UNIVERSITÉ DE POITIERS

Institut de Recherche
sur l'Enseignement des Mathématiques

MAI 1986

* * *

Fascicule n° 1

LES FRACTIONS
en sixième

COMPTE RENDU DE L'EXPÉRIMENTATION DES PROGRAMMES 1986

G. AURIAULT
D. GAUD
M. MAROT
C. ROBIN

SOMMAIRE

INTRODUCTION

Nous présentons dans ce qui suit les travaux effectués en 6ème sur la notion de fraction et la liaison fractions-décimaux.

Conditions d'expérimentation

Cinq "sixièmes" sont concernées dont quatre réparties en deux modules de deux classes à horaires en parallèle ce qui permet le cas échéant de répartir les élèves en groupes de niveau.

Cette partie du programme a été traitée au mois de décembre et terminée début janvier. Elle faisait suite à des constructions géométriques et à la symétrie orthogonale. Elle précédait des situations-problèmes faisant intervenir le sens des opérations ainsi que les techniques opératoires (+,-,×) sur les décimaux (revues, si besoin était, à l'aide des fractions décimales).

Dans le courant de l'année scolaire nous reviendrons sur l'écriture $\frac{a}{b}$ (dans les équations et dans les situations relevant de la proportionnalité).

Présentation du document

Il nous a semblé important de joindre à notre expérimentation des repères qui nous ont guidés dans nos choix:

- repères historiques
- analyse des difficultés sur les fractions et décimaux
- présentations des fractions et décimaux dans les manuels de cours moyen.

POINTS DE REPERE

Les fractions étaient connues dans l'antiquité. Les Egyptiens utilisaient des fractions de numérateur 1 (sauf $\frac{2}{3}$)....

Repères historiques sur les fractions et décimaux.

Egyptiens :

Le système de numération est à base dix, non positionnel. Le calcul arithmétique repose sur la possibilité de multiplier ou de diviser par 2. (Cela repose sur le fait que tout nombre a une écriture en base 2).

Ainsi :

24 × 37 donne		825 : 33 donne	
1	37	1	33
2	74	2	66
4	148	4	132
8	296	8	264
16	592	16	528
24	888	25	825

Ce principe élimine l'apprentissage des tables de multiplication. Le même principe de dédoublement était "en vigueur" sur les fractions qui étaient utilisées pour la mesure de grains, de liquides...

Les fractions les plus couramment utilisées étaient:

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$.

Toute fraction devait être exprimée comme somme de fractions unitaires. (Sauf $\frac{2}{3}$).

La réduction des fractions $\frac{2}{i}$ avec i impair ($5 < i < 101$) a posé de gros problèmes. De ce fait il existait des tables ; l'une d'elles est contenue dans le papyrus de Rhind.

LES "PRINCIPES" (SELON UN HISTORIEN).

De toutes les égalités possibles, celles qui possèdent le plus petit nombre de fractions sont préférées. Aucun dénominateur ne doit être supérieur à 1000.

On préfère une égalité de 2 termes à une de 3 termes etc...

Les fractions unitaires sont placées par ordre décroissant sans répétition.

La première fraction est la plus petite possible mais on accepte une fraction légèrement supérieure si ceci permet de réduire considérablement la dernière fraction.

Ainsi :

$$\frac{2}{31} = \frac{1}{31} + \frac{1}{31}$$

$$= \frac{1}{62} + \frac{1}{62} + \frac{1}{31}$$

$$= \frac{1}{124} + \frac{1}{124} + \frac{1}{62} + \frac{1}{31}$$

$$= \frac{1}{124} + \frac{1}{124} + \frac{1}{62} + \frac{1}{155} + \frac{1}{155} + \frac{1}{155} + \frac{1}{155} + \frac{1}{155}$$

$$= \frac{1}{124} + \frac{1}{155} + \frac{1}{124} + \frac{1}{62} + \frac{1}{155} + \frac{1}{155} + \frac{1}{155} + \frac{1}{155}$$

$$= \frac{1}{124} + \frac{1}{155} + \frac{1}{20}$$

$$= \frac{1}{20} + \frac{1}{124} + \frac{1}{155}$$

Pour ces calculs ils disposaient de règles qui étaient connues des scribes :

Exemples : $\frac{1}{14} + \frac{1}{28} + \frac{1}{56} = \frac{1}{8}$

Les 2/3 de toute fraction unitaire sont égaux à la somme de 2 fractions unitaires dont les dénominateurs sont respectivement 2 fois le dénominateur de la fraction et 6 fois le dénominateur de la fraction.

Exemples : $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{5} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$

Babyloniens :

Les Babyloniens utilisaient des fractions sexagésimales.

Le système de numération en base 60 (système mixte car 10 joue un rôle privilégié) est positionnel bien qu'imparfait. Les Babyloniens utilisaient des tables de réciproques, exprimées en système sexagésimal, ainsi :

$$\frac{1}{8} = 0\ ;\ 7;\ 30 = \frac{7}{60} + \frac{30}{60^2}\ ,$$

ceci dans le but de ramener une division à une multiplication.

Pour 47 : 8 on cherche le réciproque* de 8 puis on fait :
40 . 7.30 + 7 . 7.30 en utilisant les tables de multiplication.

*A condition que $\frac{1}{n}$ puisse s'exprimer à l'aide d'un nombre fini de fractions séxagésimales.

Mathématiques arabes :

A l'aube de l'an mil apparaissent chez les mathématiciens arabes, les fractions décimales qui seront théorisées et utilisées par Al-Kaši.

Vers 352, AL-UQLIDISI prenant en compte les résultats des arithmétiques indienne, grecque et arabe préconise l'usage des chiffres à la place des lettres et décrit des résultats avec des décimaux.

AL-KAŠI (mort en 1430) se crédite de l'invention des décimaux. Il signale (dans une lettre) qu'il a découvert des fractions intéressantes qui sont celles dont le dénominateur est une puissance de dix, nommées fractions décimales.

Il adopte pour notation 358/501 qui se lit : trois cent cinquante huit unités 501 dixièmes du troisième ordre.

Sur la multiplication des nombres fractionnaires il propose d'agir comme avec des nombres entiers, puis une fois le calcul effectué, de retrouver la partie entière à l'aide de la règle :
$10^{-n} \times 10^{-m} = 10^{-n-m}$.

Il remarque la similitude avec le système des astronomes (décrit au XIème siècle) qui est un système complet en base 60 et insiste sur la facilité d'utilisation.

Il semble que les tentatives d'introduction du système des fractions décimales se rencontrent bien avant AL-KAŠI.
On fait état de leur utilisation en Chine. Il en avait certainement entendu parler ! Ce qui est certain c'est qu'il est le premier à les avoir expliquées et utilisées.

Stevin :

Il ne semble pas qu'il ait été influencé par Al-Kaši.
S'inspirant de la notation de Bombelli qui notait les polynômes (3 ③ + 5 ② + 136 ⓪ pour $3x^3 + 5x^2 + 136$) , il adopte

pour les décimaux la notation :

136 ⓪ 2 ① 3 ② pour 136,32.

L'adoption de la virgule ou du point sera l'oeuvre de MAGINI et CLARIUS 1532 et 1593.

Déjà Viète, 5 ans avant la Disme, avait encouragé l'usage des fractions décimales. Ainsi écrit-il 125,992, 106 pour 125992,106. Stevin qui ne qualifie pas sa trouvaille d'invention "tellement c'est simple" montre dans la Disme tout l'avantage que l'on pourrait tirer de la pratique des décimaux. Il décrit l'essentiel des opérations que la structure des décimaux permet. Stevin considérait que l'unité était nombre (divisible comme les autres unités) et que tous les problèmes de lignes devaient être traités comme des problèmes de nombres. Pour lui, seuls ces problèmes avaient un sens.

Utilisation qui se répand très lentement.

Il faut 3 siècles pour préciser ce que sont ces nombres que l'on approche par des décimaux(réels) et 2 siècles pour étendre leur usage hors des mathématiques.

En 1795, le système métrique est adopté (le but est politique : unifier les unités régionales). Pour LAPLACE l'intérêt pédagogique est important même s'il bouleverse les habitudes des maîtres.

Fractions et proportions :

Chez Euclide, on trouve 2 définitions :

- Des nombres ont le même rapport lorsque le premier est le même multiple du second que le troisième l'est du quatrième.

Dans le livre II attribué à Eudoxe il n'est plus question de couples d'entiers mais de grandeurs:

- soient 4 grandeurs A, B, C, D de même nature, on dit que A et B sont de même raison que C et D lorsque pour tous les entiers n et m on a les implications suivantes :

Si $nA > mB$ alors $nC > mD$

Si $nA = mB$ alors $nC = mD$

Si $nA < mB$ alors $nC < mD$

Ces deux définitions se rejoignent si A et B sont commensurables.

Les mathématiciens arabes vont s'inspirer d'Euclide et modifier l'idée de rapport : si A et B sont 2 grandeurs de même espèce, $\frac{A}{B}$ désigne la mesure de A, B étant pris pour unité. Comment obtient-on une telle mesure ? Cela n'est pas précisé mais permet de faire apparaître le rapport comme nombre.
Dans la théorie d'Euclide ce n'est pas l'aspect nombre qui intervient mais l'aspect égalité et multiplication de rapports.

Pourquoi l'invention a t-elle été longue ?

LE PROBLEME DE LA BASE DIX : les décimaux ne pouvaient être utilisés que si l'on avait conçu un système de numération à base dix positionnel. Or dans le mondedu XVe siècle la base soixante ainsi que le système additif. sont très utilisés.

LE CONCEPT DU NOMBRE : les arabes jusqu'au Xe siècle ne concevaient le nombre que comme multiple de l'unité, celle-ci n'étant pas considérée comme un nombre. Les fractions sont considérées comme opérateurs sur les nombres et non pas comme des nombres:

Un quart n'est pas une fraction d'unité mais une partie de l'unité.

On peut y chercher des raisons théologiques et philosophiques. Cette remise en question commencera vers le Xe siècle avec AL FARABI qui est le premier à faire correspondre aux grandeurs rationnelles des nombres rationnels et aux grandeurs irrationnelles des nombres irrationnels. Au XXe siècle, on conçoit un nombre non comme une ligne, une surface... mais comme une grandeur que l'esprit abstrait de tout et qui appartient au nombre.

LE POIDS DES HABITUDES : les techniques de calcul étaient bien en place et difficiles à changer, les fractions sexagésimales étaient d'un usage trop répandu pour être abandonnées (les mesures d'angles, du temps en sont les preuves...).

BIBLIOGRAPHIE

1 - M. ABDELJAOUED -
Fragments d'histoire des mathématiques - APM n° 41

2 - J.P. COLETTE
Histoire des Mathématiques - Ed. Renouveau Pédagogique - diffusion Vuibert.

3 - Les obstacles épistémologiques et les problèmes en Mathématiques
Recherche en didactique des Mathématiques - Volume 4.2. - La Pensée sauvage éditions.

4 - Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire - Cycle Moyen T.2. Ermel.

5 - La rigueur et le calcul - Cédic

6 - La Disme - Stévin - Irem de Paris Sud.

7 - Histoire des Mathématiques pour les Collèges - Cédic.

Analyse des difficultés

Difficultés rencontrées dans l'enseignement des décimaux

DIFFICULTE n° 1 : les décimaux ne sont pas perçus comme de nouveaux nombres. Les règles qui sont en vigueur dans $\mathbb{N}$ sont généralisées ainsi :

- Intercaler un décimal entre 7,2 et 7,3 est impossible (on ne peut pas intercaler un entier entre 72 et 73!).

- Pour comparer deux décimaux, on compare leur longueur : $13,452 > 13,6$ car $13452 > 136$ $(452 > 6)$.

- Les techniques opératoires sont les mêmes que pour les entiers :

$$12,5 + 13 \text{ sera posée } \begin{array}{r} 12,5 \\ +\ 1\ 3 \\ \hline \end{array}$$

- Les ordres de grandeur des décimaux ne sont pas maîtrisés: la distinction entre 2,4 ; 24 ; 0,24 n'est pas faite.

DIFFICULTE n° 2 : les décimaux sont perçus comme deux entiers accolés. Dans ce cas la partie entière peut être oubliée ainsi : $702,3 < 4,732$ car à la lecture 3 est inférieur à 732

$$2,3 \times 4,2 = 8,6 \quad \text{ou} \quad (1,2)^2 = 1,4 \quad \text{ou} \quad (0,2)^2 = 0,4$$
$$\text{ou} \quad 4,7 + 2,9 = 6,16$$

DIFFICULTE n° 3 : le sens des opérations qui peut être acquis avec des entiers (multiplication notamment comprise comme additions répétées $3 \times 5 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3$) est remis en cause avec les nombres décimaux. Quel sens donner à $3,2 \times 5,4$?

Les mêmes problèmes réussis avec deux données entières conduisent à un échec important quand ces données sont décimales.

Présentations des décimaux rencontrées dans les manuels à l'école élémentaire.

Pour comprendre ces difficultés on peut s'interroger sur les différentes approches des décimaux à l'école élémentaire, en voici quelques-unes :

a) Recodage d'un nombre complexe

L'accent est mis d'emblée sur le système métrique (ou sur tout autre système structuré d'unités). Ainsi 1m 15cm s'écrit 1,15m. On procède donc par recollement d'entiers. Certaines règles de recollement ne sont pas explicitées, ainsi on n'écrit pas 1m 125cm , 1,125m !

Ce système d'écriture serait le même avec des unités telles que la toise, le pied, le pouce. Une mesure de 1 toise, 4 pieds, 8 pouces pourrait être notée :

1	4	8
↑	↑	↑
toise	pieds	pouces

Il serait d'ailleurs préférable de dire que l'on obtient un nombre à virgule plutôt qu'un nombre décimal avec une telle présentation.

On peut noter que le décimal ne peut être ici que concret, le passage au nombre abstrait se fait alors par "évaporation" de l'unité.
(Ce type de présentation était souvent en vigueur avant les années 60

b) Recodage d'un entier

La virgule intervient pour repérer la nouvelle unité, 10850 s'écrit 10,850 si on prend le millier comme nouvelle unité.
(Présentation préconisée dans les années 70

c) Par des activités de mesurage

On mesure une table avec une unité U, on reporte cette unité jusqu'à ce que cette unité ne loge plus entièrement. On exprime le reste en fraction de U. La fraction est donc une partie de l'unité ; elle opère sur celle-ci. La situation est alors mathématisée sur la droite graduée et après un court travail sur les fractions ordinaires (7 à 8 leçons, 1 leçon = 1 jour) les fractions décimales interviennent et sont codées avec les nombres décimaux.

d) Par l'utilisation d'opérateurs $x10^n$ et $:10^m$

L'utilisation des opérateurs du type $:10^m$ sur $\mathbb{N}$ amène la construction de nouveaux nombres qui sont décimaux.

Il est difficile de préciser la meilleure méthode, on peut constater que les deux premières présentations conduisent aux difficultés 1 et 2 précédemment évoquées alors que la méthode d) semble très formelle.

BIBLIOGRAPHIE

1 - BROUSSEAU - Problèmes de l'enseignement des décimaux.
Recherches en didactique des mathémathiques - Volume 1.1. et 2.1. - La pensée sauvage.

2 - ERMEL - Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire.
Cours moyen T.2. - Hatier.

3 - COMITI-NEYRET - A propos des problèmes rencontrés lors de l'enseignement des décimaux au C.M. - Grand N n° 18 - IREM de Grenoble.

Les différents sens de l'écriture $\frac{a}{b}$.

L'écriture $\frac{a}{b}$ recouvre plusieurs aspects qui, s'ils suivent souvent les mêmes règles de traitement, recouvrent des notions différentes.

a) L'aspect quotient, nombre rationnel

$\frac{a}{b}$ est l'écriture du nombre qui multiplié par b donne a.
(a et b appartiennent à $\mathbb{D}$, $b \neq o$)

b) La fraction d'un tout pris comme unité

Il s'agit de l'aspect utilisé en partie dans la présentation c) des nombres décimaux.

Exemple : prendre les 2/3 d'un disque, on divise le disque en 3 parts superposables et on en prend 2 parts : "le tiers" constitue une nouvelle unité.

Dans cet aspect, il y a une référence à la notion d'opérateur (prendre les 3/4 d'une tarte), il y a aussi un aspect nombre-mesure (on exprime à l'aide d'une unité -(la tarte)- une partie de celle-ci).

Dans le cas où le numérateur est supérieur au dénominateur il y a aussi une idée de rapport.

c) La fraction opérateur

Il s'agit de situation de proportionnalité, la fraction caractérisant l'application linéaire ou la composition d'applications linéaires ($- \times 3 \rightarrow \; :2 \rightarrow$). Il s'y rattache le calcul du pourcentage de quelque chose.

d) Le rapport

Le rapport exprime une comparaison entre deux quantités en présence : dans une recette il faut trois volumes de farine pour deux volumes de sucre. Le rapport des deux volumes est $\frac{3}{2}$, plutôt lu 3 pour 2).

On peut caractériser ce rapport par le quotient mais ce quotient en général est inutile car inopérant. Cet aspect de l'écriture $\frac{a}{b}$ n'est pas l'objet d'un enseignement même dans les nouveaux programmes. On peut le regretter car c'est cet aspect qui intervient dans l'énoncé de Thalès :

$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$. Cependant l'expression "rapport de projection" est conservée dans les programmes.

La notion de rapport peut aussi aider à faire comprendre certaines opérations sur les écritures $\frac{a}{b}$. Voici un exemple tiré du cahier n° 3030 Permama, Mélange de peinture :

Mélange	quantité de peinture rouge (en décilitres)	quantité de peinture blanche (en décilitres)	Rapport
n° 1	7	7	7:7
n° 2	7	6	7:6
n° 3	4	4	4:4
n° 4	21	19	21:19
n° 5	23	15	23:15
n° 6	20	12	20:12
n° 7	15	17	15:17
n° 8	21	18	21:18
n° 9	17	19	17:19
n° 10	23	21	23:21

Ainsi :

. deux mélanges ont le même ton si les quantités sont dans le même rapport.

$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ ... (c'est-à-dire deux fois plus de rouge et 3 fois plus de blanc).

. Si deux mélanges donnent le même ton, le ton obtenu en mettant ces deux mélanges ensemble est le même. Autrement dit : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.

. Si des deux mélanges $\frac{a}{d}$ et $\frac{c}{d}$ le premier est plus accentué c'est-à-dire si $\frac{a}{d} > \frac{c}{d}$ alors c'est équivalent à $a > c$ etc...

Cette utilisation des rapports est courante dans la vie (taux, pourcentages...)

e) L'aspect couple d'entiers

On emploie couramment la notation $\frac{a}{b}$ pour signifier un couple d'entiers.

Exemple : Pierre a $\frac{8}{12}$ en algèbre et $\frac{4}{8}$ en géométrie il a $\frac{8}{12} + \frac{4}{8} = \frac{12}{20}$ à son devoir.

Les fractions au Cours moyen

Les programmes du Cours moyen précisent que les élèves doivent découvrir de nouveaux nombres : décimaux et fractions. Deux présentations :

1. Les décimaux sont présentés par des activités de mesurage (présentation c) des décimaux) et donc à partir des fractions. L'utilisation des fractions en tant que nombre-mesure est rapide et pratiquement réduite au partage de segments (pas de surfaces). Le passage de la fraction décimale $(2 + \frac{3}{10})$ à l'écriture décimale se fait très rapidement et n'est pas revu dans le courant de l'année.

Des situations de proportionnalité sur des tableaux introduisent des opérations qui s'écrivent : $- \times \frac{2}{3} \rightarrow$ ($- \times 2$ suivi $- :3 \rightarrow$) sans qu'aucun lien ne soit fait entre la fraction et l'opération.

2. Les fractions sont introduites par les opérateurs (caractérisant une fonction linéaire entre deux ensembles de nombres).

Les décimaux sont alors, soit présentés comme des opérateurs particuliers, soit indépendamment des fonctions comme recodage d'un entier (modèle b,.)

NOTRE POINT DE VUE

Quel aspect de l'écriture $\frac{a}{b}$ faut-il privilégier au collège ?

Il nous semble que tous les aspects de l'écriture $\frac{a}{b}$ sont utiles. Il faut apprendre à l'élève à reconnaître l'aspect qu'il faut adopter suivant chaque situation.

Il importe donc de travailler, au collège, sur les 4 aspects de l'écriture $\frac{a}{b}$ en particulier sur l'aspect rapport (l'aspect couple d'entiers doit être signalé à cause des dangers qu'il présente !).

Que faire en 6ème ?

Le programme officiel dit :

- en 6ème : écriture fractionnaire de décimaux et opérations +, −, ×. Quotient de décimaux, écriture $\frac{a}{b}$, approximations de ce quotient. Multiplication d'un décimal par $\frac{a}{b}$ (avec a et b entiers)

- en 5ème : comparaison et addition de deux nombres en écriture fractionnaire de même dénominateur, multiplication de deux nombres en écriture fractionnaire.

  D'autre part il est précisé dans les programmes du CM (1980) :

  "*NB : l'étude des nombres décimaux et de leur structure n'est pas achevée à la fin du cycle moyen. Elle devra se prolonger tout au long de la scolarité au collège*".

Les aspects que nous avons privilégiés comme présentation des fractions sont le partage et le nombre-mesure. Les raisons en sont les suivantes :

a - Partir des décimaux pour revenir aux fractions comme semblent le préconiser les commentaires des programmes, c'est oublier que le concept de décimal est en cours d'acquisition et que les techniques opératoires sont parfois mal maîtrisées. Un réapprentissage des techniques opératoires, une meilleure conception du décimal peut passer par un retour aux situations de partage.

b - Il est important de donner aux élèves une image mentale des fractions afin que les règles ($\frac{na}{nb} = \frac{a}{b}$; + , ×) ne soient pas des règles formelles. Cette image mentale donnée en 6ème sera complétée durant la scolarité par d'autres images (celle de rapport en particulier).

c - Il est très facile à l'aide de cette présentation de donner différentes écritures des nombres ($\frac{15}{9} = \frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3} = 2 - \frac{1}{3}$).

d - Cette présentation utilise implicitement la notion d'opérateur qu'il paraîtra opportun d'expliciter sur des situations de proportionnalité. L'aspect opérateur sera lié à la proportionnalité, l'aspect quotient sera présenté sur des situations portant sur les équations dans le courant de l'année. La notion de rapport pourra être vue ponctuellement à travers des situations-problèmes en 6ème ou comme situation de révisions sur le calcul fractionnaire en 5ème.

Lier ces différents aspects en 6ème ou 5ème n'est pas chose facile par exemple : $\frac{2}{3}$ dans une situation de partage c'est $2 \times \frac{1}{3}$ et non pas $2 : 3$.

Cette liaison n'est-elle pas d'ailleurs prématurée ?

NOS OBJECTIFS EN 6EME *
SUR LES NOTIONS DE FRACTIONS ET DE DECIMAUX

Sur les fractions

Un élève doit savoir :

- représenter les $\frac{a}{b}$ d'un disque, d'un rectangle.....
- encadrer une fraction par deux entiers consécutifs
- écrire une fraction $\frac{a}{b}$ sous la forme $n + \frac{a'}{b}$ où $\frac{a'}{b}$ est inférieur à 1 et n entier
- comparer deux fractions simples à l'aide :
  - de dessins

  ou - des parties entières de ces fractions

  ou - des numérateurs (respectivement dénominateur) si elles ont même dénominateur (respectivement même numérateur)
- placer une fraction simple sur la droite graduée
- donner différentes écritures de $\frac{a}{b}$ de la forme $\frac{ka}{kb}$
- reconnaître un entier écrit sous forme fractionnaire
- passer de l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale et inversement.

Les aspects opérateur (prendre les $\frac{a}{b}$ d'un nombre) et quotient feront l'objet d'une autre publication.

Sur les décimaux

Un élève doit savoir :

- comparer deux nombres décimaux
- intercaler un décimal entre deux décimaux
- placer un décimal sur une droite graduée

Les techniques opératoires, la division, le sens des opérations sont abordés par la suite.

* A l'époque de l'expérimentation les commentaires des programmes n'étaient pas connus. Il semble que nous ayons largement débordé sur le programme de 5ème en ce qui concerne les fractions.

MISE EN OEUVRE

Organisation du travail en classe

Les élèves travaillent en groupes de 2 ou 4 élèves suivant les classes, à leur propre rythme sur des fiches.

Quand le besoin s'en fait sentir, des synthèses sont réalisées et les résultats sont notés dans un cahier répertoire qui suit les élèves jusqu'en 3ème.

Ces résultats sont aussi notés dans le classeur où figurent les fiches.

Déroulement et commentaire

Nous avons décomposé notre approche des fractions en plusieurs points, non nécessairement disjoints, qui sont :

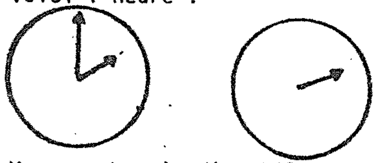
- reconnaître une fraction
- représenter une fraction
- différentes écritures d'une fraction
- graduation de la droite
- comparer des fractions
- fractions et décimaux.

Nous avons fait passer un test en début d'apprentissage pour repérer le savoir des élèves. Des tests ont été passés en cours d'apprentissage. Le dernier a été donné trois semaines après la fin de l'apprentissage.

TEST N° 1

TEST

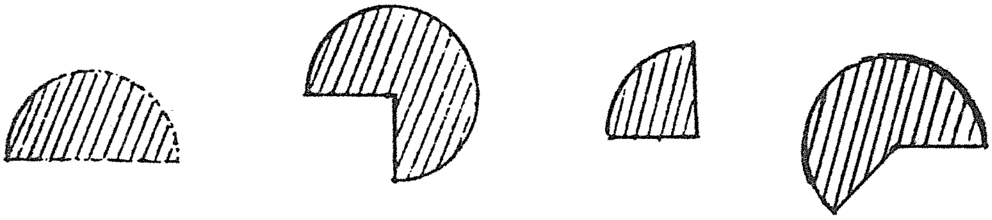
1 - Voici l'heure :



Paul sera là dans trois quarts d'heure. Dessine la grande aiguille

2 - Maman a besoin d'un kilogramme de beurre, je dois lui apporter .... plaquettes d'une demi-livre.

3 - Pierre a mangé le quart du gâteau, quel dessin représente ce qui reste ?



4 - Un douzième d'année dure :

- une semaine ☐
- un mois ☐
- un trimestre ☐

5 - Dans chaque classe, neuf élèves sur dix mangent à la cantine. L'école a cent élèves. Combien d'élèves mangent à la cantine ?

....

6 - Mickaël a mangé un quart du gâteau, Julien en a mangé le tiers. Lequel est le plus gourmand ?

....

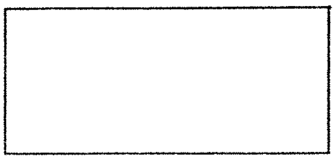
7 - Christine achète une douzaine et demie d'oeufs. Dans son panier elle a :

6 oeufs ☐
12 oeufs ☐
15 oeufs ☐
18 oeufs ☐

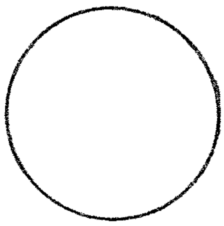
8 - On partage 5 pommes entre Jean, Emile et Eric. Combien chacun en a-t-il ? Comment fais-tu ?

9 - A un test, Julie a eu 6/10. Stéphanie, dans l'autre classe, a eu 13/20. Qui a le mieux réussi ? Pourquoi ?

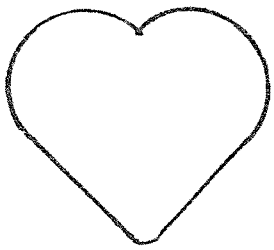
10 - Colorie les 3/8 du rectangle



11 - Colorie les 2/3 du disque



12 - Colorie le 1/3 du coeur.



Les nombres décimaux

1 - Ecris trois nombres décimaux : ....

2 - Existe-t-il des nombres décimaux entre 5,31 et 5,32 ? ....
Si oui, écris-en : ....

3 - Range les dix nombres décimaux suivants du plus petit au plus grand:
4,5 ; 45 ; 0,9 ; 4,05 ; 0,89 ; 5 ; 44,9 ; 4,35 ; 1 et 0,885

....

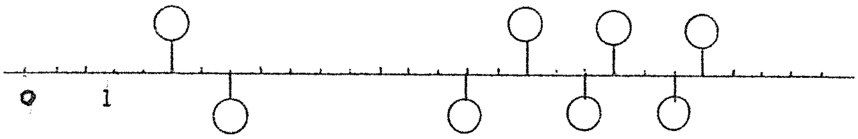
4 - Remplace les pointillés par < ou > :

1,7 ... 12	9,5 ... 10	3,45 ... 3,457
2,3 ... 0,24	5,3 ... 5,25	9,6 ... 9,601

5 - Remplace les pointillés par un nombre pour obtenir une phrase vraie :

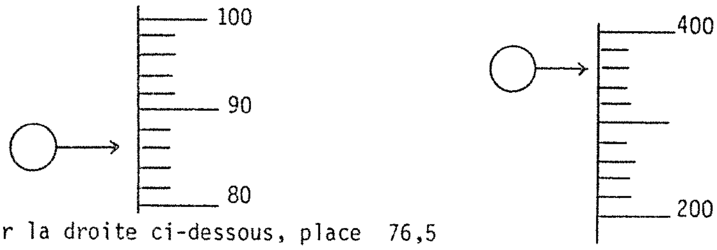
9,5 < ...	10,5 > ...
13 > ...	13,06 < ...

6 - Sur le dessin ci-dessous, complète les bulles vides :

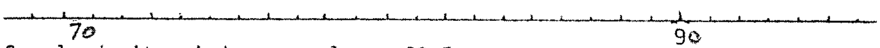


7 - Sur la droite graduée ci-dessous, place les nombres :
0,5 ; 0,75 ; 0,25 ; 2,5 .

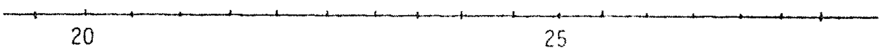
8 - Dans les bulles, mets les nombres qui conviennent :



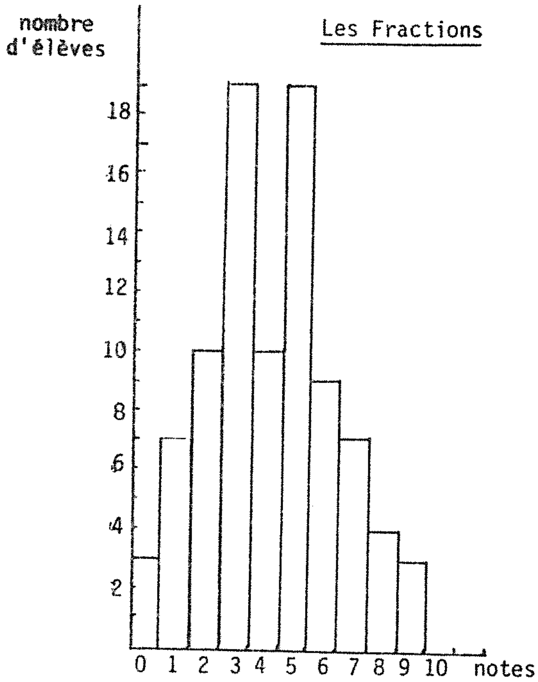
9 - Sur la droite ci-dessous, place 76,5



Sur la droite ci-dessous place 28,5

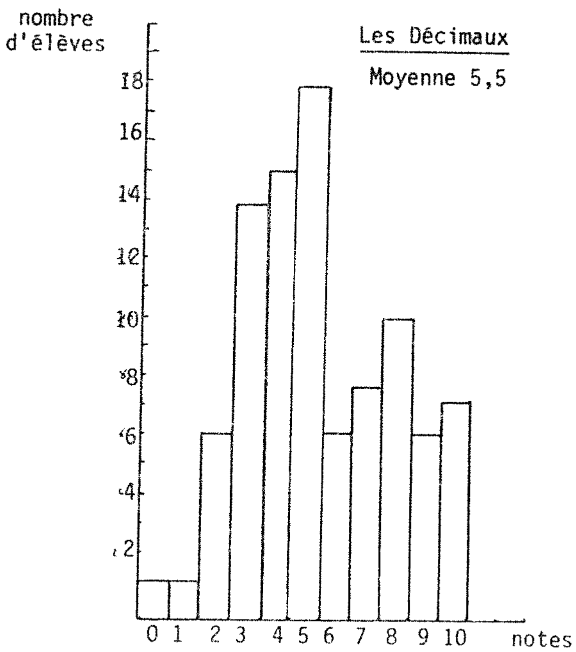


RESULTATS DU TEST N° 1



Fractions

n° item	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
pourcentage de réussite	72	21	83	54	51	54	59	15	37	25	23	2



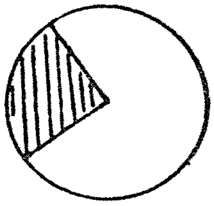
Décimaux

n° item	1	2	3	4	5	6	7	8	9
pourcentage de réussite	65	20	33	63	75	18	33	31	38

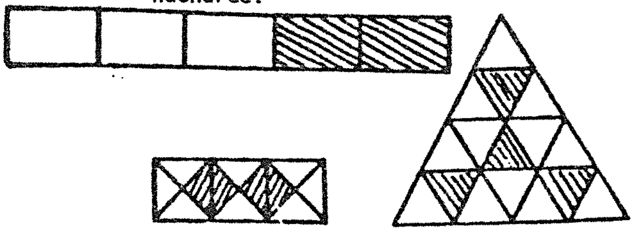
RECONNAITRE UNE FRACTION

FRACTIONS

Ex 1 : Sur le dessin, on a hachuré le quart du disque
Comment s'y est-on pris ?



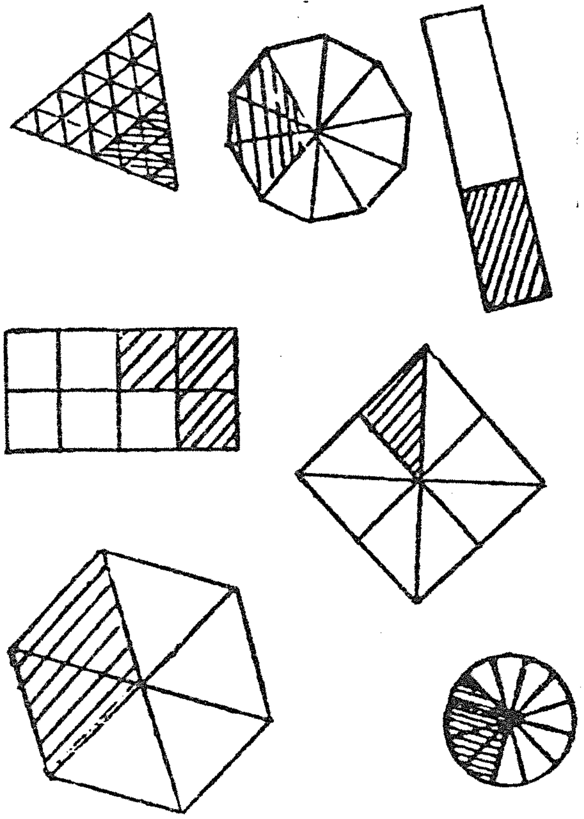
Ex 2 : Dans chaque cas, donne une fraction qui correspond à la partie hachurée.



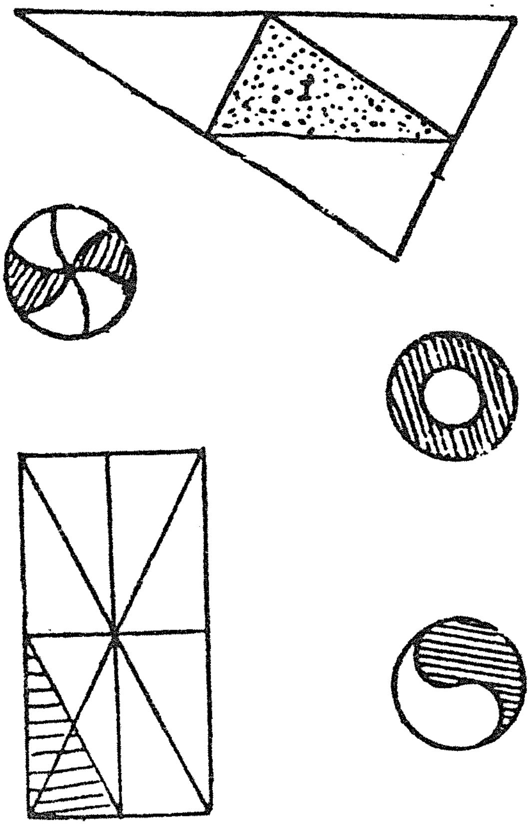
Si tu n'as pas bien compris, fais l'Ex 3.

Si tu penses avoir bien compris fais l'Ex 4.

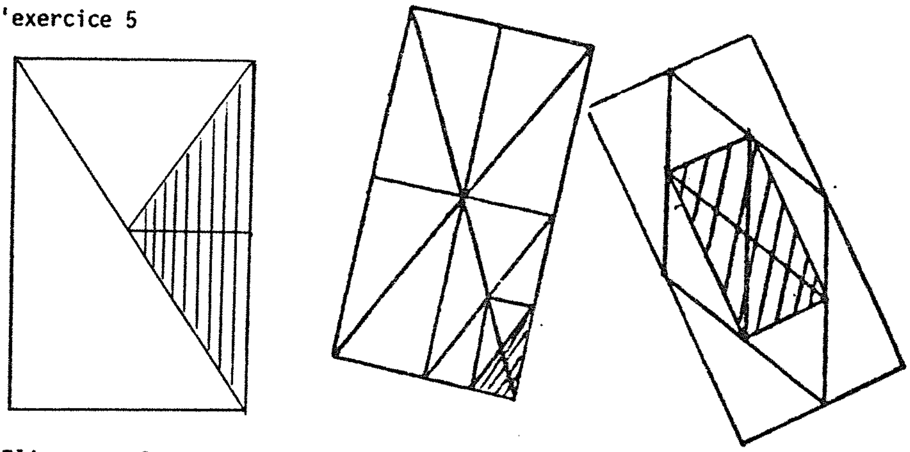
Ex 3 : Même exercice que l'Ex 2.



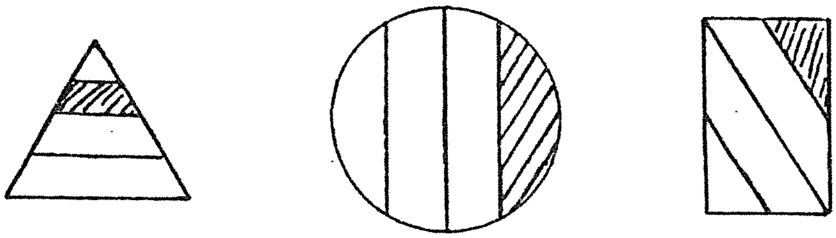
Ex 4 : Même exercice que l'Ex 2.



Fais l'exercice 5

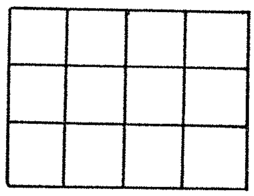


Ex 5 : Elise a voulu représenter 1/4 de chaque figure. Voici les trois dessins qu'elle a faits. Qu'en penses-tu ?

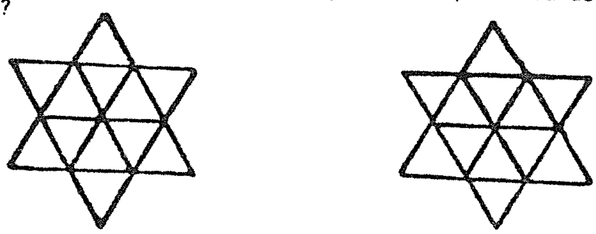


Fais l'exercice 6

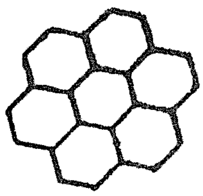
Ex 6 : Représente les 7/12 du rectangle.



Représente les 9/12 de la première figure puis les 3/4 de la deuxième. Qu'en penses-tu ?

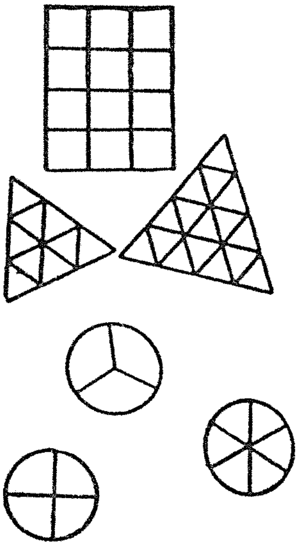


Représente les 6/7 de la figure.



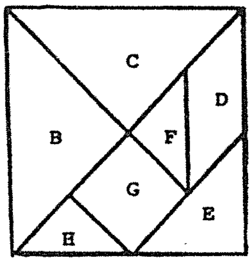
Si tu penses avoir des difficultés fais l'exercice 7

Ex 7 : Dans chaque cas, hachure une partie de la figure et donne la fraction que cela représente.



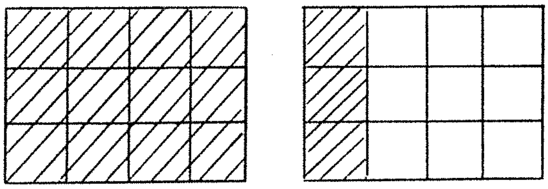
Si tu penses avoir bien compris fais l'exercice 8

Ex 8 : Pour chacune des figures B,C,D,E,F,G,H dis quelle fraction du grand carré elle représente.

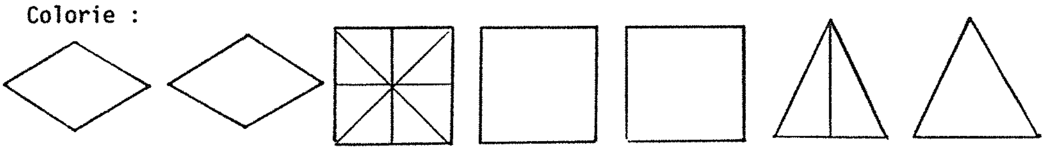


Fais l'exercice 9

Ex 9 : La partie hachurée peut-être représentée par une fraction ou par plusieurs (l'unité étant le grand rectangle). Donne ces fractions.



Colorie :

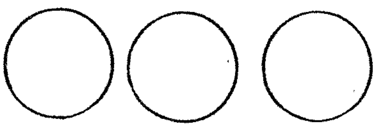


$\frac{5}{4}$ de losange $\frac{13}{8}$ de carré $\frac{5}{2}$ de triangle

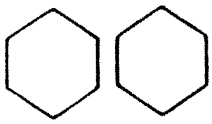
Voici les figures pour faire la question suivante :

Colorie :

$\frac{11}{3}$ de disque



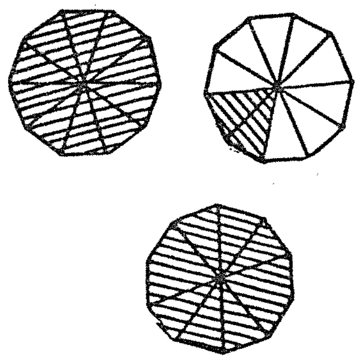
$\frac{9}{6}$ d'hexagone



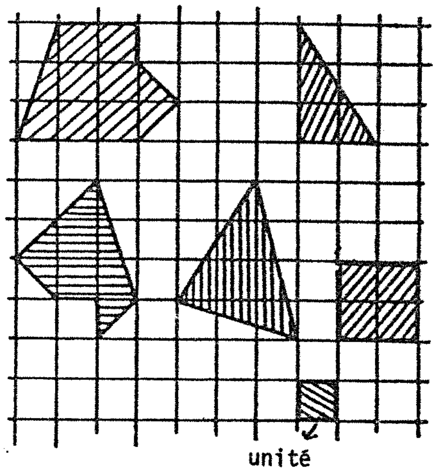
Représente un segment dont la longueur correspond aux 4/3 de la longueur du segment [AB], puis aux 3/2, aux 9/6 et enfin à 1,5 de la longueur AB.

Si tu as des difficultés, fais l'exercice 10, sinon fais l'exercice 11.

Ex 10 : l'unité étant le décagone, représente la partie totale hachurée par une fraction:



Ex 11 : Par quels nombres peuvent être représentées les figures hachurées ?



Dessine un segment dont la longueur correspond aux 11/7 de celle de CD aux 9/8 de CD, et aux 12/4 de CD.

Fais l'exercice 12

Ex 12 : on a $\frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$.

Ecris de même : $\frac{9}{4}$ = ...+... ; $\frac{27}{3}$ = ... + ... ; $\frac{5}{2}$ = ... + ...

$\frac{8}{5}$ = ...+... ; $\frac{5}{8}$ = ... + ... ; $\frac{17}{20}$ = ... + ...

$\frac{31}{10}$ = ...+... ; $\frac{353}{100}$ = ... + ... ; $\frac{72}{4}$ = ... + ...

Ex 13 : lecture de fractions. Comment lis-tu ?

$\frac{1}{2}$: $\frac{1}{3}$: $\frac{1}{4}$: $\frac{1}{5}$: $\frac{1}{6}$:

$\frac{1}{12}$: $\frac{1}{10}$: $\frac{2}{7}$: $\frac{3}{12}$: $\frac{5}{2}$:

$\frac{9}{3}$: $\frac{7}{4}$: $\frac{2}{2}$: $\frac{10}{37}$: $\frac{15}{6}$:

Ecris les fractions suivantes :

douze tiers .....

cinquante-trois quarts : .....

vingt-quatre neuvièmes : .....

Vingt-sept dixièmes : .....

quarante-neuf treizièmes : .....

soixante-dix-sept demis : .....

vingt cinquièmes : .....

huit quarts : .....

trente-cinq tiers : .....

RECONNAITRE UNE FRACTION

Durée : 6 heures

Déroulement en classe

. Cette partie est remise aux élèves, agrafée dans une chemise plastifiée et perforée.
La première séquence consiste à travailler sur les fractions d'une surface inférieures à 1.

La notation $\frac{1}{4}$ est alors expliquée.
"On partage le disque en quatre parts égales (superposables) et on en prend une part".

Beaucoup d'élèves font l'exercice 3 pour se sécuriser.
Cette fiche permet d'apprendre à s'évaluer.

Commentaire

L'exercice 1 : il s'agit de revenir sans le dire sur le test.
Plusieurs démarches ont été utilisées par les élèves :
- placer l'équerre au centre du disque
- partager en deux puis encore en deux.

Une présentation au rétroprojecteur a été faite dans deux classes pour visualiser les quarts du disque.
Il est à noter que très peu d'élèves utilisent le vocabulaire géométrique (disque, aire, rayon, diamètre...) pour décrire la situation. Certains hésitent ne sachant s'ils font de la géométrie ou du calcul !

A l'exercice 2 une aide individuelle est nécessaire à quelques élèves.
L'erreur la plus fréquente est celle qui consiste à donner le rapport entre l'aire hachurée et celle non hachurée.
ex $\frac{2}{3}$ au lieu de $\frac{2}{5}$.

Le rectangle non partagé pose quelques difficultés vite surmontées.
Dans l'exercice 4 la couronne n'a pas été réussie : les aires ne sont pas superposables : il s'agit plus ici d'un rapport que d'une mesure.

Le fait que les parties doivent être superposables n'est pas toujours suffisamment perçu par les élèves. L'exercice 5 qui le révèle demanderait à être placé après l'ex 2. D'autres exercices de ce type sont nécessaires. L'exercice 6 ne pose aucun problème.

L'exercice 8 a été réussi par très peu d'élèves. La difficulté porte sur les aires c'est-à-dire la décomposition du parallélogramme et du grand triangle par des tracés auxiliaires.
Les élèves ayant des difficultés momentanées sur cet exercice l'ont arrêté : il sera revu avec les aires.

Une synthèse est réalisée à la fin de l'ex. 8. Cette synthèse porte sur :
- l'écriture d'une fraction
- les mots numérateur, dénominateur
- la lecture de la fraction
- la représentation d'une fraction

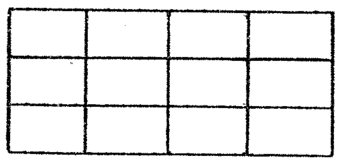
"Pour prendre les $\frac{4}{7}$ d'un disque on partage en 7 parties de même importance, et on en prend 4."

Des remarques sont faites mais non exploitées car prématurées pour certains élèves ;
"des fractions peuvent être égales :

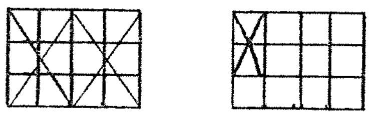
$$\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$$ "

La deuxième séquence (à partir de l'ex 9) introduit les fractions (ou plutôt expressions fractionnaires) dont le numérateur est supérieur au dénominateur.

Un rectangle est partagé en 12 :



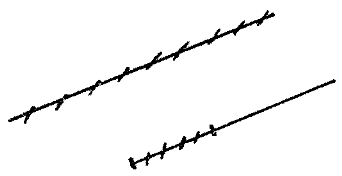
puis on hachure $\frac{10}{12}$ du rectangle, puis $\frac{12}{12}$ du rectangle. Les élèves doivent retrouver les fractions.
Puis, le dessin suivant est effectué:



Qu'a-t-on hachuré ? Les élèves donnent $\frac{14}{12}$ comme réponse (ou $\frac{12}{12} + \frac{2}{12}$).

Le démarrage de l'exercice est très difficile :
une expression fractionnaire $\frac{a}{b}$, $a > b$, n'est pas naturelle (en effet on dit plutôt $11\ \frac{1}{3}$ que $\frac{34}{3}$). Une explication commune à la classe est nécessaire.
Il est difficile d'obtenir $\frac{14}{12}$ de <u>rectangle</u> contrairement au cas où la fraction est inférieure à 1.

Dans la suite de l'exercice nous avons disposé de 3 rectangles alors que deux suffisaient, et d'un nombre insuffisant de triangles et de disques. Cela n'a gêné que quelques élèves. "C'est impossible" (la rupture de contrat didactique est ici évidente puisque, pour les disques, aucune place n'avait été laissée pour en tracer un supplémentaire).
Le tracé du segment dont la longueur correspond au $\frac{4}{3}$ de celle de AB a posé de nombreuses difficultés. La réponse la plus répandue :



A l'issue de l'exercice 11 une synthèse est effectuée et copiée dans le répertoire.

. Si le numérateur est supérieur au dénominateur la fraction est supérieure à 1.

. Si le numérateur est inférieur au dénominateur la fraction est inférieure à 1.

exemple : $\frac{5}{3} > 1$

$$\frac{3}{3} = \frac{2}{2} = 1$$

$$. \ \frac{22}{10} = \frac{10}{10} + \frac{10}{10} + \frac{2}{10} = 2 + \frac{2}{10}$$

A l'issue des 4 premières heures un devoir à la maison (voir annexe 1) a été proposé. Il n'est malheureusement pas exploitable : le travail à la maison est très suivi par les parents (parfois trop, ils dénaturent les notions) pour les uns, pour les autres ce travail est inexistant.

Cette réponse est cohérente avec les exercices précédents : les élèves travaillent sur les longueurs et non sur les segments. La représentation d'un nombre fractionnaire par un segment sera spontanément très rare dans la partie 2. Les représentations par des triangles, disques, rectangles sont préférées. (Peut-être sont-elles plus parlantes ?)

Le recours au dessin est nécessaire à beaucoup d'élèves pour réussir l'exercice 12

Les autres procèdent par somme :

$$\frac{27}{3} = \frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \dots + \frac{3}{3} = 9$$

Cette décomposition est naturelle (c'est une conséquence probable de l'apprentissage)

L'usage des multiples du dénominateur est très rare ; les tables de multiplication étant très mal sues.

TEST N° 2

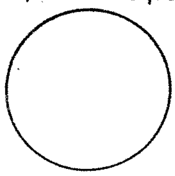
TEST - Les Fractions

Ex 1 : Représente sur chaque figure la fraction de figure demandée :

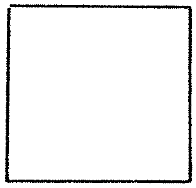
3/8 de rectangle

3/2 de AB

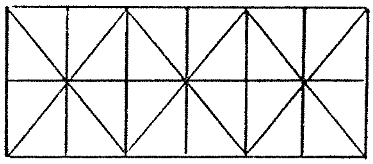
13/6 de disque



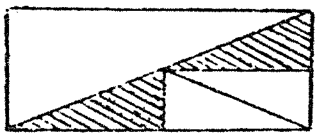
1 + 3/5 du carré

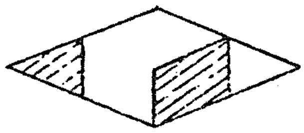


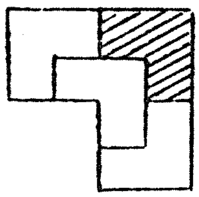
5/12 du dessin

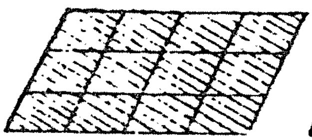


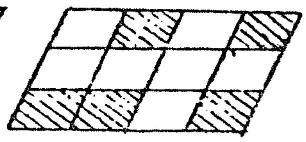
Ex 2 : Donne, si possible, la fraction de figure représentée par la partie hachurée et complète le partage sur la figure si c'est nécessaire

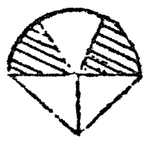


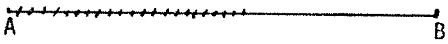


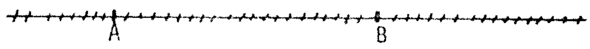












Ex 3 : Dans la phrase "Natacha est la maîtresse d'Eléonore" il y a
...... lettres, il y a ...... voyelles, il y a ...... consonnes
La fraction de voyelles est .....
La fraction de consonnes est .....

Ex 4 : Pierre a 24 billes. Il en donne le tiers.
Combien en donne-t-il ?

Ex 5 : Comment lis-tu $\frac{13}{2}$?
Comment écris-tu trois quarts ?

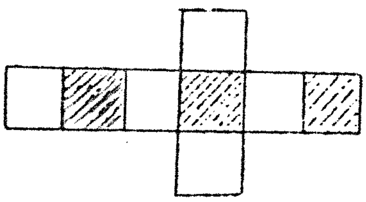
EX 6 :

Complète par un entier	Complète par une fraction inférieure à 1	Complète par un entier et une fraction inférieurs à 1
$\frac{8}{3} = \;.\; + \frac{2}{3}$	$\frac{34}{6} = 5 + \;.$	$\frac{7}{7} = \;.\; + \;.$
$\frac{53}{10} = \;.\; + \frac{3}{10}$	$. = 3 + \frac{3}{7}$	$\frac{18}{4} = \;.\; + \;.$
		$\frac{24}{4} = \;.\; + \;.$
		$2{,}5 = \;.\; + \;.$

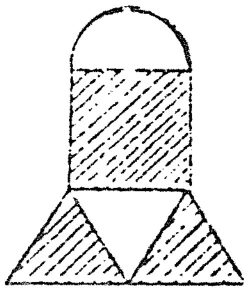
Ex 7 : On pense avoir hachuré 3/5 de chaque figure. Qu'en penses-tu ?
Explique.

Figure 1 - ....
Figure 2 - ....
Figure 3 - ....

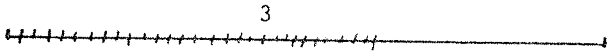
1



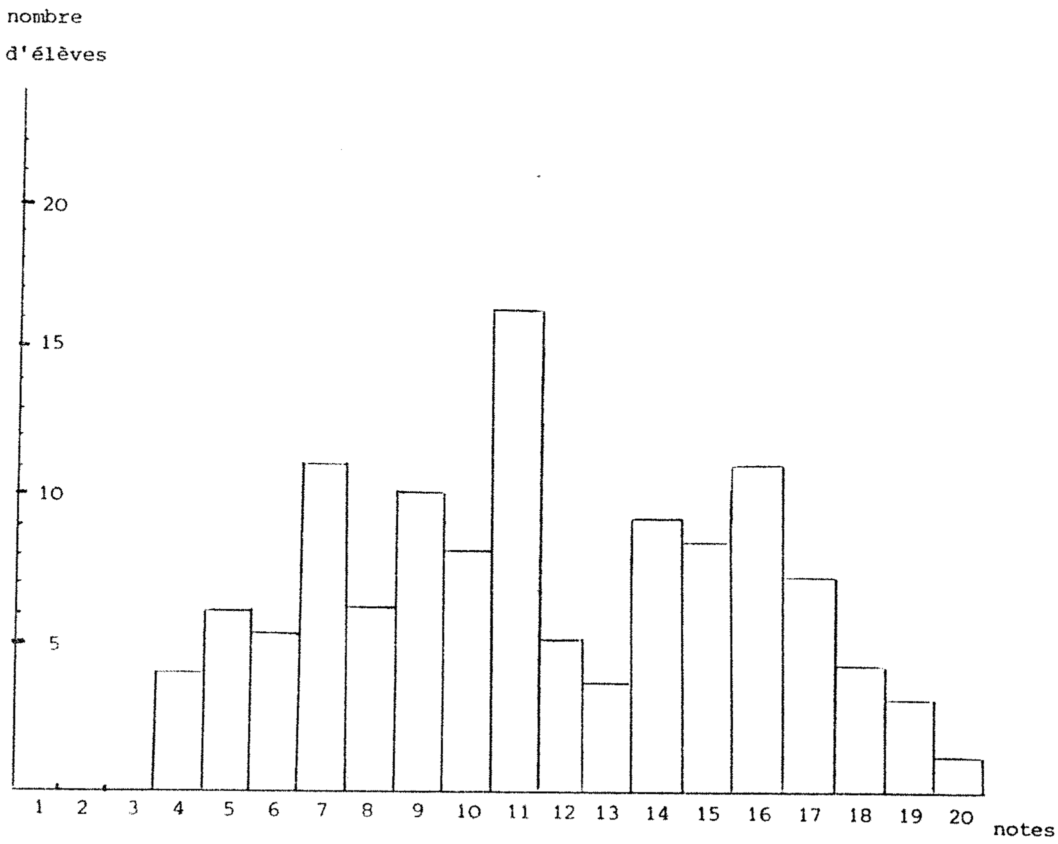
2



3



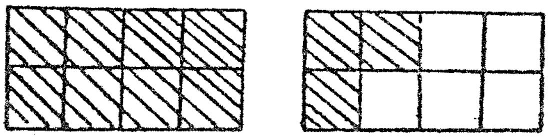
RESULTAT DU TEST n° 2



Moyenne : 11

REPRESENTER DES FRACTIONS

Ex 1 : On a représenté $\frac{11}{8}$ de rectangle. De même représente sur un dessin de ton choix les fractions suivantes et écris ce que tu as représenté.



$\frac{11}{8}$ de rectangle

$\frac{13}{12}$

$\frac{2}{3}$

$\frac{24}{7}$

$\frac{13}{5}$

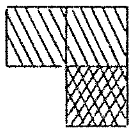
$\frac{31}{10}$

$\frac{9}{2}$

$\frac{2}{9}$

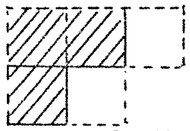
$\frac{5}{7}$

Ex 2 : Observe bien ces dessins. Tu en auras besoin pour faire l'exercice.



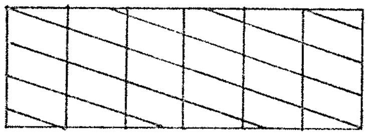
On a hachuré 3/5 d'une figure unité

La partie doublement hachurée représente 1/5 de la figure unité.

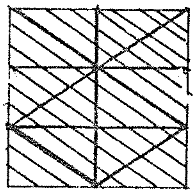


J'ai tracé en pointillé la figure unité.

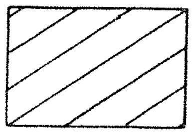
De même, retrouve la figure unité et entoure-la en rouge dans les dessins suivants :



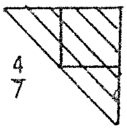
$\frac{6}{10}$



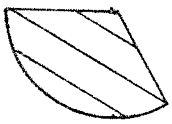
$\frac{6}{4}$



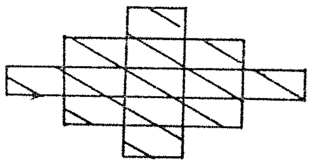
$\frac{5}{2}$



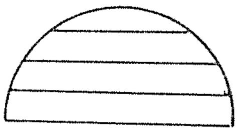
$\frac{4}{7}$



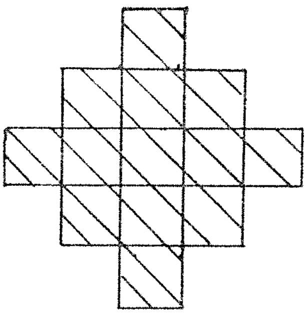
$\frac{2}{3}$



$\frac{13}{9}$



2



$\frac{13}{4}$

REPRESENTER DES FRACTIONS

Durée : 1 heure 30

Déroulement en classe

Commentaire

Il s'agit dans cette partie d'apprendre aux élèves à représenter des fractions par des dessins. Cela permet :

- de faire percevoir l'ordre de grandeur d'un nombre écrit sous forme fractionnaire
- de donner une image mentale de la fraction.

De ce fait des écritures telles que :

$\frac{7}{3} = 5 + \frac{2}{3}$ (écritures dues à la perte de sens de la notion) peuvent être évitées.

Peu d'élèves ont représenté les fractions par des segments sauf pour $\frac{5}{7}$ et $\frac{2}{5}$ car partager en 7 ou 5 un disque n'est pas chose évidente en sixième.

L'exercice 2 a été trop difficile. Il a néanmoins permis de réfléchir sur le rôle de la figure unité, rôle qui n'avait pas toujours été bien perçu par tous les élèves.

Cet exercice fait apparaître pour la première fois des confusions entre :

$$\frac{2}{3} \text{ et } \frac{3}{2}, \; 2 \text{ et } \frac{1}{2}.$$

Avec le recul, il semble que cet exercice soit prématuré en 6ème.

DIFFERENTES ECRITURES D'UNE FRACTION

Ex 1 : $\frac{17}{5} = \frac{2}{5} + \frac{15}{5}$

$= \frac{9}{5} + \frac{8}{5}$

$= 3 + \frac{2}{5}$

En t'aidant éventuellement de dessins, trouve d'autres écritures pour chacune de ces fractions.

Ex 2 : Donne quatre écritures différentes pour chacune des fractions suivantes :

$\frac{21}{25} =$ $\qquad$ $\frac{29}{17} =$ $\qquad$ $\frac{6}{15} =$

$\frac{103}{11} =$ $\qquad$ $\frac{7}{16} =$ $\qquad$ $\frac{7}{3} + \frac{4}{3} =$

Ex 3 : Marie a écrit : $\frac{27}{7} + \frac{3}{7} = \frac{21}{7} + \frac{6}{7}$

$= \frac{27}{14}$

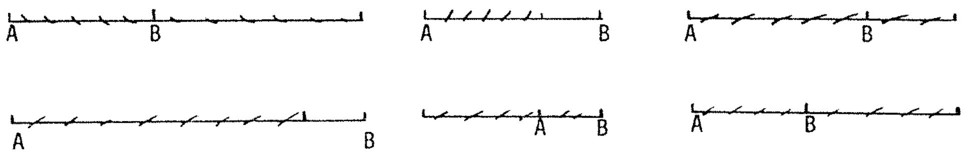
$= 3 + \frac{6}{7}$

$= 3 + \frac{12}{14}$

$= \frac{54}{14}$

Y a-t-il des erreurs ? Explique.

Ex 4 : Quelle fraction du segment [AB] est hachurée ?



Ex 5 : Dessine des segments dont la longueur est : 4/6 de [AB] , 3/4 de [AB]
4/3 de [AB] , 11/5 de [AB] .

Ex 6 : Complète par des entiers :

. < $\frac{25}{3}$ < . $\qquad$. < $\frac{16}{5}$ < . $\qquad$. < $\frac{31}{8}$ < .

. < $\frac{8}{5}$ < . $\qquad$. < $\frac{27}{2}$ < . $\qquad$. < $\frac{45}{6}$ < .

DIFFERENTES ECRITURES D'UNE FRACTION

Durée : 1 heure 30

Déroulement en classe

Commentaire

Cette fiche a été bien réussie. Les élèves semblent avoir assimilé qu'une fraction a plusieurs écritures.

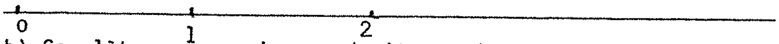
La règle $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$ est découverte et utilisée par beaucoup:

Exemple : $\frac{21}{23} = \frac{42}{46} = \frac{63}{69}$

GRADUATION DE LA DROITE

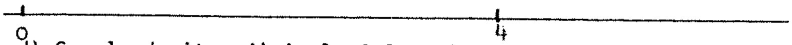
GRADUATION DE LA DROITE

Ex 1 : a) Voici une droite graduée. On a placé 0, 1, 2. Place 3 et 4.

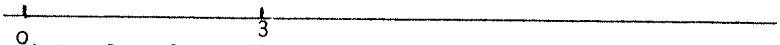


b) Complète pour avoir une droite graduée.

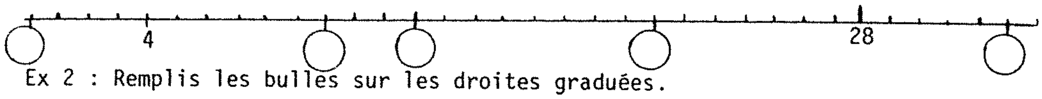
c) Place 1, 2, 3 et 6 sur cette droite graduée.



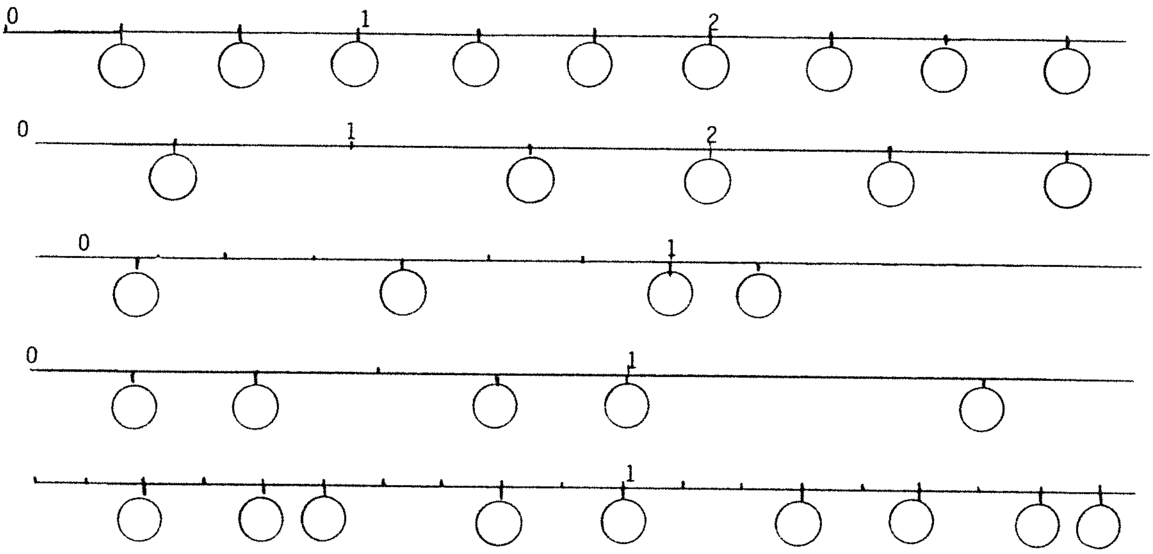
d) Sur la droite, j'ai placé 0 et 3. Peux-tu placer 5 ? 9 ? 13 ?.
Si oui, place les, sinon explique.



e) Complète les bulles.



Ex 2 : Remplis les bulles sur les droites graduées.

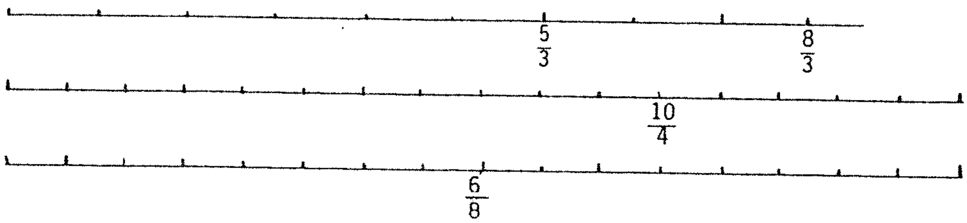


Ex 3 : a) On a gradué cette droite, la graduation est effacée. Récris-la.

b) Gradue cette droite en dixièmes.

c) Gradue cette droite en sixièmes.

Ex 4 : Voici des droites graduées. Replace 0, 1 et 2 sur chacune.



Ex 5 : a) Sur la droite ci-dessous, graduée en cinquièmes, place les fractions :
$\frac{17}{5}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{14}{5}$

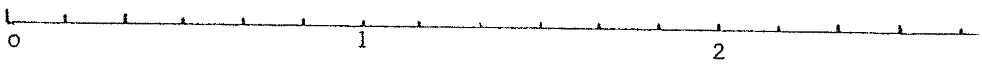
b) Dans chaque cas, complète par 2 entiers qui se suivent.

$. < \frac{17}{5} < .$ $\qquad . < \frac{7}{5} < .$ $\qquad . < \frac{3}{5} < .$ $\qquad . < \frac{14}{5} < .$

c) Complète par un entier le plus grand possible et une fraction.

$\frac{17}{5} = . + .$ $\qquad \frac{7}{5} = . + .$ $\qquad \frac{3}{5} = . + .$ $\qquad \frac{14}{5} = . + .$

Ex 6 : a) Voici une droite graduée. Place les fractions :
$\frac{3}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{9}{6}$, $\frac{12}{6}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{1}{2}$



b) Gradue la droite suivante en tiers en rouge, et en demis en bleu.

Complète par 2 fractions ou par une fraction et un entier dans chacun des cas.

$. < \frac{5}{2} < .$ $\qquad . < \frac{4}{3} < .$ $\qquad . < \frac{8}{3} < .$ $\qquad . < \frac{1}{5} < .$

c) Complète par l'entier le plus grand possible et une fraction

$\frac{5}{2} = . + .$ $\qquad \frac{8}{3} = . + .$ $\qquad \frac{4}{3} = . + .$ $\qquad \frac{1}{3} = . + .$

GRADUATION DE LA DROITE

Durée: 2 heures.

Déroulement en classe	Commentaire
	Il s'agit dans cette partie de renforcer le statut de nombre des nombres fractionnaires ainsi que de préparer le lien fraction-décimaux.
La présentation de l'exercice 1 est commune à la classe.	Le premier exercice est une révision de la graduation de la droite par des nombres entiers (en particulier choix de l'origine et de l'unité). Il est à noter que les élèves réinvestissent sans aucune difficulté le fait que la droite est illimitée et la construction du milieu au compas (ex. 1c). La graduation de l'exercice 2 fait apparaître pour la première fois des nombres décimaux. Aucun rapprochement jusqu'à présent n'avait été effectué. Le rapprochement entre les questions a et b de l'ex.5 n'est pas fait. Peu d'élèves utilisent la graduation pour encadrer. Le modèle des figures (disques, rectangles) est toujours préféré. Néanmoins cette phase a permis de consolider l'écriture du type : $\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$. Peu d'erreurs sont relevées dans l'exercice 6c.

COMPARER DES FRACTIONS

Ex 1 : Avec des faisceaux de droites :

a) Gradue en tiers

b) Gradue en septièmes

c) Gradue en cinquièmes

d) Gradue en dixièmes

e) Gradue en huitièmes

Ex 2 : Utilise la méthode précédente pour placer sur la droite :

a) place $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{9}{6}$, $\frac{12}{6}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$,

fais une remarque ;

b) place $\frac{15}{5}$, $\frac{20}{10}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{14}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{33}{11}$.

Quelle remarque peux-tu faire ?

c) Place 0, $\frac{4}{7}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{23}{10}$, $\frac{18}{4}$, $\frac{6}{3}$;

fais une remarque.

Ex 3 : Voici une grosse averse de fractions. Je dois trier celles qui sont des entiers. Aide-moi.

$\frac{30}{10}$ $\frac{21}{3}$ $\frac{7}{7}$ $\frac{9}{1}$ $\frac{26}{13}$ $\frac{12}{6}$ $\frac{16}{4}$ $\frac{13}{6}$ $\frac{9}{7}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{33}{7}$ $\frac{2}{2}$

- Fractions qui représentent des entiers :

- Fractions qui ne représentent pas des entiers :

Parmi ces fractions, trouve celles

- qui sont égales à 1 :
- qui sont égales à 4 :
- qui sont supérieures à 2 :
- qui sont égales à 2 :
- qui sont inférieures à 1 :

Ex 4 : Trouve des fractions égales à :

$\frac{2}{\cdot}$	$\frac{15}{5}$
$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{7}$
$\frac{6}{8}$	$\frac{2}{9}$
$\frac{20}{8}$	$\frac{16}{10}$

Ex 5 : Complète pour obtenir des fractions égales :

$\frac{4}{3} = \frac{\cdot}{9} \qquad \frac{21}{6} = \frac{\cdot}{2} \qquad \frac{15}{8} = \frac{\cdot}{24}$

$\frac{2}{6} = \frac{}{30} = \frac{}{3} = \frac{}{54} = \frac{20}{} = \frac{12}{}$

$\frac{21}{12} = \frac{7}{} = \frac{}{20} = \frac{}{100}$

$\frac{8}{10} = \frac{}{50} = \frac{4}{} = \frac{}{1000} = \frac{}{30}$

$\frac{70}{140} = \frac{}{20} = \frac{}{80} = \frac{15}{} = \frac{7}{} = \frac{}{2} = \frac{}{560}$

$\frac{600}{300} = \qquad = \frac{}{7}$

$\frac{10}{25} = \frac{}{} = \frac{}{20} = \frac{4}{} = \frac{}{100}$

$4 = \frac{}{9} = \frac{12}{} = \frac{}{1000} \qquad 2 = \frac{}{4} = \frac{}{3} = \frac{}{5} = \frac{18}{} = \frac{}{100}$

$3 = \frac{}{2} = \frac{}{10000} = \frac{}{7} \qquad 10 = \frac{}{3} = \frac{}{100} = \frac{}{5}$

Ex 6 : Complète par un entier et une fraction inférieure à 1 :

$\frac{21}{5} = . + .$ $\qquad \frac{27}{3} =$ $\qquad \frac{87}{10} =$

$\frac{5}{4} =$ $\qquad \frac{5}{7} =$ $\qquad \frac{15}{7} =$

$\frac{370}{1000} =$ $\qquad \frac{89}{10} =$ $\qquad \frac{75}{100} =$

Ex 7 : En t'aidant de l'ex 1, complète par < ou >.

$\frac{4}{3} \cdot\cdot \frac{6}{3}$ $\qquad \frac{5}{7} \cdot\cdot \frac{12}{7}$ $\qquad \frac{7}{10} \cdot\cdot \frac{5}{10}$ $\qquad \frac{13}{3} \cdot\cdot \frac{12}{3}$

$\frac{7}{8} \cdot\cdot \frac{14}{8}$ $\qquad \frac{4}{9} \cdot\cdot \frac{5}{9}$

Explique comment tu fais et fais de même pour comparer : $\frac{25}{4} \ldots \frac{23}{4}$

$\frac{25}{12} \cdot\cdot \frac{28}{12}$ $\qquad \frac{45}{100} \cdot\cdot \frac{54}{100}$

Ex 8 : Place sur une droite graduée : $\frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$

---

puis classe-les dans l'ordre croissant :

....

Fais la même chose sur une autre droite graduée avec :

$\frac{5}{7}, \frac{5}{9}, \frac{5}{2}, \frac{5}{10}, \frac{5}{3}$:

....

fais une remarque :

Ex 9 : a) complète par < ou > : $\frac{13}{10} \cdot\cdot 1$; $\frac{5}{7} \cdot\cdot 1$; $\frac{13}{10} \cdot\cdot \frac{5}{7}$

b) complète par un entier et une fraction inférieure à 1 :

$\frac{8}{3} = . + .$ $\qquad \frac{7}{2} = . + .$ puis compare $\frac{8}{3}$ $\frac{7}{2}$

c) complète : $\frac{4}{3} = \frac{}{15}$ $\qquad \frac{42}{30} = \frac{}{15}$ puis compare $\frac{4}{3}$ $\frac{42}{30}$

d) place sur une droite graduée : $\frac{8}{10}$ et $\frac{9}{12}$

puis compare $\frac{9}{12}$ et $\frac{8}{10}$

INTERCALER UNE FRACTION

Ex 10 : Complète par une fraction de même dénominateur.

$\frac{24}{10} < \dots < \frac{27}{10}$ $\qquad \frac{35}{3} < \dots < \frac{38}{3}$ $\qquad \frac{26}{29} < \dots < \frac{28}{29}$

$\frac{324}{100} < \dots < \frac{327}{100}$

Ex 11 : Compare par la méthode qui convient le mieux et dis comment tu fais.

$\frac{7}{3} \; . \; \frac{3}{7}$ $\qquad \frac{37}{12} \; . \; \frac{17}{5}$

$\frac{4}{10} \; . \; \frac{37}{100}$ $\qquad \frac{9}{4} \; . \; \frac{7}{3}$

$\frac{47}{12} \; . \; 4$ $\qquad \frac{94}{10} \; . \; \frac{54}{100}$

$\frac{9}{100} \; . \; \frac{9}{10}$ $\qquad \frac{2}{3} \; . \; \frac{15}{11}$

$\frac{47}{12} \; . \; \frac{13}{4}$ $\qquad \frac{100}{3} \; . \; \frac{100}{4}$

$\frac{15}{4} \; . \; \frac{15}{7}$ $\qquad \frac{18}{5} \; . \; \frac{54}{5}$

$\frac{70}{100} \; . \; \frac{7}{10}$

COMPARER DES FRACTIONS

Durée : 5 heures (dont 3 h en groupe de niveau).

Déroulement en classe / **Commentaire**

Dans cette partie il s'agit de comparer des fractions non en "passant" par des réductions au même dénominateur mais en revenant au sens (de nombre-mesure et de partage) de la fraction.

La comparaison des fractions se fait :

- en comparant les numérateurs (respectivement les dénominateurs) car les dénominateurs (respectivement les numérateurs sont égaux)
- graphiquement avec les faisceaux de droites
- en utilisant les parties entières de celle-ci.

La graduation de la droite en tiers (ex.1 a) est effectuée à l'aide du rétroprojecteur.

Les exercices de 2 à 4 permettent de rencontrer une fois de plus des égalités du type : $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$, $\frac{ka}{a} = k$ qui feront l'objet d'une synthèse.

Cependant les difficultés ont été telles pour certains (tables de multiplication non maîtrisées) que les trois dernières heures ont eu lieu en classe de niveau.

Le groupe le plus faible a travaillé à l'aide des tables. Il semble que des blocages antérieurs vis à vis des mathématiques resurgissent avec les premiers calculs (ex.5)

Le contenu a été allégé dans le groupe faible et le recours aux dessins (disques....) a été une fois de plus utile pour certains.

La synthèse est réalisée dans chaque groupe et notée dans le répertoire au mot "fraction".

- Une fraction représente un entier quand le numérateur est multiple du dénominateur.
- On obtient des fractions égales en multipliant le numérateur et le dénominateur par un même nombre.
- Toute fraction peut s'écrire comme somme d'une fraction inférieure à 1 et d'un entier.
- On peut comparer facilement deux fractions, de même dénominateur ou de même numérateur.

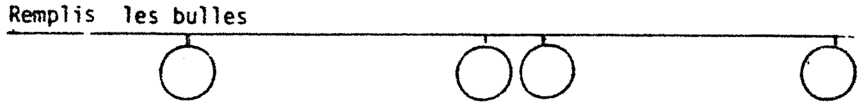
TEST N° 3

Ex 1 : a) Place $\frac{8}{10}$, $\frac{21}{10}$, 2 sur cette droite graduée.

Complète par des entiers ; . < $\frac{8}{10}$ < . ; . < $\frac{21}{10}$ < .

b) Place 2 et 3 sur cette droite graduée.

Remplis les bulles



Ex 2 : Voici des fractions : $\frac{7}{8}$, $\frac{40}{10}$, $\frac{21}{7}$, $\frac{2000}{1000}$, $\frac{15}{3}$, $\frac{14}{4}$, $\frac{20}{10}$, $\frac{8}{2}$, $\frac{320}{100}$

Trie-les et dis :

- celles qui représentent des entiers ....
- celles qui sont égales ....
- celles qui sont inférieures à 1 ....
- celles qui sont supérieures à 3 ....

Ex 3 : complète pour avoir des fractions égales :

$\frac{13}{10} = \frac{\quad}{50}$ $\quad$ $\frac{28}{21} = \frac{4}{\quad}$ $\quad$ $7 = \frac{\quad}{3} = \frac{49}{\quad} = \frac{\quad}{1000} = \frac{56}{\quad}$

$\frac{3500}{500} = \quad = \frac{\quad}{100} = \frac{20}{\quad}$

Ex 4 : Complète par un entier et une fraction inférieure à 1.

$\frac{370}{100}$ = . + . $\quad$ $\frac{15}{3}$ = . + . $\quad$ $\frac{31}{8}$ = . + .

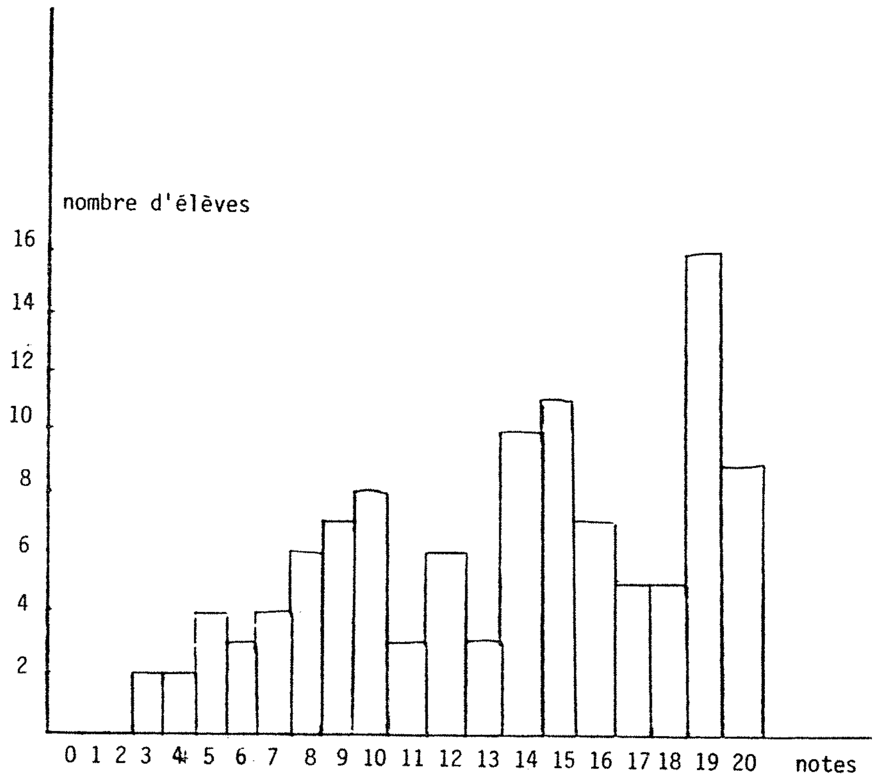
$\frac{15}{20}$ = . + . $\quad$ $\frac{65}{10}$ = . + . $\quad$ $\frac{8}{5} + \frac{9}{5}$ = . + .

Ex 5 : Complète par < ou > ou =

$\frac{6}{7}$ $\frac{8}{7}$ $\quad$ $\frac{15}{17}$ $\frac{15}{13}$ $\quad$ $\frac{7}{9}$ $\frac{8}{6}$ $\quad$ $\frac{25}{5}$ $\frac{18}{9}$

$\frac{34}{10}$ $\frac{330}{100}$ $\quad$ $\frac{10}{8}$ $\frac{5}{4}$ $\quad$ $\frac{10}{8}$ $\frac{7}{4}$

RESULTAT DU TEST N° 3



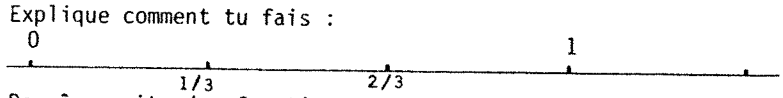
Moyenne : 13

FRACTIONS ET DECIMAUX

DENSITE :

Existe-t-il une ou des fractions entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$? Cites-en.

Explique comment tu fais :



De même, cite des fractions comprises entre :

$\frac{4}{5}$ et $\frac{5}{3}$:

$\frac{5}{10}$ et $\frac{6}{10}$:

0 et $\frac{1}{3}$:

$\frac{121}{100}$ et $\frac{122}{100}$:

FRACTIONS DECIMALES :

1 - compare les fractions (utilise le signe < ou >)

$\frac{12}{10}$ .... $\frac{7}{10}$; $\frac{12}{10}$ .... $\frac{112}{100}$; $\frac{75}{100}$ .... $\frac{740}{1000}$; $\frac{2}{10}$ .... $\frac{185}{100}$

$\frac{80}{40}$ .... $\frac{21}{10}$; 4 ... $\frac{43}{10}$; $\frac{42}{100}$ ... $\frac{5}{10}$

2 - classe en ordre croissant, explique comment tu fais.

$\frac{25}{1000}$; $\frac{25}{100}$; $\frac{205}{100}$; $\frac{5}{100}$; $\frac{55}{100}$; $\frac{52}{1000}$; $\frac{125}{1000}$; $\frac{2}{10}$; $\frac{25}{10}$

3 - $\frac{2}{10}$ s'écrit 0,2 ; $\frac{4}{100}$ s'écrit 0,04 ; $\frac{8}{1000}$ s'écrit 0,008.

complète le tableau.

écriture fractionnaire	écriture décimale
$\frac{8}{10}$	
$\frac{2}{100}$	
$\frac{45}{100}$	
	0,7
	0,427
$\frac{}{100} = \frac{}{1000} = \frac{}{10000}$	0,03
$\frac{1}{2} = \frac{}{10}$	
$\frac{4}{5} =$	
	0,40
$\frac{7}{4} =$	
	0,004

4 - observe : $\frac{24}{10} = 2 + \frac{4}{10}$

$= 2 + 0,4$

Ecris de même : $\frac{18}{10} =$ $\frac{529}{100} =$

$\frac{4235}{1000} =$ $\frac{728}{10} =$ $\frac{702}{100} =$

$\frac{502}{1000} =$ $\frac{45}{1000} =$ $\frac{19}{5} =$

$\frac{7}{2} =$ $\frac{99}{30} =$

5 - observe : 25,32 = 25 + 0,32

$= 25 + \frac{32}{100}$

écris de même :

173,13 = 173,130 = 2,052 =

0,125 = 1,2 = 50,08 =

15,734 =

6 - Pour comparer deux décimaux, il est parfois utile de passer par la décomposition sous forme d'une somme d'un entier et d'une fraction décimale, comme à l'exercice 5.

Compare : 24,32 .... 24,36 18,7 .... 18,37 204,46 214,407

29,41 .... 29,401 2,502 .... 2,520 27,096 28

7 - Complète par un décimal : 25,2 < ... < 26 45,6 < ... < 45,9

2,7 < ... < 2,8 18,1 < ... < 19,1 2,503 < ... < 2,51

0,0305 < ... < 0,305 3,796 < ... < 3,797

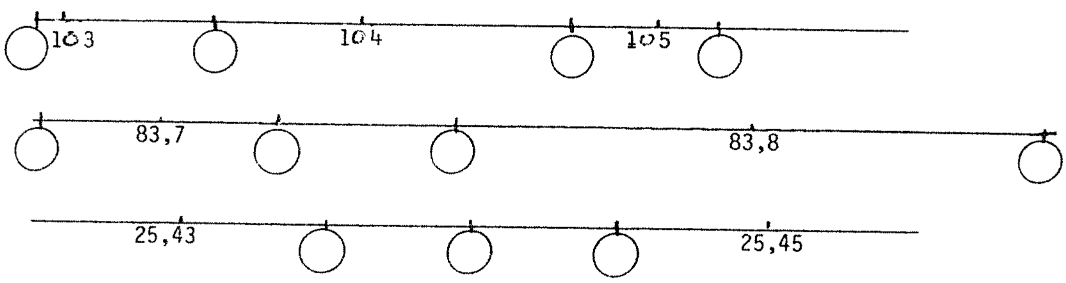
8 - Place les décimaux suivants sur la droite graduée ci-dessous :

a) 1,5 ; 0,7 ; 2,3 ; 3 ; 0,25 ; 1,75

b) 19,5 ; 23 ; 21,3 ; 20,8

c) $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{5}$; 0,5 ; 2,5 ; 0,4 ; $\frac{5}{2}$; $\frac{12}{10}$

9 - Complète :



10 - Lecture d'un nombre.
complète le tableau suivant en respectant l'idée qui est traduite par chacune des colonnes.

25,32	vingt-cinq virgule trente-deux	deux mille cinq cent trente-deux centièmes	vingt-cinq unités et trente-deux centièmes
1,24			
			deux unités et sept millièmes
	trois virgule douze		
50,08			
		cinq millièmes	
		cent vingt-sept centièmes	
			vingt-cinq unités trois dixièmes et deux centièmes
			cinq cent quarante unités, sept dixièmes et trois millième

FRACTIONS ET DECIMAUX

Durée : 3 heures

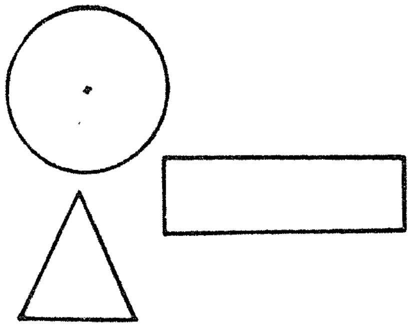
Déroulement en classe	Commentaire
	Il s'agit dans cette partie de faire le lien entre fractions et décimaux.
La densité	Individuellement, les élèves utilisent les faisceaux de parallèles. Certains mais peu ont écrit : $\frac{4}{3} = \frac{8}{6}$ et $\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$ pour trouver $\frac{9}{6}$. Cette technique est expliquée lors de la synthèse.
Fractions décimales	Les exercices 1 et 2 ne sont que de simples révisions de techniques déjà apprises. Les conventions d'écritures de l'exercice 3 doivent être précisées. Les fractions $\frac{7}{4}$ et $\frac{4}{5}$ ne sont pas perçues décimales. Peut-être aurait-il fallu faire rappeler aux élèves les conditions pour qu'une fraction soit décimale. Dans les exercices 6 et 7 les élèves ont comparé les fractions décimales. L'exercice 8 a été assez mal réussi. Un apprentissage supplémentaire sera nécessaire.

TEST N° 4

Ex 1 : Représente $\frac{13}{6}$ de disque

$\frac{5}{2}$ de rectangle

$\frac{5}{2}$ de triangle



Ex 2 : Place les nombres suivants : $\frac{4}{6}$; $\frac{19}{6}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{2}{3}$

Ex 3 : Encadre par deux entiers consécutifs :

... $\frac{34}{9}$ ... ; ... $\frac{3}{5}$ ... ; ... $\frac{11}{4}$ ...

Ex 4 : Donne deux écritures de $\frac{6}{5}$. Donne deux autres écritures de $\frac{4}{3}$.

Ex 5 : Ecris sous forme d'une somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.

$\frac{5}{6}$ = $\frac{63}{10}$ = $\frac{13}{4}$ = $\frac{36}{6}$ =

Ex 6 : Donne une écriture décimale des nombres :

$\frac{3}{10}$ = $\frac{221}{10}$ = $\frac{27}{100}$ = $\frac{14}{1000}$ =

Ex 7 : Peut-on écrire sous forme d'un nombre décimal

le nombre $\frac{3}{25}$? si oui, fais-le, sinon explique pourquoi.

le nombre $\frac{25}{3}$?

Ex 8 : Donne une fraction décimale représentant :

12,1 = 0,02 = 4,137 =

Ex 9 : Place sur la droite les nombres :

3,7 ; 0,7 ; 1,3 ; ; 2,50 .

Ex 10: Intercale un décimal : 2,57 < ... < 2,58

Ex 11: Classe par ordre croissant :

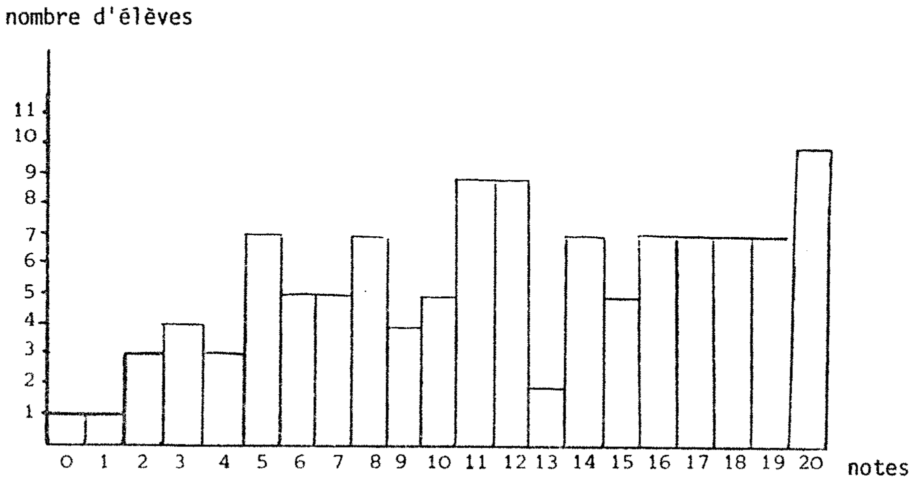
1,07 ; 1,2 ; 0,927 ; 36 ; 1,18.

n° de l'exercice	nombre d'erreurs tolérées
n° 1	0
n° 2	1
n° 3	1
n° 4	0
n° 5	1
n°6	1
n° 7	1
n° 8	0
n° 9	1
n° 10	1
n° 11	0

RESULTAT DU TEST n° 4

Ce test a été passé trois semaines après la fin de ce travail sans qu'aucun rappel n'ait été fait au cours de ces trois semaines.

LES RESULTATS :



Item par item

	Ex 1	Ex 2	Ex 3	Ex 4	Ex 5	Ex 6	Ex 7	Ex 8	Ex 9	Ex 10	Ex 11
pourcentage de réussite	83%	56%	43%	54%	34%	60%	40%	56%	66%	64%	53%

Une analyse sommaire montre que les notions sont en cours d'acquisition ; et que par conséquent un travail d'entretien est nécessaire tout au long de l'année. (Un étalement du travail sur plusieurs mois aurait certainement permis une meilleure acquisition des notions, cela n'a pas été possible, compte tenu des conditions d'expérimentation).

On peut noter aussi que les exercices 3 et 5 ont été peu réussis alors qu'ils n'avaient posé aucune difficulté en cours. Il semble, après discussion avec les élèves que les consignes n'aient pas été bien comprises; des exemples illustrant cette consigne auraient aidé à la compréhension.

ANNEXE 1

Nom :

Devoir à la maison

Ex 1 : A-t-on hachuré le tiers de chaque figure ? Dis pourquoi ou montre ta réponse sur le dessin correspondant :

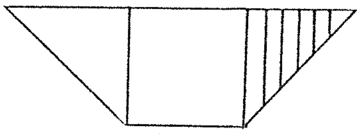


Fig. 1

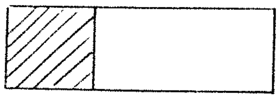


Fig. 2

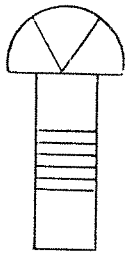


Fig. 3

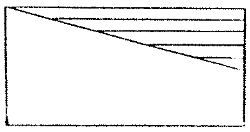
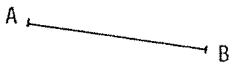


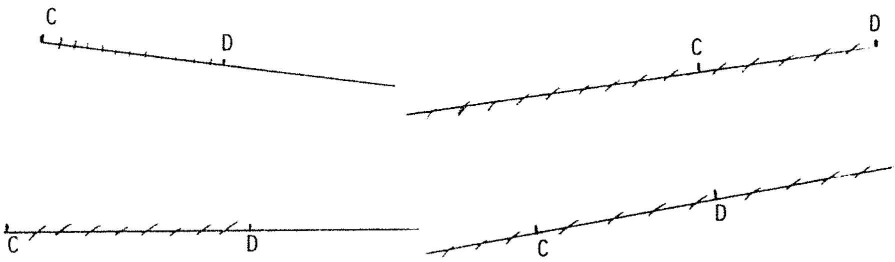
Fig. 4

Ex 2 : sur des dessins différents, représente :

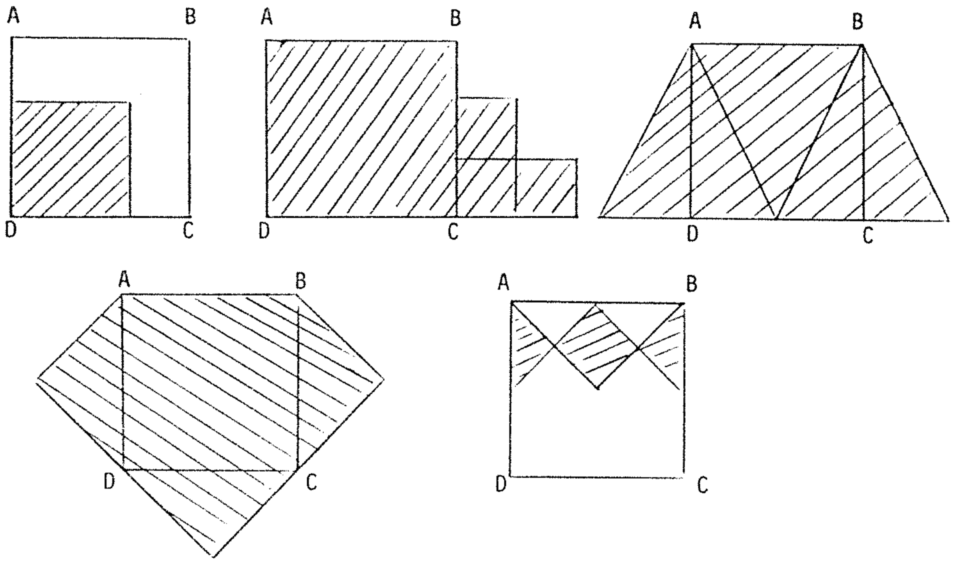
- un segment dont la longueur correspond à $\frac{5}{3}$ de celle de [AB]
- un segment dont la longueur correspond à $\frac{7}{2}$ de celle de [AB]
- un segment dont la longueur correspond à 6/4 de celle de [AB]



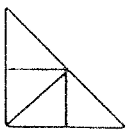
Ex 3 : Quelle fraction de la longueur CD représente la longueur de chacun des segments hachurés ?



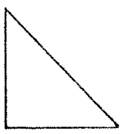
Ex 4 : Dans chaque cas, dis quelle fraction de carré ABCD est hachurée ?



Ex 5 :



représente $\frac{13}{4}$ de triangle



représente $\frac{5}{8}$ de triangle

CONCLUSION

Ce travail sur les fractions a eu lieu pendant le mois de décembre et début janvier. Nous l'avons traité en continu et sur tout l'horaire hebdomadaire ce qui n'est pas souhaitable mais qui n'a pas pu être évité, compte tenu des conditions d'expérimentation. (Manque de temps pour réfléchir simultanément sur des sujets différents).

La présentation choisie privilégie les aspects partage et nombre - mesure de la fraction mais aussi implicitement l'aspect opérateur. En l'absence des commentaires nous sommes allés trop loin sur les savoirs exigibles. Les savoirs traduisent une image mentale de la fraction, image incomplète mais importante.

Contrairement aux années précédentes les techniques opératoires décimales ont posé par la suite moins de difficultés. En outre nous espérons que le travail important sur les représentations de la fraction aidera à la compréhension de certaines situations de proportionnalité.

Nous redoutions de la part des élèves une lassitude à l'égard du sujet. Elle n'a pas eu lieu ; le travail sur fiches, à leur propre rythme y est pour beaucoup.

Ce qui précède n'est que la première partie du travail sur les fractions. L'autre partie traitera du quotient de 2 entiers ou décimaux.

LISTE DES PUBLICATIONS CONSULTEES

IREM de Poitiers - De nouveaux nombres
- Décimaux au CM1 à l'aide des longueurs et aires

IREM de Grenoble - Le nombre décimal en 6ème
- Grand N n° 18

IREM de Rouen - La notion de fraction au CM
- Le grenier mathématique
- Les nombres décimaux

IREM de Rennes - Mathématiques à l'école élémentaire
Etude de l'introduction des décimaux dans divers manuels de CM
- Fractions et rationnels

IREM de Reims - L'introduction des fractions au Cours moyen.

- Recherches en didactique des mathématiques. Vol. 1.1 2.1 4.2.
  La pensée sauvage éditions. Grenoble.
- Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire. C.M. Ermel/Hatier
- Permama n° 3030
- Fragments d'histoire des mathématiques Brochure n° 41 APM.
- Histoire des mathématiques. J.P. Colette - diffusion Vuibert
- La rigueur et le calcul - Cedic
- La disme - Stevin - Irem de Paris-Sud
- Histoire des mathématiques pour les collèges- Cédic.