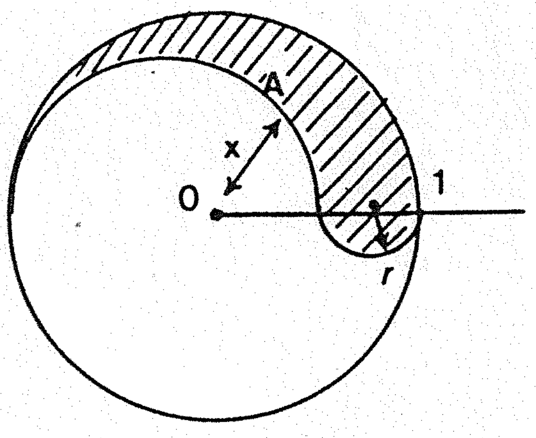
UNIVERSITÉ DE POITIERS

INSTITUT DE RECHERCHE
SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Janvier 1985

LES CAHIERS DE TROISIEME



1 - APPLICATIONS D'UNE PARTIE DE IR dans IR

2 - ÉQUATIONS

Marie-Hélène CHAUSSEAU
Dominique GAUD
Jean-Paul GUICHARD

Nous remercions les collègues qui ont participé à ce travail

D PORTE (Poitiers)

D GANDRIEUX (Poitiers)

G. PORTES (Chatellerault)

J. GUICHET (Chatellerault)

J. CITRON (Chatellerault)

F LOMBARD (St Gervais)

B VIGNAUD (Chatellerault)

APPLICATIONS

APPLICATIONS D'UNE PARTIE DE ℝ dans ℝ

Programme officiel

"Construction sur des exemples de la représentation graphique d'une application d'une partie de ℝ dans ℝ".

1 Savoirs

- Vocabulaire
  . Application, relation, bijection, bijection réciproque, image, antécédent, ensemble de départ, ensemble d'arrivée.
  . Repère, coordonnées, abscisse, ordonnée, origine, représentation graphique d'une application.

Notation

- $y = f(x)$
- $x \longrightarrow f(x)$ $\qquad A \longrightarrow B$

Remarques :

"courbes","sources", "but","graphe".... ne semblent pas indispensables.

- "Fonction" ne figure pas dans le libellé du programme officiel Il apparaît seulement en 2nde.
- "Domaine de définition" ne figure pas non plus au programme de 3ème ; ce qui est cohérent puisque le mot "fonction" n'apparaît pas.
- Certains vocables seront utilisés dans leur sens courant et n'ont pas à faire à ce niveau l'objet d'une définition mathématique : exemples : "croissant", "décroissant" "constant", "maximum", "minimum".

2 Savoir-faire technique

a) Savoir quand il y a application d'une partie de ℝ dans ℝ

Il n'y a pas seulement application quand il y a assemblage algèbrique. Il y a application dès que l'on peut définir une correspondance univoque entre un réel et un autre réel. Une correspondance peut être définie par un tableau de nombres, une calculatrice, une représentation graphique, un appareil de physique.....

b) Savoir manipuler la notation $f(x)$ (voir :"obstacles et déblocages en mathématiques" APMEP).

Trop souvent on passe vite sur les notations sous le prétexte qu'il n'y a rien à comprendre dans une notation. Dans le cas de $f(x)$ il y a pourtant difficultés : pour calculer $f(x)$ il faut d'abord connaître x puis f (ce qui se passe sur la calculatrice). Cette notation n'est pas naturelle elle nécessite donc un apprentissage.

Autre difficulté : la lecture orale de "$f(x)$". Comparer les phases et les lire à haute voix.

"$f(x)$ désigne l'image, par f, de x"

"$f(x)$ désigne l'image par $f(x)$"

"f de x désigne l'image, par f, de x" etc...

Il semble préférable de dire :

"L'image de x par f est $f(x)$"ou " $f(x)$ est l'image de x par f".

c) Savoir construire une représentation graphique

c1 - savoir à quoi peut servir une représentation graphique

c2 - savoir construire point par point une représentation graphique

c3 - savoir si "joindre les points" a un sens

c4 - savoir si l'on doit joindre les points par des segments ou "lisser" la représentation graphique

On pourra à propos du c1 consulter les ouvrages de premier cycle d'histoire-géographie, de sciences naturelles, de physique....

d) Savoir interpréter une représentation graphique

d1 - savoir trouver $f(x)$ connaissant x

d2 - savoir trouver x connaissant $y = f(x)$

d3 - savoir lire les extrema

d4 - savoir interpréter des équations du type $f(x) = b$ et $f(x) = g(x)$

d5 - savoir si une représentation graphique peut être celle d'une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Remarques :

- Les points c4, c3, d5 sont souhaitables mais pas nécessairement à atteindre avec tous les élèves.

- La compréhension de la notion d'application nécessite l'étude d'applications autres qu'affines ou linéaires.

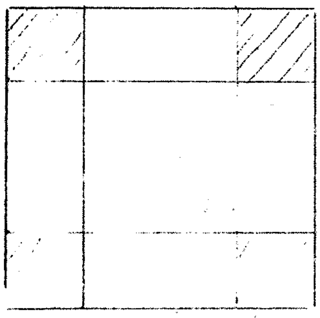
- La composition d'application n'est pas souhaitable avec les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. (On peut remarquer d'ailleurs que parler de composition sans parler de décomposition est un non sens. C'est la décomposition que l'on utilise le plus fréquemment : par exemple pour trouver le domaine de définition de $\sqrt{x^2 - 3x}$.)

La composition des applications est plus facile à comprendre à l'aide d'exemples géométriques.

Opérationnalisation

1 Poser les problèmes du chapitre

1.1. L'activité



Construction du fond d'une boîte :

- on dispose d'une plaque carrée en carton
- on trace 4 bandes de même largeur
- on enlève les coins*
- les élèves comparent soit l'aire ou, comme dans ce qui suit le volume.

- Matériel : - carton, ciseaux, colle, calculettes
- Déroulement : par groupe de 2 à 4 élèves.

1.2. Objectifs

- développer certaines attitudes :
  - conjecturer, douter (se) poser des questions
  - critiquer, rechercher des méthodes
  - discuter, s'organiser
  - démontrer.....
- Poser les problèmes du chapitre (en particulier a, c1, c2, c3, c4, d1, d2, d3, d4) au travers d'un exemple manipulable. (Pour les élèves en difficulté on peut prévoir du sable pour vérifier certaines conjectures).

1.3. Déroulement. (Durée 2 à 3h)

1ère phase - usage des instruments - développer les qualités de soin et d'ordre.	. Consigne : Construire une boîte dans la feuille de carton carrée de 20cm de côté. La largeur de la bande est laissée au choix du groupe.

* on préférera les garder comme onglets.

<u>2ème phase</u>

- Apprendre à douter
  à conjecturer
- apprendre à discuter

"Parmi toutes les boîtes construites quelles sont celles qui possèdent le plus grand volume ?". Ou autre façon de poser le problème. "Le volume de la boîte change t-il quand on change la largeur de la bande ?".

- définir une statégie pour résoudre le problème

La question paraît sans fondement pour de nombreux élèves : le volume diminue puisqu'on enlève quelque chose ! D'autres pressentent le piège : le volume ne change pas ! .
Devant la diversité des réponses chaque groupe est invité à réfléchir sur une stratégie pour résoudre le problème. La stratégie décidée est toujours la même :

- organiser les données

- chaque groupe calcule son volume
- les résultats sont notés et organisés en tableau.

<u>3ème phase</u>

- Apprendre à modéliser
- objectif a

"A chaque épaisseur correspond un volume. L'épaisseur peut varier. De combien à combien ?"....
....

- objectif b

"Pour chaque valeur x comprise entre 0 et 10 on peut associer un volume qui dépend de x"*. Comment le noter ?
Il faut rappeler qu'il dépend de x
....
La notation $v(x)$ est adoptée et on retrouve la notation $x \xrightarrow{v} v(x)$ le volume correspond à x ou pour abréger $v(x)$.

* Pour les élèves $x \in \mathbb{D} \cap [0, 10]$!

- **calcul algébrique**

"Peux-tu donner une formule qui donne v(x) en fonction de x ?".

4ème phase

- **apprendre à traduire.**

Retour aux problèmes initiaux

"Comment varie le volume de la boîte quand x varie ?" ou "pour quelle largeur de la bande a-t-on le plus grand volume ?" ou "comment trouver x pour que v(x) soit maximum ?".

- **objectif c1**

La méthode de résolution est laissée aux élèves. La première idée qui survient est celle de consulter le tableau de valeurs. La discussion s'anime car peu de valeurs y figurent.

Petit à petit l'idée de faire un graphique intervient (la démarche précédente est utilisée en physique, histoire-géographie... ceci explique peut être cela !).

- **rapport application-graphique**

Les élèves placent les points d'abscisses entières * et joignent ces points par des segments.

- **objectifs c2, c3, c4.**

"Quel est le volume pour une largeur de 1,5?"
On calcule v(1,5). On observe trois types de démarches :
- la lecture sur la représentation graphique
- le "recalcul" du volume du pavé
- l'utilisation de la formule (peu y pensent)

La différence entre la valeur exacte et la valeur lue interpelle les élèves.

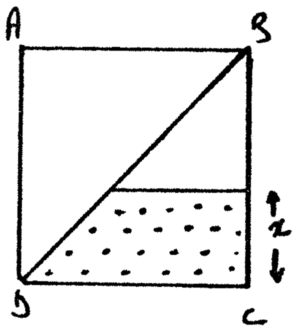
* Parce qu'en général les élèves ont choisi pour largeur des nombres entiers.

	La représentation graphique n'est pas assez précise. Que faire ? le lissage intervient naturellement.
- objectifs d1, d2, d3, d4.	"Peux-tu lire v(0,35)". Compare avec la valeur calculée".
- critiquer	-"Pour quelle valeur de x a-t-on v(x) maximum ?". - Résoudre l'équation v(x) = 500 ? Que signifie cette équation dans le cas concret ?
- usage de la calculette	Peut-on trouver x à 0,01 près ?

1.4. Activités similaires

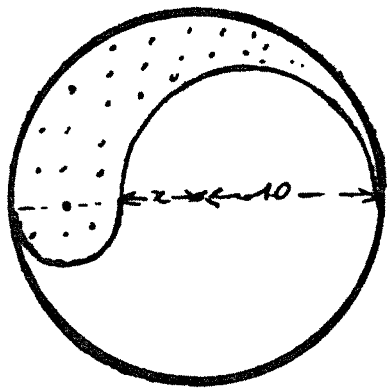
Une telle activité peut être calquée avec les exemples suivants.

a



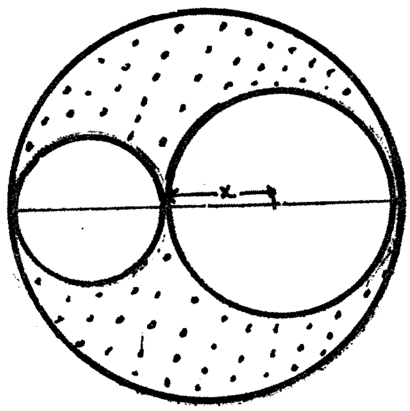
Etude de l'aire du trapèze (A B C D est un trapèze de côté 10 cm).

b



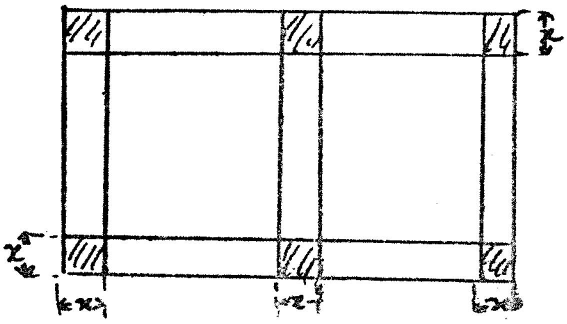
Etude de l'aire pointillée

c



Etude de l'aire pointillée.

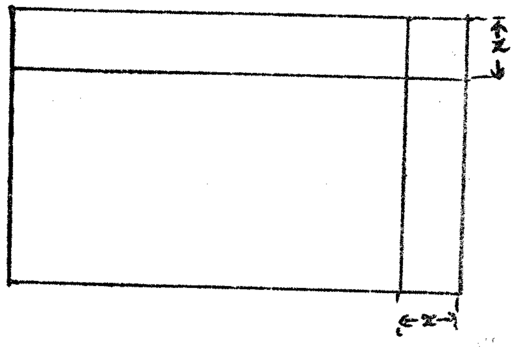
d



Construction d'une boîte à sucre

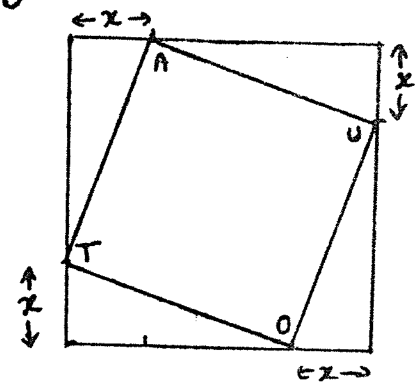
Etude de l'aire ou du volume en fonction de la largeur de la bande.

e



Etude de l'aire ou du périmètre du rectangle restant.

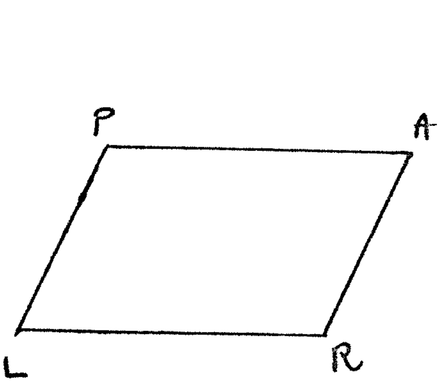
f



Nature de A T O U

Etude de l'aire ou du périmètre de A T O U

g

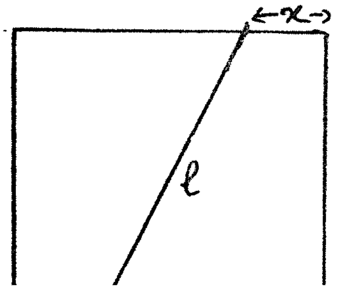


P A R L est un parallélogramme articulé.

L R est fixe.

Etude de l'aire.

h



Etude de ℓ en fonction de x.

Savoir quand il y a application d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Savoir manipuler les notations

Ex 1 : A l'hopital on a réalisé pendant 10 jours du 2 au 11 janvier la température d'un malade à 7h le matin.

Voici les résultats :

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
39°	38°7	39°	37°3	36°	37°4	36°8	36°8	37°	37°2

Ce tableau te permet-il de définir une application ?

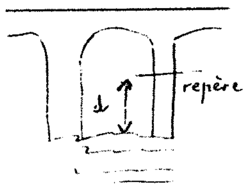
Si oui :

- Quel est l'ensemble de départ ?
- Quel est l'ensemble d'arrivée ?
- Est-ce une application d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?
- Note cette application - Quelle est l'image de 6 ?
  Comment notes-tu l'image de 6 ?

---

savoir modéliser

Ex 2 : Sur une rivière, un jour de crue, on a relevé l'augmentation puis la diminution du niveau de l'eau en mesurant la distance d séparant la surface de l'eau et un trait repère tracé sur un pilier. Les relevés ont donné le tableau ci-dessous où x désigne l'heure à laquelle a été effectué le contrôle et f(x) la distance d exprimée en mètre.



x	6	7	8	9	10	11	12
f(x)	3	2,5	1,8	1	1	2,8	2,5

- Que vaut f(9) ?
- Quels sont les antécédents de 1 ?
- Comment écrire mathématiquement la phase 2,8 est l'image de 11 par l'application f.

Savoir modéliser

Ex 3 : Reprendre 14a ou (et) 14b. Définit-on une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en associant à x l'aire hachurée correspondante ?
Si oui quel est l'ensemble de départ ?
Note cette application.
Quelle est l'image de 2 ?

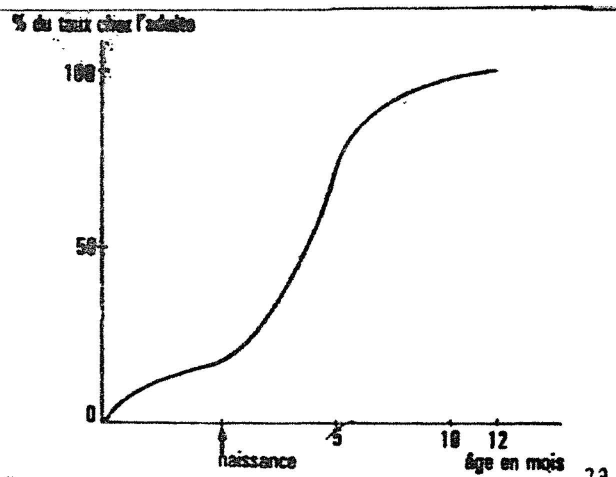
Ex 4 : Au réel x on associe $f(x) = 2x^2 - 5x$
Calcule $f(2)$; $f(\sqrt{3})$
Quelle est l'image de 6 par f?

Savoir modéliser

Ex 5 : Prends une calculatrice scientifique. Choisis un nombre et appuie sur la touche $\boxed{e^x}$
qu'obtiens-tu ?
Définis-tu ainsi une application ?
Note cette application ? Comment écris-tu l'image de 2 ?

Savoir modéliser

Ex 6 :



Le graphique (doc. 29) traduit l'évolution du taux d'anticorps dans le sérum d'un enfant, selon son âge.

Peux-tu, à partir, de ce graphique définir une application d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?
Si oui quel est l'ensemble de départ ?
Quelle est l'image de 5 ?

Voici la représentation graphique d'une application d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

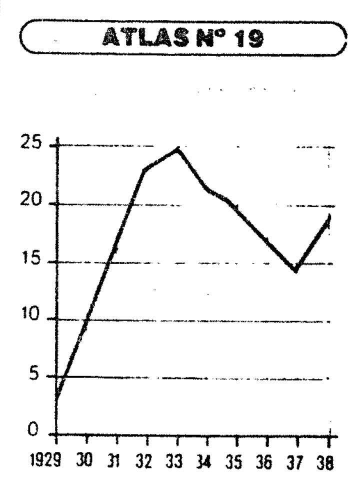
- Quel est son ensemble de départ ?
- Pour quelle valeur de x, $f(x)$ est-il maximum ? minimum ?

Savoir appliquer

d1, d2, d3, d4

- Le point $M(10,5)$ appartient-il à la représentation graphique ? Même question pour le point $M'\ (9,3)$
- Pour quelles valeurs de x a-t-on $f(x) = 2$? $f(x) = 0$?

Ex 14 : même exercice



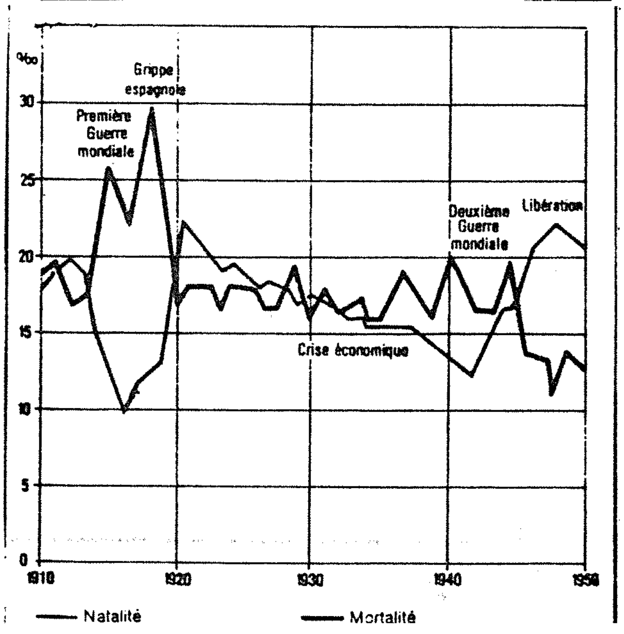
Chômage (en % de la population active) : environ 13 millions de chômeurs, en 1933.

Ex 15

Savoir modéliser

Savoir appliquer

d1, d2, d3, d4, d5,



La représentation graphique du taux de natalité (mortalité) définit-elle une application d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Note la $f(g)$.

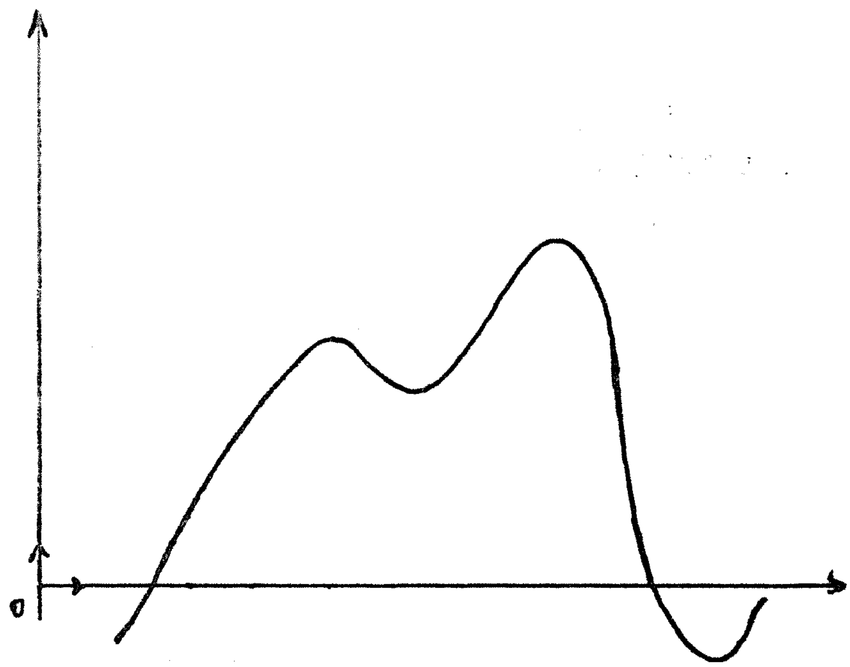
Que signifie $f(x) = g(x)$. Peux-tu résoudre cette équation à l'aide du graphique.

Savoir construire une représentation graphique

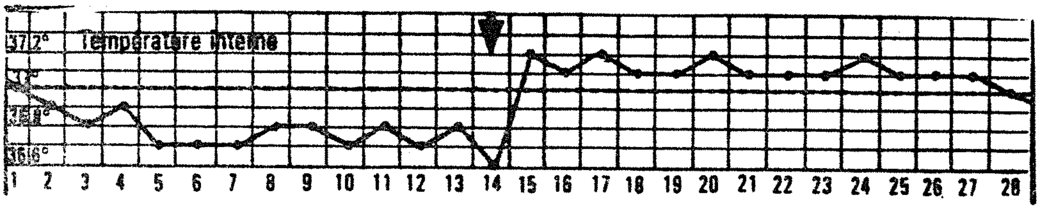
Objectif c1 Savoir appliquer	**Ex 7** : Trace la représentation graphique de l'application f qui va de E dans $\mathbb{R}$ où $E = \{1 ; 2 ; 1{,}5 ; \sqrt{2} , 4\}$ et $f(x) = 2x^2 - 5$
Objectifs c4, c3	**Ex 8** : Même exercice $E = [1,4]$ $f(x) = x - 3$
Objectifs c3, c4 Savoir critiquer	**Ex 9** : Même exercice $E = [-1,3]$ $f(x) = x^2 - 4$
Objectif c2	**Ex 10** : Reprendre l'exercice 1 et tracer la représentation graphique
Objectifs c2, c3, c4 Savoir critiquer	**Ex 11** : Reprendre les exercices 14 a , 14 b ou ... Tracer la représentation graphique des applications.
Objectifs c2, c3, c4 Savoir critiquer	**Ex 12** : Tracer la représentation graphique de l'application f : $f \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto 2$

Savoir interpréter une représentation graphique

Ex 13



Ex 16 :



Savoir critiquer

d5, c3, c4, c1

(Document Sciences Naturelles 4ème Hachette)

Ce document représente la courbe de température d'une patiente (température prise à 7h le matin).

- Le graphique définit-il une application ?
- Si oui. Note la g.
- Pour quelles valeurs de x a-t-on $g(x)$ maximum ?
- Quelle est la température de la patiente le 8ème jour à 7h le soir ?
- Pourquoi a-t-on joint les points ?

Ex 17 :

Savoir lire un texte

Savoir appliquer

Savoir critiquer

d1, c3, c4

On a pesé un bébé du jour de sa naissance au dixième jour après sa naissance. Dans le tableau ci-dessous x désigne le $x$ème jour après la naissance pour $x > 1$ et le jour de sa naissance pour $x = 0$, $f(x)$ désigne le poids du bébé exprimé en kg.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(x)	3,5	3,35	3,25	3,1	3	3,1	3,3	3,4	3,55	3,6	3,7

Fais la représentation graphique de cette application.

Est-ce correcte de joindre les points par des segments ?

Cela sert-il à quelque chose ?

Ex 18 :

Comment peux-tu trouver graphiquement les solutions de l'équation

$2x^2 - 3x + 1 = 0$

Savoir lire un texte

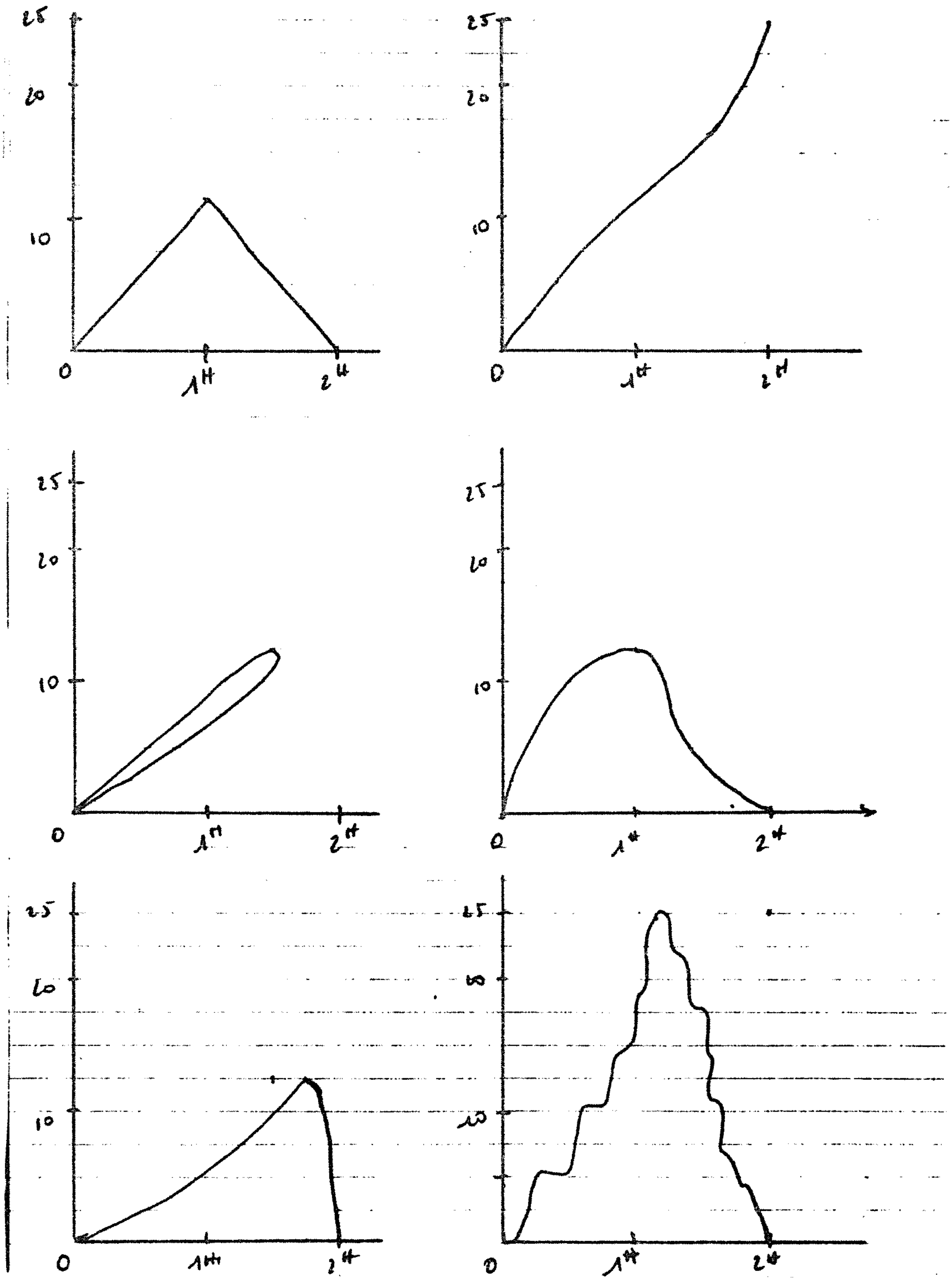
Ex 19 :

Une course cycliste, contre la montre, a le profil suivant : elle part de Sainte Marie de Campan (altitude 800m) monte au Col du Tourmalet (altitude 2115 m) et retourne à Sainte Marie de Campan. Le Tourmalet est distant de 12,5 km de Sainte Marie de Campan.

Soit f(t) la distance qui sépare à l'instant t le coureur HAUNI de Sainte Marie de Campan. Laquelle des représentations graphiques ci-dessous te semble être celle de f.

Savoir critiquer

Savoir conjecturer



HAUNI a monté à 5 km à l'heure et descendu à 50 km à l'heure. Quelle a été sa vitesse moyenne ?

Ex 20 :

A partir du tableau des lever et coucher du soleil à Paris en 1983

(calendrier des Postes)

* Pour chaque mois de l'année, calculer la durée d'ensoleillement aux dates suivantes : le 5 - le 15 - le 25
* La durée dépend de la date
* Représentation graphique : durée en fonction de la date
* Peut-on lisser la courbe : considérer en première approximation que les mouvements de la terre sont uniformes

* Utilisation de la courbe (indications)

1) . A quelles périodes de l'année, la durée est-elle exactement de 12h?
(On retrouve ainsi les équinoxes.)
. Durée maximale (on retrouve le solstice d'été)
. Durée minimale (on retrouve le solstice d'hiver)

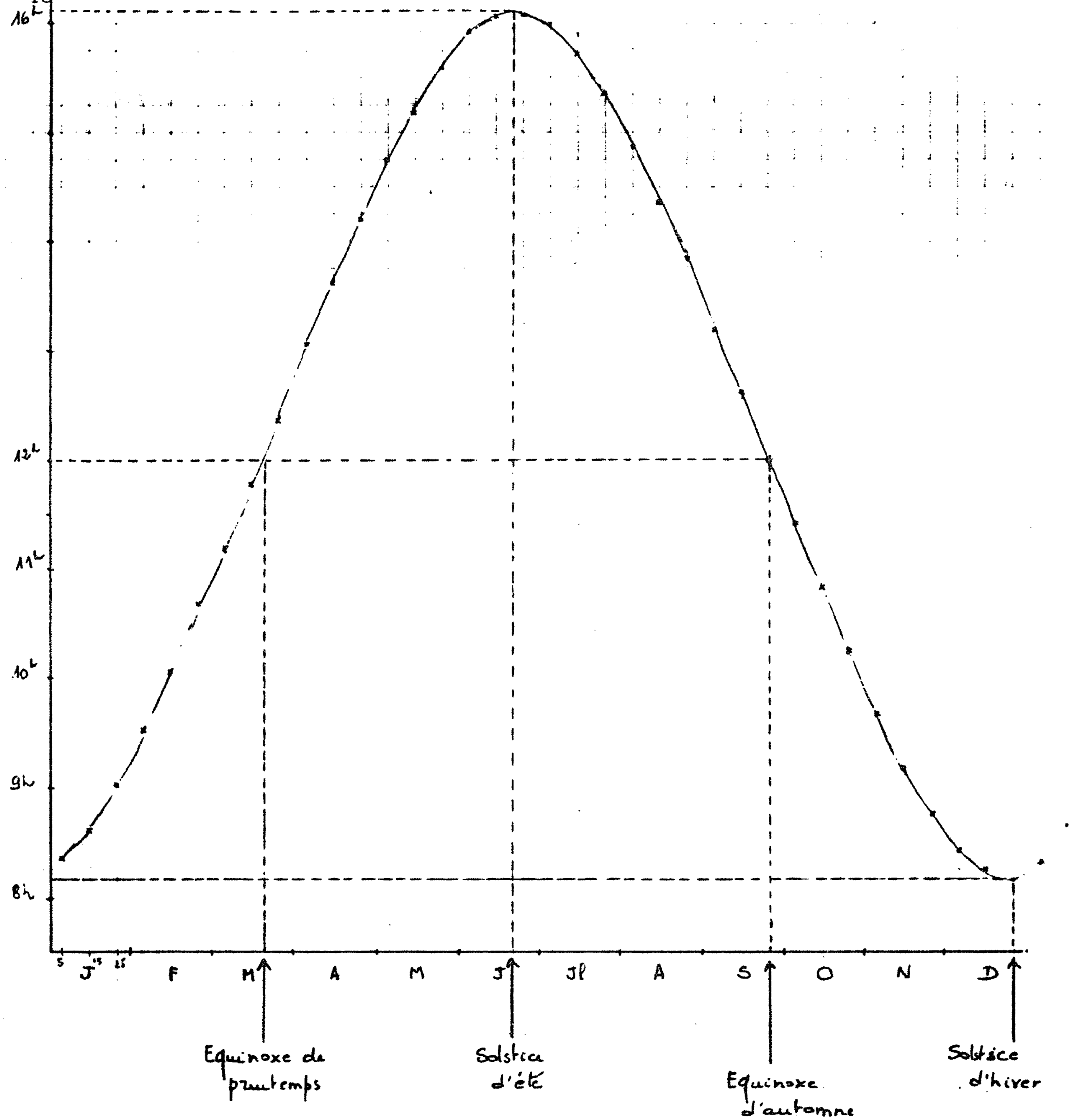
. A quelles périodes de l'année, la durée est-elle exactement de k heures ?
(intersection de la courbe avec la droite $y = k$.)

ou 1') Sur le calendrier, figurent les dates du commencement de chacune des saisons.

21 Mars : Printemps
21 Juin : Eté
23 sept : Automne
22 Déc. : Hiver

Repérer les points de la courbe ayant pour abscisse ces dates et lire leurs ordonnées. Que remarque-t-on ?

Réfléchir à l'allure de la courbe,
dans les pays nordiques - au pôle Nord
dans les pays tropicaux - à l'équateur et proches de l'équateur.


16h
12h
11h
10h
9h
8h
5
J
15
25
F
M
A
M
J
Jl
A
S
O
N
D
Equinoxe de printemps
Solstice d'été
Equinoxe d'automne
Solstice d'hiver

Ex 21 :

Savoir lire un texte

Savoir critiquer

Voici les définitions d'une application données par 4 élèves différents.

Jean : g est une application de E dans ℝ signifie que g est une relation de E vers ℝ telle que tout élément de E a une image unique dans ℝ

Marie : Une application de E dans R est une relation qui associe à tout élément de E un seul élément de ℝ.

Paul : On nomme application de E vers ℝ toute relation de E vers ℝ par laquelle chaque élément de E est lié à un élément au plus de ℝ.

Hélène : Une application f de E vers ℝ fait correspondre à un élément de E un élément y de ℝ appelé image de x par f et noté $y = f(x)$.

Lesquelles te semblent exactes ?

EQUATIONS

Ont participé :

F. ADAM	(Aulnay)
H. BARTHERE	(Mazières en Gâtine)
N. BOUTIN	(Parthenay)
J. GELLIN	(Melle)
C. MARTIN	(Niort)
MICHONNEAU	(Frontenay Rohan Rohan)

S O M M A I R E

EQUATIONS DU PREMIER DEGRE
A UNE INCONNUE

Introduction.

Que dit le programme officiel :

- 4ème : Exemples numériques d'équations et d'inéquations du premier degré à une inconnue.
- 3ème : Exemples variés de problèmes du premier degré.

Le libellé du programme est flou. Que doit savoir faire un élève sortant de 3ème ? Qu'est-ce qui ne devrait pas être exigé pour tous les élèves en fin de troisième ?

Ce document propose des éléments pour réfléchir à ces deux questions. Nous apportons aussi nos réponses qui, on s'en doute, ne sont pas définitives.

I - A PROPOS DES DIFFICULTES DES ELEVES.

Nous distinguons deux difficultés majeures lors de la résolution des problèmes du premier degré à une inconnue :

- difficulté d'ordre algorithmique,
- difficulté lors de la mise en équations de problèmes du premier degré.

1 - Difficultés d'ordre algorithmique.

1-1 . Voici quelques erreurs que nous rencontrons.

a) $2x = 3$ d'où $x = 3 - 2$

b) $4x^2 + 3x = 0$ d'où $4x^2 = 0$ et $3x = 0$ ...

c) $(x + 2) + (x + 7) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0$ ou $x + 7 = 0$ ...

d) $2(x - 4)(x + 3) = 0$ d'où $2 = 0$
ou $x - 4 = 0$
ou $x + 3 = 0$

$S = \{2, 4, -3\}$ ou $S = \{4, -3\}$

e) $3 = x$ d'où $x = -3$

f) $3x = 4$ d'où $x = 1,333.$
(ou $x = 1,3333333$ ou $x = 1,3333334$)

g) $2x = 0$ d'où $x = \frac{1}{2}$

h) $0x = 2$ d'où $x = 2$ (ou $x = 0$ ou $x = -2$)

i) $x^2 - 4x + 4 = 0$ d'où $x^2 = 4x - 4$

d'où $x = \frac{4x - 4}{x}$

j) $|x| = 7$ d'où $x = 7$ ou -7

$S = \{7\}$

1-2 . Voici quelques " non résolutions " fréquentes.

a) $100,4x - 200,35 = - 0,0008$

b) $10^3x + 2\ 349 = 3 \times 10^{7}$

c) $\sqrt{2}\ x + 3 = 1 - x\sqrt{3}$

d) $\dfrac{x + 2a}{2} = 2a - 3x + 1$

e) $\dfrac{i - 1}{2} + \dfrac{1 - 3i}{4} = 2i + 5$

1-3 . Commentaires.

A - Des erreurs.

- erreur a)

L'erreur a) est révélatrice : l'élève n'a pas acquis le sens de l'écriture 2x abréviation de $2 \times x$;peut être est-ce dû à une introduction trop rapide de cette simplification. Notons aussi que cette erreur s'accompagne souvent de la phrase : "J'enlève le 2" et que le mot " enlever " pour les élèves est synonyme de "soustraire".

- erreur b) et c)

Ce genre d'erreur est fréquent après une batterie d'exercices du type $(x - 1)(x + 3) = 0$.

Doit-on varier les exercices ? Doit-on éviter les batteries d'exercices visant un mécanisme précis ? Peut-être doit-on chercher une méthode intermédiaire : Quels mécanismes doivent être objet d'une batterie d'exercices ?

- erreur d)

Cette erreur survient après des exercices du type $x(x + 1)(x + 3) = 0$. Si on fait appliquer la règle : " Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul " ; on perçoit la difficulté des élèves lors de la résolution de l'équation $2(x - 4)(x + 3) = 0$.

Exigeons-nous " $2 = 0$; $x - 4 = 0$; $x + 3 = 0$ or $2 = 0$ est impossible ..... " ou exigeons-nous plus simplement : " $x - 4 = 0$ ou $x + 3 = 0$ " oubliant que pour la circonstance 2 n'est pas un facteur ? Notons aussi qu'oublier le " 2 " conduira souvent l'élève à oublier le " x " dans l'équation

$$x\ (x + 1)(x + 3) = 0.$$

Entre deux maux lequel choisir ?

- erreur e)

Une constation que l'on peut faire : c'est que $3 = x$ n'est pas satisfaisant dans l'esprit des élèves qui préfére l'écriture $x = 3$. Cette symétrie du signe " = " et le changement de membre conduisent à des confusions dont cette erreur témoigne.

- erreur (?) f)

Est-ce une erreur ou un niveau de rigueur mal précisé. Quand on recherche la largeur d'une parcelle de $40m^2$ dont l'aire est $700m^2$, est-ce satis-

faisant de trouver $\frac{70}{4}$ m ?
Qu'en est-il en 2nde, en atelier, en économie, en physique... ? et en BEP ?

- erreur g) et h)

Elles résultent d'une mauvaise compréhension de " zéro ". Pour simplifier :"zéro c'est rien et rien c'est l'ensemble vide. Ce n'est pas une erreur qui relève des équations."

- erreur i)

Une telle erreur suggère trois questions ;
1-Que signifie pour les élèves : la notion d'équation ;
2-Que signifie pour les élèves : la notion d'inconnue ;
3-Que signifie pour les élèves : résoudre une équation.

A-t-on les moyens de faire acquérir aux élèves ces trois points ?

Il nous semble que cela est possible dès la 4ème. Pour cela il ne faut pas arriver trop vite aux techniques de résolutions classiques mais appliquer celles-ci ou d'autre méthodes heuristiques (*) à la résolution de problèmes mis au préalable en équation de telle manière que l'inconnue garde un support concret. Pour la compréhension de la notion d'inconnue, il n'est pas nécessaire de travailler sur des équations du 1er degré.

Dans le maniement des lettres représentant des nombres ("inconnues" ou "variables"), l'absence de référence à des grandeurs familières, à des unités, joue comme une perte de tout support solide, sûr.

A propos des équations, cela se traduit

— dans le traitement du calcul : "où va-t-on ? qu'est-on en train de faire ? que s'agit-il de faire ?". Ainsi, on peut écrire une "solution" du genre :

$$x = \sqrt{\frac{2x - 1}{2}} \quad \text{à l'équation} \quad 2x^2 - 2x + 1 = 0$$

— dans la présentation des résultats numériques : "que doit-on en faire ?" Ainsi, on peut vouloir tout ramener aux nombres décimaux bien sûr ($\frac{8}{3} = 8 : 3 = 2,6$), mais aussi aux entiers par des "transformations" du genre suivant :

$$\frac{8}{3} = 8.3 = 24$$

Les contraintes exercées par le support familier sur le mode de calcul et son résultat sont au mieux remplacées par une fidélité à toute épreuve à des règles de calcul inexpliquées *et* par une imitation intelligente des procédures utilisées par les enseignants, pour les problèmes trop différents de ceux qu'ils ont traités. On comprend que les étudiants soient, bonne volonté ou pas, rares à combiner ces deux "qualités" quelque peu contradictoires, et que beaucoup par contre soient en général perdus devant la simple question de savoir ce que l'on attend d'eux dans tout problème quelque peu nouveau.

P.76. Bruston " Obstacles et déblocages en Mathématiques " APMEP n°47.

(*) Les méthodes : - essayer des nombres (ce qui revient à étudier $x \to f(x)$) ;
- résolutions graphiques (voir le fascicule " application d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$").

D'autre part n'y a-t-il pas confusion pour l'élève entre variable et inconnue ?

Quelle(s) différence(s) fait l'élève entre :

$f(x) = (x - 3) + x^2$ où x est une variable ;

$f(x) = 2$ où x est une inconnue.

Inconnue et variable

En réalité, pour comprendre pleinement la notion d'"inconnue", il faut avoir acquis préalablement celle de "variable". Une inconnue, en effet, est une variable à laquelle est imposée une ou plusieurs conditions fixant le domaine des valeurs *cherchées*, et non pas le domaine des valeurs *possibles* (le "référentiel", c'est-à-dire le domaine dans lequel on cherche).

Cela seul permet de comprendre des pratiques telles que :
— vérifier si une solution trouvée est correcte ou non ;
— essayer des nombres pour savoir s'ils sont, ou non, solutions ;
— chercher un ensemble contenant toutes les solutions éventuelles ;
— chercher des valeurs approchées d'une solution ;
— etc.

La seule pratique compréhensible sans la notion de variable est la résolution par des "techniques" algébriques (type "faire passer d'un membre dans l'autre", etc.) qui correspondent à des *équivalences logiques*. Mais la notion même d'équivalence logique, qui leur est sous-jacente, ne peut elle-même pas être comprise sans la notion de variable parcourant un certain ensemble, puisqu'elle signifie "égalités vraies simultanément, *et fausses simultanément*", ce qui nécessite que la lettre puisse prendre n'importe quelle valeur dans le référentiel. Ces techniques ne peuvent alors être assimilées que comme des procédés plus ou moins *automatiques* ; les "précautions" à prendre dans certains cas (élévation au carré des deux membres, etc.) prennent un caractère quelque peu mystérieux.

P.70. Bruston. Ibidem

Voici comment étaient posées les équations avant Viète.

Vers 1530-1590 notre équation(*) s'écrivait alors :

4ʓ + 3 ℛ esgault 10 ℓ — Léon d'Anvers (11)

4ʓ p̄ 3 ℛ ———— 10 ℓ — De la Roche de Lyon

4ʓ p 3 ℞ m 10 — Peletier du Mans

4 ◊ ρ 3 p [10 — Butéon du Dauphiné

pour ne parler que d'auteurs de langue "francoise" (12).

Il apparaît alors assez que l'écriture de l'équation est presque ce que nous appellerions une sténographie.

x^2 est un symbole mais ʓ est une sténographie.

Sont aussi des sténographies (vers 1515) :

4 Se + 3 Pri is ghelijc 10 (Flandres)

4 □ e 3 C° ———— 10 numeri (Italie)

(*) $4x^2 + 3x - 10 = 0$ (Tiré de " Choses d'algèbre" IREM de Dijon)

Nous ne sommes pas loin d'un système d'étiquettes employé de nos jours en primaire : Que faut-il mettre dans l'étiquette pour que :

$$2 + \boxed{} = 7$$

- erreur j)

-7 ne peut pas être solution car une valeur absolue est toujours positive. Ainsi la mauvaise solution est due à une mauvaise compréhension de la notion de valeur absolue.

En annexe 1 on trouvera une liste d'exercices et questions permettant de mettre en évidence les difficultés recensées.

B - A propos des " non résolutions ".

- Ce sont en fait des reflets de nos "automathismes". Ainsi on pense trop souvent qu'un élève connaissant la technique pour résoudre une équation du type ax + b = c avec coefficients entiers voire des fractions simples est capable de transférer cette même technique à ce même type d'équations quand les coefficients sont des décimaux, des puissance de dix ou des irrationnels. Ceci est faux. D'une part les élèves ont peur des grands nombres ou des nombres " compliqués " (1 023, 402, $10^4 \times 3{,}125$ ...). Peut-être sommes-nous fautifs car bien souvent nous utilisons des nombres simples (il suffit de regarder les exercices des manuels). Ceci explique les blocages pour a et b.

D'autre part, si les coefficients sont des irrationnels (exemple c) le blocage peut provenir du fait que ces irrationnels n'ont pas encore acquis pour l'élève le statut de nombre ou bien qu'ayant acquis le statut du nombre les élèves sont désorientés par leur manque de support concret.

- La non résolution de

$$\frac{x + 2a}{2} = 3a - 2x + 1$$

pose le problème des paramètres. N'est-il pas trop tôt pour en parler d'autant plus que les paramètres sont indésirables en 2nde (Programme officiel 2nde Page 36).

- La non résolution de la dernière équation s'explique aisément : l'inconnue ne s'appelle plus " x ". Cela peut être surmonté si nous varions suffisamment nos notations.

1-4 . A propos de rigueur.

Nous avons déjà rencontré la notion de rigueur (commentaire de l'erreur d)). Il semble indispensable de préciser aux élèves le niveau de rigueur que l'on exige. Ainsi :

- Doit-on exiger un raisonnement par équivalence ?
  Que signifie pour l'élève " si et seulement si ","condition nécessaire, condition suffisante..."
- Doit-on exiger une vérification ?
  Que penser de celle-ci rencontrée en 3ème :

$(x - 2)(x - 3) = 0$

d'où $x - 2 = 0$
ou $x - 3 = 0$

d'où $x = 2$ ou $x = 3$

vérification : $(2 - 2)(3 - 3) = 0$

- Que doit-on exiger lors de la rédaction d'un exercice du type :

Résoudre dans $\mathbb{Z}$:

$(2x + 3)(x - 4) = 4x + 6$

(L'écriture $x = -\frac{3}{2}$ devant en regard du texte être interdite ou alors précédée de : " je résous dans $\mathbb{R}$ cette équation ... ").

2 - Difficultés de mise en équations.

2-1 . Points de vue historiques.

a - Pourquoi mettre en équation ?

" Je crois que je vais choquer certaines gens en affirmant que l'objet le plus important de l'enseignement des mathématiques dans les études secondaires est d'apprendre à mettre les problèmes scolaires en équations. Et pourtant il existe un fort argument de cette opinion.

Lorsqu'il résoud un problème en posant des équations, l'élève commence à s'habituer à relier des concepts mathématiques aux réalités. C'est la première fois que les études offrent l'occasion de cette expérience de base. Cette première occasion peut aussi être la dernière pour un élève qui n'utilisera pas les mathématiques dans son métier. Mais les ingénieurs et les chercheurs qui se servent des mathématiques dans leur profession, les utilisent principalement pour traduire des situations réelles en concepts mathématiques.

En fait, un ingénieur gagne plus d'argent qu'un mathématicien, il lui serait donc possible de louer un mathématicien pour résoudre ses problèmes mathématiques à sa place. Le futur ingénieur n'aurait-il donc pas besoin d'étudier les mathématiques ? Il y a une tâche pour laquelle il ne peut s'en remettre complétement au mathématicien. L'ingénieur doit connaître au moins assez de mathématiques pour pouvoir poser son problème sous forme mathématique.

Lorsqu'il apprend dans le courant de ses études secondaires à poser des équations pour résoudre des problèmes, il a donc l'occasion d'acquérir un comportement qui sera essentiel dans sa vie professionnelle. "
(Polya " La découverte des Mathématiques " tome 1 page 66).

b - Comment mettre en équation ?

* La méthode de Descartes (1596-1650) selon Polya.(Ibidem) :

- Ramener d'abord tout problème à un problème mathématique.
- Ramener ensuite tout problème mathématique à un problème d'algèbre.
- Ramener enfin tout problème d'algèbre à la résolution d'une seule équation.

D'après les Règles pour la direction de l'esprit :

1) Bien comprendre le problèmes, le dépouiller des notions superflues, le réduire à sa forme la plus simple. (Règle XIII).

2) Il est utile, la plupart du temps, de tracer des figures et de les observer afin que notre pensée soit plus facilement attentive. (Règle XV).

3) Pour pouvoir avancer et mémoriser, désigner les choses par des signes très courts. (Règle XVI).

" ... Donc, tout ce qu'il faudra considérer comme un, pour la solution d'une difficulté, nous le désignerons par un signe unique, qu ' on peut imaginer comme on voudra. Mais, pour plus de facilité, nous nous servirons des lettres a, b, c, etc, pour exprimer les grandeurs déjà connues, et A, B, C, etc, pour les grandeurs inconnues ; puis souvent nous placerons devant elles les chiffres 1, 2, 3, 4, etc pour exprimer leurs quantités, et, d'un autre côté, nous leur ajouterons ces mêmes chiffres, pour exprimer le nombre des relations qu'on y devra comprendre : ainsi, si j'écris $2a^3$, ce sera comme si je disais le double de la grandeur désignée par la lettre a, laquelle contient trois relations. Par ce moyen, non seulement nous ferons l'économie d'un grand nombre de mots, mais, ce qui est plus important, nous présenterons les termes de la difficulté si purs et si dépouillés que, sans rien oublier d'utile, on n'y trouvera jamais rien de superflu et qui occupe inutilement l'esprit, quand la pensée devra embrasser plusieurs choses à la fois...

Il faut observer qu'on ne doit jamais rien confier à la mémoire de ce qui ne réclame pas une attention perpétuelle, si on peut le mettre sur papier : il est à craindre, en effet, qu'un effort inutile de la mémoire ne soustraie une partie de notre esprit à l'étude de l'objet présent. Il faut faire un tableau, où nous écrirons les termes de la question, tels qu'ils seront proposés la première fois, puis la manière dont ils sont abstraits et les signes par lesquels ils sont représentés, afin que, quand la solution aura été trouvée avec les signes eux-mêmes, nous l'appliquions facilement, et sans le secours de la mémoire, au sujet particulier dont il s'agira... "

4) Examiner le problème de la manière la plus naturelle, en faisant abstraction du fait que certains termes sont connus et d'autres inconnus, et en établissant leurs relations mutuelles. (Règles XVI).

" ... tout l'artifice sera de supposer connu ce qui est inconnu, de manière à nous donner un moyen facile et direct de recherche même dans les difficultés les plus embrouillées... "

5) Il faut chercher autant de grandeurs exprimées de deux manières différentes, que nous supposons connus de termes inconnus pour résoudre le problème : car ainsi nous aurons autant de comparaisons entre deux choses égales. (Règle XIX).

6) Les équations trouvées, il faut achever les opérations. (Règles XX).

7) S'il y a plusieurs équations de cette sorte, il faudra les ramener toutes à une seule. (Règle XXI).

* La méthode de Viète (1540-1603). <u>Introduction à l'Art Analytique.</u>

" Par la méthode Zététique on trouve l'égalité ou la proportion entre les grandeurs cherchées et celles qui sont données, par la méthode Poristique on examine, au moyen de l'égalité ou de la proportion, la vérité d'un théorème énoncé : par la méthode Exegétique on dégage la grandeur cherchée de l'égalité ou de la proportion qui la renferme. Par conséquent, l'Art analytique, qui dans son ensemble embrasse ces trois méthodes, pourra à juste titre être défini : " La science de bien trouver dans les mathématiques " . " (chap. 1).

" Les grandeurs données aussi bien que les grandeurs cherchées suivant la condition de la question seront combinées et comparées par voie d'addition, de soustraction, de multiplication et de division...

Il est donc évident que l'on finira toujours par trouver quelque égalité dans laquelle entrera la grandeur qu'on cherche ou une de ses puissances, ou son produit par des grandeurs données...

Afin que cette méthode (zététique) soit aidée par quelque artifice, on distinguera les grandeurs données des grandeurs inconnues et cherchées en les représentant par un symbole constant, invariable et bien clair, par exemple, en désignant les grandeurs cherchées par la lettre A ou par toute autre voyelle E, I, O, U, Y, et les grandeurs données par les lettres B, C, D ou par d'autres consonnes... " (chap. 5).

" Dans l'Analyse, le mot équation employé seul, est pris pour désigner une Egalité ordonnée régulièrement par la méthode zététique.

Une équation est donc la comparaison d'une grandeur inconnue avec une grandeur connue..." (chap. 8).

* Arnault : Nouveaux éléments de géométrie (1667). p. 18.

" Il est souvent utile de trouver des équations, et l'un des plus grands secrets pour les trouver est de pouvoir donner à une même grandeur diverses dénominations, parce que souvent une dénomination en fait voir l'égalité avec une autre autre grandeur qu'une autre dénomination n'aurait pas fait voir ".

DONC :

- compréhension du problème et simplification.
- utilisation de figures pour appréhender le problème.
- substitution de lettres pour les données et l'inconnue.
- recherche de l'égalité (en considérant tout comme donné).
- résolution de l'équation.
- vérification.
- quand il y a plusieurs équations se ramener à une seule.

2-2 . Nos difficultés actuelles.

Elles portent surtout sur la compréhension du texte : les élèves ont de plus en plus de mal à lire (c'est-à-dire comprendre) un texte écrit en français. Il faut préciser que les textes simples conduisant à une équation du premier degré ne nécessitent en général pas une mise en équation. L'élève préfère dans ce cas utiliser des techniques de l'école primaire qui reposent sur le bon sens. (Ex. : une parcelle rectangulaire de 500m^2 a une longueur double de sa largeur. Quelle est la longueur ?).

Voici une progression possible :

- Donner aux élèves des problèmes de mise en équations avec des textes non rédigés. (Voir Annexe II).

- Donner aux élèves des textes rédigés qui motivent les élèves :

  - Devinettes,
  - Problèmes à énoncés simples,
  - Problèmes concrets,
  - Problèmes historiques.

Un choix de tels exercices est proposé en Annexe III, IV, V et VI.

II - NOS CHOIX.

1 - Ce que tous les élèves doivent savoir faire fin de 3ème.

a - Résoudre une équation " simple " se ramenant à ax + b = 0,

par " simple " on entend :

* $2x + 3 = 0$

* $\frac{2x}{5} = \frac{3}{7}$

* $\frac{m}{5} - \frac{m - 2}{3} = 4m + 1$

* $\frac{2t}{7} - \frac{3t - 4}{2} = \frac{5}{14} - 2(t - 5)$

* $\frac{x + 2}{14} - \frac{2x + 1}{6} + \frac{x - 1}{7} = \frac{3x - 7}{14} + \frac{x - 1}{3}$

* $\sqrt{7} + x = \sqrt{5}x + 4$

b - Résoudre une équation " simple " se ramenant à un produit de facteurs du type ax + b,

par " simple on entend :

* $2x(-x + 5)(2x + 1) = 0$

* $-3(2x - 1)(4x - 3) + 5(1 - 2x)(x + 2) = 0$

* $5(2x - 3)(x - 4) = 3(2x + 1)(2x - 3)$

* $4(x - 3)^2 - 9(2x + 1)^2 = 0$

* $(5x - 2)^2 = (2x + 3)^2$

* $4(x - 1)^2 - 25 = 0$

* $9x^2 + 60x + 100 = 0$

* $(2 - y)^2 = (5 + y)^2 - 7^2$

a et b mettent en cause des techniques " canoniques " de résolution.

c - Mettre en équation un problème " simple ". Par simple on entend facilement analysable en français.

- Dans un classe la moitié des élèves sont nés en 1969, le quart en 1968, le sixième en 1967 et le reste soit 3 élèves en 1970.
Combien y a-t-il d'élèves dans la classe ?

- Un rectangle mesure 24 m sur 18 m. On veut diminuer un côté et augmenter l'autre, sans changer le périmètre, ni l'aire.
Cela est-il possible ?

- Dartagnan dit aux mousquetaires :
" J'ai dépensé 3 écus de plus que le cinqième de ma bourse et il me reste 6 écus de plus que la moitié de ce que j'avais en entrant ici. "
Combien Dartagnan avait-il d'écus en entrant ?

2 - Ce qui n'est pas exigible de tous les élèves et qui est hors d'un apprentissage systématique en 3ème.

- La résolution d'équations du type :

* $\frac{2x + 3}{x + 5} = -1$ (inconnue au dénominateur)

* $\sqrt{3x + 1} = 4$ (racines)

En effet les techniques de résolution sont plus difficiles et nécessitent un apprentissage spécifique sur la condition d'existence des solutions. (Notons que le mot " fonction " n'est pas prononcé dans le programme du premier cycle, ce qui exclut de fait les fonctions rationnelles, les fonctions racines et la notion de domaine de définition...)

Les raisonnements que l'on doit employer ne sont plus des raisonnements par équivalence ou alors il faut y adjoindre en permanence les conditions d'existence.

- La résolution d'équations comportant des valeurs absolues ;

Les résolution d'équations du type

$2 |x| + 5 = 6$

$|3x - 1| = |-5x + 6|$

$|x - 3| + |x - 1| = 2$

n'apportent rien ni sur la compréhension d'équation du premier degré ni sur la notion de valeur absolue.

Rappelons que :

- les fonctions affinées par morceaux ne font plus partie des programmes de 3ème et que leur étude n'est plus au programme de seconde.

- la valeur absolue est notifiée en 2nd cycle pour définir la distance de $\mathbb{R}$ (analyse). Ce qui pourrait éventuellement être utile aux élèves sur les valeurs absolues, ce sont des traductions :

Résoudre $|x - 3| = 2$ c'est rechercher l'ensemble des x à une distance 2 du nombre 3 sur la droite réelle.

On pourra consulter l'article de Duroux in " Petit x " n°3 (IREM de Grenoble). "Difficulté majeure pour une notion mineure ".

- La résolution d'équation nécessitant une mise en facteur celle-ci n'étant pas apparente.

Ex. : $t^3 - 16 + 4x^2 - 4x = 0$

De tels exercices peuvent cependant être proposés comme exercices de recherche. Le but est alors de développer certaines aptitudes (Annexe VIII) et non de faire acquérir des mécanismes.

LE TEST

Nos objectifs.

- Essayer de savoir l'idée que les élèves se font de la notion d'équation et essayer d'apprécier le décalage entre ce que nous enseignons et ce que l'élève comprend et retient.

- Avoir des éléments d'analyse de difficultés et blocages dont nous pressentons l'existence.

- Avoir un outil pour tenter de se placer dans le cadre d'une évaluation formative.

Le test porte sur :

- La notion d'équation : savoir ce que recouvre l'expression " résoudre une équation ".
- La notion d'inconnue.
- La difficulté de résolution compte tenu de l'ensemble auxquels appartiennent coefficients et solutions.

Test voir feuille jointe après.

Les résultats.

Ce test a été soumis à 8 classes de 3ème et les résultats ont permis aux professeurs de se poser de nombreuses questions, les amenant à revoir leur façon d'enseigner les équations et d'évaluer les acquisitions sur cette notion.

EQUATIONS

1 - Que veut dire pour toi " résoudre une équation ".

2 - $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ peut-il être solution d'une équation ?

3 - L'écriture $100{,}4x - 200{,}3 = -\ 0{,}008$ représente-t-elle une équation ?

4 - Quels sont parmi les nombres suivant 2 ; 0 ; -1 ceux qui sont solution de l'équation

$$2x^2 + 6x = x^3 + 12$$

Précise ta méthode.

5 - $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ est-il solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$?

6 - Peux-tu trouver une solution de l'équation

$$x^3 - 3x^2 - x = 0$$

Penses-tu que c'est la seule ?

7 - Si tu calcules a tel que : $\frac{a}{8} = -\frac{6}{5}$? Résous-tu une équation ?

8 - Construis une équation dont :

2 est la solution,

2 est une solution.

9 - Construis une équation dont :

2 et 5 sont les solutions,

2 et 5 sont des solutions.

10 - Construis une équation qui n'a pas de solution. Est-ce possible ?

11 - Construis une équation dont tout réel est solution.

12 - L'écriture 4✤^{3} - 2✤^{2} = 3 représente-t-elle une équation ?

13 - A, B et C étant trois points du plan, chercher le vecteur $\vec{v}$ tel que :

$$2\vec{v} + 3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC},$$

Est-ce résoudre une équation ?

14 - Les deux écritures $x + 4 = 2$ et $a + 4 = 2$ représentent-elles :

- deux équations différentes,
- une et une seule équation.

15 - $\frac{2}{3}x$ est-il solution de l'équation $x - \frac{2}{3}x = 0$?

16 - On veut résoudre l'équation $x^2 + 2x - 3 = 0$.

Voici les résolutions proposées par Dominique, Paul et Jean :

Dominique	Paul	Jean
" $x^2 + 2x - 3 = 0$	" $x^2 + 2x - 3 = 0$	" $x^2 + 2x = 0$
donc $x^2 = - 2x + 3$	$x^2 = - 2x + 3$	$2x = -x^2 + 3$
d'où $x = \sqrt{-2x + 3}$	$x = \dfrac{-2x + 3}{x}$	$x = \dfrac{-x^2 + 3}{2}$
La solution est $\sqrt{-2x + 3}$	La solution est : $\dfrac{-2x + 3}{x}$ "	La solution est : $\dfrac{-x^2 + 3}{2}$ "

Qui a raison ?

17 - " $2(x - 4)(x + 3) = 0$

$2 = 0$ $\quad x - 4 = 0 \quad x + 3 = 0$

$x = 4 \quad x = -3$

donc $S = \{0 \ ; \ 4 \ ; \ -3\}$ "

Es-tu d'accord ? Explique.

18 - Voici la résolution de $(x - 3)(x - 5) = 0$ proposée par Noëlle :

"$(x - 3)(x - 5) = 0$

$x - 3 = 0 \quad x - 5 = 0$

$x = 3 \quad x = 5$

Vérification : $(3 - 3)(5 - 5) = 0 \times 0$

$= 0$ "

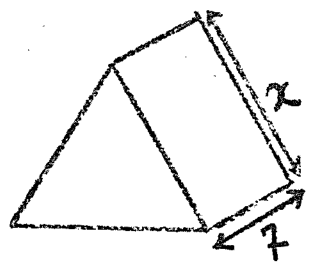
Qu'en penses-tu ?

Annexe II

Exemples de mise en équation et
de résolution d'équations sans l'obstacle du texte.

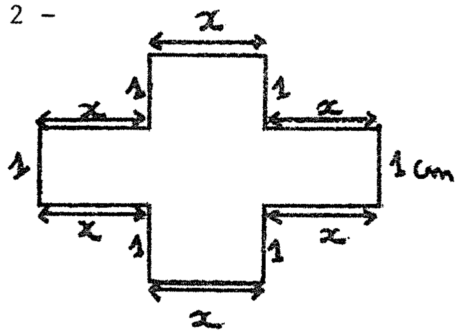
---

1 -



Trouver la valeur de x de façon que le **périmètre** du triangle équilatéral soit le même que **celui du** rectangle.

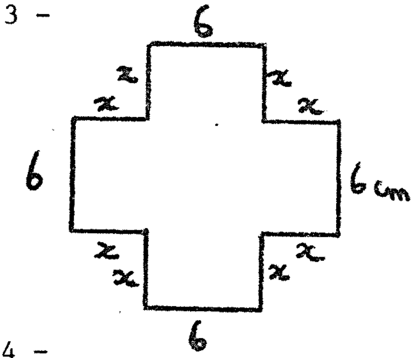
2 -



Trouver x pour que le périmètre de la **croix soit** égal à 15 cm.

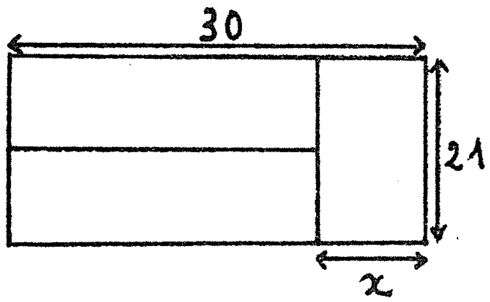
Trouver x pour que l'aire de la croix **soit égale** à 8 cm^2 .

3 -



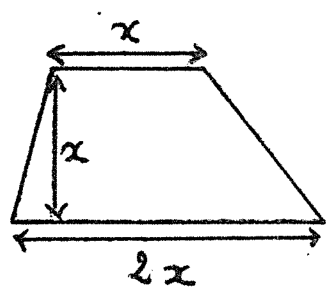
Trouver x pour l'aire de la croix soit **égale à** 30 cm^2 .

4 -



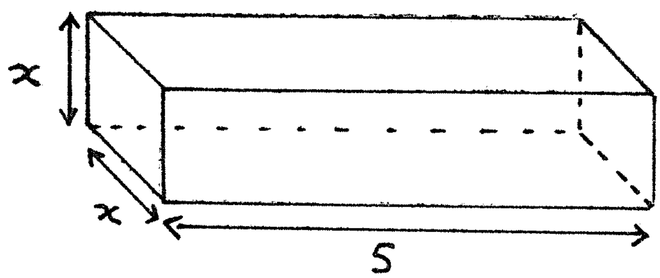
Trouver x pour que les trois rectangles **aient le** même périmètre.

5 -

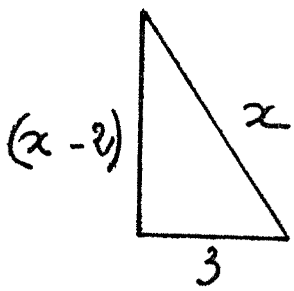


Trouver x pour que l'aire soit égale **à 24** cm^2 - puis à 23 cm^2 .

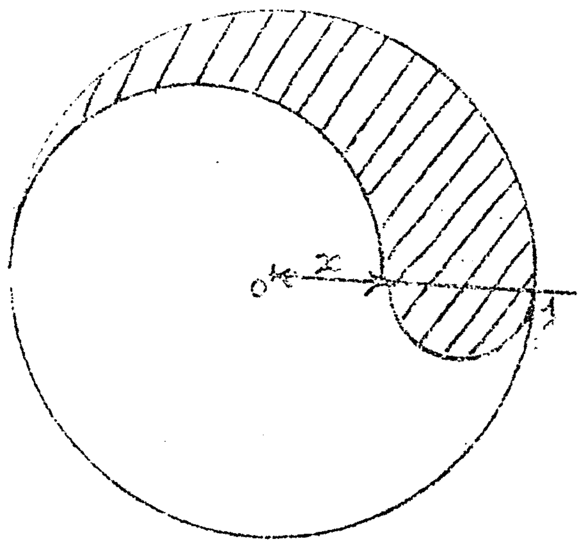
6 - Trouver x pour que le volume soit égal à 45 m^3 - à 40 cm^3 .



7 - Trouver x.



8 - Calculer x pour que l'aire hachurée soit le quart de l'aire non hachurée.



Annexe III

Devinettes et problèmes algébriques à énoncés simples

1 - Je pense un nombre ; je le multiplie par 2 ; je retranche 5 ; je multiplie par 5 ; j'ajoute 25 - J'obtiens 70. Quel est ce nombre ?

2 - Je pense un nombre ; je le multiplie par 5 ; je divise par 2 ; j'ajoute 3 - J'obtiens 18. Quel est ce nombre ?

3 - Je pense un nombre ; je retranche 2 ; je divise par 3 ; j'ajoute 10 - J'obtiens 7. Quel est ce nombre ?

4 - Six entiers consécutifs ont pour somme 9 519.
Quel est le premier de ces six entiers ?
Et si la somme était 9 520 ?

5 - Trouver le nombre dont les $\frac{2}{3}$ plus les $\frac{3}{4}$ font 1 241 .

6 - Quels sont les nombres dont la puissance quatrième égale neuf fois le carré ?

7 - Quel est le nombre dont le double plus 16 égale le triple moins 21 ?

8 - Quel est le nombre dont le quadruple moins 24 égale le triple moins 3 ?

9 - Trouver 3 nombres impairs consécutifs, tels que leur somme soit 567.

10 - La somme de deux nombres est 664. Leur quotient exact est 7. Quels sont ces deux nombres ?

Mise en équation

1 - La somme des âges d'Emilie, de sa mère, et de sa grand-mère est 90 ans. Trouver l'âge de chacune sachant que la grand-mère a le double de l'âge de la mère d'Emilie et l'âge d'Emilie est le tiers de celui de sa mère.

2 - Un homme de 40 ans a un enfant de 9 ans. Dans combien de temps l'âge du père sera-t-il le double de l'âge de son enfant ?

3 - Claire dépense chaque jour la moitié de ce qu'elle a dans sa tirelire plus 70 francs. Au bout de 3 jours, elle n'a plus rien. Quelle somme avait-elle ?

4 - Marc a eu respectivement 11 et 16 aux deux premiers devoirs de mathématiques. Quelle note doit-il avoir au troisième pour obtenir une moyenne de 15 ?
Peut-il obtenir 16 de moyenne ?
Jean a eu 15 et 18 aux mêmes devoirs. Quelle note peut-il se permettre d'avoir au 3ème devoir pour n'obtenir qu'un 10 de moyenne ?

5 - Aux dernières élections il y a eu 5 219 votants. Le scrutin fut très serré et W gagna avec 23 voix d'avance sur X, 30 sur Y et 73 sur Z.
Combien de voix eut W ?

6 - " Bien le bonjour, Monsieur l'agent - dit Mr Mc Guire. - Pouvez-vous me dire l'heure ? "
" Mais bien sûr, répondit l'agent qui avait une réputation de mathématicien. Ajoutez au quart du temps depuis minuit , la moitié du temps jusqu'à minuit et vous aurez l'heure exacte. "
Quelle heure était-il donc ?

7 - Marie réfléchit : " Si j'avais mangé quatre bonbons de moins je n'aurais consommé que le quart du sachet ; lorsque j'aurai mangé 3 bonbons de plus, il ne m'en restera plus que les deux-tiers. Combien de bonbons contenait le sachet de Marie ?

8 - Alphonse laisse un héritage à sa veuve, à sa fille et à son fils. Le testament stipule que la veuve en recevra la moitié diminuée d'une somme de 40 000 Frs ; la fille en recevra le tiers augmenté d'une somme de 24 000 Frs ; le fils en recevra exactement le quart. Calculer le montant de l'héritage, et la part de chacun.

9 - Une colonie de fourmies mange les $\frac{2}{3}$ de sa réserve de grains de blé dans les deux premiers mois de l'hiver, puis le quart de ce qui lui reste les trois mois suivants. Elle possède encore 216 grains de blé.
Quelle était la réserve avant l'hiver ?

10 - J'ai lu un livre de 250 pages en 5 jours. Chaque jour, j'ai lu 10 pages de plus que la veille.
Combien ai-je lu de pages le premier jour ?

11 - Dans une classe la moitié des élèves sont nés en 1969, le quart en 1968, le sixième en 1967 et le reste soit 3 élèves en 1970.
Combien y a-t-il d'élèves dans la classe ?

12 - Un rectangle mesure 24 m sur 18 m. On veut diminuer un côté et augmenter l'autre, sans changer le périmètre, ni l'aire.
Cela est-il possible ?

13 - Dartagnan dit aux mousquetaires :
" J'ai dépensé 3 écus de plus que le cinquième de ma bourse et il me reste 6 écus de plus que la moitié de ce que j'avais en entrant ici. "
Combien Dartagnan avait-il d'écus en entrant ?

14 - Un touriste, dans une excursion de montagne, s'élève en moyenne de 300 m par heure de marche ; lorsqu'il redescend il s'abaisse en moyenne de 450 m par heure de marche. On demande de quelle hauteur ce touriste a pu s'élever s'il est parti à 7 heures et s'il est revenu à son point de départ à 18 h 45 mm après s'être arrêté 4 h 1/4 au cours de son excursion.

15 - Des amis font un repas en commun. En versant chacun 60 Frs il manque 30 Frs pour payer la note. S'ils versent chacun 70 Frs ils ont 90 Frs de trop. Trouver le nombre de personnes et le prix d'un repas.

16 - 18 personnes mangent eu restaurant. Le menu est à 36 Frs. 3 personnes ont oublié leur portefeuille. Combien les autres doivent-ils payer ?

Annexe IV

Applications " concrètes " : transfert

1 - Mélanges.

* 1 kg d'eau de mer contient 50 g de sel (ou 5% de sel).
  Combien faut-il rajouter d'eau pure pour que 1 kg du nouveau mélange contienne 20 g de sel (ou 2% de sel) ?

* Quand on dissout un corps A dans un solvant S la concentration en masse de la solution obtenue est donnée par :

$$C = \frac{m_A}{m_A + m_S}$$

m_A : masse du corps dissous
m_S : masse du solvant

On a 100 g de solvant et une concentration de 12%. Quelle est la masse de corps A dissous ?

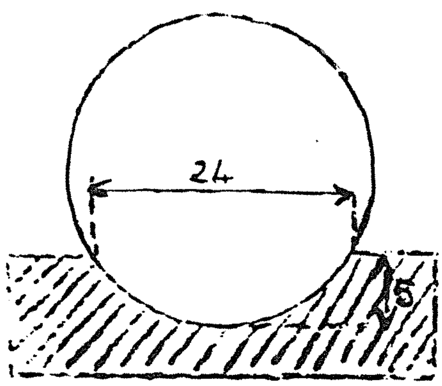
2 - Vitesses.

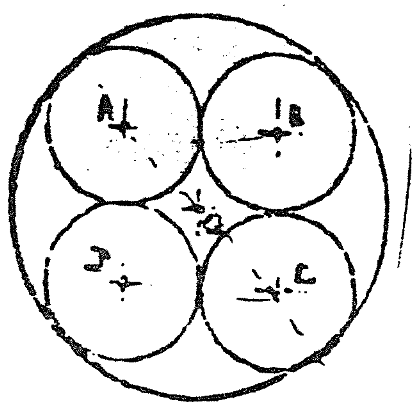
* La vitesse du son est de 340m/s dans l'air et de 1 400m/s dans l'eau.
  D'un bateau on enregistre le bruit d'une explosion sous-marine 10,6 s plus tôt par l'eau que par l'air.
  Calculer la distance qui sépare le croiseur au lieu de l'explosion.

* Je vois un éclair. 10 s après j'entends le bruit du tonnerre. Sachant que la lumière se propage à 300 000 km/s et le son à 340 m/s, à quelle distance l'orage se trouve de moi ?

3 - Technologie.

* Fig. 1 : Calcule le diamètre de la fraise nécessaire pour creuser la pièce hachurée. Les côtes ont en mm.





* Fig. 2 : Cette figure représente un tube électrique de diamètre 9 mm dans lequel passent 4 conducteurs cylindriques identiques, tangents entre eux et tangents au tube. Quel pourra être au maximum le diamètre d'un conducteur ?

4 - <u>Esthétique</u>.

D'après Lorentz il existe une relation " idéale " entre la taille T en cm et le poids M en kg d'un individu.

- Pour l'homme : $M = T - 100 - \dfrac{T - 150}{4}$
- Pour la femme : $M = T - 100 - \dfrac{T - 150}{2}$

Quelle devrait être la taille idéale d'un homme de 90 kg ? Et la taille idéale d'une femme de 75 kg ?

Annexe V

Casse têtes

I - 1) (D'après un texte ancien)

" Un jour le cuisinier d'un puissant personnage
Afin de contenter trois filles du village
Qui demandaient des œufs , leur dit en les voyant :
Je vais donner tous ceux que j'ai dans ce moment.
Il donne la moitié d'abord à la première
Et la moitié d'un œuf par faveur singulière ;
A la seconde, il offre aussi du meilleur cœur
La moitié du restant avec même faveur
Et la moitié d'un œuf dont la fille s'empare.
Enfin continuant son partage bizarre,
Il donne à la troisième avec même amitié
De son troisième reste encor l'humble moitié
Plus la moitié d'un œuf ; il eut donc l'avantage
De tout distribuer. Dans cet heureux partage
Qui paraît singulier, combien en avait-il ?
Et comment a-t-il eu l'esprit assez subtil
Pour donner des moitiés à chaque jeune fille
Sans en casser un seul, ni s'échauffer la bile ? "

Combien a-t-il donné d'œufs à chacune ?

2) A quoi est égal le nombre 84 si 8 X 8 = 54 ?

Second degré.

3) Je fais la sieste au bord d'une petite rivière de 5 m de large. J'aperçois, juste en face de moi, un bâton planté au milieu de la rivière et qui dépasse de 1 m. J'ai envie de l'attirer vers moi, j'ai le bras long. J'y parviens et je constate alors que l'extrémité du bâton touche juste la berge. Puis-je traverser sans me noyer, sachant que je mesure 1,60 m et que je ne sais pas nager ?

4) Les participants à une conférence ont échangé des poignées de main, et l'un d'eux a compté qu'il y avait eu en tout 66 poignées de main. Combien de personnes ont assisté à la conférence ?

II - Ages.

1) *Voilà comment, avec de la patience, on arrive à tout !*

" - Non Monsieur, je regrette mais je ne puis vous accorder la main de ma fille. Elle est beaucoup trop jeune (16 ans) et vous avez trois fois son âge ! Vous pourriez largement être son père !

- Mais Monsieur, si, au lieu du triple de son âge, j'en avais le double, m'accorderiez-vous sa main ?
- Ah ! dans ce cas, je ne dirais pas non !
- Bien, alors j'attendrai ! "

Combien de temps ?

2) Dans une famille de 4 enfants nés à 2 ans d'intervalle, l'ainé est deux fois plus âgé que le petit dernier. Quel âge a-t-il ?

3) Un père a 32 ans ; son fils a 5 ans. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il égal à dix fois l'âge du fils ?

III - Durées.

1) Une secrétaire mettrait 2 heure pour frapper un chapitre. Une autre mettrait 3 heures.
Si elles se partagent le travail, de manière à finir ensemble, combien peuvent-elles mettre de temps ?

2) Il faut trois heures à Pierre pour faire seul un certain travail, il faudrait quatre heures à Paul, et six à Jacques.
S'ils travaillent ensemble (sans se gêner) combien de temps leur faudra-t-il ?

IV - Heures.

1) " - Bien le bonjour , Monsieur l'agent - dit Mr McGuire.
- Pouvez-vous me dire l'heure ? "

" Mais bien sûr, répondit l'agent qui avait une réputation de mathématicien. Ajoutez au quart du temps depuis minuit, la moitié du temps jusqu'à minuit et vous aurez l'heure exacte. "
Quelle heure était-il donc ?

2) " Quelle heure est-il ? " demandait un quidam à Pythagore.
" Il reste encore de la journée, deux fois les deux tiers de ce qui est déjà écoulé " lui répondit le philosophe.
Quelle heure est-il donc ?

3) Entre 6 h et 7 h à quelle heure les aiguilles d'une montre se superposent-elles ?

V - Vitesses.

1) Un père et son fils décident de faire une course poursuite contre la montre à bicyclette.
Le père - champion cycliste - laisse 3/4 d'heure d'avance à son fils. Au bout de combien de temps le père aura-t-il rattrapé son fils sachant qu'ils roulent respectivement aux vitesses constantes de 44 km par heure et 24 km par heure ?

2) Nicole s'est vu confier par sa mère un manuscrit à taper à la machine. Elle décide de taper en moyenne 20 pages par jour. Mais, manquant d'habitude, elle tape la première moitié du manuscrit à raison de 10 pages par jour seulement. Puis elle réussit à adopter un rythme de 30 pages par jour, et, son travail une fois achevé, elle se vante devant sa mère d'avoir réalisé la moyenne prévue.
" - Tu fais erreur, affirme la mère en souriant.
- Comment ? 10 + 30 = 40 ; 40 : 2 = 20 . J'ai comblé mon retard de la première moitié en faisant 10 pages de plus par jour pour la seconde partie du manuscrit !
- Il n'en reste pas moins, réplique la mère, que tu as tapé en moyenne moins de 20 pages par jour. Réfléchis bien ! "

A qui donnez-vous raison ? A Nicole ou à la mère ?

(Extrait de KORDIEMSKY " Sur le sentier des mathématiques ", Dunod).

3) Le Renard et le Lièvre. (Problème ancien).
Un renard, poursuivi par un lévrier, a 60 sauts (de renard) d'avance.
Il fait 9 sauts pendant que le lévrier n'en fait que 6, mais 3 sauts de lévrier valent 7 sauts de renard.
Combien le lévrier fera-t-il de sauts avant d'atteindre le renard ?

4) La distance de Paris à Dijon est de 315 km ; un train parcourt cette distance en 2 h 30 mn. Quelle est la vitesse de ce train ? Pour rattraper un retard éventuel ce train peut rouler à 140 km/h. Quelle est la durée maximum du retard au départ de Dijon qui peut être rattrapée avant l'arrivée à Paris ?
Le train part de Dijon à l'heure prévue avec la vitesse calculée au début. Il roule ensuite à 140 km/h et arrive à Paris à l'heure prévue. A quelle distance de Paris l'arrêt s'est-il produit ?

5) Une promenade.
Problème.
- Venez me voir demain dans l'après-midi, a dit le vieux médecin à un jeune homme de sa connaissance.
- Merci. Je sortirai à trois heures. Si l'envie vous prend de vous promener un peu, sortez à la même heure, nous nous rencontrerons à mi-chemin.
- Mais vous oubliez que je suis vieux, que je ne fais que 3 km à l'heure, tandis que vous faites au minimum 4 km à l'heure. Vous devriez me laisser une certaine avance.
- D'accord. Puisque je fais 1 km de plus que vous à l'heure, je vous fais cadeau de ce kilomètre et je sortirai un quart d'heure plus tôt. Cela suffit ?
- C'est très aimable à vous, a répondu le vieillard.

Le jeune homme a tenu sa promesse. Il sortit à 3 heures moins le quart et marcha à une vitesse de 4 km à l'heure. Le médecin sortit à 3 heures précises et alla à une vitesse de 3 km à l'heure. Quand ils se furent rencontrés, le vieillard rebroussa chemin et rentra à la maison accompagné de son jeune ami.

Plus tard, revenu chez lui, le jeune homme se rendit compte qu'à cause du quart d'heure accordé au médecin, il avait fait un chemin quatre fois plus long que celui fait par le médecin.

Quelle est la distance qui sépare la maison du médecin de celle de son jeune ami ?

6) Une reconnaissance navale.
Premier problème.
Un contre-torpilleur qui naviguait avec l'escadre a reçu l'ordre de reconnaître un secteur long de 70 milles dans la direction du mouvement de l'escadre. La vitesse de cette dernière est de 15 milles à l'heure et celle du contre-torpilleur 28 milles.
Trouvez dans combien de temps le contre-torpilleur reviendra à l'escadre.

Second problème.

Un contre-torpilleur a reçu l'ordre de faire une reconnaissance dans la direction du mouvement de l'escadre. Dans trois heures il devra rejoindre l'escadre. Au bout de combien de temps après avoir quitté l'escadre le contre-torpilleur devra-t-il rebrousser chemin, si sa vitesse est de 25 milles à l'heure et celle de l'escadre de 15 milles ?

7) Le tramway et le piéton.
Problème.

Alors que je suivais les rails du tramway, je remarquai qu'un tram me dépassait toutes les 12 minutes, et que toutes les 4 minutes j'en croisais un. Moi et les tramways, nous nous déplacions à une vitesse uniforme.

A quels intervalles les tramways quittaient-ils leurs terminus ?

HISTORIQUE

A travers l'histoire

1 - Epitaphe de Diophante. (1700 ans environ)

" Passant, c'est ici le tombeau de Diophante ; c'est lui qui par cette étonnante disposition, t'apprend le nombre d'années qu'il a vécu. Sa jeunesse en a occupé la sixième partie ; puis sa joue se couvrit d'un premier duvet pendant la douzième. Il passa encore le septième de sa vie avant de prendre épouse et, cinq ans plus tard, il eut un bel enfant, qui, après avoir atteint la moitié de l'âge de son père, périt d'une mort malheureuse. Son père fut obligé de lui survivre, en le pleurant, pendant quatre ans.
De tout ceci, déduis son âge. "

2 - Arnault. Nouveaux éléments de géométrie (1667).

DE GEOMETRIE LIVRE I. 21

SECOND EXEMPLE.

AYANT rencontré des pauvres & leur voulant donner à chacun 5 sols, j'ay trouvé que j'en avois un de trop peu. Et ainsi ne leur en ayant donné qu'à chacun 4, il m'en est resté 6. Combien y avoit-il de pauvres, & combien avois-je de sols.

Soit le nombre des pauvres appellé A.
Par l'hypothese
$5A - 1 = 4A + 6$.
Donc ajoûtant 1 de part & d'autre
$5A = 4A + 7$.
Donc ostant 4 A de part & d'autre
$A = 7$.
Donc il y avoit 7 pauvres. Et j'avois 34 sols.

3 -

Problèmes du temps jadis

Deux tours élevées l'une de 30 pas, l'autre de 40, sont distantes de 50 pas ; entre les deux se trouve une fontaine vers le centre de laquelle deux oiseaux descendant des sommets des deux tours se dirigent du même vol et parviennent dans le même temps : quelles sont les distances horizontales du centre de la fontaine aux deux tours ? (Léonard de Pise, *Liber Abaci*, 1202).

D'un arbre haut de 100 coudées un singe est descendu et se rend à un étang distant de 200 coudées, pendant qu'un autre singe, sautant d'une certaine hauteur au-dessus de l'arbre, se rend rapidement au même point par la diagonale. Si l'espace parcouru par les deux singes est le même, dis-moi vivement, homme savant, la hauteur du saut, si tu as appris à calculer rapidement (Bhâskara, *Lilâvati* et *Vija Ganita*).

4 - Papyrus égyptiens.

* Sur un tas de blé de 21 mesures, le paysan doit en donner au pharaon une part égale au cinquième de la sienne.
Que lui reste-t-il ?

* La quantité et son septième font 19. Quelle est la quantité ?

5 - Viète. Zetetiques.

ZETETIQVE III.

Estant donnée la perpendiculaire d'vn triangle rectangle, & la difference de la base à l'hypotenuse : trouuer la base & hypotenuse.

ZETETIQVE IV.

Estant donnée la perpendiculaire d'vn triangle rectangle, & la somme de la base & hypotenuse ; trouuer la base & hypotenuse.

ZETETIQVE V.

Estant donnée l'hypotenuse d'vn triangle rectangle & la difference des costez d'autour l'angle droit ; trouuer iceux.

6 - Ben Ezra " Liber augmenti et dimintionis vocatus numeratio divinationis...",

attribué à Abraham Ben Ezra, né à Tolède vers 1090 et mort à Rome (?) en 1167. Ben Ezra a voyagé beaucoup, de l'Egypte à Londres et a écrit entre autres le livre de l'Unité, le livre du Nombre. Lui doit-on aussi le "Liber augmenti et diminutionis..." ? les avis sont partagés.

• L'extrait suivant est intitulé "le chapitre des fruits" (Capitulum de pomis) [8] p. 336 à 338.

Chapitre des fruits.

"Et si on dit : un homme est entré dans un verger et il y a cueilli des fruits. Mais le verger avait 3 portes, gardées chacune par un gardien. Cet homme donc partagea les fruits avec le 1er et lui en donna deux de plus, puis il partagea avec le 2ème et lui en donna deux de plus, enfin partagea avec le 3ème, lui en donna deux de plus, et il sortit en ayant seulement 1 fruit. Combien de fruits a-t-il cueilli ?

x : nombre de fruits

$$x - \frac{x}{2} - 2 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x}{2} - 2\right) - 2$$

$$- \frac{1}{2}\left[x - \frac{x}{2} - 2 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x}{2} - 2\right) - 2\right] - 2 = 1$$

7 - Vieux traité d'arithmétique chinois. Chiu-Chang Suan-Shu.

1.

Une quantité inconnue de riz brut est mise dans une cuve dont la capacité est 10 tou. On ajoute alors des grains pour remplir la cuve, et quand on les pile pour enlever la balle, on trouve qu'il y a au total 7 tou de riz. Quelle est la quantité de riz initiale ?

1 tou de grains donne 6 sheng de riz
1 tou = 10 sheng

$$x + \frac{6}{10}(10 - x) = 7$$

2.

"Un homme investit une certaine quantité d'argent au Szechuan. A chaque stade, son principal et son intérêt sont les 130% du capital précédent. Il retire 14,000 ch'ien la première fois, 13,000 la deuxième fois, 12,000 la troisième fois, 11,000 la quatrième fois, 10,000 la dernière fois. Après son cinquième retrait, il a épuisé capital et intérêt. Trouver les montants de l'investissement initial et de l'intérêt total."

8 - Francès Pellos - 1492 - Compendion de l'Abaco. (Occitan niçois).

1) Trouve un nombre tel que quand nous aurons enlevé le tiers et le quart, il restera 3.

2) De même la charge de percevoir l'impôt sur le grain se vend à Nice pour 2000 florins, parce que de chaque setier (1) qui se moud ou se pourrit, le receveur qui l'achète doit avoir son droit, c'est-à-dire que les citadins ont à payer un quart de gr. (2) par setier et les boulangers ont à payer un gr. un quart.
Vous disant que la répartition se fait : 1 tiers pour le boulanger, et deux-tiers pour les citadins, je demande combien de setiers il est nécessaire qu'il passe pour rembourser les 2000 florins..
(1) setier : mesure de volume. (2) abréviation de gros. 1gr.= $\frac{1}{12}$ florin.

3) Une lansa ha la mytat et lo ters en ayga, et 9 palms defora. Ademandi can ha de lonc.

Une lance a la moitié et le tiers dans l'eau et 9 pans à l'extérieur. Je demande sa longueur.

4) De même deux marchands viennent de la foire. L'un a 20 sacs de laine pour lesquels il paie comme gabelle un sac de laine, et le gabellier lui retourne 2L. de monnaie et il est bien payé. Le second a 60 sacs de laine pour lesquels il paie au gabellier 2 sacs de laine, et 6L de monnaie en plus.
Je demande combien vaut le sac de laine et combien ils ont payé de gabelle pour chaque sac.

5) De même un seigneur veut faire faire une chaîne pour en faire don c'est-à-dire présent à une dame. Pour cela il trouve un maître-orfèvre, et lui demande en combien de temps il peut lui expédier la dite chaîne. Le maître répond et dit : en 30 jours. Et comme le seigneur voudrait, si cela était possible, avoir la dite chaîne en moins de temps, il dit alors au maître : vous ne travaillerez pas tous les 30 jours, que cela prend pour expédier la dite œuvre. Par suite, ils décidèrent que les jours où le maître travaillerait le seigneur lui donnerait 5gr., et les jours où il ne travaillerait pas, le maître restituerait 7 gr. au seigneur et ils tombent d'accord. Et au bout des dits 30 jours, le maître porta la chaîne au dit seigneur, et ils firent compte selon les accords susdits, c'est-à-dire des jours où le maître avait travaillé et de ceux où il n'avait pas travaillé, et ils trouvent que le maître n'a-

vait ni à recevoir ni à donner.

Je demande combien de jours il a travaillé et combien il n'a pas travaillé.

9 - Diophante.

1. *Dic Heliconiadum Decus ô sublime sororum,*
Pythagora, tua quot tirones tecta frequentant,
Qui sub te, sophiæ sudant in agone, magistro.
Dicam, tuque animo mea dicta, Polycrates, hauri.
Dimidia horum pars præclara Mathemata discit;
Quarta immortalem naturam nosse laborat.
Septima, sed tacitè, sedet, atque audita revolvit.
Tres sunt feminei sexûs, at prima Theano.
Pieridum arcanis tot vates induo sacris.

Dis-moi, illustre *Pythagore*, combien de disciples fréquente ton école et écoutent tes instructions. Le voici, répond le ph losophe : Une moitié étudie les mathématiques, un quart l musique, un 7e. garde le silence, et il y a trois femmes par dessus. Ainsi il s'agit de trouver un nombre dont la moitié, l quart, le 7e. et 3 fassent le nombre lui-même.

2. *Aurea mala ferunt Charites, æqualia cuique*
Mala insunt calatho : Musarum his obvia turba
Mala petunt ; Charites cunctis æqualia donant.
Dic quantùm dederint, numerus sit ut omnibus idem ?

Les trois Graces également chargées de fruits, rencontrent le neuf Muses, et elles leur en donnent chacune le même nombre après cela chaque Grace et chaque Muse est également partagé Combien en avoient les premières avant cette distribution ?

3. *Æquo sequentem cum triente tertii*
Æquat sequens me, junctus et primi triens ;
Supero trientem primi ego decem minis.

Il y a trois nombres, dont le premier ajouté au tiers d troisième, est égal au second, le second avec le tiers du pre mier égale le troisième, et le troisième surpasse le premier d dix. On demande quels sont ces nombres ?

4. *Dic quota nunc hora est ? superest tantùm, ecce diei*
Quantùm bis gemini exactâ de luce trientes.

Quelle heure est-il, demande-t-on ? on répond que ce q reste à s'écouler, est les quatre tiers des heures déja passées.

5. *Totum implere lacum, tubulis è quatuor, uno*
Est potis iste die, binis hic, at tribus ille,
Quatuor at quartus : dic quo spatio simul omnes ?

Un réservoir reçoit l'eau par trois canaux, dont l'un le rem plira dans un jour, l'autre dans deux, le troisième dans troi le quatrième dans quatre. Dans combien de temps sera-t rempli, quand les quatre canaux seront ouverts?

BIBLIOGRAPHIE

- ARNAULT : Nouveaux éléments de géométrie
Réédition IREM de Dijon

- BRUSTON ET ROUXEL : Obstacles et déblocages en mathématiques
APMEP n° 47

- IREM de Dijon : - "..... égale zéro"
- IREM de Dijon : - " Chose d'algèbre"

- IREM de Toulouse : "Equation du premier degré".

-"Petit x" n° 3. Article de Duroux : "Valeur absolue : difficultés moyennes pour une notion mineure". (édité par l'IREM de Grenoble)

- Polya : "La découverte des mathématiques"
Dunod

- Montucla :"Histoire des mathématiques"
Réédition Blanchard.

Attitudes à faire acquérir aux éléves.

Faire passer un contenu est insuffisant. Notre rôle consiste surtout à faire acquérir aux éléves des attitudes transférables ailleurs qu'en mathématiques.

Nous pensons que ces attitudes peuvent être apprises aux éléves à condition de modifier la façon de présenter le contenu et nos méthodes pédagogiques.

Il est hors de propos dans cette annexe de faire une liste exhaustive de telles attitudes et de les classer. Nous renvoyons le lecteur intéressé aux travaux de chercheur en sciences de l'éducation (Bloom, Guilford, De Landshure ...) et de certains mathématiciens (R. Gras, Glaeser...). Cependant, nous en dressons une liste succinte pour aider chacun dans sa réflexion :

- attitudes liées à la sociabilisation,
  (savoir discuter, savoir communiquer, savoir écouter les autres...).
- attitudes liées à la lecture,
  (savoir dégager hypothèses et conclusions, savoir modifier un texte, savoir énoncer une réciproque,...).
- attitudes liées à l'heuristique,
  (savoir conjecturer, savoir trouver des exemples, des contre exemples,...).
- attitudes liées à l'observation,
  (savoir observer, analyser).
- attitudes liées à la logique,
  (savoir distinguer preuve et observation, savoir argumenter).
- attitudes liées à l'organisation,
  (savoir organiser son travail, un travail collectif, des données, savoir synthétiser).
- attitudes liées à l'évaluation,
  (savoir évaluer un résultat, son travail, une démarche...).

PROPOS SUR L'EVALUATION.

" I - **TYPES, OBJETS, FONCTIONS DE L'EVALUATION**

On distingue 3 types d'évaluation suivant leur fonction :

* 1 - évaluation prédictive qui a une fonction d'orientation,
* 2 - évaluation formative qui a une fonction de régulation,
* 3 - évaluation sommative qui a une fonction de certification.

1 Evaluation prédictive : elle a pour but d'estimer, de prévoir l'effort que demandera l'atteinte d'un objectif fixé. Le niveau de départ de l'évalué est souvent insuffisant pour répondre à cet objectif ambitieux. On est amené à évaluer les potentialités, recueillir les informations nécessaires pour prévenir les difficultés futures.

2 Evaluation sommative : après une étude ou un apprentissage il s'agit de voir si l'objectif terminal a été atteint. Cette évaluation doit aboutir à une décision claire : la performance est acceptable ou non. L'objet de cette évaluation peut être tantôt d'apprécier les apprentissages d'élèves particuliers, tantôt d'évaluer l'efficacité d'un système scolaire. Les informations que l'on peut tirer d'une évaluation sommative sont par nature même, limitées dans l'exploitation qu'on peut en faire.

3 Evaluation formative : dans une perspective éducative, il s'agit de suivre la stratégie d'étude de chaque élève, intervenir pour guider ou provoquer l'effort. Plusieurs stratégies sont possibles suivant les théories de l'apprentissage sous-entendues dont voici 2 exemples :

. théorie béhavioriste : dont les "effets" les plus connus sont les cours programmés (Cf. Watson, Skinner pour qui éduquer = forger des comportements et psychologie = étude des comportements).

. théorie Piagétienne : chaque élève assimile, amalgame à ses cadres de référence antérieurs. Pour qu'il y ait apprentissage, il faut qu'il y ait conflit entre la conception et la réalité, d'où la stratégie qui consiste à proposer des situations-problèmes qui obligent à évoluer.

Le rôle de l'évaluation est alors d'examiner les représentations et stratégies de résolution des problèmes propres à l'élève et suggérer des interventions pédagogiques pertinentes.

En résumé, l'évaluation formative (Cf. "G. de Landsheere 1977") a : "pour but de découvrir où et en quoi un élève éprouve des difficultés d'apprentissage, en vue de lui proposer ou lui faire découvrir des stratégies lui permettant de progresser". Pour remplir cette fonction régulatrice, l'évaluation doit présenter 3 caractéristiques principales : l'évaluation doit être continue, analytique et se faire par référence à des objectifs et non par classement des élèves entre eux. L'évaluation formative est indispensable aussi bien pour une pédagogie par objectifs que pour une pédagogie de maîtrise.

4 Lors des contrôles ou tests que le professeur propose habituellement, ou bien lors de l'"acte pédagogique" lui-même on peut recueillir des informations utiles aux 3 aspects de l'évaluation :

. acquisitions scolaires antérieures et "aptitudes",
. processus mis en oeuvre, méthode d'apprentissage ou d'appropriation d'un résultat, d'une notion, ou d'une démarche lors d'un raisonnement,
. résultats proprement dit ; situation par rapport à des objectifs, éventuellement non-cognitifs.

Les évaluations formatives et sommatives doivent aussi permettre au professeur de corriger des "a priori" implicites et de réaliser une meilleure adéquation du processus pédagogique à ses finalités. S'engage ainsi une dynamique dont les effets peuvent s'évaluer en :

. situant chaque individu-élève ou chaque sous-groupe par rapport à une population de référence,
. situant chaque élève par rapport aux objectifs fixés par eux-mêmes ou par le professeur ou par la société,
. hiérarchisant les objectifs, éventuellement à travers ou à partir du vécu d'un groupe.

POULET "

Texte tiré du bulletin de l'IREM de Clermont-Ferrand.

Ce texte nous rappelle qu'il existe plusieurs types d'évaluation. Trop souvent nous ne pratiquons que l'évaluation sommative : exemple : à la fin du chapitre " équations " nous proposons une liste d'exercices types. Cela nous permet d'évaluer si les objectifs terminaux (exemples les" choix " énoncés dans la brochure) ont été atteints. Ce type d'évaluation est insuffisant. En effet, il ne nous renseigne que sur les obstacles rencontrés par chaque élève ni sur les processus mentaux qui conduisent l'élève à la réussite ou à l'échec. En ne pratiquant que l'évaluation sommative, nous ne centrons notre enseignement que sur le contenu et non pas sur le travail de l'élève.

Pour pallier cet inconvénient, nous pouvons durant la période d'apprentissage, pratiquer une évaluation formative. Ainsi, après chaque contrôle, par l'analyse des erreurs de chaque élève, on peut réguler l'apprentissage, pratiquer suivant les difficultés de chacun : on se place alors dans le cadre d'une pédagogie différenciée.

Le test que nous avons proposé en annexe I se place dans le cadre de l'évaluation formative : certainement celui-ci doit être amélioré mais il nous a permis d'avancer dans notre réflexion.

Tout illustre notre propos.

Texte de Linda Allal P.136.

STRATEGIES D'EVALUATION FORMATIVE : CONCEPTIONS PSYCHO-PEDAGOGIQUES ET MODALITES D'APPLICATION*

Linda Allal

Le rôle assigné à l'évaluation dans un système de formation est forcément lié aux finalités du système lui-même. Lorsqu'un système se donne comme but prioritaire d'amener tous les élèves à la maîtrise de certains objectifs pédagogiques, il est nécessaire de mettre en place des procédures d'évaluation qui permettent l'adaptation de l'enseignement en fonction des différences individuelles dans l'apprentissage. Dans ce contexte, l'évaluation a une fonction de régulation "formative" car elle fait partie de la stratégie de formation individualisée adoptée par le système.

Dans l'exposé qui suit, nous partirons d'une définition de l'évaluation formative en termes d'action pédagogique pour examiner ensuite les orientations qu'une évaluation formative prendra selon différentes conceptions de la psychologie de l'apprentissage. Après cet examen de cadres conceptuels susceptibles de guider l'élaboration d'une stratégie d'évaluation formative, nous traiterons des problèmes posés par la mise en application de modalités d'évaluation formative au sein de la classe.

LE CONCEPT D'EVALUATION FORMATIVE

Le terme "évaluation formative" a été introduit par Scriven (1967) dans un article sur l'évaluation des moyens d'enseignement (curricula, manuels, méthodes,etc.). Dans ce contexte,les procédures d'évaluation formative sont conçues pour permettre des ajustements successifs lors du développement et de l'expérimentation d'un nouveau curriculum, manuel ou méthode d'enseignement. Par la suite, dans les travaux de Bloom et collaborateurs (1971) sur l'évaluation

* Dans la première partie du texte, nous reprenons les idées déjà formulées dans un exposé "Evaluation formative et modèles d'enseignement" présenté au Groupe des chercheurs romands, en juin 1977. Si notre approche du sujet a évolué depuis, c'est en grande partie grâce à des discussions avec Gianreto Pini et Clairette Davaud, collaborateurs dans le cadre des cours que nous donnons à l'Université de Genève.

de l'apprentissage de l'élève, le terme "évaluation formative" a été appliqué aux procédures utilisées par le maître afin d'adapter son action pédagogique en fonction des progrès et des problèmes d'apprentissage observés chez ses élèves. Selon cette conception, l'évaluation formative est une composante essentielle dans la réalisation d'une stratégie de pédagogie de maîtrise (Bloom, 1968), ou de n'importe quelle autre approche d'individualisation de l'enseignement.

Précisons maintenant les caractéristiques de l'évaluation formative en tant que moyen de régulation à l'intérieur d'un système de formation.

Les modalités d'évaluation adoptées par un système de formation ont toujours une fonction de *régulation*, c'est-à-dire qu'elles ont pour but d'assurer l'articulation entre les caractéristiques des personnes en formation, d'une part, et les caractéristiques du système de formation, d'autre part. Cette fonction de régulation peut prendre, cependant, des formes différentes (voir fig. 1). Une forme de régulation est d'assurer que les caractéristiques des élèves répondent aux exigences pré-établies du système de formation. Dans ce cas, l'évaluation est un moyen de contrôle de la progression de l'élève aux points d'entrée, de passage et de sortie du système : la fonction de l'évaluation est *pronostique* lorsqu'il s'agit de contrôler l'accès à un cycle ou à une année d'études (décisions d'admission ou d'orientation); sa fonction est *sommative* lorsque le contrôle s'opère à la fin d'une période d'études (décision de certification sous forme de notes ou de diplôme). Une autre forme de régulation est d'assurer que les moyens de formation proposés par le système soient adaptés aux caractéristiques des élèves. Dans ce cas, l'évaluation assume une fonction *formative* car son but est de fournir des informations permettant une adaptation de l'enseignement aux différences individuelles dans l'apprentissage. Cette forme de régulation doit nécessairement intervenir pendant la période de temps consacrée à une unité de formation : autrement dit, il faut que l'adaptation de l'enseignement puisse avoir lieu bien avant les échéances liées à une décision de certification ou d'orientation ultérieure.

Le concept d'évaluation formative ayant été énoncé et appliqué tout d'abord dans le cadre de travaux "néo-behavioristes" relatifs à l'individualisation de l'enseignement, il y a le risque de confondre les aspects purement pédagogiques du concept avec les caractéristiques particulières de ses applications dans une certaine perspective psycho-pédagogique. Il serait regrettable, à nos avis,,que le concept d'évaluation formative - ainsi que celui de pédagogie de maîtrise ou, plus largement, de pédagogie individualisée - restent enfermées dans le cadre psycho-pédagogique de leur énonciation et de leur application initiales. Par conséquent, nous proposons que l'on précise les aspects essentiels du "projet pédagogique" visé, ce projet pouvant être interprété par la suite selon diverses conceptions psycho-pédagogiques et socio-pédagogiques de l'apprentissage scolaire.

Fig. 1 : Evaluation comme moyen de régulation à l'intérieur d'un système de formation

Formes de régulation	Moment	Fonction de l'évaluation	Décision à prendre
assurer que les caractéristiques des élèves répondent aux exigences du système	au début d'un cycle de formation	pronostique	admission, orientation
	à la fin d'une période de formation	sommative	certification intermédiaire ou finale
assurer que les moyens de formation correspondent aux caractéristiques des élèves	pendant une période de formation	formative	adaptation des activités d'enseignement/d'apprentissage

Dans cette optique, nous proposons la définition ci-après des étapes essentielles de l'évaluation formative :

1. recueil d'informations concernant les progrès et les difficultés d'apprentissage rencontrées par l'élève ;
2. interprétation de ces informations dans une perspective à référence critérielle et, dans la mesure du possible, diagnostic des facteurs qui sont à l'origine des difficultés d'apprentissage observées chez l'élève ;
3. adaptation des activités d'enseignement et d'apprentissage en fonction de l'interprétation faite des informations recueillies.

Ces trois étapes ont comme finalité pédagogique l'individualisation des modes d'action et d'interaction pédagogiques afin d'assurer qu'un maximum d'élèves puisse atteindre la maîtrise des objectifs essentiels du programme de formation. Précisons tout de suite que nous utilisons l'expression "individualisation" dans le sens d'une adaptation des activités pédagogiques par rapport aux individus en formation, et non pas dans le sens d'une pédagogie fondée sur le travail individuel. Notons aussi que l'expression "différenciation de l'enseignement" (RAPSODIE, 1977) nous semble peu adéquate pour décrire la finalité de l'évaluation formative car, en se servant de modalités d'évaluation de type pronostic/sommatif, on peut différencier l'enseignement sans l'adapter

aux besoins des élèves en tant qu'individus (ex. l'orientation des élèves sur la base de leurs résultats scolaires précédents vers des filières d'études ou des classes à niveaux ayant des programmes différents).

Les trois étapes décrites ci-dessus constituent une définition de l'évaluation formative en termes d'action pédagogique. Pour passer de cette définition à l'élaboration d'une *stratégie* d'évaluation formative, il est nécessaire de se référer à un cadre conceptuel qui permette de préciser :

1. les aspects de l'apprentissage de l'élève qu'il faut observer, et les procédures à utiliser dans le recueil des informations ;
2. les principes devant guider l'interprétation des données et le diagnostic des problèmes d'apprentissage ;
3. les démarches à suivre dans l'adaptation des activités d'enseignement et d'apprentissage.

Pour élaborer une stratégie d'évaluation formative, il faudrait en principe se référer à un cadre théorique qui tient compte des multiples aspects (cognitif, affectif, social) des apprentissages et des interactions à l'intérieur d'un système de formation. Sachant qu'une telle théorie est loin d'être construite mais qu'il faut tout de même orienter l'action pédagogique dans un sens ou dans un autre, il nous semble utile d'examiner les apports possibles de cadres conceptuels existants. Afin d'*illustrer* l'élaboration d'une stratégie d'évaluation formative, nous esquisserons deux orientations qu'on pourrait adopter en se référant, d'une part, à une conception behavioriste ou néo-behavioriste de l'apprentissage, d'autre part, à une conception cognitiviste de l'apprentissage. Il est évident que les orientations esquissées ici doivent être complétées par les apports d'autres cadres conceptuels (des domaines de la psychologie sociale, de la psychologie de l'affectivité, de la sociologie) et qu'à terme le cadre de référence devrait être une théorie intégrée de l'action pédagogique.

EVALUATION FORMATIVE DANS UNE PERSPECTIVE BEHAVIORISTE OU NEO-BEHAVIORISTE

Dans l'orthodoxie behavioriste de type skinnerien, l'enseignement doit être programmé de façon à assurer un "apprentissage sans erreur", et on n'a donc pas besoin de procédures d'évaluation formative pour adapter l'enseignement en fonction des difficultés d'apprentissage rencontrées par l'élève. Par conséquent, nous nous référons ici surtout aux conceptions "néo-behavioristes" de l'apprentissage scolaire formulées par

Bloom, Gagné, Glaser, et d'autres. La vaste majorité des travaux sur l'évaluation formative ont été conçus, du moins implicitement, selon des principes néo-behavioristes appliqués dans le cadre d'une stratégie de pédagogie de maîtrise ou d'enseignement modulaire.

Précisons maintenant l'orientation des trois étapes de l'évaluation formative dans une perspective néo-behavioriste.

1. Recueil d'informations

L'évaluation sera basée sur des objectifs pédagogiques définis en termes de comportements observables. Les informations recueillies porteront surtout sur les résultats de l'apprentissage de l'élève, c'est-à-dire sur les performances dont l'élève est capable face aux objectifs établis. On insistera sur l'importance de données "objectives" décrivant les comportements manifestés par l'élève.

Lors du recueil des données, l'accent sera mis sur des instruments ayant de bonnes qualités psychométriques (fidélité, validité, objectivité) fournissant, de préférence, des mesures quantitatives. On aura recours notamment à des instruments de contrôle écrit (tests, exercices) qui comportent des items à réponse "fermée" (item lacunaire, item à choix multiple, etc.) et à des grilles d'observation permettant un enregistrement très précis du comportement de l'élève.

2. Interprétation des informations recueillies

L'interprétation des données sera faite dans une perspective à référence critérielle, c'est-à-dire en comparant les performances observées chez l'élève à des critères de performance pré-établis. Cette opération donnera lieu en général à un profil de résultats comportant une appréciation (ex. suffisant/insuffisant, acquis/en voie d'acquisition/non acquis) par rapport à chaque objectif évalué. En examinant le profil des résultats d'un élève, on identifiera les objectifs qui ne sont pas encore atteints, et on cherchera à préciser les facteurs qui sont à l'origine des performances insuffisantes.

Dans ces démarches, on tiendra compte non seulement des "conditions externes" mais aussi des "conditions internes" de l'apprentissage (Gagné, 1970). Toutefois, on aura tendance à accorder davantage d'importance aux conditions externes de l'apprentissage et à définir les conditions internes en termes de leurs conséquences observables plutôt qu'en termes du fonctionnement du sujet face à une tâche d'apprentissage (voir, par exemple, les définitions de "l'aptitude" et de "la persévérance" proposées par Bloom, 1968). Ainsi, en formulant un diagnostic relatif aux problèmes d'apprentissage, on fera appel notamment à des hypothèses du type :

- l'élève ne maîtrise pas les "prérequis" nécessaires à l'apprentissage en question,,
- le temps mis à disposition était insuffisant étant donné le rythme d'apprentissage de l'élève,
- la "programmation" des activités d'apprentissage n'était pas adéquate : le découpage des tâches d'apprentissage n'était pas assez fin; la séquence des tâches ne respectait pas le principe de hiérarchisation,
- le feedback (renforcement) fourni à l'élève en cours d'apprentissage n'était pas assez fréquent ou n'intervenait pas assez rapidement après les réponses de l'élève.

3. Adaptation des activités pédagogiques

Dans l'adaptation des activités d'enseignement et d'apprentissage, l'accent sera mis sur la structuration de l'environnement. Autrement dit, on cherchera, par la manipulation des variables dans la situation d'apprentissage, à exercer un meilleur contrôle sur l'activité d'apprentissage de l'élève. Les adaptations proposées seront liées, évidemment, aux hypothèses formulées pour expliquer les causes des performances insuffisantes. Ainsi, si l'on estime que les difficultés rencontrées par l'élève sont dues à un manque de maîtrise des prérequis, on proposera des exercices de rattrapage. De plus, pour chaque objectif non atteint, on organisera des activités de remédiation (exercices individuels, travaux en groupe, lectures complémentaires). Ces activités de rattrapage et de remédiation permettront à l'élève de consacrer un temps d'étude et d'exercice supplémentaire aux tâches qu'il n'a pas encore maîtrisées. Pour que ces adaptations de l'enseignement ne se limitent pas à des variations d'ordre purement quantitatif (répétition de la leçon initiale, davantage d'exercices d'un même type, etc.), on cherchera à diversifier les modalités de présentation et la nature des tâches proposées à l'élève. Toutefois, la tendance générale sera d'offrir à l'élève en difficulté davantage de guidance - une progression des tâches plus fine, une structuration de la situation d'apprentissage plus forte, un feedback plus rapide et plus fréquent.

EVALUATION FORMATIVE DANS UNE PERSPECTIVE COGNITIVISTE

Nous prenons maintenant comme cadre de référence les travaux psycho-pédagogiques inspirés de l'épistémologie génétique de Piaget, ainsi que les recherches anglo-américaines d'orientation cognitive/cybernétique (ex. travaux de Bruner sur l'apprentissage par la découverte, recherches sur la résolution de problèmes basée sur l'"information processing theory" (1). Les exemples d'évaluation formative élaborés

(1) Pour apprécier l'importance croissante des approches cognitivistes dans la recherche en éducation aux Etats-Unis, voir la revue de Magoon (1977).

dans une perspective cognitiviste sont encore rares, mais nous disposons de certaines indications conceptuelles fort intéressantes proposées par Brun (1975) et par Cardinet (1977)

1. Recueil d'informations

Dans une perspective cognitiviste, on ne négligera pas de recueillir des informations sur les résultats de l'apprentissage, mais ces informations auront une importance secondaire par rapport aux informations sur les processus de l'apprentissage. Ainsi, lors d'une évaluation formative, on cherchera avant tout à comprendre le fonctionnement cognitif de l'élève face à la tâche proposée. Les données d'intérêt prioritaire seront celles qui portent sur les représentations de la tâche formulées par l'élève et sur les stratégies ou procédures qu'il utilise pour arriver à un certain résultat. Les "erreurs" de l'élève seront un objet d'étude particulier dans la mesure où elles sont révélatrices de la nature des représentations ou des stratégies élaborées par l'élève.

Pour recueillir des informations sur les processus d'apprentissage, on pourra utiliser diverses procédures, par exemple :

- entretien avec l'élève selon une approche "clinique" inspirée des méthodes de recherche piagétiennes,
- observation du comportement de l'élève pendant qu'il effectue une tâche,
- observation de l'élève qui "réfléchit à haute voix" pendant qu'il effectue une tâche,
- observation d'un groupe d'élèves qui discutent des démarches à suivre en effectuant une tâche.

Ne pouvant pas, pour des raisons pratiques, établir des protocoles détaillés comme on le fait dans les recherches piagétiennes et cybernétiques, l'enseignant enregistrera ses observations soit au moyen d'une grille ou "checklist" qu'il aura élaborée, soit sous forme d'un compte rendu semblable à ceux utilisés dans la recherche ethnographique basée sur l'observation participante. Par ailleurs, étant donné les difficultés posées par l'application des techniques d'entretien et d'observation au sein d'une classe comportant 15-25 élèves, l'enseignant cherchera sans doute à élaborer des instruments du type test, exercice, fiche de travail, etc., conçus de façon à mettre en évidence les démarches suivies par l'élève lorsqu'il effectue une tâche.

2. Interprétation des informations recueillies

Dans l'interprétation des informations fournies par l'évaluation formative, on accordera une importance prioritaire aux données relatives aux processus d'apprentissage. Autrement dit, l'interprétation portera davantage sur le caractère de la stratégie ou procédure suivie par l'élève que sur la

correction du résultat auquel il est parvenu. On jugera préférable de constater que l'élève est en train d'élaborer une stratégie prometteuse, susceptible de l'amener à une compréhension réelle des propriétés de la tâche en question, que de constater qu'il a fourni une réponse "correcte" sur la base d'une démarche de valeur douteuse.

Pour interpréter des informations sur les processus d'apprentissage, il sera souvent difficile de définir un cadre de référence très précis. Pour pouvoir interpréter des données dans une perspective à référence critérielle, il faudrait qu'il existe des travaux de recherche psycho-pédagogique qui décrivent les conduites qui sont révélatrices d'une stratégie "prometteuse" face à une tâche d'apprentissage scolaire donnée. Or, si pour certaines notions traitées dans les programmes scolaires, il existe des ébauches de recherche dans ce sens (par ex. les travaux portant sur la notion de soustraction par Mengal et al., 1977), pour la vaste majorité des notions enseignées à l'école, les points de repère théoriques et empiriques sont inexistants. Dans cette situation, il est toujours possible de recourir à des considérations générales de type normatif (référence aux conduites qui sont "typiques" des élèves d'un certain âge ou stade - présumé - de développement), mais le plus souvent l'enseignant basera ses interprétations sur des intuitions ou des hypothèses formulées à partir de son expérience pédagogique.

Lorsqu'on passe au diagnostic des facteurs qui sont à l'origine des difficultés d'apprentissage de l'élève, on cherchera à formuler des hypothèses relatives aux *interactions* entre les caractéristiques de l'élève, par exemple :

- son stade de développement cognitif dans le ou les domaines en rapport avec la tâche,
- sa façon de traiter des informations fournies par la tâche,
- sa représentation des propriétés de la tâche,
- sa capacité d'intégrer des informations fournies par la tâche dans les schèmes d'action qu'il a déjà élaborés,
- sa stratégie générale face à la tâche, ainsi que sa façon d'articuler des procédures particulières,
- sa capacité de ré-orienter son activité en fonction d'informations nouvelles (provenant de la tâche, de l'enseignant, d'autres élèves),
- sa façon de conceptualiser les propriétés de sa propre activité,

et les caractéristiques de la tâche, par exemple :

- son degré d'abstraction,
- son mode de présentation (verbale, visuelle, etc)
- sa complexité (nombre de composantes et leur organisation)
- son degré d'"ouverture" (voie(s) de solution unique ou multiples, principes de solutions algorithmiques ou heuristiques) (1)

(1) Si la liste d'exemples des caractéristiques de la tâche est assez "pauvre", c'est que les recherches d'orientation cognitiviste se sont peu occupées jusqu'à présent de l'analyse des caractéristiques pertinentes des tâches d'apprentissage.

Il est évident que la formulation d'une hypothèse diagnostique précise - relative aux difficultés particulières d'un élève face à une tâche ou catégorie de tâches donnée - sera difficile tant que l'élaboration de cadres théoriques propres à la psycho-pédagogie des branches scolaires n'est pas plus avancée. L'enseignant procédera donc en grande partie sur la base de ses intuitions, en intégrant progressivement les éclairages qui sont fournis par l'avancement des recherches psycho-pédagogiques.

3. *Adaptation des activités pédagogiques*

Certains éducateurs ont tendance à tirer de la théorie piagétienne une optique pédagogique centrée sur la maturation, le rôle du maître (ou, plus largement, le milieu éducatif) étant essentiellement de suivre le développement de l'élève. Dans cette optique, lorsque l'élève rencontre une difficulté dans l'apprentissage d'une tâche scolaire, on considère très souvent que c'est parce qu'il n'est pas "prêt", sur le plan du développement cognitif, à aborder la tâche en question et qu'il faut, par conséquent, remettre la tâche à plus tard. Il est évident qu'il y a des cas où ce type de décision est tout à fait justifié. Toutefois, avant de recourir à cette forme d'"adaptation pédagogique", il est important, pour des raisons de responsabilité pédagogique, - et cohérent, à notre avis, avec la prémisse interactionniste de la théorie de Piaget - de se demander si une modification de la tâche permettrait à l'élève de surmonter la difficulté rencontrée et de s'engager dans un processus d'apprentissage constructif.

En modifiant la tâche ou la situation d'apprentissage, on cherchera, dans une perspective cognitiviste, à créer un *décalage optimal* entre la "structure du sujet" (c'est-à-dire les représentations et les procédures déjà élaborées par l'élève) et la "structure de la tâche" (c'est-à-dire les exigences externes qui impliquent l'élaboration de représentations et de procédures d'un ordre supérieur). Le décalage entre l'élève et la tâche sera optimal lorsque les informations fournies par la tâche peuvent être assimilées et traitées par l'élève, mais font surgir en même temps des contradictions ou des conflits qui suscitent un dépassement (re-structuration) de son mode de traitement actuel. L'adaptation des activités pédagogiques sera guidée par des hypothèses diagnostiques relatives aux facteurs qui sont à l'origine des difficultés d'apprentissage de l'élève : dans certains cas, il faudra réduire le décalage sujet-tâche, pour faciliter l'assimilation des informations provenant de la tâche; dans d'autres cas, il faudra augmenter le décalage afin de susciter la prise de conscience d'une contradiction et la recherche d'une nouvelle démarche.

De façon générale, le but de l'adaptation pédagogique sera d'aider l'élève à découvrir les aspects pertinents de la tâche et à s'engager dans la construction d'une stratégie plus adéquate. Pour atteindre ce but, divers moyens peuvent être envisagés :

- travaux individuels avec un matériel conçu en fonction de la nature des difficultés d'apprentissage rencontrées par l'élève : soit un matériel "préparatoire" plus simple ou plus concret que le matériel initialement prévu, soit un matériel d'approfondissement qui amène l'élève à "tester les limites" de ses démarches actuelles, à formuler des démarches plus générales,
- interactions maître-élève où le maître cherche par un jeu de questions, suggestions et contre-suggestions, à favoriser une re-structuration des démarches d'apprentissage de l'élève,
- travaux en petits groupes (par ex. sous forme d'un jeu), où l'interaction entre des élèves à des stades d'apprentissage différents peut susciter une progression ou une consolidation des démarches de chacun.

Le choix et la mise en place de moyens d'adaptation individualisés dépendront de la capacité de l'enseignant à formuler des hypothèses diagnostiques pertinentes, à créer des situations d'apprentissage pour tester ses hypothèses et à reformuler ses hypothèses en fonction de nouvelles observations des conduites de l'élève. La régulation des activités d'apprentissage sera fructueuse, d'un point de vue cognitiviste, si l'enseignant parvient à établir une dialectique constante entre ses observations des processus d'apprentissage et ses actions d'intervention dans ces processus.

MODALITES D'APPLICATION DE L'EVALUATION FORMATIVE

En esquissant les stratégies d'évaluation formative qu'on pourrait élaborer en fonction de différentes conceptions de l'apprentissage, il ne s'agit pas de suggérer qu'il existe des stratégies "toutes faites" parmi lesquelles l'enseignant ferait un choix. La tâche de l'enseignant est de *construire* une stratégie d'évaluation formative qui soit applicable dans sa classe. Sa démarche de construction peut être guidée par les éclairages théoriques apportés par la recherche psycho-pédagogique sur l'apprentissage (et par d'autres branches des sciences sociales), mais doit tenir compte aussi de considérations liées au contexte pédagogique et institutionnel où la stratégie sera appliquée. Dans cette partie de notre exposé, nous examinerons l'évaluation formative du point de vue de ses modalités d'application au sein de la classe.

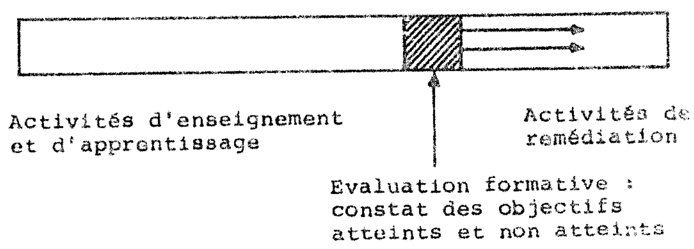
1. Evaluation ponctuelle, régulation rétroactive

Dans la plupart des travaux existants sur l'évaluation formative, les modalités d'application sont caractérisées par plusieurs étapes distinctes : après un premier temps consacré à des activités d'enseignement et d'apprentissage, le maître organise une évaluation formative sous forme d'un contrôle écrit (test, exercice) passé par l'ensemble de la classe, les résultats de cette évaluation permettent au maître - et à l'élève - d'identifier les objectifs pédagogiques qui sont atteints ou non atteints; dans l'étape suivante, le maître organise (ou l'élève doit prendre en charge) des activités de remédiation définies en fonction du profil de résultats obtenu par l'élève (fig. 2-1). Dans une approche de ce type, la période de temps consacrée à une unité de formation est divisée en plusieurs tranches successives : enseignement/apprentissage, évaluation, adaptation de l'enseignement/de l'apprentissage (remédiation), éventuellement ré-évaluation, nouvelle adaptation, etc. Par le fait que l'évaluation intervient de façon *ponctuelle* sous forme d'un contrôle écrit, l'interprétation se limite essentiellement à un constat des performances de l'élève relatives aux objectifs pédagogiques. Les informations recueillies ne permettant pas, en général, un vrai diagnostic des facteurs qui sont à l'origine des difficultés d'apprentissage de l'élève, l'adaptation des activités pédagogiques est effectuée par des moyens partiellement "standardisés", c'est-à-dire que deux élèves qui ont un même profil de résultats entreprennent les mêmes activités de remédiation. Les difficultés rencontrées par l'élève n'étant pas repérées en cours d'apprentissage, la fonction de régulation assurée par l'évaluation formative est de nature *rétroactive* : dans l'étape de remédiation, il y a un "retour" aux objectifs non maîtrisés lors de la première période d'étude. Un exemple de ce type d'évaluation formative est fourni en annexe (document 1-4).

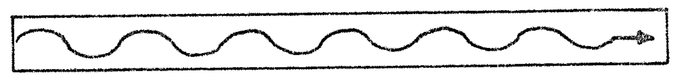
Il est clair que les modalités décrites ci-dessus ne correspondent pas aux conditions optimales pour l'application d'une stratégie d'évaluation formative, surtout si la stratégie a été conçue dans une perspective cognitiviste. Cependant, il faut reconnaître que face aux problèmes posés dans la pratique pédagogique (effectifs élevés des classes, rigidité des programmes et des horaires scolaires, manque de matériel pédagogique diversifié), il est souvent difficile de mettre en place des modalités d'application qui vont plus loin que des évaluations ponctuelles suivies de régulations rétroactives. D'ailleurs, l'introduction de ces modalités d'évaluation formative constituerait déjà un progrès appréciable dans un grand nombre de contextes institutionnels où seules les fonctions sommatives et pronostiques de l'évaluation sont officiellement reconnues.

Fig. 2 : Modalités d'application de l'évaluation formative

2.1 : évaluation ponctuelle, régulation rétroactive

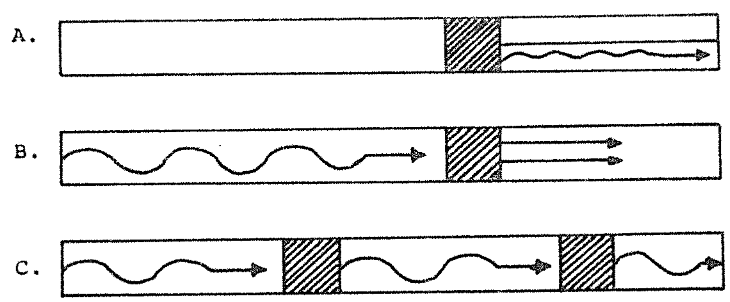


2.2 : évaluation continue, régulation interactive



Intégration de l'évaluation formative aux activités d'enseignement et d'apprentissage : diagnostic et guidance individualisés en cours d'apprentissage

2.3 : modalités mixtes (voir commentaires dans le texte)



2. Evaluation continue, régulation interactive

Il est important, toutefois, de définir les modalités d'application vers lesquelles la pratique pédagogique devrait tendre si l'on veut assurer une véritable individualisation de la formation. Nous proposons de caractériser les modalités optimales pour l'application d'une stratégie d'évaluation formative dans les termes suivants.

Pendant la totalité d'une période consacrée à une unité de formation, les procédures d'évaluation formative sont *intégrées* aux activités d'enseignement et d'apprentissage. Par l'observation des élèves en cours d'apprentissage, on cherche à identifier les difficultés dès qu'elles apparaissent, à diagnostiquer les facteurs qui sont à l'origine des difficultés de chaque élève et à formuler, en conséquence, des adaptations individualisées des activités pédagogiques. Dans cette optique, toutes les interactions de l'élève - avec le maître, avec d'autres élèves, avec un matériel pédagogique - constituent des occasions d'évaluation (ou d'auto-évaluation) qui permettent des adaptations de l'enseignement et de l'apprentissage. La régulation de ces activités est donc de nature *interactive*. Le but est d'offrir une "guidance" individualisée en cours d'apprentissage plutôt qu'une remédiation a posteriori (voir fig. 2-2).

Ces modalités d'évaluation formative pourraient être réalisées de plusieurs façons. Une première est d'organiser les activités au sein de la classe de façon à permettre au maître de jouer le rôle d'"observateur-animateur". Ayant proposé aux élèves un matériel pour un travail individuel ou en groupe, le maître circule dans la classe. En observant différents élèves, il cherche à identifier ceux qui n'arrivent pas à avancer dans les tâches proposées. A travers des échanges avec ces élèves, il essaie de formuler des hypothèses diagnostiques et de modifier la situation en conséquence, soit en posant des questions ou en offrant des suggestions, soit en proposant un autre matériel, soit en ré-organisant les activités proposées, etc. Sachant, toutefois, que le maître ne peut pas être présent partout lorsque les élèves travaillent individuellement ou en groupe, il faut envisager des moyens complémentaires pour assurer l'intégration de l'évaluation formative aux activités pédagogiques. Un moyen serait de développer des formes de collaboration et d'interaction entre élèves où le rôle d'observateur-animateur joué par le maître peut être assumé, du moins en partie, par des élèves. De plus, il faut, dans la mesure du possible, que le matériel pédagogique soit conçu de façon à aider l'élève à découvrir les caractéristiques de sa propre activité et à réorienter sa démarche lorsque des problèmes surgissent. Comme exemples de matériel interactif et adaptatif, on peut citer des jeux de simulation et des programmes d'apprentissage assisté par ordinateur conçus dans une optique de résolution de problèmes.

Nous proposons en annexe (Document 1-5, élaboré par Gianreto Pini) une illustration d'une procédure d'évaluation formative destinée à permettre une régulation interactive des processus d'apprentissage.

3. Modalites mixtes

Dans la réalité de la pratique pédagogique, le maître sera souvent amené à élaborer des procédures d'évaluation formative qui combinent des modalités de type "évaluation ponctuelle, régulation rétroactive" avec des modalités de type "évaluation continue, régulation interactive". Nous évoquerons, à titre d'exemple, trois cas de modalités mixtes (voir fig. 2-3).

Cas A. Après une série de leçons ou d'autres activités où le maître n'a pas pu observer les élèves en cours d'apprentissage, il y a passation d'un contrôle écrit (test, exercice, etc.). Ayant repéré par ce contrôle les élèves qui ont des difficultés d'apprentissage, le maître poursuit avec eux un mode d'évaluation (par observation, entretien, etc.) qui permet des diagnostics et des régulations individualisés.

Cas B et C. Ayant mis en place un mode d'évaluation continue et interactive, mais ne pouvant pas, pour des raisons pratiques, observer chaque élève lors de chaque activité, le maître a recours, périodiquement, à des moyens de contrôle écrit qui permettent d'identifier des difficultés qui n'ont pas été repérées en cours de route. Ce repérage est suivi, selon les circonstances, soit par des activités de remédiation partiellement standardisées (cas B), soit par des régulations interactives et individualisées (cas C).

****

En conclusion, nous relèverons trois points qui nous semblent essentiels dans un débat sur l'évaluation formative.

1. Il est d'abord nécessaire, en traitant des thèmes tels que l'évaluation formative et l'individualisation de l'enseignement, de définir chaque concept en termes des buts visés par l'action éducative. En détachant ces concepts du cadre théorique de leur formulation initiale, on peut les réinterpréter en fonction de plusieurs cadres conceptuels - psycho-pédagogiques et socio-pédagogiques - et engager ainsi un véritable débat sur le rôle de l'évaluation formative dans l'enseignement.

2. En choisissant, dans ce texte, de présenter deux stratégies d'évaluation formative conçues selon deux perspectives psycho-pédagogiques différentes, il s'agit d'illustrer deux orientations, plutôt que de proposer deux modèles, applicables tels quels. Il est évident que les orientations esquissées ici doivent être complétées par les apports d'autres branches des sciences sociales. De plus,

si l'on veut dépasser la simple juxtaposition de différents apports théoriques, non articulés entre eux, il faut développer des cadres conceptuels et des modes de recherche propres aux "sciences de l'éducation". Une direction de travail prioritaire, à notre avis, sera l'étude des dimensions *fonctionnelles* des interactions de l'élève - avec le maître, avec le matériel, avec d'autres élèves - dans diverses situations de classe et dans différentes branches des programmes scolaires.

3. Il faut, dans le domaine des sciences de l'éducation, que nos efforts de réflexion théorique et de recherche s'adressent non seulement à l'élaboration de cadres théoriques plus adéquats, mais aussi à l'analyse des problèmes de l'application pratique, d'où notre tentative d'esquisser différentes modalités d'application de l'évaluation formative. Dans nos interactions en tant que chercheurs et enseignants universitaires avec des éducateurs, il faut éviter de leur proposer des prescriptions a prioristes qui ne tiennent pas compte de leurs expériences pratiques et qui ne respectent pas le principe que l'enseignant, comme l'élève, doit *construire* ses stratégies d'action. Par ailleurs, nous sommes convaincus que c'est en analysant les stratégies élaborées et appliquées par des enseignants qu'on progressera vers une conceptualisation théorique plus solide du rôle de l'évaluation formative dans la régulation des processus d'apprentissage.

Références

Bloom, B.S. Learning for mastery. *Evaluation comment*, UCLA/CSEIP, 1968, Vol. 1, N° 2, 1-12. Re-publication in Bloom et al., 1971. Traduction en français : *Apprendre pour maîtriser*. Lausanne, Payot, 1972.

Bloom, B.S., Hastings, J.T. et Madaus, G.F. *Handbook on formative and summative evaluation of student learning*. New York, Mc Graw Hill, 1971.

Brun, J. *Education mathématique et développement intellectuel*. Thèse de 3e cycle, Université de Lyon II,1975.

Cardinet, J. Objectifs éducatifs et évaluation individualisée. Neuchâtel, Institut romand de recherches et de documentation pédagogiques, R.77.05 (2e éd.), 1977.

Gagné, R.M. *The conditions of learning* (2e éd.). New York, Holt, Rinehart & Winston, 1970.

Magoon, A.J. Constructivist approaches in educational research. *Review of Educational Research*, 1977, *44*, 651-693.

Mengal, P.et al. L'introduction de la soustraction à l'école primaire. Neuchâtel, Institut romand de recherches et de documentation pédagogiques, R. 77.15, 1977.

RAPSODIE. Genève, Département de l'Instruction Publique, Etat du projet au 21 novembre 1977.

Scriven, M. The methodology of evaluation. *AERA Monograph Series on Evaluation*, 1967, N° 1, 39-83.