires et périmètres du CM à la seconde
IREM de Poitiers

6 - 250 problèmes pour nos élèves
IREM de Lyon

7 - Problèmes 6ème - 5ème
IREM de Lyon

8 - Calcul littéral au collège
Compte rendu de l'expérimentation en cinquième
IREM de Poitiers

9 - Suivi scientifique 1985-1986 - Bulletin Inter-IREM
Conception de l'apprentissage P.218 - 244

10 - Petit x numéros 4, 6 et 8
IREM de Grenoble

11 - 30 problèmes glanés par les élèves de 6ème - 5ème
IREM de Lyon