UNIVERSITÉ DE POITIERS

Institut de Recherche
sur l'Enseignement des Mathématiques

* * *

Juin 1983

Observer
Conjecturer
Démontrer
Enrichir

Observer
Conjecturer
Démontrer
Enrichir

Observer
Conjecturer
montrer

POUR APPRENDRE á DEMONTRER

Géométrie de 4ème

Dominique GAUD
Jean-Paul GUICHARD

Observer
Conjecturer

AVERTISSEMENT

Cette brochure se compose de plusieurs parties que nous avons présentées dans un certain ordre.

Mais cet ordre n'est pas un ordre de lecture ; chaque partie se veut autonome et donc la lecture est plurielle : le lecteur peut commencer n'importe où, ne lire qu'une ou plusieurs parties..... chaque partie comporte son propre sommaire.

PREAMBULE

"Je passai aussi par l'Institut de Mathématiques, où le maître suivait une méthode d'enseignement que tout Européen jugerait presque inconcevable. On écrivait sur des gaufrettes, avec une encre composée de suc encéphalique, les théorèmes et leur démonstration. Les étudiants devaient consommer ces gaufrettes à jeun et ne rien prendre ensuite pendant trois jours que du pain et de l'eau. La digestion faite, les sucs montaient au cerveau et y amenaient avec eux le théorème. Cette méthode n'était pas encore considérée comme infaillible, en partie à cause d'erreurs qui s'étaient glissées dans le Quantum, ou formule de composition, en partie à cause de l'indiscipline des écoliers. Car ceux-ci trouvent généralement le cachet si infect, qu'ils le recrachent en cachette ou le vomissent avant qu'il ait agi, et on n'a pas pu encore les persuader de se soumettre à la longue abstinence prescrite."

Extrait de :

" Les voyages de Gulliver"

de J. SWIFT.

PARTIE I

POUR REFLECHIR

PARTIE I

POUR REFLECHIR

"Ma conclusion est donc qu'il faut cesser d'enseigner une géométrie qu'on ne s'est pas donné le droit d'appliquer à la réalité. La géométrie qu'on enseigne est une géométrie tronquée, parce que réduite à sa partie axiomatique. Il faut, sans y consacrer longtemps, prononcer les mots nécessaires pour que les élèves aient entre les mains une géométrie applicable, une géométrie totale.

On peut tirer une autre conclusion pédagogique de ce qui précède. Puisqu'une géométrie totale ne peut se dispenser d'avoir recours à l'expérience, pourquoi hésiter, pour les débutants, à éviter les démonstrations longues ou délicates, en les remplaçant par des expériences ou des intuitions. Les enfants trouvent leurs principales difficultés, non pas dans les chaînons successifs des démonstrations logiques, mais dans la compréhension de la nécessité de démontrer certaines propositions qui leur paraissent évidentes. (...). Qu'on retarde la démonstration de certaines assertions géométriques jusqu'au moment où l'élève s'aperçoit qu'elles ne sont pas logiquement évidentes. Et que, d'autre part, on allège les cours en démontrant expérimentalement d'autres assertions qui ne sont pas évidentes, mais dont la démonstration est compliquée.

On pourrait m'objecter que ces voeux sont difficiles à traduire dans un enseignement réel. J'ai cependant eu entre les mains, vers 1920, des ouvrages anglais qui adoptaient cette façon de procéder (mélange de logique et d'expérience), dans le même pays où la tradition d'un enseignement exactement conforme à l'exposition d'Euclide est resté le plus longtemps en faveur.

Serait-il possible que les commissions, officielles ou officieuses, qui s'occupent de la réforme des programmes, tiennent compte de ces réflexions, réflexions dont nous avons tiré deux applications distinctes dont peut-être certains qui repousseraient l'une accepteraient l'autre."

Maurice FRECHET

(Dans bulletin APM n° 125 en ......1948).

SOMMAIRE

1 DES CONSTATS

· Constat 1 - Les élèves ont des difficultés en géométrie alors qu'en algèbre professeurs et élèves ne se plaignent pas en général.

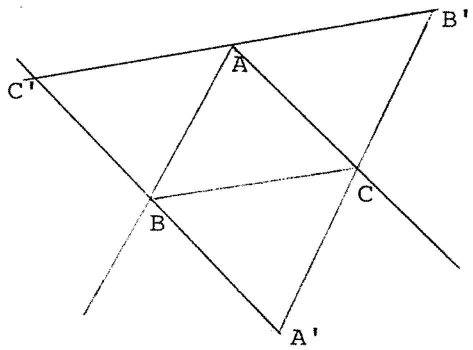
Pourquoi ? Pourquoi les professeurs éprouvent-ils plus de difficulté à enseigner la géométrie que l'algèbre ?
Quelles différences y a-t-il entre l'enseignement de la géométrie et celui de l'algèbre ?
Risquons des hypothèses.

En algèbre il est demandé aux élèves d'acquérir des algorithmes, des mécanismes. L'enseignant fait peu de cours magistral, par contre beaucoup de temps est passé à la résolution d'exercices. Ces exercices nécessitent toujours une même méthode ou une même formule. Exemples : calculs sur les fractions, équations, identités remarquables.

En géométrie les élèves passent trop souvent leur temps à copier un cours magistral ou à regarder le professeur faire des acrobaties intellectuelles pour résoudre des problèmes et les démontrer.

Exemple d'acrobatie intellectuelle vue dans un manuel.

Démonstration du théorème : les hauteurs d'un triangle sont concourantes.



Traçons le triangle A'B'C' "double" de ABC , les hauteurs de ABC sont les médiatrices de A'B'C' .
Or les médiatrices d'un triangle sont concourantes donc les hauteurs de ABC le sont.

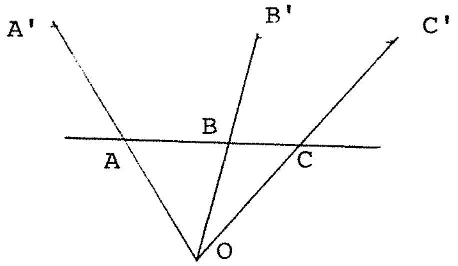
Ce théorème présenté de cette façon n'est-il pas un tour de prestidigitation aux yeux des élèves ? (voir bibliographie (1)).

Le temps passé à copier, à regarder c'est autant de temps de perdu pour l'apprentissage* des élèves. Pour s'en convaincre il suffit de comparer le temps d'apprentissage des élèves en algèbre et en géométrie.
D'autre part contrairement à l'algèbre les exercices sont très divers en géométrie ; on n'a pas pour une même question une méthode générale. Les élèves doivent s'adapter à chaque situation. (En général il n'est pas donné de méthode).

* Par "temps d'apprentissage des élèves" on entend temps où l'élève apprend lui-même à résoudre des problèmes.

Exemple : Voici une liste d'exercices (niveau 4ème - 3ème) ayant trait à l'alignement de points.

Exercice 1 : A, B et C sont trois points d'une droite D. O est un point du plan qui n'appartient pas à D.



Trace A' B' et C' les symétriques de O par rapport à A, B et C.

Observe A'B' et C'.

Démontre ta conjecture.

Exercice 2 Place les points A,B,C tels que AB=3 AC=8 BC=5 l'unité étant le centimètre. Que peux-tu dire ?

Démontre-le.

Exercice 3 ABCD est un rectangle, O un point de [BD].

E et J sont les projections orthogonales de O sur (AB) et (CD).

Observe O, E et J. Démontre.

Exercice 4 Soit ABC un triangle. Place PQ et R tels que :

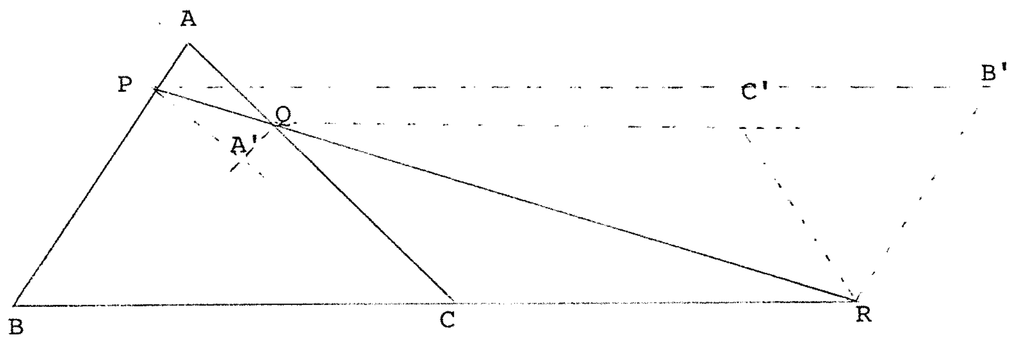
- $P \in [BC]$ et PB = 2 PC
- $Q \in [AC]$ et QA = QC
- R appartient à la demi droite d'origine A ne contenant pas B tel que RB = 2 RA.

Observe P, Q et R. Démontre.

Exercice 5 ABCD est un parallélogramme. Construis E et F tels que ADBF et ADEC soient des parallélogrammmes.

Observe B,C,E et F. Démontre.

Exercice 6



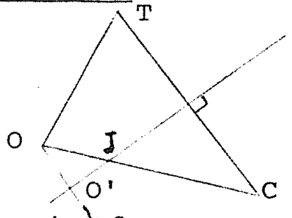
Soit ABC un triangle. Une droite D coupe le segment [AB] en P, le segment [AC] en Q et (BC) en R.

Construis A', B' et C' tels que PQA'P ; RCQC' et PBRB' soient des parallélogrammes.

Observe A'B' et C'. Démontre.

Exercice 7 TOC est un triangle. La médiatrice Δ de [TC] coupe OC en J . Soit O' le symétrique de O par rapport à Δ . Observe O'J et T.

Démontre.



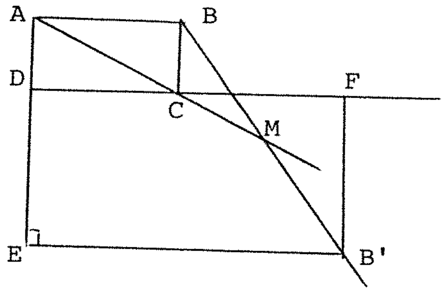
Exercice 8 ABCD est un rectangle, M est un point de (AC).

B' est le symétrique de B par rapport à M.

E et F sont les projections orthogonales de B' sur AD et DF.

Observe E, M et F.

Démontre.



Exercice 9 RACE est un parallélogramme.

K, G, F et L sont tels que :

$\overrightarrow{RL} = 4\ \overrightarrow{RA}$

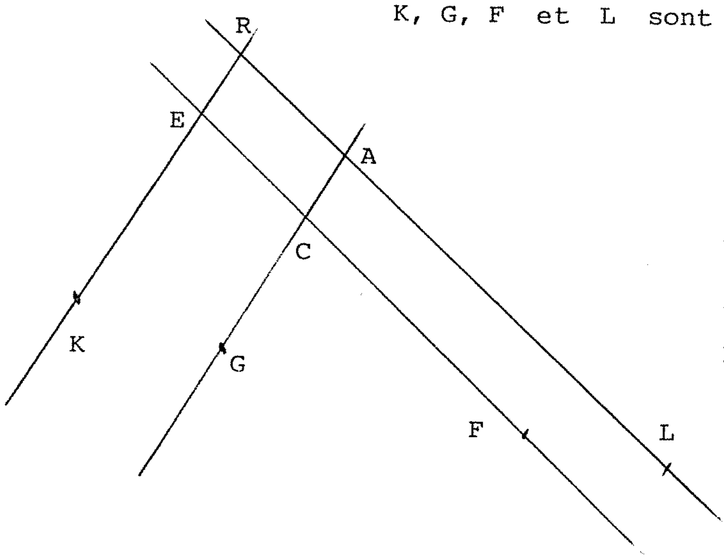
$\overrightarrow{EF} = 3\ \overrightarrow{EC}$

$\overrightarrow{AG} = 3\ \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{RK} = 4\ \overrightarrow{RE}$

Observe K,G, F et L.

Démontre.



Exercice 10 soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan et A (3 ; -1) B(1 ; 1) C(-2 ; 4). Démontrer que A, B, C sont alignés.

ou soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto -x + 2$$

Tracer la représentation graphique (d) de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Prouver que A, B, C sont sur (d).

A travers ces dix exercices d'alignement combien de méthodes de résolution différentes peut-on trouver ?

En conclusion : Pourquoi ne pas faire en géométrie comme en algèbre ?

- définir le type d'exercice que l'on veut que les élèves sachent résoudre.
- mettre en oeuvre un réel apprentissage, c'est à dire, un nombre suffisant d'exercices pour que l'élève voit comment s'y prendre, acquière une méthode.

. Constat 2 - Les élèves ne savent pas s'y prendre et éprouvent des difficultés à faire une démonstration. Peu y arrivent : c'est un constat fréquent.

On peut essayer d'apporter quelques éléments de réponse à ces deux questions.

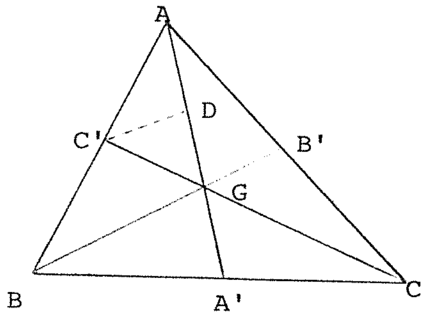
a) Le temps d'apprentissage de l'élève est réduit en géométrie puisque c'est souvent le maître qui opère. (constat 1).

b) L'élève ne possède aucune méthode de recherche pour résoudre des exercices de géométrie.

c) Comment corrigeons-nous trop souvent les exercices et problèmes ?
On part des hypothèses et on aboutit logiquement à la conclusion : c'était évident !
On cache à nos élèves toute la partie heuristique soit parce que l'on n'est pas capable d'expliquer sa méthode de recherche soit parce que l'on ne sait pas comment on trouve la solution : c'est le flair ou l'habitude. Il faut "voir" , c'est"l'esprit de finesse", l'intelligence.
On n'apprend pas à raisonner, à être logique : on l'est ou on ne l'est pas !

Exemple : Construire un trianglequand on connaît les longueurs des trois médianes. (Ce n'est pas un exercice pour un élève de 4ème)
(Cf. Polya p.12 "A la découverte des maths T.1.)

Résolution classique :



Je trace un triangle et ses trois médianes qui se coupent en G.
Soit D le milieu de [AG]. Le triangle DGC' a des dimensions connues donc peut être construit.
ABC peut alors être construit à partir de DGC'

Commentaire : c'était évident seulement il fallait penser au point D.
Mais pourquoi s'intéresser à D ?

Comment l'auteur de la démonstration s'est-il intéressé à D ? Pour celui qui veut apprendre à démontrer c'est le fait fondamental. Or dans nos corrigés c'est ce point là qui manque le plus souvent.

Autre résolution

Je veux construire un triangle. Il faudrait par exemple connaître les longueurs de ses 3 côtés ou 2 côtés et angle....

Est-ce que je peux,connaissant les longueurs des 3 médianes,déterminer les longueurs des 3 côtés ou de 2 côtés et la mesure d'un angle etc...

Pour cela il faut tracer une figure, observer la figure et conjecturer.

Si je sais construire A'B'C' alors je sais construire ABC et le problème est résolu. Mais peut-on tracer A'B'C' ?

En fait si j'arrive à construire un triangle avec des points de la figure j'ai des chances de résoudre le problème.

Que connait-on ? GA , GA' , GB' , GC' , GC . Le point D est alors à notre portée.

Pour résoudre ce problème en fait on est parti de la conclusion et on essaie petit à petit de trouver des situations plus faciles à démontrer qui permettent d'arriver à la conclusion.
Avec quelle résolution apprend-on le plus à démontrer ?

. Constat 3 - Inutilité de nombreux théorèmes du cours dont on ne se sert jamais.

Les élèves hésitent devant le fatras de définitions et de théorèmes qui pour la plupart ne sont pas opérationnels dans les démonstrations.

Exemple : Rien dans les manuels ne différencie les définitions et les théorèmes opérationnels des définitions et théorèmes accessoires. Tous ont le même statut (encadrés ou coloriés de la même façon).

Vu dans un manuel encadré de la même façon.

- Les demi-plans ouverts de frontières Δ sont convexes.
- Considérons une droite Δ qui ne passe par aucun des points P,Q et R. Si Δ coupe un des 3 segments $[PQ]$ $[QR]$ et $[RP]$ alors Δ en coupe 2 et 2 seulement.

  D'autres énoncés de ce type sont dans ce même manuel et ont le même statut (dans un rectangle rose) aux yeux des élèves que des énoncés opérationnels :
- la médiatrice de $[A,B]$ est l'ensemble des points équidistants de A et de B
- un quadrilatère est un losange si et seulement si ses diagonales se coupent à angle droit en leur milieu.

Essayer de compter le nombre de théorèmes figurant dans votre manuel : Vous serez surpris de voir ce qu'il faut ingurgiter. S'il s'agit d'apprendre aux élèves à faire des démonstrations - et non d'exposer des mathématiques - alors il faut faire un tri.

. Constat 4 - Pour faire de l'axiomatique on fait table rase des connaissances antérieures des élèves.

Or les réflexions des élèves le montrent : un grand nombre des théorèmes et définitions du cours de géométrie des figures de 4ème sont connus des élèves de 6ème et 5ème : les élèves ne voient pas la finalité d'une nouvelle formulation (axiomatique) de ces connaissances, et ont l'impression de perdre leur temps. Et le professeur aussi, vu l'enthousiasme manifesté par les élèves.. !

. Constat 5 - Les élèves ne voient pas quand il faut démontrer, ne voient pas l'utilité de la démonstration .

a) Par un exposé axiomatique (voir constat 4) les élèves sont contraints de démontrer ce qu'ils savent déjà. Ils finissent par ne plus discerner ce qu'ils savent de ce qu'ils ne sont pas censés savoir, par suite, ne voient plus quand il faut démontrer ni l'utilité de la démonstration.

b) Quels sont la motivation et l'intérêt de certaines démonstrations présentées aux élèves ?

Exemple vu dans un manuel de 4ème

Soit dans le plan P une droite $\mathcal{D}$ et un point A n'appartenant pas à $\mathcal{D}$.

Démontrer qu'il existe au moins 2 droites de P passant par A.

Les élèves ne perçoivent-ils pas alors les mathématiques comme des élucubrations ?

c) Quelle part fait-on à la conjecture, au doute ?

(voir les parties 3 et 5 " Pour douter" ; "Pour conjecturer et enrichir").

Le doute, la conjecture sont les points de départ de la démonstration : démontrer c'est prouver à l'autre que sa conjecture est vraie. On aura l'occasion d'y revenir plus loin (voir "Preuve et démonstration au collège" N. Balacheff - Revue Recherches en didactique des mathématiques vol. 3.3 1982).

d) Des difficultés d'ordre psychologique existent.

L'émergence de la pensée formelle se fait progressivement à partir de l'adolescence:

Vers 9-10 ans, la conservation du poids est par contre admise, en vertu des mêmes raisonnements que celle de la matière, mais celle du volume est encore niée avant 11-12 ans, et en vertu des raisonnements intuitifs inverses ! Bien plus, les sériations, les compositions d'égalité, etc... suivent exactement le même ordre de développement : à 8 ans, deux quantités de matière égales à une troisième sont égales entre elles, mais non pas deux poids (indépendants de la perception du volume, il va de soi) ! Etc. La raison de ces décalages est naturellement à chercher dans les caractères intuitifs de la substance, du poids et du volume, qui facilitent ou retardent les compositions opératoires : une même forme logique n'est donc pas encore, avant 11-12 ans, indépendante de son contenu concret....

Or, la constitution des opérations formelles, qui débute vers 11-12 ans, nécessite également toute une reconstruction, destinée à transposer les groupements "concrets" sur un nouveau plan de pensée, et cette reconstruction est caractérisée par une série de décalages verticaux.

La pensée formelle s'épanouit durant l'adolescence. L'adolescent, par opposition à l'enfant, est un individu qui réfléchit en dehors du présent et élabore des théories sur toutes choses, se plaisant en particulier aux considérations inactuelles. L'enfant ne réfléchit au contraire qu'à l'occasion de l'action en cours, et n'élabore pas de théories, même si l'observateur, notant le retour périodique de réactions analogues, peut discerner une systématisation spontanée dans ses idées. Or, cette pensée réfléchie caractérisitique de l'adolescent prend naissance dès 11-12 ans, à partir du moment où le sujet devient capable de raisonner de manière hypothético-déductive, c'est à dire sur de simples assomptions sans relation nécessaire avec la réalité ou avec les croyances du sujet, et en se fiant à la nécessité du raisonnement lui-même (vi formae), par opposition à l'accord des conclusions avec l'expérience.

PIAGET "La psychologie de l'intelligence".
Armand Colin 1967 , p.157-158.

. Constat 6 - Les élèves ne savent pas isoler les hypothèses, mélangent hypothèses et conclusion ? Ils ont du mal à rédiger une démonstration.

a) La solution à ces problèmes déborde le cadre de l'enseignement des mathématiques. En effet les élèves lisent mal et analysent mal un texte. Peut-être sommes-nous responsables en donnant des textes d'énoncés peu compréhensibles pour des élèves de 13 à 15ans*. Ces difficultés pourraient s'aplanir si un travail efficace était effectué avec les professeurs de lettres.

b) Le mélange hypothèses-conclusion peut aussi être de notre faute si nous introduisons trop tôt (doit-on le faire en 4ème ?) des raisonnements sophistiqués).

Exemples:

- Démonstration par contradiction :

Soient D, D' et D" 3 droites. Démontrer que si D// D' et D'// D" alors D// D" .

* Un travail de réflexion a été amorcé dans un groupe de Formation Continue en 1982/83.

- Vu dans un manuel (c'est la première démonstration en géométrie de ce manuel).

  Soit (A,B) un bipoint de Δ . Désignons par a l'abscisse de A et b l'abscisse de B . Cherchons si un point I de Δ existe tel que $\overline{IA} = \overline{IB}$ (1).

Démonstration : On a $\overline{AI} = x - a$ $\overline{IB} = b - x$ l'égalité (1) est équivalente

à $x - a = b - x$

d'où $x = \dfrac{a + b}{2}$

Il résulte qu'il existe un point I unique tel que $\overline{AI} = \overline{IB}$.

<u>Commentaire</u> : Quand on dit : "on a $\overline{AI} = x - a$ ....

c'est donc que I existe. Aux yeux des élèves que veut-on montrer ? où sont les hypothèses ? où est la conclusion ?

. <u>D'autres constats</u>

. Ne sommes-nous pas, par notre enseignement, responsables de certaines difficultés :

a) - en privilégiant le contenu du programme par rapport aux attitudes mathématiques de l'élève. Ce que l'on retrouve de manière très prononcée dans l'évaluation : on évalue des connaissances et non des attitudes (conjecture, critique d'une démonstration....)

b) - En faisant une trop large place à l'axiomatique en premier cycle. L'axiomatique est-elle compatible avec un apprentissage de la démonstration ? Comment montrer à des élèves de 4ème que les résultats qu'ils connaissent résultent d'un petit nombre d'axiomes alors qu'il ne savent pas ce qu'est une démonstration ?

En faisant de l'axiomatique n'est-on pas conduit à démontrer des résultats évidents aux yeux des élèves ?

c) - En n'étant pas toujours conscient du niveau de rigueur demandé aux élèves (Voir partie 6).

d) - En n'étant pas toujours conscient des implicites et sous-entendus dans les textes posés, dans les démonstrations proposées.

<u>Exemple d'algèbre</u>

. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ $2x + 3 \geqslant 0$

Commentaire : s'agit-il de résoudre dans $\mathbb{R}$ et de donner les solutions dans $\mathbb{Z}$ (c'est, nous pensons, ce qui est sous-entendu) ou de résoudre effectivement dans $\mathbb{Z}$ c'est à dire :

$$2x + 3 \geqslant 0 \iff 2x \geqslant -3 \quad \text{d'où} \quad x \geqslant -1$$

Exemple de géométrie:

Soit ABC un triangle, I, J et K les milieux de AB , AC et BC; I J coupe la droite AK en M, etc....

Se pose-t-on la question de savoir si M existe ?

Combien d'exemples de ce type rencontrons-nous ?

Ce qui n'empêche pas de trouver dans les manuels ce genre de texte :

D et D' sont parallèles Δ est perpendiculaire à D en A.
Montre que D' et Δ sont sécantes.
Qu'en penser ?

2 A PROPOS DE LA DEMONSTRATION

a) Qu'est-ce que démontrer ?

Larousse encyclopédique :

Démonstration : raisonnement par lequel on établit la vérité d'une proposition.

Raisonner : faire usage de sa raison.

Démontrer est-ce convaincre ? Convaincre est-ce démontrer ? Si convaincre est synonyme de démontrer que penser des exemples suivants :

Exemple 1

.Démonstrations de $1 + 2 + \dots + n = \frac{n \times (n+1)}{2}$

a - soit la propriété définie sur $\mathbb{N}^*$ par: n vérifie P si et seulement si

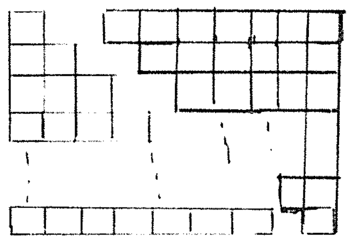
$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n\,(n+1)}{2} .$$

- 1 vérifie P
- Si n vérifie P , n + 1 le vérifie aussi

$1 + 2 + .. + n + (n+1) = \frac{n\,(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2}$

donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, n vérifie P .

b - un dessin

1
2

n

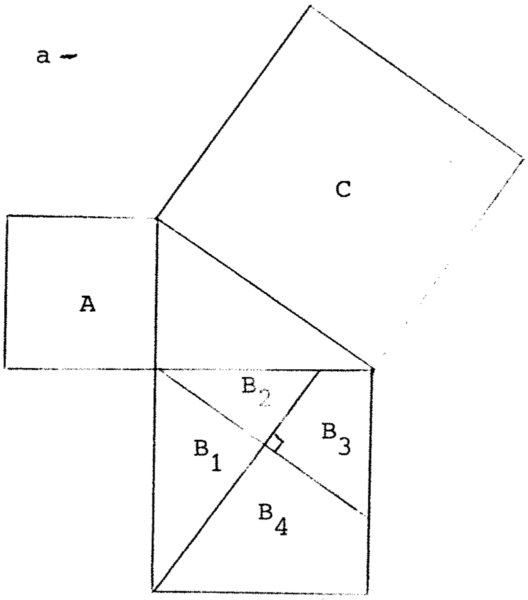
n
n - 1
1

ainsi $2 \times (1 + 2 + \dots n) = n \times (n+1)$

Quelle "démonstration" convainc le plus ?

Exemple 2 : Démonstrations du théorème de Pythagore.

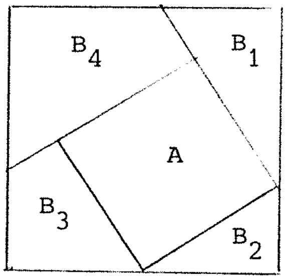
a -



On découpe le carré B suivant B_1 B_2 B_3 B_4

En disposant correctement B_1, B_2, B_3 B_4 et A on obtient le carré C

(Voir Mathématiques dans la réalité Cédic).



b -

On suppose connu le rapport de projection orthogonale et sa symétrie

$C(D, D') = C(D', D)$

$$\begin{aligned} \overline{BA} &= c\ \overline{BC} \\ \overline{BH} &= c\ \overline{BA} \end{aligned} \quad \text{d'où} \quad \overline{BH} = c^2\ \overline{BC} \quad \text{où} \quad c = c\ (BC, BA)$$

$$\begin{aligned} \overline{CA} &= m\ \overline{CB} \\ \overline{CH} &= m\ \overline{CA} \end{aligned} \quad \text{d'où} \quad \overline{HC} = m^2\ \overline{BC} \quad \text{où} \quad m = c\ (CA, CB)$$

on déduit $\overline{BH} + \overline{HC} = (c^2 + m^2)\ \overline{BC}$

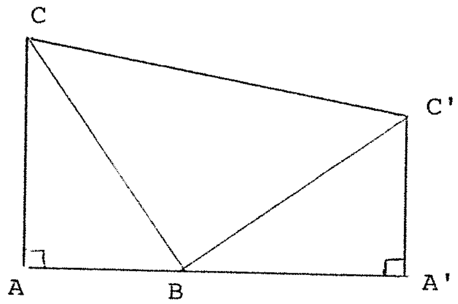
c'est à dire $1 = c^2 + m^2$

Or $c = \dfrac{\overline{BA}}{\overline{BC}}$ $\quad m = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$ d'où :

$$c^2 + m^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2}$$

on déduit $AB^2 + AC^2 = BC^2$

c -



On dispose un triangle (A' B C') de mêmes dimensions que(ABC) (voir figure)
L'angle $\widehat{CBC'}$ est droit car mes $(\widehat{CBA})$ + mes $(\widehat{BCA})$ = 90°
l'aire du trapèze C A A'C' est :

$\frac{1}{2}$ (AB + AC)^2

c'est aussi :

Aire (ABC) + Aire (CBC') + Aire(BA'C')

cette quantité est égale à

$\frac{1}{2}$ BA × BC + $\frac{1}{2}$ × BC×BC'+ $\frac{1}{2}$ BA' × C'A'

d'où

$\frac{1}{2}$ (AB + AC)^2 = BA × BC + $\frac{1}{2}$ BC^2

c'est à dire

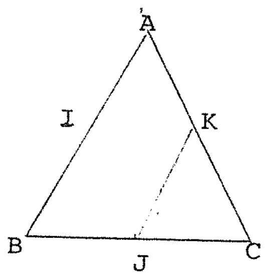
AB^2 + AC^2 = BC^2 .

Quelle démonstration paraît la plus convaincante <u>aux yeux des élèves</u> ?

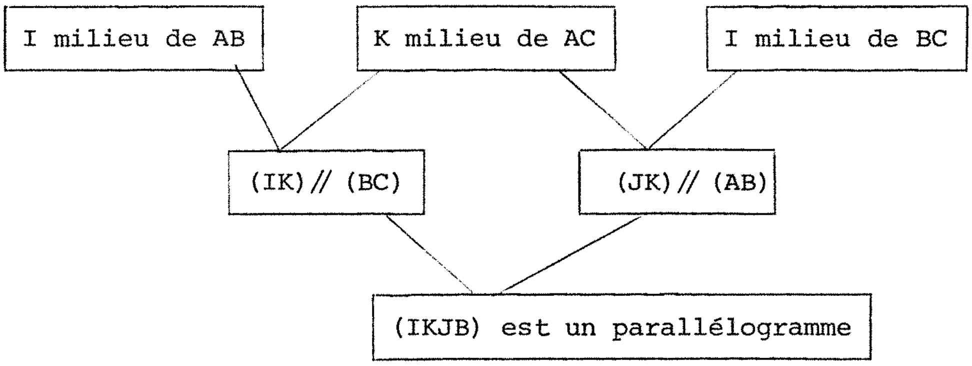
b) <u>Quelques formes fréquentes de raisonnements que l'on peut rencontrer dans le premier cycle</u>.

1 - <u>Exploration cas par cas</u>
2 - <u>Usage du contre-exemple</u>
3 - <u>Raisonnement direct</u>
Si ...... alors.....

<u>Exemple</u> I, J et K sont les milieux respectifs des côtés AB , BC et AC d'un triangle.
Démontre que BIKJ est un parallélogramme.



Ce genre de raisonnement peut se mettre dans un organigramme très facilement.



4. Raisonnement par contradiction

Exemple :

On donne trois droites D, D' et D" telles que D et D' sont parallèles ; D' et D" sont parallèles, démontre que D et D" sont parallèles.

Si D et D" ne sont pas parallèles notons A leur point d'intersection ....

Dans ce genre de raisonnement on suppose que les hypothèses sont vraies et la conclusion n'est pas vraie. La négation de la conclusion fournit une hypothèse de plus.

5. Raisonnement par contraposition

Pour montrer que ($P \Longrightarrow Q$) est vraie on montre que (non $Q \Longrightarrow$ non P) est vraie

Exemple. Soit ABC un triangle tel que $AB = 7$, $BC = 7$, $AC = 10$.

Ce triangle est-il rectangle ?

Démonstration : $AB^2 + BC^2 = 49 + 49 = 98$

$AC^2 = 100$

donc $AC^2 \neq AB^2 + BC^2$

donc ABC n'est pas rectangle d'après la réciproque de Pythagore

FAUX ! c'est d'après le théorème de Pythagore, et on utilise un raisonnement par contraposition.

Pythagore : ABC rectangle en B donc $AB^2 + BC^2 = AC^2$

Contraposée : $AB^2 + BC^2 \neq AC^2$ donc ABC n'est pas rectangle en B

alors que la réciproque de Pythagore serait :

$AB^2 + BC^2 = AC^2$ donc ABC rectangle en B

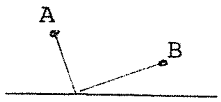
et sa contraposée : ABC n'est pas rectangle en B donc $AB^2 + BC^2 \neq AC^2$.

Remarque : pour faire un raisonnement par contradiction (ou par l'absurde) il aurait fallu prendre en plus pour hypothèse :
ABC rectangle en B, et la démonstration serait : ABC rectangle en B donc $AB^2 + BC^2 = AC^2$.
Or $AB^2 + BC^2 \neq AC^2$ car $AB^2 + BC^2 = 98$ et $AC^2 = 100$, donc il y a contradiction, donc ABC n'est pas rectangle en B.

6. <u>Raisonnement à l'aide des transformations</u>

<u>Exemples</u>

. Recherche le plus court chemin pour aller de A à B en "passant" par la droite D.



. Construire un cercle tangent à 2 droites parallèles données et passant par un point A

. Exemple 7 du constat 1.

*

Les raisonnements 4 et 5 interviennent souvent dans des démonstrations typiques de géométrie, par exemple confusion de points.

Ces 2 types de raisonnements présentent pour l'élève débutant deux risques majeurs : confondre hypothèse et conclusion ; confondre la démonstration d'un théorème et la démonstration de la réciproque.

Par conséquent il est peut-être sage d'éviter de tels raisonnements pour des débutants.

Le raisonnement 6 est très difficile au premier cycle car il fait intervenir des éléments, des tracés extérieurs à la figure.

Le texte suivant de J. HADAMARD illustre ce propos.

"*Si l'étudiant s'est habitué à mettre en pratique les conseils qui précèdent : s'il substitue, en quelque sorte mécaniquement, les définitions aux définis, s'il sait trouver rapidement les diverses formes sous lesquelles peut se poser le problème qu'il a en vue de résoudre, il sera bientôt en état de traiter un grand nombre des exercices qui peuvent se proposer sur la géométrie élémentaire. D'autres, cependant, pourront lui sembler inaccessibles ou très difficiles, et sont, en réalité, susceptibles de solutions parfois très simples ; seulement ces solutions ne dépendent pas uniquement du raisonnement direct dont nous venons de nous occuper, mais exigent le concours de moyens de simplification dont il nous reste à parler, et qui sont les méthodes de transformation.*

A proprement parler, d'après ce qui a été dit plus haut, toute méthode géométrique pourrait être légitimement appelée "méthode de transformation". Mais on réserve plus spécialement ce nom aux méthodes qui consistent à passer de certaines propriétés d'une figure à des propriétés correspondantes d'une autre figure.

Définir une transformation, c'est, à une figure quelconque donnée, faire correspondre une autre figure suivant une certaine loi, de manière que, la première étant donnée, la seconde soit déterminée, et inversement. De toute propriété de l'une on peut conclure une propriété de l'autre qui en est, en quelque sorte, la traduction.

Il n'y a d'ailleurs pas toujours lieu d'appliquer la transformation à toute la figure considérée. Il y a, au contraire, souvent avantage à transformer une partie seulement de cette figure.

C'est ce qui arrive, en particulier, pour les transformations simples que nous venons de rappeler : déplacement, symétrie, homothétie et généralement similitude quelconque. Il n'y aurait, le plus souvent, aucun intérêt à appliquer de telles transformations à toute une figure, attendu que les propriétés de la figure transformée ne sont ni plus ni moins simples que celles de la primitive : elles sont les mêmes (1). Par contre, dans beaucoup de questions, il est nécessaire de transformer ainsi une partie déterminée de la figure."

J. Hadamard, Géométrie Plane, p. 272.

(1) *La géométrie étudie précisément les propriétés qui ne varient pas par le déplacement.*

Certaines méthodes de démonstration qui peuvent relever du type 3 sont parfois sophistiquées pour les élèves. C'est le cas de l'égalité de 2 ensembles. La difficulté est ici de percevoir l'égalité comme une double inclusion.

Exemple : l'image d'une droite par une translation est une droite.

C'est aussi le cas de la méthode de "disjonction des cas".

Quels sont alors les types de raisonnements accessibles à un élève de 4ème ?

3 BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

. André ANTIBI : *Mathématiques et prestidigitation.*
IREM de TOULOUSE 1982.

. A.P.M.E.P. : *A la recherche du noyau des programmes de mathématiques du premier cycle.*

. PENTANUEL n° 23 (Décembre 79) IREM de PARIS-SUD

. A.P.M.E.P. : *Activité Mathématiques en 4ème - 3ème*
T.1 et T.2 (n° 33 - n° 38)

. G. POLYA : *La découverte des Mathématiques.* (DUNOD).

. PIAGET : *La psychologie de l'intelligence* (Armand COLIN)

.(LA PENSEE SAUVAGE, EDITIONS) *Revue Recherches en didactique des mathématiques 1982 Vol 3.3.*

. A.P.M.E.P. : n° 21 *Géométrie au premier cycle en particulier "Quelle géométrie" p. 38 à 49.*

. D. DUVERNEY : *Méthodologie dans la recherche des problèmes et cours de mathématiques.*
Dans colloque Inter-Irem : *La place du problème dans l'enseignement des mathématiques.*
LYON mai 1982 - (IREM de LYON).

4 AU TRAVERS DE L'HISTOIRE : CE QUE DISENT DES MATHEMATICIENS ET PHILOSOPHES

Ces textes, nous semble-t-il, incitent à réflèchir sur les finalités de la géométrie, sur le statut de la démonstration et de l'axiomatique.

1. DESCARTES (1596-1650)

"...Ils ont craint peut être qu'à cause de sa très grande facilité et sa simplicité, elle (la véritable Mathématique) ne perdit de sa valeur par la vulgarisation, et ils ont préféré, pour se faire admirer, nous présenter à sa place quelques vérités stériles démontrées avec une subtile rigueur logique comme les effets de leur art, plutôt que de nous apprendre leur art lui-même qui aurait complètement tari notre admiration".

Quand j'ai commencé à m'adonner à l'étude des mathématiques, j'ai d'abord lu presque tout ce qui est habituellement enseigné par les auteurs qui en traitent ; et ce sont l'arithmétique et la géométrie que j'ai surtout cultivées, parce qu'on les disait plus simples, et qu'on les considérait comme une voie qui mène aux autres sciences. Mais ni pour l'une, ni pour l'autre je ne mettais la main sur des auteurs qui m'aient pleinement satisfait : je lisais bien chez eux beaucoup de choses touchant les nombres, qu'après avoir fait des calculs je reconnaissais vraies ; et même touchant les figures ils me mettaient en quelque sorte sous les yeux bien des vérités, qu'ils tiraient de certains principes ; mais ils ne me paraissaient pas faire voir assez clairement à l'esprit, pourquoi il en est ainsi, et comment s'était faite l'invention; aussi je ne m'étonnais pas, qu'après avoir goûté à ces sciences, la plupart des hommes de talent et de savoir les négligent aussitôt comme puériles et vaines, ou, au contraire, s'effraient dès le début même, à l'idée de les apprendre, tant elles sont difficiles et embrouillées.
(Règles pour la direction de l'esprit règle IV).

2. LEIBNIZ (1644 - 1716)

Certes, les géomètres démontrent scrupuleusement leurs affirmations; toutefois ils contraignent l'esprit davantage qu'ils ne l'éclairent ; ce faisant, à coup sûr, ils s'attirent la plus grande admiration, extorquant malgré lui son assentiment au lecteur et le circonvenant par une technique qui le surprend ; mais ils ne font pas assez appel à la mémoire et à la sagacité (ingenio) du lecteur parce qu'ils lui cachent en quelque sorte les raisons et les causes naturelles de leurs conclusions.

(Cité dans Leibniz critique de Descartes p. 134 Belaval Tel,Gallimard)

3. PASCAL (1623 - 1662). De l'esprit géométrique et de l'art de persuader.

Car il y en a un*, et c'est celui de la géométrie, qui est à la vérité inférieur ** en ce qu'il est moins convaincant, mais non pas en ce qu'il est moins certain. Il ne définit pas tout et ne prouve pas tout, et c'est en cela qu'il lui cède ; mais il ne suppose que des choses claires et constantes par la lumière naturelle, et c'est pourquoi il est parfaitement véritable, la nature le soutenant au défaut du discours. Cet ordre, le plus parfait entre les hommes, consiste non pas à tout définir ou à tout démontrer, ni aussi à ne rien définir ou à ne rien démontrer, mais à se tenir dans ce milieu de ne point définir les choses claires et entendues de tous les hommes, et de définir toutes les autres ; et de ne point prouver toutes les choses connues des hommes, et de prouver toutes les autres. Contre cet ordre pèchent également ceux qui entreprennent de tout définir et de tout prouver et ceux qui négligent de le faire dans les choses qui ne sont pas évidentes d'elles-mêmes. C'est ce que la géométrie enseigne parfaitement. Elle ne définit aucune de ces choses, espace, temps, mouvement, nombre, égalité, ni les semblables qui sont en grand nombre, parce que ces termes-là désignent si naturellement les choses qu'ils signifient, à ceux qui entendent la langue, que l'éclaircissement qu'on en voudrait faire apporterait plus d'obscurité que d'instruction.
Car il n'y a rien de plus faible que le discours de ceux qui veulent définir ces mots primitifs. Quelle nécessité y a-t-il d'expliquer ce qu'on entend par le mot homme ? Ne sait-on pas assez quelle est la chose qu'on veut désigner par ce terme ? Et quel avantage pensait nous procurer Platon, en disant que c'était un animal à deux jambes sans plumes ? Comme si l'idée que j'en ai naturellement, et que je ne puis exprimer, n'était pas plus nette et plus sûre que celle qu'il me donne par son explicitation inutile et même ridicule ; puisqu'un homme ne perd pas l'humanité en perdant les deux jambes, et qu'un chapon ne l'acquiert pas en perdant ses plumes.

* un (ordre)

** inférieur (à l'ordre parfait)

4. CLAIRAUT (1713 - 1765) Eléments de Géométrie - Préface.

Quoique la Géométrie soit par elle-même abstraite, il faut avouer cependant que les difficultés qu'éprouvent ceux qui commencent à s'y appliquer, viennent le plus souvent de la manière dont elle est enseignée dans les éléments ordinaires. On y débute toujours par un grand nombre de définitions, de demandes, d'axiomes et de principes préliminaires, qui semblent ne promettre rien que de sec au lecteur. Les propositions qui viennent ensuite, ne fixant point l'esprit sur des objets plus intéressants, étant d'ailleurs difficiles à concevoir, il arrive communément que les commençants se fatiguent et se rebutent, avant que d'avoir une idée distincte de ce qu'on voulait leur enseigner...

Quelques réflexions que j'ai faites sur l'origine de la Géométrie m'ont fait espérer d'éviter ces inconvénients, en réunissant les deux avantages d'intéresser et d'éclairer les commençants. J'ai pensé que cette science, comme toutes les autres, devait s'être formée par degrés, que c'était vraisemblablement quelque besoin qui avait fait faire les premiers pas, et que ces premiers pas ne pouvaient pas être hors de la portée des commençants, puisque c'étaient des commençants qui les avaient faits.

Prévenu de cette idée, je me suis proposé de remonter à ce qui pouvait avoir donné naissance à la Géométrie ; et j'ai tâché d'en développer les principes par une méthode assez naturelle, pour être supposée la même que celle des premiers inventeurs, observant seulement d'éviter toutes les fausses tentatives qu'ils ont nécessairement dû faire.

La mesure des terrains m'a paru ce qu'il y avait de plus propre à faire naître les premières propositions de Géométrie ; et c'est en effet l'origine de cette science, puisque Géométrie signifie mesure de terrain. Quelques auteurs prétendent que les Egyptiens, voyant continuellement les bornes de leurs héritages détruites par les débordements du Nil, jetèrent les premiers fondements de la Géométrie, en cherchant les moyens de s'assurer exactement de la situation, de l'étendue de la figure de leurs domaines.

Mais quand on ne s'en rapporterait pas à ces auteurs, du moins ne saurait-on douter que, dès les premiers temps, les hommes n'aient cherché des méthodes pour mesurer et pour partager leurs terres. Voulant dans la suite perfectionner ces méthodes, les recherches particulières les conduisirent peu à peu à des recherches générales ; et s'étant enfin proposé de connaître le rapport exact de toutes sortes de grandeurs, ils formèrent une science d'un objet beaucoup plus vaste que celui qu'ils avaient d'abord embrassé, et à laquelle ils conservèrent cependant le *nom qu'ils lui avaient donné dans son origine.*

Afin de suivre dans cet ouvrage une route semblable à celle des inventeurs, je m'attache d'abord à faire découvrir aux commençants les principes dont peut dépendre la simple mesure des terrains et des distances accessibles ou inaccessibles, etc. De là je passe à d'autres recherches qui ont une telle analogie avec les premières, que la curiosité naturelle de tous les hommes les porte à s'y arrêter ; et justifiant ensuite cette curiosité par quelques applications utiles, je parviens à faire parcourir tout ce que la Géométrie élémentaire a de plus intéressant.

On ne saurait disconvenir, ce me semble, que cette méthode ne soit au moins propre à encourager ceux qui pourraient être rebutés par la sécheresse des vérités géométriques dénuées d'applications ; mais j'espère qu'elle aura encore une utilité plus importante, c'est qu'elle accoutumera l'esprit à chercher et à découvrir ; car j'évite avec soin de donner aucune proposition sous la forme de théorèmes, c'est-à-dire de ces propositions où l'on démontre que telle ou telle vérité est, sans faire voir comment on est parvenu à la découvrir. Si les premiers Auteurs de Mathématiques ont présenté leurs découvertes en théorèmes, ç'a été, sans doute, pour donner un air plus merveilleux à leurs productions, ou pour éviter la peine de reprendre la suite des idées qui les avaient conduits dans leurs recherches. Quoi qu'il en soit, il m'a paru beaucoup plus à propos d'occuper continuellement mes lecteurs à résoudre des problèmes, c'est-à-dire, à chercher les moyens de faire quelque opération, ou de découvrir quelque vérité inconnue, en déterminant le rapport qui est entre des grandeurs données, et des grandeurs inconnues qu'on se propose de trouver. En suivant cette voie, les commençants aperçoivent, à chaque pas qu'on leur fait faire, la raison qui détermine l'inventeur, et par là ; ils peuvent acquérir plus facilement l'esprit d'invention.

(A propos de CLAIRAUT et sa pédagogie voir: Racines Historiques de la Didactique des mathématiques p. 19-24.
Glaeser - Cours de 3ème cycle . IREM Strasbourg).

5. <u>ROUSSEAU</u> (1712 - 1778) Extraits de l'Emile.

Je dis donc que les enfants, n'étant pas capables de jugement, n'ont point de véritable mémoire. Ils retiennent des sons, des figures, des sensations, rarement des idées, plus rarement leurs liaisons.

En m'objectant qu'ils apprennent quelques éléments de géométrie, on croit bien prouver contre moi ; et tout au contraire, c'est pour moi qu'on prouve : on montre que, loin de savoir raisonner d'eux-mêmes, ils ne savent pas même retenir les raisonnements d'autrui ; car suivez ces petits géomètres dans leur méthode, vous voyez aussitôt qu'ils n'ont retenu que l'exacte impression de la figure et les termes de la démonstration. A la moindre objection nouvelle, ils n'y sont plus ; renversez la figure, ils n'y sont plus. Tout leur savoir est dans la sensation, rien n'a passé jusqu'à l'entendement. Leur mémoire elle-même n'est guère plus parfaite que leurs autres facultés, puisqu'il faut presque toujours qu'ils rapprennent, étant grands, les choses dont ils ont appris les mots dans l'enfance.

Je suis cependant bien éloigné de penser que les enfants n'aient aucune espèce de raisonnement. Au contraire, je vois qu'ils raisonnent très bien dans tout ce qu'ils connaissent et qui se rapporte à leur intérêt présent et sensible. Mais c'est sur leurs connaissances que l'on se trompe en leur prêtant celles qu'ils n'ont pas, et les faisant raisonner sur ce qu'ils ne sauraient comprendre. On se trompe encore en voulant les rendre attentifs à des considérations qui ne les touchent en aucune manière, comme celle de leur intérêt à venir, de leur bonheur étant hommes, de l'estime qu'on aura pour eux quand ils seront grands ; discours qui, tenus à des êtres dépourvus de toute prévoyance, ne signifient absolument rien pour eux. Or, toutes les études forcées de ces pauvres infortunés tendent à ces objets entièrement étrangers à leurs esprits. Qu'on juge de l'attention qu'ils y peuvent donner.

J'ai dit que la géométrie n'était pas à la portée des enfants ; mais c'est notre faute. Nous ne sentons pas que leur méthode n'est point la nôtre, et que ce qui devient pour nous l'art de raisonner ne doit être pour eux que l'art de voir. Au lieu de leur donner notre méthode, nous ferions mieux de prendre la leur ; car notre manière d'apprendre la géométrie est bien autant une affaire d'imagination que de raisonnement. Quand la proposition est énoncée, il faut en imaginer la démonstration, c'est à dire trouver de quelle proposition déjà sue celle-là doit être une conséquence, et, de toutes les conséquences qu'on peut tirer de cette meme proposition, choisir précisément celle dont il s'agit.

De cette manière, le raisonneur le plus exact, s'il n'est pas inventif, doit rester court. Aussi qu'arrive t-il de là ? Qu'au lieu de nous faire trouver les démonstrations, on nous les dicte ; qu'au lieu de nous apprendre à raisonner, le maître raisonne pour nous et n'exerce que notre mémoire.

(A propos de Rousseau voir Ibidem P. 16-18).

6. Lazare CARNOT (1753.1823) GEOMETRIE DE POSITION

La plupart des questions traitées dans cet ouvrage appartiennent à la géométrie élémentaire ; mais quand on pense que c'est cette géométrie qui fut si féconde entre les mains des Archimède, des Hipparque, des Apollonius ; que c'est la seule qui fut connue des Neper, des Viète, des Fermat, des Descartes, des Galilée, des Pascal, des Huyghens ; que les Newton, les Halley[1], la cultivèrent avec une sorte de prédilection, on peut croire que cette géométrie a ses avantages. En effet, on convient assez généralement aujourd'hui, que la principale utilité des sciences exactes, poussées au delà de ce qu'il y a de plus usuel pour la pratique des arts, est d'accoutumer l'esprit à la réflexion, à la justesse et à l'enchaînement des idées. Or cet objet est, par excellence, celui de la géométrie des anciens. Car si cette géométrie est dite élémentaire quant au sujet dont elle s'occupe, elle ne l'est nullement quant à la difficulté ; et, sous ce rapport, elle ne le cède point aux spéculations analytiques.

1. Astronome anglais (1656-1742)

7. LEBESGUE (1875-1941)

Le professeur de mathématiques, celui de l'Enseignement secondaire en particulier, n' a pas à former de purs logiciens, il doit contribuer à façonner des hommes raisonnables et pour cela il lui faut s'occuper non seulement des raisonnements logiques mais encore de l'acquisition des prémisses de ces raisonnements.

(dans La Mesure des Grandeurs p.179 - Blanchard 1975).

8. THOM dans Pourquoi la Mathématique ? 10/18 1974. p.48 et suivantes

On n'a pas, je crois, tiré de l'axiomatique hilbertienne la vraie leçon qui s'en dégage ; c'est celle-ci : on n'accède à la rigueur absolue qu'en éliminant la signification ; l'absolue rigueur n'est possible que dans et par l'insignifiance. Mais s'il faut choisir entre rigueur et sens, je choisirai sans hésitation le sens. C'est ce choix qu'on a toujours fait en mathématique, où on opère pratiquement toujours dans une situation semi-formalisée, avec un métalangage qui est le langage ordinaire, non formalisé. Et toute la profession se contente de cette situation impure et n'en demande pas de meilleure.

On a d'ailleurs, très probablement, surestimé l'importance de la rigueur en mathématique. (P.49)

Les férus d'axiomatique feraient bien de réfléchir au problème philo-

sophique suivant : pourquoi le langage ordinaire n'est-il pas axiomatisable ? (p.50: la réponse suit).

La géométrie permet un éclatement psychologique de la syntaxe, sans avoir à sacrifier le sens, toujours donné par l'intuition spatiale. Vouloir - comme l'exige un dogme moderniste - éliminer la géométrie élémentaire au profit du calcul et de l'algèbre linéaire, est une opération psychologiquement peu recommandable, parce que les objets algébriques (les symboles) sont trop pauvres sémantiquement pour se laisser appréhender directement comme une figure spatiale. (p. 53)

Toute démonstration est une "maïeutique" : il s'agit de recréer chez le lecteur les processus psychologiques propres à la manifestation de la vérité implicite, dont il détenait toutes les données mais qui restait voilée dans l'informulé. (p.66)

L'axiomatisation est une recherche de spécialistes qui n'a sa place ni dans l'enseignement secondaire, ni en faculté. (p.69).

La géométrie est un intermédiaire naturel, et peut etre irremplaçable, entre la langue usuelle et le langage formalisé des mathématiques, langage dont l'objet se réduit au symbole. (p. 70).

9. HARDY Texte distribué dans l'atelier de J. TONNELLE et Y. CHEVALLARD au Colloque Inter-IREM de LYON (Mai 1982) sur le problème.

EVIDENCE(S) ET DEMONSTRATION DANS LA "CULTURE" MATHEMATIQUE

63. Some general theorems with regard to limits. A. The behaviour of the sum of two functions whose behaviour is known.

THEOREM I. *If $\phi(n)$ and $\psi(n)$ tend to limits a, b, then $\phi(n)+\psi(n)$ tends to the limit $a+b$.*

This is almost obvious*. The argument which the reader will at once form in his mind is roughly this: 'when n is large, $\phi(n)$ is nearly equal to a and $\psi(n)$ to b, and therefore their sum is nearly equal to $a+b$'. It is however desirable to state the argument quite formally.

Let δ be any assigned positive number (e.g. ·001, ·0000001, ...). We require to show that a number n_0 can be found such that

$$|\phi(n)+\psi(n)-a-b|<\delta \quad \text{..............(1)}$$

when $n \geqq n_0$. Now by a proposition proved in Ch. III (more generally indeed than we need here) the modulus of the sum of two numbers is less than or equal to the sum of their moduli. Thus

$$|\phi(n)+\psi(n)-a-b| \leqq |\phi(n)-a|+|\psi(n)-b|.$$

It follows that the desired condition will certainly be satisfied if n_0 can be so chosen that

$$|\phi(n)-a|+|\psi(n)-b|<\delta \quad \text{..............(2)}$$

when $n \geqq n_0$.

Given any positive number δ', we can find n_1 so that $|\phi(n)-a|<\delta'$ for $n \geqq n_1$. We take $\delta'=\frac{1}{2}\delta$, so that $|\phi(n)-a|<\frac{1}{2}\delta$ when $n \geqq n_1$. Similarly we can find n_2 so that $|\psi(n)-b|<\frac{1}{2}\delta$ when $n \geqq n_2$. Now take n_0 to be *the greater of the two numbers* n_1, n_2. Then $|\phi(n)-a|<\frac{1}{2}\delta$ and $|\psi(n)-b|<\frac{1}{2}\delta$ when $n \geqq n_0$, and therefore (2) is satisfied and the theorem is proved.

* There is a certain ambiguity in this phrase which the reader will do well to notice. When one says 'such and such a theorem is almost obvious' one may mean one or other of two things. One may mean 'it is difficult to doubt the truth of the theorem', 'the theorem is such as common sense instinctively accepts', as it accepts, for example, the truth of the propositions '$2+2=4$' or 'the base-angles of an isosceles triangles are equal'. That a theorem is 'obvious' in this sense does not prove that it is true, since the most confident of the intuitive judgments of common sense are often found to be mistaken; and even if the theorem is true, the fact that it is also 'obvious' is no reason for not proving it, if a proof can be found. The object of mathematics is to prove that certain premises imply certain conclusions; and the fact that the conclusions may be as 'obvious' as the premises never detracts from the necessity, and often not even from the interest of the proof.

But sometimes (as for example here) we mean by 'this is almost obvious' something quite different from this. We mean 'a moment's reflection should not only convince the reader of the truth of what is stated, but should also suggest to him the general lines of a rigorous proof'. And often, when a statement is 'obvious' in this sense, one may well omit the proof, not because the proof is unnecessary, but because it is a waste of time to state in detail what the reader can easily supply for himself.

The substance of these remarks was suggested to me many years ago by Prof. Littlewood.

(Extrait de : G. H. Hardy, A Course of Pure Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 10e édition 1952)

10. MOUY Dans Les grands courants de la pensée mathématique p.370-371.
F. Le Lionnais BLANCHARD 1962.

Aussi, il est vraisemblable que pendant très longtemps, peut-etre pendant plusieurs millénaires, les mathématiques ont paru être des arts empiriques et magiques, comme l'agriculture et la médecine, une sorte de sorcellerie efficace.

Mais les Grecs inventèrent la démonstration mathématique. Quels Grecs ? Peut ëtre Pythagore, peut-être Thalès. "Le premier qui démontra le triangle isocèle - qu'il s'appelât Thalès ou comme on voudra - reçut une illumination, oü il trouva qu'il ne fallait pas s'attacher à ce qu'il voyait dans la figure... pour en tirer des propriétés, mais qu'il lui fallait engendrer par construction cette figure au moyen de ce qu'il pensait à ce sujet et se représentait a priori par concept, et que pour connaître avec certitude une chose a priori, il ne devait attribuer à cette chose que ce qui dérivait nécessairement de ce qu'il y avait mis lui-même conformément à son concept." Ainsi s'exprime Kant dans la préface de la deuxième édition de la Critique de la Raison pure.

Qu'est-ce, en effet, que démontrer ? C'est d'abord rendre nécessaire. La nécessité, l'Anankê grecque, c'est, primitivement, la fatalité aveugle qui sort des choses et qui entraîne les hommes à leur perte, qui conduit perfidement Oedipe à l'inceste et au parricide. Idée de primitif. Grâce à la démonstration mathématique, l'idée, sans changer de nom, passe de l'extérieur à l'intérieur, des choses de l'esprit, du domaine mystique au domaine rationnel. Elle était ce qui contraint l'homme contre toute raison. Elle devient ce que l'homme, par raison, se contraint à suivre. Elle constitue une obligation de l'esprit, une valeur intellectuelle, la valeur même.

11. ALAIN (1868 - 1951) (Texte donné au Baccalauréat)

Comme il est clair que l'art de gouverner, de plaider, et en un mot de persuader, est un des plus anciens, puisque l'ordre humain fut le premier connu et est encore le premier connu pour tous, le plus pressant, le plus près, et le plus flexible, ce n'est pas miracle si l'orateur fut le premier maître à penser, et si la prose étudiée fut d'abord une sorte de harangue, ce qui donna un sens bien étrange et bien instructif à la formule " avoir raison ". D'oü cette manie de prouver, qui tyrannise encore dans la mathématique, oü pourtant il est clair que l'on sait tout ce que l'on peut savoir dès que l'on connaît distinctement de quoi il s'agit. C'est ainsi que nos premières connaissances concernant l'ordre extérieur prirent la forme du plaidoyer et de la preuve, *convenables seulement pour les choses douteuses et flexibles de l'ordre humain (...)* .

12. <u>MERLEAU-PONTY</u> (1908 - 1962) (Texte donné au Baccalauréat).

Quoi qu'on doive penser des essais de formalisation, il est sûr en tout cas qu'ils ne prétendent pas à fournir une logique de l'invention(1) et qu'on ne peut construire une définition logique du triangle qui égale en fécondité la vision de la figure et nous permette, par une série d'opérations formelles, d'atteindre à des conclusions qui n'auraient pas d'abord été établies à l'aide de l'intuition. Ceci ne concerne, dira-t-on peut-être, que les circonstances psychologiques de la découverte, et si, après coup, il est possible d'établir entre l'hypothèse et la conclusion un lien qui ne doive rien à l'intuition, c'est qu'elle n'est pas le médiateur obligé de la pensée et qu'elle n'a aucune place en logique. Mais, que la formalisation soit toujours rétrospective, cela prouve qu'elle n'est jamais complète qu'en apparence et que la pensée formelle vit de la pensée intuitive. Elle dévoile les axiomes non formulés sur lesquels on dit que le raisonnement repose, il semble qu'elle lui apporte un surcroît de rigueur et qu'elle mette à nu les fondements de notre certitude, mais en réalité le lieu où se fait la certitude et où apparaît une vérité est toujours la pensée intuitive, bien que les principes y soient tacitement assumés ou <u>justement pour cette raison</u>.

(1) Des règles de la découverte.

PARTIE II

POUR CHANGER

PARTIE II

POUR CHANGER

"J'accorde qu'on peut et qu'on doit souvent se contenter de quelques suppositions, au moins en attendant qu'on en puisse faire aussi des théorèmes un jour, parce qu'autrement on s'arrêterait trop quelques fois...." LEIBNIZ. Phil VII 165.

SOMMAIRE

POUR CHANGER

1 Des remèdes généraux du CM à la 4ème

L'apprentissage de la démonstration est un des grands objectifs de la classe de 4ème. Citons des extraits des préambules des programmes de 4ème et 3ème.

"L'effort de réflexion qu'elles (l'observation et l'expérimentation) suggèrent conduit au raisonnement déductif"
(Arrêté du 16 novembre 1978 classe de 4ème Géométrie).

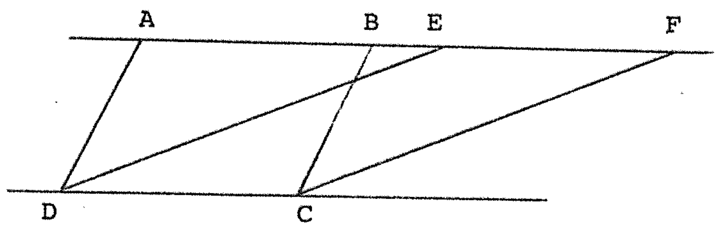
" Le but de l'enseignement des mathématiques dans cette classe (4ème) est de faire comprendre aux élèves ce que sont des démonstrations et de leur apprendre à en rédiger" (arrêté du 22 juillet 1971 classe de 4ème).

" Les élèves ont déjà appris, en quatrième, ce qu'est une démonstration". (Ibidem classe de 3ème).

Mais cet apprentissage de la démonstration est aussi l'un des objectifs de l'enseignement des mathématiques au collège. Dans le cadre de la formation intellectuelle de l'élève cet enseignement doit :
" Entraîner l'élève à la pensée déductive, l'initier à la rigueur logique, lui apprendre à bâtir une chaîne de déductions, à déceler éventuellement une faille dans un raisonnement...." (Circulaire du 29 avril 1977).

Aussi peut-on et doit-on préparer le terrain dès le CM en proposant :
- des situations ouvertes qui permettent aux élèves d'observer , de conjecturer, de douter. Les élèves ne devraient pas constater en 6ème - 5ème, mais émettre des conjectures, procéder à des vérifications. Plutôt que de dire "je vois que..." ils devraient dire : "on dirait que...."
- des situations où interviennent des démonstrations simples (un chaînon déductif).

Exemple :



Démontre (ou prouve) que ABCD et EFCD ont la même aire.
On pourrait alors formuler les exercices ainsi : explique pourquoi .... plutôt que démontre que....

- des travaux de groupes sur des sujets ouverts pour provoquer des chocs : démontrer c'est aussi convaincre l'autre.
- des travaux sur la synonymie dès la 6ème (voir article de F. Reynes "Langage, synonymie et démonstration. Bulletin APM n° 331).

Note : Pour les différences entre preuve, démonstration, explication et leur statut dans l'enseignement voir l'article de N. Balacheff " Preuve et Démonstration en mathématiques au Collège" dans le volume 3.3. (1982) de la revue Recherches en didactique des mathématiques (La pensée sauvage Editions).

2 Au niveau 4ème : comment faire ou faites-le vous-même

Nous exposons notre méthode de travail dans ce qui suit.

Ce peut être le point de départ d'un travail ou d'une réflexion sur la démonstration en Quatrième pour tout professeur ou équipe de professeurs.

a) *NOS OBJECTIFS*

Il nous semble que pour tous les élèves les objectifs suivants devraient être accessibles (en faisant l'objet d'un apprentissage) et devraient être pris en compte dans notre évaluation :

1. Savoir lire un texte* et le traduire sous forme d'une figure.
2. Savoir dégager du texte les hypothèses (ou données) et la conclusion, donc savoir ce qui est donné, connu et ce qui est à démontrer.
3. Savoir conjecturer
4. Savoir rédiger une démonstration courte (2 à 3 déductions) par un raisonnement direct.
5. Savoir un petit nombre de théorèmes opérationnels.

b) *NOS HYPOTHESES*

1. Le raisonnement, la démonstration ça s'apprend.
2. C'est en résolvant exercices et problèmes que les élèves apprennent et non en regardant faire.
3. Il faut un assez grand nombre d'exercices du même type (et donc du temps) pour apprendre une méthode.
4. L'appropriation des concepts et des méthodes ne suit pas l'ordre d'exposition des connaissances.
5. La difficulté des exercices dépend du choix du raisonnement : il faut se limiter, dans un premier temps, au raisonnement direct, à l'exploration cas par cas, et au contre-exemple

* On peut rappeler à ce propos les difficultés de compréhension dues à notre langage spécifique. Par exemple mener pour tracer....

6. Lors de raisonnements directs la difficulté dépend de deux paramètres au moins :
   - le nombre de déductions à faire
   - le nombre d'énoncés utilisés (axiomes, définitions, théorèmes).

7. Il n'y a pas un mais plusieurs niveaux de rigueur : il faut savoir ce que l'on exige de l'élève et que les élèves sachent ce que l'on attend d'eux.

   " Le maître doit choisir le degré de rigueur qui convient à l'élève, et non celui auquel il a lui même accédé : la science accroît sa rigueur quand son progrès l'exige ; elle ne peut avoir une rigueur absolue, même si elle en donne l'illusion aux esprits superficiels" (Jean LERAY). (Voir partie 6 : "pour ne pas conclure")

c) *OPERATIONNALISATION*

* Notre travail

Etape 1 : Recherche d'une liste d'exercices, d'illusions d'optique, amenant l'élève à se questionner : à douter, à conjecturer, à ressentir la nécessité de prouver (voir partie 3 "Pour douter").

Etape 2 : Faire un découpage du programme en quelques thèmes fondamentaux. En voici un.

. Pour la géométrie des figures :
- parallèles - parallélogramme
- orthogonalité - rectangle
- médiatrice - losange.

. Pour les transformations :
- vecteurs - translations
- symétrie axiale
- symétrie centrale
- projections

avec éventuellement un apprentissage spécifique pour certains points difficiles, par exemple : comment démontrer que des points sont alignés ?

Etape 3 : Pour chaque thème, rechercher (autant que possible dans sa tête et non dans des manuels) beaucoup d'exercices : il vaut mieux faire cette recherche à plusieurs.

Etape 4 Pour chaque exercice, ou chaque question d'exercice :
- relever les énoncés utilisés
- relever le nombre de chaînons déductifs.

On peut le faire au moyen de schémas déductifs (ou organigrammes).
On a parfois des surprises : ce qui nous semblait simple nécessite

parfois beaucoup de déductions....
(voir partie 4 "Pour apprendre à démontrer").

Etape 5 Se constituer ainsi sur chaque thème :
- la liste des énoncés utilisés (ceux qui sont opérationnels et utilisés le plus souvent)
- un stock d'exercices avec pour chacun d'eux l'indication du nombre de déductions et les énoncés utilisés.
  Ceci permet ainsi d'apprécier rapidement leur degré de difficulté et de les classer.
  Il convient de faire attention à la façon dont sont posés les exercices.
  (Voir partie 6 "Pour ne pas conclure").

Etape 6 Prévoir sur chaque thème des activités
- permettant aux élèves de conjecturer des énoncés nouveaux qui seront admis.
- de recherche, de déconditionnement....
(Voir partie 5 "Pour conjecturer, enrichir").

Etape 7 Rechercher les liens de dépendance des énoncés entre eux, donc chercher à démontrer certains énoncés à l'aide des autres et essayer de réduire le nombre des énoncés utilisés à un noyau que seront les axiomes : on part à la recherche d'une axiomatique minimale.
(Voir par exemple :
- Bulletin APM n° 320 sept 79 p. 591 à 596
  Manifeste pour un enseignement naturel de la géométrie
- Cédic 4° livre du professeur. Entre nous : présentation de la géométrie p8 à 10).

* Le travail des élèves

1. Sur chaque thème les élèves reçoivent une, ou plusieurs, fiche de travail sur laquelle figurent les énoncés que l'on utilisera, (admis car connus ou admis après des activités de conjecture) et les exercices (pris dans le stock constitué à l'étape 5) (voir partie 4 "Pour apprendre à démontrer").

2. Les élèves ont à résoudre les exercices.
   En commençant par faire la figure et écrire les hypothèses (ou données).

3. Ils relèvent dans un fichier les méthodes de démonstration.

4. Ils utilisent leur fichier pour résoudre des exercices.

5. Ils font un devoir de contrôle en fin de thème :
   évaluation de l'apprentissage.

* Remarques

1. A PROPOS DU FICHIER

L'intérêt est de donner une méthode pour "attaquer les démonstrations".

Exemple : si dans un exercice figure la question.
"Démontre que d et d' sont parallèles", l'élève en peine pourra consulter son fichier au mot "parallèle" et il trouvera : Comment démontrer que deux droites sont parallèles ?

méthode 1 en sachant que ces deux droites sont parallèles à une même troisième.

méthode 2 en sachant que ces droites portent deux côtés opposés d'un parallélogramme.

méthode 3 en utilisant l'axiome des milieux.

méthode 4 en sachant qu'elles sont perpendiculaires à une même droite. etc....

. Il est à noter que pour être utilisable l'énoncé qui répond à la question "comment faire pour démontrer que .... " doit être formulé de façon différente par rapport à la formulation usuelle, et ce n'est pas toujours facile. Cela nous amène à nous interroger sur les formulations des théorèmes et des définitions que nous donnons ! Ce travail de formulation fait avec les élèves est très important.

. Le fichier est un point capital de notre méthodologie pour apprendre à démontrer.

2. A PROPOS DE LA METHODOLOGIE

Le but de la démonstration est de tisser des liens logiques entre les données (hypothèses) et la conjecture (conclusion). Le moyen de trouver la démonstration n'est pas, comme le laissent trop souvent croire les corrigés, de partir des hypothèses pour aboutir à la conclusion, mais d'analyser la conclusion, le but, en utilisant les fiches méthodologiques c'est-à-dire en se posant la question "comment démontrer que... ?" et en faisant un choix parmi les méthodes disponibles à la lumière des hypothèses. Ce choix peut renvoyer à une autre question "comment démontrer que... ?" et donc à l'utilisation d'une autre fiche méthodologique... Un moyen de faciliter cette recherche à partir de la figure est de tracer la figure traduisant des hypothèses avec la couleur usuelle (en essayant d'utiliser des symboles pour mettre en évidence les hypothèses sur la figure) et de figurer la conclusion ou conjecture d'une autre couleur (quitte à superposer les traits).

3. A PROPOS DES "HYPOTHESES"

Ce terme semble très mal adapté et sujet de confusion avec l'acceptation courante du terme que l'on trouve en sciences expérimentales et dans la vie de tous les jours. Donc nous proposons d'utiliser le mot données. Pour pouvoir comprendre le terme hypothèse, au sens mathématique, il faudrait en fait savoir ce qu'est l'édifice mathématique (ce que l'on commence à peine à construire dans le meilleur des cas en 4ème) et savoir que sa construction est hypothético-déductive.

D'autre part pour faciliter la rédaction des démonstrations il semble utile de numéroter les données.

4. A PROPOS DES FIGURES

Il semblerait souhaitable d'utiliser un registre plus varié de lettres pour ne pas faire contracter aux élèves des habitudes qu'après nous déplorons. Par exemple dès qu'ils voient ABCD certains élèves dessinent d'office un parallélogramme..... Il semblerait souhaitable aussi de varier leur disposition. (voir partie 6 "pour ne pas conclure").

5. A PROPOS DES DEMONSTRATIONS

Il va de soi qu'il faut apprendre à l'élève à rédiger une démonstration en français. Mais l'utilisation de schémas déductifs ou organigrammes présente au moins deux intérêts :

- bien traduire la compréhension en éliminant le problème de la langue, de l'expression qui est parfois important pour certains élèves et même pour beaucoup comme le montrent certaines expériences de communication.
- Permettre une correction rapide et univoque, et permettre aussi une autocorrection qui sinon est difficilement envisageable en géométrie.

6. A PROPOS DE LA FORMULATION DES ENONCES

Essayons de lutter contre la pauvreté de la terminologie et les "automatismes" que nous montons chez nos élèves : triangle ABC rectangle en A ....

La rédaction en "que peut-on dire de .... ? Pourquoi ?" ou "que peut-on dire de .... ? Démontre-le." laisse place à la conjecture et fait prendre conscience à l'élève qu'il y a un problème.

7. A PROPOS DU CONTENU DES FICHES D'EXERCICES

Nombre de théorèmes importants peuvent être traités comme exercices. Une fois démontrés ces théorèmes auront valeur d'énoncés. Il faut donc faire une synthèse à l'issue de la fiche d'exercices.

Si la classe le permet, on peut en fin d'année, mais ce n'est qu'un objectif accessoire, faire comprendre aux élèves ce qu'est une axiomatique. On peut leur montrer que l'on a admis beaucoup trop d'énoncés et à partir de cette remarque rechercher le minimum d'énoncés permettant de montrer les autres.

Postulat : il n'y a aucun point de départ privilégié ; aucune progression meilleure que les autres. Cela peut et devrait peut-être dépendre davantage de la classe, de ce qui "marche" le mieux, ou que le professeur juge le plus adéquat. L'essentiel est d'avoir un matériau modulable à disposition. Il est à noter que les exercices proposées n'ont rien d'original (et c'est tant mieux).

d) DES EXEMPLES

Exemple 1. Travail d'un binôme au collège de Parthenay
(voir partie IV "Pour apprendre à Démontrer" B)

Exemple 2. Travail d'un groupe de Professeurs d'un CES de LYON dans le cadre de l'IREM. (Voir : La démonstration en géométrie (classe de 4ème) p.37 dans Sans Tambour Ni Trompette n° 20-28 Mai 1982. IREM-APM Lyon)
Exemple 3. Travaux faits dans le cadre de stages de l'IREM de Poitiers en formation continue (1981-1982). Voici les travaux de deux groupes.
LES GROUPES DE COULONGES SUR L'AUTIZE

. *Il s'agit du travail d'une quinzaine d'enseignants de mathématiques du 1er cycle en stage court de formation continue (5 × 2h ; animation IREM), qui, après discussion sur les problèmes posés par l'enseignement de la géométrie en 4ème ont constitué 3 groupes de travail sur 3 thèmes différents du programme de géométrie des figures de 4ème, le recouvrant à peu près.*

. *Les objectifs du travail étaient les suivants:*

- *à partir d'un nombre très restreint d'énoncés, rechercher un assez grand nombre d'exercices simples ayant un but méthodologique précis : apprendre à démontrer .... (par exemple : un quadrilatère est un parallélogramme) en se limitant aux exemples fondamentaux*
- *analyser pour chaque exercice les énoncés mis en jeu et leur nombre.*
- *mise en oeuvre dans la classe.*

. *Voici les travaux des 3 groupes :*

ORTHOGONALITE - RECTANGLE.

PARALLELISME - PARALLELOGRAMME.

MEDIATRICE - LOSANGE.

ORTHOGONALITE - RECTANGLE

I ORTHOGONALITE

1) Axiomes utilisés dans cette leçon :

1 2 droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles.

2 si 2 droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

3 par un point, il ne passe qu'une droite perpendiculaire à une droite donnée.

---

2) Les exercices suivants ont pour but de démontrer que 2 droites sont parallèles.

Exercice I

Soient 3 segments [AB] ; [AD] et [DC] tels que

$[AB] \perp [AD]$ et $[DC] \perp [AD]$

démontrer que (AB) // (DC)

1 déduction ; axiome 1 utilisé

Exercice II

Soient 2 triangles (ABC) et (AMC)

Tracer les hauteurs [BI] et [MJ] relatives au côté [AC] .

1°) Démontrer que (BI) // (MJ)

2°) Quelle condition supplémentaire faudrait-il pour que (B I M J) soit un trapèze ?

1 déduction ; axiome 1

Sachant que la tangente à un cercle est perpendiculaire au rayon, on peut proposer les exercices suivants :

Exercice III

Soient A et B 2 points diamétralement opposés d'un cercle.

Démontrer que les tangentes au cercle en A et B sont parallèles.

1 déduction ; axiome 1

Exercice IV

Soient 2 cercles de même centre O ; une droite (Δ) passant par O coupe les 2 cercles en A; B; U; V.

Démontrer que les tangentes aux cercles en A; B; U; V sont parallèles.

1 déduction ; axiome 1

Exercice V

Soient 2 cercles sécants de centres E et F

Tracer une tangente commune aux cercles. Soient A et B les points de contact.

1°) démontrer que (AEFB) est un trapèze

2°) l'hypothèse "cercles sécants" a-t-elle une importance ?

2 déductions ; axiome 1

---

3) Les exercices suivants ont pour but de démontrer que l'on a un angle droit.

Exercice VI

Construis un trapèze (ABCD) ayant un angle droit.

Existe-t-il d'autres angles droits dans ce trapèze ? Justifie ta réponse.

1 déduction ; axiome 2

Exercice VII

Dans un triangle (EFG), trace la hauteur [EU] relative au côté [FG].

Soit M ∈]EF[, la parallèle à (FG) passant par M coupe EG en N.

Démontrer que [EU] est aussi une hauteur du triangle [AMN].

1 déduction ; axiome 2

II RECTANGLE

1) Introduction au rectangle

A. Construire un quadrilatère (ABCD) ayant :

1°) 4 angles droits

2°) 3 angles droits

3°) 2 angles droits

4°) 1 angle droit

B. Construire un parallélogramme (ABCD) ayant :

1°) 4 angles droits

2°) 3 angles droits

3°) 2 angles droits

4°) 1 angle droit

Dans quels cas obtient-on un rectangle ?

2) Définitions :

| DEF 1 | un quadrilatère ayant 3 angles droits est un rectangle. |
| DEF 2 | un parallélogramme ayant 1 angle droit est un rectangle. |

3) Exercices ayant pour but de démontrer qu'un quadrilatère est un rectangle

---

1°) Soit un trapèze (ABCD) rectangle en A et D ; la perpendiculaire à (DC) passant par B coupe (DC) en E.

Démontrer que (ABED) est un rectangle.

1er procédé : def 1 - une déduction

2ème procédé : axiome 1 et def 2 - quatre déductions.

2°) Soit un trapèze (ABCD) tel que (AB) // (CD). Les perpendiculaires à (CD) passant par A et B coupent (CD) en E et F.

Démontrer que (AEFB) est un rectangle.

1er procédé : axiome 2 et def 1. deux déductions

2ème procédé: axiome 1 et def 2. deux déductions.

3°) Soit un triangle (ABC) rectangle en B.

Tracer (IJ) // (BC) avec I $\in$ (AB) et J $\in$ (AC)

et (JK) // (AB) avec K $\in$ (BC)

Démontrer que (IJKB) est un rectangle.

1er procédé : axiome 2 et def 2 . trois déductions

2ème procédé: def 2 . une déduction

4) <u>Exercices ayant pour but de démontrer que 3 points sont alignés.</u>

---

1) Soit un triangle (AMN) ; B ∈]AM[, on trace la parallèle à (MN) passant par B qui coupe (AN) en C.
[AI] et [AJ] sont les hauteurs des triangles (ABC) et (AMN).
Démontrer que A, I et J sont alignés.

. <u>On utilise l'axiome 2 et l'axiome</u> 3 - <u>deux déductions</u>

2) Soient 2 rectangles (IJEF) et (JKAE).
Démontrer que I, J et K sont alignés.

. <u>On utilise l'axiome 3.</u> <u>deux déductions</u>.

3) Soit une droite (D) et A ∈ (D).
Soient 2 cercles de centres E et F tangents en A à (D).
Démontrer que A, E et F sont alignés.

. <u>On utilise l'axiome 3.</u> <u>deux déductions.</u>

REMARQUE

Si, de plus, on connait l'axiome des milieux, on peut proposer les exercices suivants :

1' - dans un triangle (EFG), tracer la hauteur [EU]
soient M et N les milieux des côtés [EF] et [EG].
Démontrer que (EU) est aussi une hauteur du triangle (EMN)

axiome des milieux
axiome 2 ; 2 déductions

2' - soit un triangle (ABC) rectangle en A
soient I ; J; K les milieux respectifs des côtés [AB] ; [AC] ; [BC]
démontrer que (IJKA) est un rectangle.

1ère méthode : axiome des milieux
Def 2 ; 4 déductions

2ème méthode : axiome des milieux
axiome 2 ; 5 déductions
Def 1

PARALLELISME - PARALLELOGRAMME

Enoncés utilisés dans les exercices

1 Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses côtés opposés sont parallèles.

2 Soient D, D' et D" des droites. Si D // D' et si D' // D" alors D // D".

3 Deux droites parallèles ayant un point commun sont confondues.

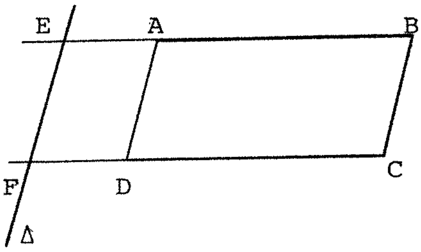
4 Dans un parallélogramme, les côtés opposés ont même longueur.

5 Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu.

Notation : Il y a 8 façons de noter le parallélogramme (ABCD)
L'ordre des lettres est important.

Exercices

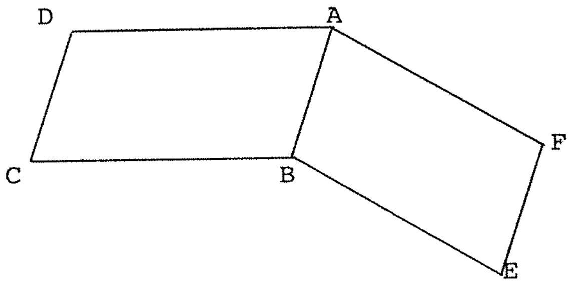
1) Soit (ABCD) un parallélogramme. Soit Δ une droite parallèle à la droite (AD). Δ coupe (AB) en E et (CD) en F. Montrer que (AEFD) et (BEFC) sont des parallélogrammes.



5 déductions

1 2

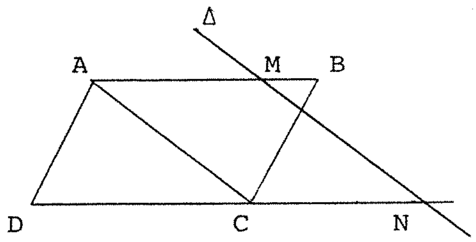
2) Soient (ABCD) et (ABEF) 2 parallélogrammes tels que D, A, F ne soient pas alignés.
Montrer que les droites (CD) et (EF) sont parallèles.



3 déductions

1 2

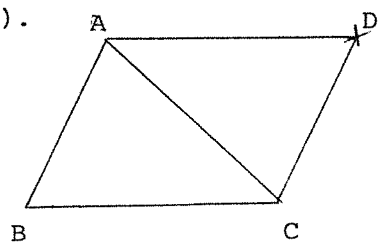
3) Soit (ABCD) un parallélogramme. Une droite Δ parallèle à la droite (AC) coupe (AB) en M et (CD) en N. Montrer que (AMNC) est un parallélogramme.



2 déductions

1

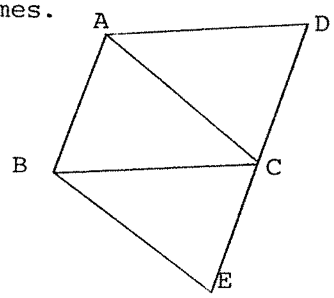
4) Soit (ABC) un triangle. Construire avec le compas le point D tel que (ABCD) soit un parallélogramme. Construire de même les points E et F pour que (ABEC) et (ACBF) soient des parallélogrammes. (En tout 3 figures).



4

5) Soit (ABC) un triangle.

a) Construire les points D et E pour que (ABCD) et (ABEC) soient des parallélogrammes.



4

b) Montrer que les points C, D, E sont alignés. Que constatez-vous de plus ?

4 déductions 1 2   4 déductions 4

c) Construire le point F tel que (ACBF) soit un parallélogramme.

4

d) Montrer que A est milieu de [FD]

voir b)

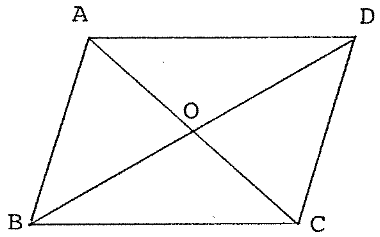
e) Montrer que B est milieu de [EF]

voir b)

Remarque : Dans le triangle (DEF), A est milieu de [FD] , B est milieu de [EF] et la droite (AB) est parallèle à la droite (DE).
Trouvez 2 autres situations analogues.

6) Soit (ABC) un triangle ; [BO] est la médiane issue de B.

a) Construire avec le compas le point D pour que O soit milieu de [BD] .

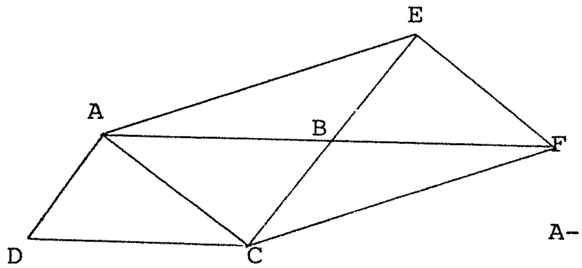


b) Que peut-on dire de (ABCD) ? Justifier la réponse

5   1 déduction

7) Soit (ABCD) un parallélogramme. Construire avec le compas les points E et F pour que B soit milieu de [EC] et de [AF].

Montrer que (AEFC) est un parallélogramme.

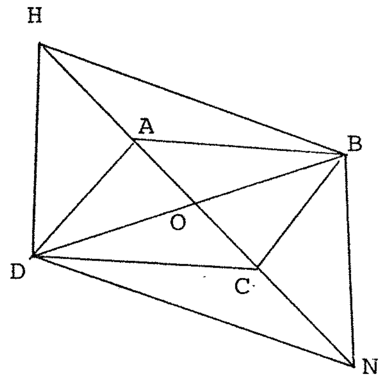


5 <u>1 déduction</u>

A-t-on utilisé toutes les hypothèses ?

8) Soit (ABCD) un parallélogramme dont les diagonales se coupent en O.

a) Placer 2 points M et N sur la droite (AC) tel que O soit milieu de [MN] .



b) Montrer que (BMDN) est un parallélogramme.

2 déductions

5

LA MEDIATRICE

Les élèves sont supposés connaître toutes les propriétés étudiées dans les classes antérieures et les propriétés ci-dessous qui seront admises après manipulation.

$\boxed{P_1}$ La perpendiculaire qui passe par le milieu d'un segment [AB] est la médiatrice du segment [AB] .

$\boxed{P_2}$ Tous les points de la médiatrice de [AB] sont équidistants de A et de B.

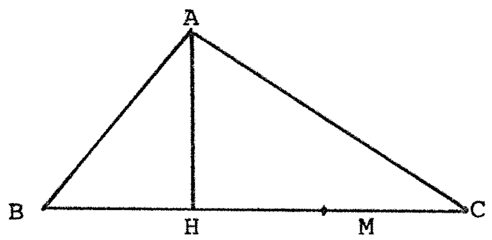
$\boxed{P_3}$ Tous les points équidistants de A et de B sont sur la médiatrice de [AB] .

Remarque : P_2 et P_3 ont été volontairement séparées pour obliger les élèves à être très précis sur la propriété utilisée.

1- La Médiatrice

Exercice 1

Soit ABC un triangle de hauteur [A;H] , M un point de [H;C] tel que BH = HM. Montrer que (AH) est la médiatrice de [B;M] .



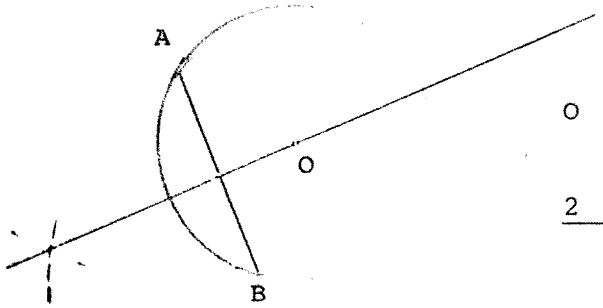
$$\left.\begin{array}{l}(AH) \text{ hauteur} \Longrightarrow (AH) \perp (BC) \\ BH = HM \Longrightarrow H \text{ milieu de } [B;M]\end{array}\right\} \xrightarrow{\boxed{P_1}} (AH) \text{ médiatrice de } [B;M]$$

3 déductions - 1 propriété

Exercice 2

Soit le cercle C (O; OA) et B un point du cercle distinct de A

Construire la médiatrice Δ de [A;B] et montrer que Δ passe par O.



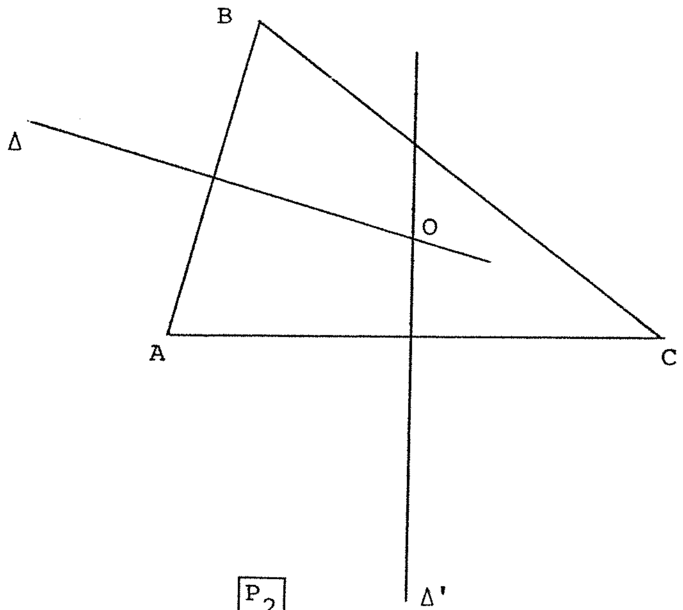
O est le centre $\Longrightarrow$ OA = OB $\xrightarrow{\boxed{P_3}}$ O $\in \Delta$

2 déductions . 1 propriété

Exercice 3

Soit un triangle ABC. Construire les médiatrices de [A;B] et [A;C].

1. Montrer que le point d'intersection O est équidistant des trois sommets.
2. Montrer que O est sur la médiatrice de [B;C]
3. Construire le cercle passant par A; B; C.



$$\left.\begin{array}{l} 1.\quad \Delta \text{ méd de } [A;B] \xrightarrow{\boxed{P_2}} OA = OB \\ \quad\;\; \Delta' \text{ méd de } [A;C] \xrightarrow{\boxed{P_2}} OA = OC \end{array}\right\} \Longrightarrow OA = OB = OC$$

<u>3 déductions</u> - <u>1 propriété</u>

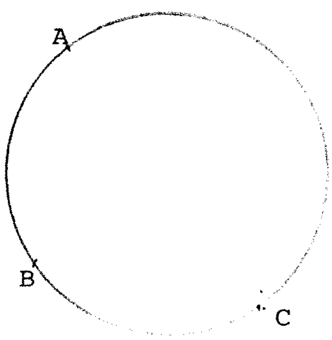
2. $OB = OC \xrightarrow{\boxed{P_3}} O$ est sur la méd. de [B;C]

<u>1 déduction</u> - <u>1 propriété</u>

3. Construction. O centre du cercle.

Exercice 4

En utilisant l'exercice précédent retrouver le centre d'un cercle (polycopié sans trace du centre).



On choisit trois points quelconques A; B; C sur le cercle.

Soit O le centre du cercle.

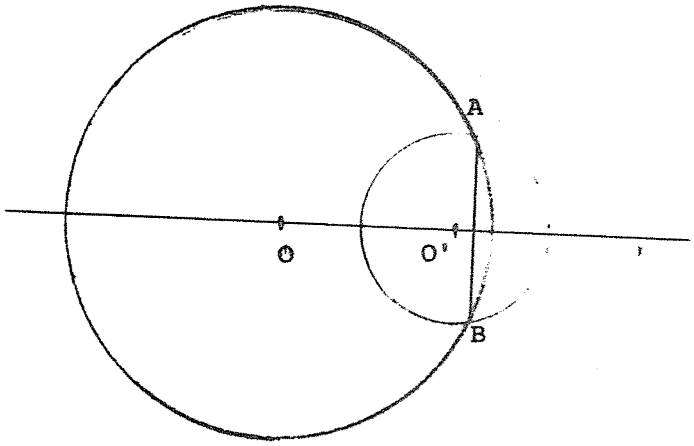
$$\left.\begin{array}{l} OA = OB \overset{\boxed{P_3}}{\Longrightarrow} O \in (\Delta) \text{ méd. de } [A;B] \text{ construction} \\ OB = OC \overset{\boxed{P_3}}{\Longrightarrow} O \in (\Delta') \text{ méd de } [B;C] \text{ construction} \end{array}\right\} \Delta \cap \Delta = \{O\}$$

<u>2 déductions</u> . <u>1 propriété</u>

Exercice 5

Soit les cercles $\mathcal{C}$ (O;OA) et $\mathcal{C}$'(O';O'A) sécants en A et B.

Montrer que (OO') est la médiatrice de [A;B]

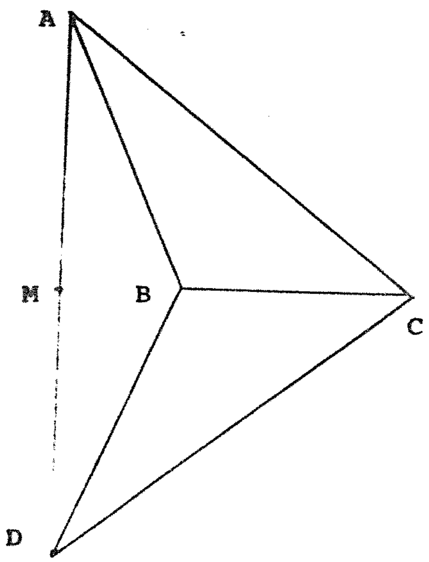


$$\left.\begin{array}{l} O \text{ centre de } \mathcal{C} \Longrightarrow OA = OB \overset{\boxed{P_3}}{\Longrightarrow} O \in \text{ méd. de } [A;B] \\ O' \text{ centre de } \mathcal{C}' \Longrightarrow O'A = O'B \overset{\boxed{P_3}}{\Longrightarrow} O' \in \text{ méd. de } [A;B] \end{array}\right\} \Longrightarrow (OO') \text{ est la méd. de } [A;B]$$

<u>5 déductions</u> . <u>1 propriété</u>

Exercice 6

Tracer un segment [B,C] tel que BC = 3 cm. Construire les triangles ABC et DBC de part et d'autre de (BC) tels que AC = DC = 6 cm et AB = BD = 4cm. Soit M le milieu de [A;D] . Montrer que B;C;M sont alignés.



Soit Δ la médiatrice de [A;D]

$$\left.\begin{array}{l} CA = CD \overset{\boxed{P_3}}{\Longrightarrow} C \in \Delta \\ BA = BD \overset{\boxed{P_3}}{\Longrightarrow} B \in \Delta \\ M \text{ milieu} \Longrightarrow MA = MD \overset{\boxed{P_3}}{\Longrightarrow} M \in \Delta \end{array}\right\} \Longrightarrow B;C;M \text{ sont alignés.}$$

<u>5 déductions</u> . <u>1 propriété</u>

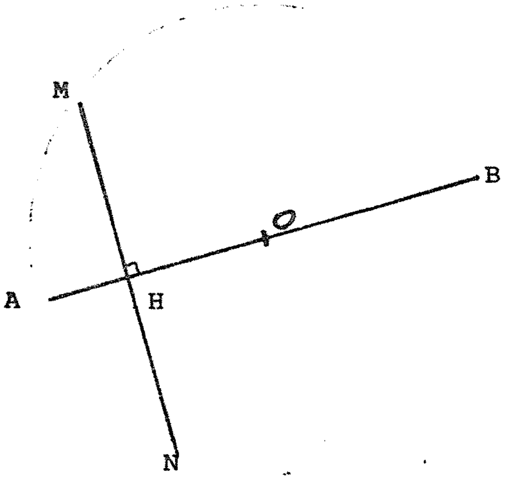
Exercice 7

Soit le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[A;B]$ de centre O. AB = 6cm. $M \in \mathcal{C}$.

1 Construire N tel que (AB) méd. de $[M;N]$.

2 Montrer ON = 3cm

3 Montrer que N est un point du cercle.



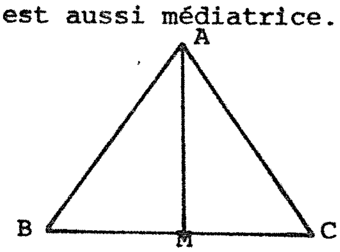
(1) (AB) méd. de $[MN] \xrightarrow{\boxed{P_1}}$ (MN) $\perp$ (AB) en H et H milieu de $[M;N]$
Du point M, (MH) $\perp$ (AB) et HN = HM.

(2) $O \in$ méd de $[M,N] \xrightarrow{\boxed{P_2}} \left.\begin{array}{l} OM = ON \\ OM = \frac{1}{2} AB \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} ON = \frac{1}{2} AB \\ = 3 \text{ cm.} \end{array}$

(3) ON = 3 cm $\quad N \in \mathcal{C}(O ; 3 \text{ cm})$

Exercice 8

Montrer que dans le triangle isocèle ABC tel que AB = AC la médiane $[A;M]$ est aussi médiatrice.

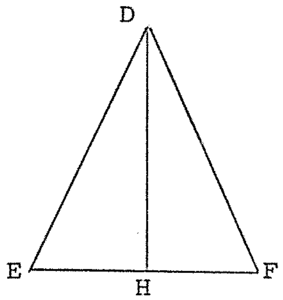


$\left.\begin{array}{l} AB = AC \xrightarrow{\boxed{P_3}} A \in \text{méd. de } [B;C] \\ [AM] \text{ médiane} \Longrightarrow M \text{ milieu de } [B;C] \xrightarrow{\boxed{P_1}} M \in \text{med. } [B;C] \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \text{(AM) est la} \\ \text{méd. de } [B,C] \end{array}$

<u>4 déductions</u> . <u>1 propriété</u>

Exercice 9

Montrer que dans le triangle isocèle DEF de sommet principal D, la médiane $[D,H]$ relative à $[E,F]$ est aussi hauteur.

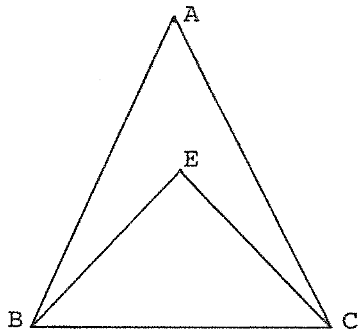


$$\left.\begin{array}{l}[D,H] \text{ médiane} \Longrightarrow HE=HF \xrightarrow{\boxed{P_3}} H\in \text{méd. de } [E;F]\\ DEF \text{ isocèle} \Longrightarrow DE=DF \xrightarrow{\boxed{P_3}} D \in \text{méd. de } [E;F]\end{array}\right\} \Rightarrow (DH) \text{ méd. de } [E;F] \xrightarrow{\boxed{P_1}} (DH)\perp(EF) \Rightarrow [DH] \text{ hauteur.}$$

7 déductions . 2 propriétés

Exercice 10

Construire deux triangles isocèles ABC et EBC de base commune $[B,C]$. Montrer que $AE \perp BC$.

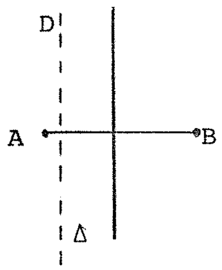


$$\left.\begin{array}{l}ABC \text{ isocèle} \Longrightarrow AB = AC \xrightarrow{\boxed{P_2}} A \in \text{méd. de } [B,C]\\ EBC \text{ isocèle} \Longrightarrow EB = EC \xrightarrow{\boxed{P_3}} E \in \text{méd. de } [B,C]\end{array}\right\} \Rightarrow (AE) \text{ méd.} \xrightarrow{\boxed{P_1}} (AE) \perp (BC)$$

6 déductions . 2 propriétés

Exercice 11

Soit $[A;B]$ un segment. Construire une droite D telle que si $M \in D$ $MA \neq MB$.



Soit Δ la médiatrice de $[A;B]$

$$MA \neq MB \xrightarrow{\boxed{P_3}} \left.\begin{array}{l} M \notin \Delta \\ M \in D\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta \cap D = \emptyset \quad \Delta \text{ strictement // à } D$$

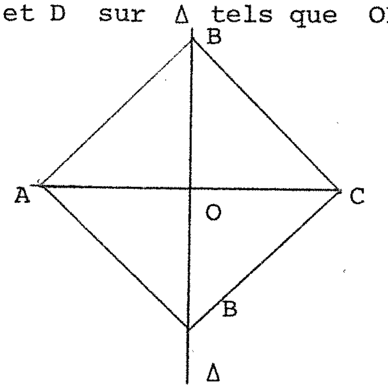
3 déductions . 1 propriété

2- Le Losange (utilise la médiatrice)

Exercice 1

Construire $[A;C]$ et la médiatrice Δ telle que $[A;C] \cap \Delta = \{O\}$

Placer B et D sur Δ tels que OB = OD.



1 Montrer que (AC) est la médiatrice de $[B;D]$

(BD) méd. de $[A;C] \xrightarrow{\boxed{P_1}}$ (AC) $\perp$ (BD) $\xrightarrow{\boxed{P_1}}$ (AC) médiatrice de $[B;D]$

O milieu de $[B;D]$

2 deductions .'1 propriété

2 définition

def

Un quadrilatère ayant ses diagonales médiatrices l'une de l'autre est un losange

3 Montrer que les 4 côtés de ABCD sont isométriques.

$$\left.\begin{array}{l}(BD)\text{ méd. de }[A,C] \xrightarrow{\boxed{P_2}} \begin{cases} BA = CB \\ DA = DC \end{cases} \\ (AC)\text{ méd. de }[B,D] \xrightarrow{\boxed{P_2}} DA = BA \end{array}\right\} \Longrightarrow BA = BC = CD = DA$$

3 déductions . 1 propriété

P_4

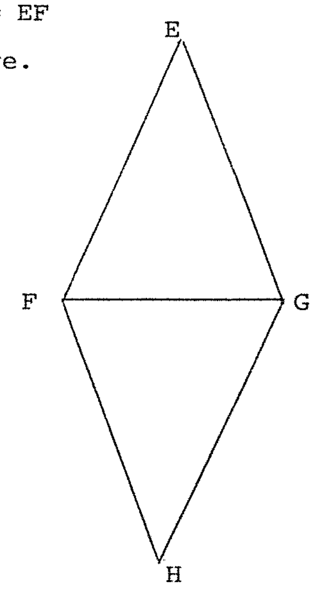
les côtés d'un losange sont isométriques.

Exercice 2

Construire un triangle isocèle EFG tel que EF = EG

Construire H tel que HF = HG = EF

Montrer que EF HG est un losange.



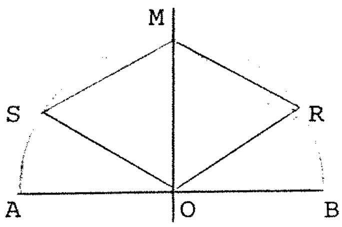
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} EF = EG \xRightarrow{\boxed{P_3}} E \in \text{méd. de } [F;G] \\ HF = HG \Longrightarrow H \in \text{méd. de } [F;G] \end{array}\right\} \Longrightarrow (EH) \text{ méd. de } [F;G] \\ \\ \left.\begin{array}{l} FE = FH \Longrightarrow F \in \text{méd. de } [E;H] \\ GH = GE \Longrightarrow G \in \text{méd. de } [E;H] \end{array}\right\} \Longrightarrow (FG) \text{ méd. de } [E;H] \end{array}\right\} \xRightarrow{\boxed{\text{Déf}}} \text{EFHG est un losange}$$

<u>7 déductions</u> . <u>2 Propriétés</u>

P_5 | Tout quadrilatère ayant ses côtés isométriques est un losange

Exercice 3

Tracer un demi-cercle de centre O de diamètre AB = 7,8 cm. La médiatrice de [A;B] coupe le demi-cercle en M. Placer sur le demi-cercle les points R et S tels que MR = MS = 3,9 cm. Montrer que ORMS est un losange.



$$\left.\begin{array}{l} O \text{ centre} \Longrightarrow OR = OS = 3{,}9 \\ \qquad\qquad\quad\; MR = MS = 3{,}9 \end{array}\right\} \Longrightarrow OR = OS = MR = MS \xRightarrow{\boxed{P_5}} \text{MROS est un losange}$$

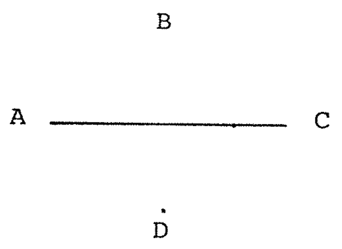
<u>3 déductions . 1 propriété</u>

Exercice 4

Construire un losange ABCD tel que AB = 4cm.
Combien de solutions ? (A faire en classe.)

Exercice 5

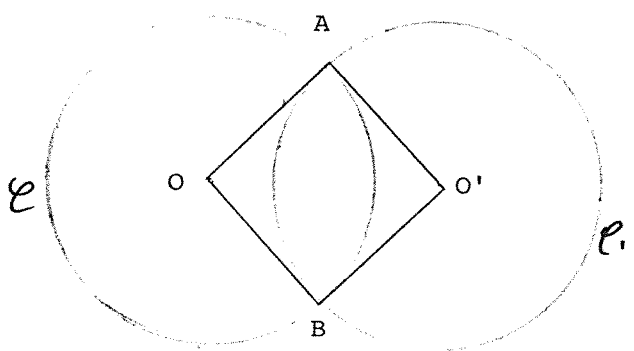
Construire un losange ABCD tel que AC = 6 cm et AB = 4 cm.
Combien de solutions ?



- côtés isométriques $\Longrightarrow$ placer [AC] puis tracer deux cercles de centres A et C et de rayon 4cm.

Exercice 6

Construire 2 cercles de centres O et O' de même rayon. $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{A;B\}$
Montrer que OAO'B est un losange.

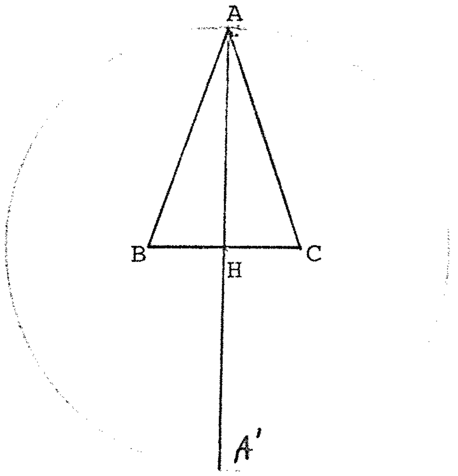


$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} A \in \mathcal{C} \\ B \in \mathcal{C} \end{array}\right\} \Longrightarrow OA=OB \\ \left.\begin{array}{l} A \in \mathcal{C}' \\ B \in \mathcal{C}' \end{array}\right\} \Longrightarrow O'A=O'B \\ \qquad OA=OA' \end{array}\right\} \Longrightarrow OA=AO' = O'B=BO \xRightarrow{\boxed{P_5}} \text{OA O'B est un losange}$$

<u>4 déductions</u> . <u>1 propriété</u>

<u>Exercice 7</u>

Construire un triangle isocèle ABC tel que AB = AC
Soit H le milieu de [B;C]. Construire le cercle $\mathscr{C}$ (H;HA) et A'
intersection de $\mathscr{C}$ et (AH). Montrer que ABA'C est un losange.



$$\left.\begin{array}{r} AB = AC \xRightarrow{\boxed{P_3}} A \in \text{méd. de } [B;C] \\ H \text{ milieu} \Rightarrow HB = HC \Longrightarrow H \in \text{méd. de } [B;C] \end{array}\right\} \Longrightarrow (AH) \text{ méd. de } [B;C]$$

$$\left.\begin{array}{r} H \text{ centre de cercle} \Rightarrow H \text{ milieu } [A;A'] \\ (AH) \text{ médiatrice} \xRightarrow{\boxed{P_1}} (AH) \perp (BC) \end{array}\right\} \xRightarrow{\boxed{P_1}} (BC) \text{ méd. de } [A;A']$$

$$\xRightarrow{\boxed{\text{déf}}} \text{ABA'C est un losange}$$

<u>8 déductions</u> . <u>3 propriétés</u>

LES GROUPES DE BRESSUIRE - ST VARENT

. *Il s'agit d'un travail analogue au précédent.*
Voici les travaux des trois groupes :
- RECTANGLE - ORTHOGONALITE
- PARALLELISME - PARALLELOGRAMME

RECTANGLE - ORTHOGONALITE

DEFINITIONS OU PROPRIETES UTILISEES

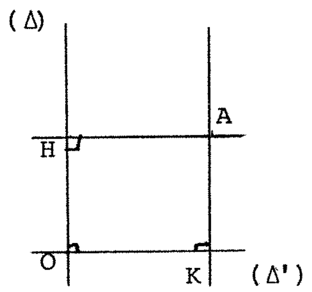
I : Définition du rectangle : quadrilatère ayant 3 angles droits.

II : Si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

III : Si une droite est tangente à un cercle $\mathcal{C}$ (O,R) en un point A , alors elle est perpendiculaire à (OA).

IV : Dans un triangle, la droite qui passe par les milieux de 2 côtés est parallèle au support du 3ème côté.

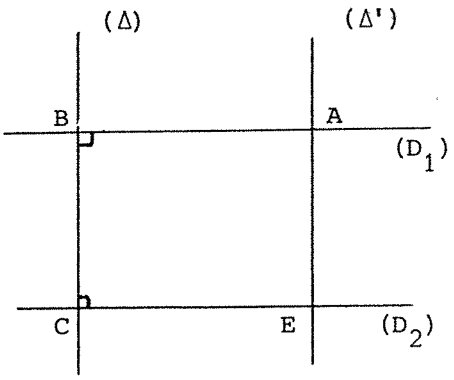
Exercice 1



Soient deux droites (Δ) et (Δ') perpendiculaires en O. Soit A un point du plan n'appartenant ni à (Δ) ni à (Δ'). La perpendiculaire à (Δ) passant par A coupe (Δ) en H.
La perpendiculaire à (Δ') passant par A coupe (Δ') en K.
Montrer que (AKOH) est un rectangle.

1 PROPRIETE : I ; 1 DEDUCTION

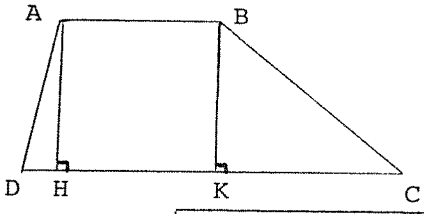
Exercice 2



Soit une droite (Δ). Tracer 2 droites (D_1) et (D_2) perpendiculaires à (Δ). Par un point A appartenant à (D_1), tracer une droite (Δ') parallèle à (Δ). Les points B, C, E sont tels que : $(D_1) \cap (\Delta) = \{B\}$ $(D_2) \cap (\Delta) = \{C\}$ $(\Delta') \cap (D_2) = \{E\}$.
Montrer que (ABCE) est un rectangle.

2 PROPRIETES : II et I ; 2 DEDUCTIONS

Exercice 3



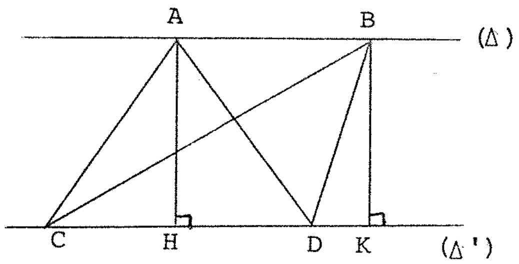
Soit un trapèze (ABCD) de bases [AB] et [DC].

Tracer les hauteurs [AH] et [BK].

Montrer que (ABKN) est un rectangle.

2 PROPRIETES : II et I ; 2 DEDUCTIONS

Exercice 4



Tracer 2 droites (Δ) et (Δ') parallèles.

A et B sont deux points de (Δ) (distincts)

C et D sont deux points distincts de (Δ')

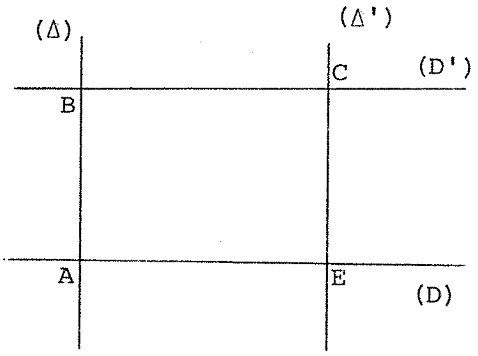
Tracer le triangle (CAD) et sa hauteur [AH].

Tracer le triangle (CBD) et sa hauteur [BK].

Montrer que (ABKH) est un rectangle.

2 PROPRIETES : II et I ; 2 DEDUCTIONS

Exercice 5



Soient 2 droites (D) et (Δ) perpendiculaires en A. Placer un point B sur (Δ) et un point E sur (D).

Tracer la droite (D') passant par B et parallèle à (D)

Tracer la droite (Δ') passant par E et parallèle à (Δ).

(D') et (Δ') se coupent en C.

Montrer que (ABCE) est un rectangle.

2 PROPRIETES : II** et I* ; 3 DEDUCTIONS

Exercice 6

Soient 2 droites (Δ) et (Δ') perpendiculaires en O. Tracer deux cercles ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$) de centre O, de rayons différents.

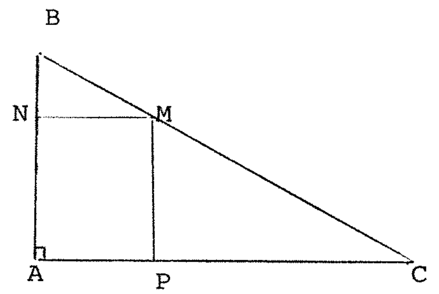
$(\mathscr{C}) \cap (\Delta) = \{A\}$ et $(\mathscr{C}') \cap (\Delta') = \{B\}$

Tracer la droite (D) tangente en A au cercle (γ) et la droite (D') tangente en B au cercle (γ') ; (D) et (D') se coupent en E.

Montrer que (OAEB) est un rectangle

2 PROPRIETES III et I ; 3 DEDUCTIONS

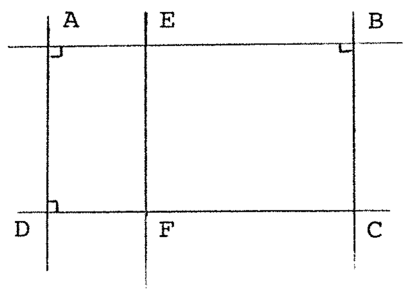
Exercice 7



Soit (ABC) un triangle rectangle en A.
Soit M un point de [BC] . La parallèle à (AC) passant par M coupe (AB) en N.
La parallèle à (AB) passant par M coupe (AC) en P.
Montrer que (MNAP) est un rectangle.

2 PROPRIETES : II et I ; 3 DEDUCTIONS

Exercice 8



Soient 4 points A, B, C, D tels que :

$(AB) \perp (AD)$

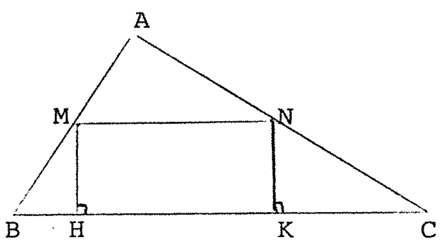
$(AD) \perp (DC)$

$(AB) \perp (BC)$

Soit $E \in [AB]$. La droite passant par E et parallèle à (AD) coupe (DC) en F.
Montrer que (BCFE) est un rectangle.

2 PROPRIETES : II et I ; 3 DEDUCTIONS

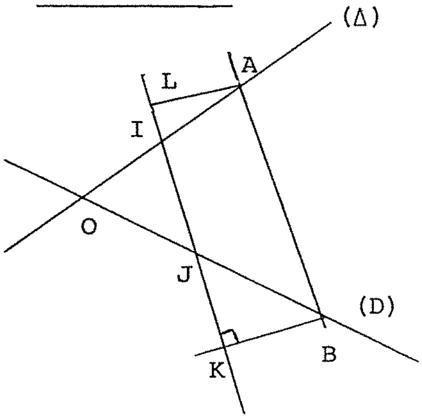
Exercice 9



Soit un triangle (ABC) ; M est le milieu de [AB] et N le milieu de [AC].
Tracer par M et N les perpendiculaires à (BC). Elles coupent (BC) respectivement en H et K.
Montrer que (MNKH) est un rectangle.

3 PROPRIETES : IV II I ; 3 DEDUCTIONS

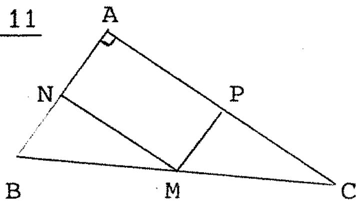
Exercice 10



Soient 2 droites (D) et (Δ) sécantes en O. Place un point A sur (Δ) et un point B sur (D). On appelle I le milieu de [OA] et J le milieu de [OB].
Par le point B, on mène une perpendiculaire à (IJ) qui coupe (IJ) en K.
Par le point A, on mène une parallèle à (BK) qui coupe (IJ) en L.
Montre que (ABKL) est un rectangle.

3 PROPRIETES : II IV et I ; 4 DEDUCTIONS

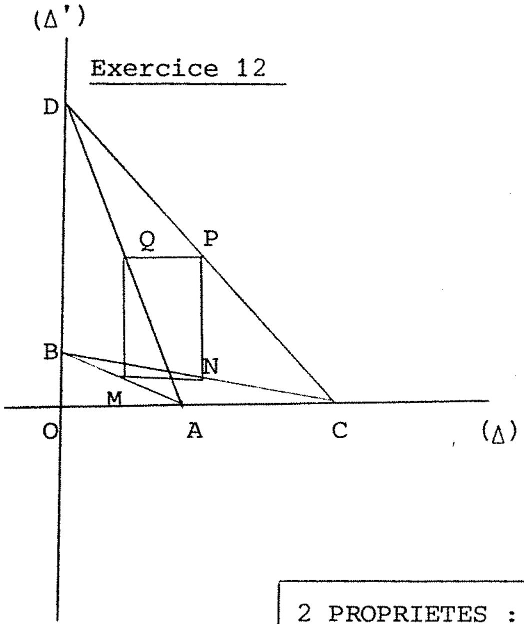
Exercice 11



Soit (ABC) un triangle rectangle en A.
On appelle M, N, P les milieux respectifs de [BC] ; [AB] ; [AC].
Montrer que (MNAP) est un rectangle.

3 PROPRIETES : IV II et I ; 5 DEDUCTIONS

Exercice 12



Soient 2 droites (Δ) et (Δ') perpendiculaires en O. Soient A et C deux points de (Δ) distincts de O et B et D deux points de (Δ') distincts de O. On appelle M,N, P, Q les milieux respectifs de [AB] ; [BC] ; [CD] et [DA] .

1°) Montrer que (MN) ⊥ (QM)

2 PROPRIETES : IV et II ; 4 DEDUCTIONS

2°) Montrer que (MNPQ) est un rectangle

3 PROPRIETES : IV II et I ; 6 DEDUCTIONS

N.B. Pour le dessin, on pourra envisager plusieurs cas de figure suivant la position des points A, B, C, D par rapport à O.

PARALLELISME - INITIATION AU PARALLELOGRAMME

Introduction :

On suppose connues les notions suivantes :

- définition du parallélogramme (côtés opposés parallèles)
- transitivité du parallélisme
- Axiome d'Euclide (unicité de la parallèle à une droite, passant par un point donné).
- Axiome des milieux (droite des milieux dans un triangle)
- ($D_1 \perp D$ et $D_2 \perp D$) alors $D_1 \parallel D_2$ (si nécessaire).

A l'aide de ces notions, comment peut-on démontrer dans une figure simple, la présence de droites parallèles ou de parallélogramme.

1er exercice :

(ABC) est un triangle quelconque. Soient K; I; J les milieux respectifs de [AB] ; [AC] et [BC] .

a) Démontrer que (KI) // (BC) et que (KJ) // (AC)

b) En déduire que (KICJ) est un parallélogramme.

a) 1 énoncé ; 2 déductions
b) 1 énoncé ; 1 déduction

2ème exercice :

(IJKL) est un parallélogramme dont les diagonales se coupent en O. A ; B ; C ; D les milieux respectifs de [OI] ; [OJ] ; [OK] ; [OL]

a) Démontrer que (AB) // (IJ) et que (DC) // (LK)

b) En déduire que (AB) // (DC)

a) 1 énoncé , 1 déduction
b) 2 énoncés, 2 déductions

3ème exercice :

(EWZU) est un quadrilatère. I, J, K, L sont les milieux respectifs de [EW] ; [WZ] ; [ZU] ; [EU].

a) Démontrer que (IJ) et (LK) sont parallèles.

b) Comment feriez-vous pour démontrer que (IJKL) est un parallélogramme ?

a) 2 énoncés	; 5 déductions
b) 3 énoncés	; 4 déductions
(2+1)	(3+1)

<u>4ème exercice</u> :

(ABCD) est un parallélogramme, I, O, J les milieux respectifs de [AB] ; [AC] ; [DC].

Démontrer que O, I, J sont alignés

4 énoncés ; 5 déductions

<u>Construction</u> : M, N, P 3 points non alignés. Ils sont les milieux respectifs de [AB] ; [BC] et [AC] . Construire A,B et C .

MEDIATRICE

Enoncés utilisés :
- deux définitions de la médiatrice
- définition du cercle
- définition du triangle isocèle, du triangle rectangle
- unicité de la perpendiculaire à une droite passant par un point
- unicité de la droite passant par deux points.

---

1) A,B,M sont 3 points tels que AB = 7 , MA = 5, MB = 7 .
M appartient-il à la médiatrice de [AB] ? B appartient-il à la médiatrice de [AM] ?

1 énoncé - 1 déduction — 1 énoncé - 1 déduction

2) [BC] est un segment. Δ est la médiatrice de [BC]. M est un point de Δ n'appartenant pas à [BC]. Montrer que MBC est un triangle isocèle.

2 énoncés - 2 déductions

3) AMB est un triangle rectangle en M. C est le point tel que M est milieu de [BC]. Montrer que (AM) est médiatrice de [BC]

2 énoncés - 2 déductions

4) A et B sont 2 points d'un cercle de centre O. Montrer que la médiatrice de [AB] passe par O.

2 énoncés - 2 déductions

5) A,B,C sont 3 points non alignés, les médiatrices de [BC] et de [AC] se coupent en O. Montrer que O est équidistant de A et B

1 énoncé - 3 déductions

6) A et B sont 2 points tels que AB = 4. Construire O tel que OA=OB = 5 et O' tel que O'A = O'B' = 3. Montrer que (OO') est médiatrice de [AB]. En déduire la construction de la médiatrice d'un segment.

2 énoncés - 3 déductions

7) A, B, C sont 3 points non alignés tels que AC = CB. I est le milieu de [AB]. Montrer que (CI) est perpendiculaire à (AB).

2 énoncés - 4 déductions

8) $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont 2 cercles sécants de centres A et B et de rayon différent. Ils se coupent en C et D. Montrer que (AB) est la médiatrice de [CD].

3 énoncés - 5 déductions	1 énoncé - 2 déductions

9) [AB] est un segment. O est un point n'appartenant pas à [AB] et tel que OA = OB. Δ est la perpendiculaire à (AB) passant par O. Montrer que Δ est la médiatrice de [AB]

3 énoncés - 2 déductions

L'image que nous nous faisons du monde qui nous entoure est subjective, purement humaine et par là limitée. L'image qu'en a une abeille, un chien ou un oiseau est complètement différente. Chaque être vivant est pourvu d'organes différents des nôtres, perçoit des impressions entièrement différentes des nôtres et les images enregistrées sont interprétées de façon absolument différente par les cerveaux diversement organisés dont la nature a doté les êtres. En fait, chacun sent, entend, voit avec son cerveau et chacun de la manière mystérieuse propre à son espèce. Il est singulier que nous autres hommes réfléchissions si peu au fait que l'appareil grâce auquel nous pensons et sentons, grâce auquel nous bâtissons notre vie et développons notre conception du monde, que l'instrument grâce auquel nous prenons toutes nos décisions, que cet appareil de pensée, donc, non seulement est une énigme restée insoluble, mais est souvent victime d'erreurs, soumis à des préjugés et sujet à des illusions. L'illusion n'est-elle qu'une représentation superficielle du monde, que pure imagination dans la vie pratique ou bien une façon rassurante de se tromper soi-même au lieu de regarder froidement les faits ? Si nous examinons d'un œil critique le mécanisme de l'illusion, la connaissance que nous y trouverons de nos faiblesses nous «désillusionnera» moins qu'elle ne nous fascinera, en particulier dans tous les cas où, bien que nous sachions avoir affaire à une illusion, il nous est impossible de lui résister. Mais il ne suffit pas de qualifier l'illusion de déformation ou de tromperie, elle est en même temps le principe de tout ce qui est créateur, le mobile qui nous pousse à transformer le monde pour le rendre tel que nous le rêvons. C'est pourquoi une promenade à travers les illusions et les erreurs peu non seulement être divertissante, mais aussi donner une impulsion à l'examen personnel des choses et à une méditation fructueuse.

Edi LANNERS "Illusions"

PARTIE III

POUR DOUTER

PARTIE III

POUR DOUTER : points de départ pour démontrer

"L'oeil dort jusqu'à ce que l'esprit l'éveille par une question" Proverbe arabe.

"Le doute est le sel de l'esprit" (Alain)

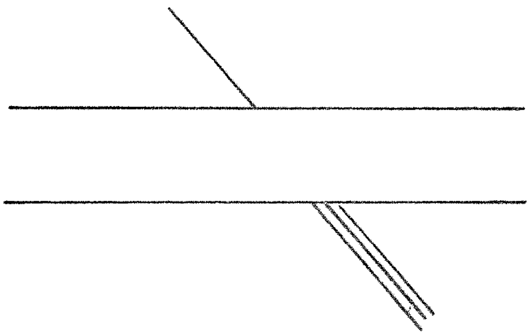
SOMMAIRE

*

Trop souvent l'élève se contente de voir un résultat sur une figure pour affirmer que ce résultat est vrai. L'apprend-on à douter de ce qu'il voit ? L'apprend-on à douter de la validité d'un dessin ?

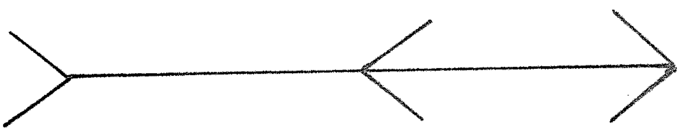
1 - Voir : est-ce suffisant ? (ou les illusions d'optique)

Il s'agit d'une recherche d'activités pour essayer de justifier la nécessité, qui est loin d'être évidente pour nos élèves de 4ème, de faire des démonstrations.



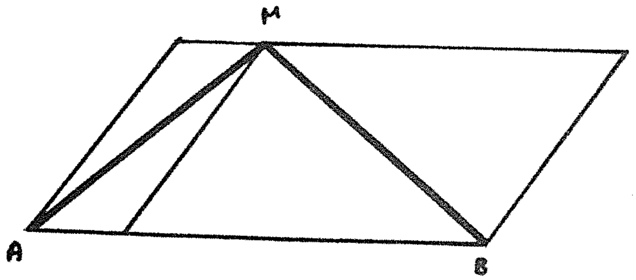
Sans instrument de dessin, précise laquelle des demi-droites est le prolongement de la demi-droite supérieure.

Vérifie ta conjecture



Sans mesurer compare les longueurs des deux segments.

Vérifie ta conjecture.



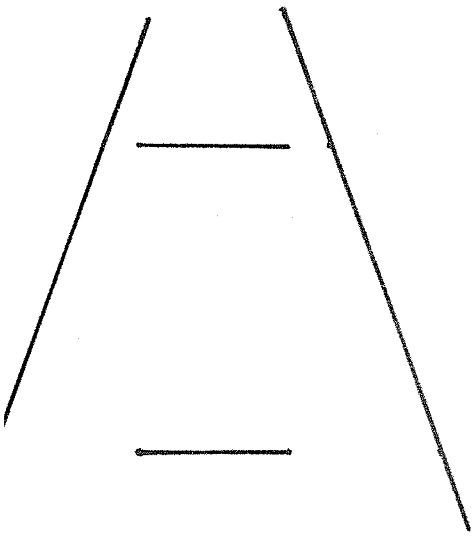
Sans mesurer compare les longueurs MA et MB.

Vérifie ta conjecture.

Refaire des figures analogues.

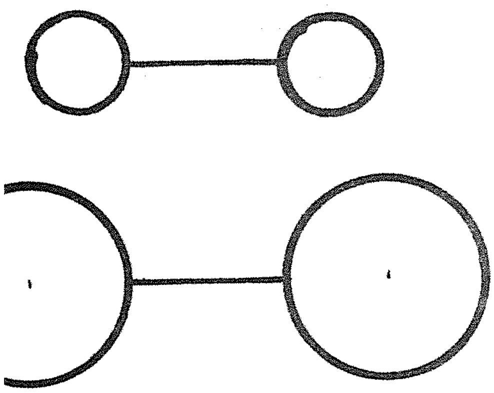
Que constates-tu ?

Quelles sont les données pour que le phénomène se reproduise ?



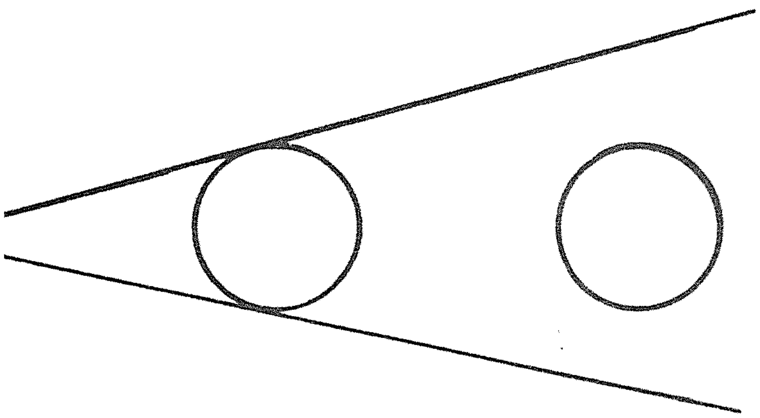
Sans mesurer compare les longueurs des segments horizontaux.

Vérifie ta conjecture.



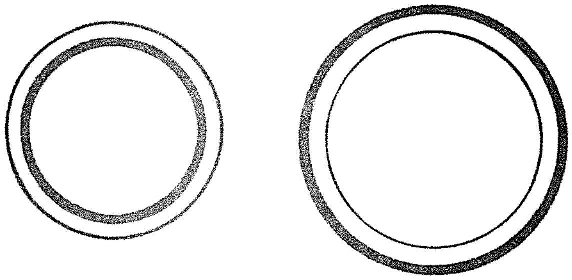
Sans mesurer compare les longueurs des segments horizontaux.

Vérifie ta conjecture.



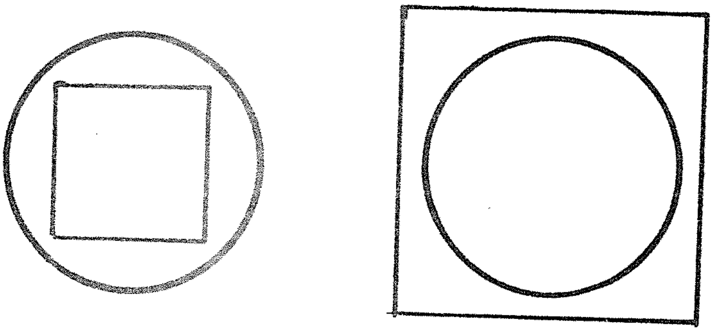
Sans mesurer compare les cercles.

Vérifie ta conjecture.



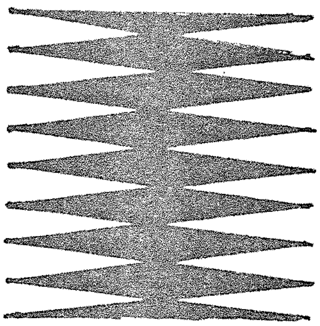
Compare les cercles tracés en trait fin.

Vérifie ta conjecture.

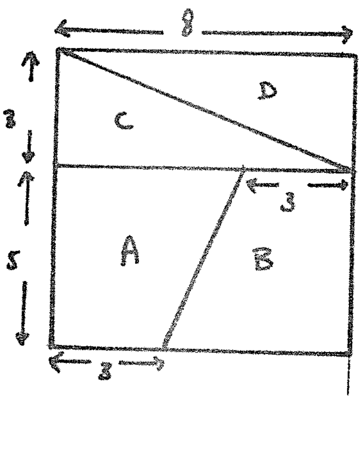


Compare les cercles.

Vérifie ta conjecture.

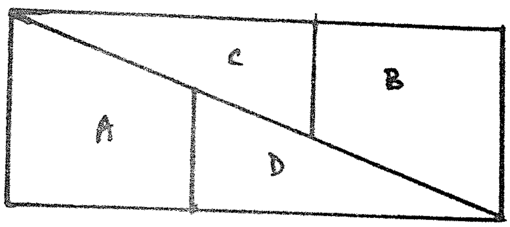


Compare la hauteur et la largeur.



Prends un carré de côté 8 et découpe-le comme le dessin l'indique. Avec les quatre morceaux tu peux former un rectangle. Compare l'aire du carré et l'aire du rectangle.

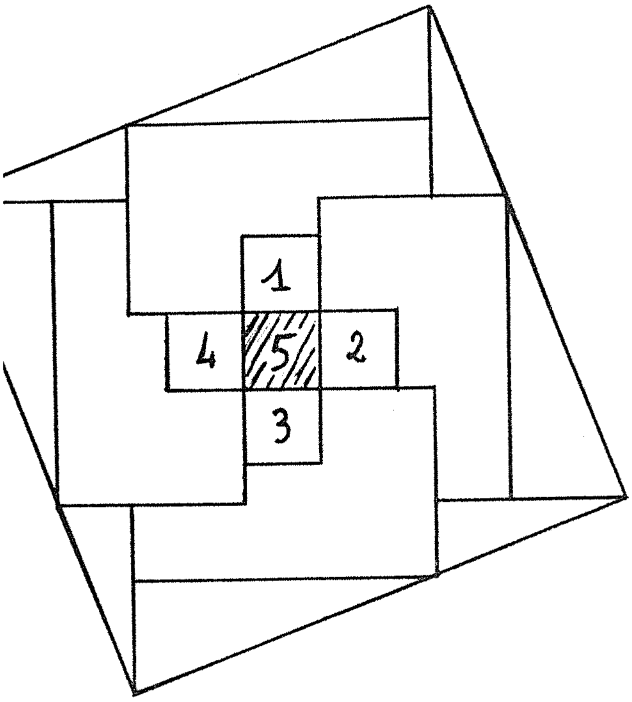
Que s'est il passé ?

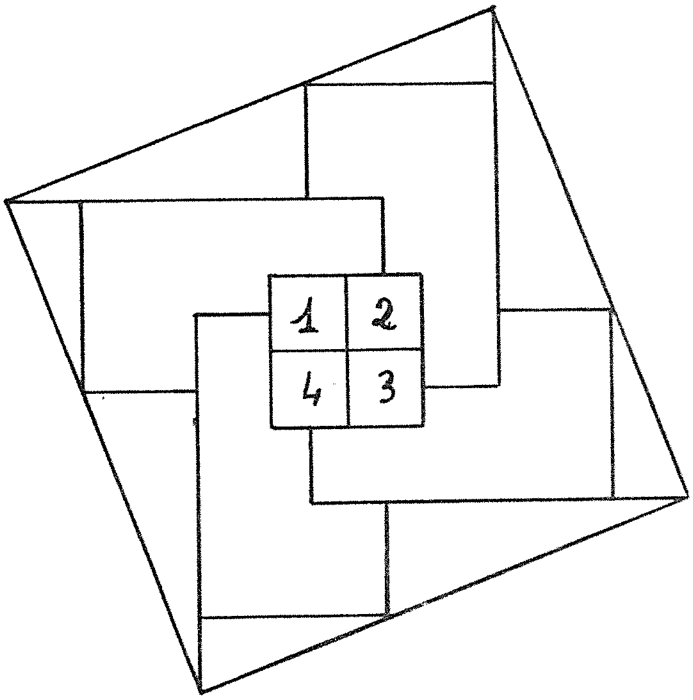


* Les trois nombres qui interviennent sont 3, 5 et 8. On peut recommencer avec 5, 8 et 13 ; 8, 13 et 21 etc....

(pour information: suite Fibonacci).

Où est passé le cinquième carré ?





Quel est le lien avec le problème précédent ?
(on retrouve la suite des nombres 2, 3, 5 et 8....)

Bibliographie : Documents pour rétroprojecteur : IREM d'Orléans
ou:faites vous mêmes vos transparents à partir par exemple des documents suivants :

. P.A. (Petit Archimède) n° 61-62/63 - 64/65 - 66/67 - 68/69/70 octobre 1979 à Novembre 1980)

. Sciences et vie n° 619 Avril 1969.

. La recherche n°25 Juillet Août 1972.

."Illusions" de Edi Lanners (Editions Hiers et Demains 1975)

. Ça m'intéresse n° 8 Octobre 1981

. Illusions d'optique - Sélection du Reader's Digest

. Expériences et problèmes récréatifs, Y.Perelmann. Editions de Moscou.

2 - Une figure géométrique permet-elle de conclure ou de conjecturer ?

Ces exercices sont une "cueillette" d'exercices faits en classe pour lesquels il se passe des choses : si les élèves ne sont pas trop "automathisés" il y a divergence de conclusions. Les conclusions deviennent alors conjectures ; le problème de la validité du dessin se pose.

Si au fil de vos exercices de géométrie de la 6ème à la 3ème vous découvrez de tels exercices envoyez-les nous pour enrichir le stock afin d'en faire un recueil que nous vous adresserons.

L'adresse : Géométrie de 4ème
IREM de Poitiers
40, avenue du Recteur Pineau
86022 POITIERS CEDEX

1 - Place les points A,B et C tels que

AB = 2 BC = 3 AC = 4

même exercice

AB = 2 BC = 3 AC = 5

Compare avec tes camarades.

2 - Un triangle isocèle a pour base 7cm et pour hauteur principale un segment de 6cm. Le triangle est-il équilatéral ?

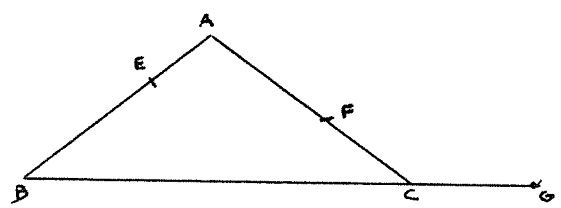
3 - Soit ABC un triangle. Place les trois points E,F et G tels que :

$E \in [A,B]$ EB = 2 EA ; $F \in [AC]$ 3 FC = FA ;

G appartient à la demi-droite d'origine C qui ne contient pas B et GB = 6 GC

Observe les points E, F et G.

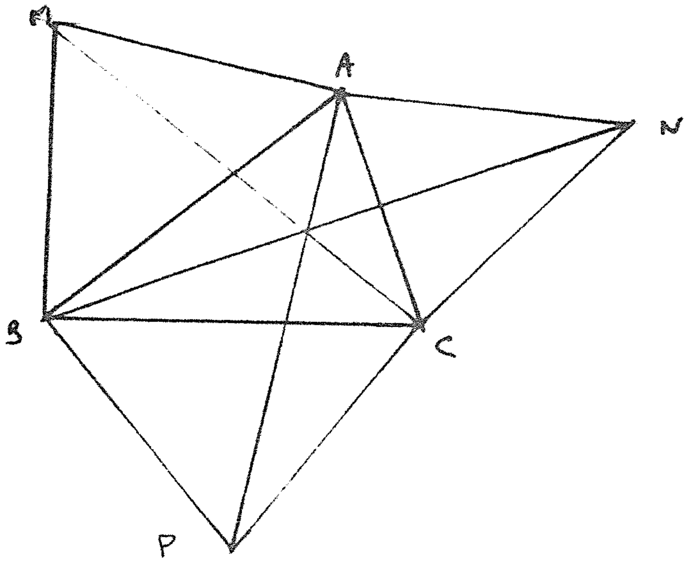
Que peux-tu en dire ?



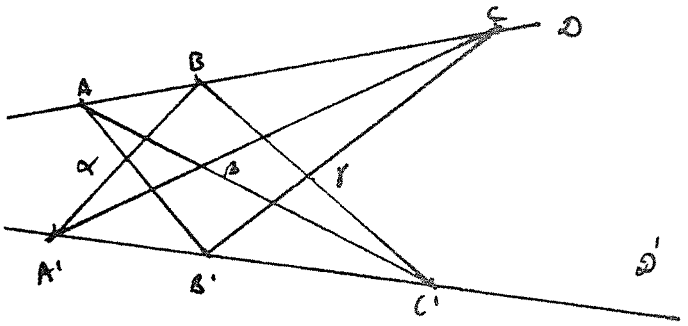
4 - ABC est un triangle acutangle. M, N et P sont tels que :

MA = MB = NA = NC = PB = PC (voir figure)

Les droites PA, BN et MC sont-elles concourantes ?



5 - Refais le même exercice en supposant ABC isocèle.



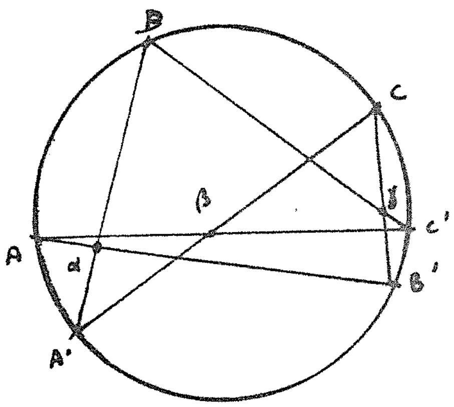
ABC sont trois points de $\mathcal{D}$

A'B'C' sont trois points de $\mathcal{D}'$

Observe α , β et γ ,

Que peux-tu en dire ?

7 -



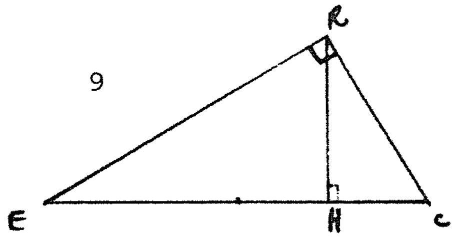
Observe α, β et γ

Que peux-tu en dire ?

8 - Construis un triangle COT où OC = 8 CT = 4 OT = 9

est-il rectangle ?

9

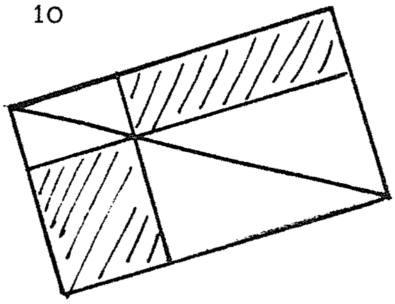


REC est un triangle rectangle.

Trace la hauteur RH.

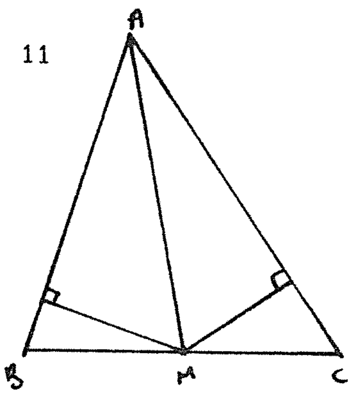
Crois-tu que RH × EC = RC × ER ?

10



Les deux rectangles hachurés ont ils même aire ?

11

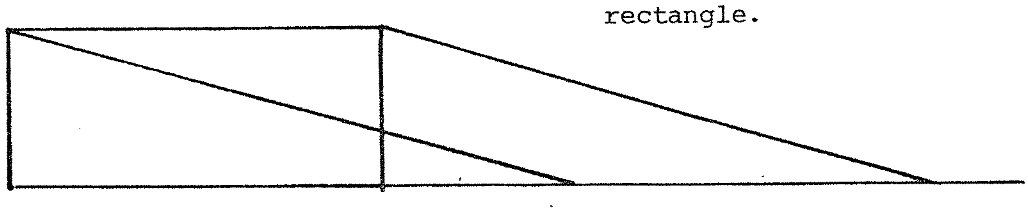


M est le milieu de BC

Lequel des deux triangles

AMB et AMC possède la plus grande aire?

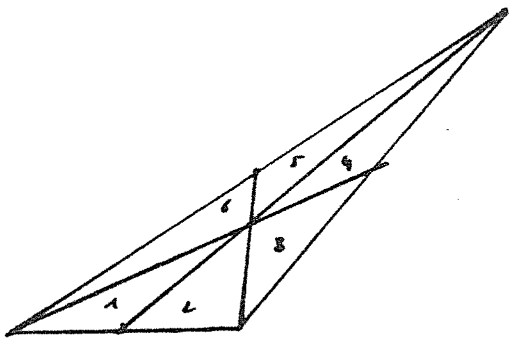
12



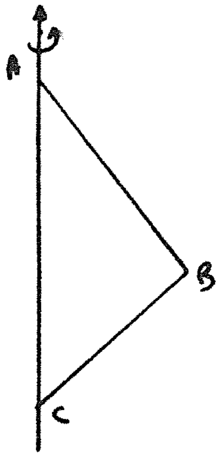
Compare les aires du parallélogramme et du rectangle.

13

Classe par ordre croissant selon leur aire les six triangles découpés par les médianes.



14



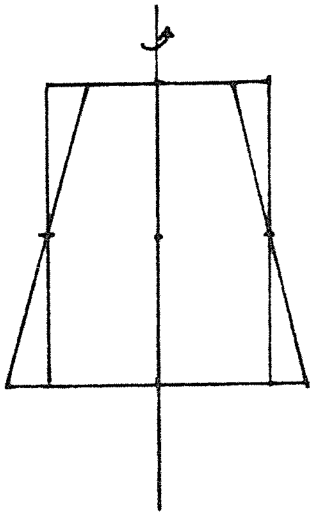
Un triangle ABC a pour dimensions

AB = 7 BC = 5 AC = 9

On fixe AC sur un axe que l'on fait tourner. Le triangle engendre un solide*.

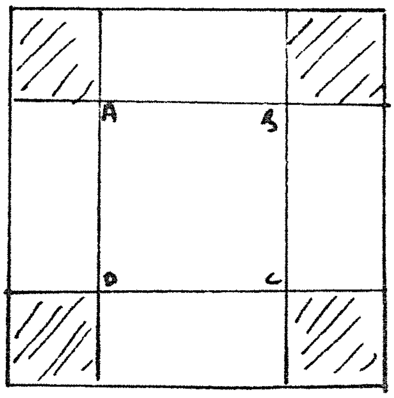
Si on fixe AB ou BC sur un axe le solide engendré change t-il ?
Que fait le volume ?
* Ce solide est formé de 2 cônes.

15



Le trapèze et le rectangle ont la même aire. Si on les fait tourner autour de l'axe ils engendrent 2 solides. Lequel des 2 solides a le plus grand volume ?

16



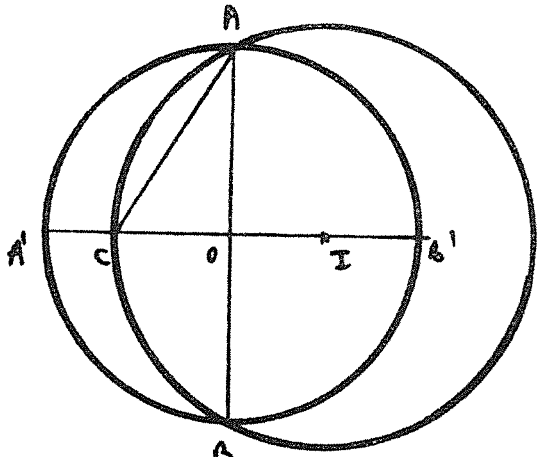
Dans une plaque de carton carrée de 20cm de côté on dessine 4 bandes (voir dessin) de 2 cm de large. Puis on enlève les 4 carrés hachurés. En pliant suivant AB, BC, CD et AD on obtient une boîte sans couvercle. Calcule le volume de cette boîte.

Si tu traces des bandes de 3,5 cm de large le volume de la nouvelle boîte obtenue change-t-il ? augmente-t-il ? diminue-t-il ?

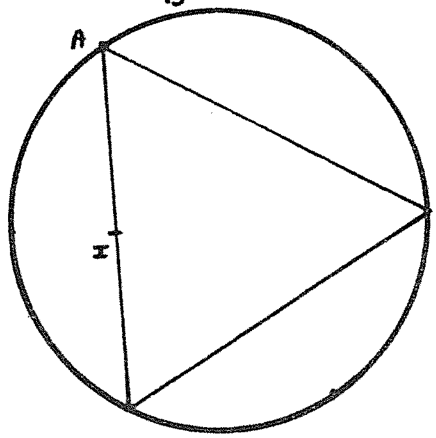
Remarque : les conjectures des élèves des exercices 9 à 16 peuvent être vérifiées.

17 Voici une construction d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R.

. AB et A'B' sont deux diamètres perpendiculaires.
. I est le milieu de OB'.
Le cercle de centre I de rayon IA coupe le segment OA' en C.
La longueur de AC est la longueur du côté d'un pentagone inscrit dans le cercle de centre O et de rayon R.



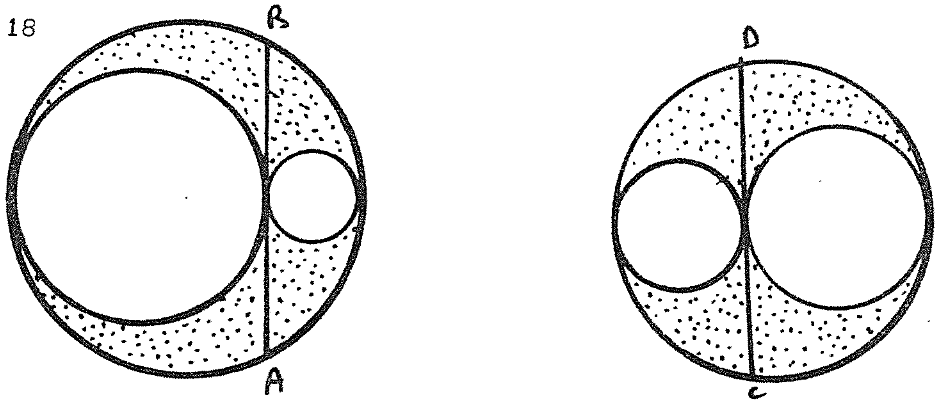
Voici une construction de l'heptagone régulier (7 côtés égaux) inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R.



- Tu traces un triangle équilatéral inscrit dans le cercle.
- La moitié de la longueur du côté du triangle te donne la longueur du côté d'un heptagone. (AI) inscrit dans le cercle de centre O de rayon R.

Laquelle des 2 constructions te semble la plus juste ?

18

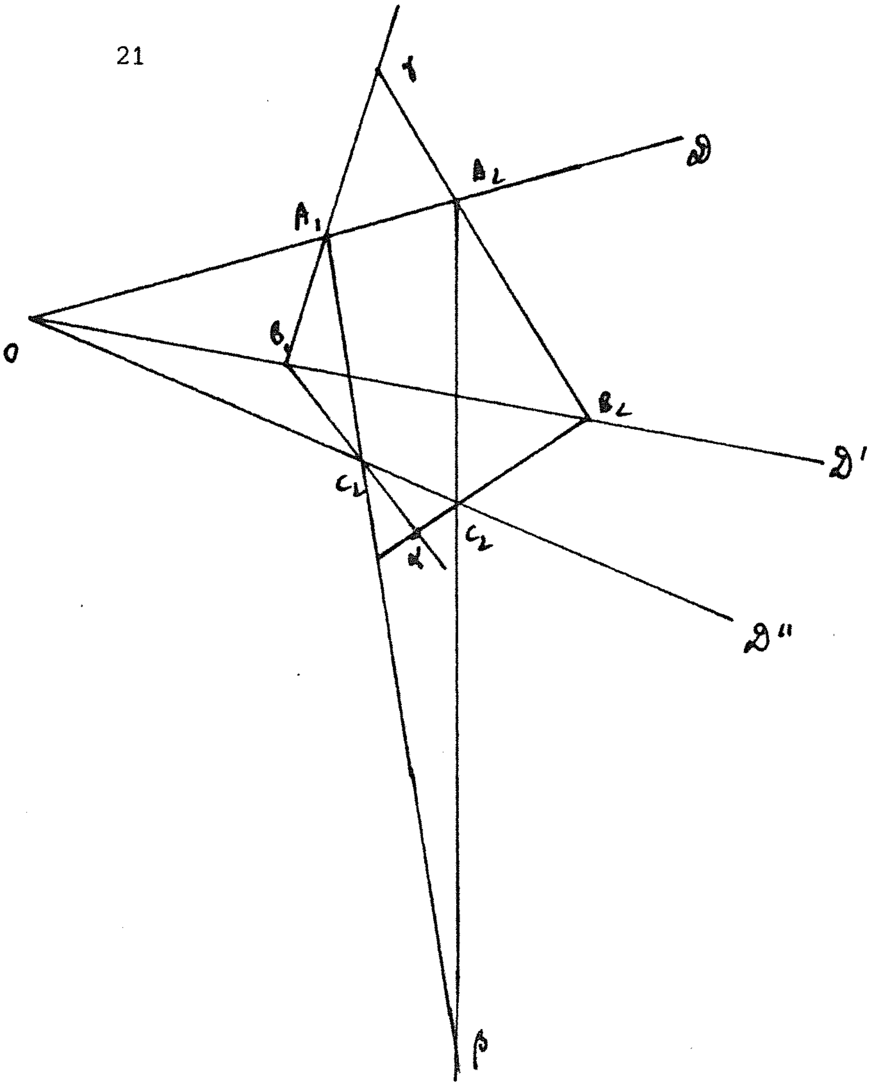


Les cordes AB et CD ont même longueur.
Compare les aires des surfaces pointées.
(Le choix du rayon du grand cercle est laissé à l'élève celui ci peut alors mesurer les rayons des cercles tangents et ainsi calculer les aires).

19 MHP est un triangle rectangle en H. Les mesures de MP et MH sont respectivement 12cm et 7,2cm. A est le point du segment [MH] tel que MA = 2,7cm. La parallèle à la droite (PH) passant par A coupe MP en B. MHB est-il rectangle ?

20 API est un triangle tel que AP = 9 PI = 10 et AI = 5 l'unité étant le centimètre. C est le milieu de [AI]. Par A on trace la parallèle à (CP) qui coupe (PI) en O.
P est il le milieu de [OI] ?

21

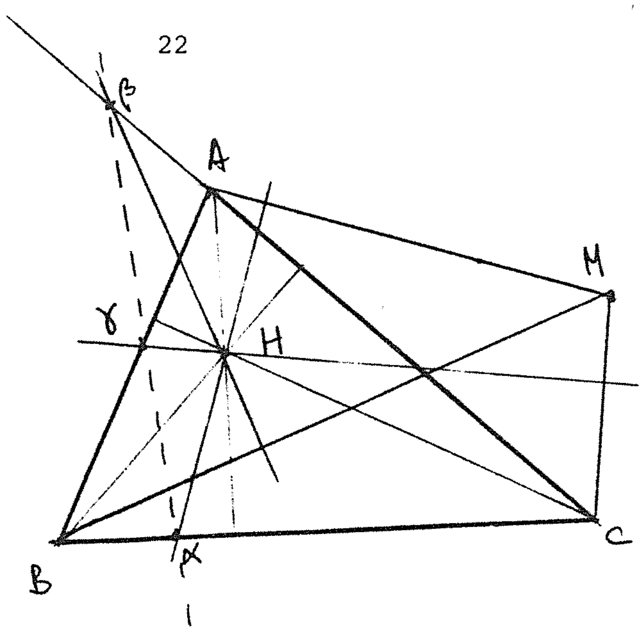


D, D' et D" sont concourantes en O. A_1, A_2 appartiennent à D , B_1 , B_2 appartiennent à D'; C_1 et C_2 appartiennent à D".

Observe α, β et γ .

Que peux-tu en dire ?

22

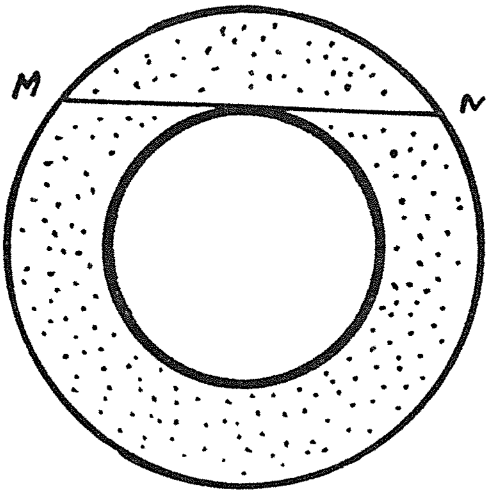


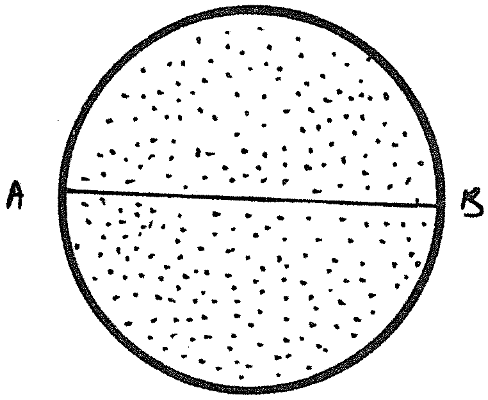
ABC est un triangle. H est son orthocentre. Soit M un point quelconque. La perpendiculaire issue de H à MA coupe BC en α. Celle issue de H à MB coupe AC en β. Celle issue de H à MC coupe AB en γ.

Observe α , β , γ.

Que peux-tu en dire ?

23





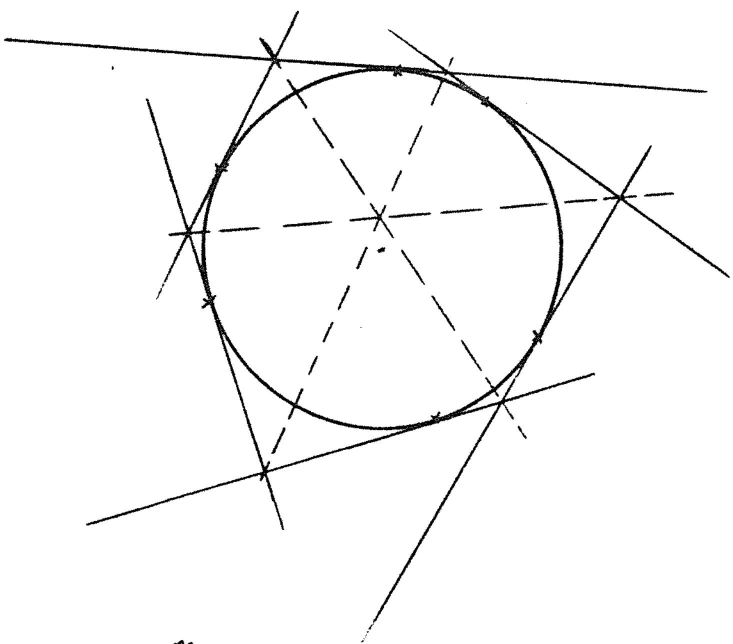
Trace un cercle de rayon 3cm.
Puis une corde MN.
Trace un cercle concentrique au premier et tangent à la corde.

Trace maintenant un cercle dont le diamètre AB a même longueur que MN.

Compare les aires pointées.

Vérifie ta conjecture.*

24



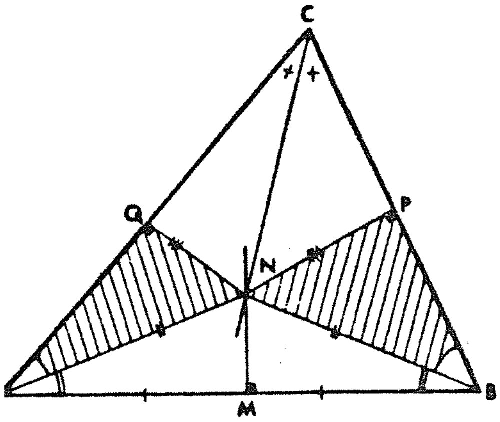
Prends six points au hasard sur un cercle. Trace en chacun de ces points les tangentes au cercle. Chaque tangente coupe la suivante en un point. Tu obtiens ainsi un hexagone (circonscrit au cercle). Trace les trois droites qui joignent chacune deux sommets opposés séparés par deux sommets (voir figure).
Que peux-tu dire de ces trois droites ?

* l'aire d'une couronne ne dépend que de la corde MN.

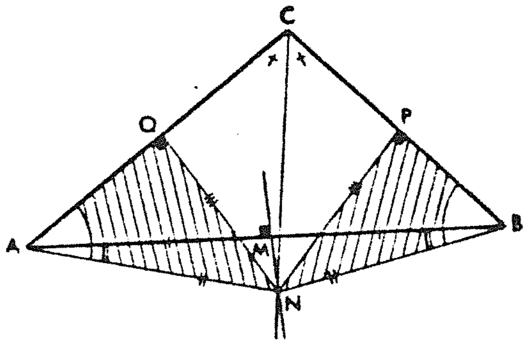
3 - Les défis au raisonnement : que vaut la figure ?

<u>Exemple 1</u> - Tous les triangles sont isocèles.

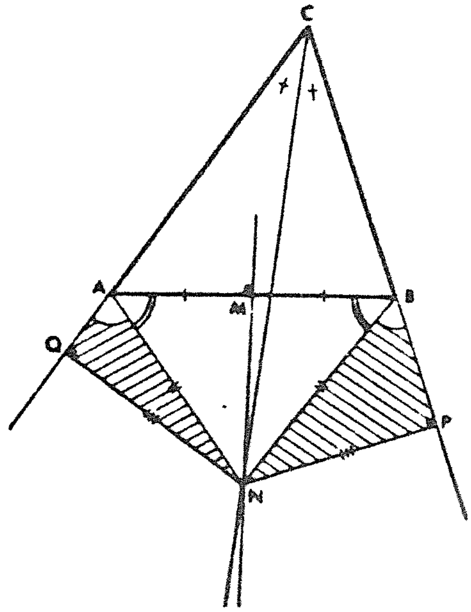
Soit ABC un triangle quelconque (Fig. 1, ou 2 , ou 3).



F. 1



F. 2



F. 3

Menons la bissectrice de l'angle C, puis l'axe de symétrie du côté AB (c'est à dire une droite perpendiculaire à AB et passant par le milieu M du segment AB). Examinons les différents cas de disposition mutuelle de ces droites. En opérant avec une seule bissectrice et un seul axe de symétrie, convenons de les appeler "bissectrice" et "axe" tout court.

CAS 1 : la bissectrice et l'axe ne se coupent pas, c'est à dire, soit ils sont parallèles, soit ils se confondent. Etant donné que l'axe est perpendiculaire à AB, la bissectrice l'est aussi, c'est à dire elle se confond avec la hauteur, donc, le triangle ABC est isocèle (CA = CB).

CAS 2 : la bissectrice et l'axe se coupent à l'intérieur du triangle ABC (fig.1), soit en un point N. Etant donné que ce point est équidistant des côtés de l'angle ACB, alors, en menant par ce point les perpendiculaires NP et NQ à CB et CA respectivement, on obtient NP = NQ. Mais le point N est en même temps équidistant des extrémités du segment AB, c'est à dire NB = NA. Les triangles rectangles NPB et NQA sont égaux comme ayant une hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal, donc NAQ = NBP. En ajoutant à ces angles égaux les angles de même égaux NAB et NBA (comme angles adjacents à la base d'un triangle isocèle ANB), on obtient $\widehat{CAB} = \widehat{CBA}$, d'où il s'ensuit que le triangle ABC est isocèle (notamment, CA = CB).

CAS 3 : la bissectrice et l'axe se coupent sur le côté AB, c'est à dire au milieu M de ce côté. Cela signifie que dans le triangle ABC la médiane et la bissectrice menées du sommet C se confondent, d'où il s'ensuit que ce triangle est isocèle.

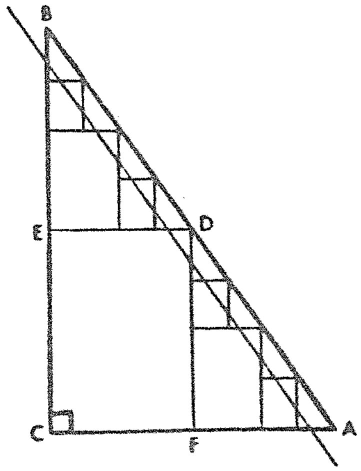
CAS 4a : la bissectrice et l'axe se coupent en dehors du triangle ABC ; les pieds des perpendiculaires, abaissées du point N de leur intersection sur les côtés CB et CA, se trouvent sur ces mêmes côtés et non pas sur leurs prolongements. Comme auparavant on obtient les triangles égaux NPB et NQA et un triangle isocèle ANB. Les angles adjacents à la base AB du triangle ABC sont égaux, mais cette fois comme différences (et non pas comme sommes, cas 2) d'angles respectivement égaux.

CAS 4b: la bissectrice et l'axe se coupent en dehors du triangle ABC; les pieds des perpendiculaires, abaissées du point N de leur intersection sur les côtés CB et CA, se trouvent sur les prolongements de ces côtés (fig. 3). Les constructions et raisonnements analogues aboutissent à la conclusion sur l'égalité des angles extérieurs aux sommets A et B du triangle ABC. D'où il découle immédiatement l'égalité des angles intérieurs A et B et, par conséquent, CA = CB.

Exemple 2 - La longueur de l'hypoténuse est égale à la somme des longueurs des côtés de l'angle droit.

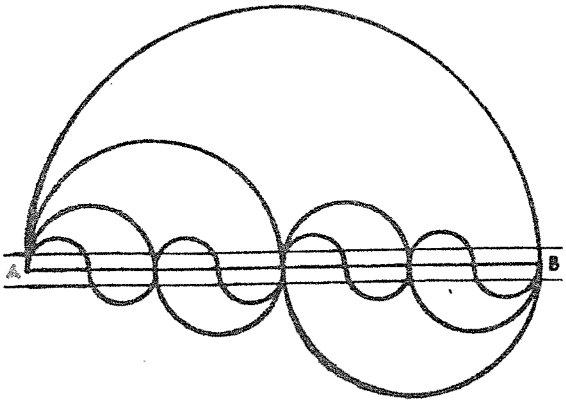
Du milieu D de l'hypoténuse d'un triangle rectangle en C, ABC, abaissons les perpendiculaires DE et DF sur les côtés de l'angle droit ; on obtient la ligne brisée BEDFA composée de quatre segments dont la longueur est évidemment égale à la somme des longueurs des côtés de l'angle droit. Reprenons cette même construction pour chacun des triangles DBE et ABF : des milieux des hypoténuses DB et AD on abaisse les perpendiculaires sur les côtés de l'angle droit et on obtient une ligne brisée de même longueur composée de huit segments de droite. On peut poursuivre cette opération indéfiniment : l'hypoténuse sera successivement divisée en 2, 4, 8, 16, ... parties égales ; on obtient donc une suite de lignes brisées en forme de scie (pour plus de simplicité on les appellera en abrégeant "scies") qui joignent les points A et B et se composent de 2, 4, 8, 16 ..... "dents" c'est à dire de 4, 8, 16, 32, ... chaînons). Toutes les "scies" ont la même longueur (autrement dit, la somme des longueurs des chaînons est toujours la même) qui est égale à la somme des longueurs des côtés de l'angle droit. A mesure que le nombre de dents de la "scie" augmente, celle-ci s'approche de plus en plus de l'hypoténuse AB, de sorte que si ce nombre devient très grand, il sera difficile de distinguer, pratiquement, cette ligne brisée, composée d'un très grand nombre de petits chaînons, du segment rectiligne (de même qu'il est difficile de distinguer un cercle du polygone régulier inscrit dans ce cercle et possédant un très grand nombre de côtés).

Servons-nous de cette image pour mieux formuler le problème : la suite de "scies" a pour limite le segment AB dans le sens que la plus grande des distances des points de la "scie" à la droite tend vers zéro à mesure qu'augmente le numéro d'ordre de la "scie" (en effet, cette distance maximale n'est rien d'autre que la hauteur abaissée sur l'hypoténuse de l'un des triangles rectangles égaux formant les "dents de scie" et la hauteur de la "dent" est inférieure à son hypoténuse qui tend vers zéro). En d'autres termes, aussi étroite que soit la bande comprise entre l'hypoténuse AB et la sécante aux côtés de l'angle droit, parallèle à AB (fig.), il existe dans la suite de "scies" une telle "scie" qui, le long de toute la distance de A à B, s'insère entièrement avec toutes les "scies" suivantes au sein de cette bande. Or, toutes les "scies" ont même longueur, par conséquent, la suite de ces longueurs est formée de nombres égaux et a pour limite le nombre qui est égal à la somme des longueurs des côtés de l'angle droit. D'autre part, une "scie" a pour limite l'hypoténuse dont la longueur est également la limite de la suite des longueurs des "scies", or une suite ne peut avoir deux limites différentes ; notre hypothèse est ainsi démontrée.



Exemple 3 : La valeur du nombre π est 2.

En prenant le segment AB pour diamètre construisons une demi-circonférence. Divisons le segment AB en deux et en considérant chaque moitié comme diamètre traçons deux demi-circonférences de part et d'autre du segment AB. Ces deux demi-circonférences forment une ligne ondulée (qui par son aspect extérieur rappelle une sinusoïde) dont la longueur de A à B est égale à celle de la demi-circonférence initiale, c'est à dire à $\frac{\pi}{2}$ AB ; en effet, chacune des deux plus petites demi-circonférences a une longueur deux fois plus courte,



car son diamètre est deux fois moins grand. Divisons maintenant le segment AB en quatre parties égales et construisons une ligne ondulée formée de quatre demi-circonférences dont la somme des longueurs est $\frac{\pi}{2}$ AB. Poursuivons cette opération indéfiniment en divisant le segment AB en 8, 16, ... parties égales et en construisant chaque fois des demi-circonférences disposées alternativement de part et d'autre de la droite AB. On obtient une suite des lignes ondulées qui se rapprochent de plus en plus du segment AB en ayant ce segment pour limite dans le sens que la plus grande distance des points de chaque ligne ondulée de la droite AB(celle-ci étant évidemment égale au rayon des demi-circonférences formant la ligne ondulée) tend vers zéro à mesure qu'on s'éloigne du point de départ de la suite. Mais, la longueur de toutes ces lignes ondulées est constante et égale à $\frac{\pi}{2}$ AB, il en est de même de leur limite, c'est à dire du segment AB. De l'égalité $\frac{\pi}{2}$ AB = AB il s'ensuit que $\pi = 2$.

<u>BIBLIOGRAPHIE</u>

. Collection Initiation aux mathématiques
Boltianski, Fetissov, Doubnov.
Enveloppes, démonstrations géométriques, erreurs dans les démonstrations géométriques.
Editions de Moscou.

. Pentannuel n° 23 Décembre 1979. Irem de Paris Sud.

EN GUISE DE CONCLUSION, une fable :

Un animal dans la lune

Pendant qu'un philosophe assure,
Que toujours par leurs sens les hommes sont dupés,
Un autre philosophe jure
Qu'ils ne nous ont jamais trompés.
Tous les deux ont raison ; et la Philosophie
Dit vrai, quand elle dit que les sens tromperont
Tant que sur leur rapport les hommes jugeront.
Mais aussi si l'on rectifie
L'image de l'objet sur son éloignement,
Sur le milieu qui l'environne,
Sur l'organe et sur l'instrument,
Les sens ne tromperont personne.
La nature ordonna ces choses sagement :
J'en dirai quelque jour les raisons amplement.
J'aperçois le soleil : Quelle en est la figure ?
Ici-bas ce grand corps n'a que trois pieds de tour :
Mais si je le voyais là-haut dans son séjour,
Que serait-ce à mes yeux que l'oeil de la nature ?
Sa distance me fait juger de sa grandeur ;
Sur l'angle et les côtés ma main la détermine.
L'ignorant le croit plat, j'épaissis sa rondeur ;
Je le rends immobile, et la terre chemine.
Bref, je démens mes yeux en toute sa machine.
Ce sens ne me nuit point par son illusion.
Mon âme, en toute occasion,
Développe le vrai caché sous l'apparence.
Je ne suis point d'intelligence
Avecque mes regards, peut-être un peu trop prompts,
Ni mon oreille, lente à m'apporter les sons.
Quand l'eau courbe un bâton, ma raison le redresse :
La raison décide en maîtresse.
Mes yeux, moyennant ce secours,
Ne me trompent jamais en me mentant toujours.
......

La Fontaine FABLE 18 LIVRE VII

PARTIE IV

POUR APPRENDRE A DEMONTRER

POUR APPRENDRE A DEMONTRER

"Jusques à quand les pauvres jeunes gens seront-ils obligés d'écouter et de répéter toute la journée ? Quand leur laissera-t-on du temps pour méditer sur cet amas de connaissances, pour coordonner cette foule de propositions sans suite, de calculs sans liaison ? N'y aurait-il pas quelque avantage à exiger des élèves les mêmes méthodes, les mêmes calculs, les mêmes formes de raisonnement, s'ils étaient à la fois les plus simples et les plus féconds ?

Evariste GALOIS. Lettre sur l'enseignement des sciences. Gazette des Ecoles du 2 janvier 1831.

SOMMAIRE

(A) Organigrammes : un travail de recherche et de mise à l'épreuve

Groupe de travail de mathématiques
Collège JEAN ROSTAND
79100 THOUARS

Mlle Maryannick BEAUBEAU
Mme Jeanne GAY
M. Jean-Pierre GAY
Mme Françoise SCOLAN

Année Scolaire 1982-1983

Recherche sur l'apprentissage de la démonstration en classe de 4ème

Nous sommes profondément persuadés que l'objectif principal de l'enseignement des mathématiques en classe de 4ème est l'apprentissage du raisonnement déductif ; malheureusement les différentes méthodes que nous avons utilisées les années précédentes ont conduit à un échec important des élèves.

Un stage IREM auquel nous avons participé au printemps 1982 sur le thème "apprentissage de la démonstration en 4ème" nous a permis de cerner certains problèmes ; en construisant des exercices sur un thème donné (médiatrice, cercle) et en analysant le degré de difficultés de ces exercices (nombre de déductions et concepts qu'ils font intervenir, nombre d'énoncés utilisés, choix du vocabulaire, rédaction du texte, rédaction de la démonstration....) nous avons constaté que les exercices habituellement proposés aux élèves (et considérés comme simples) posaient déjà de nombreuses difficultés.

Nous avons alors décidé de travailler ensemble avec deux objectifs essentiels :

- définition d'une progression qui tient compte des acquis antérieurs (6ème et 5ème) : on ne redéfinit pas les notions connues comme parallélisme, orthogonalité, milieu....
- recherche d'une méthode permettant de séparer les difficultés d'ordre logique de celles liées au langage (compréhension du texte, enchaînement logique et rédaction en français de la démonstration).

1ère étape : Nous commençons par quatre séances de dessin utilisant les acquis de 6ème ; nous nous servons en particulier du chapitre "dessiner" de leur livre Cédic 4ème.

- La transitivité du parallélisme (évidente pour les élèves) nous donne un premier énoncé, codé $/\!/_1$.

- Un exercice de construction nous permet d'introduire l'énoncé suivant, codé $//_{2}$: La droite qui passe par les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté.

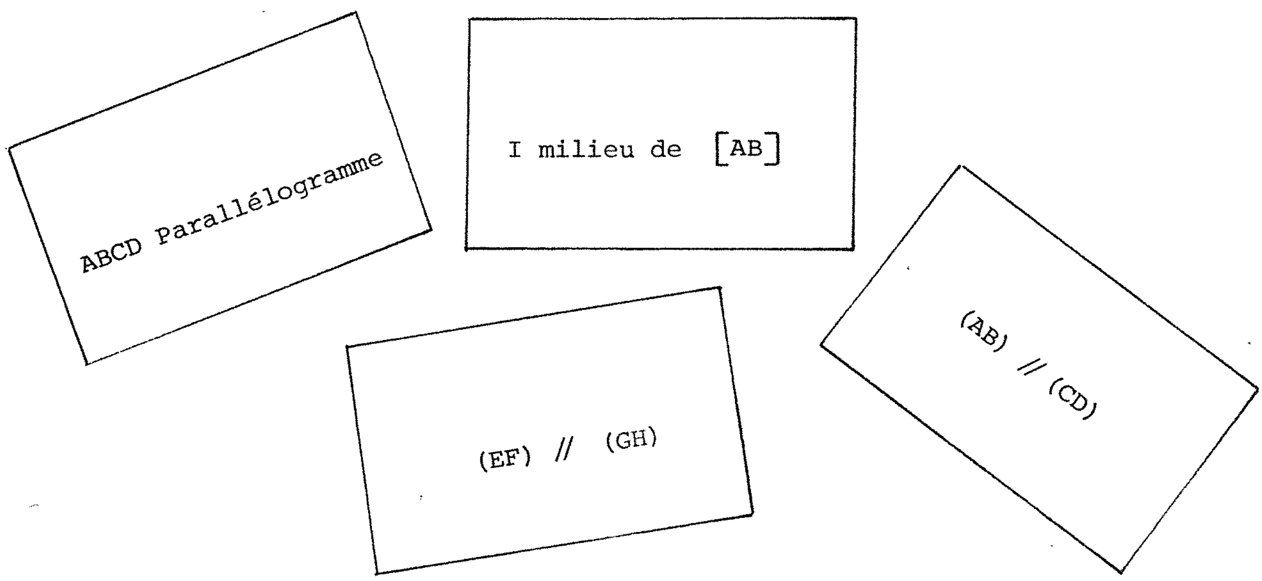
- Après des rappels sur le parallèlogramme nous en choisissons une définition (côtés opposés parallèles) mais plutôt que de la donner sous forme de condition nécessaire et suffisante nous la décomposons en deux énoncés :

$//_{3}$ Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles alors c'est un parallèlogramme.

$//_{4}$ Si un quadrilatère est un parallèlogramme alors ses côtés opposés sont parallèles.

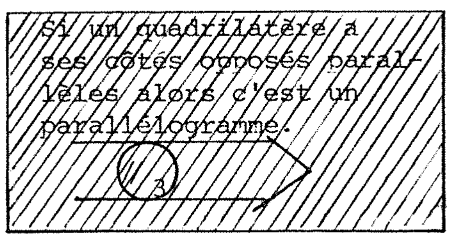
<u>2ème étape</u> : Les élèves vont d'abord apprendre à utiliser ces quatre énoncés indépendemment d'un texte d'exercice. Nous distribuons pour cela aux élèves une collection de propositions écrites sur des étiquettes blanches en papier (format 7 × 5cm).

Par exemple :



d'autre part les élèves ont fabriqué des étiquettes en carton de couleur (7 × 5cm), sur chacune d'elles figure un énoncé et son code.

Exemple :



Le "jeu" consiste à poser des étiquettes blanches sur la table en les articulant à l'aide d'un carton énoncé.

Ex 1 :

ABCD parallélogramme

Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont parallèles

$//_4$

(AB) // (CD)

Ex 2 :

I milieu de [AB]

J milieu de [AC]

La droite qui passe par les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèles au 3ème côté

$//_2$

(IJ) // (BC)

Bien sûr chaque "manipulation" s'accompagne d'un dessin fait au brouillon.

Après quelques confusions entre les énoncés $//_3$ et $//_4$ les élèves comprennent bien comment "fonctionne" un énoncé. Pour parfaire cette compréhension nous proposons aux élèves une série de chaînes où certaines étiquettes manquent ; ils doivent compléter.

Ex :

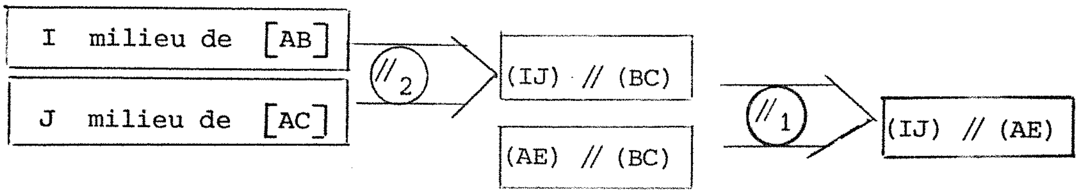
(EF) // (GH)

Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles alors c'est un parallélogramme.

$//_3$

Cet exercice n'a pas non plus posé de problème aux élèves ; ceci a pris l'allure d'un jeu qu'ils réussissent. Dans certaines classes les élèves ont travaillé par deux chacun posant à tour de rôle une étiquette. Plusieurs élèves ont découvert seuls la possibilité de construire des chaînes à plusieurs déductions.

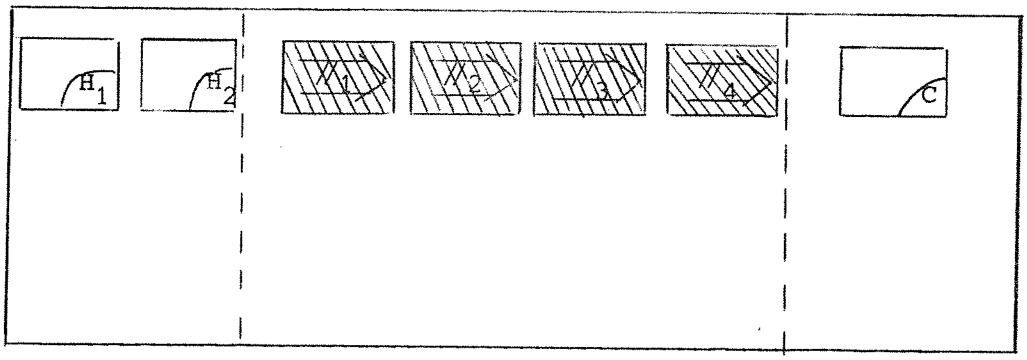
Les chaînes logiques sont recopiées sur le classeur de la façon suivante :



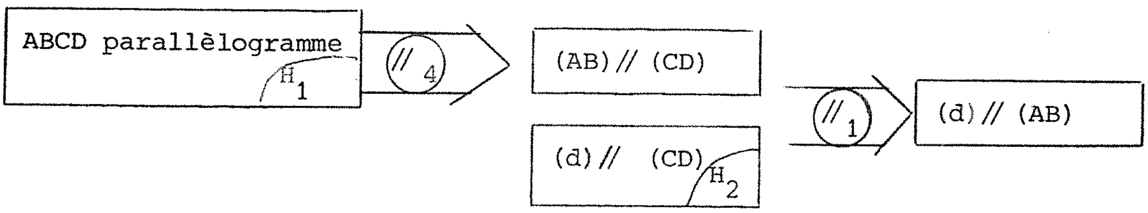
3ème étape : Après trois ou quatre séances on aborde les exercices ; les élèves travaillent par deux. Ils disposent de leurs cartons-énoncés et d'un lot d'étiquettes vierges.

Exercice 1 : ABCD est un parallélogramme ; (d) est une droite parallèle à (CD). Montrer que (d) est parallèle à (AB).

Chaque élève lit le texte, fait la figure, cherche les hypothèses ; chacune d'elles est écrite sur une étiquette blanche. Le groupe dispose donc de deux exemplaires de chaque étiquette-hypothèse ; elles sont placées à gauche sur la table. Si la formulation de la question le permet (c'est très souvent le cas) les élèves fabriquent une étiquette-conclusion qu'ils placent à droite.



Il reste au groupe à construire sur la table la chaîne logique permettant de passer des hypothèses à la conclusion à l'aide des énoncés. L'organigramme est ensuite recopié sur le classeur.



Il est suivi d'une traduction en français :

Par exemple : - ABCD est un parallèlogramme ; donc (AB) // (CD) car dans un parallèlogramme les côtés opposés sont parallèles.
(d) // (CD) (hypothèse) et (AB) // (CD) alors (d) // (AB) car si deux droites sont parallèles à une même troisième droite elles sont parallèles entre elles.

ou - Dans un parallèlogramme les côtés opposés sont parallèles ;

ABCD est un parallèlogramme ; alors (AB)// (CD).
Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles. (AB)// (CD)
et par hypothèses (d)// (CD) ; alors (d)// (AB).

On passe ensuite à l'exercice 2....

Dans le cas d'exercices à plusieurs questions il peut être intéressant de numéroter les hypothèses et les conclusions (H_1, H_2, H_3... C_1, C_2... chaque point de départ d'une chaîne logique étant impérativement une étiquette numérotée H_α ou C_β.

Les thèmes de travail proposés aux élèves ont été successivement :

- Parallèlisme - Parallèlogramme.
- Points alignés.
- Parallèlogramme - Milieux (réciproque de $//_2$ et diagonales d'un parallèlogramme).
- Orthogonalité - Rectangle.
- Distance - Médiatrice - Cercle.
- Losange - Carré.

Ce travail (construction de chaînes logiques puis rédaction en français) présente l'avantage de mieux décomposer la recherche et de pouvoir la mener dans les deux sens : partir des hypothèses ou remonter à partir de la conclusion.

Nous pensons qu'il faudrait procéder ainsi pendant au moins un trimestre afin de faire acquérir aux élèves une méthode de recherche ; dans nos classes les élèves ont petit à petit abandonné le travail sur table pour faire l'organigramme directement sur le cahier. Certains l'ont sans doute abandonné trop tôt. Après quatre à cinq mois certains élèves en arrivent à une rédaction plus traditionnelle des démonstrations (sans passer par les organigrammes) alors que d'autres ont encore besoin des deux présentations. De toute façon il est indispensable de "prendre son temps" ; il faut que les élèves aient le temps de chercher quitte à traiter moins d'exercices.

L'écriture des hypothèses sur les étiquettes avec la règle: une étiquette par hypothèse (et si possible une écriture mathématique), oblige les élèves à une analyse rigoureuse du texte.

Cette approche de la démonstration a modifié le comportement traditionnel des élèves par rapport à la géométrie ; les règles du jeu une fois acceptées ils ont été vite séduits trouvant les premiers exercices très faciles. Après quatre mois de géométrie nous avons réalisé qu'aucun élève n'avait encore dit "çà se voit sur la figure". Les élèves n'ont pas l'impression d'un problème insurmontable ; il est d'ailleurs significatif de remarquer que certains élèves qui ont des difficultés en algèbre réussissent très bien en géométrie.

Notre travail a permis également de mieux situer les difficultés des élèves ; dans la majorité des cas elles ne sont pas d'ordre logique. S'ils ont bien compris la signification des énoncés et si les objets mathématiques qu'ils manipulent leur sont bien connus, le raisonnement suit. (Les exercices sur parallélisme et orthogonalité ont "mieux marché" que ceux sur la médiatrice, moins bien connue).

Pour les aider dans la compréhension des énoncés il serait peut-être souhaitable de refaire, pour chaque nouvelle collection d'énoncés, le travail préparatoire : chaînes logiques à compléter.

Pour la connaissance des objets géométriques la géométrie de 6ème-5ème semble essentielle.

(B) Exercices et Organigrammes

O. PRESENTATION

a Structure de chaque "chapitre".

1) Des énoncés donnés sous deux formes
   - rédigée
   - diagramme déductif ou organigramme

2) Des exercices sous la forme suivante
   - une figure muette
   - un texte possible
   - un diagramme déductif de la démonstration
   - un cartouche avec les énoncés utilisés (Codés) et le nombre de déductions mises en jeu : $\boxed{}$

3) Un bilan comprenant
   a) des compléments
   b) des fiches :
      - à fabriquer avec les élèves,servant de bilan au chapitre ou à l'activité.
      - à utiliser par les élèves lors de leurs problèmes, exercices,devoirs.
      - à classer (alphabètiquement) dans un mini-classeur.

4) Un exemple de feuille de travail pour l'élève

b A propos des exercices

1) Il nous semble que la difficulté d'un exercice de géométrie en ce qui concerne la démonstration est liée à au moins deux facteurs :
   - le nombre d'énoncés utilisés pour faire la démonstration,
   - le nombre de déductions qu'il va falloir faire ; il y a un côté combinatoire dans lequel l'élève se perd facilement. Peut-être, dans un premier temps d'initiation, faudrait-il se limiter à deux ou trois déductions et, dans ce cas, pour certains exercices, poser des questions intermédiaires. On peut même envisager d'avoir plusieurs textes du même exercice (2 ou 3) parmi lesquels l'élève choisirait en fonction de ses capacités (heuristiques).

2) A la suite d'expériences faites il semble que l'élève dans un premier temps :
   - arrive plus facilement à présenter et faire sa démonstration sous forme d'un diagramme déductif que sous forme rédigée.
   - appréhende mieux un corrigé sous la forme d'un diagramme déductif que sous forme rédigée.

Il est évidemment essentiel que l'élève sache rédiger correctement une démonstration. Mais,vu ses difficultés,il semblerait préférable de lui demander :

- dans un premier temps le diagramme déductif
- dans un deuxième temps, à partir de son diagramme, de rédiger la démonstration.

Il est à noter que la correction au niveau du diagramme déductif est bien plus facile.

3) Nous avons voulu rendre au maximum les exercices indépendants de l'ordre d'exposition choisi. D'où :
   - pour chaque "chapitre" nous avons essayé de faire que le maximum d'exercices ne dépendent que d'un petit nombre d'énoncés,
   - pour chaque exercice nous avons indiqué la dépendance vis à vis des énoncés (voir cartouche).

4) Les figures muettes permettent notamment de voir qu'une même configuration peut être utilisée ailleurs en adaptant de façon convenable l'énoncé.

5) Pour les énoncés (nom des figures) nous avons essayé de lutter contre la pauvreté des textes classiques. Faisons preuve d'imagination.

c A propos des énoncés

Plusieurs points de départ, plusieurs progressions sont possibles pour parcourir le programme de 4ème-3ème.

1) <u>On peut démontrer avec presque rien</u> :
   Nous avons choisi pour cela un enchaînement assez classique. Si nous l'avons choisi c'est pour éviter de faire ce que l'on fait souvent en mathématique en 6ème, en 4ème, en 2^{nde} c'est-à-dire table rase des connaissances antérieures des élèves. Là au contraire nous faisons fond sur les connaissances des élèves (ils connaissent quasiment tous les énoncés utilisés dans un premier temps), et nous voulons leur montrer comment utiliser ces connaissances pour une activité très précise : prouver, démontrer....

2) <u>Avec des outils puissants</u>
   Une autre option, plus moderniste, est de partir des transformations en supposant qu'une telle approche est plus dynamique et plus facile pour

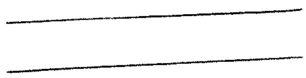
les élèves. Par contre cette optique sera pour eux entièrement nouvelle et ils ne retrouveront qu'après coup les résultats qu'ils connaissaient. Il faudra alors dûment motiver ces nouveaux outils que sont les transformations.

d A propos du bilan

" Il convient de ne faire écrire sur les cahiers qu'un très petit nombre de définitions ou de résultats importants, énoncés avec précision".
(Instructions BO n° 22 bis du 9.6.77)
Dans la majorité des cas cela pourrait se résumer donc aux énoncés et aux bilans qui constitueraient l'essentiel du "cours" des élèves.

1 PARALLELES - PARALLELOGRAMME

PARALLELES



I

On va, l'espace est grand,
On se côtoie
On veut parler.

Mais ce qu'on se raconte
L'autre le sait déjà,

Car depuis l'origine
Effacée, oubliée,
C'est la même aventure.

En rêve on se rencontre
On s'aime, on se complète.

On ne va pas plus loin
Que dans l'autre et dans soi.

PARALLELES

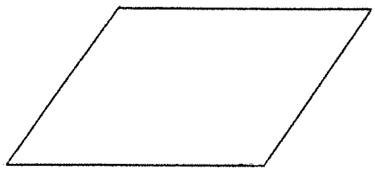
II

Vous criez dans l'espace
Qui doit vous séparer

Vous criez aussi fort
Au moins vers l'autre espace
Que vous coupez en deux,

Comme si vous étiez
A tout jamais les seuls
A ne pouvoir vous rencontrer

PARALLELOGRAMME



On pourrait m'aplatir,
Aussi me redresser.

Je n'ai pas d'idée fixe.

Que deviennent aigus
Mes deux angles obtus,
Je ne tremblerai pas.

Mais s'il me faut passer,
Un instant de raison,
En forme de rectangle,

Alors j'ai peur,
Car un rectangle
Est autre chose.

Comme si ma surface
Pouvait ne plus m'appartenir,

Comme si quelque vent
M'ouvrait sur le volume,

Si mes angles veillaient
Sur quelque chose d'autre
En moi-même que moi.

GUILLEVIC

Euclidiennes.

PARALLELOGRAMME

ENONCES

Pa Définition du parallélogramme

Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés sont parallèles deux à deux.

NB : énoncé double : Pa' - Pa"

P1 Transitivité du parallélisme

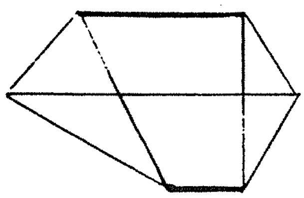
Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.

P2 Enoncé des milieux pour le triangle

La droite qui passe par les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième.

EXERCICES — Textes possibles

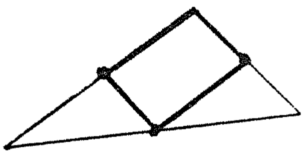
1



ABCD est un trapèze de bases [AB] et [DC]. DCEF est un trapèze de bases [DC] et [EF].

Que dire du quadrilatère ABEF ? Prouve-le.

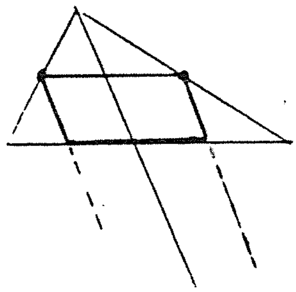
2



ABC est un triangle quelconque, I, J, K sont les milieux respectifs de [AB], [AC], [BC].

Que dire du quadrilatère AIKJ ? Prouve-le.

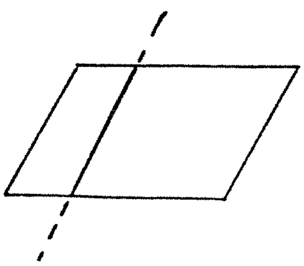
3



Soient A,B,C trois points quelconques, I et J les milieux respectifs de [AB] et [AC], (d) une droite quelconque passant par A. On mène par I et J deux droites parallèles à (d) qui coupent (BC) en E et F respectivement.

Démontre que IJFE est un parallélogramme.

4



LUCE est un parallélogramme. On trace une droite parallèle à (LE) qui coupe les droites (LU) et (LE) respectivement en A et N.

Démontre que

1) ELAN est un parallélogramme

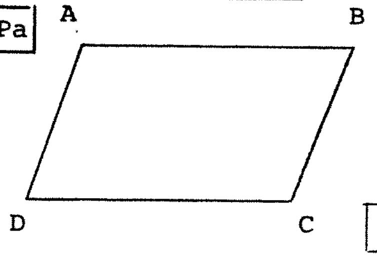
2) CUAN est un parallélogramme

PARALLELOGRAMME

ENONCES : le libellé donné l'est à titre indicatif et devrait être établi par l'élève lui-même, sous réserve qu'il soit correct.

(connu des élèves)

Pa



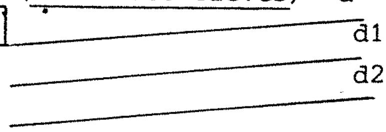
Hypothèses | Pa' | Conclusion

(AB) // (DC)
(AD) // (BC) → ABCD parallélogramme

Pa"

ABCD parallélogramme → (AB) // (DC)
(AD) // (BC)

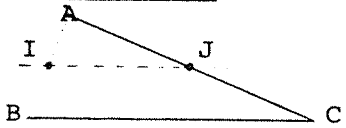
P1 (connu des élèves)



Hypothèses | P1 | Conclusion

d1 // d2
d2 // d → d1 // d2

P2 (A introduire)



Hypothèses | P2 | Conclusion

I milieu de [AB]
J milieu de [AC] → (IJ) // (BC)

EXERCICES

A la fin de chaque exercice sont donnés, dans un cartouche, les énoncés utilisés et le nombre de déductions à faire

(1) Hypothèses * Démonstration * Conclusion

(AB) // (DC)
(DC) // (EF) $\xrightarrow{P1}$ (AB) // (EF) ou ABEF trapèze

P1 / 1

(2) I milieu de [AB]
J milieu de [AC]
K milieu de [BC]

$\xrightarrow{P2}$ (IK) // (AC)
$\xrightarrow{P2}$ (JK) // (AB)
$\xrightarrow{Pa'}$ AIKJ parallélogramme

P2 Pa' / 3

N.B: On peut compléter avec deux autres parallélogrammes

(3) I milieu de [AB]
J milieu de [AC]
(IE) // d
(JK) // d

$\xrightarrow{P2}$ (IJ) // (BC)
$\xrightarrow{P1}$ (IE) // (JK)
$\xrightarrow{Pa'}$ IJFE parallélogramme

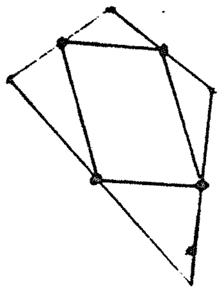
P2 P1 Pa' / 3

(4) LUCE parallélogramme
(AN) // (LE)

$\xrightarrow{Pa"}$ (LA) // (EN) $\xrightarrow{Pa'}$ ELAN parallélogramme
$\xrightarrow{Pa"}$ (LE) // (UC) $\xrightarrow{P1}$ (AN) // (UC) $\xrightarrow{Pa'}$ CUAN parallélogramme

1) Pa" Pa' / 2 2) Pa" P1 Pa' / 4

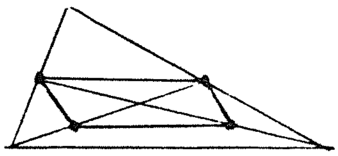
(5)



Soient O,U,R,S quatre points quelconques et M,I,E,L les milieux respectifs des segments [OU] ; [UR] , [RS], [OS].

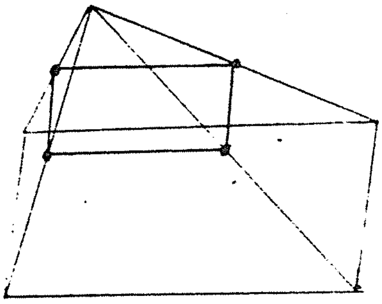
Que dire de MIEL ? Démontre-le.

(6)



LUC est un triangle quelconque. O et R sont les milieux respectifs de [LU] et [LC]. Les médianes (CO) et (UR) se coupent en G. On désigne par S le milieu de [UG] et par E le milieu de [CG].
Que dire de ROSE ? Démontre-le.

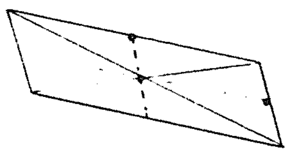
(7)



ECU est un triangle quelconque, et BLEU un parallélogramme. On appelle N,O,I,R les milieux respectifs des segments.
[CE], [CL] , [CB], [CU].

Quelle est la nature de NOIR ? Prouve-le.

(8)



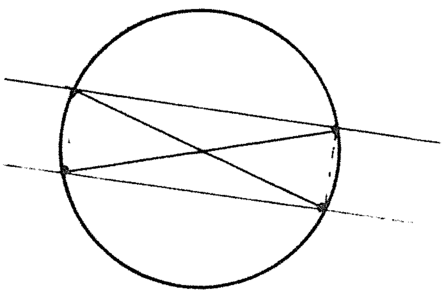
Dessine deux segments [AC] et [BD] ayant le même milieu que l'on désignera par I.
Soit R et S les milieux respectifs de [AB] et [BC].
1) Démontre que (RI), (BC) et (AD) sont parallèles.
2) Démontre que (SI), (AB) et (CD) sont parallèles.
3) Que peux-tu dire de ABCD ? Justifie-le.

ENONCE

P3 Théorème des diagonales
Si les diagonales d'un quadrilatère ont même milieu alors ce quadrilatère est un parallélogramme (connu).

EXERCICES

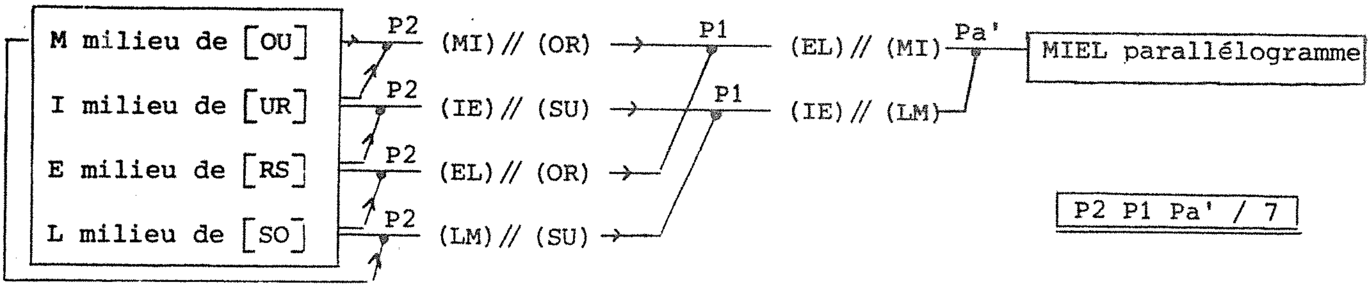
(9)



Dessine un cercle ($\mathcal{C}$) de centre O.
Soient [AB] et [CD] deux diamètres de ce cercle.
1)Démontre que (AC) est parallèle à (BD)
2) Quelle est la nature de ACBD ? Peux-tu le prouver ? Que peux-tu prouver ?

PARALLELOGRAMME

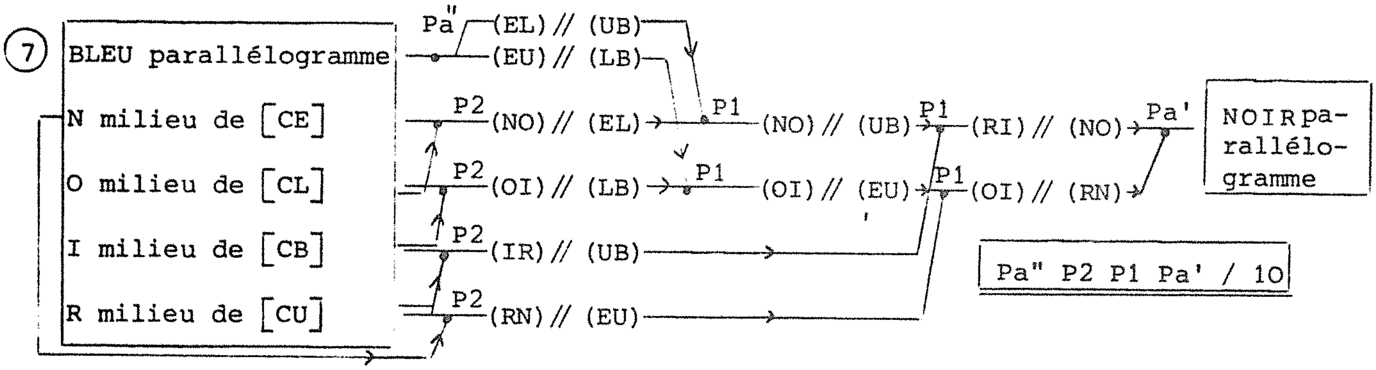
5 A poursuivre : avec les diagonales et leurs milieux on peut encore obtenir des tas de parallélogrammes.

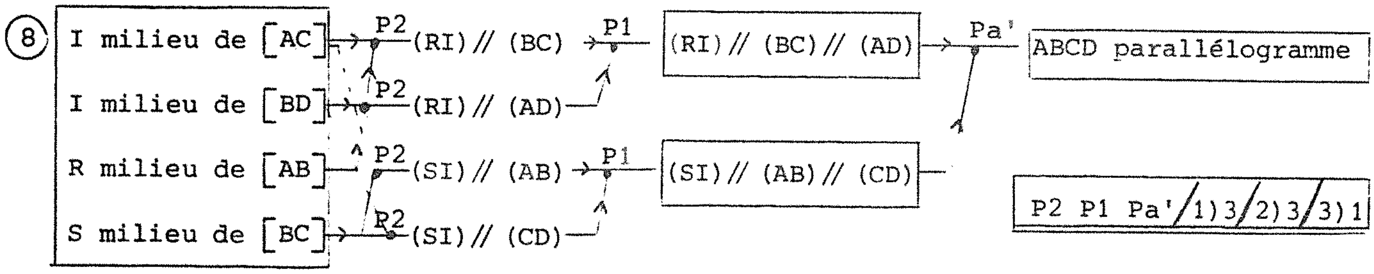


6 Diagramme déductif identique.

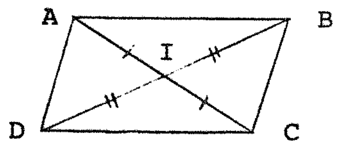
P2 P1 Pa' / 7

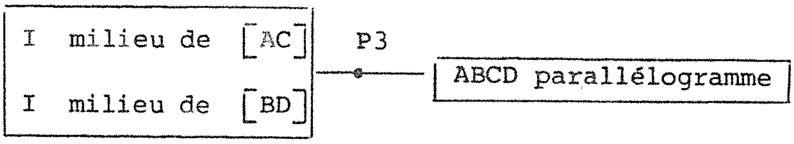
A poursuivre pour montrer que les médianes sont concourantes.



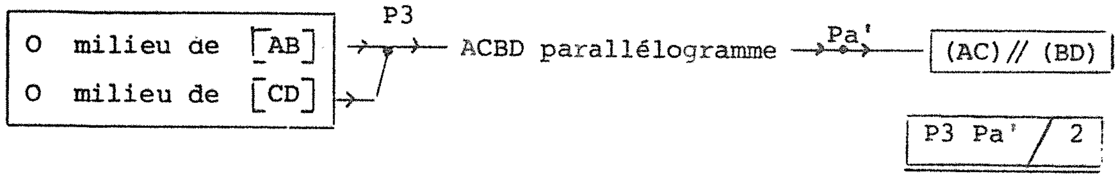


P3 (Connu des élèves)





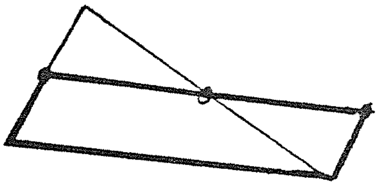
9 1)



2) ACBD parallélogramme cf.1) et rectangle, mais pas démontrable ici.

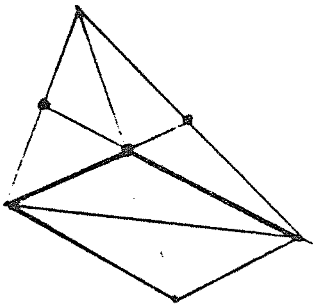
PARALLELOGRAMME

(10)



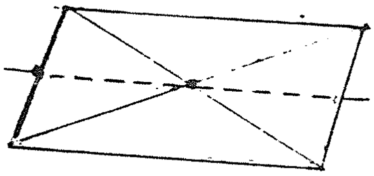
ONU est un triangle quelconque. T et S sont les milieux respectifs de [OU] et [NU]. A est le symétrique de T par rapport à S.
Démontre que OTAN est un parallélogramme.

(11)



ABC est un triangle quelconque, I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [AC]. Les deux médianes (BJ) et (CI) se coupent en G. Soit A' le symétrique de A par rapport à G.
Que dire de A'BGC ? Démontre-le.

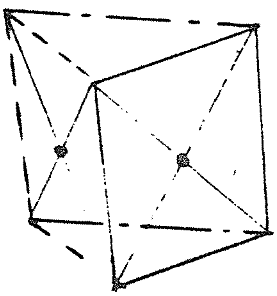
(12)



RIC est un triangle quelconque. D est le milieu de [RC] et E le symétrique de I par rapport à D.

1) Démontrer que ERIC est un parallélogramme.
2) Soit O le milieu de [RI]. On trace la droite (OD) qui coupe (EC) en S. Démontrer que ROSE est un parallélogramme.
3) Que dire de SOIC ?

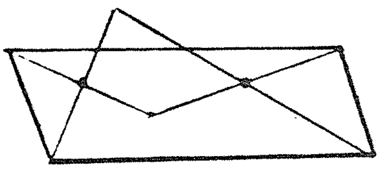
(13)



Soient D,E,L,N,O,R,U,Y huit points tels que E soit le milieu de [LO] et [NY] et U soit le milieu de [NR] et [OD].

1) Démontrer que LYON et NORD sont deux parallélogrammes.
2) Démontrer que LYRD est aussi un parallélogramme.

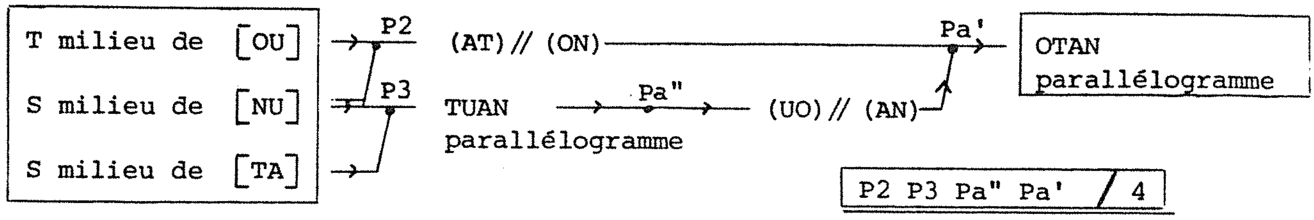
(13 bis)



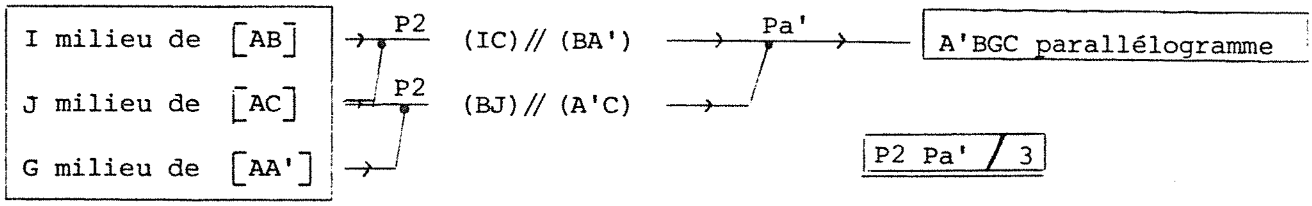
TAO est un triangle quelconque, I et U sont les milieux de [AT] et [OT] respectivement. M est un point quelconque. L est le symétrique de M par rapport à I et R celui de M par rapport à U.
Que dire de ORLA ?
Démontre-le.

PARALLELOGRAMME

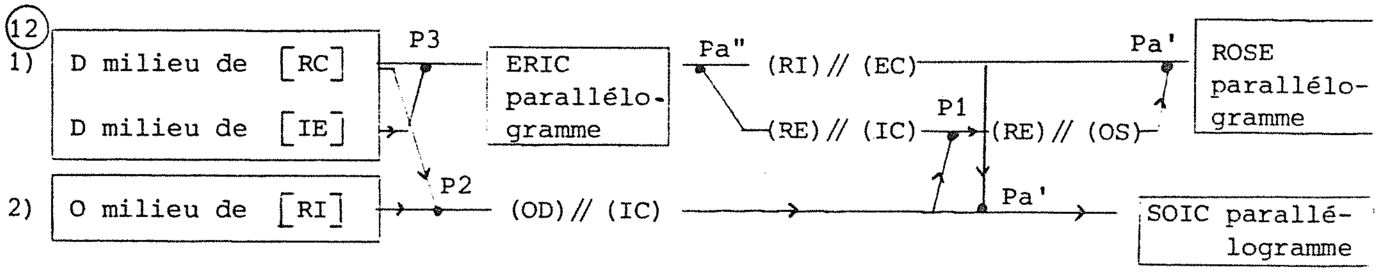
10



11 A poursuivre pour démontrer que G est le centre de gravité.

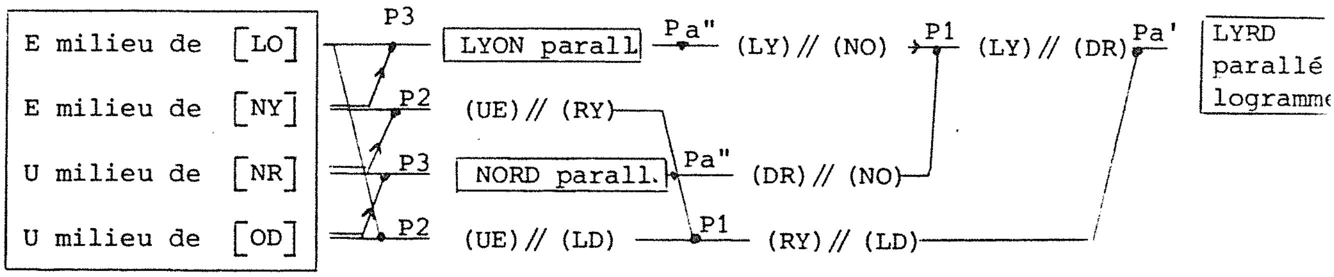


12



1) P3 / 1 2) P2 Pa" P1 Pa' / 4 3) Pa' / 1

13



1) P3 / 1 2) P2 Pa" P1 Pa' / 7

13 bis Même diagramme déductif.

On peut fragmenter le début avec MALT et MORT

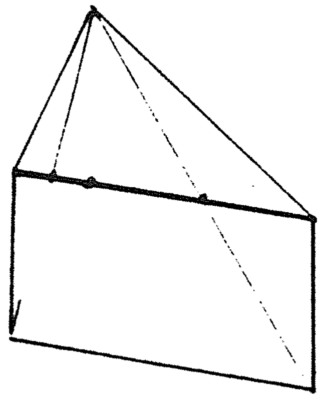
P3 P2 Pa" P1 Pa' / 9

Remarque : Il est clair que nous utilisons de façon implicite l'axiome de définition d'une droite par 2 points c'est à dire que si T, S, A sont alignés nous écrivons :

(TS) = (TA) ....

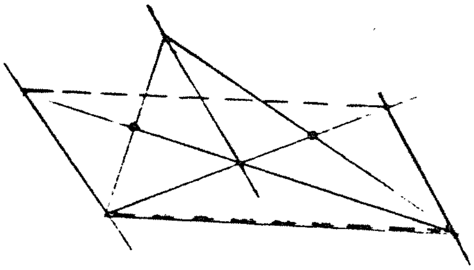
PARALLELOGRAMME

(13 ter)



Soit EVA un triangle quelconque et M un point du segment [EV]. Soit U le milieu de [EM] et I celui de [MV] . On désigne par R et T les symétriques de A par rapport à U et I respectivement.
Que dire de VERT ? Prouve-le.

(13 quater)

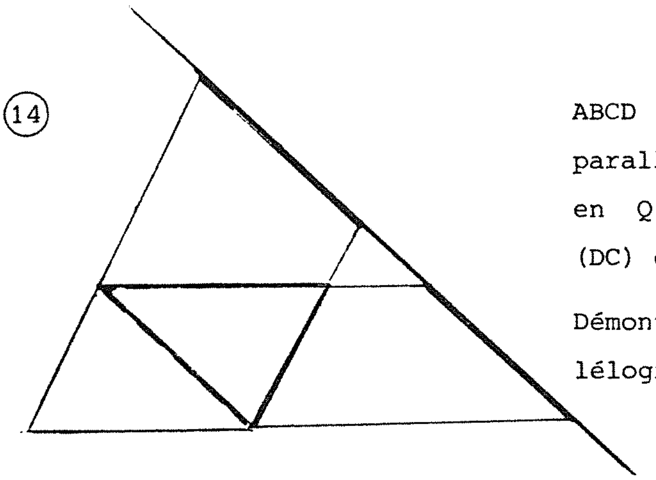


Soit UVW un triangle quelconque, U', V', W' les milieux de [VW] , [UW], et [UV] .
Les médianes (VV') et (WW') se coupent en G.
Soient E et F les symétriques de G par rapport à V' et W'.

1) Démontre que les droites (UG), (EW) et (FV) sont parallèles.

2) Démontre que EFVW est un parallélogramme

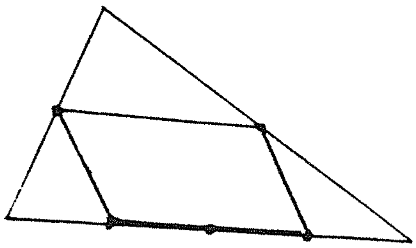
(14)



ABCD est un parallélogramme et (d) une droite parallèle à (AC). La droite (AD) coupe (d) en Q, (CB) la coupe en N, (AB) en M et (DC) en P.

Démontrer que ACNQ et ACPM sont des parallélogrammes.

(15)



ABC est un triangle. I, J, K, M, N sont les milieux respectifs de [AB], [AC], [BC], [BK], [CK] .

Montrer que IJNM est un parallélogramme.

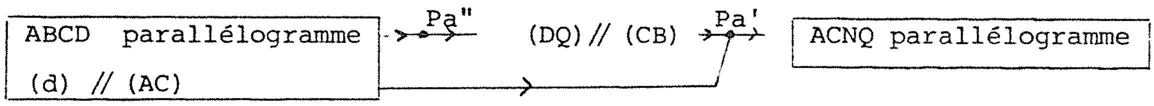
PARALLELOGRAMME

13 ter Même diagramme déductif $\boxed{\text{P3 P2 Pa" P1 Pa' / 7}}$

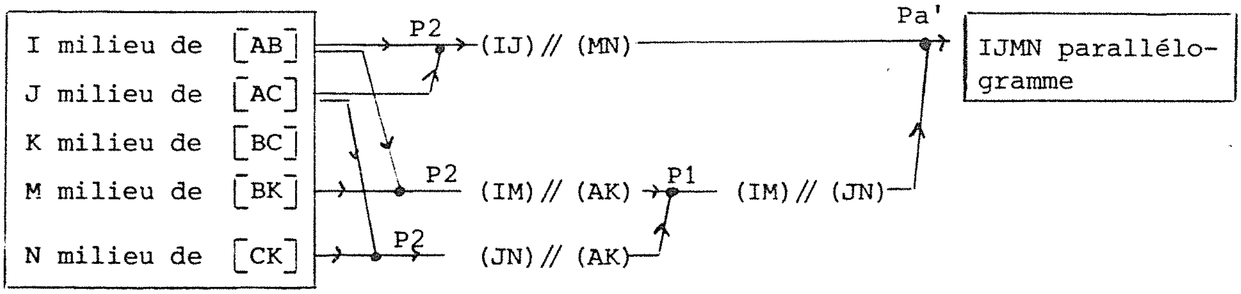
On peut remarquer la "dualité" avec 7 , donc la formulation de l'énoncé permet, à partir d'une même figure, de fabriquer plusieurs énoncés correspondant à des démarches différentes.

13 quater Idem

Peut se poursuivre pour prouver que les médianes sont concourantes.

14


$\boxed{\text{Pa" Pa' / 2}}$

15


$\boxed{\text{P2 P1 Pa' / 5}}$

On peut remarquer l'inutilité (voulue) de la troisième hypothèse et donc essayer de faire une figure avec K quelconque sur [BC] .

PARALLELOGRAMME

BILAN

1 Définition - axiome - théorème

Nous avons travaillé, c'est-à-dire fait des démonstrations, à partir de quatre énoncés :

- une définition Pa
- deux axiomes P1, P2
- un théorème P3.

A partir de ce matériau très simple, on peut, si la classe le permet, amener l'élève à distinguer, parmi les énoncés, les trois catégories citées.

2 Fiches pour l'élève "Comment démontrer que ... ?"

Nous avons été, au fil des exercices et des démonstrations, confronté à deux questions :

- comment démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme ?
- Comment démontrer que deux droites sont parallèles ?

Comment avons nous procédé ?

Fiche PARALLELOGRAMME

Comment démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme ?

Méthode 1 : Pa' en démontrant que ses côtés sont parallèles deux à deux.

Méthode 2 : P3 en démontrant que ses diagonales ont même milieu.

Fiche PARALLELES

Comment démontrer que deux droites sont parallèles ?

Méthode 1 : P1 en démontrant qu'elles sont parallèles à une même troisième.

Méthode 2 : P2 en démontrant que l'une passe par les milieux de deux côtés d'un triangle et que l'autre est le troisième côté du triangle.

Méthode 3 : Pa" En démontrant que ce sont deux côtés opposés d'un parallélogramme.

Ces fiches se compléteront au fil de l'année.

Exemple de feuille de travail pour l'élève

PARALLELES - Parallèlogramme

Enoncés

(Pa) Définition du parallèlogramme

Un parallèlogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.

(P1) Transitivité du parallèlisme

Deux droites parallèles à une même troisième droite sont parallèles entre elles.

(P2) Propriété des milieux dans un triangle

La droite qui passe par les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté.

(1) ORAN et ANGE sont deux parallèlogrammes
Prouve (1) que les droites (OR) et (GE) sont parallèles.

(2) ABC est un triangle ; I, J, K sont les milieux respectifs des segments [AB] , [AC] , [BC]. Que dire du quadrilatère AIKJ ? Prouve-le.

(3) LUCE est un parallèllogramme. Une parallèle à la droite (LE) coupe les droites (LU) et (CE) respectivement en A et N.
Démontre que ELAN et CUAN sont des parallèlogrammes.

(4) Soient O,U,R,S quatre points quelconques et M,I,E,L les milieux respectifs des segments [OU] , [UR] , [RS] , [OS] .
Que dire de MIEL ? Prouve-le .

(5) Dessine deux segments [AC] et [BD] ayant même milieu que l'on désignera par I.
Soient R et S les milieux respectifs des segments [AB] et [BC].
1) Démontre que (RI) est parallèle à (BC) et à (AD).
2) Démontre que (SI) est parallèle à (AB) et à (CD).
3) Que peut-on en déduire (2) pour ABCD ? Justifie-le.

Remarques : (1) on dit : prouver, ou démontrer, ou montrer. Ces termes sont, en mathématiques, synonymes.
(2) "que peut-on en déduire ?" signifie "quelle en est la conséquence ?".

PARALLELES - Parallèlogramme (suite)

Enoncé :

(P3) Théorème des diagonales

Si les diagonales d'un quadrilatère ont même milieu, alors ce quadrilatère est un parallèlogramme.

(6) Dessine un cercle de centre O. Deux droites passant par O coupent le cercle respectivement en A et A' , et en B et B'.

1) Démontre que (AB) est parallèle à (A' B').

2) Quelle est la nature de ABA'B' ? Peux-tu le prouver ?

Que peux-tu prouver ?

(7) ONU est un triangle quelconque. T et S sont les milieux respectifs de [OU] et [NU]. A est le symétrique de T par rapport à S c'est-à-dire que A est placé de telle façon que S soit le milieu de [AT] .

1) Démontre que TUAN est un parallèlogramme.

2) Démontre que OTAN est un parallèlogramme.

(8) TAO est un triangle quelconque, I et U sont les milieux respectifs de [AT] et [OT] , M est un point quelconque.

L est le symétrique de M par rapport à I et R celui de M par rapport à U.

Démontre que ORLA est un parallèlogramme.

(9) ABC est un triangle quelconque. I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [AC] . Les deux médianes (BJ) et (CI) se coupent en G.

Soit A' le symétrique de A par rapport à G.

Démontre que A'BGC est un parallèlogramme.

A faire   Un fichier avec tes deux premières fiches.

Fiche 1 : Comment démontrer qu'un quadrilatère est un parallèlogramme ?

Méthode 1 :

Méthode 2 :

Fiche 2 : Comment démontrer que deux droites sont parallèles ?

Méthode 1 :

Méthode 2 :

Méthode 3 :

Ces fiches, tu les complèteras au cours de l'année.

2 EUCLIDE - POINTS ALIGNES

Voici une présentation du Livre I des Eléments d'Euclide (IIè siècle avant J.C.)

Le livre I commence par la présentation de 23 définitions suivies de 5 postulats et de 5 notions communes.

Les principales définitions sont:

1. Un point est ce qui n'a pas de partie.
2. Une ligne est une longueur sans largeur.
3. Les extrémités d'une ligne sont des points.
4. La ligne droite est une ligne qui est également placée entre ses points.
5. Une surface est ce qui a seulement longueur et largeur.
8. Un angle plan est l'inclinaison mutuelle de deux lignes qui se touchent dans un plan et qui ne sont point placées sur une même ligne droite.
10. Lorsqu'une droite élevée sur une droite fait deux angles adjacents égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit; et la droite placée au-dessus est dite perpendiculaire à celle sur laquelle elle est placée.
11. Un angle obtus est un angle plus grand qu'un angle droit.
12. Un angle aigu est un angle plus petit qu'un angle droit.
13. Une limite est ce qui est l'extrémité de quelque chose.
14. Une figure est ce qui est compris par une seule ou par plusieurs limites.
15. Un cercle est une figure plane, comprise par une seule ligne telle que toutes les droites tombant sur elle à partir d'un point parmi ceux intérieurs à la figure sont égales entre elles.
17. Le diamètre du cercle est une droite tracée à travers le centre, et terminée de part et d'autre par la circonférence du cercle. Une telle droite partage le cercle en deux parties égales.
18. Les figures rectilignes sont celles qui sont contenues par deux lignes droites, les figures trilatérales sont celles contenues par trois, quadrilatérales celles contenues par quatre, et multilatérales celles contenues par plus de quatre lignes droites.
23. Les parallèles sont des droites qui, étant situées dans un même plan et étant prolongées indéfiniment de part et d'autre, ne se rencontrent ni d'un côté ni de l'autre.

Les cinq postulats sont:

1. Tracer une ligne droite d'un point quelconque à un point quelconque.
2. Produire par continuité une droite finie dans une droite.
3. Décrire un cercle d'un point quelconque et avec une distance quelconque.
4. Que tous les angles droits sont égaux entre eux.
5. Que, si une droite tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées indéfiniment, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.

Les cinq notions communes reconnues comme authentiques sont:

1. Les choses qui sont égales à la même chose sont égales entre elles.
2. Si des égaux sont ajoutés à des égaux, les touts sont égaux.
3. Si des égaux sont retranchés d'égaux, les restes sont égaux.
4. Les choses qui coïncident entre elles sont égales entre elles.
5. Le tout est plus grand que la partie.

Après cette introduction, viennent 48 propositions qui peuvent être classées en trois groupes: pes:

Premier groupe: 26 propositions relatives à des propriétés des triangles, comprenant les trois théorèmes d'égalité, des relations entre les éléments d'un triangle, quelques constructions géométriques comme la bissectrice d'un angle, le milieu d'un segment, la perpendiculaire à une droite.

Deuxième groupe: de 27 à 32, comprenant la théorie des parallèles et la preuve que la somme des angles dans un triangle est égale à deux angles droits.

Troisième groupe: de 33 à 48, concernant les parallélogrammes, les triangles et les carrés avec une référence spéciale aux relations d'aire. La proposition 47 est le théorème de Pythagore accompagné d'une preuve universellement attribuée à Euclide, alors que la proposition 48 est la réciproque de 47.

Remarque : Ce que nous appelons actuellement l'axiome d'Euclide est en fait le cinquième postulat. Notez la différence de formulation.

Extrait de "Histoire des Mathématiques" tome 1 J.P. Colette
Editions du Renouveau Pédagogique INC

Euclide - POINTS ALIGNES

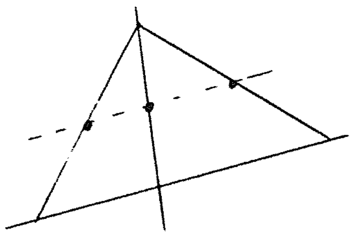
ENONCE

Eu **Axiome d'Euclide** : par un point il ne passe qu'une seule parallèle à une droite donnée.

ou si par un point il passe deux droites parallèles à une même droite, alors ces deux droites sont confondues.

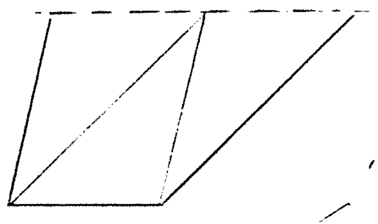
EXERCICES — Textes possibles

1.



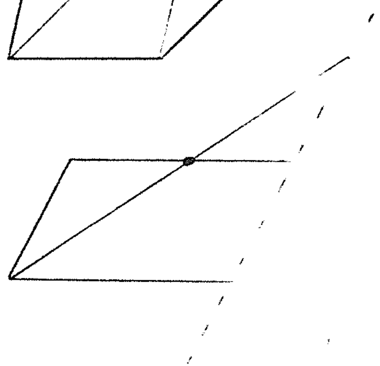
Soit d une droite et M un point n'appartenant pas à d. Par M on mène trois droites qui coupent d en R, S, T. Soient O, I, E les milieux respectifs de [MT] , [MS] et [MR] .
Les points O, I, E sont-ils alignés ?

2.



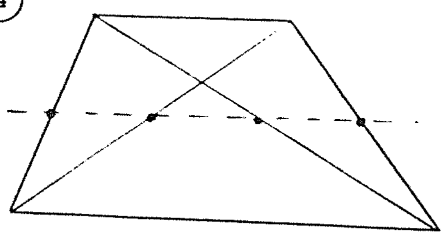
LARD et DATL sont deux parallélogrammes. Démontrer que R, A, T sont trois points alignés.

3.



NOIX est un parallélogramme.
E est le milieu du segment [XI] , et F est le symétrique de N par rapport à E.
Démontrer que les points O, I, F sont alignés

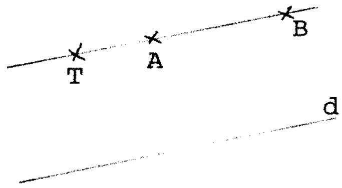
4.



MATH est un trapèze dont les bases sont [MA] et [HT]. I, R, E, X sont les milieux respectifs de [MH], [AH] , [MT] , [AT].
Les points I, R, E, X sont-ils alignés ?

Euclide - POINTS ALIGNES

ENONCE $\boxed{Eu}$



Hypothèses: (TA) // d ; (TB) // d $\xrightarrow{Eu}$ Conclusion: (TA) = (TB) ou (T,A, B alignés

N.B: sous sa première forme cet énoncé est connu des élèves.

EXERCICES — Solutions

① O milieu de [MT], I milieu de [MS], E milieu de [MR]

$\xrightarrow{P2}$ (OI) // d ; $\xrightarrow{P2}$ (IE) // d $\xrightarrow{Eu}$ O, I, E alignés

P2 Eu / 3

② LARD parallélogramme $\xrightarrow{Pa"}$ (RA) // (DL) ; DATL parallélogramme $\xrightarrow{Pa"}$ (AT) // (DL) $\xrightarrow{Eu}$ R, A, T alignés

Pa" Eu / 3

③ NOIX parallélogramme $\xrightarrow{Pa"}$ (OI) // (NX)

E milieu de [XI], E milieu de [NF] $\xrightarrow{P3}$ INXF parallélogramme $\xrightarrow{Pa"}$ (IF) // (NX)

$\xrightarrow{Eu}$ O, I, F alignés

Pa" P3 Eu / 4

④ (MA) // (HT), I milieu de [MH], R milieu de [AH], E milieu de [MT], X milieu de [AT]

$\xrightarrow{P2}$ (IR) // (MA) $\xrightarrow{P1}$ (IR) // (HF)

$\xrightarrow{P2}$ (RX) // (HT) $\xrightarrow{P1}$ (RX) // (MA)

$\xrightarrow{P2}$ (IE) // (HF)

$\xrightarrow{P2}$ (EX) // (MA)

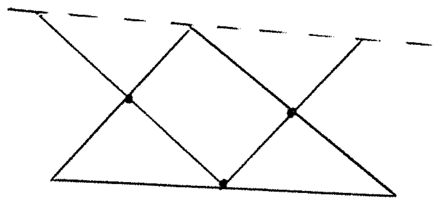
$\xrightarrow{Eu}$ I,R,E alignés

$\xrightarrow{Eu}$ R,E,X alignés

P2 P1 Eu / 8

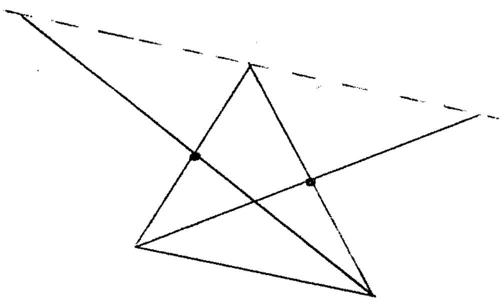
Euclide - POINTS ALIGNES

5



Les points A, L, U sont les milieux respectifs des côtés [BR] , [BE] et [RE] du triangle ERB.
C et I sont les symétriques du point L par rapport à A et U respectivement.
C, R, I sont-ils alignés ?

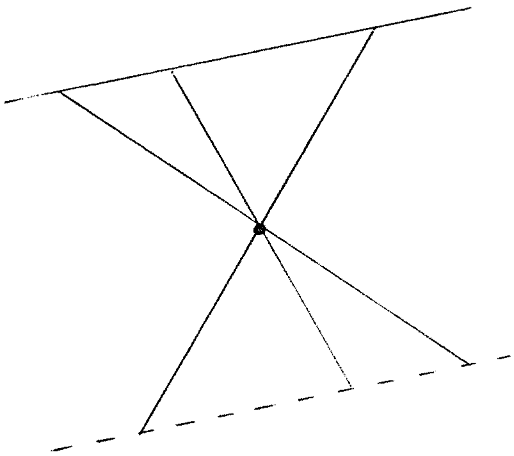
5 bis



LAC est un triangle, et I et E sont les milieux de [LC] et [LA] . R est le point tel que I soit le milieu de [RA] et P est le point tel que E soit le milieu de [CP].

Démontrer que P, L, R sont alignés.

6



A, B, C sont trois points d'une droite d et M un point non situé sur d.
M est le milieu de [AA'] , [BB'] , [CC'] .

Montrer que A', B', C' sont alignés.

Euclide POINTS ALIGNES

5

L milieu de [BE]					
A milieu de [CL]	P3	RCBL parallélogramme	Pa"	(RC) // (BE)	Eu → C, R, I alignés
A milieu de [BR]					
U milieu de [IL]	P3	RIEL parallélogramme	Pa"	(RI) // (BE)	
U milieu de [RE]					

P3 Pa" Eu/5

N.B. : 1) On remarque l'inutilité de l'hypothèse L milieu de [BE] .
L peut donc être pris ailleurs... Faire d'autres figures .
L ∈ [BE] ?

2) On peut étoffer l'exercice : il y a dans cette figure au moins 8 parallélogrammes.

5 bis Idem P3 Pa" Eu / 5

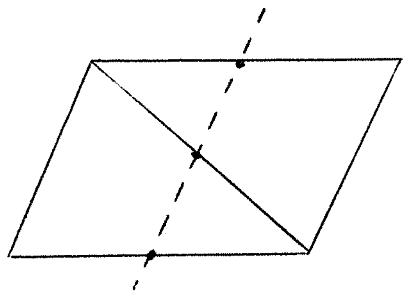
6

M milieu de [AA']	P3	ABA'B' parallélogramme	Pa"	(A'B') // d	Eu → A'B'C' alignés
M milieu de [BB']	P3	BCB'C' parallélogramme	Pa"	(B'C') // d	
M milieu de [CC']					

P3 Pa" Eu / 5

Euclide - POINTS ALIGNES

7

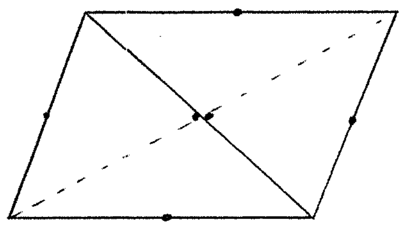


LEUR est un parallélogramme

M,O,I sont les milieux respectifs de [LE] , [LU] et [RU] .

Démontrer que M, O, I sont alignés.

7 bis



1) voir 7

2) T et N sont les milieux de [LR] et [EU].

Démontrer de même que T,O,N sont alignés.

Que peut-on dire alors du point d'intersection des droites (TN) et (MI) ?

3) Soit O' le milieu de [RE] .

De même que peut-on prouver ?

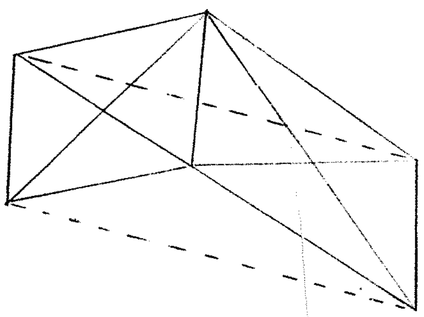
Quelle conclusion en tirer ?

ENONCE

P4 Théorème des diagonales du parallélogramme

Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales ont pour milieu le même point.

8



MISE et SURE sont deux parallélogrammes. On veut prouver que MIUR est un parallélogramme.

1) Prouve que (IM) est parallèle à (UR).

2) Si on appelle P le point d'intersection des diagonales de MISE, que peut-on dire de P et pourquoi ?

Même question pour O point d'intersection des diagonales de SURE.

3) Prouve que : (PO)// (IU) et (PO)// (MR)

Qu'en déduis-tu ?

4) Pourquoi finalement MIUR est-il un parallélogramme ?

Euclide - POINTS ALIGNES

⑦

LEUR parallélogramme
M milieu de [LE]
O milieu de [LU]
I milieu de [RU]

$\xrightarrow{Pa''}$ (RL) // (EU) ; $\xrightarrow{P2}$ (MO) // (UE) ; $\xrightarrow{P2}$ (OI) // (RL)

(RL) // (EU), (MO) // (UE) $\xrightarrow{P1}$ (MO) // (RL)

(MO) // (RL), (OI) // (RL) $\xrightarrow{Eu}$ $\boxed{\text{M, O, I alignés}}$

$\boxed{\text{P2 Pa" P1 Eu / 5}}$

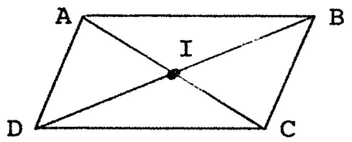
(7 bis) 1) Voir ⑦

2) Même chose que 1) puis :

$\boxed{\text{M,O,I alignés}}$, $\boxed{\text{T,O,N alignés}}$ → O = (MI) ∩ (TN)

3) De même O' = (MI) ∩ (TN) donc O = O'

$\boxed{\text{P4}}$ (connu des élèves)



ABCD parallélogramme
I = (AC) ∩ (BD)

$\xrightarrow{P4}$

I milieu de [AC]
I milieu de [BD]

N.B : P4 est la réciproque de P3.

⑧

1)

MISE parallélogramme
SURE parallélogramme

$\xrightarrow{Pa''}$ (IM) // (SE) ; $\xrightarrow{Pa''}$ (SE) // (UR)

(IM) // (SE), (SE) // (UR) $\xrightarrow{P1}$ $\boxed{\text{(IM) // (UR)}}$

$\boxed{\text{Pa" P1 / 3}}$

2) Application directe de P4.

3)

MISE parallélogramme
SURE parallélogramme

MISE parallélogramme $\xrightarrow{P4}$ P milieu de [IE], P milieu de [MS]

SURE parallélogramme $\xrightarrow{P4}$ O milieu de [EU], O milieu de [SR]

P milieu de [IE], O milieu de [EU] $\xrightarrow{P2}$ (PO) // (IU)

P milieu de [MS], O milieu de [SR] $\xrightarrow{P2}$ (PO) // (MR)

(PO) // (IU), (PO) // (MR) $\xrightarrow{P1}$ $\boxed{\text{(IU) // (MR)}}$

$\boxed{\text{P4 P2 P1 / 5}}$

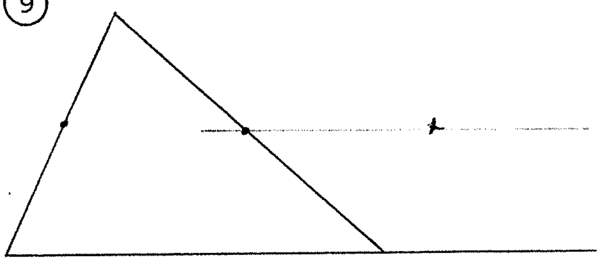
4) (IM) // (UR) (1)

(IU) // (MR) (3) $\xrightarrow{Pa'}$ $\boxed{\text{MIUR parallélogramme}}$

$\boxed{\text{Pa' / 1}}$

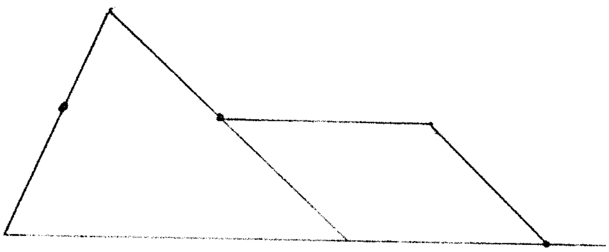
Euclide - POINTS ALIGNES

9



MDR est un triangle. O et E sont les milieux de [DR] et [DM].
Par O on trace la parallèle d à [MR].
Montre que tout point X de d est aligné avec E et O.

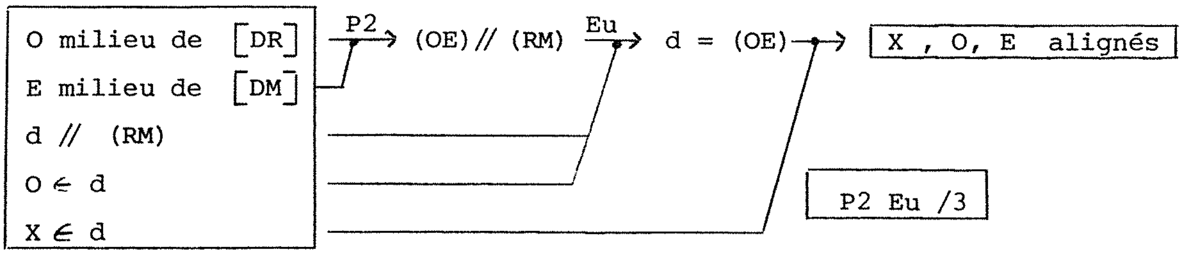
9 bis



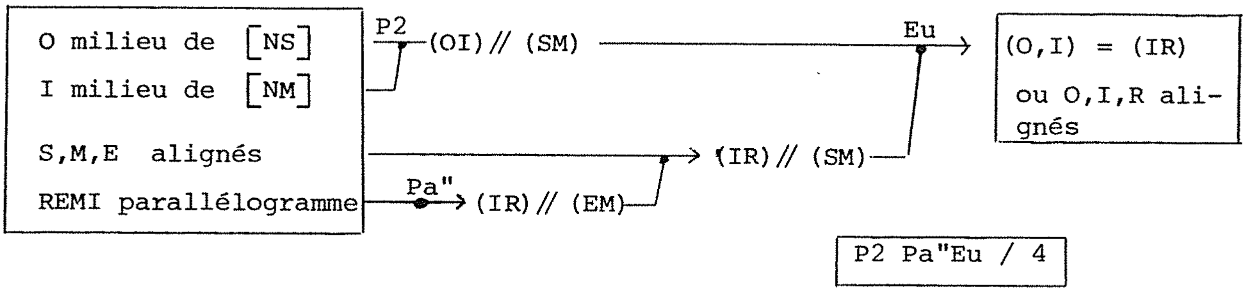
Sur une droite d on place trois points quelconques S, M, E. Soit N un point quelconque qui ne soit pas sur d. O est le milieu de [NS] et I' celui de [NM].
On place enfin R de telle façon que REMI soit un parallélogramme.
Que dire de R, O, I ? Prouve-le.

Euclide - POINTS ALIGNES

9



9 bis



Euclide - POINTS ALIGNES

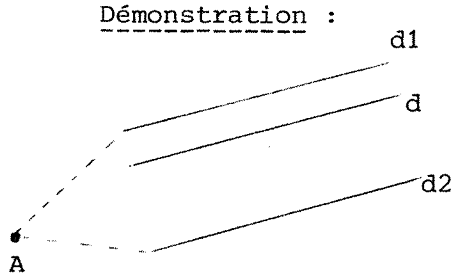
BILAN

1 Statut des énoncés

On peut montrer aux élèves (si la classe le permet) que l'axiome d'Euclide entraîne la transitivité du parallélisme : Eu ⟹ P1.

P1 "devient" alors un théorème. Ce qui permet de réduire le nombre de "demandes" au départ.
En outre cette démonstration permettrait d'initier les élèves au raisonnement par l'absurde (mais cela est souvent hors de propos en 4ème).

Démonstration :



Hypothèses

d1 // d
d2 // d

Conclusion

d1 // d2 ?
ou
d1 $\not\parallel$ d2 ?

Supposons d1 $\not\parallel$ d2 . Alors par A , leur point d'intersection, passent deux droites d1 et d2 parallèles à d ce qui est impossible d'après l'axiome d'Euclide.
Donc d1 // d2.

2 Fiche pour l'élève. Une seule et nouvelle question s'est posée à nous :

Fiche ALIGNEMENT (ou POINTS ALIGNES) Comment démontrer que 3 points sont alignés ?

Méthode 1. Eu en démontrant qu'ils définissent deux droites parallèles à une même autre droite.

Fiche MILIEU Comment démontrer qu'un point est milieu d'un segment

Méthode 1. En démontrant que c'est le point d'intersection des diagonales d'un parallélogramme.

Exemple de feuille de travail pour l'élève

Enoncé

Eu Axiome d'Euclide

Par un point, il ne passe qu'une parallèle à une droite donnée.

Autre forme

Deux droites parallèles ayant un point commun sont confondues.

1- Soit une droite (d) et un point M non situé sur (d). A, B et C sont 3 points de (d). A', B', C' sont les milieux de [AM], de [BM] et de [CM] .

1) Montrer que la droite (A'B') est parallèle à (d).

2) Montrer que la droite (A(C') est parallèle à (d).

3) Les points A', B', C' sont-ils alignés ?

2- A, B, C sont trois points d'une droite (d) et M est un point non situé sur (d). Faire le dessin et placer les points A', B', C' de façon que M soit le milieu de [AA'], de [BB'] et de [CC'].
Montrer que les droites (A'B') et (B'C') sont parallèles à (d).
Les points A', B', C' sont ils alignés ?

3- (ABCD) et (BDCE) sont des parallélogrammes. Montrer que les points A, B et E sont alignés.

4- (ABCD) est un parallélogramme et E est le milieu de [CD]. Construire le point F tel que E soit le milieu de [AF]. Démontrer que les points B,C,F sont alignés.

5- (ABC) est un triangle. I et J sont les milieux de [AB] et de [AC]. Construire les points E et F de façon que I soit le milieu de [CE] et J soit celui de [BF]. Montrer que les points A, E, F sont alignés.

6- Montrer que dans un parallélogramme, les milieux des 2 côtés parallèles et celui d'une diagonale sont alignés.

7- Montrer que dans un trapèze, les milieux des 2 côtés non parallèles et ceux des 2 diagonales sont alignés.

3 THALES - MILIEU

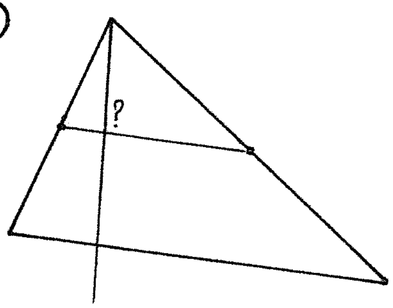
ENONCE

Th Enoncé de THALES - (cas particulier)

Si une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle et est parallèle à un autre côté, alors elle coupe le troisième côté en son milieu.

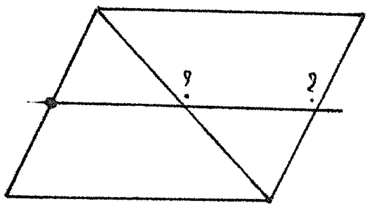
EXERCICES — Textes possibles

1



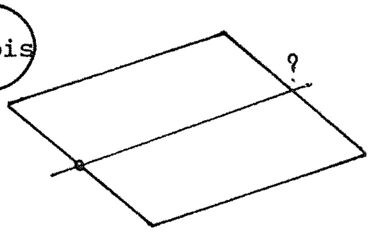
L U C est un triangle. M et N sont les milieux de [L U] et [L C]. Par L on mène une droite qui coupe le segment [U C] en T, et le segment [M N] en O.
Que dire de O ?
Démontre- le.

2



E R I C est un parallélogramme et L est le milieu de [E C]. Par L on mène la parallèle à (C I) qui coupe (E I) en A et (R I) en S. Démontrer que A est le milieu de [E I] et S le milieu de [R I] .

2 bis

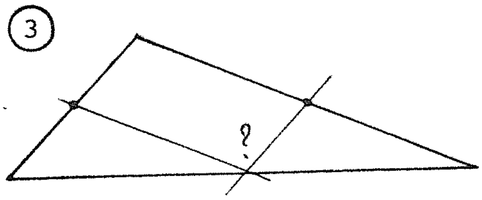


L U C E est un parallélogramme. Par le milieu I de [L E] on mène la parallèle à (C E) qui coupe [U C] en O. Que dire de O ?

ENONCE

Th' Si on projette le milieu d'un segment sur une droite parallèlement à une direction on obtient le milieu du segment projeté.

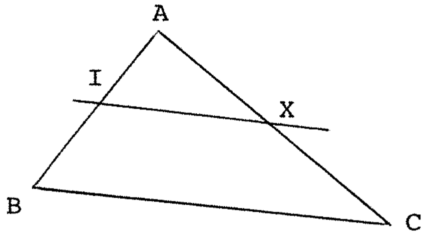
3



A B C est un triangle. D est le milieu de [A B] et E celui de [A C]. Par D on mène la parallèle à (A C) qui coupe (B C) en D'. Par E on mène la parallèle à (AB) qui coupe (B C) en E'.
Que dire de D' et E' ?

THALES - MILIEU

ENONCE Th



Hypothèses		Conclusion
I milieu de [AB] (IX) // (BC)	Th	X milieu de [AC]

N.B. pour la démonstration voir exercice 13

EXERCICES

Solutions

1

M milieu de [LU] ; N milieu de [LC] $\xrightarrow{P_2}$ (MO) // (UC) $\xrightarrow{\text{Th.}}$ O milieu de [LT]

N.B."dual" de 1 (Euclide - Points alignés) P_2 Th / 2

2

ERIC parallèlogramme ; L milieu de [EC] ; (LA) // (CI)

$\xrightarrow{P_a''}$ (ER) // (CI) $\xrightarrow{P_1}$ (AS) // (ER) $\xrightarrow{\text{Th}}$ S milieu de [RI]

$\xrightarrow{\text{Th}}$ A milieu de [EI]

1) Th/1

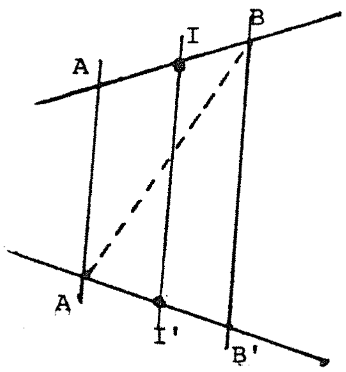
N.B: "dual" de 5 (Euclide - Points alignés)

2) P_a'' P_1Th/3

2bis Idem. Th P_a'' P_1/4

A remarquer qu'il faut tracer la "bonne ligne" : (LC). Mais une étude heuristique permet de la trouver.

Th'



I milieu de [AB] ; (AA')// (II')// (BB') $\xrightarrow{\text{Th'}}$ I' milieu de [A'B']

3

D milieu de [AB] ; E milieu de [AC] ; (DD') // (AC) ; (EE') // (AB)

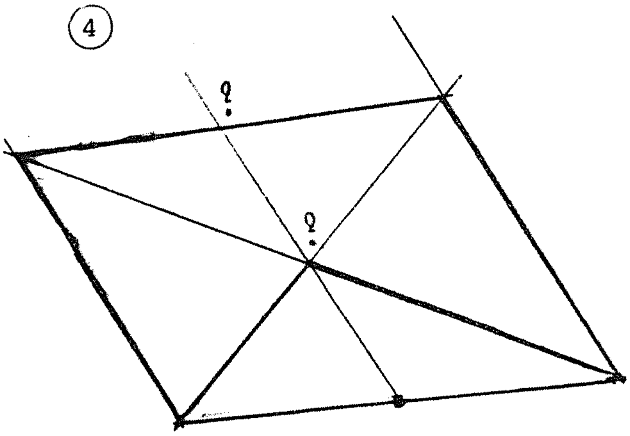
$\xrightarrow{\text{Th}}$ D' milieu de [BC]

$\xrightarrow{\text{Th}}$ E' milieu de [BC]

$\longrightarrow$ D' = E' = milieu de [BC]

Th / 3

4

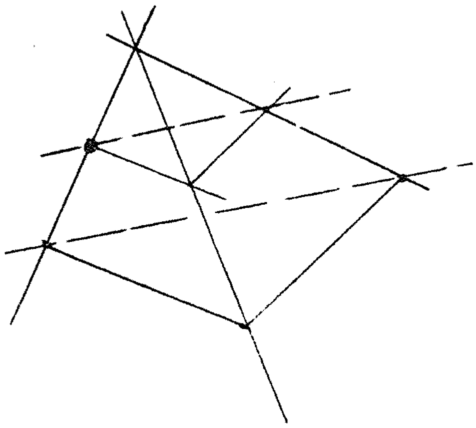


A P I est un triangle et C le milieu de [AI]
Par A et I on mène les parallèles à (CP) qui coupent (IP) et (AP) en O et L. (CP) coupe (OL) en E.

Démontrer que :

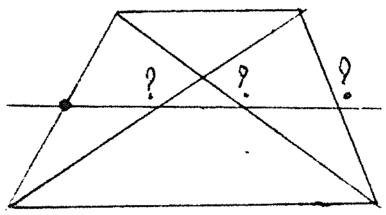
1) P est le milieu de [AL]
2) A I L O est un parallélogramme
3) E est le milieu de [OL]

5



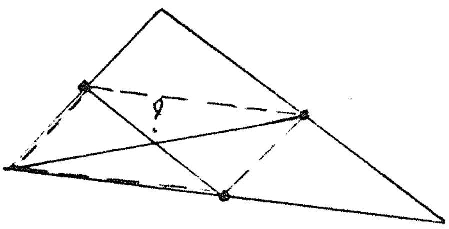
On considère trois droites concourantes en O.
On place sur chacune d'elles un point : on obtient ainsi trois points E, A, U.
Par le milieu C de [OE] on mène la parallèle à (EA) qui coupe (OA) en B. Par B on mène la parallèle à (AU) qui coupe (OU) en R.
Démontrer que (CR) et (EU) sont parallèles.

6



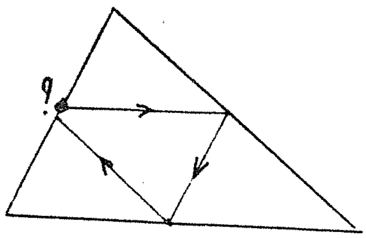
Y E U X est un trapèze dont les côtés parallèles sont [YE] et [XU]. M est le milieu de [YX].
Par M on mène la parallèle d à (XU) qui coupe (XE) en I , (YU) en R et (EU) en O.
Que dire de I, R, O ?

7

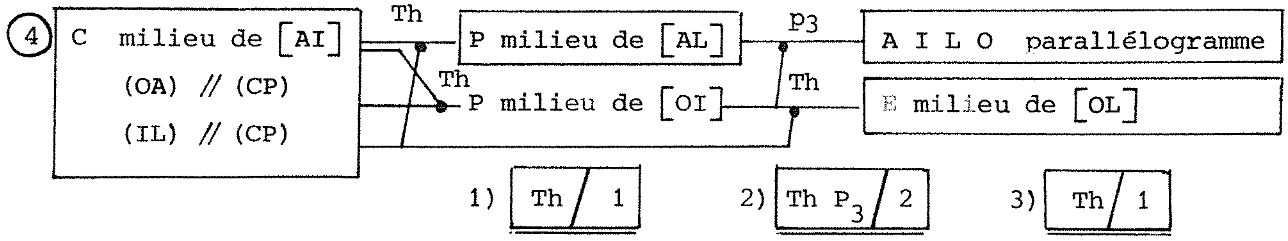


P R E est un triangle et D I A sont les milieux des côtés [PE] , [PR] et [RE] respectivement. (AD) coupe (EI) en S.
Démontrer que S est le milieu de [EI] .
Démontrer que A I D E est un parallélogramme.

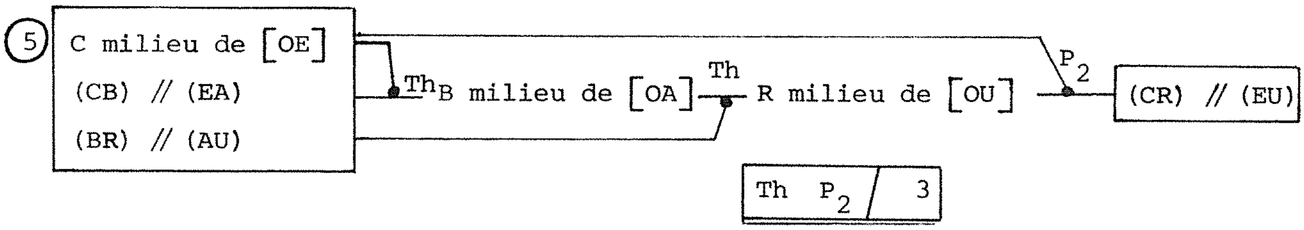
8



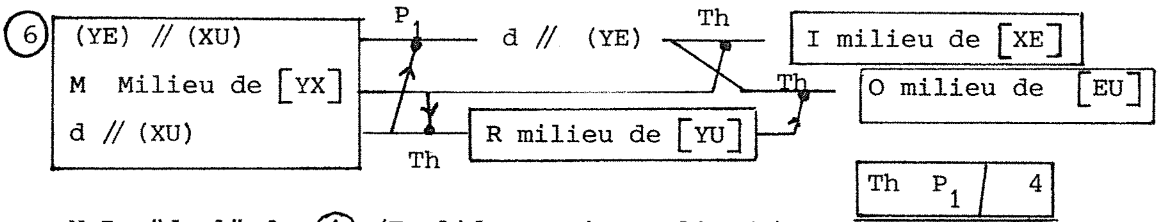
A T E est un triangle et H le milieu de [AT].
Par H on mène la parallèle à (AE) qui coupe [TE] en S, par S la parallèle à (AT) qui coupe [AE] en L, par L la parallèle à (ET) qui coupe [AT] en H'.
Que dire de H et H' ?



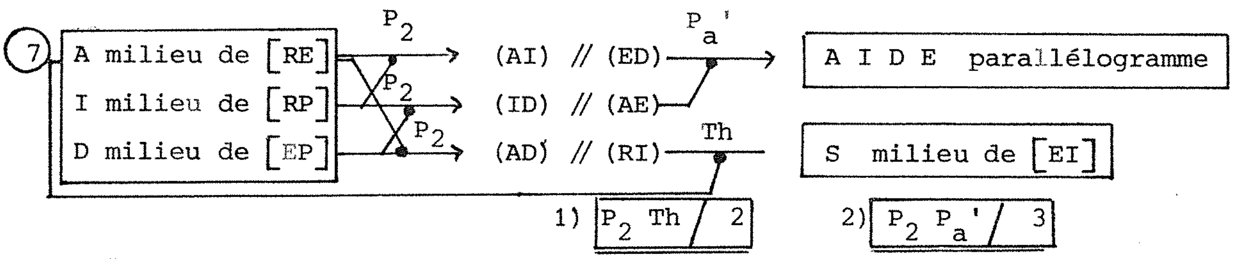
N.B. pour 3) on pourrait utiliser aussi (2 bis)

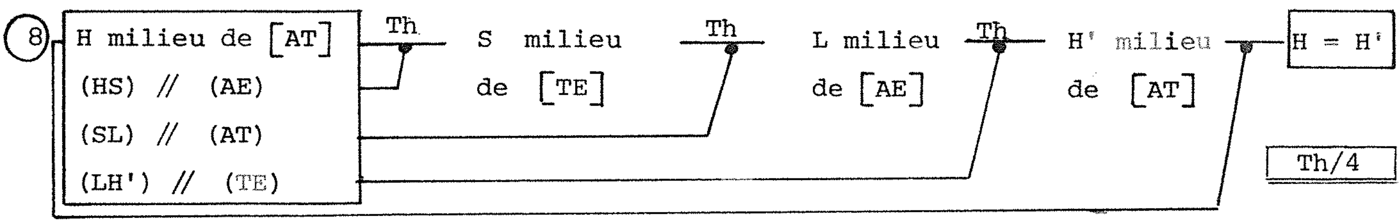


N.B: variante avec la même question en prenant pour hypothèse B milieu de [OA] au lieu de C milieu de [OE] .
C'est un cas particulier du Théorème de Desargues, généralisable en 3ème avec C quelconque. (En utilisant Thalès).



N.B: "dual" de (4) (Euclide - Points alignés).



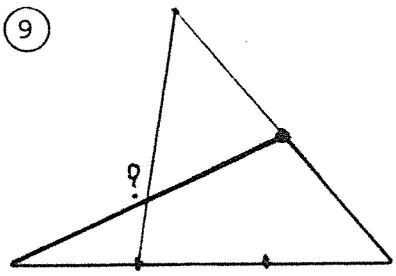


N.B. 1) On peut généraliser en prenant au lieu d'un triangle, un quadrilatère, un pentagone....

2) On peut tenter une généralisation en prenant H au quart de [TA] .....
ou avec Thalès en 3ème.

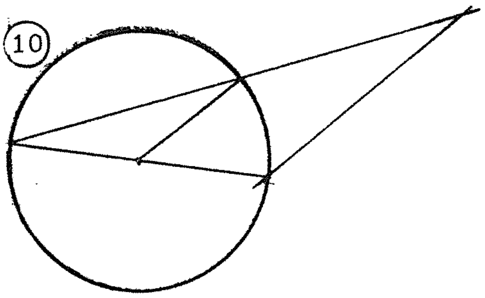
Thalès - MILIEU

9



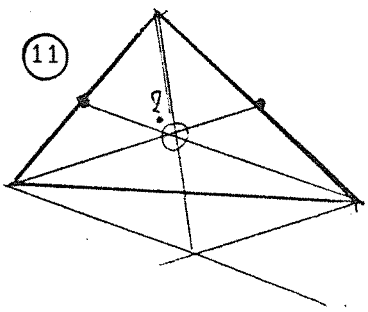
A L O est un triangle, P le symétrique de A par rapport à L et T le point situé au tiers de [OA] à partir de O. (TP) coupe (OL) en N. Démontrer que N est le milieu de [OL].

10



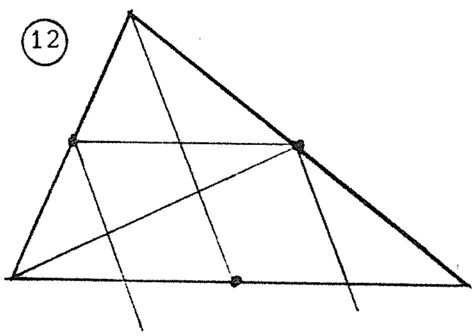
On considère un cercle de centre O. Soit [BC] un diamètre et A un point du cercle. Par C on mène la parallèle à (OA) qui coupe (BA) en D. Démontrer que A est le milieu de [BD].

11



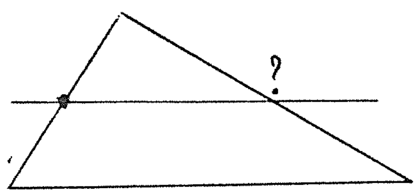
A B C est un triangle, [BI] et [CJ] deux de ses médianes qui se coupent en G. On place le point A' tel que B A' C G soit un parallélogramme. (AA') coupe (BI) en G_1 et (CJ) en G_2.
Que dire de G_1, G_2 et G ?

12



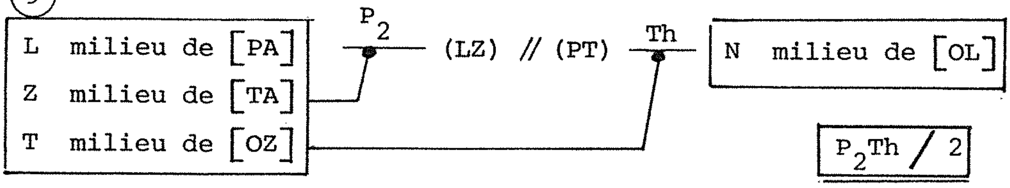
A B C est un triangle et P, N, M les milieux respectifs de [AB] , [AC] et [BC]. De P et N on mène les parallèles à (AM) qui coupent (BC) respectivement en P' et N'. Soit Q le point d'intersection de (AM) et (PN). (BN) coupe (PP') en H et (AM) en G.
Démontrer que :
1) P N N'P' est un parallélogramme.
2) Q est le milieu de [AM] et de [PN] .
3) G est le milieu de [HN] et H celui de [BG].
Qu'en déduit-on sur la position de G sur [BN]?

13



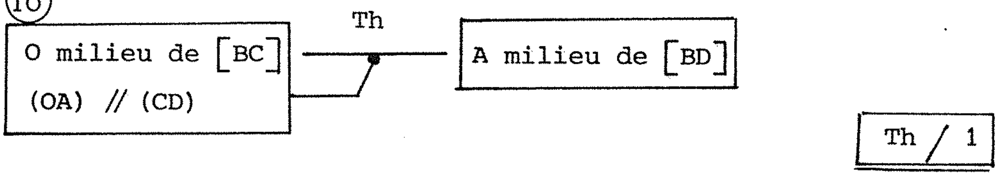
A B C est un triangle, I le milieu de [AB] et J celui de [AC]. Par I on mène la parallèle à (BC) qui coupe [AC] en X.
Que dire de X ?

9

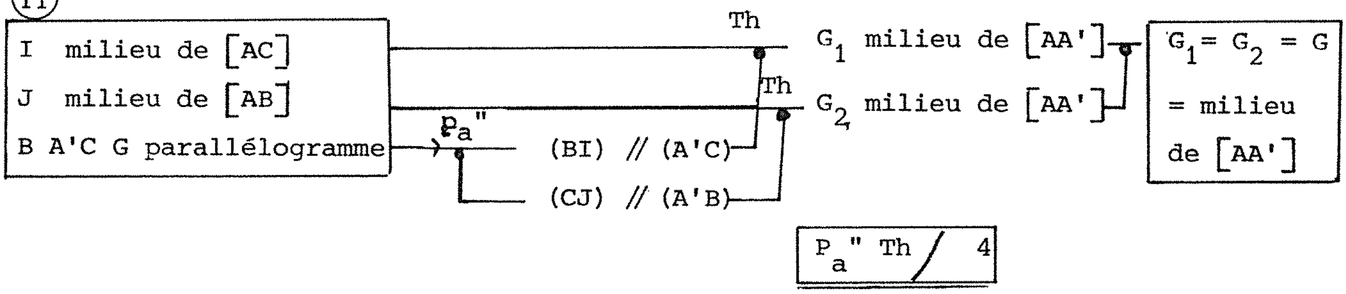


N.B. La difficulté consiste à traduire la condition 1/3 en termes de milieux et donc à placer le "bon" point Z. C'est essentiellement un travail heuristique.

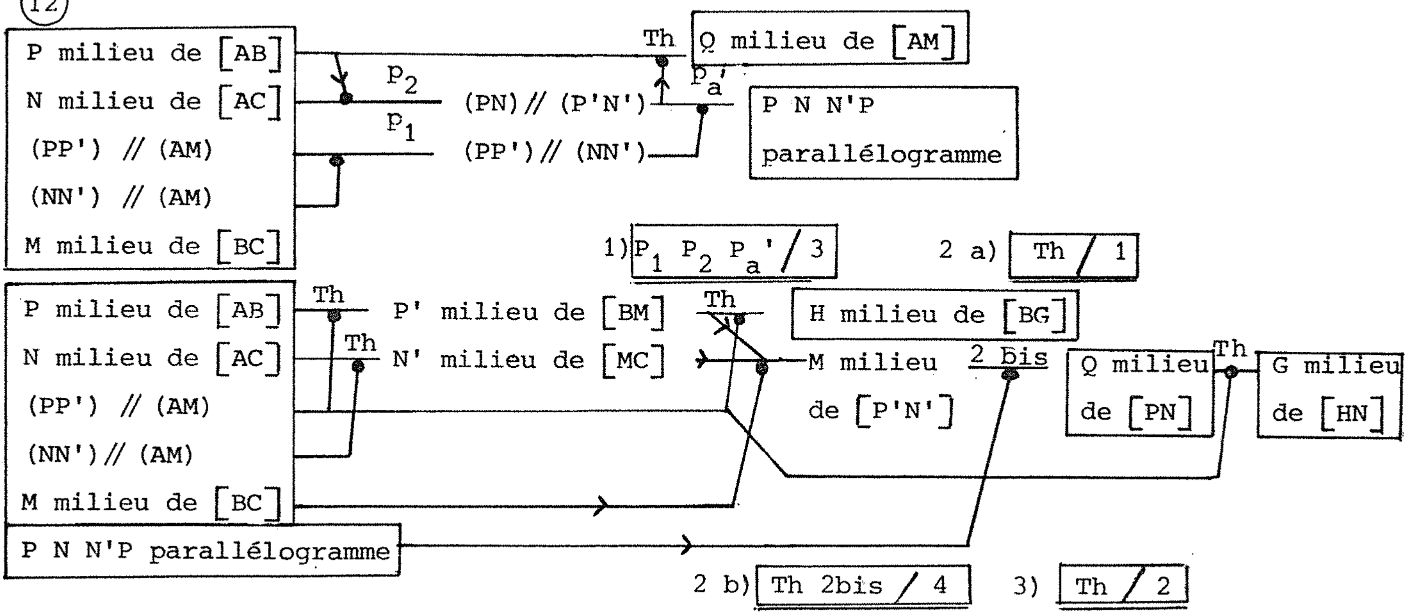
10



11

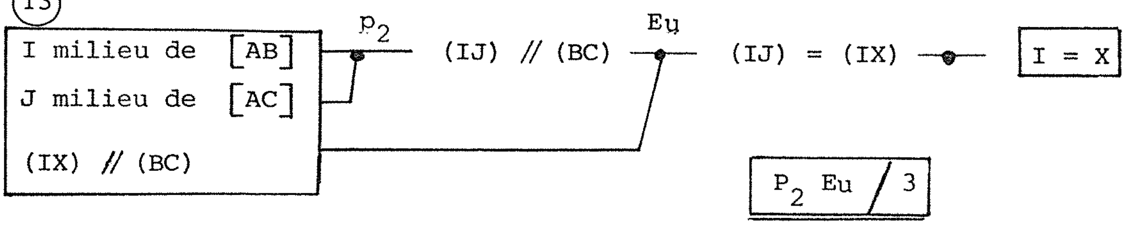


12



N.B. On démontre ainsi que le centre de gravité se trouve au tiers de la médiane à partir de son pied.

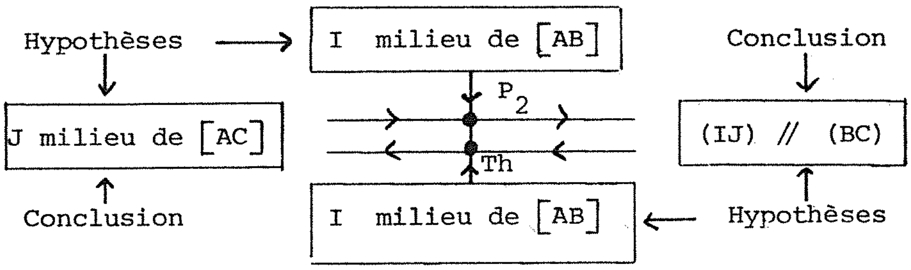
13



BILAN

1 Notion de réciproque

On peut montrer que l'énoncé de Thalès est réciproque de celui des milieux ou vice versa, de la manière suivante.



2 Statut des énoncés

Si on fait l'exercice 13 on montre ainsi que P_2 et Eu ayant statut d'axiomes, Th a statut de théorème.

3 Fiche pour l'élève

Une seule et nouvelle question s'est posée à nous :

Fiche MILIEU Comment démontrer qu'un point est le milieu d'un segment ?

Méthode 2 : Th en démontrant que c'est le point d'intersection d'un côté d'un triangle avec une droite passant par le milieu d'un autre côté et parallèle au troisième côté.

N.B. : On pourrait réécrire les énoncés en utilisant le langage des projections.

Exemple de feuille de travail pour l'élève :

Enoncé de Thalès (Théorème)
Si une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle et est parallèle à un autre côté, alors elle coupe le 3ème côté en son milieu.

I - (LUC) est un triangle. M et N sont les milieux de [LU] et de [LC]. Par L on mène une droite qui coupe le segment [UC] en T et le segment [MN] en O. Démontrer que O est le milieu de [LT] .

II - (ERIC) est un parallélogramme et L est le milieu de [EC]. Par L on mène la parallèle à (CI) qui coupe (EI) en A et (RI) en S. Démontrer que A est le milieu de [EI] et S le milieu de [RI].

III - (ABC) est un triangle. D est le milieu de [AB] et E celui de [AC].
Par D on mène la parallèle à (AC) qui coupe [BC] en D' -
Par E on mène la parallèle à (AB) qui coupe [BC] en E' -
Que dire de D' et E' ?

IV - On considère 3 droites concourantes en O. On place un point sur chacune d'elles. On obtient ainsi 3 points E, A, U. Par le milieu C de [OE], on mène la parallèle à (AU) qui coupe (OU) en R.
Démontrer que (CR) et (EU) sont parallèles.

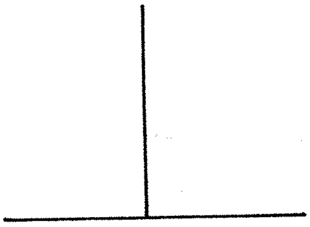
V - (YEUX) est un trapèze dont les côtés parallèles sont [YE] et [XU] . M est le milieu de [YX]. Par M on mène la parallèle (d) à (XU) qui coupe (XE) en I , (YU) en R et (EU) en O. Que dire de I, R et O ?

VI - (ATE) est un triangle et H est le milieu de [AT]. Par H on mène la parallèle à (AE) qui coupe [TE] en S , par L la parallèle à (AT) qui coupe [AE] en L , par L la parallèle à (ET) qui coupe [AT] en H'. Que dire des points H et H' ?

VII - (ALU) est un triangle. P est le symétrique de A par rapport à L et T est le point situé au tiers de [OA] à partir de O. (TP) coupe (OL) en N. Démontrer que N est le milieu de [OL].

4 ORTHOGONALITE - Rectangle

PERPENDICULAIRE

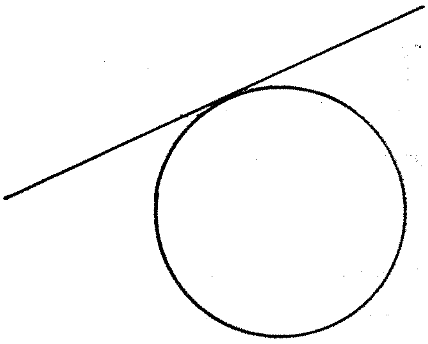


Facile est de dire
Que je tombe à pic.

Mais c'est aussi sur moi
Que l'autre tombe à pic.

*

TANGENTE



Je ne toucherai qu'une fois
Et vous saurez que c'est furtif.

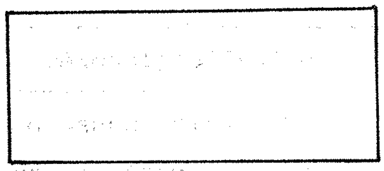
Inutile de m'appeler,
Tout autant de me rappeler.

Vous aurez grandement le temps
De vous redire ce moment

Et d'essayer de vous convaincre
Que nous restons l'un contre l'autre.

*

RECTANGLE



Se prêtant pour le rève
De creux dans de l'épais,
D'ouvert dans de l'opaque.

Toujours fenêtre claire
Dans les prisons diverses,

Ouverture où passer
Ou du moins regarder

Et parfois vers soi-même
Plus à l'aise et plus soi

Là, de l'autre côté
Du rectangle qui s'offre.

*

GUILLEVIC

Euclidiennes.

ENONCES

$\boxed{O_1}$ Unicité de la perpendiculaire

Par un point on ne peut mener qu'une perpendiculaire à une droite.

$\boxed{\text{ou}}$

Si par un point il passe deux droites perpendiculaires à une même droite, alors ces deux droites sont confondues.

$\boxed{O_2}$ Relation entre perpendiculaires

Si deux droites sont perpendiculaires à la même droite, alors elles sont parallèles.

$\boxed{O_3}$ Relation entre perpendiculaire et parallèles

Si deux droites sont parallèles et si une troisième est perpendiculaire à l'une alors elle est perpendiculaire à l'autre.

$\boxed{Re}$ Définition du rectangle

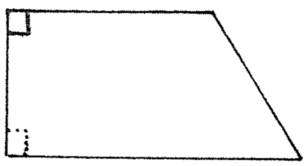
Un rectangle est un parallélogramme ayant deux côtés perpendiculaires.

$\boxed{Tg}$ Enoncé de la tangente

On appelle tangente à un cercle en un point, la droite qui est perpendiculaire, en ce point, au rayon du cercle qui passe par ce point.

EXERCICES

1



Texte possible

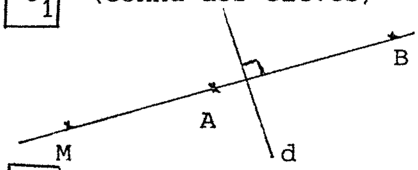
T, R, A, P sont quatre points tels que les droites (TR) et (PA) sont parallèles, et les droites (TP) et (TR) sont perpendiculaires. (Trapèze rectangle).

Prouve que les droites (TP) et (PA) sont perpendiculaires.

ORTHOGONALITE - Rectangle

ENONCES	Hypothèses	Conclusion

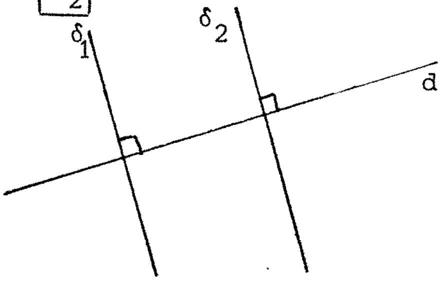
O$_1$ (connu des élèves)



Hypothèses		Conclusion
(MA) $\perp$ d (MB) $\perp$ d	$\xrightarrow{O_1}$	(MA) = (MB) ou M, A, B alignés

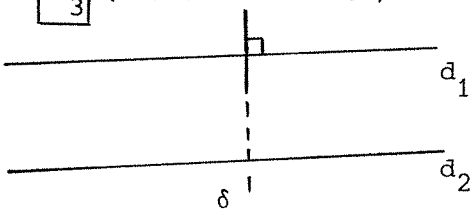
N.B. Cet énoncé est le "dual" d'Euclide

O$_2$ (connu des élèves)



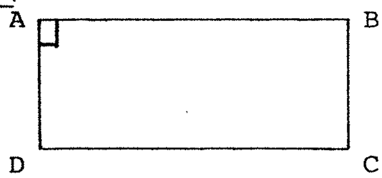
Hypothèses		Conclusion
$\delta_1 \perp d$ $\delta_2 \perp d$	$\xrightarrow{O_2}$	$\delta_1 \parallel \delta_2$

O$_3$ (connu des élèves)



Hypothèses		Conclusion
$\delta \perp d_1$ $d_1 \parallel d_2$	$\xrightarrow{O_3}$	$\delta \perp d_2$

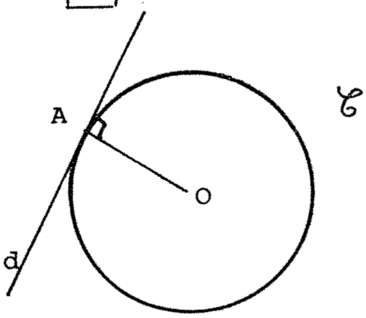
Re (connu des élèves)



Hypothèses		Conclusion
A B C D parallélogramme (AB) $\perp$ (AD)	$\xrightarrow{Re}$ $\longleftarrow$	A B C D rectangle

NB: la réciproque complète fait appel au résultat de l'exercice 6 .

Tg (connu des élèves)



Hypothèses		Conclusion
A $\in$ $\mathcal{C}$ A $\in$ d d $\perp$ (OA)	$\xrightarrow{Tg}$ $\longleftarrow$	d tangente en A à $\mathcal{C}$.

EXERCICES

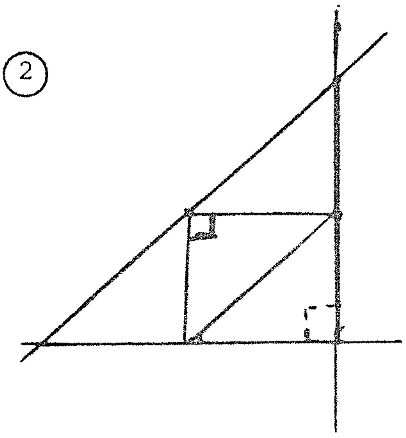
Solutions

1

Hypothèses		Conclusion
(TP) $\perp$ (TR) (TR) // (PA)	$\xrightarrow{O_3}$	(TP) $\perp$ (PA)

$\boxed{O_3 / 1}$

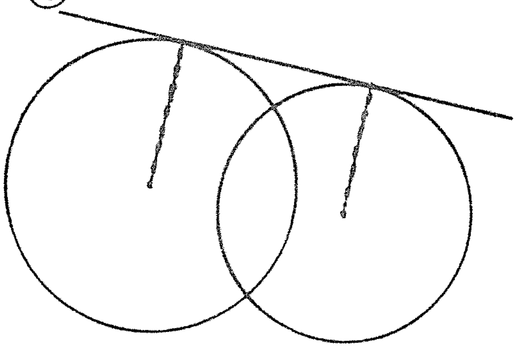
2



R O I est un triangle rectangle en O. Par O on mène la droite Δ parallèle à (RI), par R on mène Δ' parallèle à (OI) et par I on mène Δ" parallèle à (OR). Δ' et Δ se coupent en A, Δ" et Δ en E, Δ' et Δ" en L.

Démontre que L E A est un triangle rectangle.

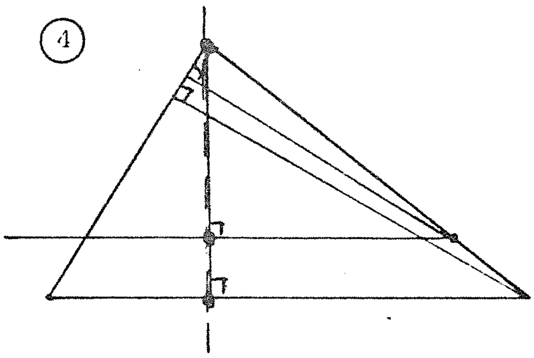
3



$\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont deux cercles sécants, de centres O et O'. d est une droite qui est tangente aux deux cercles en A et A'.

Que dire de O A A'O' ?

4



T R I est un triangle. Par le point A du côté [TI] on mène la parallèle à (IR) qui coupe (IR) en N.

Dans le triangle T I R on mène la hauteur issue de I qui coupe (RT) en G.

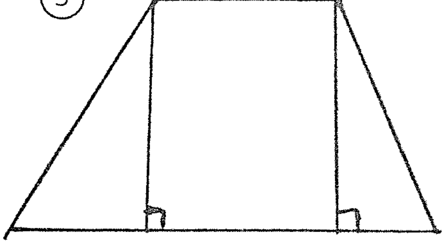
Dans le triangle T A N on mène la hauteur issue de A qui coupe (TN) en L.

Dans ces deux triangles on mène les hauteurs issues de T qui coupent (AN) et (RI) respectivement en E et S.

1) Compare les directions de (AL) et (IG).

2) Compare les directions de (TE) et (TL).

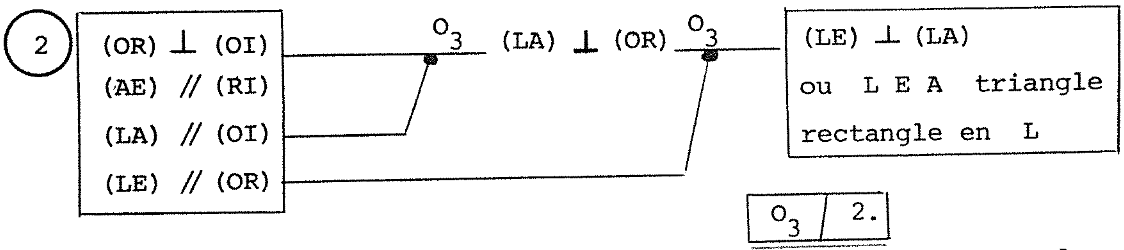
5



F O R T est un trapèze dont les bases sont [OR] et [FT]. On projette orthogonalement sur (FT) O en N et R en I.

Démontre que I R O N est un rectangle.

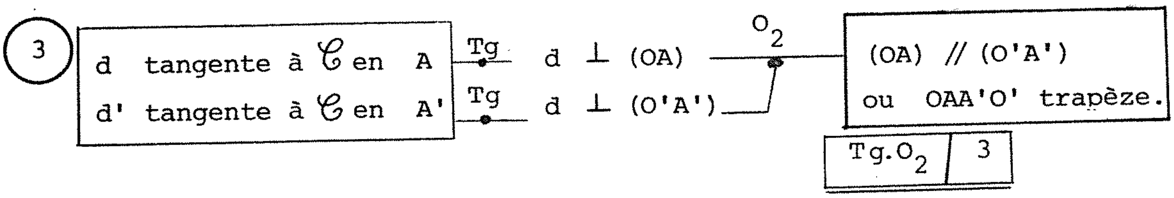
ORTHOGONALITE - Rectangle

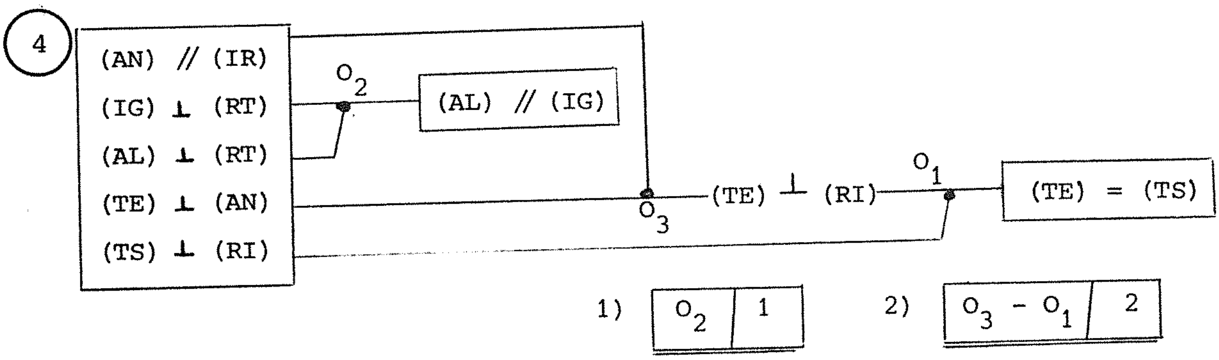


N.B.: 1) On peut compléter l'énoncé et faire démontrer par exemple que A O I R est un parallélogramme, O milieu de [AE] .....

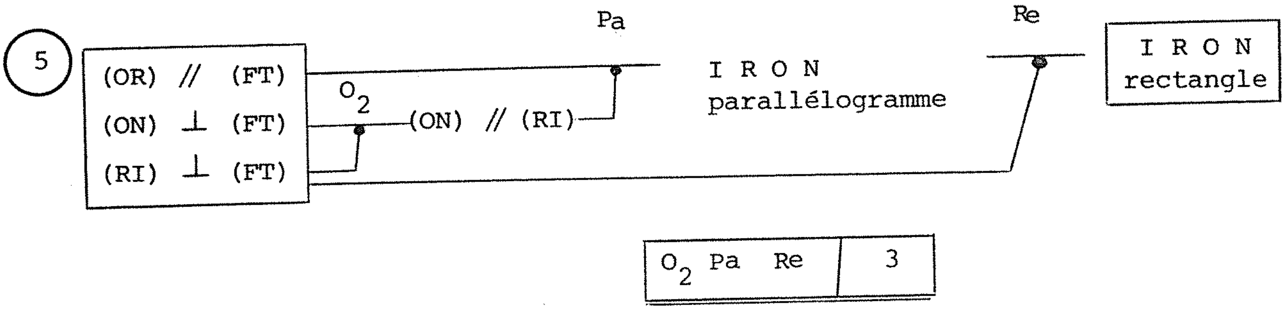
2) La difficulté ici est surtout l'écriture des hypothèses.

Noter l'hypothèse superflue.

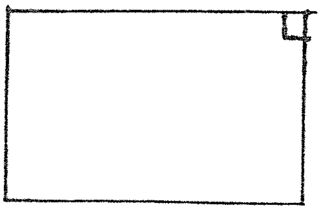




N.B: La difficulté réside dans la construction de la figure et l'écriture des hypothèses, alors que les preuves font appel à peu de déductions et aux trois énoncés de base.



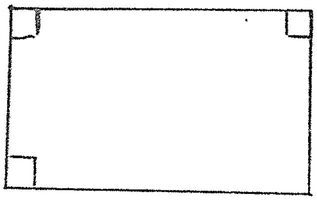
6



RECT est un parallélogramme dont l'angle $\widehat{E}$ est droit.

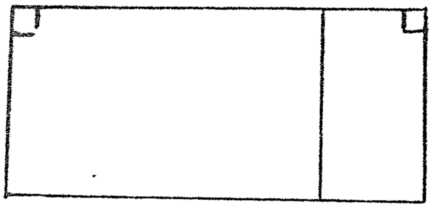
Démontrer que $\widehat{R}$, $\widehat{C}$, $\widehat{T}$ sont aussi des angles droits.

6bis



Démontrer qu'un quadrilatère ayant trois angles droits est un rectangle.

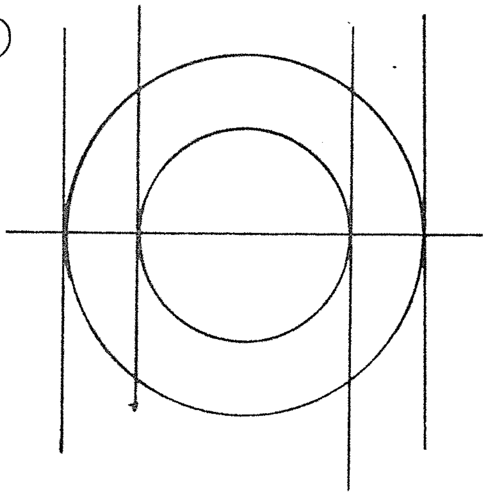
7



REAN et TAEC sont deux rectangles.

Démontrer que R, E, C sont alignés.

8

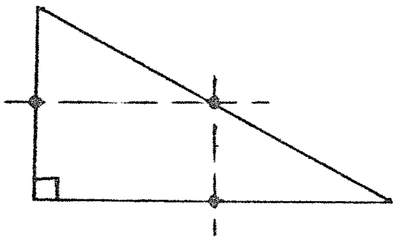


On trace deux cercles concentriques de centre O et une droite (L) qui passe par O, puis on trace les tangentes aux deux cercles aux points d'intersection de la droite (L) et des cercles.

Que dire de ces quatre tangentes ?

Le prouver.

9



POS est un triangle rectangle en O.

M est le milieu de [OS] , I celui de [SP] et L celui de [OP] .

Démontrer que MILO est un rectangle.

-

ORTHOGONALITE - Rectangle

6

| R E C T parallélogramme
(RE) ⊥ (EC) |

Pa — (RE) // (TC) — O_3 — | (TC) ⊥ (EC) | — O_3 — | (RT) ⊥ (TC) |

Pa — (RT) // (EC)

O_3 — | (RE) ⊥ (RT) |

| Pa O_3 | 4 |

6bis

| (AD) ⊥ (DQ)
(DQ) ⊥ (QU)
(QU) ⊥ (UA) |

O_2 — (AD) // (QU) — Pa — Q U A D parallélogramme — Re — | Q U A D rectangle. |

O_2 — (DQ) // (UA)

| O_2 Pa Re / 4 |

7

| R E A N rectangle
T A E C rectangle |

Re — (RE) ⊥ (EA) — O_1 — | (R E) = (EC) ou R, E, C alignés |

Re — (AE) ⊥ (EC)

| Re - O_1 / 3 |

N.B. On peut poursuivre et faire démontrer que R C T N est un rectangle.

8

| d_1 tangente
d_2 tangente
d_3 tangente
d_4 tangente |

Tg — d_1 ⊥ (L) — O_2 — d_1 // d_2 — P_1 — | d_1 // d_2 // d_3 // d_4 |

Tg — d_2 ⊥ (L) — O_2 — d_2 // d_3 — P_1

Tg — d_3 ⊥ (L) — O_2 — d_3 // d_4

Tg — d_4 ⊥ (L)

| T_g - O_2 - P_1 / 9 |

9

| (OS) ⊥ (OP)
M milieu de [OS]
I milieu de [SP]
L milieu de [OP] |

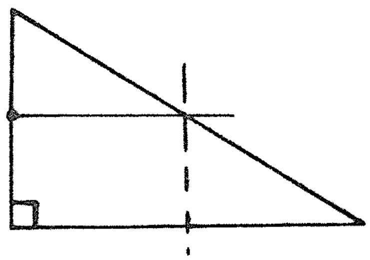
P_2 — (MI) // (OL) — Pa — M I L O parallélogramme — Re — | M I L O rectangle |

P_2 — (IL) // (OM)

| P_2 Pa Re / 4 |

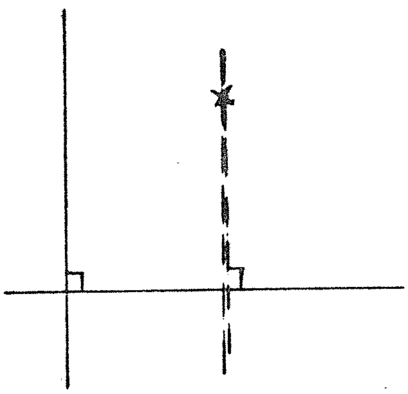
ORTHOGONALITE - Rectangle

9 bis



OHE est un triangle rectangle en O et S est le milieu de [OE] . Par S on mène la parallèle à (OH) qui coupe (EH) en I, et par I on mène la parallèle à (OE) qui coupe (OH) en P.
Démontrer que (IP) est perpendiculaire à (OH) et passe par le milieu de [OH] .
Que dire de (IP) ?

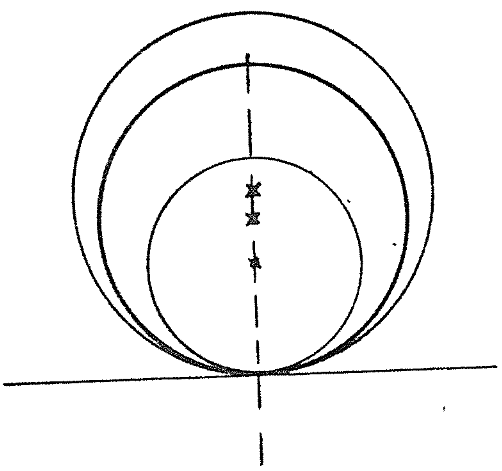
10



d et e sont deux droites perpendiculaires. Soit M un point n'appartenant pas à ces deux droites. Par M on mène d_1 parallèle à d, et d_2 perpendiculaire à e.

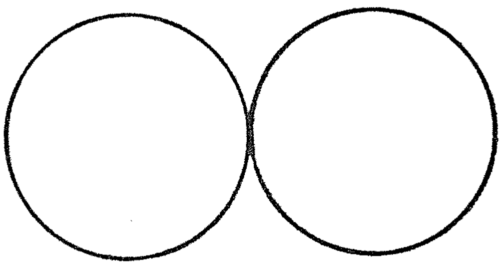
Que dire de d_1 et d_2 ? Prouvez-le.

11



Soit d une droite et A un point de d. $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ sont trois cercles de centres O_1 , O_2, O_3 tangents à d en A.
Démontrer que O_1 , O_2; O_3 sont alignés.
Généraliser.

11 bis



Deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont tangents en T et ont pour centre O et O'.
Démontrer que O, T, O' sont alignés, et que si les cercles ont même rayon alors T est le milieu de [OO'] .

ORTHOGONALITE - Rectangle

9 bis

(OE) $\perp$ (OH)
S milieu de [OE]
(SI) // (OH)
(IP) // (OE)

O_3 : (IP) $\perp$ (OH)

Th : I milieu de [EH]

Th : P milieu de [OH]

Me : (IP) médiatrice de [OH]

1) | O_3 | 1 | 2) | Th | 2 |

N.B: pour 1) il existe d'autres démarches moins rapides (exemple : S I P O parallélogramme, rectangle, donc ....)

10

$d \perp e$
$d_1 \parallel d$
$d_2 \perp e$
$M \in d_1$
$M \in d_2$

O_3 : $d_1 \perp e$

O_1 : $d_1 = d_2$

| O_3 O_1 | 2 |

11

d tangente à $\mathcal{C}_1$ en A
d tangente à $\mathcal{C}_2$ en A
d tangente à $\mathcal{C}_3$ en A

Tg : $d \perp (O_1A)$
Tg : $d \perp (O_2A)$
Tg : $d \perp (O_3A)$

O_1 : $(O_1A) = (O_2A)$ ou A, O_1, O_2 alignés

O_1 : $(O_2A) = (O_3A)$ ou A, O_2, O_3 alignés

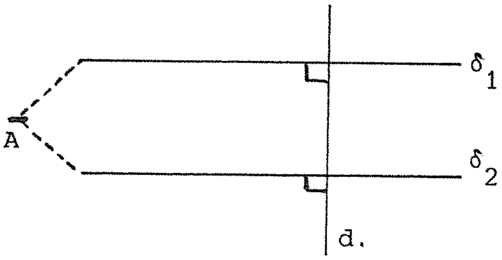
O_1, O_2, O_3 alignés

| Tg. O_1 | 6 |

BILAN

(1) Statut des énoncés

1) $O_1 \Longrightarrow O_2$ donc O_2 devient alors au théorème. On a là encore l'exemple d'une démonstration par l'absurde.



Hypothèses

$\delta_1 \perp d$
$\delta_2 \perp d$.

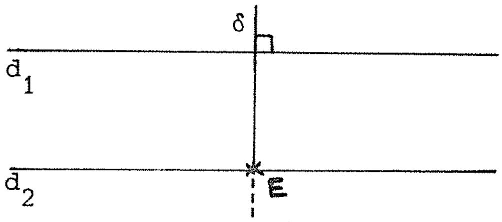
Conclusion

$\delta_1 \,/\!/\, \delta_2$?
ou
$\delta_1 \not\!/\!/\, \delta_2$?

Supposons $\delta_1 \not\!/\!/\, \delta_2$, donc $\delta_1 \cap \delta_2 = \{A\}$. Alors par A on peut mener deux perpendiculaires , δ_1 et δ_2 à d. Ce qui est impossible d'après O_1. Donc $\delta_1 \,/\!/\, \delta_2$.

N.B: Tout comme O_1 est le "dual" de Eu, O_2 est le "dual" de P_1

2) O_2 et $Eu \Longrightarrow O_3$ donc O_3 devient un théorème.



$d_1 \,/\!/\, d_2$ et δ coupe d_1 car $\delta \perp d_1$ donc δ coupe d_2 en E, car si deux droites sont parallèles toute droite qui coupe l'une coupe l'autre (se déduit de l'axiome d'Euclide Eu par un raisonnement par l'absurde). Menons par E la perpendiculaire d à δ. D'après O_2: $d_1 \perp \delta$ et $d \perp \delta$ entraîne $d \,/\!/\, d_1$. Donc par E passent deux parallèles à d_1 : d et d_2. Donc d'après Eu : $d = d_2$.
Conclusion : $d_2 \perp \delta$ (puisque $d \perp \delta$).

(2) Fiches pour l'élève :

Deux nouvelles questions se sont posées à nous, donc deux nouvelles fiches. D'autre part nous avons vu des méthodes nouvelles pour prouver le parallélisme et l'alignement.

ORTHOGONALITE - Rectangle

Fiche - PERPENDICULAIRES

Comment démontrer que deux droites sont perpendiculaires ?

Méthode 1 : $\boxed{O_3}$ en sachant que l'une est parallèle et l'autre perpendiculaire à une même droite.

Méthode 2 : $\boxed{Re}$ si ce sont les supports de deux côtés consécutifs d'un rectangle.

Méthode 3 : $\boxed{Tg}$ si l'une est tangente à un cercle et l'autre est le support du rayon correspondant.

Fiche - RECTANGLE

Comment démontrer qu'un quadrilatère est un rectangle ?

Méthode 1 : $\boxed{Re}$ en démontrant

- que c'est un parallélogramme.
- que deux côtés consécutifs sont perpendiculaires.

Méthode 2 : 6 bis en démontrant qu'il a trois angles droits.

Fiche - ALIGNEMENT

Comment démontrer que trois points sont alignés ?

Méthode 2 : $\boxed{O_1}$ en démontrant qu'ils définissent deux droites perpendiculaires à une même droite.

Fiche - PARALLELES

Comment démontrer que deux droites sont parallèles ?

Méthode 4 : $\boxed{O_2}$ en démontrant qu'elles sont toutes les deux perpendiculaires à une même droite.

Exemple de feuille de travail pour l'élève :

ORTHOGONALITE - RECTANGLE

Enoncés

Unicité de la perpendiculaire

Par un point, on ne peut mener qu'une perpendiculaire à une droite.

Relation entre droites perpendiculaires

Deux droites perpendiculaires à la même droite sont parallèles.

Relation entre parallèle et perpendiculaire

Si deux droites sont parallèles alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Définition du rectangle

Un rectangle est un parallélogramme dont 2 côtés sont perpendiculaires.

Tangente à un cercle

Une droite est tangente à un cercle si elle est perpendiculaire à un rayon en un point de ce cercle

1 - (ABCD) est un trapèze dont les côtés parallèles sont (AB) et (CD). les perpendiculaires à (CD) passant par A et B coupent (BD) en A' et B'. Démontrer que (ABB'A') est un rectangle.

2 - Démontrer que les 4 angles d'un rectangle sont droits.

3 - Démontrer qu'un quadrilatère dont 3 angles sont droits est un rectangle.

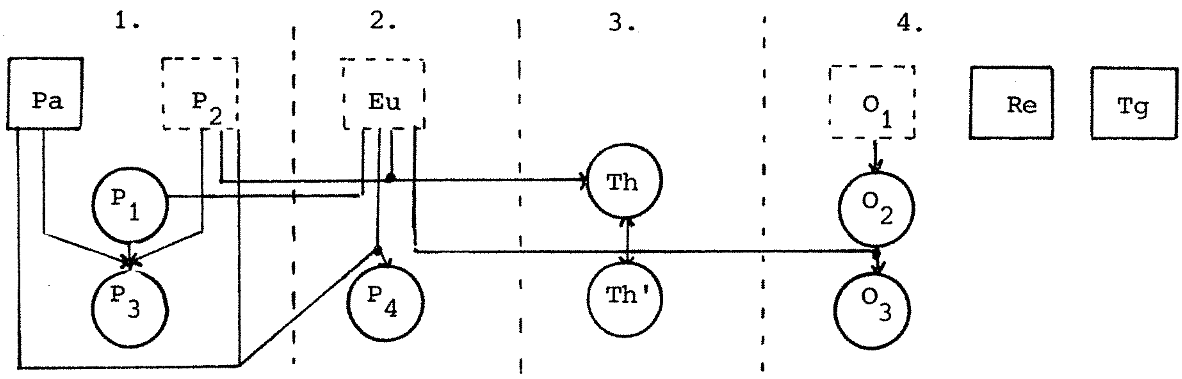
4 - (OAB) est un triangle rectangle en O. Le point I est sur [AB]. Les perpendiculaires à (OA) et (OB) passant par I coupent (OA) en M et (OB) en N. Démontrer que le triangle (IMN) est rectangle.

5 - (ABCD) et (ABEF) sont deux rectangles. Démontrer que les points D, A, F sont alignés ainsi que les points C, B, E. En déduire que le quadrilatère (DCEF) est un rectangle.

6 - ABC est un triangle. Une parallèle à (BC) coupe (AB) en B' et (AO) en C'. Montrer que les hauteurs des triangles (ABC) et (A'B'C') sont parallèles deux à deux.

7 - Une droite est tangente à 2 cercles de centres O et O'. A et A' sont les points de tangence. Quelle est la nature du quadrilatère (OAA'O') ?

BILAN de 1. 2. 3. 4 : 13 énoncés



D'où : 3 Définitions

3 Axiomes

7 Théorèmes

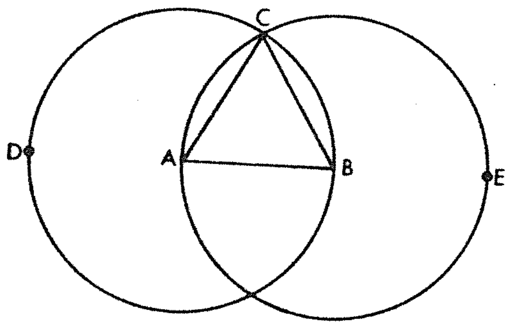
La plupart de ces énoncés sont connus des élèves.

5 DISTANCES - MILIEUX

Euclide, mathématicien grec du IIIe siècle avant J.C., écrivit de nombreux ouvrages parmi lesquels 13 livres intitulés "les éléments" ; bien des démonstrations présentées par Euclide sont proches de celles que nous faisons aujourd'hui.

1. Donne un programme de construction pour un triangle équilatéral.

2. Vois celui d'Euclide ; compare avec le tien



"Proposition 1.1 : Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral. (Euclide appelle "droite", ce que nous appelons un "segment").

Voici AB la droite donnée et finie. On cherche à construire un triangle équilatéral sur AB. Avec le centre en A et la distance AB on décrit le cercle BCD. [Postulat 3].

Avec le centre en B et la distance BA on décrit le cercle ACE. [Postulat 3] et du point C, point d'intersection des cercles, aux points A, B, on trace des lignes droites CA, CB [Postulat 1].

Maintenant, puisque le point A est le centre du cercle CDB.

AC est égal à AB. [Définition 15]

Encore, puisque le point B est le centre du cercle CAE.

BC est égal à BA [Définition 15]

Mais on a déjà trouvé que CA est égal à AB, de plus chacune des droites CA, CB est égale à AB.

Et les choses qui sont égales à la même chose, sont égales entre elles.

[Notion commune 1]

Ainsi CA est aussi égal à CB.

De plus, les trois droites CA, AB BC sont égales entre elles. Alors le triangle ABC est équilatéral : et il a été construit sur la droite donnée et finie AB.

Ce qu'il fallait faire."

in <u>Histoire des Mathématiques pour les collèges</u>. CEDIC.

DISTANCE - MILIEUX

ENONCES

$\boxed{L_p}$ Propriété métrique du parallélogramme

Si un quadrilatère est un parallélogramme alors les côtés opposés ont même longueur.

$\boxed{M_i}$ Définition du milieu d'un segment :

Le milieu d'un segment est le point :

- qui est aligné avec les extrémités du segment,
- qui est à la même distance des extrémités du segment.

EXERCICES

ENONCES POSSIBLES

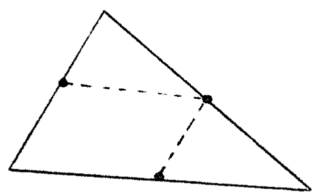
On peut reprendre et compléter de nombreux exercices précédents en particulier poser des questions sur des comparaisons de longueurs dans PARALLELES - PARALLELOGRAMME, demander de prouver que des points sont des milieux dans Euclide - POINTS ALIGNES.

Ces deux énoncés auraient donc pu être incorporés à ce moment-là.

Une autre option peut être aussi de les voir après et de faire revoir ainsi ce qui a été fait auparavant. Voir aussi MEDIATRICE.

Aussi nous limiterons-nous à un petit nombre d'exercices.

1



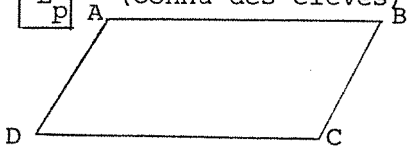
M A S est un triangle et E, P, I sont les milieux respectifs de [SM], [MA], [AS].

Compare les distances EP et SA.

DISTANCE - MILIEUX

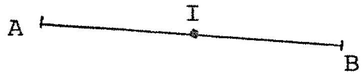
ENONCES

$\boxed{L_p}$ (Connu des élèves)



ABCD parallélogramme → AB = DC ; AD = BC

$\boxed{M_i}$ (connu des élèves)



I milieu de [AB] ⇄ * A, I, B alignés ; * AI = IB

EXERCICES

Solutions

1

E milieu de [SM]
P milieu de [MA]
I milieu de [AS]

$\xrightarrow{P_2}$ (EP) // (AS) ; $\xrightarrow{P_2}$ (PI) // (MS) ; $\xrightarrow{Pa}$ E P I S parallélogramme $\xrightarrow{L_p}$ EP = SI

$\xrightarrow{M_i}$ SI = IA = $\frac{AS}{2}$

→ $\boxed{EP = \frac{AS}{2}}$

$\boxed{P_2 \text{ Pa } L_p \text{ Mi } / \ 6}$

2

1)

(EO) // (SD)
(ET) // (UD)
(OT) // (US)
S ∈ (ET)

$\xrightarrow{Pa}$ DUES parallélogramme $\xrightarrow{L_p}$ DU=ST

$\xrightarrow{Pa}$ DUST parallélogramme $\xrightarrow{L_p}$ DU=ES

SE=ST $\xrightarrow{M_i}$ $\boxed{\text{S milieu de ET}}$

$\boxed{\text{Pa } L_p \ M_i \ / \ 6}$

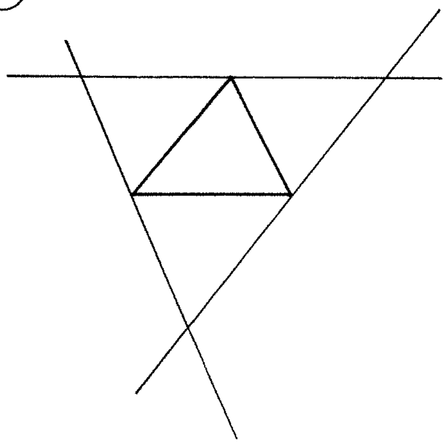
NB : 1) même démonstration pour U et D

2) en fait il manque une étape préliminaire. Par exemple:

(EO) // (SD) ; U ∈ (EO) → (EU) // (SD). On voit là tout le problème de l'écriture des hypothèses qui n'est pas un problème aussi simple qu'on veut bien le croire et qui est donc une première source de difficultés pour les élèves.

DISTANCES - MILIEUX

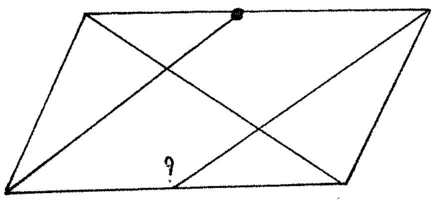
2



S U D est un triangle. On trace par S, U, D les parallèles respectivement à (UD), (SD), (US) qui se coupent (dans l'ordre) en E, O, T.

1) Démontre que S, U, D sont les milieux respectifs de [TE], [EO], [OT].
2) Trace les hauteurs [SH], [UK], [DL] du triangle S U D. Prouve que ces hauteurs sont les médiatrices du triangle T E O.
3) Que sais-tu des médiatrices d'un triangle ? Déduis-en un théorème à propos des hauteurs d'un triangle.

3



A B C D est un parallélogramme, M est le milieu de [AB], (MD) coupe (AC) en I et on trace la parallèle à (DM) qui passe par B: elle coupe (AC) en J et (DC) en P.

Il semble que AI = IJ = JC.

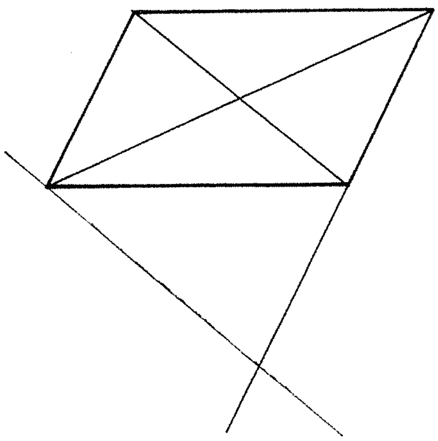
On veut le démontrer.

1) Démontre que I est le milieu de [AJ]
2) Démontre que P est le milieu de [DC]
3) Démontre que J est le milieu de [IC]
4) Déduis-en que : AI = IJ = JC.

<u>Une autre démonstration de</u>

$\boxed{P_4}$ Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales ont même milieu.

4



A B C D est un parallélogramme. Ses diagonales se coupent en I. On veut prouver que I est le milieu de chacune des diagonales. Pour cela on trace la parallèle à (AC) passant par D qui coupe (BC) en E.

1) Prouve que I est le milieu de [BD].
2) Comment prouver de même que I est le milieu de [AC] ? Enonce un théorème.

DISTANCES - MILIEUX

2) | (SH) ⊥ (UD)
 (FT) // (UD)
 S milieu de [ET] | $\xrightarrow{O_3}$ (SH) ⊥ (ET) $\xrightarrow{Me}$ | (SH) médiatrice de [ET] |

| O_3 Me / 2 |

N.B : 1) même démonstration pour (UK) et (DL)

2) ici encore il pourrait y avoir une déduction de plus :
[SH] hauteur de SUD —•— (SH) ⊥ (UD) ; cela dépend de la façon d'écrire l'hypothèse.

3) Les médiatrices de TEO sont concourantes. (Voir MEDIATRICE - Cercle).
Donc puisque ce sont les hauteurs de SUD, les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

3

1) | ABCD parallélogramme
 M milieu de [AB]
 (BP) // (DM) | $\xrightarrow{Th}$ | I milieu de [AJ] |

| Th / 1 |

3) | (BP) // (MD)
 P milieu de [DC] | $\xrightarrow{Th}$ | I milieu de [IC] |

| Th / 1 |

2) | ABCD parallélogramme
 M Milieu de [AB]
 (BP) // (DM)
 P ∈ (DC) |

$\xrightarrow{P_a}$ (MB) // (DP) $\xrightarrow{P_a}$ MBPD parallélogramme $\xrightarrow{L_p}$ DP=MB

$\xrightarrow{L_p}$ AB = DC

$\xrightarrow{M_i}$ MB = $\frac{AB}{2}$

—— DP = $\frac{DC}{2}$ $\xrightarrow{M_i}$ | P milieu de [DC] |

| P_a L_p M_i / 7 |

4) | I milieu de [AJ]
 J milieu de [IC] | $\xrightarrow{M_i}$ AI = IJ
 $\xrightarrow{M_i}$ IJ = JC | —— | AI = IJ = JC |

| M_i / 3 |

4

1) | ABCD parallélogramme
 (DE) // (AC) |

$\xrightarrow{P_a}$ (AD) // (CE) $\xrightarrow{P_a}$ ACED parallélogramme $\xrightarrow{L_p}$ AD=CE

$\xrightarrow{L_p}$ AD=BC

—— BC=CE (C ∈ (BE)) $\xrightarrow{M_i}$ | C milieu de [BE] |

| P_a L_p M_i / 6 |

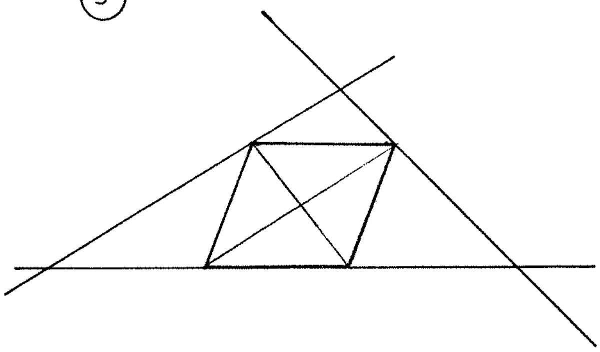
2) | C milieu de [BE]
 (DE) // (AC) | $\xrightarrow{Th}$ | I milieu de [BD] |

| Th / 1 |

Pour prouver que I est aussi le milieu de [AC] il suffit de mener par exemple de A la parallèle à (BD) qui coupe (CB) en F. La démonstration est alors analogue à la précédente.

DISTANCES - MILIEUX

5



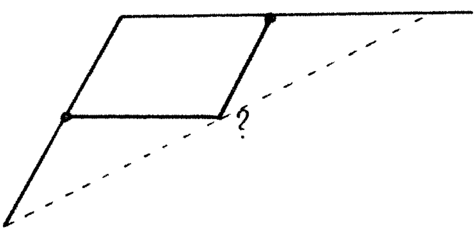
ABCD est un parallélogramme dont les diagonales se coupent en I. On trace la parallèle à (DB) passant par A : elle coupe (DC) en A'. On trace la parallèle à (AC) passant par B : elle coupe (DC) en B'.

(AA') et (BB') se coupent en O.

Comparer les longueurs OA et AA', OB et BB'.

A quelle condition peut-on avoir OA=OB ?

6



PANT est un parallélogramme.

T a pour symétrique L, par rapport à P, et S par rapport à N. On veut démontrer que A est alors le milieu de [LS].

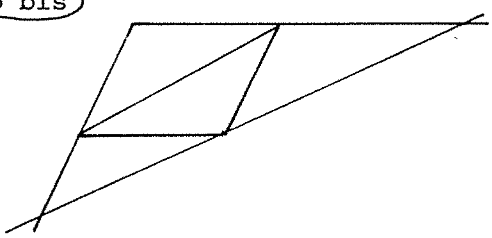
Soit I le milieu de [TA].

1) Démontre que P, I, N sont alignés.

2) Démontre que L, A, S sont alignés.

3) Démontre que A est le milieu de [LS].

6 bis



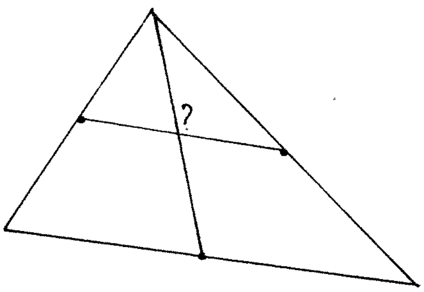
PANT est un parallélogramme.

On trace la parallèle à (PN) passant par A : elle coupe (TP) en L et (TN) en S.

A semble être le milieu de [LS].

Prouve-le.

7



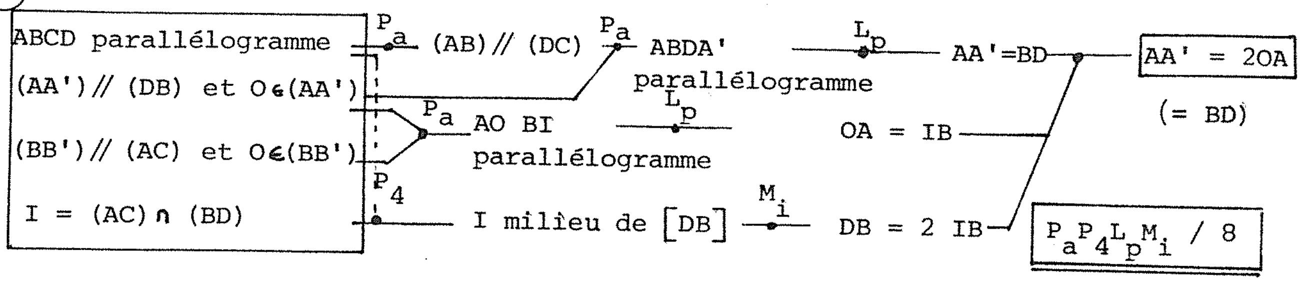
HLE est un triangle, I, B, R sont les milieux respectifs de [HL], [LE], [EH].

(HB) coupe (IR) en T.

1) Démontre que T est le milieu de [HB].

2) Démontre que T est le milieu de [IR].

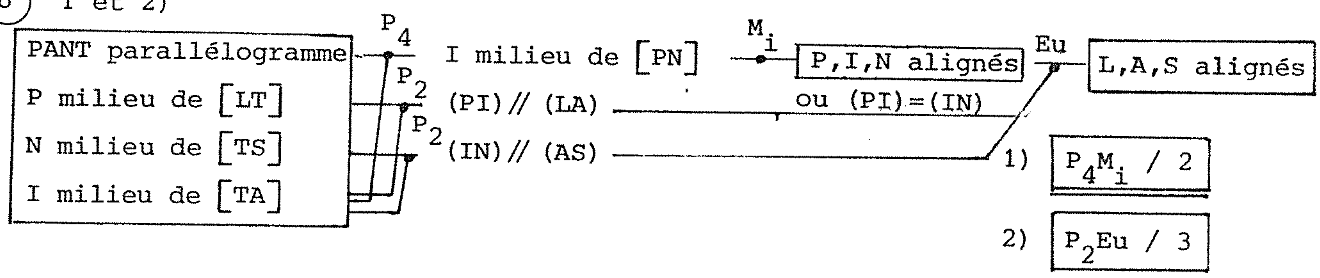
5



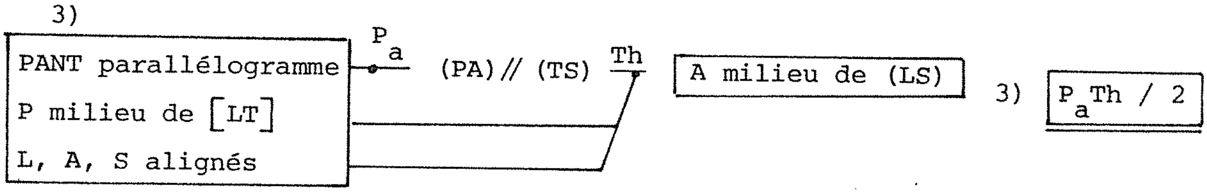
De même pour OB et BB'. Alors $OA = \frac{BD}{2}$ et $OB = \frac{AC}{2}$, donc OA = OB à condition que ABCD soit un rectangle.

NB: Il y a d'autres démonstrations (en troisième on pourrait utiliser Thalès) : Nous avons privilégié une démonstration faisant intervenir les énoncés nouveaux L_p, M_i et P_4.

6 1 et 2)

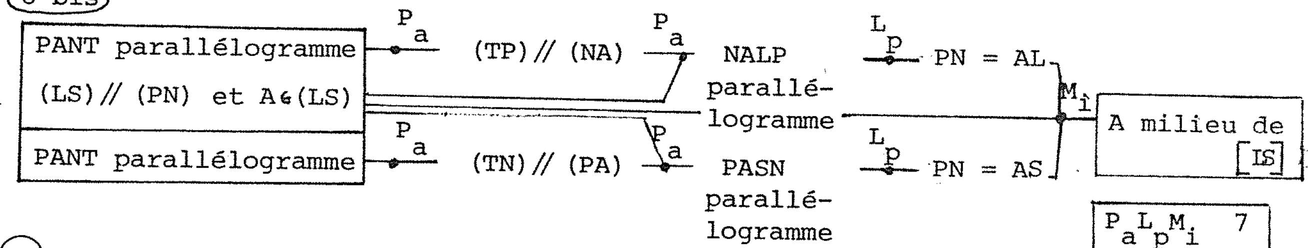


3)

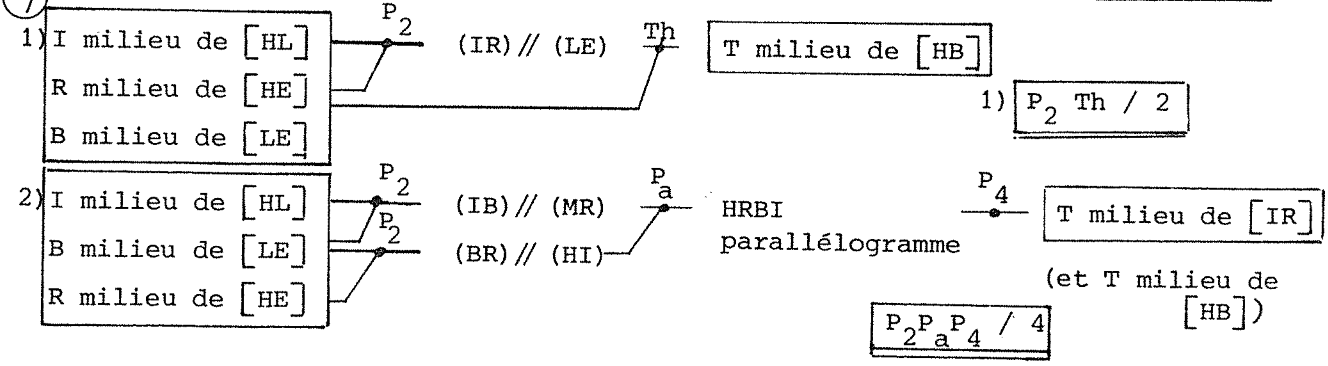


N.B: on peut faire 3) en utilisant uniquement $P_a L_p M_i$ on a alors $P_a L_p M_i$ / 7

6 bis



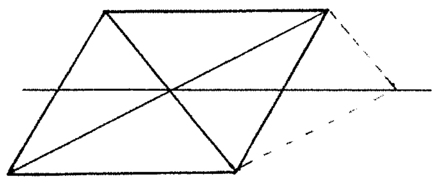
7



N.B: en ne séparant pas les questions, la démonstration de 1) devient inutile et 2) donne les deux résultats ensemble.

DISTANCES - MILIEUX

8



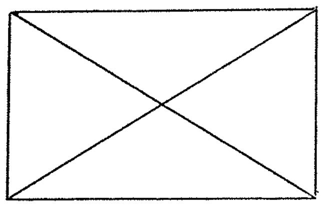
LNRV est un parallélogramme. Ses diagonales se coupent en M. La parallèle à (LN) passant par M coupe (LV) et (VR) en A et I respectivement.

1) Démontre que I est le milieu de [NR] et A celui de [LV]

2) Soit S le symétrique de M par rapport à I
Démontre que MNSR est un parallélogramme.

3) Démontre que LNSM est un parallélogramme.

9



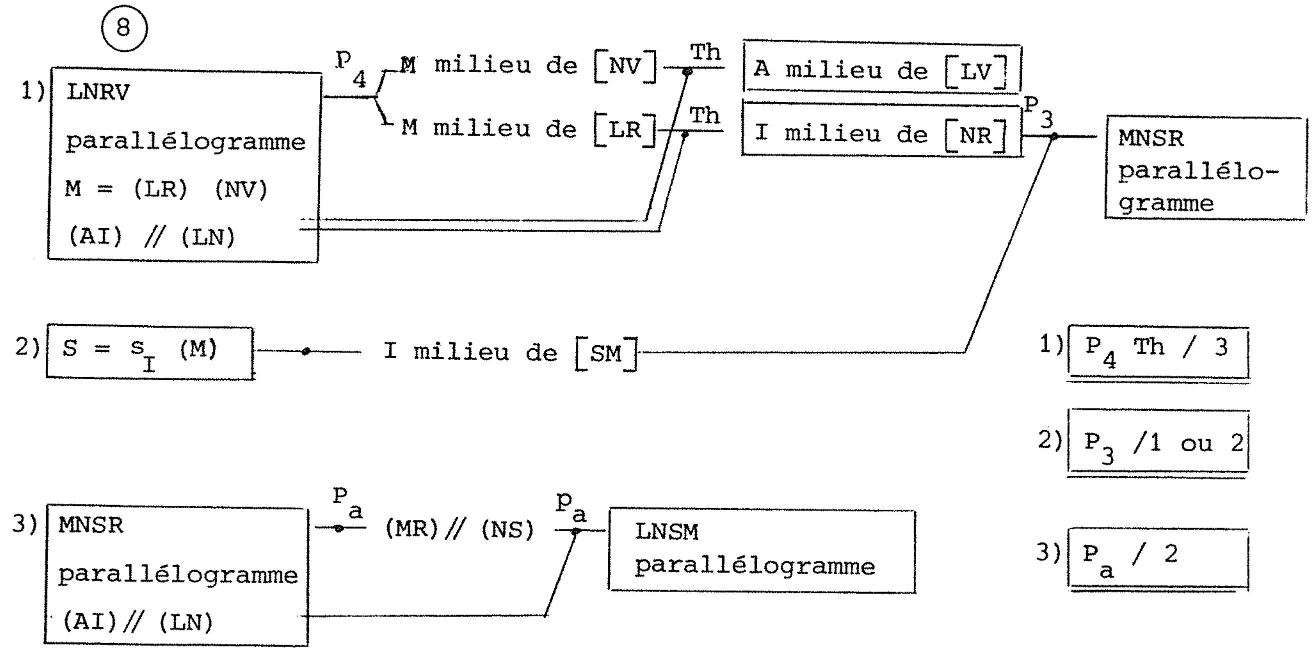
Démontre que dans un rectangle les diagonales ont même longueur.

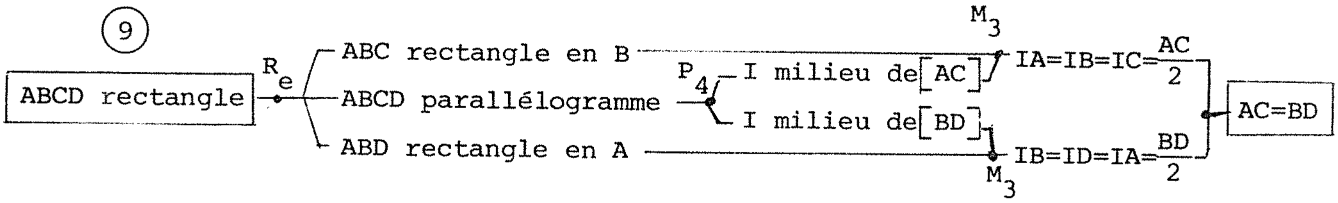
BILAN :

Deux fiches donc à compléter ou à constituer.

- Comment démontrer qu'un point est MILIEU d'un segment ?
- Comment démontrer que deux LONGUEURS sont EGALES ?

DISTANCES - MILIEUX





$\boxed{R_e \; P_4 \; M_3 \; / \; 5}$

N.B: Là encore se pose le problème du dénombrement des déductions mises en oeuvre.

Exemple de feuille de travail pour l'élève.

Distances et parallèles

Enoncé

Les côtés opposés d'un parallélogramme ont la même longueur

1. (ABCD) est un parallélogramme. La parallèle à (AC) passant par D coupe (BC) en K. Montrer que C est le milieu de [DK].

2. (ABC) est un triangle. Par chaque sommet on trace la parallèle au côté opposé. Montrer que A, B, C sont les milieux des côtés du nouveau triangle ainsi obtenu.

3. (ABCD) est un parallélogramme et I est le milieu de [AB] .
La droite (DI) coupe la droite (AC) en K. La parallèle à la droite (DI) passant par B coupe la droite (AC) en L et la droite (DC) en H.
a) Montrer que H est le milieu de [DC]
b) Montrer que K est le milieu de [AL]
c) Montrer que L est le milieu de [CK],
d) Montrer que AK = KL = LC.

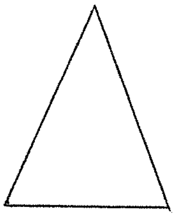
4. (ABCD) est un parallélogramme. Ses diagonales sont sécantes en I.
La parallèle à la droite (BD) passant par A coupe (DC) en A'.
La parallèle à la droite (AC) passant par B coupe (DC) en B'.
a) Montrer que D est milieu de [A'C] puis que I est milieu de [AC].
b) Montrer que C est milieu de [DB'] puis que I est milieu de [BD].

5. (ABC) est un triangle, B' est le milieu de [AC] et C' est le milieu de [AB]. Montrer que BC = 2B'C' (on pourra utiliser le milieu de [BC]).

6. (ABCD) est un parallélogramme. K, L, I sont les milieux respectifs de [AB] , de [DC] et de [AC] .
a) Démontrer que K, I, L sont alignés.
b) Démontrer que I est le milieu de [KL] en utilisant la propriété démontrée dans l'exercice 5 .
c) Démontrer que les droites (AL) et (CK) sont parallèles.

6 MEDIATRICE - Cercle

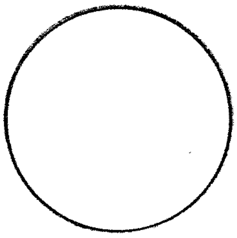
TRIANGLE ISOCELE



J'ai réussi à mettre
Un peu d'ordre en moi-même

J'ai tendance à me plaire

CERCLE I

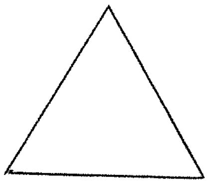


Tu es un frère,
On peut s'entendre

Fais moi pareil
Enferme-moi

Réchauffons-nous
Vivons ensemble
Et méditons

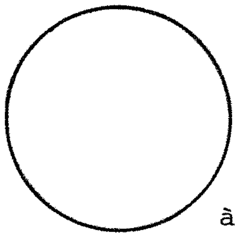
TRIANGLE EQUILATERAL



Je suis allé trop loin
Avec mon souci d'ordre

Rien ne peut plus venir

CERCLE II



à Jean Lescure

Toi, profondeur
Dans ta surface

Profondeur assise
Au seul niveau
De la surface

Et pas de fuite
Dans aucun volume.

Parfaitement plein
Dans ta profondeur

Dans l'immobile va et vient
Qui te nourrit

Profondeur en toi
De chacun des points
Pour les autres points qui te font le cercle
L'ennui
Vaincu.

EUCLIDIENNES
Guillevic

MEDIATRICE . Cercle

ENONCES

Me — Définition de la médiatrice

La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segemnt et qui passe par le milieu de ce segment.

M_1 — Propriété 1

Si un point est sur la médiatrice d'un segment alors il est à la même distance des extrémités de ce segment.

M_2 — Propriété 2

Si un point est à la même distance des extrémités d'un segment alors il est sur la médiatrice de ce segment.

Ce — Définition du cercle

Un cercle est l'ensemble de tous les points qui sont à la même distance d'un point fixe appelé centre : la distance s'appelle rayon.

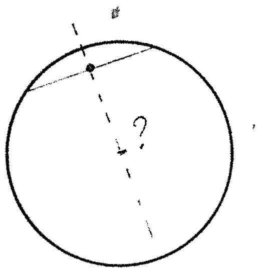
Is — Définition du triangle isocèle

Un triangle isocèle est un triangle qui a deux côtés de même longueur.

EXERCICES

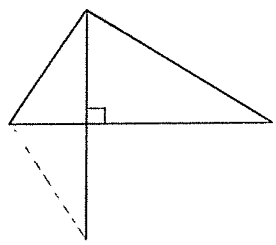
Texte possible

1



L et N sont deux points d'un cercle de centre O. Démontre que la médiatrice de la corde [NL] passe par O.

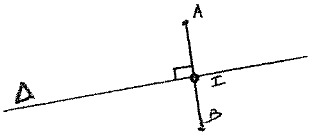
2



ABC est un triangle [AH] est la hauteur issue de A.
A' est le symétrique de A par rapport à H.
Que dire du triangle ABA' ? Démontre-le.

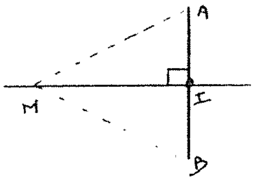
MEDIATRICE - Cercle

Me (connu des élèves)



Δ ⊥ (AB) I milieu de [AB] I ∈ Δ	$\underset{\longleftarrow}{\overset{Me}{\longrightarrow}}$	Δ médiatrice de [AB]

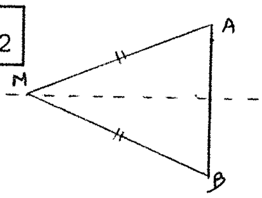
M_1



Δ médiatrice de [AB] M ∈ Δ	$\xrightarrow{M_1}$	MA = MB

(Connu en général)

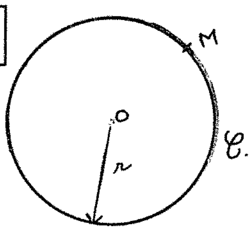
M_2



MA = MB	$\xrightarrow{M_2}$	M est sur la médiatrice de [AB] .

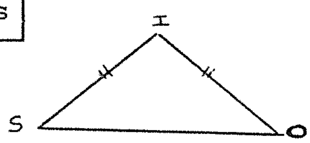
(connu en général mais pas sous cette forme)

Ce



𝒞 cercle de centre O et de rayon r M ∈ 𝒞.	$\underset{\longleftarrow}{\overset{Ce}{\longrightarrow}}$	OM = r

Is



ISO triangle isocèle de base [SO] ou de sommet principal I	$\underset{\longleftarrow}{\overset{Is}{\longrightarrow}}$	IS = IO

EXERCICES

Solutions

(1) L ∈ 𝒞 , N ∈ 𝒞 $\xrightarrow{Ce}$ ON = OL ; (ON = OL) et (d médiatrice de [NL]) $\xrightarrow{M_2}$ **O ∈ d**

Ce M_2 / 2

NB: en fait la première déduction pourrait se décomposer en trois :

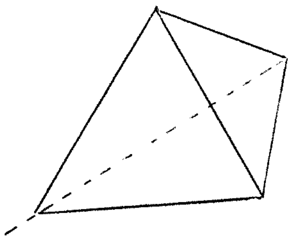
L ∈ 𝒞 $\xrightarrow{Ce}$ OL = rayon
N ∈ 𝒞 $\xrightarrow{Ce}$ ON = rayon
(OL = rayon) et (ON = rayon) $\longrightarrow$ OL = ON

(2) (AH) ⊥ (BC), H milieu de [AA'], H ∈ (BC) $\xrightarrow{Me}$ (BC) médiatrice de [AA'] $\xrightarrow{M_1}$ BA = BA' $\xrightarrow{Is}$ **A'BA isocèle**

Me M_1 I_s / 3

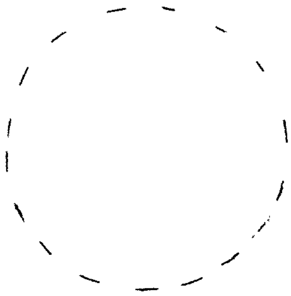
MEDIATRICE - Cercle

3



C E R F est un quadrilatère tel que CE = CF et RE = RF. I est le milieu de [EF].
Que dire des trois points R, I, C ?
Démontre-le.

4

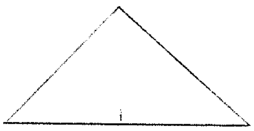


Soit A et B deux points distincts.
Peux-tu tracer un cercle passant par A et B ?
Plusieurs ? Où sont leurs centres ?
Prouve-le.

5

Démontre que dans un triangle isocèle, la médiatrice de la base est aussi hauteur et médiane.

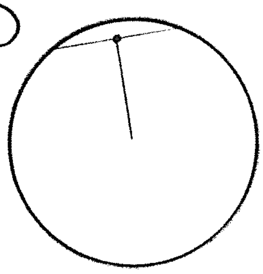
6



I S O est un triangle isocèle tel que IS = IO et M est le milieu de [OS].
Comment appelle-t-on (IM)? Démontre que (IM) est perpendiculaire à (OS).
Enonce un théorème.

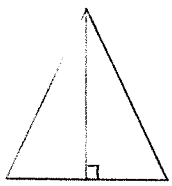
$\boxed{\text{Is 1}}$. <u>THEOREME</u> : dans un triangle isocèle la médiane principale est aussi une hauteur. (connu).

6 bis



Soit A et E deux points d'un cercle de centre L. Soit I le milieu de la corde [AE].
Démontre que (LI) est perpendiculaire à (AE).

7



G O A est un triangle isocèle tel que OA = OG. L est la projection orthogonale de O sur [AG].
Démontre que (OL) est la médiatrice de [AG].
(Tu pourras appeler d cette médiatrice).

Enonce un théorème :

$\boxed{\text{Is 2}}$. <u>THEOREME</u> : dans un triangle isocèle la hauteur principale est la médiatrice de la base : elle passe donc par le milieu de la base.

3

CE = CF
RE = RF
I milieu de [EF]

$\xrightarrow{M_2}$ C ∈ médiatrice de [EF]
$\xrightarrow{M_2}$ R ∈ médiatrice de [EF]
$\xrightarrow{Me}$ I ∈ médiatrice de [EF]

→ C, I, R alignés

$\boxed{M_2\ Me\ /\ 4}$

N.B. On peut simplifier ($\boxed{M_2/3}$) en demandant : prouve que (CR) est la médiatrice de [EF].

4

A ∈ $\mathscr{C}$, B ∈ $\mathscr{C}$
O centre de $\mathscr{C}$

$\xrightarrow{Ce}$ OA = OB $\xrightarrow{M_2}$ O ∈ médiatrice de [AB]

$\boxed{Ce\ M_2/2}$

Donc tous les centres sont sur la médiatrice de [AB].

5

AB = AC
d médiatrice de [BC]

$\xrightarrow{M_2}$ A ∈ médiatrice de [BC] — A ∈ d — d médiane
$\xrightarrow{Me}$ I milieu de [BC] ∈ d.
d ⊥ (BC) — d hauteur

$\boxed{M_2Me\ /3}$

$\boxed{M_2Me\ /3}$

N.B. Il pourrait y avoir une déduction de plus (Is) si l'on n'avait pas traduit directement l'hypothèsé triangle isocèle par AB = AC.

6

IS = IO
M milieu de [OS]

$\xrightarrow{M_2}$ I ∈ médiatrice de [OS]
$\xrightarrow{Me}$ M ∈ médiatrice de [OS]

$\xrightarrow{X}$ (IM) médiatr. de [OS] $\xrightarrow{Me}$ (IM) ⊥ (OS)

$\boxed{M_2Me\ /\ 4}$

N.B. en X on utilise l'axiome non énoncé et souvent utilisé implicitement : par deux points il passe une seule droite.

6 bis On se ramène à 6 avec une déduction (Ce)

7

OA = OG
(OL) ⊥ (AG)
d médiatrice de [AG]

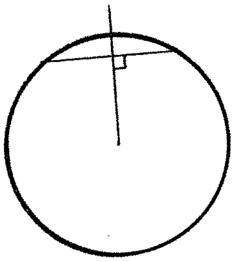
$\xrightarrow{M_2}$ O ∈ d.
$\xrightarrow{Me}$ d ⊥ (AG)

$\xrightarrow{O_1}$ d = (OL)

$\boxed{M_2Me\ O_1/3}$

MEDIATRICE - Cercle

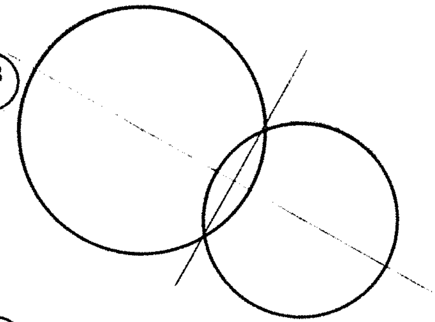
7 bis



A et B sont deux points d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. La perpendiculaire à (AB) passant par O coupe (AB) en H.

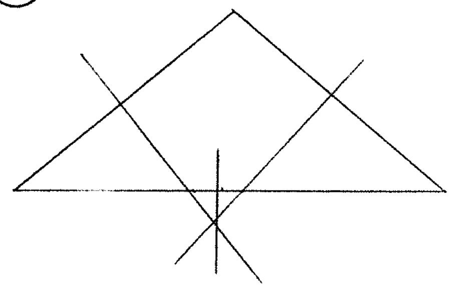
Prouve que H est le milieu de [AB].

8



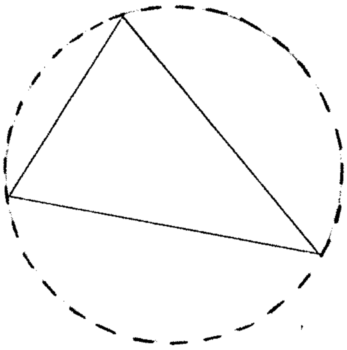
Deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de centres O et P se coupent en A et N.
Démontre que (AN) est perpendiculaire à (OP).

9



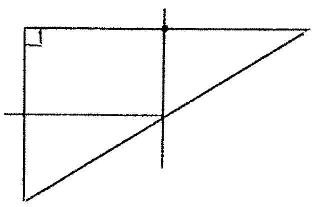
Démontre que dans un triangle les médiatrices des trois côtés passent par un même point.
(Indication: on appelle O le point d'intersection de deux médiatrices d_1 et d_2 et on prouve que O est sur la troisième d_3).

10



Soit ABC un triangle quelconque.
Prouve qu'il existe un cercle passant par A, B et C et trouve où est son centre O.

11



O S E est un triangle rectangle en E.
Par I milieu de [OE] on mène la parallèle à (ES) qui coupe (OS) en N.
Puis par N on mène la parallèle à (OE) qui coupe (ES) en U.

Démontre que O, E, S sont sur un même cercle de centre N et énonce un théorème.

MEDIATRICE - Cercle

(7 bis) On se ramène à (7) avec une déduction (Ce) ou alors on utilise directement Is_2 à la suite de Ce :

$\boxed{A \in \mathcal{C}, B \in \mathcal{C}. \quad (OH) \perp (AB)}$ $\xrightarrow{Ce}$ OA = OB $\xrightarrow{Is_2}$ $\boxed{M \text{ milieu de } [AB]}$

$\boxed{Ce\ M_2\ /\ 2}$

N.B. en fait il y a en "toute rigueur" une déduction de plus c'est : OA = OB $\xrightarrow{Is}$ O A B isocèle.

(8) $\boxed{A \in \mathcal{C}_1,\ N \in \mathcal{C}_1 \quad A \in \mathcal{C}_2\ \ N \in \mathcal{C}_2}$ $\xrightarrow{Ce}$ OA=ON $\xrightarrow{M_2}$ O médiatrice de [AN] ; $\xrightarrow{Ce}$ PA=PN $\xrightarrow{M_2}$ P médiatrice de [AN] $\xrightarrow{X}$ OP médiatrice $\xrightarrow{M_e}$ (OP) (AN) de [PN].

$\boxed{Ce\ M_2\ Me\ /\ 6}$

N.B. 1) en X on utilise l'axiome non énoncé et souvent utilisé implicitement : par deux points il passe une seule droite.

2) On peut faciliter le travail en demandant de démontrer que (OP) est la médiatrice de (AN).

3) On peut enrichir en posant la question : (AN) peut-elle être la médiatrice de [OP] ?

(9) $\boxed{\begin{array}{l} d_3 \text{ médiatrice de } [BC] \\ d_2 \text{ médiatrice de } [AC] \\ d_1 \text{ médiatrice de } [AB] \\ O = d_1 \cap d_2. \end{array}}$ $\xrightarrow{M_1}$ OA = OC ; $\xrightarrow{M_1}$ OA = OB — OC = OB $\xrightarrow{M_2}$ O $\in d_3$ — $\boxed{O = d_1 \cap d_2 \cap d_3}$

$\boxed{M_1\ M_2\ /\ 5}$

(10) Un travail heuristique montre que si le cercle existe alors nécessairement OA = OB = OC et donc O se trouve sur la médiatrice de [AB], de [AC] , de [BC] d'où l'on est ramené à (9) .

(11) 1) $\boxed{\begin{array}{l} (OE) \perp (ES) \\ I \text{ milieu de } [OE] \\ (IN)\ //\ (ES) \\ (UN)\ //\ (EO) \end{array}}$ $\xrightarrow{O_3}$ (IN) $\perp$ (OE) $\xrightarrow{Me}$ $\boxed{(NI) \text{ médiatrice de } (EO)}$

$\boxed{O_3\ Me\ /\ 2}$

2) $\boxed{\begin{array}{l} (OE) \perp (ES) \\ I \text{ milieu de } [OE] \\ (IN)\ //\ (ES) \\ (UN)\ //\ (EO) \end{array}}$ $\xrightarrow{O_3}$ (UN) $\perp$ (ES) ; $\xrightarrow{Th}$ N milieu de [OS] $\xrightarrow{Th}$ U milieu de [ES] $\xrightarrow{Me}$ $\boxed{(NU) \text{ médiatrice de } [ES]}$

$\boxed{O_3\ Th\ Me\ /\ 4}$

MEDIATRICE - Cercle

Si tu ne trouves pas utilise les étapes suivantes :

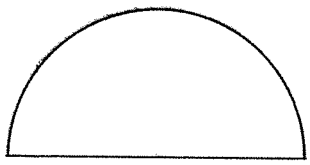
1) démontre que (NI) est la médiatrice de [EO].
2) démontre que (NO) est la médiatrice de [ES].
3) déduis-en le résultat.

ENONCE

M_3 Triangle rectangle et demi-cercle

Si un triangle est rectangle, il est inscrit dans un demi-cercle ayant pour centre le milieu de l'hypoténuse.

(12)

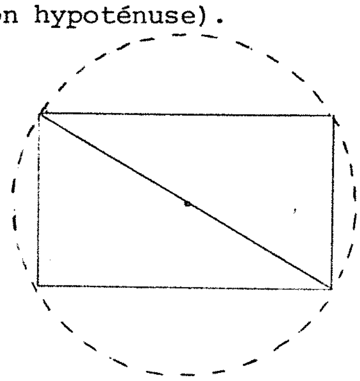


Soit un cercle de diamètre [AB] et de centre O, et M un point de .
Que penses-tu du triangle AMB ?
Prouve le en plaçant sur la figure le point I milieu de [AM].
(Indication : prouve que (OI) est la médiatrice de [AM] et qu'elle est parallèle à (MB)).
Enonce un théorème.

M_4 Demi cercle et triangle rectangle.

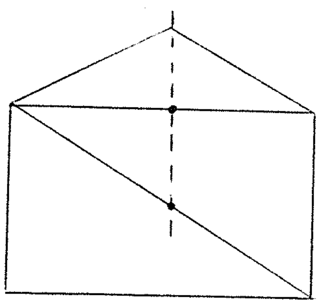
Si un triangle est inscrit dans un cercle et a pour côté un diamètre de ce cercle, alors ce triangle est rectangle (et le diamètre est son hypoténuse).

(13)



ABCD est un rectangle et O est le milieu de [AC]. Démontre que A, B, C, D sont sur un même cercle de centre O.

(14)



LICE est un rectangle et ALE un triangle isocèle de sommet principal A.
Soit M le milieu de [LE] et X le milieu de [LC] .

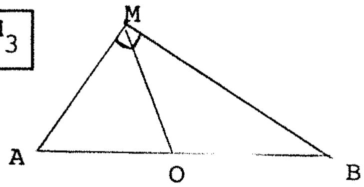
Que dire de A, M, X ? Prouve-le.

3) (NI) médiatrice de [EO] $\xrightarrow{M_1}$ NO = NE
(NU) médiatrice de [ES] $\xrightarrow{M_1}$ NE = NS
→ NO = NE = NS ou E, O, S sur $\mathscr{C}$(N, OS)

M_1 / 3

NB: On peut varier les énoncés : par exemple se contenter de I milieu de [OE] et N milieu de [OS].

M_3



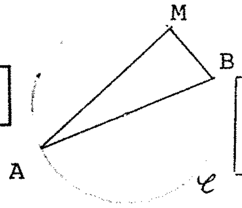
AMB triangle rectangle en M
O milieu de [AB].
$\xrightarrow{M_3}$ OA = OM = OB

12) M ∈ $\mathscr{C}$
I milieu de [AM]
O milieu de [AB]

$\xrightarrow{Ce}$ OA=OM $\xrightarrow{M_2}$ O ∈ médiat. de [AM]
$\xrightarrow{Me}$ I ∈ médiat. de [AM]
→ (OI) médiatrice de [AM] $\xrightarrow{M_e}$ (OI) ⊥ (AM).
$\xrightarrow{P_2}$ (OI) // (MB)
(OI) ⊥ (AM), (OI) // (MB) $\xrightarrow{O_3}$ (AM) ⊥ (MB)

Ce Me M_2 P_2 O_3 / 7

M_4



[AB] diamètre de $\mathscr{C}$
M ∈ $\mathscr{C}$.
$\xrightarrow{M_4}$ AMB triangle rectangle en M

NB : M_4 est le théorème réciproque de M_3

13) ABCD rectangle
O milieu de [AC]

$\xrightarrow{Re}$ ABC rectangle en B $\xrightarrow{M_3}$ A,B,C sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre O diam. [AC]
ADC rectangle en D $\xrightarrow{M_3}$ A,D,C sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre O diam. [AC]
→ A,B,C,D ∈ $\mathscr{C}$.

Re M_3 / 4

14) LICE rectangle
AL = AE
M milieu de [LE]
X milieu de [LC]

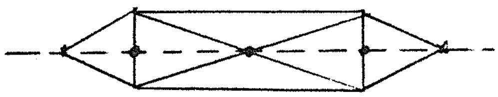
$\xrightarrow{Re}$ (LE) ⊥ (EC) $\xrightarrow{M_3}$ LX=XE=XL $\xrightarrow{M_1}$ X ∈ médiatrice de [LE]
$\xrightarrow{M_1}$ A ∈ médiat. de [LE]
$\xrightarrow{Me}$ M ∈ médiat. de [LE]
→ A,M,X alignés

Re Me M_1 M_3 / 6

N.B. on peut remplacer $\xrightarrow{M_3}$ + $\xrightarrow{M_1}$ par P_2 + O_3 .

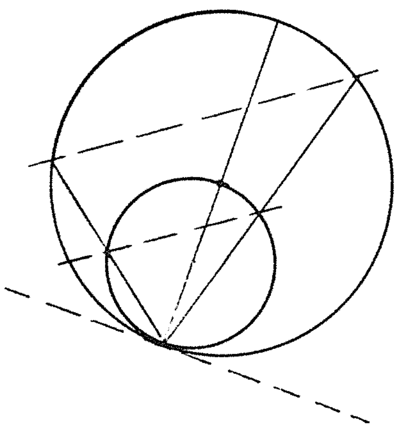
MEDIATRICE - Cercle

14 bis



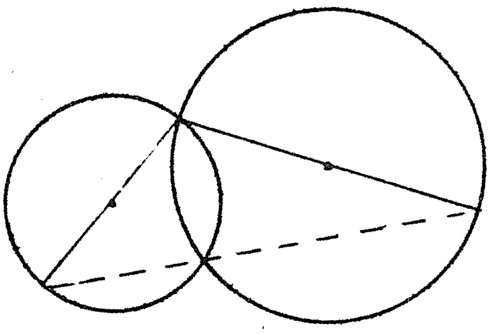
LAUS est un rectangle dont les diagonales se coupent en G. M et I sont les milieux de [AU] et [LS].
AFU et SEL sont deux triangles isocèles de bases [AU] et [SL].
Que dire de F, M, G, I, E ?
Prouve-le.

15



$\mathscr{C}$ est un cercle de centre O et [AB] un diamètre de $\mathscr{C}$. $\mathscr{C}'$ est le cercle de diamètre [OA] et I est un point de $\mathscr{C}$. La droite (AI) coupe $\mathscr{C}'$ en I'
1) Démontre que I' est le milieu de [AI].
2) Soit J un autre point de $\mathscr{C}$ et J' le point d'intersection de (AJ) et de $\mathscr{C}'$.
Démontre que (I'J') est parallèle à (IJ).
3) d est la tangente en A à $\mathscr{C}$.
Démontre que d est aussi la tangente en A à $\mathscr{C}'$.
(On dit alors que les cercles sont tangents en A.)

16



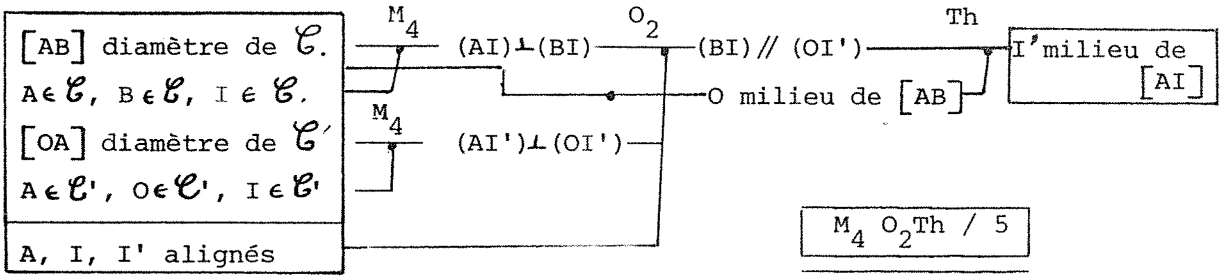
$\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont deux cercles de centres O et O' qui se coupent en A et B.
(BO) recoupe $\mathscr{C}$ en R, (BO') recoupe $\mathscr{C}'$ en T.
Les points R, A, T semblent alignés.
Vrai ou faux ? Prouve-le.

MEDIATRICE . Cercle

14 bis se ramène à 14

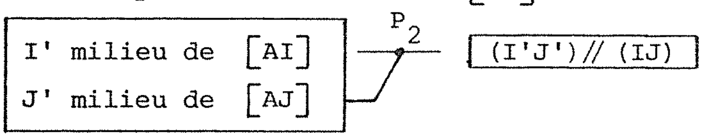
15

1)



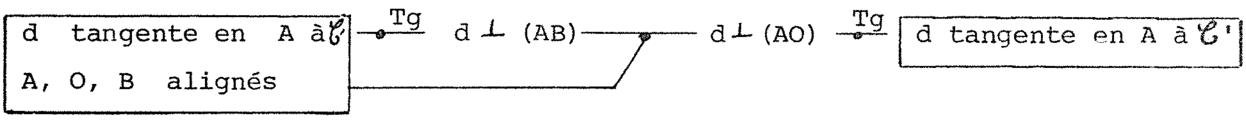
M_4 O_2Th / 5

2) De même pour J' milieu de [AJ]



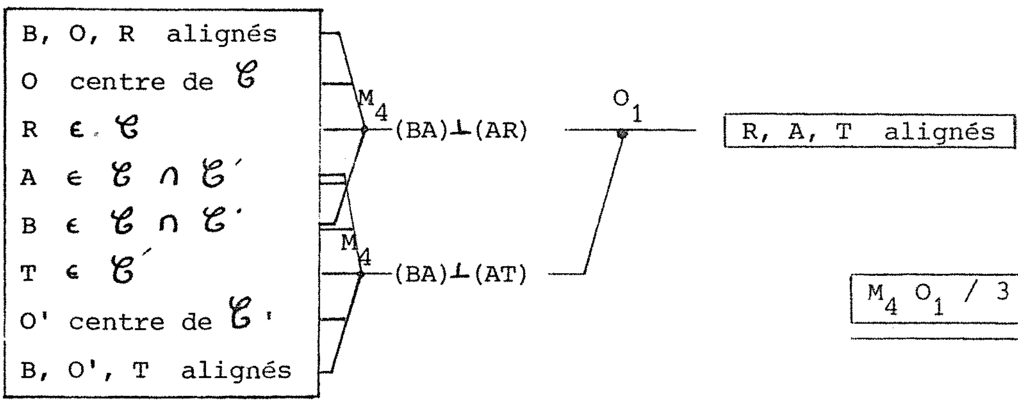
P_2 / 1

3)



Tg / 3

16



M_4 O_1 / 3

N.B: Une des difficultés ici est l'écriture des hypothèses et leur prise en compte pour l'utilisation de M_4. Donc le nombre peu élevé de déductions cache en fait un travail heuristique complexe.

MEDIATRICE - Cercle

BILAN

(1) Statut des énoncés.

Les propriétés M_1 et M_2 sont "intuitivement" évidentes : pliage, symétries orthogonales. Elles peuvent se déduire du théorème de Pythagore.

On peut remarquer que cette propriété (M_1 et sa réciproque M_2) est le seul axiome qui s'ajoute dans ce chapitre, tout le reste n'étant que définitions.

(2) Fiches élève.

De nouvelles questions se sont posées à nous :

- comment démontrer qu'une droite est médiatrice d'un segment ?
- comment démontrer qu'un point est sur la médiatrice d'un segment ?
- comment démontrer que des points sont sur un même cercle ?
- comment démontrer que trois droites sont concourantes ?

Nous ferons donc essentiellement deux fiches :

1) MEDIATRICE avec deux méthodes.

méthode 1 : en sachant que la droite
- passe par le milieu du segment.
- est perpendiculaire au segment.

méthode 2 : en sachant que la droite passe par deux points chacun d'eux étant équidistant des extrémités du segment.

Plus : comment démontrer qu'un point est sur la médiatrice d'un segment ?

méthode: en sachant qu'il est à la même distance des extrémités du segment.

2) CERCLE

méthode 1 : des points sont sur un cercle s'ils sont à la même distance d'un point fixe.

méthode 2 : s'ils forment un triangle rectangle.

Nous compléterons les fiches; points alignés (si des points sont sur une même droite, une médiatrice par exemple), la fiche ; perpendiculaires (si une droite est une médiatrice d'un segment de l'autre, triangle et demi-cercle).....

Exemple de feuille de travail pour l'élève

MEDIATRICE D'UN SEGMENT

Enoncés

1) Définition de la médiatrice

La médiatrice d'un segment est la droite qui est perpendiculaire à ce segment et qui passe par le milieu de ce segment.

2) Propriété de la médiatrice

Un point est sur la médiatrice d'un segment si et seulement si il est à même distance des extrémités de ce segment.

1 A et B sont 2 points d'un cercle de centre O. I est le milieu de [AB]
Montrer que (OI) et (AB) sont perpendiculaires.

2 Deux cercles sont sécants en A et B. Leurs centres sont I et J.
Montrer que (IJ) et (AB) sont perpendiculaires.

3 (ABC) est un triangle quelconque. H est le pied de sa hauteur issue de A. A' est le symétrique de A par rapport à H.
Montrer que les triangles (ABA') et (ACA') sont isocèles.

4 Un quadrilatère a 4 côtés de même longueur. Montrer que c'est un parallélogramme et que ses diagonales sont perpendiculaires.

5 Un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires.
Montrer que ses 4 côtés ont la même longueur.

6 (ABC) est un triangle quelconque. Les médiatrices de [AB] et de [AC] sont sécantes en O. Montrer que O est la même distance de A, B et C.

7 (ABCD) est un rectangle dont les diagonales sont sécantes en O.
I est le milieu de [AB]. Montrer que (OI) est la médiatrice de [AB].
En déduire que les diagonales de (ABCD) ont la même longueur.

8 Montrer que, si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur, c'est un rectangle (on pourra utiliser le milieu d'un côté).

9 Un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur.
Montrer que ses diagonales sont perpendiculaires.

MEDIATRICE D'UN SEGMENT (suite)

(10) Deux cercles de centre O_1 et O_2 sont sécants en A et B.
$[AM_1]$ et $[AM_2]$ sont des diamètres respectifs de ces deux cercles

1) $(O_1 O_2)$ est-elle la médiatrice de $[AB]$?
2) Montrer que B, M_1, M_2 sont alignés.
3) Montrer que (AB) et $(M_1 M_2)$ sont perpendiculaires.

(11) $[AB]$ est un diamètre d'un cercle de centre O et M est un point de ce cercle. I est le milieu de $[AM]$.

1) Montrer que (OI) est la médiatrice de $[AM]$.
2) En déduire que le triangle (AMB) est rectangle.

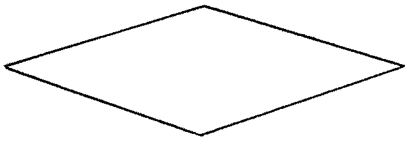
(12) Montrer que dans un triangle rectangle, le milieu de l'hypoténuse est à égale distance des 3 sommets. 5On pourra utiliser le milieu d'un côté de l'angle droit).

(13) (ABC) est un triangle isocèle en A. Montrer que la hauteur issue de A et la médiatrice de $[BC]$ sont confondues.

(14) Montrer que si une hauteur et une médiatrice d'un triangle sont confondues ce triangle est isocèle.

7 MEDIATRICE - Losange

LOSANGE



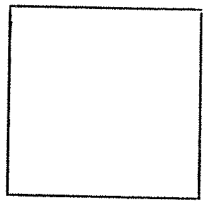
Un carré fatigué
Qui s'est laissé tirer

Par ses deux angles préférés,
Lourds des secrets.

Losange maintenant,
Il n'en finira plus
De comparer ses angles.

- S'il allait regretter
L'ancienne préférence ?

CARRE



Chacun de tes côtés
S'admire dans les autres.

Où va sa préférence ?
Vers celui qui le touche
Ou vers celui d'en face ?

Mais j'oubliais les angles
Où le dehors s'irrite

Au point de t'enlever
Les doutes qui renaissent.

GUILLEVIC

Euclidiennes.

MEDIATRICE - Losange

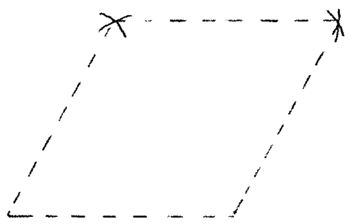
ENONCE

$\boxed{\text{Lo}}$ Définition du losange.

Un losange est un quadrilatère dont tous les côtés sont de même longueur.

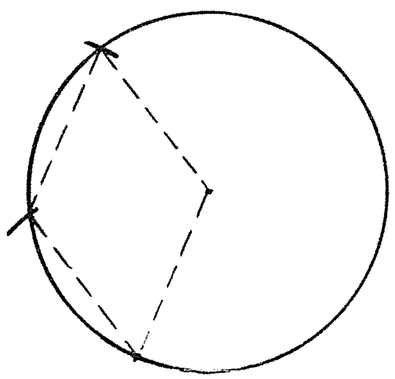
EXERCICES | **Texte possible**

1



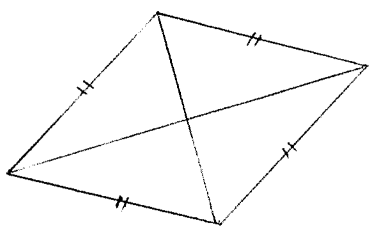
Soit [AB] un segment de 3 cm de longueur. En prenant A pour centre on trace un arc de cercle de 3 cm de rayon qui coupe un arc de de cercle de même rayon, mais de centre B, en un point C. On fait de même en prenant pour centres C et A. On obtient ainsi un point D.
Que dire de ABCD ? Prouve-le.

2



Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et A un point de ce cercle. On place sur $\mathcal{C}$ les points L et S tels que AL = LS = rayon du cercle. ($S \neq A$).
On construit ainsi le quadrilatère LAOS.
Quelle est sa nature ?

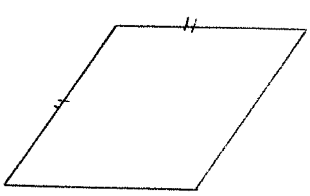
3



Démontre que les diagonales du losange
1) sont perpendiculaires
2) ont même milieu.

Déduis-en qu'un losange est un parallélogramme.

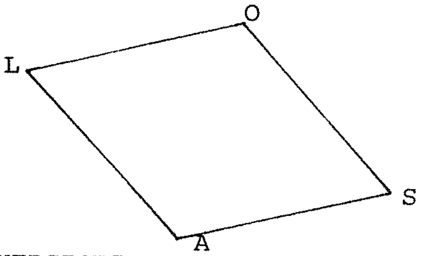
4



Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur, c'est un losange. Vrai ou faux ?
Prouve-le.

ENONCE

Lo (connu des élèves)



$\boxed{\text{LOSA losange}} \underset{\longleftarrow}{\overset{\text{LO}}{\longrightarrow}} \boxed{\text{LO = OS = SA = AL}}$

EXERCICES

Solutions

1. $\boxed{\begin{array}{l} AB = 3 \\ AC = 3 \\ BC = 3 \\ CD = 3 \\ AD = 3 \end{array}}$ — AB = BC = CD = AD $\xrightarrow{\text{Lo}}$ $\boxed{\text{ABCD losange}}$

$\boxed{\text{Lo / 2}}$

N.B. une difficulté consiste à bien écrire les hypothèses. On remarque aussi une hypothèse superflue, d'où la la possibilité de concevoir d'autres constructions.

2. $\boxed{\begin{array}{l} \mathscr{C} \text{ cercle de centre O} \\ \text{A appartient à } \mathscr{C} \\ \text{L et S appartiennent à } \mathscr{C} \\ \text{AL = LS = rayon de } \mathscr{C} \\ \quad = r \end{array}}$

$\xrightarrow{\text{Ce}}$ OA = r
$\xrightarrow{\text{Ce}}$ OS = r

— OA = OS = AL = LS $\xrightarrow{\text{Lo}}$ $\boxed{\text{LAOS losange}}$

$\boxed{\text{Ce Lo / 4}}$

N.B. en séparant bien $L \in \mathscr{C}$ et $S \in \mathscr{C}$ on constate que $L \in \mathscr{C}$ est superflue

3. $\boxed{\text{ABCD losange}} \xrightarrow{\text{Lo}}$

- AB=BC $\xrightarrow{M_2}$ B sur média.de [AC]
- BC=CD $\xrightarrow{M_2}$ C sur média.de [BD]
- CD=DA $\xrightarrow{M_2}$ D sur média.de [AC]
- DA=AB $\xrightarrow{M_2}$ A sur média.de [BD]

— (BD) média.de [AC] $\xrightarrow{\text{Me}}$ $\boxed{(BD) \perp (AC)}$
(BD) ∩ (AC) = milieu de [AC] (1)

— (AC) média.de [BD] $\xrightarrow{\text{Me}}$ (AC) ∩ (BD) = milieu de [BD] (2)

(1)
(2) — $\boxed{\text{milieu de [AC] = milieu de [BD]}} \xrightarrow{P_3} \boxed{\text{ABCD parallélogramme}}$

1) $\boxed{\text{LO } M_2 \text{ Me/5}}$ 2) $\boxed{\text{LO } M_2 \text{ Me/7}}$ 3) $\boxed{P_3 \text{ / 1}}$

4. $\boxed{\begin{array}{l} \text{ABCD parallélogramme} \\ \text{AB = AD} \end{array}}$ $\xrightarrow{\text{Lp}}$ AB = CD
AD = BC

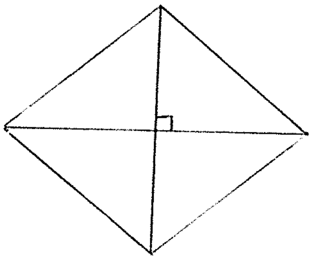
— AB = CD = AD = BC $\xrightarrow{\text{Lo}}$ $\boxed{\text{ABCD losange}}$

$\boxed{\text{Lp Lo / 3}}$

N.B. pour l'énoncé Lp. voir MILIEUX-DISTANCES

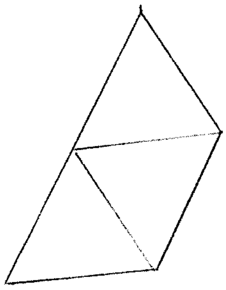
MEDIATRICE - Losange

(5)



Si dans un parallélogramme les diagonales sont perpendiculaires alors c'est un losange. Vrai ou faux ?
Prouve-le.

(6)



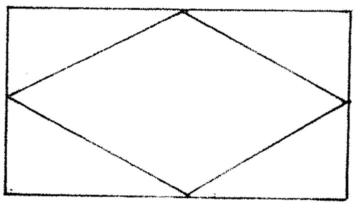
OAB, OBC, OCD sont trois triangles équilatéraux.

1) Démontre que OABC et OBCD sont des losanges.

2) Que dire de A, O, D ? Prouve-le.

3) Démontre que O est le milieu de [AD].

(7)



LISE est un rectangle. N,O,R,D sont les milieux respectifs de [LI], [IS], [SE], [EL].
Quelle est la nature de NORD ? Prouve-le

5 ABCD parallélogramme
(BD) ⊥ (AC)
I = (BD)∩(AC)

$\xrightarrow{P_4}$ I milieu de [AC] $\xrightarrow{Me}$ (BD) média. de [AC] $\xrightarrow{M_1}$ BA=BC, DA=DC

I milieu de [BD] $\xrightarrow{Me}$ (AC) média. de [BD] $\xrightarrow{M_1}$ AB=AD, CB=CD → (1)

(1) — AB = BC = CD = DA $\xrightarrow{Lo}$ $\boxed{\text{A B C D losange}}$

$\boxed{P_4 \text{ Me } M_1\text{Lo / 7}}$

6 1) OA = OB = AB
OB = OC = CB
OC = OD = DC

→ OA = OB = OC = CB $\xrightarrow{Lo}$ $\boxed{\text{O A B C losange}}$

→ OB = BC = CD = OD $\xrightarrow{Lo}$ $\boxed{\text{O B C D losange}}$

$\boxed{\text{Lo / 2 ou 3}}$

N.B : 3 déductions si l'on écrit l'hypothèse sous la forme triangle équilatéral.

2) OABC losange $\xrightarrow{3}$ OABC parallélogramme $\xrightarrow{Pa}$ (OA) // (BC)

OBCD losange $\xrightarrow{3}$ OBCD parallélogramme $\xrightarrow{Pa}$ (OD) // (BC)

$\xrightarrow{Eu}$ $\boxed{\text{O,A,D alignés}}$

$\boxed{\text{3 Pa Eu / 5}}$

3) O, A, D alignés
OA = OB = AB
OB = OC = CB
OC = OD = DC

→ OA = OD $\xrightarrow{M_i}$ $\boxed{\text{O milieu de [AD]}}$

$\boxed{M_i \text{ / 2}}$

NB: pour l'énoncé M_i voir MILIEUX-DISTANCES

7 LISE rectangle
N milieu de [LI]
O milieu de [IS]
R milieu de [ES]
D milieu de [EL]

$\xrightarrow{(a)}$ LS = EI

$\xrightarrow{(b)}$ NO = $\frac{1}{2}$ LS

$\xrightarrow{(b)}$ ND = $\frac{1}{2}$ EI

$\xrightarrow{(b)}$ OR = $\frac{1}{2}$ EI

$\xrightarrow{(b)}$ DR = $\frac{1}{2}$ LS

→ NO = DR = $\frac{1}{2}$ LS

→ ND = OR = $\frac{1}{2}$ EI

→ NO = DR =ND =OR $\xrightarrow{Lo}$ $\boxed{\text{NORD losange}}$

$\boxed{\text{a, b, Lo /9}}$

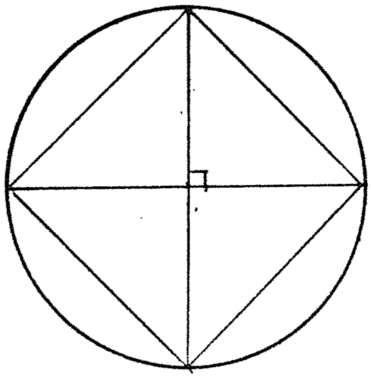
N.B1)il y a beaucoup de démonstrations possibles pouvant réutiliser des exercices précédents (par exemple 5 PARALLELOGRAMME), et beaucoup de déductions c'est donc un exercice difficile. Nous avons choisi d'utiliser peu d'énoncés (3) :

(a) très connu des élèves et pour (b) voir MILIEUX DISTANCES.

2) On peut enrichir l'exercice en demandant si LISE rectangle est nécessaire.

MEDIATRICE - Losange

8



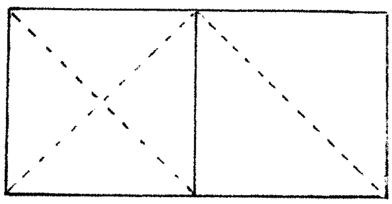
Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et [AB] et [PQ] deux diamètres perpendiculaires.

Quelle est la nature de AQBP ?

Enonce les propriétés du carré.

Donne toutes les méthodes pour prouver qu'un quadrilatère est un carré. (Fais une figure pour chacune pour voir si tes hypothèses sont suffisantes).

9

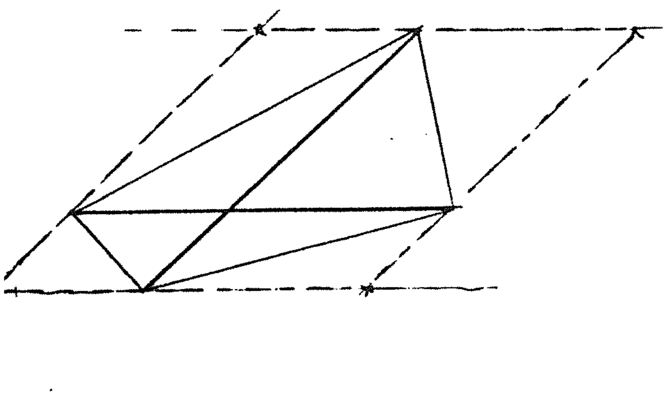


RESQ et RAUQ sont deux carrés.

1) Démontre que E, R, A sont alignés.
2) Démontre que E Q A est un triangle rectangle.
3) Démontre que R S Q A est un parallélogramme.

......

10



LISE est un quadrilatère tel que LS = IE

Par L et S on mène les parallèles à (IE).

Par I et E on mène les parallèles à (LS).

Ces quatre droites forment un quadrilatère.

Quelle est sa nature ?

8

$\mathcal{C}$ cercle de centre O
[AB] diamètre de $\mathcal{C}$.
[PQ] diamètre de $\mathcal{C}$.
(AB) ⊥ (PQ)

O milieu de [AB] $\xrightarrow{P_3}$ AQPB parallélogramme $\xrightarrow{⑤}$ AQPB losange
O milieu de [PQ]

., P_3 / 4

9

1) RESQ carré — (ER) ⊥ (RQ) $\xrightarrow{O_1}$ E, R, A alignés
RAUQ carré — (RA) ⊥ (RQ)

., O_1 / 3

2) RESQ carré — ER = RQ $\xrightarrow{Ce}$ E, A, Q sur cercle de centre R $\xrightarrow{M_4}$ EQA triangle rectangle en Q
RAUQ carré — RA = RQ
E, R, A alignés

.,Ce, M_4 / 4

3) RESQ carré
E, R, A alignés
EQA rectangle en Q

(SQ) // (ER) — (SQ) // (RA) $\xrightarrow{Pa}$ RSQA parallélogramme
(ER) = (RA)
(SR) ⊥ (EQ) $\xrightarrow{O_2}$ (SR) // (QA)
(QA) ⊥ (EQ)

., O_2, P_a /7

NB 1) cette démonstration est bien entendue plus facile en utilisant les vecteurs.

2) L'exercice peut se poursuivre.

10

LS = IE
(ND) // (LS) // (OR) $\xrightarrow{P_1}$ (ND) // (OR) $\xrightarrow{P_a}$
(NO) // (IE) // (RD) $\xrightarrow{P_1}$ (NO) // (RD)
N, I, D alignés — (NI) = (ND)
O, E, R alignés — (OE) = (OR)
O, L, N alignés — (OL) = (ON)
R, S, D alignés — (RS) = (RD)

$\xrightarrow{P_a}$ NORD parallélogramme $\xrightarrow{L_p}$ NO = DR, ND = OR
$\xrightarrow{P_a}$ ONIE parallélogramme $\xrightarrow{L_p}$ NO = IE
$\xrightarrow{P_a}$ LORS parallélogramme $\xrightarrow{L_p}$ OR = LS
(1)

P_1, P_a, L_p, Lo / 14

(1) —— NO = DR = OR = ND $\xrightarrow{Lo}$ NORD losange

N.B. L I S E pourrait être un rectangle et on aurait une sorte de "dual" de l'exercice 5

Médiatrice - losange

BILAN

1 Statut des énoncés

Une seule définition comme point de départ.

Tous les théorèmes classiques sur les propriétés et caractérisations du losange peuvent être traitées sous forme d'exercice.

Mais il est évident que l'on peut aussi pour certains exercices partir de ces propriétés et caractérisations pour faire des démonstrations.

Il en est de même pour le carré qui apparaît à l'exercice 8 .

On peut alors adopter plusieurs stratégies : soit demander aux élèves une définition du carré et s'y tenir, soit demander toutes les méthodes possibles pour savoir qu'un quadrilatère est un carré (les noter dans les fiches) et laisser chacun faire.

2 Fiches pour l'élève

Il s'agit ici de faire deux fiches :

- une sur le LOSANGE en inventoriant toutes les méthodes pour démontrer qu'un quadrilatère est un losange.
- l'autre sur le CARRE en faisant un inventaire analogue.

Exemple de feuille de travail pour l'élève

Lo Définition : un quadrilatère ayant ses quatre côtés de même longueur est un losange.

P_5 Propriété du parallélogramme : dans un parallélogramme les côtés opposés ont même longueur.

Triangle équilatéral : triangle dont les trois côtés ont même longueur.

1 ABCD est un losange

a) Démontre que ses diagonales sont perpendiculaires et ont même milieu.

b) Déduis-en qu'un losange est un parallélogramme.

Que peux-tu dire des côtés opposés d'un losange ?

Enonce toutes les propriétés du losange que tu viens de démontrer.

2 Dessine un parallélogramme dont deux côtés consécutifs ont même longueur.

Que peux-tu en dire ? Prouve-le.

Enonce un théorème. Complète la fiche losange.

Quelle nouvelle définition du losange peux-tu donner ?

3 RECT est un rectangle dont les diagonales se coupent en O.

I est le milieu de [RE]

1) Démontre que (OI) est la médiatrice de [RE].

2) Déduis-en que les diagonales d'un rectangle ont même longueur.

4 Un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires.

Montre ques ses 4 côtés ont même longueur.

Enonce un théorème et complète la fiche losange.

5 LISE est un rectangle. N, O, R, D sont les milieux respectifs de [LI] , [IS] , [SE] , [EL]. Quelle est la nature de NORD. Prouve-le.

6 OAB, OBC et OCD sont trois triangles équilatéraux.

1) Démontre que OABC et OBCD sont des losanges.

2) Démontre que A, O, D sont alignés.

3) Démontre que O est le milieu de [AD].

7 Soit C un cercle de centre O et [AB] et [PQ] deux diamètres perpendiculaires. Quelle est la nature de AQBP ?

Enonce les propriétés du carré.

Donne toutes les méthodes pour démontrer qu'un quadrilatère est un carré.

(Fais une figure pour chacune pour voir si tes hypothèses sont suffisantes).

Fais une fiche sur le carré.

8 VECTEURS - Un outil puissant
(sans base , ni repère)

ENONCES

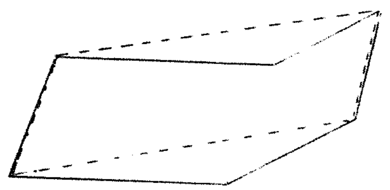
Attention ! chacun des énoncés suivants renferme en réalité deux énoncés.

Vpa	L U C E parallélogramme	équivaut à	$\overrightarrow{LE} = \overrightarrow{UC}$ (ou ....)
Vm	I milieu de [AB]	équivaut à	$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ (ou $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ou....)
Va	A, B, C, alignés	équivaut à	$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ (ou ......)
Vp	(AB) parallèle à (CD)	équivaut à	$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ (ou .....)

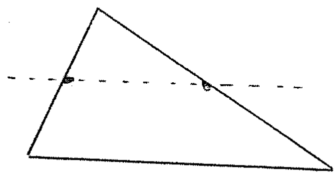
EXERCICES

Pour faire les exercices, on suppose connues les règles de calcul sur les vecteurs (et tout particulièrement la relation de Chasles et l'opposé d'un vecteur).

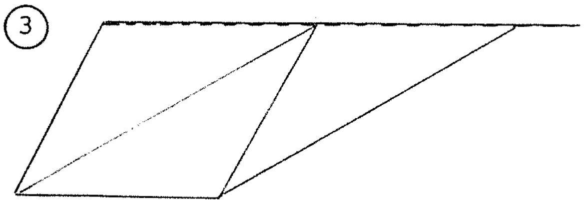
Texte possible

1 

M O L E et L O I R sont deux parallélogrammes. Démontrer que I R E M en est aussi un.

2 

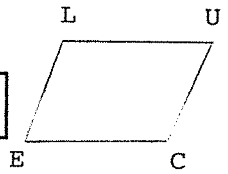
A B C est un triangle, M et I sont les milieux de [AB] et [AC] . Démontrer que (MI) est parallèle à (BC).

3 

M U L E et M U E T sont deux parallélogrammes. Démontrer que E est le milieu de [LT] .

V E C T E U R S

ENONCES. Ce sont en fait des traductions en langage vectoriel.

Vpa 

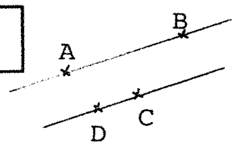
L U C E parallélogramme $\overset{\text{Vpa}}{\longleftrightarrow}$ $\boxed{\overrightarrow{LE} = \overrightarrow{VC}}$ ou ......

Vm 

I milieu de [AB] $\overset{\text{Vm}}{\longleftrightarrow}$ $\boxed{\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}}$ ou $\boxed{\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}$ ou...

Va 

A, B, C, alignés $\overset{\text{Va}}{\longleftrightarrow}$ $\boxed{\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}}$ ou ....

Vp 

(AB) // (CD) $\overset{\text{Vp}}{\longleftrightarrow}$ $\boxed{\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CD}}$ ou ......

EXERCICES.

Solutions

1

M O L E parallélogramme $\xrightarrow{\text{Vpa}}$ $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{OL}$

L O I R parallélogramme $\xrightarrow{\text{Vpa}}$ $\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{IR}$

$\longrightarrow \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{IR} \xrightarrow{\text{Vpa}}$ IREM parallélogramme

Vpa	4

2

M milieu de [AB] $\xrightarrow{\text{Vm}}$ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

I milieu de [AC] $\xrightarrow{\text{Vm}}$ $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Vm Vp	5

$\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AI} \longrightarrow \overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \xrightarrow{\text{Vp}}$ (MI) // (BC)

N.B. à noter le point de départ $\overrightarrow{MI} = \ldots$ qui ne peut se trouver qu'après une traduction à rebours de la conclusion (raisonnement par condition suffisante).

3

M U L E parallélogramme $\xrightarrow{\text{Vpa}}$ $\overrightarrow{UM} = \overrightarrow{LE}$

M U E T parallélogramme $\xrightarrow{\text{Vpa}}$ $\overrightarrow{UM} = \overrightarrow{ET}$

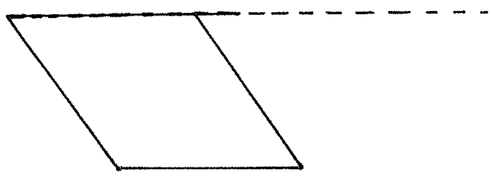
$\longrightarrow \overrightarrow{LE} = \overrightarrow{ET} \xrightarrow{\text{Vm}}$ E milieu de [LT]

Vpa Vm	4

N.B:E milieu de [LT] donc en particulier L, E, T alignés.

VECTEURS

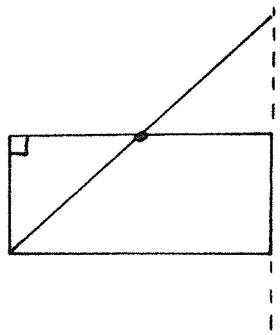
4



O R T F est un parallélogramme et U le point tel que $\overrightarrow{OU} = 3\ \overrightarrow{TR}$.

Démontrer que F, O, U sont alignés.

5

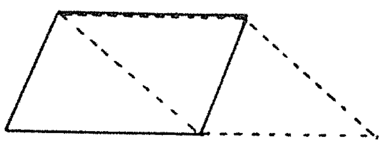


ABCD est un rectangle, E est le milieu de [AB] et M est le symétrique de D par rapport à E.

1) Démontrer que C, B, M sont alignés.

2) Démontrer que (AB) est la médiatrice de [MC] .

6



Soit ABCD un parallélogramme.

1) Démontrer que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

2) Soit P tel que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AC}$. Placer P et prouver que ABPC est un parallélogramme.

6 bis L U C E est un parallélogramme et F est tel que $\overrightarrow{LF} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{EL}$.
faire une figure et prouver que FUEL est un parallélogramme.

6 ter A, B, C, sont trois points, E est tel que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$ et F tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BF}$.

1) Démontrer que ABCE et BFCE sont des parallélogrammes.

2) Démontrer que A,B,F sont trois points alignés.

3) Démontrer que (AF) et (EC) sont parallèles.

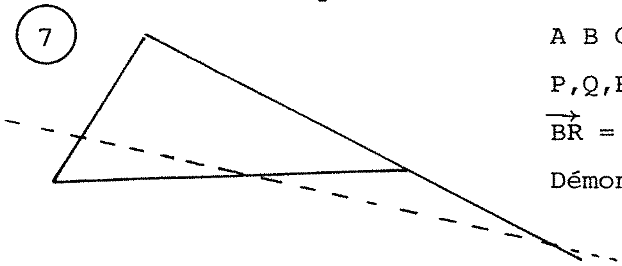
6 quater R O S E est un parallélogramme et C est le milieu de [RS] .

1) Quel est le milieu de [OE] et pourquoi ?

2) Soit I tel que $\overrightarrow{RI} = \overrightarrow{RC} - \overrightarrow{OR}$. Placer I et prouver que R O I C est un parallélogramme.

3) Soit F tel que I F O C soit un parallélogramme.
Démontrer que O est le milieu de [RF].

7



A B C est un triangle. Place les points P,Q,R tels que $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{5}\ \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CQ} = 2\ \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BR} = \frac{1}{7}\ \overrightarrow{BA}$.

Démontrer que P, Q, R sont alignés.

VECTEURS

(4) ORTF parallélogramme, $\overrightarrow{OU} = 3\,\overrightarrow{TR}$ $\xrightarrow{\text{Vpa}}$ $\overrightarrow{TR} = \overrightarrow{FO}$ $\longrightarrow$ $\overrightarrow{OU} = 3\,\overrightarrow{FO}$ $\xrightarrow{\text{Va}}$ F,O,U alignés

Vpa Va / 3

(5)

1) ABCD rectangle; E milieu de [AB]; E milieu de [DM]

$\xrightarrow{\text{Re}}$ $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$

$\xrightarrow{P_4}$ AMBD parallélogramme $\xrightarrow{\text{Vpa}}$ $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BM}$ $\longrightarrow$ $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BM}$ $\xrightarrow[\text{Vm}]{\text{Va}}$ C,B,M alignés et B milieu de [CM]

2) ABCD rectangle $\xrightarrow{\text{Re}}$ (AB)⊥(BC); B milieu de [CM] $\xrightarrow{\text{Me}}$ (AB) médiatrice de [CM]

1) Re P4 Va /5   2) Re Me / 3

(6)

1) ABCD parallélogramme $\xrightarrow{\text{Vpa}}$ $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ $\longrightarrow$ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

Vpa / 2

2) ABCD parallélogramme, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AC}$

$\xrightarrow{\text{Vpa}}$ $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$

$\longrightarrow$ $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC}$ $\longrightarrow$ $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC}$

$\longrightarrow$ $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AC}$ $\xrightarrow{\text{Vpa}}$ ABPC parallélogramme

Vpa / 5

(7) $\overrightarrow{BP} = 1/5\ \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CQ} = 2\ \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BR} = 1/7\ \overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RB} + \overrightarrow{BP}$ $\longrightarrow$ $\overrightarrow{RP} = 1/7\ \overrightarrow{AB} + 1/5\ \overrightarrow{BC}$ $\longrightarrow$ $\overrightarrow{PQ} = 14\ \overrightarrow{RP}$ $\xrightarrow{\text{Va}}$ P,Q,R alignés

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ}$

$\longrightarrow$ $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CQ}$ $\longrightarrow$ $\overrightarrow{PQ} = -1/5\ \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} + 2\ \overrightarrow{AC}$

$\longrightarrow$ $\overrightarrow{PQ} = 4/5\ \overrightarrow{BC} + 2\ \overrightarrow{AC}$ $\longrightarrow$ $\overrightarrow{PQ} = 4/5\ \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB} + 2\ \overrightarrow{BC}$

$\longrightarrow$ $\overrightarrow{PQ} = 14/5\ \overrightarrow{BC} + 2\ \overrightarrow{AB}$ $\longrightarrow$ $\overrightarrow{PQ} = 14/5\ \overrightarrow{BC} + 14/7\ \overrightarrow{AB}$

Va / 9

N.B: c'est un cas particulier du théorème de Menelaüs

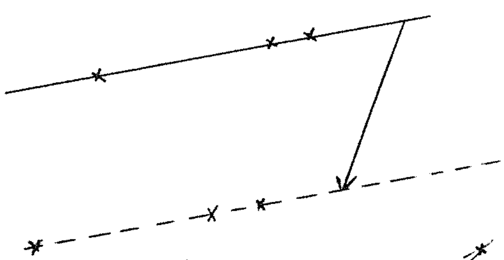
On peut fabriquer sur le même modèle autant de cas que l'on veut.

Il suffit de prendre P, Q, R de telle sorte que $\overrightarrow{PB} = a\overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{QC} = b\overrightarrow{QA}$, $\overrightarrow{RA} = c\overrightarrow{RB}$ avec abc = 1. Alors P, Q, R seront alignés.

VECTEURS

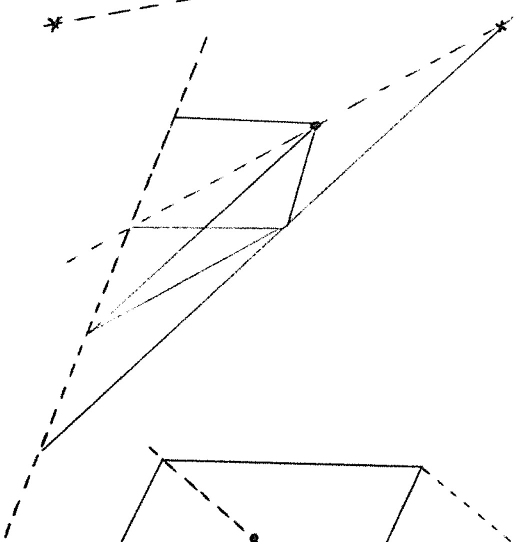
7 bis   Idem avec $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AQ} = 3\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{BA}$.

8



R S T sont trois points alignés, $\vec{u}$ un vecteur quelconque et R', S', T' les points tels que :
$\overrightarrow{RR'} = \overrightarrow{SS'} = \overrightarrow{TT'} = \vec{u}$.
Démontrer que R', S', T' sont alignés.

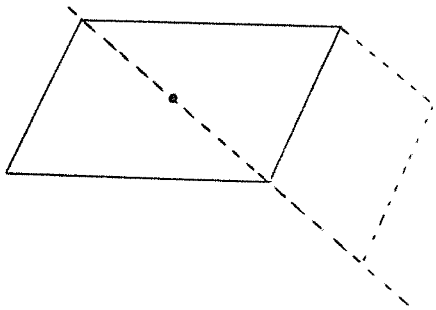
9



L E R O , R E O N et D R E N sont trois parallélogrammes. S est le point tel que $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{NE}$.

1) Démontrer que L, O, N, D sont alignés
2) Démontrer que E est le milieu de [OS].

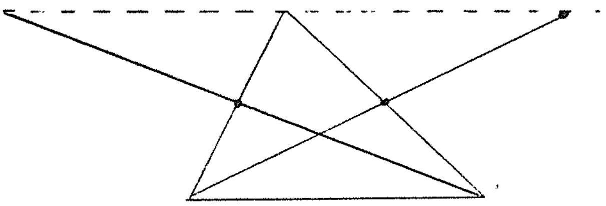
10



A B C D est un parallélogramme et O est le milieu de [AC]. Soit M le point tel que : $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AD}$.

Démontrer que A, C, M sont alignés.

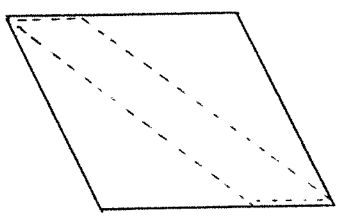
11



L E O est un triangle quelconque, I est le milieu de [OE] , U celui de [LE] .
S est le symétrique de L par rapport à I, et T celui de O par rapport à U.

Démontrer que S, E, T sont alignés.

12



V O L T est un parallélogramme. I et E sont tels que $\overrightarrow{VI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{VO}$ et $\overrightarrow{TE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{TL}$.

Démontrer que V I L E est un parallélogramme.

7 bis $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{RP} = 2\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$. Donc $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{PQ}$, et donc P est milieu de [RQ] .

8

R, S, T alignés; $\overrightarrow{RR'} = \overrightarrow{SS'} = \overrightarrow{TT'} = \vec{u}$

Va — $\overrightarrow{RT} = k\,\overrightarrow{RS}$ — $\overrightarrow{R'T'} = k\overrightarrow{R'S'}$ — Va — $\boxed{R',S',T' \text{ alignés}}$

$\overrightarrow{R'T'} = \overrightarrow{R'R} + \overrightarrow{RT} + \overrightarrow{TT'}$ — $\overrightarrow{R'T'} = -\vec{u} + \overrightarrow{RT} + \vec{u} \rightarrow \overrightarrow{R'T'} = \overrightarrow{RT}$

$\overrightarrow{R'S'} = \overrightarrow{R'R} + \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SS'}$ — $\overrightarrow{R'S'} = -\vec{u} + \overrightarrow{RS} + \vec{u} \rightarrow \overrightarrow{R'S'} = \overrightarrow{RS}$

Va / 6

9

1)

L E R O parallélogramme; R E O N parallélogramme; D R E N parallélogramme; $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{NE}$

Vpa — $\overrightarrow{RE} = \overrightarrow{OL}$ — $\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{NO}$ — Va — L,O,N alignés

Vpa — $\overrightarrow{RE} = \overrightarrow{NO}$ — $\overrightarrow{NO} = \overrightarrow{DN}$ — Va — O, ,D alignés

Vpa — $\overrightarrow{RE} = \overrightarrow{DN}$

$\boxed{L,O,N,D \text{ alignés}}$

Vpa Va/8

2)

$\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{NE}$; R E O N parallélogramme

Vpa — RSEN parallélogramme — Vpa — $\overrightarrow{ES} = \overrightarrow{NR}$ — $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{ES}$ — Vm — $\boxed{E \text{ milieu de } [OS]}$

Vpa — $\overrightarrow{NR} = \overrightarrow{OE}$

Vpa Vm/5

10

A B C D parallélogramme; $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AD}$; O milieu de [AC]

Vpa — $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$

— $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AO}$ — $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AO}$ — $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ — Va — $\boxed{A,C,M \text{ alignés}}$

Vm — $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Vpa Vm Va / 6

11

U milieu de [LE]; U milieu de [OT]; I milieu de [OE]; I milieu de [LS]

P4 — T E O L parallélogramme — Vpa — $\overrightarrow{LO} = \overrightarrow{TE}$ — $\overrightarrow{TE} = \overrightarrow{ES}$ — Va — $\boxed{S,E,T \text{ alignés}}$

P4 — O S E L parallélogramme — Vpa — $\overrightarrow{LO} = \overrightarrow{ES}$

P4 Vpa Va/6

12

$\overrightarrow{VI} = 1/3\ \overrightarrow{VO}$; $\overrightarrow{TE} = 2/3\ \overrightarrow{TL}$; VOLT parallélogramme

— $\overrightarrow{VI} = \overrightarrow{EL}$ — Vpa — $\boxed{V I L E \text{ parallélogramme}}$

Vpa — $\overrightarrow{TL} = \overrightarrow{VO}$ — $\overrightarrow{EL} = 1/3\ \overrightarrow{VO}$

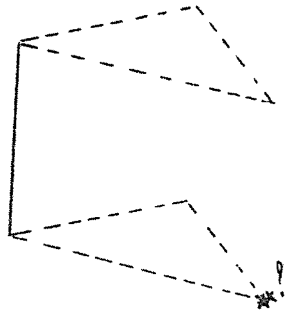
$\overrightarrow{EL} = \overrightarrow{ET} + \overrightarrow{TL}$ — $\overrightarrow{EL} = -2/3\ \overrightarrow{TL} + \overrightarrow{TL}$

$\rightarrow \overrightarrow{EL} = 1/3\ \overrightarrow{TL}$

Vpa / 6

VECTEURS

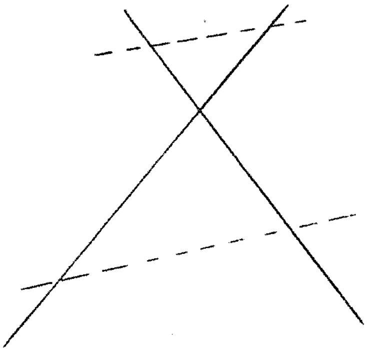
13



F O N D sont quatre points quelconques et U, E, S sont tels que : $\overrightarrow{DU} = \overrightarrow{FO}$, $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{UE}$ et $\overrightarrow{FS} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{FN}$.

Faire un dessin. Que dire ?

14

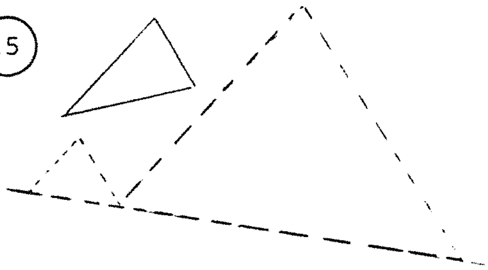


d et δ sont deux droites sécantes en O. Sur d on place un point A puis un point E tel que $\overrightarrow{OE} = -2\ \overrightarrow{OA}$

Sur δ on place un point B puis un point C tel que $\overrightarrow{OC} = -2\ \overrightarrow{OB}$

Démontrer que (AB), (CE) sont parallèles.

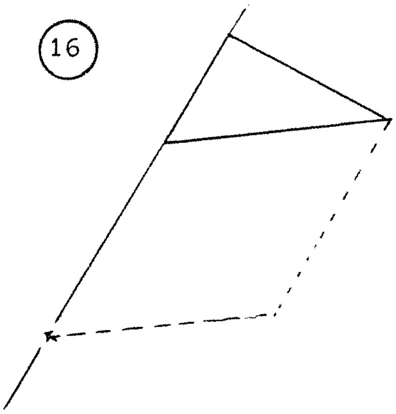
15



R O C est un triangle et F, I, L sont trois points tels que $\overrightarrow{FI} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{RO} + \overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{IL} = 2\overrightarrow{RO} + 4\overrightarrow{OC}$.

Faire une figure. F, I, L sont-ils alignés? Prouve-le.

16



1) S U R est un triangle et E est le point tel que $\overrightarrow{RE} = -2\ \overrightarrow{SU} - \overrightarrow{SR}$. Faire une figure. E est-il un point de (SU) ? le prouver.

2) Construire T tel que $\overrightarrow{UT} = 3\ \overrightarrow{US} - 2\ \overrightarrow{UR}$

T est-il un point de (SR) ?

3) Démontrer que (TE) et (UR) sont parallèles.

VECTEURS

13

$\boxed{\overrightarrow{DU} = \overrightarrow{FO}}$; $\boxed{\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{UE}}$; $\boxed{\overrightarrow{FS} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{FN}}$

$\longrightarrow \overrightarrow{FS} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{ON}$

$\longrightarrow \overrightarrow{FS} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DU} + \overrightarrow{UE} \longrightarrow \overrightarrow{FS} = \overrightarrow{FE} \longrightarrow \boxed{S = E}$

$\boxed{/\ 4}$

14

$\boxed{\overrightarrow{OE} = -\ 2\overrightarrow{OA}}$; $\boxed{\overrightarrow{OC} = -\ 2\overrightarrow{OB}}$

$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OE}$

$\longrightarrow \overrightarrow{CE} = -\ 2\overrightarrow{BO} - 2\overrightarrow{OA}$

$\longrightarrow \overrightarrow{CE} = -\ 2(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA})$

$\longrightarrow \overrightarrow{CE} = -\ 2\overrightarrow{BA} \xrightarrow{Vp} \boxed{(CE)\ //\ (AB)}$

$\boxed{Vp/4}$

N.B. En généralisant on peut ainsi démontrer la réciproque de l'énoncé de Thalès.

15

$\boxed{\overrightarrow{FI} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{RO} + \overrightarrow{OC}}$; $\boxed{\overrightarrow{IL} = 2\ \overrightarrow{RO} + 4\ \overrightarrow{OC}}$

$\longrightarrow \overrightarrow{IL} = 4\ \overrightarrow{FI} \xrightarrow{Va} \boxed{F,\ I,\ L \text{ alignés}}$

$\boxed{Va\ /\ 2}$

16 1) $\boxed{\overrightarrow{RE} = -2\ \overrightarrow{SU} - \overrightarrow{SR}} \longrightarrow \overrightarrow{SR} + \overrightarrow{RE} = -2\overrightarrow{SU} \longrightarrow \overrightarrow{SE} = 2\ \overrightarrow{US} \xrightarrow{Va} \boxed{E \in (SU)}$

$\boxed{Va\ /\ 3}$

2) $\boxed{\overrightarrow{UT} = 3\ \overrightarrow{US} - 2\ \overrightarrow{UR}} \longrightarrow \overrightarrow{US} + \overrightarrow{ST} = 3\overrightarrow{US} - 2(\overrightarrow{US}+\overrightarrow{SR}) \longrightarrow \overrightarrow{ST} = -2\overrightarrow{SR} \xrightarrow{Va} \boxed{T \in (SR)}$

$\boxed{Va\ /\ 3}$

3) $\boxed{\overrightarrow{SE} = 2\ \overrightarrow{US}}$; $\boxed{\overrightarrow{ST} = -2\ \overrightarrow{SR}}$

$\longrightarrow \overrightarrow{TS} = 2\ \overrightarrow{SR}$

$\longrightarrow \overrightarrow{TS}+\overrightarrow{SE} = 2\ \overrightarrow{SR} + 2\ \overrightarrow{US} \longrightarrow \overrightarrow{TE} = 2\overrightarrow{UR} \xrightarrow{Vp} \boxed{(TE)//(UR)}$

$\boxed{Vp\ /\ 4}$

NB : Là aussi se pose le problème du nombre de déductions à compter : il est évident que si l'on veut comptabiliser chaque propriété utilisée il y a beaucoup plus de déductions que cela.

VECTEURS

BILAN

1 Un outil puissant

1) Ils permettent de ramener des démonstrations à du calcul algébrique, ce qui est souvent plus accessible.

2) Mais il faut remarquer qu'il est souvent nécessaire d'effectuer un travail heuristique pour trouver les "bons" vecteurs à utiliser, la"bonne" décomposition.

Ce travail peut se faire avec profit par :

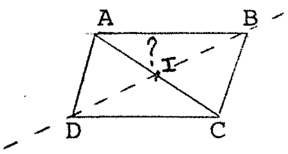
- une analyse de la conclusion à la lumière des hypothèses (recherche de conditions suffisantes...)
- une analyse de la figure sur laquelle on met en relief les hypothèses (utilisons de la couleur !) : on privilégie alors les lignes déjà tracées, les chemins déjà connus....

3) Ils permettent de faire souvent des démonstrations plus rapides :

- pour des exercices déjà vus. Pour le montrer nous en avons glissé quelques-uns dans les exercices précédents (1 , 3 , 5 , 11 ....).
Il est alors très intéressant de comparer les démonstrations.

- Pour des énoncés déjà admis ou démontrés.
  Par exemple : énoncé des milieux, exercice 2
  réciproque de Thalès, exercice 14

On peut facilement prouver la propriété des diagonales du parallélogramme et sa réciproque.



ABCD parallélogramme
I milieu de [AC]

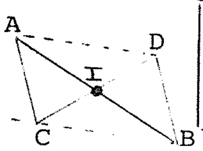
$\xrightarrow{Vpa} \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$

$\xrightarrow{Vm} \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC}$

$\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DA} + AI \longrightarrow \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{IC}$

$\longrightarrow \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{IB} \xrightarrow{Vm}$ $\boxed{\text{I milieu de [BD]}}$

VECTEURS



| I milieu de [AB] | → $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ |
| I milieu de [CD] | → $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{ID}$ |

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID}$ → $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{CI}$ → $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$ $\xrightarrow{Vpa}$ ADBC parallélogramme

$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IB}$

② Fiches pour l'élève

. On enrichit les anciennes fiches de nouvelles méthodes.

Fiche PARALLELOGRAMME

Comment démontrer qu'une figure est un parallélogramme ?

Méthode 3 Vpa : en démontrant que la figure "contient" deux vecteurs égaux.

Fiche PARALLELES

Comment démontrer que deux droites sont parallèles ?

Méthode 5 Vp : (AB) // (CD) si $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CD}$.

Fiche ALIGNEMENT

Comment démontrer que trois points sont alignés ?

Méthode 2 Va : en démontrant que deux vecteurs fabriqués à partir de ces trois points sont colinéaires.

Fiche MILIEU

Comment démontrer qu'un point est milieu d'un segment ?

méthode Vm : I milieu de [AB] si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ ou $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ....

. Une nouvelle question s'est posée à nous au cours de tous les exercices : Comment démontrer que deux vecteurs sont égaux ?
On peut étendre les méthodes à deux nombres, deux expressions.....

) -

VECTEURS

Fiche : EGALITE

Comment démontrer que deux quantités $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont égales ?

Méthode 1 : on part de $\mathcal{A}$, et on calcule jusqu'à obtenir $\mathcal{B}$ en utilisant en cours de calcul les hypothèses et des propriétés (au niveau de chaque signe =).

$$\mathcal{A} = \ldots\ldots = \ldots\ldots = \ldots\ldots\ \ldots = \mathcal{B}$$

Méthode 1 bis : on part de $\mathcal{A}$, on calcule

on part de $\mathcal{B}$, on calcule jusqu'à obtenir des résultats égaux.

$$\mathcal{A} = \ldots\ldots = \ldots\ldots = \mathcal{C}$$
$$\mathcal{B} = \ldots\ldots = \ldots\ldots = \mathcal{C}$$

Méthode 2 : on part d'une égalité donnée dans les hypothèses : $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ et on transforme jusqu'à obtenir $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ (principe des équations).

$\mathcal{F} = \mathcal{G}$

équivaut à $\ldots = \ldots$

$\ldots = \ldots$

équivaut à $\mathcal{A} = \mathcal{B}$

Un peu d'étymologie

Vecteur (lat : vector, de vehere conduire)

Le vecteur est une sorte de "véhicule" : il conduit d'un point à un autre (cf. vecteur comme élément d'un espace vectoriel opérant sur les points du plan).

Dans la vie courante :

- rat vecteur de maladies
- virus vecteur de la grippe
- bombardier vecteur d'armes stratégiques.....

4 Remarque :

Certaines propriétés et certains exercices peuvent être faits en quatrième. Les autres sont à faire en troisième. Nous les avons regroupés pour donner un aperçu des méthodes vectorielles.

A B C D E F G H I J K L M | N O P Q R S T U V W X Y Z

On se donne un nom et on cherche son "symétrique". Pour lire le mot obtenu on peut permuter circulairement les lettres.

Exemples: Avec 4 lettres : HOLD ⟶ SLOW ; FLIC ⟶ ROUX (après permutation)

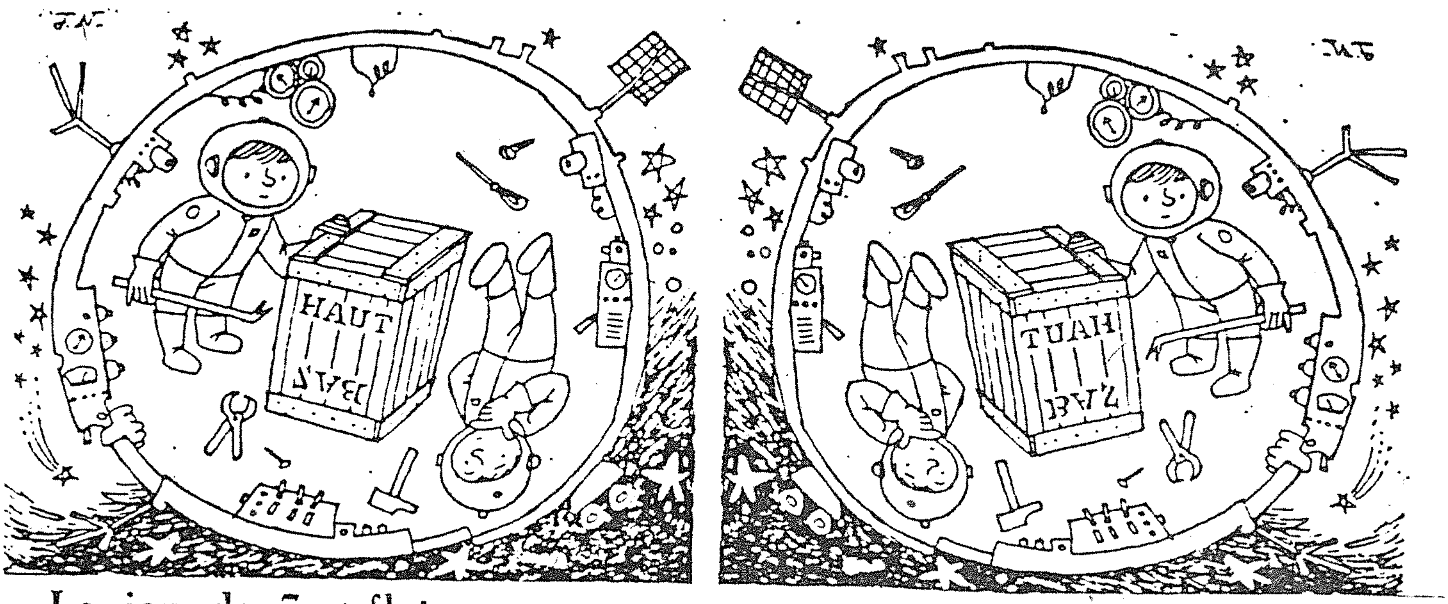
Mots invariants: LOVE (ou VELO ou VOLE) , FLOU, LOIR, FUIR ....

Avec 5 lettres : FILMS ⟶ HURON....

Le jeu des 7 reflets

Vacances 2000

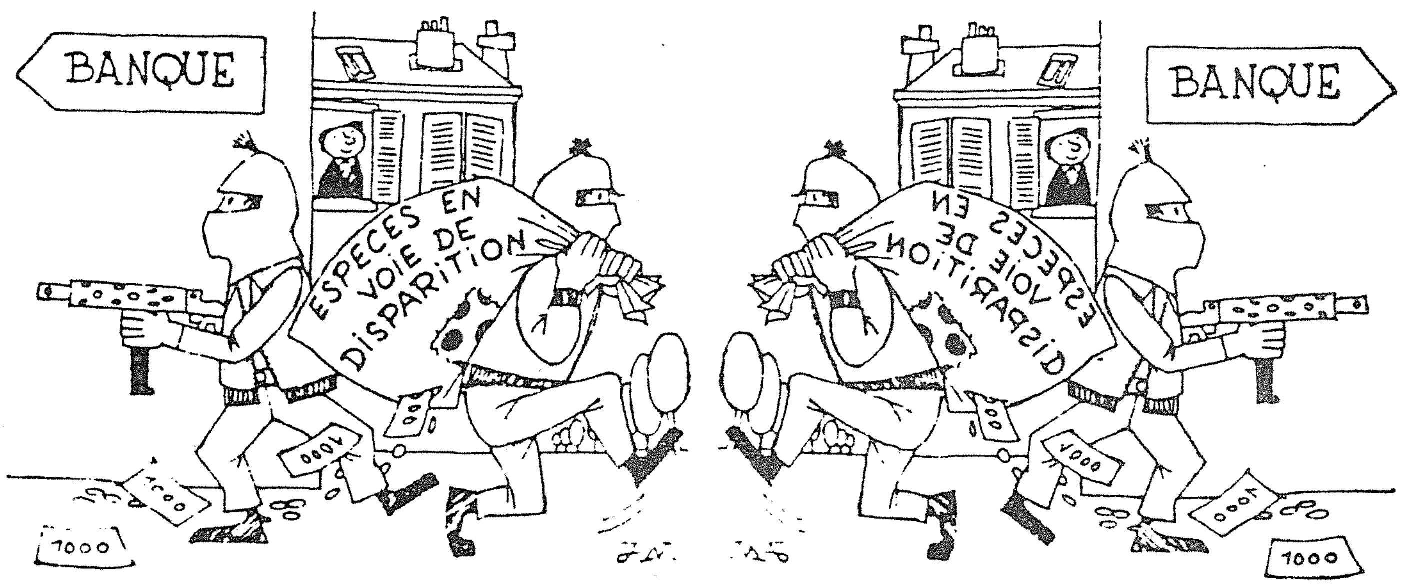
Les petits vacanciers de l'an 2000 ont reçu un colis S.N.C.F. (Société nationale de cosmonautique futuriste). Mais où placer le haut, et le bas, en état d'apesanteur ? Au fait, ce n'est pas votre problème. Pour vous, il s'agit de trouver les sept détails qui ne collent pas, sachant que le dessin de droite devrait refléter celui de gauche comme dans un miroir.



Le jeu des 7 reflets

Espèces en voie de disparition

Ces affreux gangsters, et le reste du dessin de gauche, se reflètent à droite comme dans un miroir. A sept détails près. Cherchez bien...



Ref : Clermond Ferrand 4° Module A. Médiatrice. Symétrie par rapport à une droite

SYMETRIE ORTHOGONALE

Un autre langage

ENONCES

Sy	A' est le symétrique de A par rapport à une droite d veut dire que d est la médiatrice de [AA'].
Si	Tout point de "l'axe" a pour image lui même par une symétrie orthogonale.
Sr	Si A' est l'image de A, alors A est l'image de A'.
Sd	L'image d'une droite est une droite.
Sa	Si trois points sont alignés, leurs images sont trois points alignés.
Se	La distance entre deux points et entre leurs images est la même.
Sm	L'image du milieu d'un segment est le milieu de l'image du segment.
$\hat{S}$	L'image d'un angle est un angle égal.
Sp	Si deux droites sont parallèles, leurs images sont deux droites parallèles.
So	Si deux droites sont orthogonales, leurs images sont deux droites orthogonales.

N.B. : 1) Seuls les deux premiers énoncés sont propres à la symétrie orthogonale.

2) Le troisième est propre aux symétries : centrale ou orthogonale.

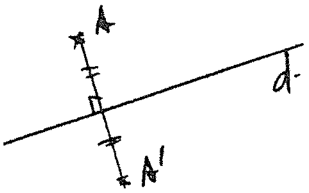
3) Les sept autres sont valables pour toute isométrie : image veut donc dire ici image par une symétrie orthogonale, mais peut vouloir dire image par une isométrie.

4) Certains énoncés se déduisent des autres.

S_{axe}	Une droite d est dite axe de symétrie d'une figure si tout point de la figure a pour symétrique un point de la figure.

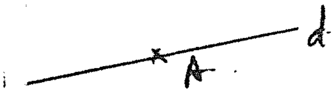
SYMETRIE ORTHOGONALE

Sy



$s_d : A \longrightarrow A'$ $\overset{Sy}{\Longleftrightarrow}$ d médiatrice de [AA']

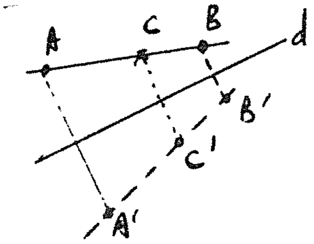
Si



d axe, $A \in d$ $\xrightarrow{Si}$ $s_d : A \longrightarrow A$

Sr

Sd



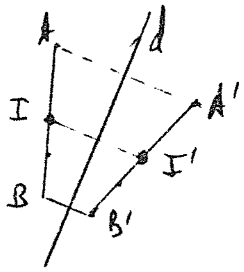
$s_d : A \longrightarrow A'$ $\xrightarrow{Sr}$ $s_d : A' \longrightarrow A$

$s_d : A \longrightarrow A'$, $B \longrightarrow B'$ $\xrightarrow{Sd}$ $s_d : (AB) \longrightarrow (A'B')$

Sa

$s_d : A \longrightarrow A'$, $B \longrightarrow B'$, $C \longrightarrow C'$, A,B,C alignés $\xrightarrow{Sa}$ A', B', C' alignés

Se

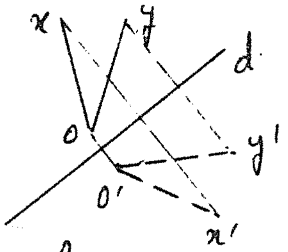


$s_d : A \longrightarrow A'$, $B \longrightarrow B'$ $\xrightarrow{Se}$ AB = A'B'

Sm

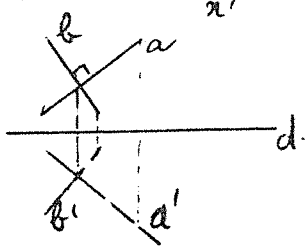
$s_d : A \longrightarrow A'$, $B \longrightarrow B'$, $I \longrightarrow I'$, I milieu de [AB] $\xrightarrow{Sm}$ I' milieu de [A'B']

$\hat{S}$



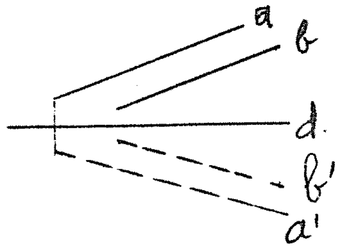
$s_d : O \longrightarrow O'$, $Ox \longrightarrow Ox'$, $Oy \longrightarrow Oy'$ $\xrightarrow{\hat{S}}$ $\widehat{xoy} = \widehat{x'o'y'}$

So



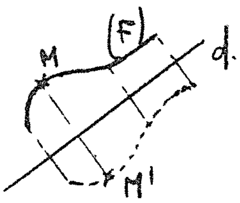
$s_d : a \longrightarrow a'$, $b \longrightarrow b'$, $a \perp b$ $\xrightarrow{So}$ $a' \perp b'$

Sp



$s_d : a \longrightarrow a'$, $b \longrightarrow b'$, $a \parallel b$ $\xrightarrow{Sp}$ $a' \parallel b'$

S axe



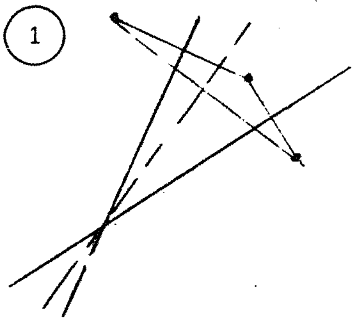
d axe de symétrie de (F), $M \in (F)$, $s_d : M \longrightarrow M'$ $\xrightarrow{S\ axe}$ $M' \in (F)$

$\forall M \in (F)$, $s_d : M \longrightarrow M'$, $M' \in (F)$ $\xrightarrow{S\ axe}$ d axe de symétrie de F

SYMETRIE ORTHOGONALE

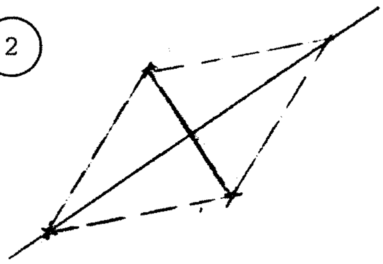
EXERCICES — **ENONCES POSSIBLES**

1



d et d' sont deux droites sécantes en O. M un point quelconque a pour symétrique N par rapport à d et P par rapport à d'. Prouve que O appartient à la médiatrice de [NP].

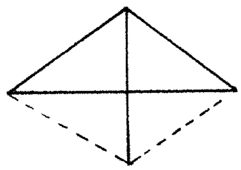
2



A est un point d'une droite d. B est un point n'appartenant pas à d. B' est le symétrique de B par rapport à d et A' le symétrique de A par rapport à (BB').

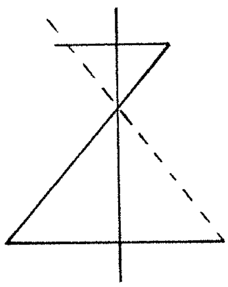
1) Que dire de ABB' ? Prouve-le.
2) Que dire de ABA'B'? Prouve-le.

2 bis



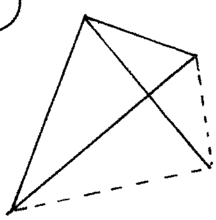
O S E est un triangle isocèle tel que SO = SE. R est le symétrique de S par rapport à (OE).
Quelle est la nature de ROSE ? Prouve-le.

3



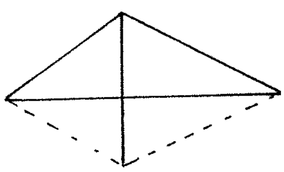
d est une droite, V et L deux points n'appartenant pas à d tels que la droite (VL) coupe d en S.
E et O sont les symétriques de V et L respectivement par rapport à d.
Démontre que E, S, O sont alignés.

4



ABC est un triangle rectangle en A. A' est le symétrique de A par rapport à (BC).
Démontre que (BA') est perpendiculaire à (CA').

4 bis



CER est un triangle quelconque. F est l'image de E dans la symétrique d'axe (CR).
Compare les angles $\widehat{CER}$ et $\widehat{CFR}$.

SOLUTIONS

1

O ∈ d
s_d M → N
s_d': M → P
O ∈ d

Sy — d médiatrice de [MN] —M_1— OM=ON
Sy — d′ médiatrice de [MP] —M_1— OM=OP
→ ON=OP —M_2— O sur la médiatrice de [NP]

Sy M_1M_2 / 6

2

A ∈ d
s_d : B → B'
$s_{BB'}$: A → A'

—M_1— AB=AB' —— ABB' isocèle
Sy — d médiatrice de [BB']
Sy — [BB'] médiatrice de [AA'] —M_1— B'A = B'A' ; BA=BA'
→ AB=AB'=B'A=BA —Lo— (1)

(1) —— ABA'B' losange

1) SyM_1 / 3

2) SyM_1Lo / 4

ou pour 1)

A ∈ d
s_d : B → B'
$s_{BA'}$: A → A'

Si — s_d A → A —Se— AB = AB' —— ABB' isocèle

1) Si Se / 3

2 bis

SO = SE
$s_{(OE)}$:S → R

Sy — (OE) médiatrice de [SR] —M_1— OS = OR ; ES = ER
→ OS = OR = ES = ER —Lo— ROSE losange

Sy M_1Lo / 4

3

s_d : V → E
s_d : L → O
S ∈ d
S ∉ (VL)
(ou V,L,S alignés)

Si — s_d : S → S —Sa— E, O, S alignés

Si Sa / 2

4

(AB) ⊥ (AC)
$s_{(BC)}$: A → A'
(BC) axe.

Si — s : B → B ; C → C —Sd— s: (AB) → (A'B) ; (AC) → (A'C) —So— (A'B) ⊥ (A'C)

Si Sd So / 3

4 bis

$s_{(CR)}$: E → F
(CR) axe

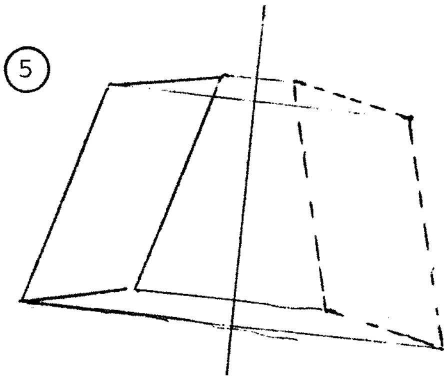
Si — s: C → C ; R → R —Sd— s: (EC) → (FC) ; (ER) → (FR) —$\widehat{S}$— $\widehat{CER} = \widehat{CFR}$

Si Sd So/3

N.B: en fait il ne s'agit pas de Sd mais d'un énoncé analogue pour les demi-droites; ou on peut directement utiliser $\widehat{S}$ ainsi.

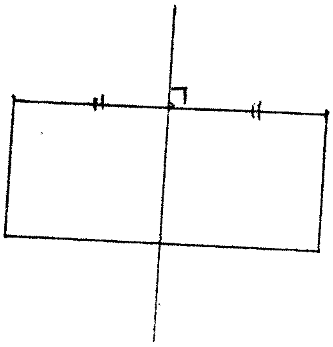
SYMETRIE ORTHOGONALE

5



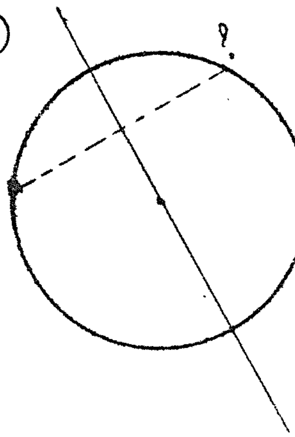
FLIC est un parallélogramme et d une droite quelconque. O, U, X, R sont les images respectives de F, L, I, C par la symétrie d'axe d.
Que dire de ROUX ? Prouve-le.

6



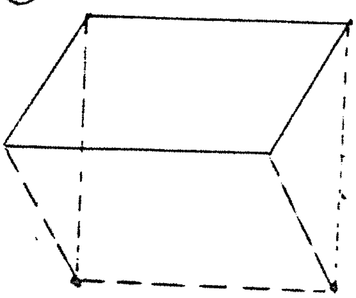
Démontrer que la médiatrice d'un côté du rectangle est axe de symétrie du rectangle.

7



Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et d une droite passant par O.
Soit A un point de $\mathcal{C}$ et A' son symétrique par rapport à d.
Démontre que A' est sur $\mathcal{C}$.
Que peut-on en déduire pour tout diamètre d'un cercle ?

8



AMIE est un parallélogramme. Z et N sont les symétriques de A et M respectivement par rapport à (EI).
Que dire de ZNIE ? Prouve-le.

s : C ⟶ C
E ⟶ F $\quad \overset{\widehat{S}}{—}\quad \widehat{CER} = \widehat{CFR}$
R ⟶ R

5

FLIC parallélogramme
s: F ⟶ O
L ⟶ U
I ⟶ X
C ⟶ R

Pa (FL) // (CI) — Sp — (OU) // (RX) — Pa — ROUX Parallélogramme
(FC) // (LI) — Sp — (LI) // (XU)
Sd s: (FL) ⟶ (OU)
Sd s: (LI) ⟶ (OR)
Sd s: (IC) ⟶ (XR)
Sd s: (FC) ⟶ (OU)

Sd Sp Pa / 8

N.B: D'autres démonstrations sont possibles avec les autres caractérisations du parallélogramme.

6

COUR rectangle
d médiatrice de [CO]
d ∩ (RU) = E
I milieu de (CO)

Re (CO) // (RU) — O_3 — d ⊥ [RU]
(CR) ⊥ (CO)
(OU) ⊥ (CO) — O_2
Me d ⊥ (CO) — d// (CR) // (OU) — Th' — E milieu de [RU] — Me — d médiatrice de [RU]

d médiatrice de [CO] — Sy — s_d : C ⟶ O, O ⟶ C
d médiatrice de [RU] — Sy — s_d : R ⟶ U, U ⟶ R
S axe — d axe de symétrie de COUR

Re Me O_2 O_3 Th' Sy S axe / 9

7

s_d : A ⟶ A'
O ∈ d
OA rayon du cercle

Sy — d médiatrice de [AA'] — M_1 — OA = OA' — Ce — A' ∈ 𝒞.

ou

s_d: A ⟶ A'
O ∈ d
OA rayon du cercle

Se — OA = OA' — Ce — A' ∈ 𝒞
Si — s_d: O ⟶ O

Sy M_1Ce / 3

Si Sl Ce / 3

Le symétrique de tout point du cercle étant sur le cercle, tout diamètre est axe de symétrie du cercle (S axe).

8

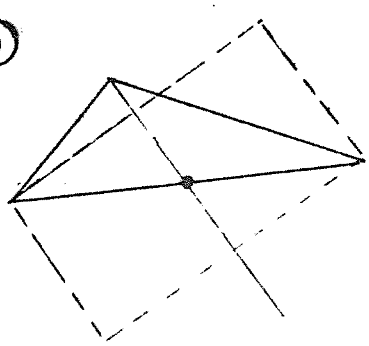
AMIE parallélogramme
s : A ⟶ Z
M ⟶ N
(EI) axe de s.

Pa (AE) // (MI) — Sp — (EZ) // (IN)
(AM) // (EI) — Sp — (ZN) // (EI) — P_a — ZNIE parallélogramme
Sd (AM) ⟶ (ZN)
Sd s: (EA) ⟶ (EZ)
(MI) ⟶ (IN)
Si s: E ⟶ E
I ⟶ I
Sd s: (EI) ⟶ (EI)

Pa. Sd Si Sp/8

NB. Il y a plusieurs autres démonstrations possibles, suivant la caractérisation que l'on utilise. On emploie alors d'autres énoncés par exemple Sm si l'on utilise les diagonales, etc....

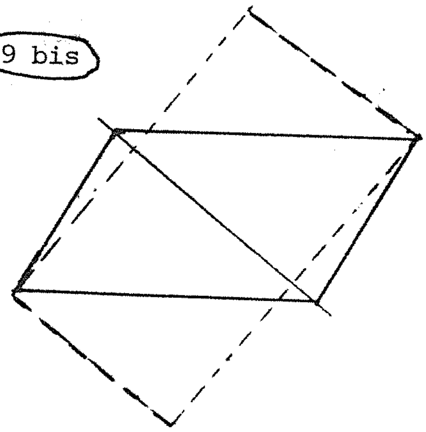
9



LOB est un triangle. I est le milieu de [LO]
O' et L' sont les symétriques de O et L par rapport à (BI).

Quelle est la nature de OO'LL' ? Prouve-le.

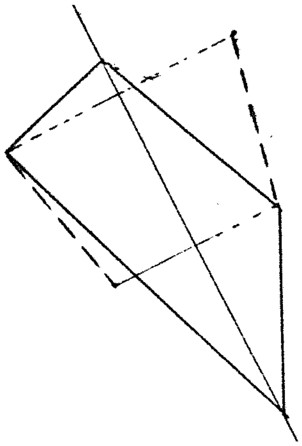
9 bis



JOUR est un parallèlogramme. L et I sont les symétriques de O et R par rapport à (JU).

Quelle est la nature de LOIR ? Prouve-le.

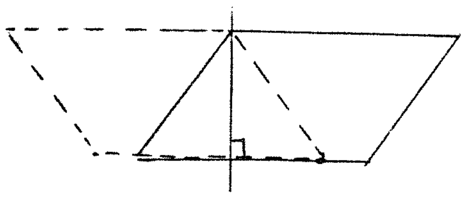
9 ter



J, O, U, R sont quatre points quelconques. L et I sont les symétriques de O et R par rapport à (JU).

Quelle est la nature de LOIR ? Prouve-le.

10

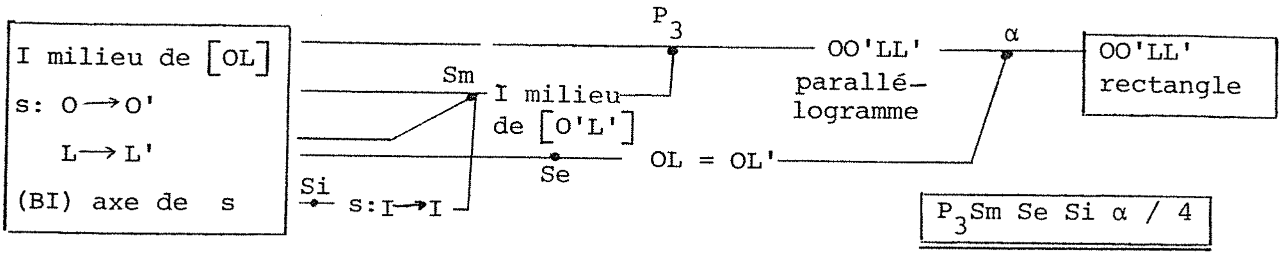


PORC est un parallèlogramme. On trace la perpendiculaire à (CR) passant par P : elle coupe (CR) en H. Soient L, I, X les symétriques de O, R, C par rapport à (PH).

1) Démontre que O, L, P sont alignés, ainsi que R, C, I, X.

2) Que peux-tu dire de LPXI ? Prouve-le.

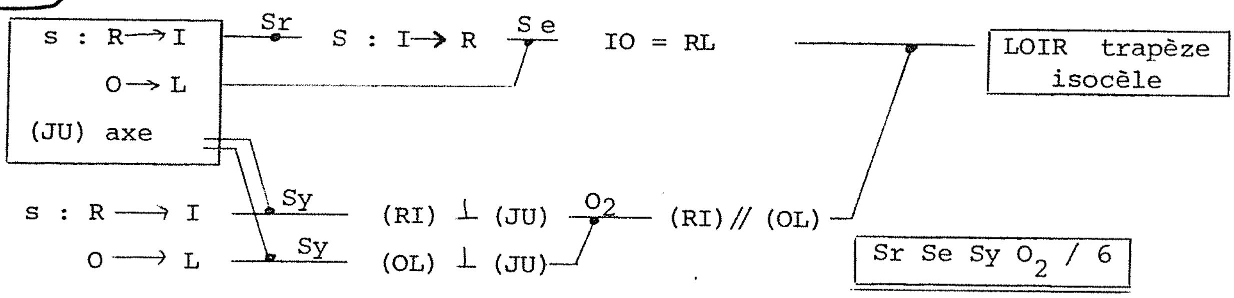
9



NB: α : on utilise la caractérisation du rectangle : parallélogramme dont les diagonales ont même longueur que l'on peut déduire de M_4.

9 bis Même démonstration en faisant intervenir le milieu S de [RO].
En fait on peut faire cet exercice avec comme hypothèse plus restrictive S appartient à (JU).

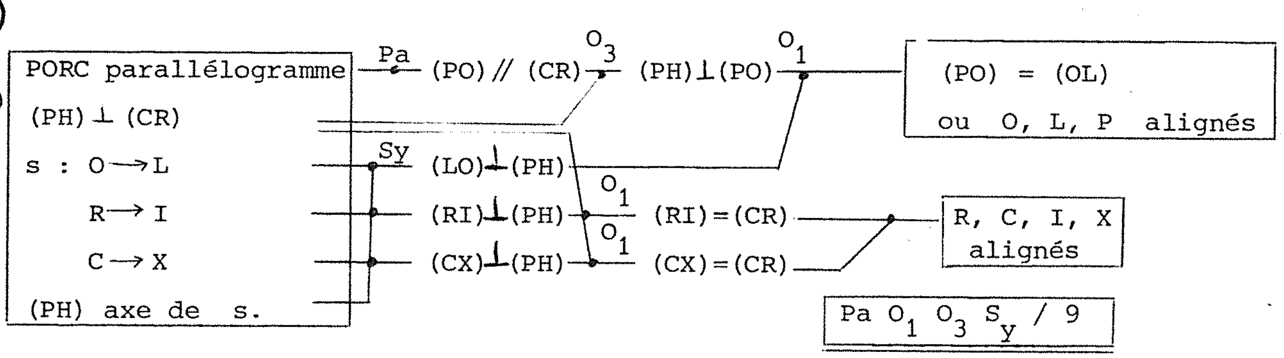
9 ter



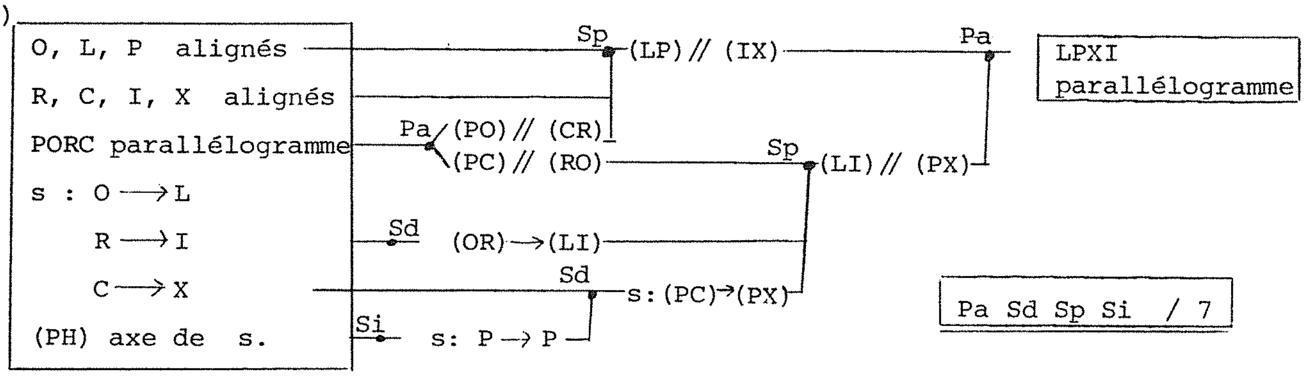
N.B. On pourrait poursuivre en démontrant que les diagonales sont de même longueur, que (RO), (IL) et (JU) sont concourantes.

10

1)

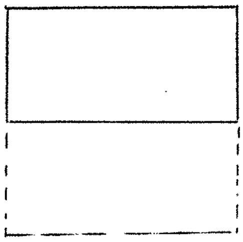


2)



SYMETRIE ORTHOGONALE

11

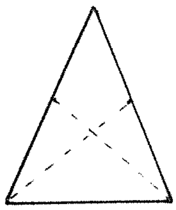


ROSE est un rectangle. R' et O' sont les images de R et O dans la symétrie d'axe (ES).

1) Démontre que E est milieu de [RR'] et S milieu de [OO']

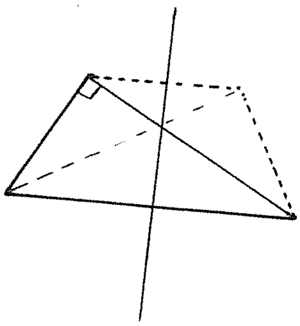
2) Démontre que R'O'SE est un rectangle.

12



Démontre que dans un triangle isocèle les deux médianes issues des extrémités de la base ont même longueur.

13



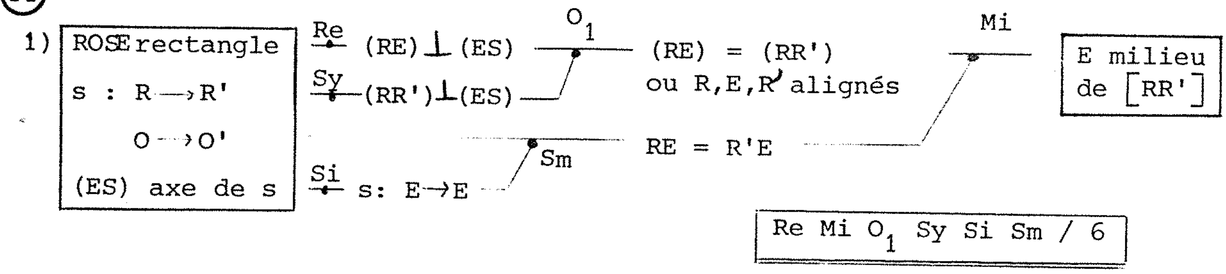
RAP est un triangle rectangle en R. d est la médiatrice de [AP] , et T le symétrique de R par rapport à d.

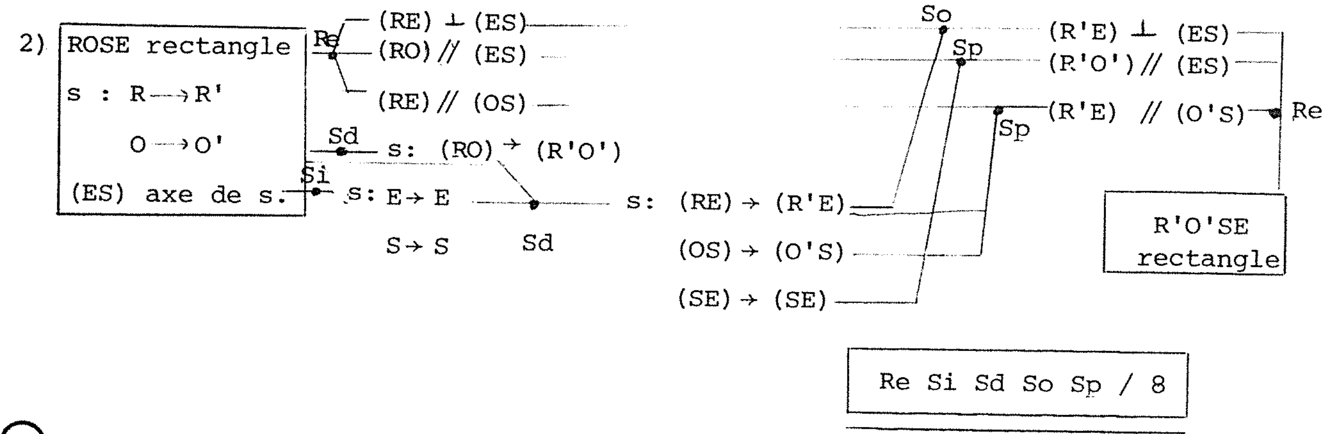
1) Que dire du triangle PAT ? Démontre-le.

2) Que dire de TRAP ? Démontre-le.

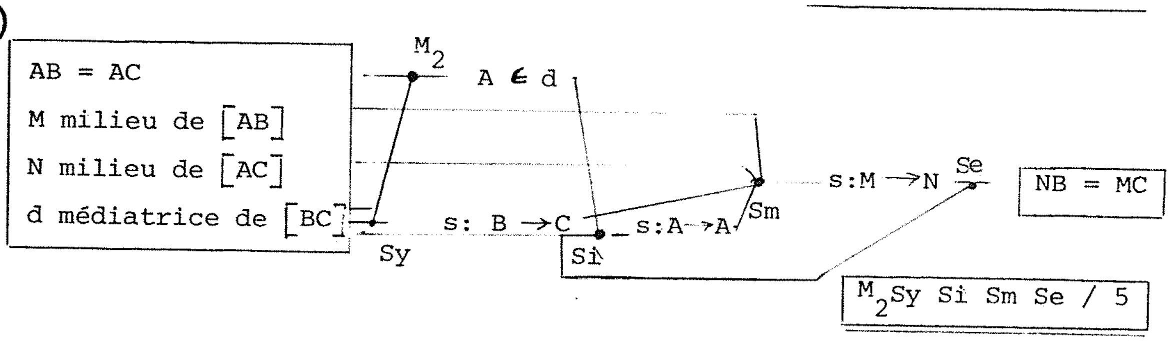
3) Démontre que les droites d, (RP) et (TA) sont concourantes.

11



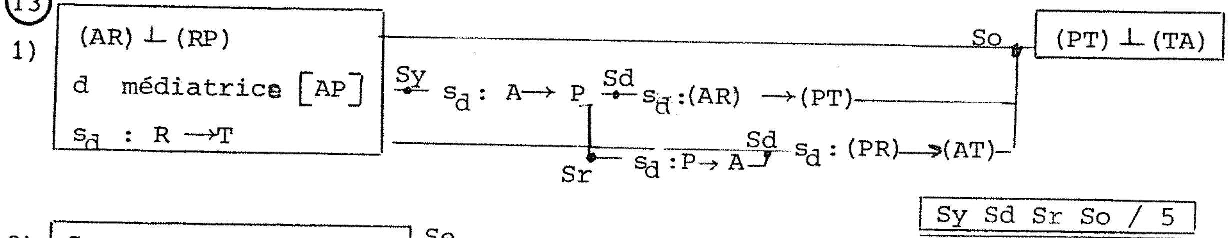


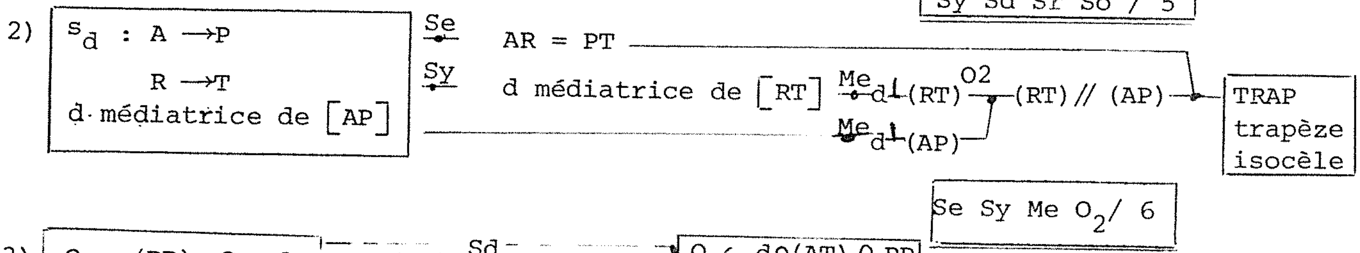
12

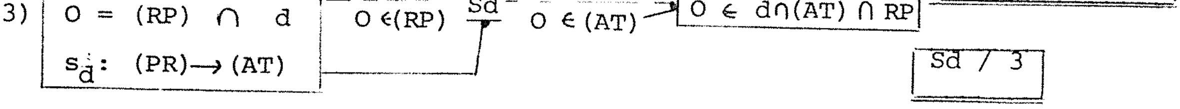


N.B: Sans introduire la symétrie il nous semble que de tels exercices sont hors de propos en 4ème. L'utilisation de Sm en y regardant de près est délicate : il suffit d'essayer de rédiger la démonstration pour s'en convaincre.

13







NB: Il y a pour 3) un réel problème de présentation.

BILAN

A propos des transformations au niveau de la 4ème une question se pose : peut-on faire acquérir en même temps la notion de transformation et l'utiliser pour faire des démonstrations ?

Il nous semble que non. Les recherches récentes en didactique des mathématiques faites à Grenoble tendraient à confirmer notre impression : il semblerait qu'il ne puisse y avoir démonstration qu'après que la connaissance des objets en jeu soit passée par divers stades dont le dernier est sa constitution théorique (pour le sujet).
Quant à nous, nous voyons plusieurs étapes :

1) familiarisation : aspect concret.
2) construction de figures
3) connaissance des propriétés de la transformation(les invariants)
4) démonstrations :
- premier niveau : traduction de la définition en langage de géométrie des figures.
- deuxième niveau : utilisation des propriétés des transformations.
- troisième niveau : utilisation d'une transformation pour résoudre un problème.

Pour la classe de 4ème, les trois premiers niveaux nous semblent largement suffisants. Si nous avons quand même donné des exercices et organigrammes, et uniquement pour la symétrie orthogonale, c'est davantage pour montrer que le "décorticage" des démonstrations peut se faire de la même manière. Les démonstrations choisies sont relativement simples et ne font pas intervenir de techniques propres. Cependant le maniement des propriétés de la symétrie se révèle parfois délicat, en particulier l'intervention des points invariants. D'autre part certaines propriétés (image d'un parallélogramme....) sont évidentes et les démonstrations pour être rigoureuses sont longues et difficiles à rédiger. (cf ex 5) et il est souvent difficile de faire le partage entre les propriétés admises et celles qui sont à démontrer.

De plus cela augmente d'un coup le stock d'une dizaine d'énoncés et il nous semble que ce stock doit être réduit au maximum. Il faudrait aussi se demander si l'un des intérêts des transformations étudiées n'est pas l'aspect isométrie (conservation de la distance) : c'est en tout cas ce qui a motivé leur introduction pour remplacer les cas d'égalité des triangles. Or, si cela est, il faudrait revoir la géométrie des figures en 4ème et introduire davantage de notions métriques pour débuter.

Pour terminer, une question ouverte : est-ce que l'aspect morphisme des transformations (l'image du milieu d'un segment est le milieu....) ne favoriserait pas les "automathismes" (le carré de la somme est la somme des carrés....) ?

Exemple de feuille de travail pour l'élève

1 - d et d' sont deux droites sécantes en O. M est un point quelconque. N est son symétrique par rapport à d et P son symétrique par rapport à d'. Prouve que O appartient à la médiatrice de [NP].

2 - A est un point d'une droite d. B est un point n'appartenant pas à d. B' est le symétrique de B par rapport à d et A' le symétrique de A par rapport à (BB').

1) Que dire de ABB' ? Prouve-le.

2) Que dire de ABA'B' ? Prouve-le.

3 - d est une droite, V et L sont deux points n'appartenant pas à d tels que la droite (VL) coupe d en S. E et O sont les symétriques de V et L respectivement par rapport à d.

1) Démontre que E, S, O sont alignés.

2) Démontre que d, (VL) et (EO) sont trois droites concourantes.

3) Compare les longueurs VL et OE.

4 - CER est un triangle quelconque. F est l'image de E dans la symétrie d'axe (CR). Compare les angles $\widehat{CER}$ et $\widehat{CFR}$.

Que dire des droites (CF) et (FR) si (CE) et (ER) sont perpendiculaires ? Explique.

5 - Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et d une droite passant par O. Soit A un point de $\mathcal{C}$ et A' son symétrique par rapport à d.

1) Démontre que A' est sur $\mathcal{C}$.

2) Que peut-on en déduire pour tout diamètre d'un cercle ?

6 - LOB est un triangle. I est le milieu de [LO]. O' et L' sont les symétriques de O et L par rapport à (BI).

Quelle est la nature de OO'LL' ? Prouve-le.

7 - RAP est un triangle rectangle en R ; d est la médiatrice de [AP], et T est le symétrique de R par rapport à d.

1) Que dire du triangle PAT ? Démontre-le.

2) Que dire de TRAP ? Démontre-le. Compare les longueurs de ses diagonales.

3) Démontre que les droites d, (RP) et (TA) sont concourantes.

8 - Recherche des figures ayant : 1 axe de symétrie, 2 axes de symétrie, 3 axes de symétrie, 4 axes de symétrie, plus de 4 axes de symétrie.

PARTIE V

POUR CONJECTURER - ENRICHIR : OCDE

PARTIE V

POUR CONJECTURER - ENRICHIR : O C D E
ou
L'intégration de la démonstration dans les activités mathématiques.

" Si vous désirez une description de la méthode scientifique qui tienne en trois mots, je propose : Conjecturer et tester " (Pólya).

En 4ème l'activité principale est l'apprentissage de la démonstration, mais la démonstration n'est qu'un maillon de la chaîne.

Observer - conjecturer - démontrer - enrichir - observer - conjecturer - démontrer ....

Or dans notre enseignement deux maillons ne figurent pas : "Conjecturer" et "enrichir" ; et les deux autres sont dans les programmes, répartis dans le temps.

6ème 5ème observation
4ème 3ème démonstration

. Pourquoi conjecturer ? Se poser des questions.
"Pourquoi le montrer puisqu'il dit que c'est vrai" ?

Une activité de démonstration est d'autant mieux ressentie et réussie qu'elle s'inscrit dans le cycle O C D E . Il est plus motivant de démontrer sa conjecture (c'est à dire prouver aux autres que sa conjecture est bonne) plutôt que de démontrer un résultat annoncé vrai par le maître. La démonstration peut paraître alors une corvée pour faire plaisir au maître.

. Pourquoi enrichir ? Se poser des problèmes.

Un problème de mathématiques n'est jamais terminé. Une fois un résultat démontré il faut voir plus loin. Ne doit-on pas apprendre aux élèves à enrichir des situations, à se poser d'autres problèmes du même type à poser des problèmes à la classe ?

. Les intérêts de telles activités sont nombreux :

* Rechercher en commun des problèmes posés par les élèves : le professeur peut expliquer sa propre démarche de recherche sur un problème qu'il ne sait pas à priori résoudre.

* Descendre le professeur de son piédestal : le professeur n'est plus le savoir, tout au plus est-il celui qui possède des méthodes de recherche.

* Susciter des discussions entre élèves.

* Déconditionner les élèves.

Dans ce qui suit on trouvera des exemples de problèmes de recherche, d'enrichissements d'exercices classiques, de conjectures. Certaines activités ne peuvent donner lieu à des démonstrations, au niveau 4ème, mais rien n'interdit d'en rechercher : l'activité de recherche est souvent plus riche que le résultat.

SOMMAIRE

Remarque : O C D E nous interpelle sur la façon de rédiger les problèmes.

BIBLIOGRAPHIE

- Divers articles dans le bulletin de L'APM
- La mystification mathématique (Bouvier) Hermann.
- Actes du Colloque de Lyon sur le problème. Mai 1982 (Irem de Lyon).

1 Constructions

Bien des activités de construction conduisent à des conjectures (se poser des questions) à des justifications et à des enrichissements.

1 Peux-tu dessiner un triangle ayant un angle droit ?

2 Peux-tu dessiner un triangle ayant deux angles droits ?

3 Peux-tu dessiner un quadrilatère ayant des diagonales perpendiculaires ?

4 Peux tu dessiner un quadrilatère ayant des diagonales parallèles ?

5 Peux-tu dessiner un quadrilatère ayant des diagonales égales ?

6 Peux-tu dessiner un parallélogramme ayant un angle droit et un seul ?

7 Peux-tu dessiner un quadrilatère ayant trois angles droits (trois seulement) ?

8 Peux-tu dessiner un quadrilatère ayant 2 côtés seulement parallèles et de même longueur ?

9 Peux-tu dessiner un quadrilatère ayant des côtés opposés parallèles deux à deux ?

10 Peux-tu dessiner un quadrilatère ayant deux côtés opposés perpendiculaires ?

11 FLAC est un quadrilatère tel que FL = AC = 3 ; LA = FC = 5
Peux-tu dessiner des quadrilatères FLAC ?

12 On donne un cercle et un point extérieur à ce cercle. Peux-tu tracer à la règle et au compas les tangentes au cercle issues de ce point ?

13 On donne deux cercles. Peux-tu tracer à la règle et au compas les tangentes communes aux deux cercles ?

14 Peux-tu poser à tes camarades et à ton professeur de tels problèmes ? Cherche.

Bibliographie :

Activité Mathématique en 4ème - 3ème - APMEP.

2 Inscriptions

1 On te donne trois points non alignés T,R,I.

a) Peux-tu dessiner un triangle rectangle circonscrit au triangle T R I ?

b) Peux-tu dessiner un triangle isocèle circonscrit au triangle T R I ?

c) Peux-tu dessiner un triangle équilatéral, un rectangle, un carré.... circonscrit au triangle T R I ?

d) Imagine d'autres situations avec un triangle.

2 On peut se poser beaucoup de problèmes de ce genre.

Exemples :

A N G E est un quadrilatère convexe.

a) Peux-tu dessiner un triangle, un losange, un carré, un rectangle,.... circonscrit au quadrilatère A N G E ?

b) Peux-tu dessiner un parallélogramme inscrit dans un cercle ?

3 Imagine des situations analogues .

Commentaires sur 1 et 2

- Toute construction demande un programme de construction.
  Celui-ci devra être justifié par les élèves si cela est possible, sinon il sera validé par le maître après avoir été testé dans de nombreux cas de figures.

- Les élèves pourraient constituer une banque de leurs propres problèmes.

3 Enrichir des situations classiques

1 Les élèves connaissent le résultat : les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes. Ce résultat peut être enrichi.

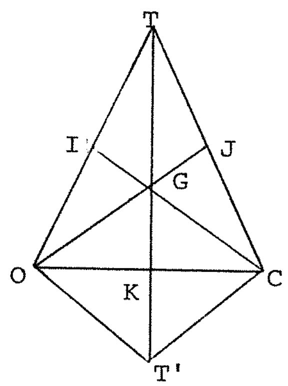
. D_1, D_2, D_3 sont trois droites concourantes en H. Peux-tu tracer un triangle dont D_1, D_2 et D_3 sont les hauteurs ?
Combien y a t-il de solutions ? Observe-les.

Si tu ne trouves pas :
(On suppose D_1 non perpendiculaire à D_2 et à D_3 ; D_2 non perpendiculaire à D_3).

. Soit A un point de D_1. La perpendiculaire à D_2 passant par A coupe D_3 en B. La perpendiculaire à D_3 passant par A coupe D_2 en C. Observe BC et D_1. Justifie.

. Que se passe-t-il si $D_1 \perp D_2$ (ou $D_2 \perp D_3$ ou $D_1 \perp D_3$) ?

2 Voici un autre exercice classique :



T O C est un triangle. I et J les milieux respectifs de OT et TC
CI et OJ se coupent en G. T' est le symétrique de T par rapport à G.

. Observe le quadrilatère OGCT'.
Justifie ta conjecture.

. Que dire des 3 médianes d'un triangle ?

. Compare GK et GT ; GK et TK.

Enrichissement:

D_1 , D_2 et D_3 sont trois droites concourantes en G. Peux-tu construire ABC tel que D_1 , D_2 et D_3 soient les médianes du triangle ABC?

3 Peux-tu te poser des problèmes semblables ?
(avec les médiatrices, les bissectrices,.... ?)

4 Autres exercices, fréquents dans les manuels, que l'on peut enrichir.

a) M I E L est un parallélogramme de centre O.
Une droite passant par O coupe (MI) et (LE) en A et U.
Une autre droite passant par O coupe (ML) et (IE) en B et S.
Observe A B U S. Prouve ta conjecture.

Enrichissement :

- Inscris plusieurs parallélogrammes dans un parallélogramme donné. (Donne le programme de construction et la justification).
- Peux-tu tracer un parallélogramme circonscrit à un parallélogramme donné?
- Peux-tu inscrire un rectangle, un losange, un carré dans un parallélogramme donné ?
- Peux-tu trouver d'autres enrichissements ?

b) O U R S est un quadrilatère. M I E L est le quadrilatère qui joint les milieux des côtés de O U R S.
Quelle est la nature du quadrilatère M I E L?

Enrichissements :

- M I E L peut-il être un rectangle ?
- M I E L peut-il être un losange ?
- M I E L peut-il être un carré ?

On se donne M I E L peut-on trouver O U R S ?
Y a-t-il plusieurs solutions ? Observe la somme des longueurs des diagonales de O U R S dans tous les cas de figures. Justifie.

5 Les exercices de tracés qui suivent sont des enrichissements d'exercices (facilement reconnaissables) ou d'énoncés du cours.

Ils permettent :

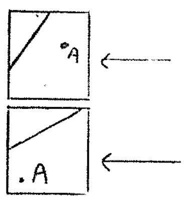
- d'observer
- de conjecturer (peut-être en disposant 2 feuilles côte à côte)
- de reconnaître une situation (énoncé du cours, exercice)
- d'enrichir cette situation.

Certains exercices font intervenir soit la symétrie centrale soit la symétrie axiale. Ces démonstrations sont difficiles pour un élève de 4ème, sauf si ces exercices apparaissent comme des enrichissements d'exercices déjà traités.

<u>Préambule</u> : Ce que l'on sait faire.

- toute construction ne dépassant pas les limites de la feuille utilisant règle graduée, compas, équerre...
- Tracer une parallèle à une droite donnée passant par 1 point donné

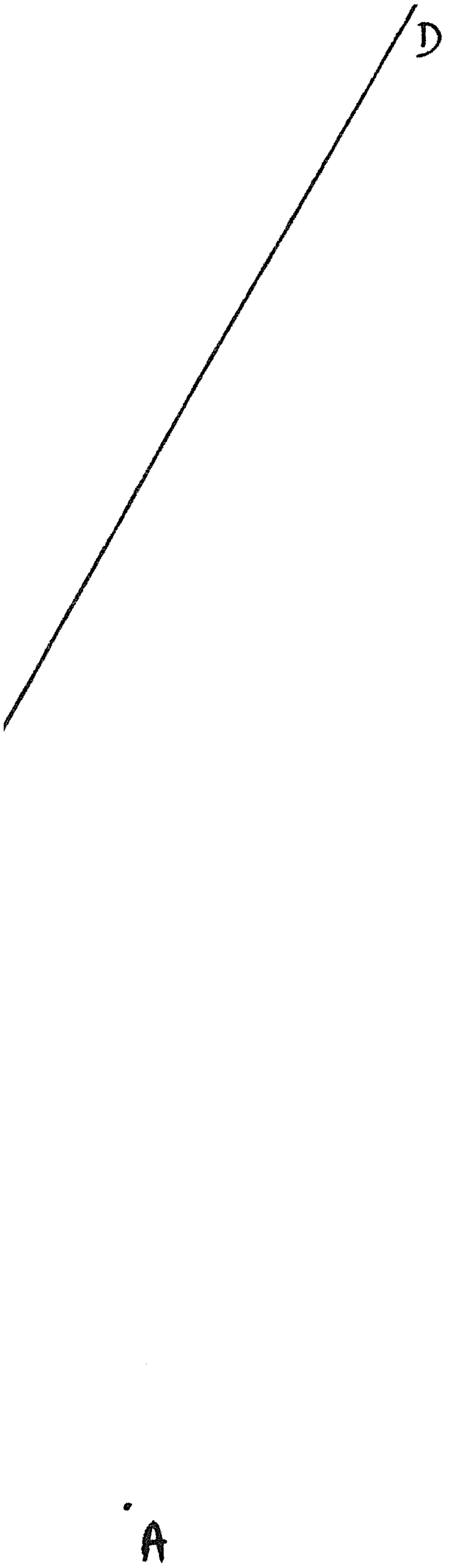
exemple :



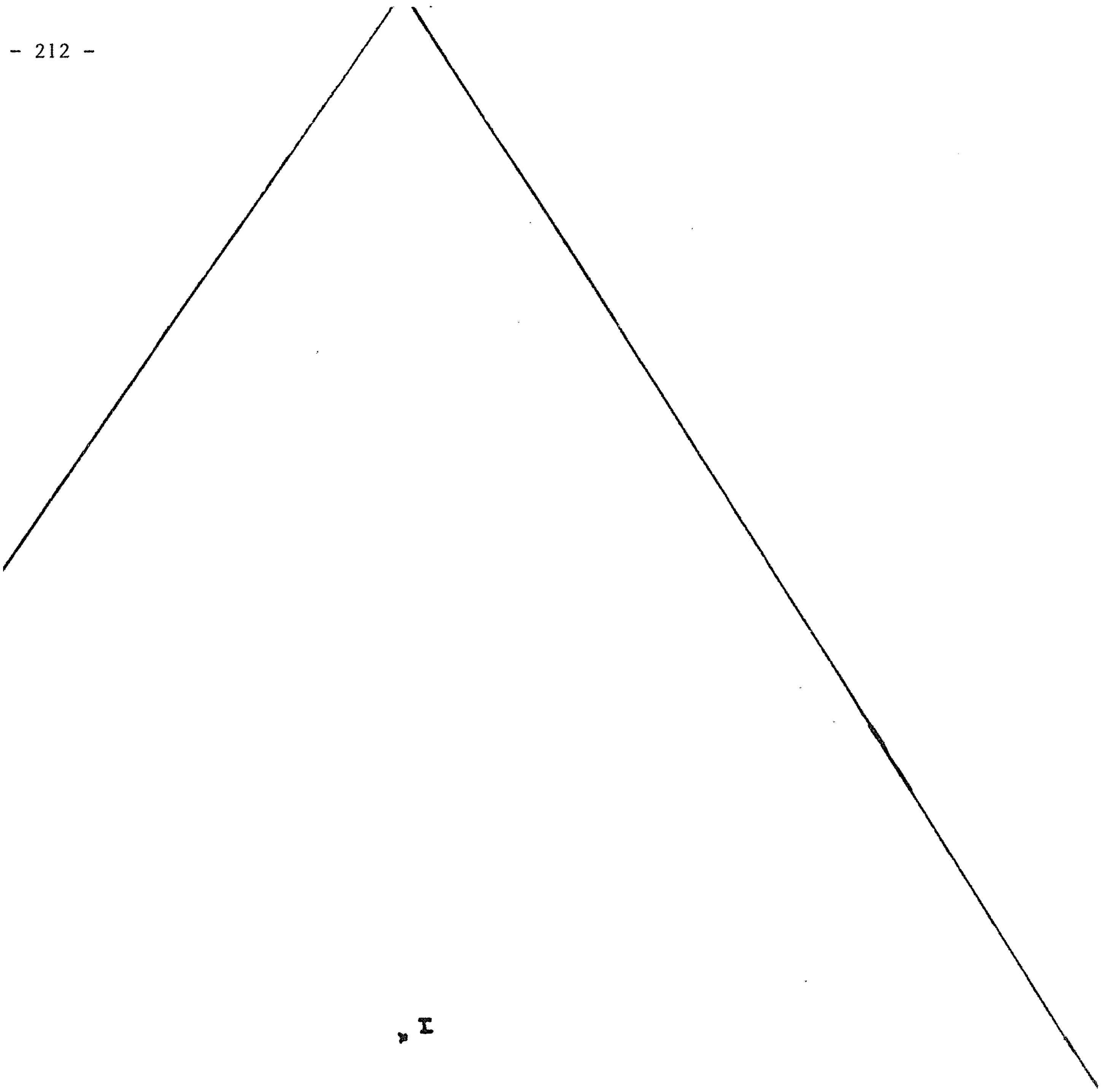
On sait tracer la perpendiculaire : directement avec par exemple l'équerre ou le compas.

On ne sait pas le faire directement.

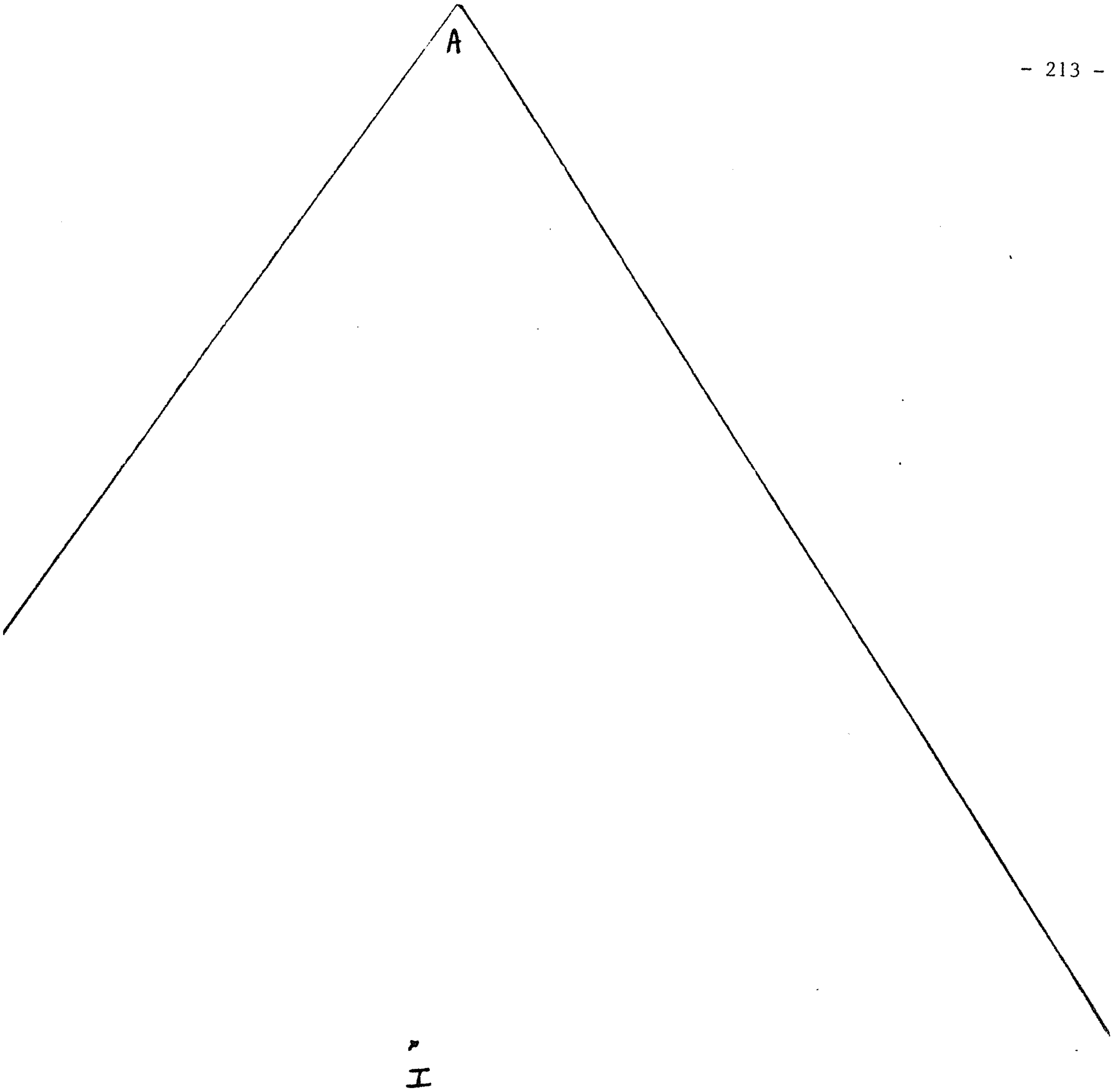
<u>Remarque</u> : Toute construction dépend des positions des éléments déjà tracés sur la feuille.



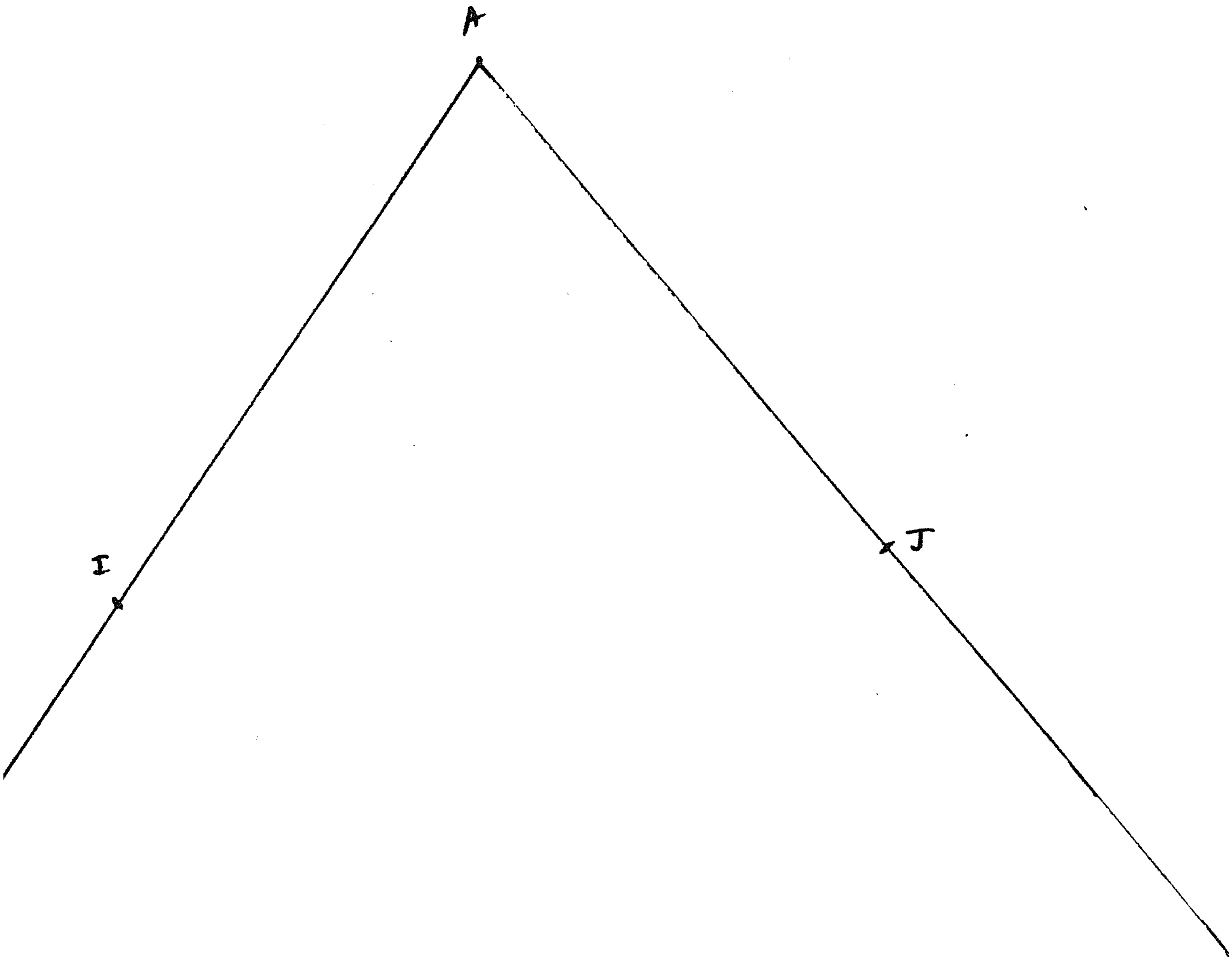
a) Trace et justifie la construction de la perpendiculaire à D passant par A.



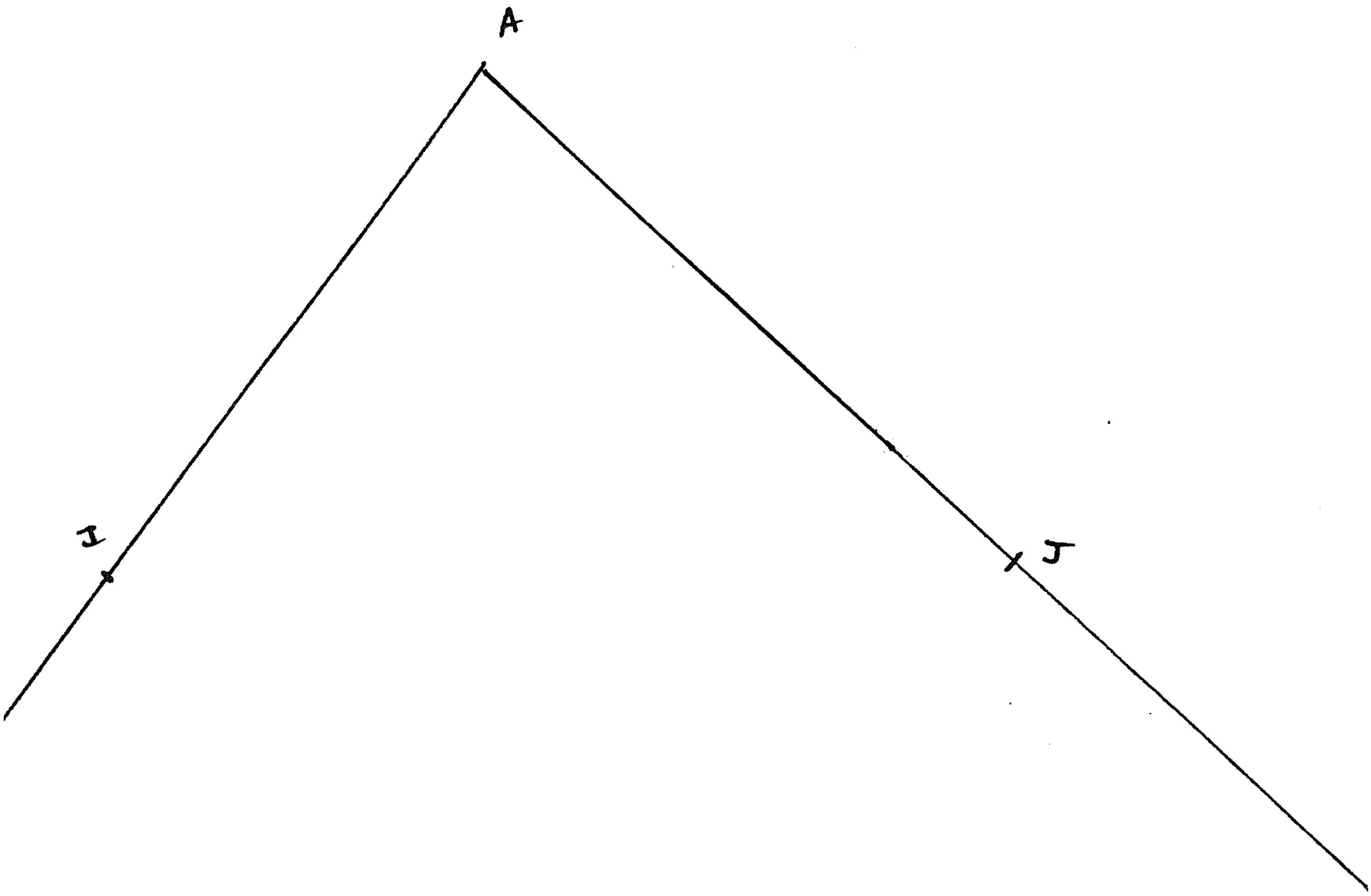
b) ABC est un triangle. Il ne loge pas dans la feuille. On connaît I milieu de BC. Peux-tu tracer BC ? Justifie.



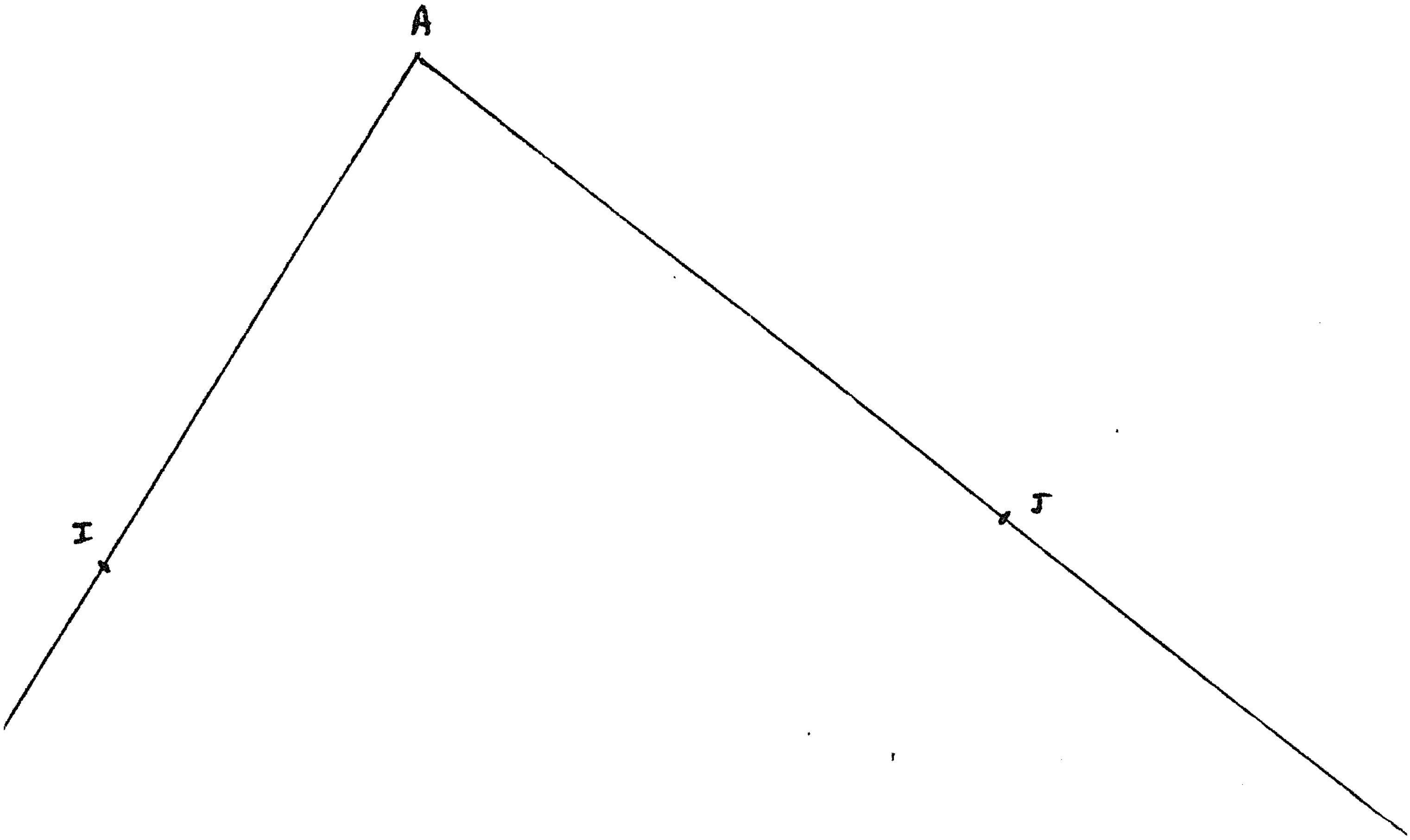
c) ABC est un triangle qui ne tient pas dans la feuille. I est le milieu de BC. Peux-tu trouver une méthode pour connaître les mesures de AB, AC et BC? (Il faudra mesurer). Justifie.



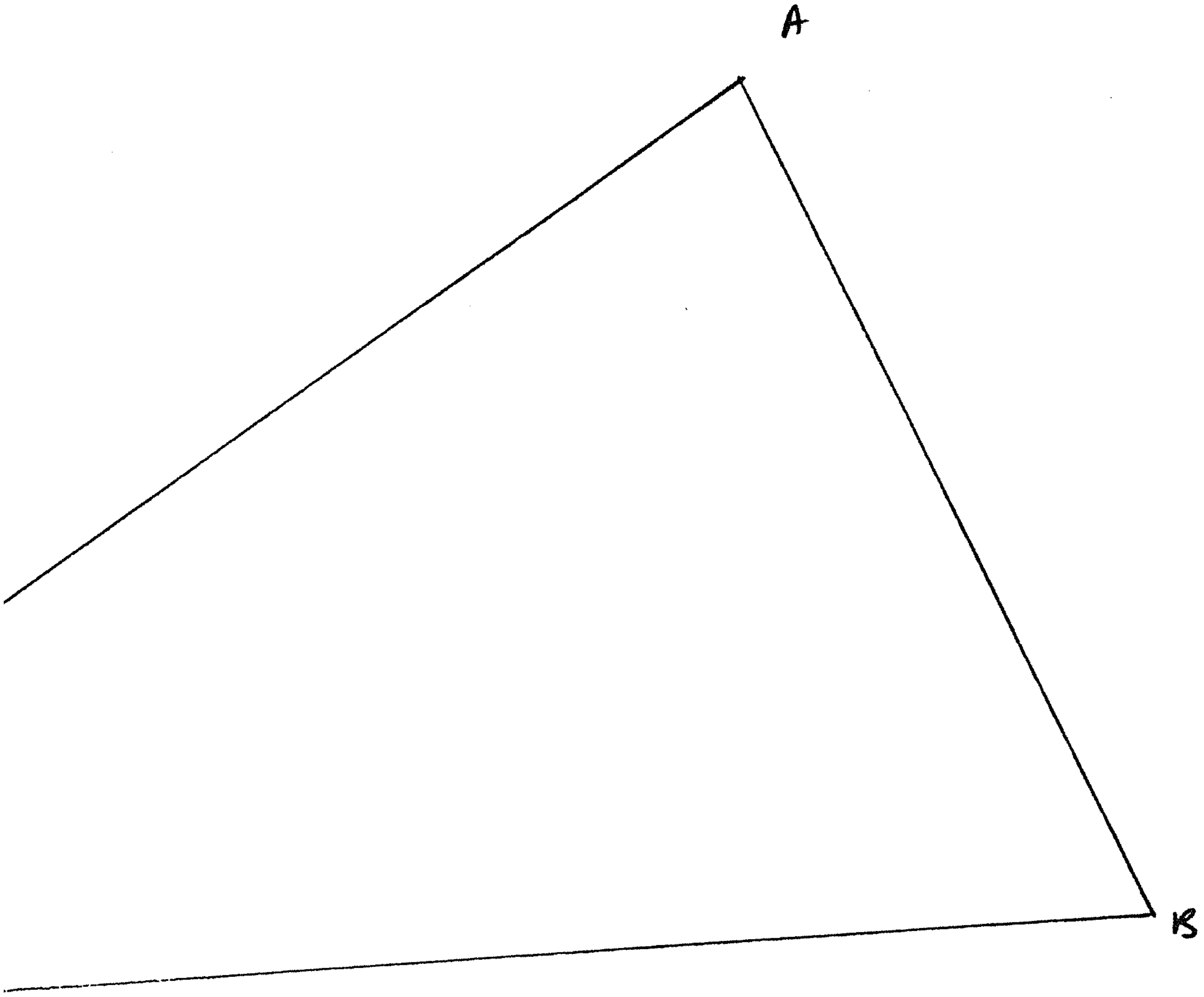
d) ABC est un triangle qui ne tient pas dans la feuille I et J sont les milieux des côtés AB et AC. Trace le côté BC. Justifie.



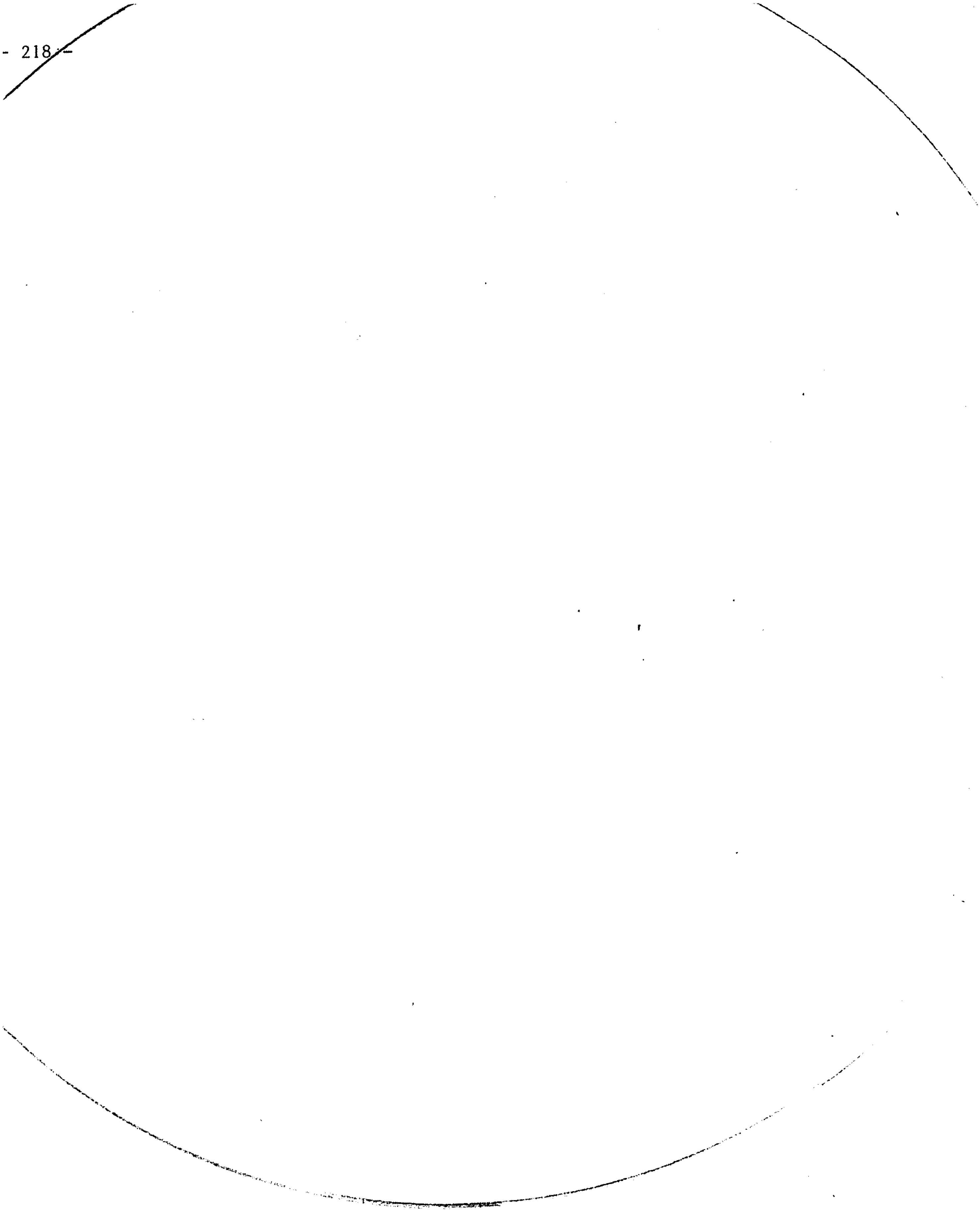
e) ABC est un triangle qui ne tient pas dans la feuille I et J sont les milieux de AB et AC. Trace les 3 médiatrices de A, B, C. Justifie.



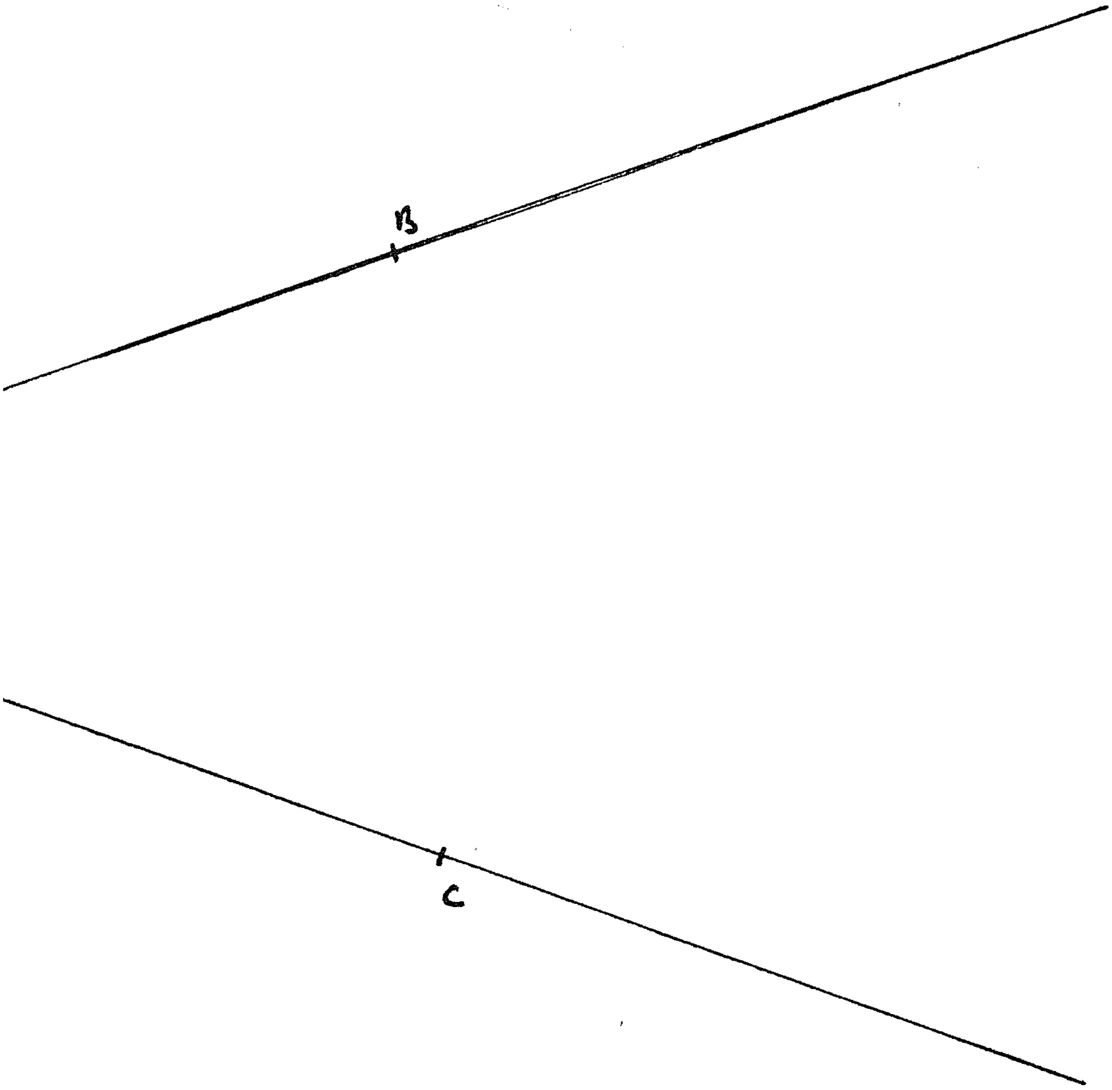
f) ABC est un triangle qui ne tient pas dans la feuille. I et J sont les milieux de AB et AC. Trace les 3 médianes du triangle ABC. Justifie.



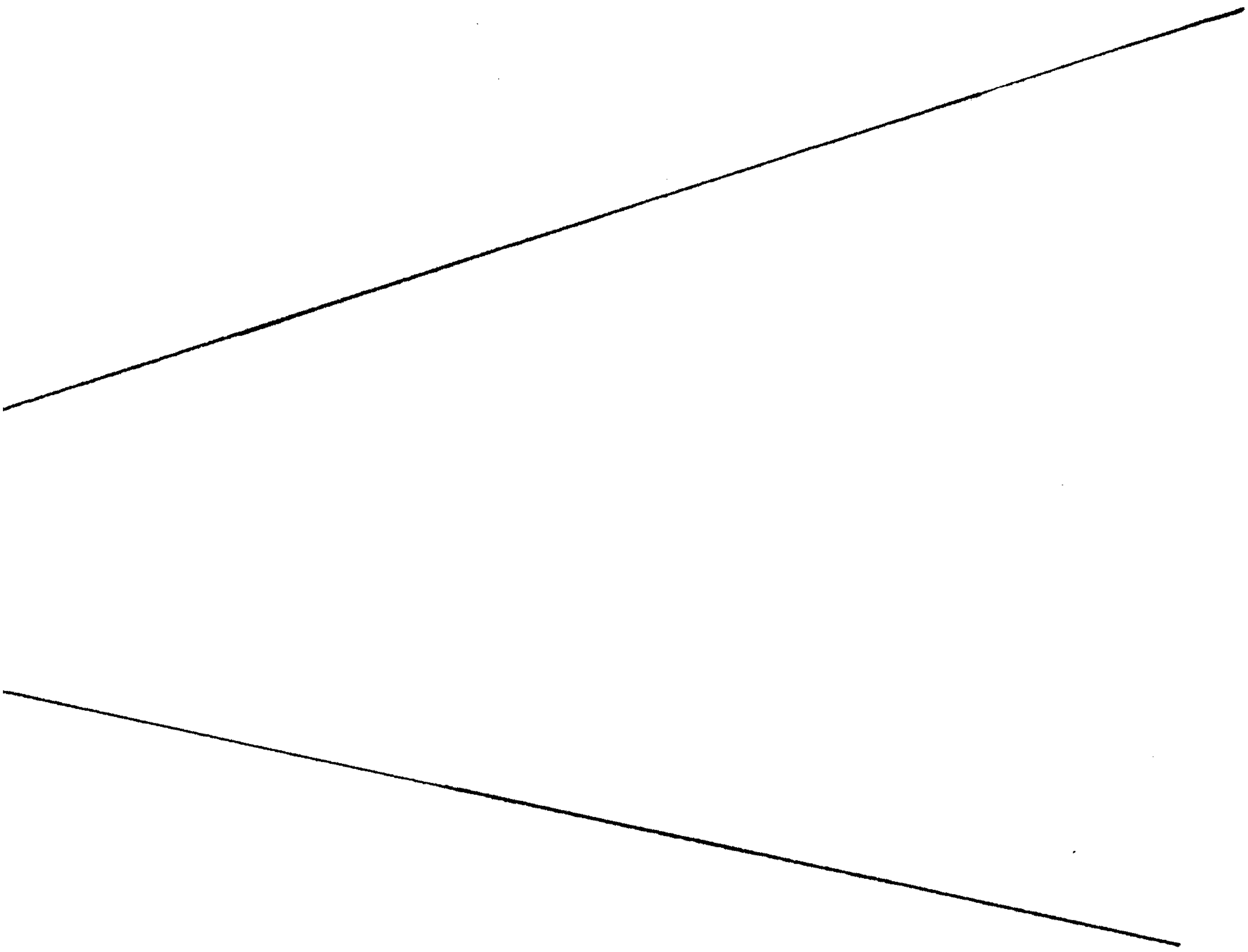
g) ABC est un triangle quï ne tient pas dans la feuille. Trace les 3 hauteurs. Justifie.



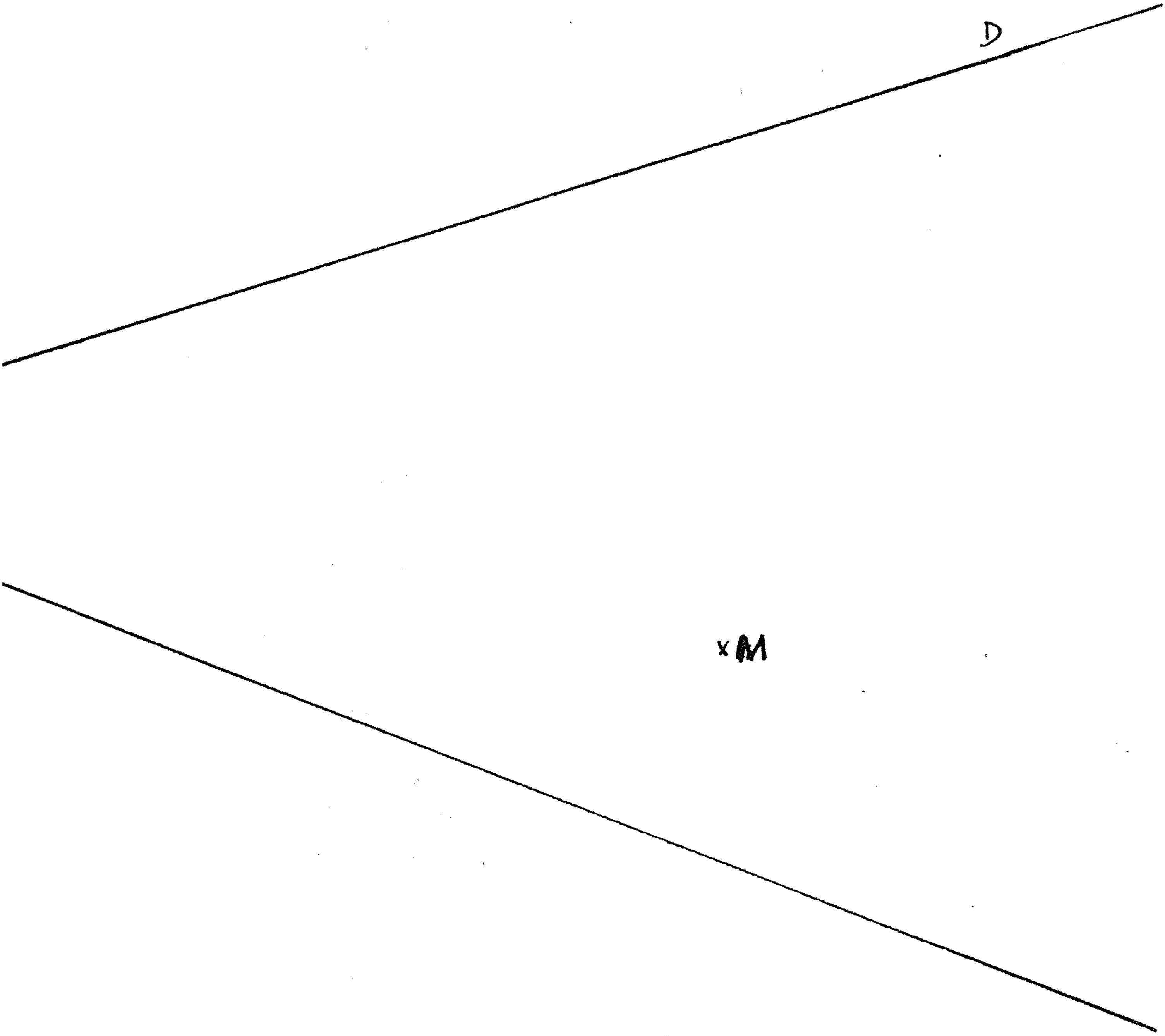
h) Un cercle ne loge pas dans la feuille. Et on ne connaît pas son centre. Peux-tu le trouver? Justifie.



i) Deux droites AB et AC se coupent en A. Peux-tu trouver une méthode pour mesurer AB et AC ?
(Cet exercice est difficile pour un élève de 4ème).



j) Peux tu tracer la bissectrice de ces deux droites ? Justifie.
Cet exercice, facile par pliage, est difficile par tracé pour un élève de 4ème.



k) Deux droites D et D' se coupent en A. A est situé hors de la feuille. Peux-tu tracer la droite AM.

4 A propos de polygônes

1 Etant donné un triangle A'B'C' peut-on construire A B C tel que A'B'C' soit le "triangle des milieux" de A B C ? Combien y a t-il de solutions ?

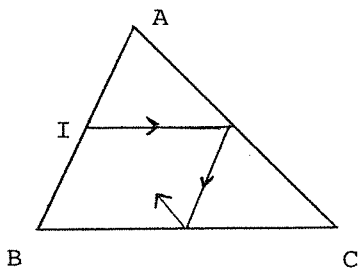
2 A'B'C'D' est un quadrilatère peut-on construire A B C D pour que A'B'C'D' soit le "quadrilatère des milieux" de A B C D ?

a. Combien y a t-il de solutions ? Cela est-il toujours possible ?
b. Peux-tu justifier le programme de construction ? (Difficile en 4ème).
c. Observe les aires des polygones construits.
d. A B C D peut-il être croisé ? non convexe non croisé ?
e. Observe les périmètres des polygones A B C D ?
f. Que se passe-t-il si A'B'C'D' est un parallélogramme aplati ?

3 On peut continuer avec le pentagone. Essaie.

<u>Une autre façon de voir les problèmes. Ce qui mène à d'autres conjectures.</u>

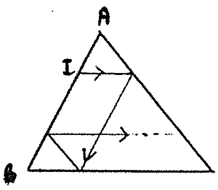
4

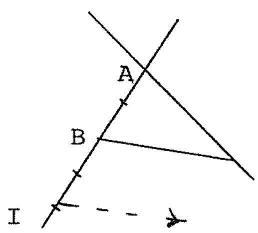


Une boule part de I milieu de A B suivant la direction B C. Où arrive-t-elle ? Elle repart suivant la direction AB. Où arrive-t-elle ? Elle repart suivant la direction A C. Observe.- Justifie.

Que se passe t-il si I n'est plus le milieu de A B ou si I n'est plus entre A et B ? Conjecture.

(Tu n'es pas en mesure de justifier sauf si I est le symétrique de A par rapport à B).



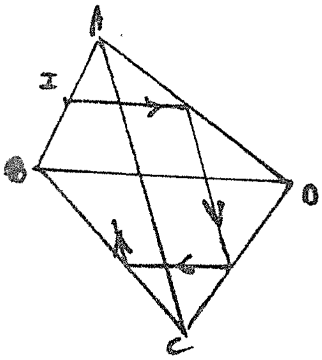


. Observe les figures obtenues.

. Mesure la longueur de la ligne brisée obtenue.

. Compare-la au périmètre du triangle.

5 Dans le cas d'un quadrilatère A B C D convexe.

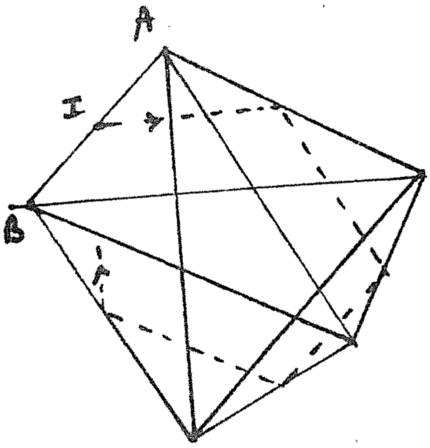


a. I est le milieu de [AB]. Une balle part de I suivant la direction (BD) où arrive t-elle ? Puis elle repart suivant la direction (AC) etc... Observe.

b. Que se passe t-il si I n'est plus le milieu de [AB]. (Tu n'es pas en mesure de prouver ta conjecture).

- Peux-tu inscrire plusieurs parallélogrammes dans un quadrilatère quelconque?
- Peux-tu inscrire un rectangle ? un carré ?
- Observe les périmètres des parallélogrammes inscrits.
- Observe les aires.

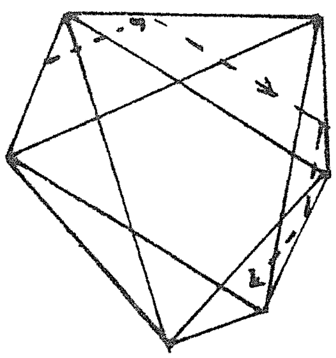
6 Dans le cas du pentagone.



Que se passe-t-il si I est le milieu ?

Si I n'est pas le milieu ?

Dans l'hexagone

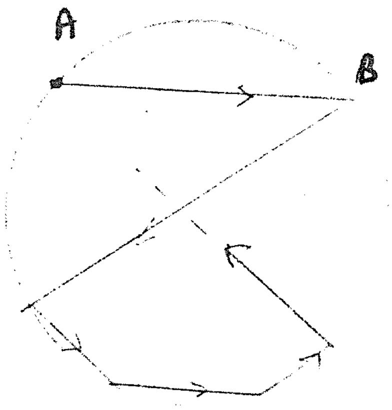


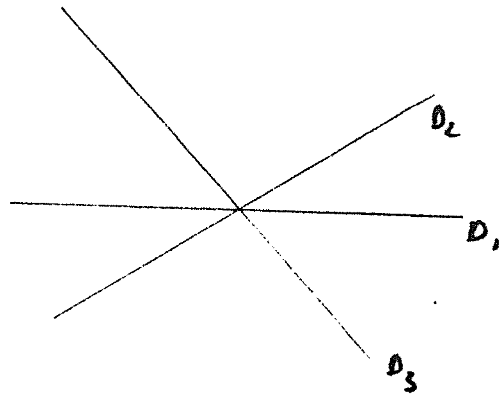
même exercice

7 En regardant les exercices 3, 4, 5 et 6 quelle conjecture peux-tu faire ? Si tu ne vois pas, refais le même type d'exercice avec un heptagone, un octogone .....

8 Beaucoup de résultats ne sont pas justifiés ce qui n'empêche pas de continuer à conjecturer :

Dans le cercle.

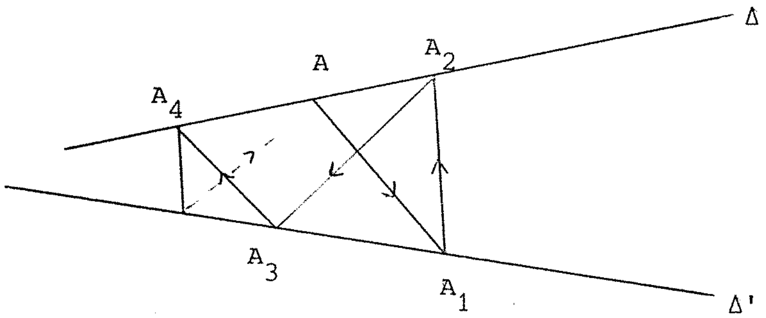


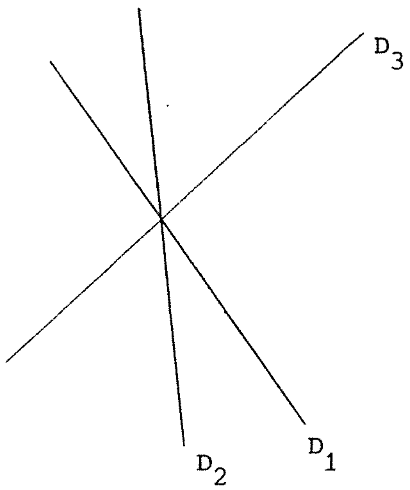


On se donne 3 directions D_1, D_2, D_3 une boule part de A suivant la direction D_1 elle arrive en B, puis repart suivant la direction D_2 etc... Observe (tu n'es pas en mesure de prouver ta conjecture !).

9 Sur 2 droites Δ et Δ'.

On donne 2 droites Δ et Δ' et 3 directions D_1 D_2 D_3 ne contenant pas celles de Δ et Δ'.





Une balle part de A suivant D_1.

Elle arrive en A_1 puis repart suivant D_2 etc...

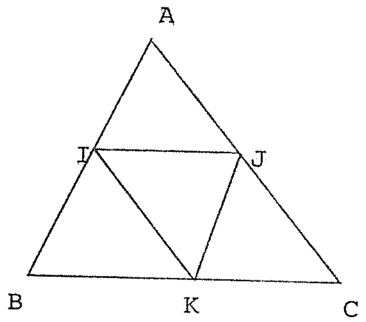
Observe. (Tu n'es pas en mesure de prouver ta conjecture).

Bibliographie : .Quelques lumières sur les projecteurs ;cahier du Clain n° 14.
.Activité Mathématique 4ème - 3ème. Tome 2.

5 Problèmes d'aires

N.B. Les transformations isométriques conservent les aires.

1

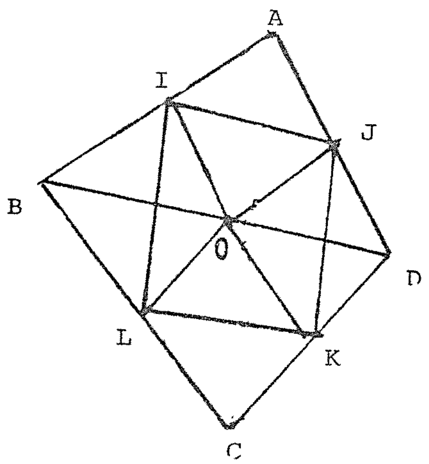


Observe l'aire de I J K et celle de A B C. Que vaut celle de A B C par rapport à celle de I J K ?

Une méthode pour le montrer :
Quelle transformation fait passer A I J sur I J K ? Que dire des aires de ces 2 triangles ?

Idem entre I J K et I K B , I J K et J K C. Conclus.

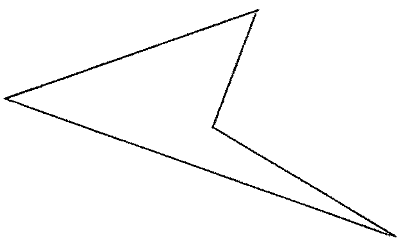
2 a) Cas du quadrilatère convexe.

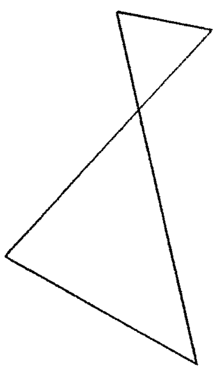


I J K L est le quadrilatère des milieux de A B C D. O est le milieu de B D. Conjecturer le rapport de l'aire de I J K L et de l'aire de A B C D :
Pour le montrer :
- Quelle transformation fait passer A I J sur I J O ?
- Quelle transformation fait passer O K L sur L K C ?

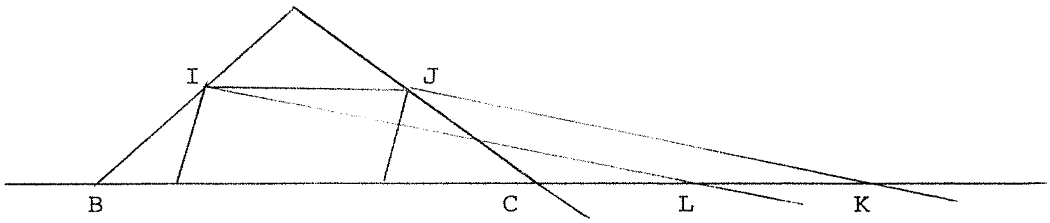
- Quelle transformation fait passer J O K sur I L B ? J D K sur I O L? Conclus.

b) Cette méthode est-elle applicable si le quadrilatère n'est pas convexe ?





3 Voici une autre méthode pour prouver la conjecture du 2a :



Montre que tous les parallélogrammes de côtés IJ, et LK (LK porté par la droite BC) ont même aire.

Applique ce résultat pour démontrer 2a. Cette méthode est-elle applicable au 1b ?

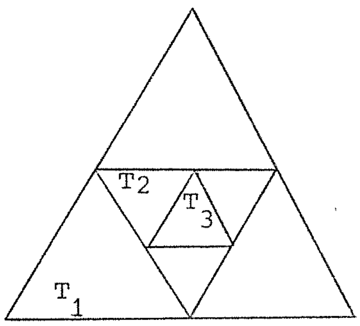
4 Se méfier des conjectures.

. Dans le cas du triangle $\dfrac{\text{Aire du triangle des milieux}}{\text{Aire du triangle}} = \dfrac{1}{4}$

. Dans le cas du quadrilatère convexe. $\dfrac{\text{Aire du quadrilatère des milieux}}{\text{Aire du quadrilatère}} = \dfrac{1}{2}$

. Peut-on trouver une formule pour le pentagone convexe, l'hexagone convexe....

5 Un autre enrichissement pour travailler sur les puissances :



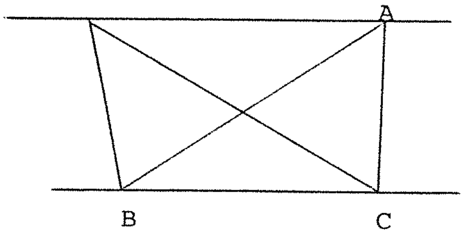
. Que vaut l'aire de T_2 par rapport à l'aire de T_1 ?

. Que vaut l'aire de T_3 par rapport à l'aire de T_1 ?

Continuer avec T_4, T_5 .

Même exercice avec un quadrilatère...

6 Problèmes d'aires et périmètres

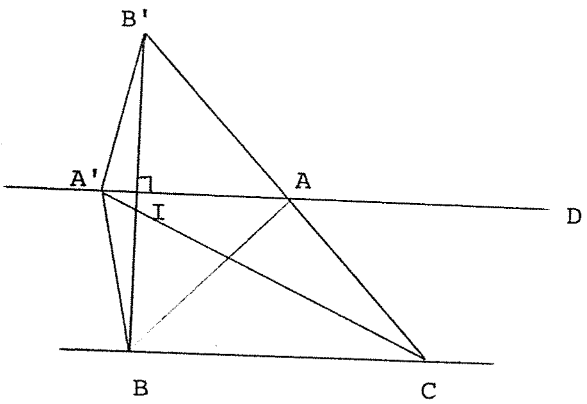


Le point A se déplace sur une droite fixe D parallèle à BC. B et C sont fixes. Que dire des aires des triangles A B C obtenus ? Prouve-le.

Que dire des périmètres de ces triangles ? Pour quelle position de A a-t-on un périmètre minimum ?

On va démontrer cette conjecture.

Exercice



B et C sont deux points distincts

(D) est parallèle à (BC)

Soit B' le symétrique de B par rapport à D

I est le milieu de [BB'] , A le point d'intersection de B'C et D

a) Montre que A est le milieu de [B'C]

b) Montre que

$AB = AC$

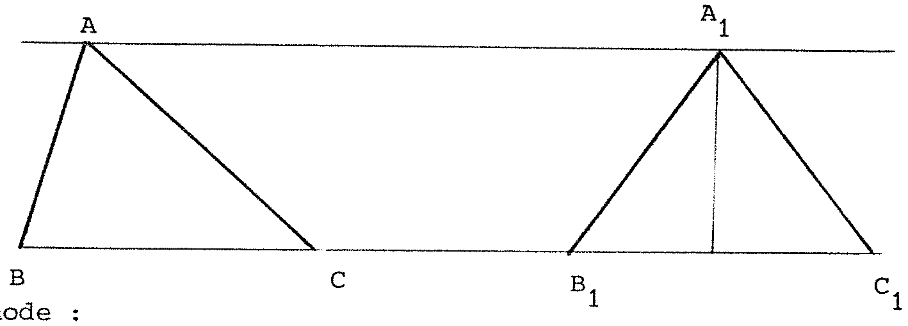
c) Montre que si $A' \in (D)$

$A'B' + A'C \geqslant B'C$

d) Conclus :

$A'B + A'C + BC \geqslant AB + AC + BC$

Enrichissement de cet exercice : Construire un triangle de même aire qu'un triangle donné ayant un périmètre moindre.



méthode :

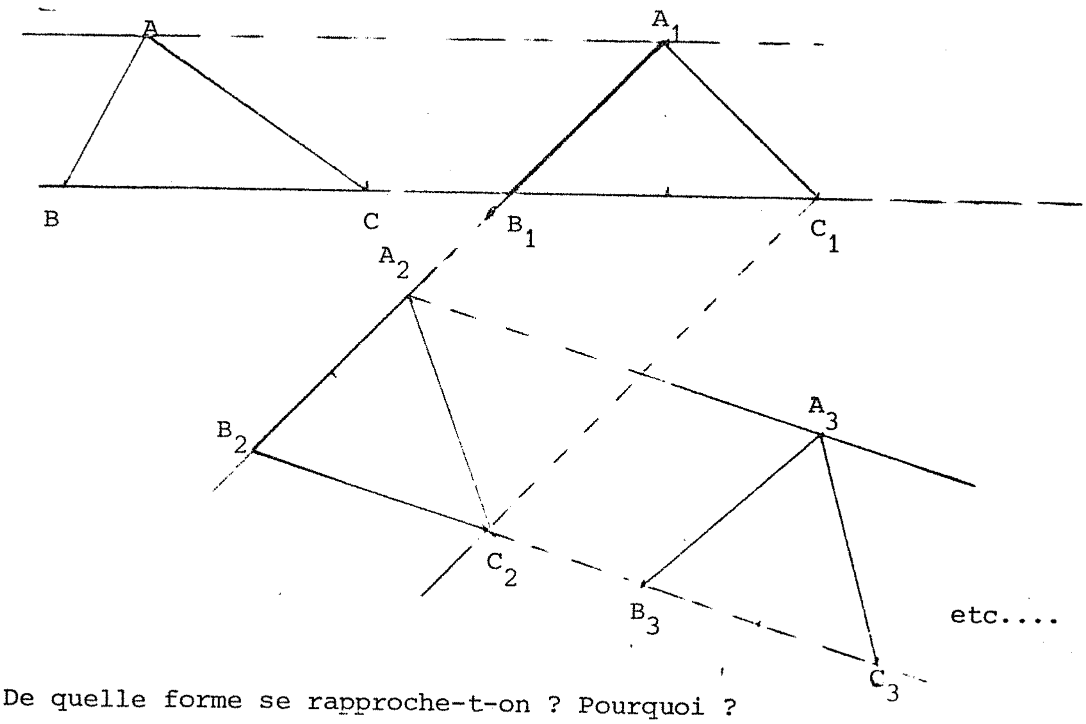
- On trace sur BC un segment B_1C_1 tel que $B_1C_1 = BC$
- On trace D parallèle à BC passant par A.

On construit A_1 tel que $A_1 B_1 C_1$ soit isocèle.

Le triangle $A_1 B_1 C_1$ a même aire que ABC et un périmètre moindre.

On a "symétrisé" le triangle ABC par rapport au côté BC.

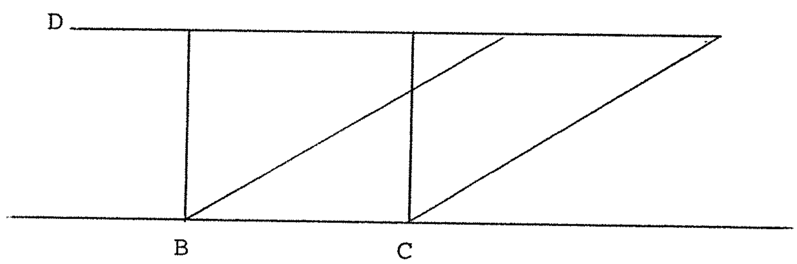
On peut continuer.



De quelle forme se rapproche-t-on ? Pourquoi ?

- Une telle activité est-elle possible avec un quadrilatère convexe?
  Peut-on construire un quadrilatère, ayant même aire, de périmètre moindre ?

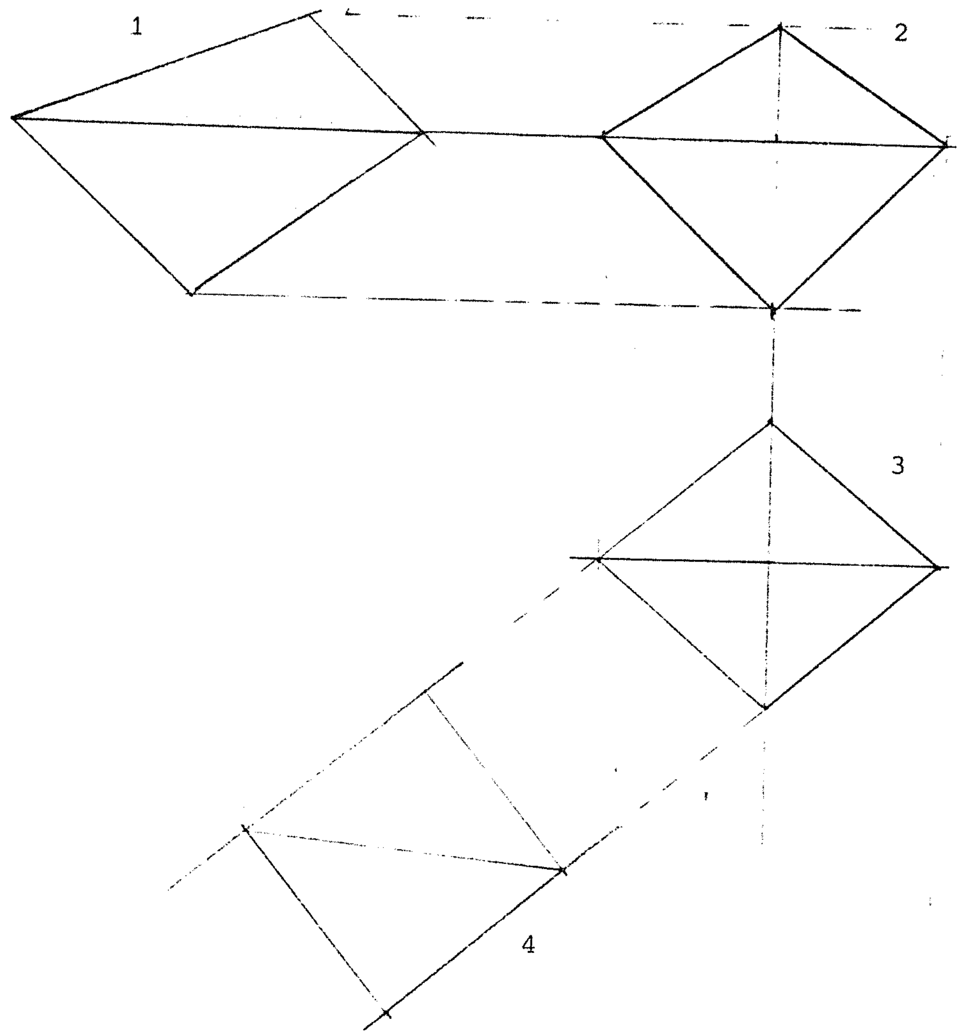
Prérequis



Soient B, C deux points fixes, D une droite parallèle à (BC).

- Tous les parallélogrammes ayant pour base [BC] et le côté opposé à [BC] porté par D ont même aire. Prouve-le.
- C'est le rectangle qui a le plus petit périmètre.
  Prouve-le.

" Symétrisation d'un quadrilatère "



Méthode :

- Le quadrilatère est formé de 2 triangles que l'on symétrise. On obtient un cerf-volant (fig 2)
- Ce cerf-volant, on le symétrise par rapport à l'autre diagonale. On obtient un losange (fig. 3).
- Le losange est un parallélogramme que l'on transforme en rectangle (même base, même hauteur que le losange) (fig. 4).

  Le périmètre a diminué au cours de ces 3 opérations.
- On considère le rectangle comme un quadrilatère quelconque c'est à dire formé de 2 triangles. On est de retour à la situation 1. On obtient alors un losange (et non un cerf-volant pourquoi ?). Et si on continue on a un rectangle puis un losange etc...
- De quelle forme se rapproche-t-on ?

Enrichissement :

. Peut-on transformer un triangle en quadrilatère de même aire, de périmètre moindre ?

. Que se passe-t-il pour un quadrilatère non convexe ?

. Que se passe-t-il pour un polygone quelconque ?

Bibliographie : PLOT n° 10

7 Pavage par un quadrilatère quelconque

. Choisis un quadrilatère quelconque convexe.
Peut-on paver le plan avec un tel quadrilatère. Si oui, de combien de façons ?

1ère phase : Bricolage.

. Découpe une douzaine de quadrilatères identiques et essaie.
. Fais varier la forme du quadrilatère et recommence.

Cela apparaît-il toujours possible ?

2ème phase : Observations, conjectures.

. Observe le pavage obtenu,
Numérote les pavés.
. Comment passer du pavé 1 au pavé 2 ?
Du pavé 1 au pavé 3 etc ...

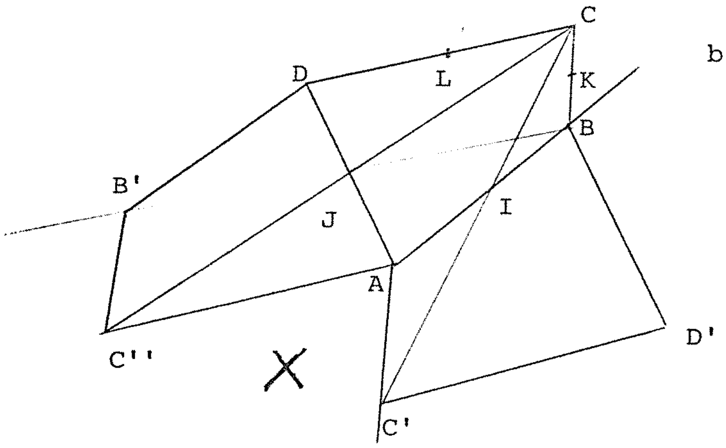
ou plus mathématiquement :

Quelle transformation permet de passer du pavé 1 au pavé 2, du pavé 1 au pavé 3 .... ?

. Peux-tu prévoir la somme des mesures des angles d'un quadrilatère convexe ?

3ème phase : Vérification des conjectures :
1 - programme de construction
2 - Démonstration des conjectures.

a) Choisis un quadrilatère et trace-le .



b) Trace le symétrique du quadrilatère par rapport à I cette construction peut être effectuée à la règle et au compas.

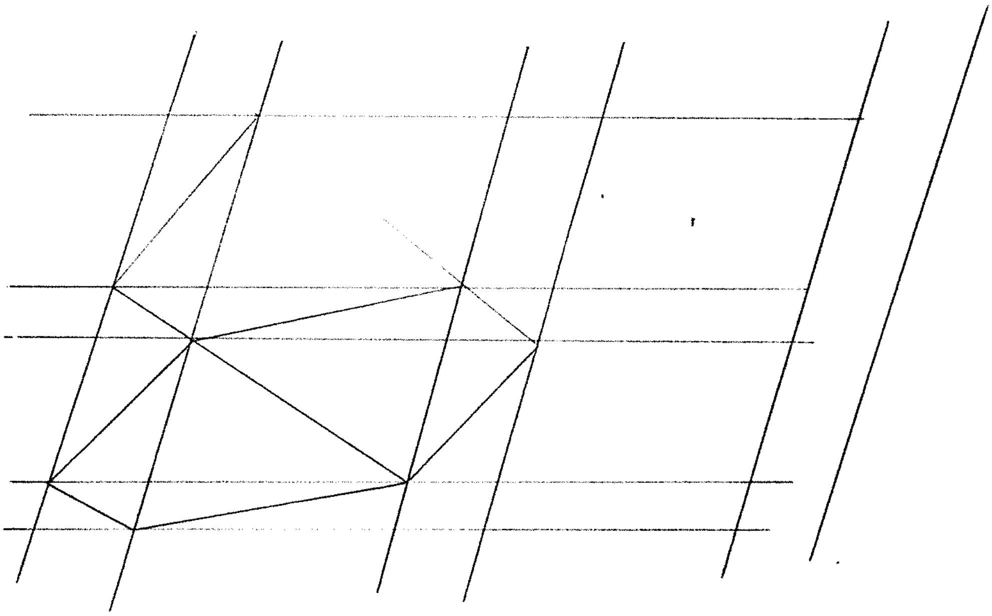
Observe la figure et recherche les parallélogrammes, les droites parallèles, les longueurs égales.

c) Trace le symétrique de (A, B, C, D) par rapport à J.
Les points B'A D' semblent alignés, pourquoi ?

d) Peux-tu loger un pavé dans l'endroit marqué d'une croix? Pourquoi ?
Quelle transformation fait passer (A, B, D', C') sur (A, D, B', C") ?

e) Continue le pavage et remarque les points alignés. Sur quelles droites les points sont-ils alignés ? Observe ces droites et leurs positions.

f) Application ou enrichissement :
La construction du pavage peut être grandement facilitée par la remarque de e.



Tu traces des "bandes parallèles" régulièrement espacées.

4ème phase : enrichir.

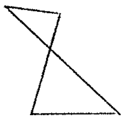
a) Le pavage est-il possible avec un quadrilatère non convexe.

Il faut essayer :

exemples : 1

non convexe - non croisé

croisé :



b) Le pavage est-il possible avec un triangle quelconque, avec un pentagone quelconque ?

8 Conjecturer et enrichir avec des cercles

1 . Place deux points A et B distincts.
Trace un cercle de centre A et un de centre B. Quelles différentes figures peux-tu obtenir ?

Enrichissement :

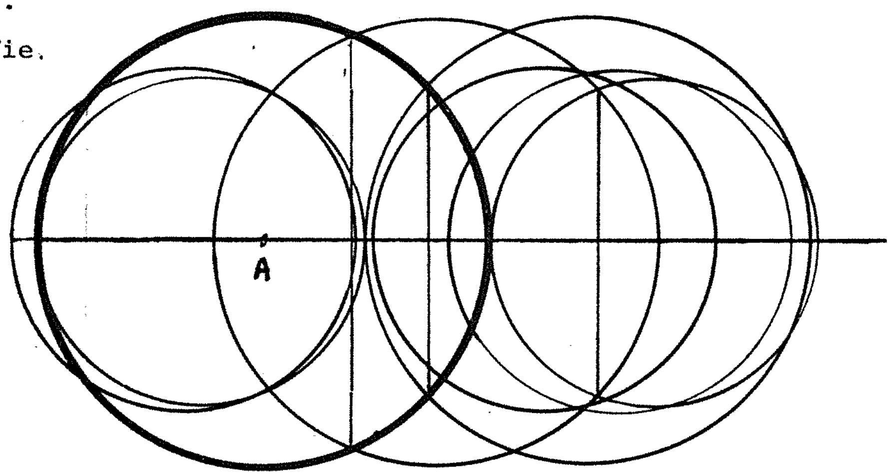
Construire un triangle TIR tel que

TI = 2 IR : 3 TR = 4

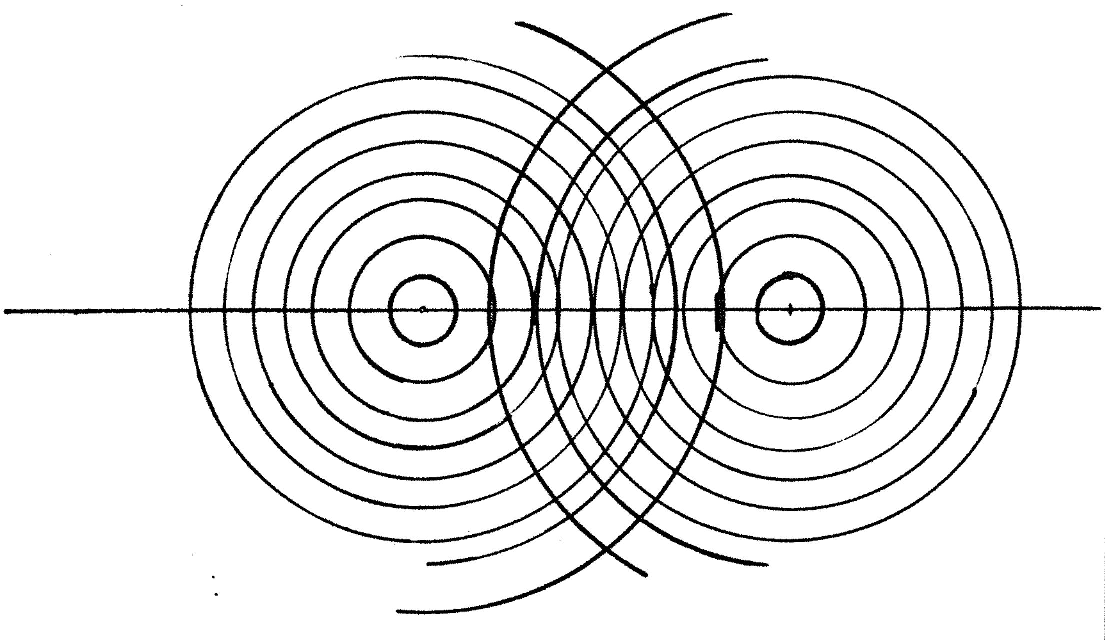
TI = 4 IR = 7 TR = 2

TI = 5 IR = 7 TR = 2

2 . Soit $\mathcal{D}$ une droite et $A \in \mathcal{D}$.
Trace un cercle $\mathcal{C}$ centré en A et de nombreux cercles centrés sur $\mathcal{D}$ sécants à $\mathcal{C}$. Observe (axe de symétrie, direction des cordes, positions limites des cordes).
Conjecture.- Justifie.



3 . Place deux points A et B. Trace des cercles de rayons $\mathcal{R}$ centrés en A et B. Fais varier $\mathcal{R}$ de centimètre en centimètre



. Observe :

- les symétries: axes, centres
- les points équidistants de A et B
- trace des losanges - justifie
- trace des parallélogrammes - justifie
- trouve des droites parallèles, perpendiculaires
- peux-tu tracer l'ensemble des points M tels que $MA + MB = c^{ste}$

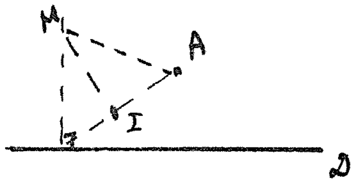
  $MA - MB = c^{ste}$

  $MA > MB$

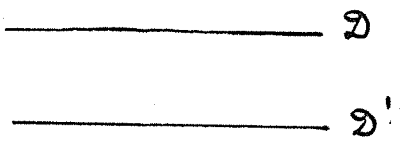
  $MB > MA$

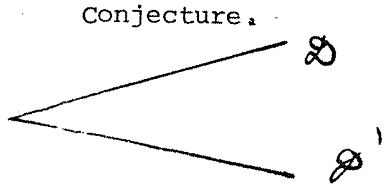
4 . Trace des cercles qui passent par A et qui sont tangents à $\mathcal{D}$.

Observe les centres, observe les différentes positions de I, etc....



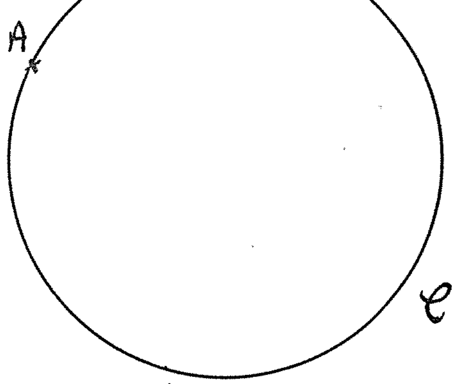
5 . Trace des cercles tangents à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Observe la position des centres. Conjecture.



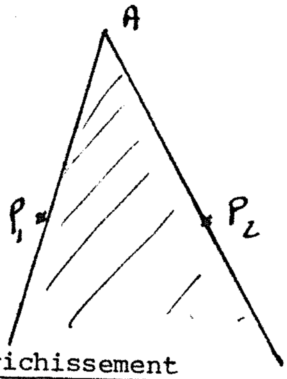


6 . Trace des cercles passant par A centrés sur $\mathcal{D}$. Observe.

7 . Trace des cercles passant par A centrés sur $\mathcal{C}$. Observe.



8 . Prends 2 punaises et découpe un angle aigu de sommet A dans du carton.



. Quelle est la figure formée par les diverses positions de A?

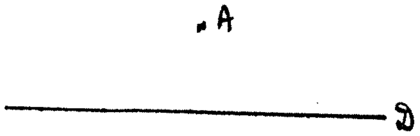
. Recommence avec un angle obtus.

. Peut-on obtenir un 1/2 cercle?

(La justification est faite en classe).

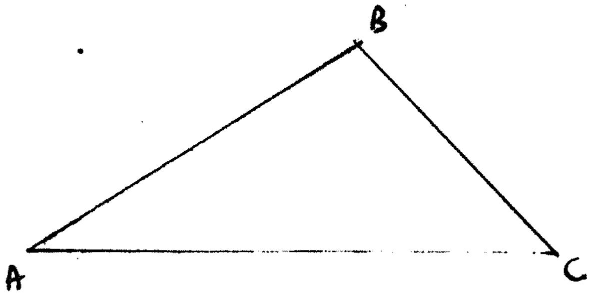
Enrichissement

. Comment tracer la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ issue de A à l'aide de la règle et du compas?



Justifie.

. Comment tracer les hauteurs d'un triangle à l'aide de la règle et du compas?

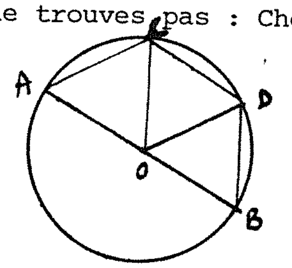


Montre que les 3 cercles de diamètres AB, AC et BC ont un point commun.

9 . Sais-tu construire un hexagone régulier inscrit dans un cercle. Peux-tu justifier la construction ?

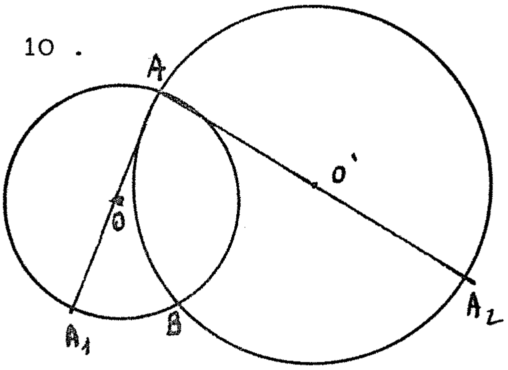
Si tu ne trouves pas : Choisis A sur le cercle et place C tel que AC = AO AOC est équilatéral. Place alors D tel que CD = CO puis B tel que DB = OD.

A, O, B sont-ils alignés ? pourquoi ?



Combien y a-t-il d'axes de symétrie dans un hexagone, de centres de symétrie, de losanges (justifie), de rectangles, de triangles équilatéraux. As-tu d'autres questions ?

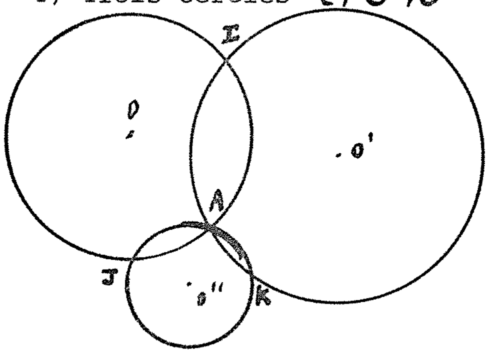
10 .



Deux cercles C et C' de centres O et O' se coupent en A et B. AO coupe C en A_1 et AO' coupe C' en A_2.
Observe A_1 , B, A_2 .
Prouve ta conjecture.

Enrichissement :

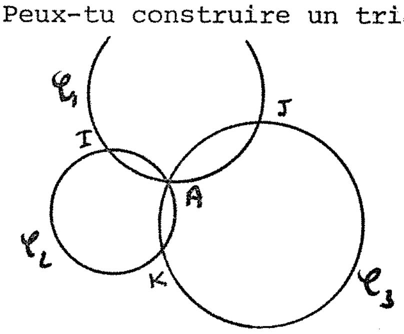
1) Trois cercles $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}''$ de centres O, O', O" ont un point commun A.
AO coupe $\mathcal{C}$ en B, AO' coupe $\mathcal{C}'$ en C
AO" coupe $\mathcal{C}''$ en D.



. Observe (IJK) et (BCD) justifie.

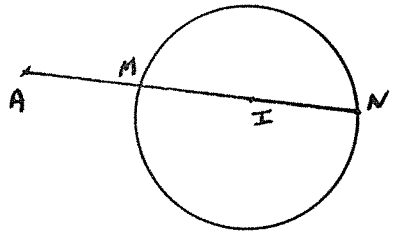
. Compare les aires de O'O O" et de BCD.

2) C_1, C_2, C_3 , sont 3 cercles ayant un point commun A.
Peux-tu construire un triangle EBC tel que E $\in C_1$ B $\in C_2$ C $\in C_3$
ABC circonscrit à IJK ?



. Des problèmes de lieux géométriques se prêtent bien aux conjectures même si l'élève n'est pas capable de prouver rigoureusement le résultat.

Exemples :



1) On donne un cercle $\mathcal{C}$ de centre O
A extérieur à $\mathcal{C}$. Une droite D qui pivote autour de A coupe $\mathcal{C}$ en M et N. Pour chaque position de D tracée, place I milieu de MN. Observe. Conjecture. Essaie de prouver.

2) Même exercice avec A à l'intérieur du cercle.

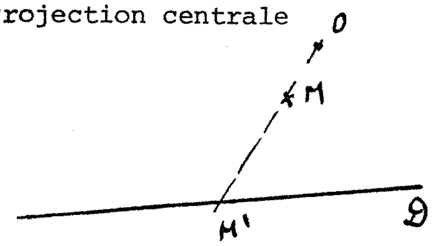
Bibliographie : . L'enseignement des Mathématiques, Delachaux Nieslé.
. Point de départ - Cédic
. Activité Mathématique 4ème 3ème, Cédic.

9 Activités diverses : déconditionnement

Certaines activités de déconditionnement se prêtent bien à la conjecture.

Exemples :

a) Projection centrale



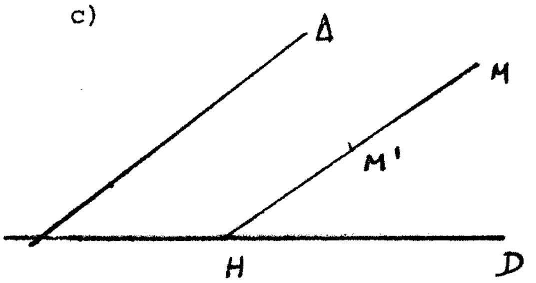
Soit O un point et D une droite.
A chaque point M du plan (non situé sur la parallèle à $\mathcal{D}$ passant par A) on associe M' intersection de $\mathcal{D}$ et OM.

Cette application conserve -t-elle le milieu ? les distances ?

b)

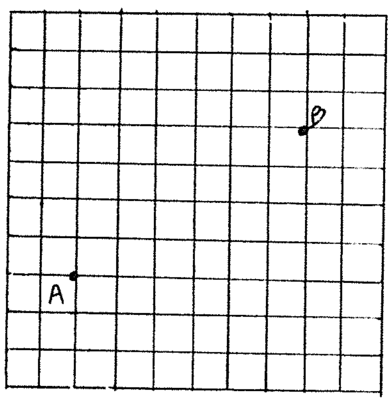
Δ est une demi-droite d'origine O
Au point M on associe M' intersection de la demi-droite Δ et du cercle centré en O passant par M. Cette application conserve-t-elle le milieu, les distances ?

c)



D et Δ sont deux droites.
A tout point M on associe M' tel que : M' milieu de [MH] où H est la projection de M sur D parallèlement à **Δ**.
Cette application conserve-t-elle la distance, l'alignement, le parallélisme, l'orthogonalité?

d) La taxi-distance.
ou distance sur quadrillage.



Les chemins qui vont de A à B doivent suivre les lignes du quadrillage. La distance de A à B est la longueur du plus court chemin pour aller de A à B.
Ainsi sur le dessin d(A,B) = 7. L'unité étant la longueur du côté du carré.

Conjectures possibles ?

. A-t-on : - d (A,B) = d(B,A) ?

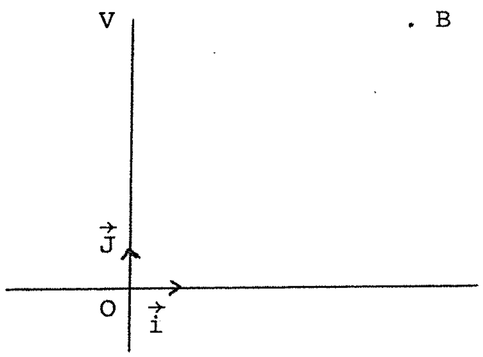
- d (A,B) = O si et seulement si A = B ?
- d (A,B) $\leq$ d(A,C) + d(C,B) ?
- d (A,B) = d(A,C) + d(C,B) si et seulement si A,B,C sont alignés ?

. Trace l'ensemble des points M tel que d(A,M) = 4. Quelle figure obtient-on ?

. Trace l'ensemble des points M tels que d(A,M) = d(B,M). Fais varier les positions de A et B.

. Combien y a t-il de plus courts chemins pour aller de A à B (difficile)?

Prolongement possible



Pour aller de A à B on ne peut se déplacer qu'horizontalement ou verticalement. Quelle est la longueur du plus court chemin pour aller de A à B ?

(d(A,B) = $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$)

Quel lien peut-on faire avec ce qui précède ?

Bibliographie :

. Point de départ - Cédic

. Mathématiques buissonnières - Cédic

. PAPY - Ouvrages divers.

PARTIE VI

POUR NE PAS CONCLURE : RECHERCHES A VENIR

PARTIE VI

POUR NE PAS CONCLURE : RECHERCHES A VENIR

" Les débutants ne sont pas préparés à la véritable rigueur mathématique, ils n'y verraient que de vaines et fastidieuses subtilités, on perdrait son temps à vouloir trop tôt les rendre plus exigeants; il faut qu'ils refassent rapidement, mais sans brûler d'étapes, le chemin qu'ont parcouru lentement les fondateurs de la science.

Pourquoi une si longue préparation est-elle nécessaire pour s'habituer à cette rigueur parfaite, qui, semble-t-il, devrait s'imposer naturellement à tous les bons esprits ? C'est là un problème logique et psychologique bien digne d'être médité ".

Poincaré : La Science et l'Hypothèse p 35, Flammarion.

SOMMAIRE

1 Réflexions sur la façon de poser un texte en géométrie

1 - Pourquoi les notations sont elles canoniques ?
(soit ABC un triangle, ABCD un parallélogramme* ....
Cela est-il neutre ?

Que penser d'un élève qui met systématiquement l'angle droit en A quand le triangle ABC est rectangle ; après un cours sur le théorème de Pythagore ?
Que penser d'un élève qui ne sait plus appliquer le théorème de Pythagore quand le triangle rectangle n'est plus dans sa "position de cours" ?

Ne devrait-on pas varier les notations et les positions des figures afin d'éviter les "automathismes" ?

2 - Pourquoi ne donne-t-on jamais la figure alors que très souvent on ne tient aucun compte, dans la note, de sa réalisation par l'élève ?

- Effectuer un programme de construction est-ce une activité mathématique ? Ne peut-on évaluer par un programme de construction, la compréhension du texte par l'élève, le soin de l'élève....

  Cela peut être considéré comme une révision du cycle d'observation et donc "payé au même prix" qu'une décomposition en facteurs premiers lors de la réduction d'une fraction.

- Pourquoi ne pas donner la figure? Cela permet d'ouvrir le champ des formulations d'un problème. La figure doit-elle comporter des éléments de réponse. , des éléments de méthode: ?

- Ce qui différencie les types d'exercices (didactiques, de recherche, d'exposition.... voir les travaux des IREM de Strasbourg et Rennes) ce n'est pas le choix du sujet mais la formulation de l'exercice.

* Certains d'entre nous pensent que ce n'est pas sérieux d'appeler un triangle PIF ou TOM et pourtant ......

Exemple pour illustrer 2 et 3

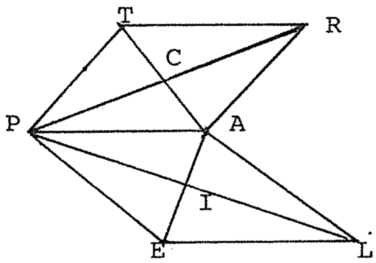
Première formulation: TRAP et PALE sont deux parallélogrammes de centres respectifs C et I

1°) Montre que CI // RL (considère PRL)

2°) Montre que CI // TE (considère ATE)

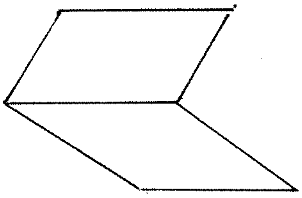
3°) Montre que LETR est un parallélogramme.

Deuxième formulation : (la figure est faite)



TRAP et PALE sont deux parallélogrammes de centres respectifs C et I
Montre que LETR est un parallélogramme.

Troisième formulation : la figure faite est muette



TRAP et PALE sont deux parallélogrammes de centres respectifs C et I. Combien y a t-il de parallélogrammes.
Montre ta conjecture.

- Quels sont les intérêts de la première formulation ?
  Quelles activités mathématiques y a-t-il lors d'une telle résolution ?
  Comparer avec les intérêts et les activités qui résultent des deuxième et troisième formulations.

3 - Se soucie-t-on, lors du choix d'un texte, des difficultés de lecture, de compréhension d'un texte par les élèves ? Ne devrait-on pas travailler en collaboration avec les collègues littéraires pour connaître les difficultés des élèves en français ?

2 A propos de la méthode axiomatique

" La méthode axiomatique est un mode d'exposition de sciences exactes fondé sur des propositions admises sans démonstrations nettement formulées, et des raisonnements rigoureux " .

(Encyclopédia Universalis).

Une remarque :

La démarche d'un mathématicien est souvent celle-ci :

- "bricoler rigoureusement"* dans une théorie (qui n'a pas encore le statut de théorie).
- Rechercher des axiomes non contradictoires en nombre minimal.
- Essayer de démontrer toutes les propriétés à partir de ces axiomes.

* Bricoler rigoureusement c'est savoir ce que l'on admet (ce n'est pas nécessairement un axiome) pour démontrer un résultat conjecturé.

Quelques critiques sur la méthode axiomatique pour la géométrie de 4ème

1. Par un exposé axiomatique, la première phase précédente est inexistante. N'est-ce point celle pourtant qui apprend"de quoi il retourne"? Ceci est d'autant plus grave en 4ème que les élèves ne savent pas ce qu'est une démonstration.

2. Ce n'est pas en faisant un exposé axiomatique que l'on apprend aux élèves.
- ce qu'est une démonstration
- à faire une démonstration

Tout exposé axiomatique ne conduit-il pas aux constats mentionnés dans la partie (1) ?

Ne vaut-il pas mieux bricoler rigoureusement dans la théorie, c'est-à-dire se choisir des "ilôts déductifs" où les résultats à montrer ne seront pas évidents aux élèves, tout en se servant de résultats acquis des classes antérieures ?

3. Est-on toujours conscient qu'en faisant un exposé axiomatique, tel que nombre de manuels le font, on ne fait pas un véritable exposé axiomatique ! Beaucoup de résultats non démontrables sont admis implicitement.

Exemple :

On voit rarement énoncer l'axiome suivant :

Si les trois points ABC ne sont pas alignés et si une droite D de leur plan coupe AB entre A et B alors D coupe nécessairement AC entre A et C ou AB entre A et B.

Cet axiome non mentionné ne "vaut-il" pas celui-ci toujours encadré : d(M, A) = d(A, M) ?

Mais peut-on expliciter tous les axiomes* ?

Si on admet que l'on ne peut pas tout expliciter, est-on rigoureux lors d'un exposé axiomatique ?

La rigueur pour un débutant ne peut être que "locale". (Iîots déductifs).

4. Est-on conscient du niveau de rigueur de nos démonstrations et du niveau de rigueur que l'on demande aux élèves lors des exercices ?

A, B, M, N sont 4 points distincts.

Exemple 1 : M et N sont tels que MA = MB, NA = NB. Montre que MN est la médiatrice de [AB] .

. MA = MB donc M appartient à la médiatrice de AB

. NA = NB donc N appartient à la médiatrice de AB.

Or la médiatrice est une droite, M et N sont deux points distincts de cette droite donc cette droite est MN.

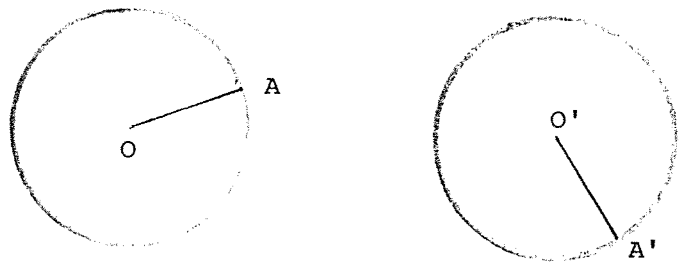
Exigeons-nous une telle démonstration de nos élèves ? Est-ce notre niveau de rigueur ?

Exemple 2 : Voir dans partie 1 "D'autres constats"

La rigueur suit-elle "la mode". Il y a-t-il un niveau de rigueur pour chaque époque ?

Exemple de démonstration "rigoureuse" des années 50 lue dans un manuel.

Théorème : deux cercles de même rayon sont égaux.



Hypothèse : OA = O'A'

Conclusion: les cercles sont égaux.

* Les axiomes de Hilbert qui régissent la géométrie d'Euclide sont explicités dans de nombreux ouvrages :

- Fondements de la géométrie (Hilbert), Histoire des Mathématiques (Encyclopédie Larousse).

émonstration : calquons le cercle de centre O'. Amenons le point O' sur le point O. Les rayons des 2 cercles étant égaux chaque point du cercle de centre O' est sur le cercle de centre O. Les deux cercles sont superposés donc égaux.
Cela a davantage actuellement valeur de vérification empirique que valeur de démonstration. Mais une démonstration convainc-t-elle plus qu'une vérification empirique ?

Sommes-nous prêts à dire avec le mathématicien contemporain Jean LERAY : "Le maître doit choisir le degré de rigueur qui convient à l'élève, et non celui auquel il a lui-même accédé" ?

Une dernière question :

L'apprentissage de la démonstration est-il compatible avec un exposé axiomatique ?

Note : voir l'article de R. Bkouche "Euclide, Klein, Hilbert et les autres" § VI p. 48 à 53 et article de E. Le Rest "Il faut que j'y songe encore". (les axiomes de la géométrie) p 136 à 152 dans la Rigueur et le Calcul - (Cédic 1982), qui se termine par une citation de Poincaré à propos du travail de Hilbert :

"Voilà un livre dont je pense beaucoup de bien, mais que je ne recommenderais pas à un lycéen. Au reste je pourrais le faire sans crainte, il ne pousserait pas la lecture bien loin. J'ai pris des exemples extrêmes et aucun maître ne pouvait songer à aller aussi loin " et pourtant... que font les manuels pour nos élèves des années 80 ?

3 A propos des transformations

1 - Des questions

Les transformations sont-elles un bon outil pour un apprentissage de la démonstration ? Pour démontrer quoi ? Ne retombe-t-on pas dans le problème de l'axiomatique qui est essentiellement un problème d'organisation du savoir ? (Voir : A propos de la méthode axiomatique).

Ne superpose-t-on pas plusieurs difficultés : connaissance d'un objet nouveau, manipulation d'un nouveau langage, apprentissage d'une nouvelle activité, la démonstration ?

Le côté "morphisme" des transformations (l'image d'une droite est une droite, l'image du milieu est le milieu des images ....) ne favorise-t-il pas dès "automations" du type.

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 \quad , \ldots \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d} \quad \ldots\ldots ?$$

2 - Des réflexions

Il nous semble qu'à propos des transformations il y ait plusieurs étapes à franchir :

- Etape 1 : familiarisation, aspect concret.
  (Films, rétroprojecteur, pliages, dessins, appareils....)
- Etape 2 : construction de figures et identification de la transformation à partir d'une figure et son image.
- Etape 3 : connaissance des (ou de quelques) propriétés des transformations (des invariants).
- Etape 4 : Activité de démonstration

  * niveau 1 : traduction de la définition en langage de géométrie usuelle des figures (ce qui suppose que l'on sache faire des démonstrations dans cette "géométrie".)

  Exemple : soit ABC un triangle et M un point situé à l'intérieur du triangle. Soit A' le symétrique de M par rapport à (BC) et B' le symétrique de M par rapport à (AC).
  Démontre que C appartient à la médiatrice de [A'B'] .

  * niveau 2 : utilisation des propriétés de la transformations (*).
  Hypothèses en langage de transformation.
  Conclusion en langage de transformations ou de figure.

Exemple : ABC est isocèle en A, Δ son axe de symétrie. M et Q deux points de (AB), N et P les symétriques de M et Q par rapport à Δ.

1) Montre que N et P appartiennent à (AC)

2) Montre que MQ = NP.

3) Montre que [MP] est le symétrique de [NQ].
En déduire que : MP = NQ.

* niveau 3 : utilisation d'une transformation pour résoudre un problème.

Hypothèses : en langage des figures.

Conclusion : en langage des figures.

Exemple : ABC isocèle en A (AB = AC). O un point de l'axe de symétrie du triangle. Les droites (BO) et (AC) se coupent en C'. Les droites (CO) et (AB) en B'. Montrer que A B' C est isocèle.

Ne serait-il pas raisonnable en 4° de se limiter aux trois premières étapes si l'on initie par ailleurs les élèves à la démonstration, quitte à se lancer dans la quatrième étape si la classe le permet ?

(*) Soit il s'agit d'une application directe des propriétés.
Soit il s'agit d'une technique propre par exemple A' symétrique de A si A' est l'intersection de deux ensembles images de deux ensembles dont l'intersection est A. Mais cela nous semble relever du niveau 3.

4 A propos du programme de géométrie de 4ème

1. 4° - 3° : deux géométries

N'y-a-t-il pas un déséquilibre au niveau de la difficulté entre le programme de 4° et celui de 3° ? La géométrie de 3° semble bien plus accessible aux élèves ? Pourquoi ?

Certainement parce qu'il s'agit essentiellement de géométrie métrique analytique, vectorielle donc de quelque chose qui s'apparente plus au calcul et à l'algèbre. Les démonstrations sont reléguées au second plan, car il faut apprendre à connaître de nouveaux objets, de nouvelles méthodes et à les utiliser.

Pourquoi alors si la géométrie métrique est plus accessible aux débutants (cf. texte de Clairault dans la partie 1 Pour réfléchir) ne pas commencer par elle, ou du moins l'utiliser d'emblée ? Pourquoi continuer à vivre sur cette scission théorique affine-métrique /4° - 3° ?

Thalès sous son aspect métrique cohabiterait bien avec les fractions et rationnels du programme actuel de 4°, Pythagore permettrait d'introduire à l'existence de nouveaux nombres et cohabiterait bien avec les réels et les calculs approchés du programme actuel de 4°.

Les angles en 4° seraient un bon terrain pour faire des démonstrations simples ou pour faire simplement des démonstrations difficiles (alignement de points par exemple).

Par contre la géométrie vectorielle et analytique pourraient être vues en 3°, ainsi que la trigonométrie.

De plus, le fait de parler de géométrie métrique en 4ème n'assurerait pas un meilleur suivi du programme de 6° et 5°?

2. 6° - 5° : l'observation et la construction

En 6° - 5° il s'agit en géométrie plane de se familiariser avec les figures, de les observer, d'apprendre à les construire ; et pour cela d'utiliser les instruments de dessin et les mesures (cf.aires) donc de faire entre autre de la géométrie métrique.

Un objectif valable de ce cycle d'observation en ce qui concerne la géométrie plane ne serait-il pas que l'élève sortant de 5° soit capable de lire un texte simple de géométrie et de le traduire sous forme de figure? On pourrait prendre comme exercices les textes d'exercices de géométrie de 4° - 3° et se limiter à la construction de la figure et à l'observation de propriétés.

Mais pourquoi, s'il faut parler ensuite de transformations, ne pas commencer au niveau concret manipulatoire (cf. A propos des transformations étapes O et 1) en 6° - 5° , en réservant pour la 4° - 3° l'étude de leurs propriétés et leur utilisation ?

3. Après la 3ème

Il semble qu'après la 3ème deux problèmes surgissent.
1) En LEP, les élèves n'ont-ils pas du mal à faire le lien entre la géométrie abstraite et théorique qu'on leur a enseignée et la géométrie concrète qu'ils doivent utiliser.

2) En 2nde ne considère-t-on pas trop vite comme acquis tous les types de démonstration ? Quelle reprise fait-on du début d'apprentissage de la démonstration amorcé en 4° ?

Tout cela pose le problème du suivi des activités proposées en mathématique et de leur cohérence tout au long de la scolarité.
N'y aurait-il pas une réflexion à mener et un travail fructueux à faire ?

5 A propos de la rédaction

Peut-on tout expliciter ? Quelles propriétés, quels axiomes peut-on passer sous silence ? Quand a-t-on le droit de dire c'est évident ?

Comment alors rédiger une démonstration ?

Qu'éxigeons-nous ?

Avons nous tous les mêmes exigences avec les élèves ?

Le contrat avec les élèves est-il clair ?

Serions nous capables de l'expliciter ?

Peut-on tout expliciter ? Voici deux textes pour terminer :

"L'activité des mathématiciens en chair et en os diffère de celle des machines sur un autre point encore : les premiers ne sont pas en mesure de se conformer *strictement* à la rigueur logique absolue dont feraient preuve les secondes si elles existaient. Dans la pratique, les textes mathématiques les mieux écrits comportent une multitude de "trous" en l'absence desquels la lecture de ces textes serait un exercice intolérable. Ces lacunes logiques sont sans importance, parce que chacun est parfaitement convaincu du fait qu'on pourrait les combler si on le désirait - en fait, il est même probable que le lecteur débutant ne les apercevra pas. On estime aujourd'hui qu'un texte mathématique est "parfaitement" correct lorsqu'il a acquis le degré de clarté et de rigueur qu'on a toujours trouvé dans les exposés d'Arithmétique élémentaire (et c'est pourquoi il est fort regrettable que cette branche des Mathématiques n'occupe pas plus de place dans l'enseignement secondaire français) "

Godement - Cours d'Algèbre Hermann p. 25

(Voir aussi Bourbaki - Introduction à la théorie des ensembles.
Eléments de Mathématiques XVIII L.I.).

"§ II. PHILALETHE. Cet écrivain judicieux, qui a fourni occasion à nos conférences, accorde que les maximes ont leur usage, mais il croit que c'est plutôt celui de fermer la bouche aux obstinés que d'établir les sciences. Je serais fort aise, dit-il, qu'on me montrât quelqu'une de ces sciences bâties sur ces axiomes généraux dont on ne puisse faire voir qu'elle se soutient aussi bien sans axiomes.

THEOPHILE. La géométrie est sans doute une de ces sciences. Euclide emploie expressément les axiomes dans les démonstrations, et cet axiome : que *deux grandeurs homogènes sont égales lorsque l'une n'est ni plus grande ni plus petite que l'autre*, est le fondement des démonstrations d'Euclide et d'Archimède sur la grandeur des curvilignes. Archimède a employé des axiomes dont Euclide n'avait point besoin ; par exemple, que de deux lignes dont chacune a sa concavité toujours du même côté, celle qui enferme l'autre est la plus grande. On ne saurait aussi se passer des axiomes *identiques* en géométrie, comme par exemple du principe de contradiction ou des démonstrations qui mènent à l'impossible. Et quant aux autres axiomes, qui en sont démontrables, on pourrait s'en passer, absolument parlant, et tirer les conclusions immédiatement des identiques et des définitions ; mais la prolixité des démonstrations et les répétitions sans fin où l'on tomberait alors causeraient une confusion horrible, s'il fallait toujours recommencer *ab ovo* : au lieu que supposant les proportions moyennes, déjà démontrées, on passe aisément plus loin. Et cette supposition des vérités déjà connues est utile, surtout à l'égard des axiomes, car ils reviennent si souvent que les géomètres sont obligés de s'en servir à tout moment sans les citer ; de sorte qu'on se tromperait de croire qu'ils n'y sont pas parce qu'on ne les voit peut-être pas toujours allégués à la marge."

Leibniz - Nouveaux Essais
Livre IV chapitre VII

PARTIE VII

BIBLIOGRAPHIE

PARTIE VII

BIBLIOGRAPHIE

A - ARTICLES

1 - Manifeste pour un enseignement naturel de la géométrie.
. Bulletin de l'APM n° 320 (septembre 1979) p. 591 - 596.

2 - Langage, synonymie et démonstration
. Bulletin de l'APM n° 331 (Décembre 1981) p.835 - 851

3 - La démonstration en Géométrie (Classe de quatrième)
. Sans Tambour Ni Trompette n° 20 - 28 (Mai 1982) p. 37 - 44
Irem de Lyon

4 - L'initiation à la démonstration.
. Faire des Mathématiques, 4ème, Livre du Maître, Cédic p. 5 - 10

5 - Méthodologie dans la recherche des problèmes et cours de Mathématiques.
. La place du problème dans l'enseignement des Mathématiques
Colloque inter-Irem Lyon (Mai 1982). Irem de Lyon.

6 - Preuve et démonstration en Mathématiques au Collège.
. Recherches en didactique des Mathématiques Vol. 3.3 (1982)
La Pensée Sauvage éditions p.261 - 304.

B - OUVRAGES

1 - Géométrie au premier cycle, tomes 1 et 2.
APMEP, brochures n° 21 et 22.

2 - Activités Mathématiques en 4ème - 3ème, tomes 1 et 2.
APMEP, brochure n° 33 et 38.

3 - Pentannuel n°23 (Décembre 1979) "Raisonner"
Irem de Paris-Sud.

4 - De l'enseignement de la Géométrie - Irem de Bordeaux

5 - Mathématiques et Prestidigitation - André Antibi (1982)
Irem de Toulouse.

6 - Démarches de pensée et concepts utilisés par les élèves de l'enseignement secondaire en géométrie euclidienne plane.
Audibert (1982) Irem de Montpellier.

7 - "Etre ou ne pas être rigoureux" (Juin 1978) Irem de Rouen.

NB: Pour des compléments bibliographiques sur les travaux IREM on pourra consulter le bulletin inter IREM n° 22 :
"Catalogue des publications des IREM".

C - OUVERTURES

1 - Géométrie classique et mathématiques modernes.
B. Sénéchal. Hermann.

2 - La mystification mathématique, A. Bouvier Hermann.

3 - La Science et l'Hypothèse, H. Poincaré . Flammarion.

4 - Euclidiennes - Guillevic - NRF Gallimard.

5 - La Géométrie de Daniel.
. Destinée arbitraire. Desnos, NRF Gallimard poésie.

Circulaire n° 77-157 du 29 avril 1977

B. O. n° 22 bis du 9 juin 1977, p. 1568

Les mathématiques doivent la place importante qu'elles occupent dans l'enseignement des collèges à la contribution appréciable que leur étude peut apporter à la réalisation des objectifs assignés à ce niveau. Il est donc essentiel de préciser le rôle dévolu à l'enseignement des mathématiques dans la formation de l'élève de collège, de définir en conséquence la matière mathématique susceptible de se prêter à cette exigence, de déterminer enfin les méthodes et les types d'activités qui permettent d'atteindre les buts recherchés.

ROLE DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES DANS LES COLLÈGES

1° Il convient d'abord de consolider les acquis de la scolarité élémentaire, en assurant spécialement la compréhension et la pratique des quatre opérations sur les nombres entiers ou décimaux, ainsi que l'usage de diverses unités de mesure.

2° Il s'agit ensuite de fournir à l'élève un bagage de connaissances pratiques, de techniques usuelles, de méthodes opératoires lui permettant de résoudre — en les ramenant (si besoin est) à des modèles mathématiques — les problèmes simples qui se posent dans la vie courante, ou même à l'occasion d'autres enseignements (sciences expérimentales, géographie, etc.).

3° On attend également de l'enseignement mathématique qu'il contribue pour une large part à la formation intellectuelle de l'élève de collège. Cet enseignement doit notamment :

a) Cultiver les qualités d'observation et d'analyse (identifier, par exemple, les éléments simples qui interviennent dans une situation donnée, plus ou moins complexe, et distinguer les relations qui les unissent) ;

b) Exercer l'élève à donner des objets tangibles du monde réel une représentation concrète (figure, schéma, signe, ...) puis conceptuelle : développer ainsi, progressivement, ses capacités d'abstraction ;

c) Entraîner l'élève à la pensée déductive, l'inciter à la rigueur logique, lui apprendre à bâtir une chaîne de déductions, à déceler éventuellement une faille dans un raisonnement ; développer — de façon constructive — son esprit critique ; lui montrer par exemple les incertitudes que comporte une induction non contrôlée ;

d) Stimuler l'imagination (induire, généraliser ; concevoir une méthode ; trouver des exemples pour illustrer une propriété, ou des contre-exemples pour infirmer une proposition...) ;

e) Habituer l'élève à s'exprimer clairement, avec un vocabulaire simple mais dans un langage précis (décrire un objet mathématique, formuler une hypothèse, énoncer une définition ou une propriété, exposer une démonstration...) ;

f) Développer chez lui des qualités de soin et d'ordre, en l'incitant à apporter la plus grande attention au tracé des figures géométriques qu'il dessine et à l'exécution des calculs qu'il effectue.

4° Il importe enfin que la formation mathématique donnée dans les collèges permette aux élèves qui se sentent attirés par ce type d'activité intellectuelle de mettre leurs aptitudes à l'épreuve. Elle doit leur fournir une base solide, sinon étendue, pour les études approfondies qu'ils sont susceptibles de mener ultérieurement, sans toutefois anticiper sur le contenu de ces futures études.

CHOIX DE LA MATIÈRE A ENSEIGNER

Si les deux objectifs fondamentaux que constituent l'acquisition d'un bagage technique utilisable et la participation à la formation intellectuelle générale — et notamment au développement de la pensée logique — peuvent en principe être visés indépendamment l'un de l'autre, leur poursuite conjointe répond cependant à un souci d'efficacité lié à des motifs psychologiques.

En effet, il faut éviter que l'élève de collège ne perçoive l'élaboration d'une théorie déductive comme une activité intellectuelle gratuite, et même sans signification, donc dépourvue d'intérêt à ses yeux. Une construction théorique destinée à l'exercer à une démarche logique doit par conséquent déboucher sur l'obtention d'un outil commode que l'élève aura couramment à utiliser (par exemple l'outil vectoriel). Elle peut aussi établir, par une chaîne d'implications, des liens entre divers concepts conformes à l'intuition sensible de l'élève, et directement exploitables par lui (par exemple les propriétés fondamentales du plan euclidien : distance, orthogonalité...).

Les axiomes de départ devront, bien entendu, être simples et « naturels », et les raisonnements courts. Or, de nombreuses notions mathématiques d'apparence élémentaire se prêtent malaisément, au niveau des collèges, à une approche axiomatique qui ne soit pas factice, ou ne permettent guère des enchaînements déductifs simples. La plupart de ces notions ne s'avèrent pas indispensables à l'enseignement de ce niveau, et il serait injustifié et téméraire d'en faire un thème d'étude. D'autres n'ont qu'une utilité pratique limitée mais présentent un intérêt théorique éminent qui oblige à les mentionner : on pourra ne les introduire que de façon très succincte, et au moment opportun.

Mais certaines de ces notions, dont il est difficile de donner une définition qui soit à la fois simple et mathématiquement « correcte », appartiennent incontestablement au bagage instrumental et technique dont il convient de doter l'élève au cours de sa scolarité de collège. Il est évident que dans ce cas une appréhension « concrète » de la notion suffit à l'élève, et que c'est la maîtrise des mécanismes qu'il faut rechercher, non une abstraction qui serait prématurée à ce niveau et donc préjudiciable à l'élève. L'exemple de la notion d'angle et du calcul trigonométrique est, à cet égard, digne d'être noté.

CONTENUS

Deux étapes seront à distinguer très nettement.

1. En classes de Sixième et Cinquième

En liaison étroite avec l'enseignement donné dans le premier degré, l'essentiel sera de renforcer l'acquis des élèves en calcul et de le compléter (emploi des décimaux relatifs, usage des parenthèses). Ils feront aussi des observations sur des objets physiques usuels ; celles-ci seront des occasions de calcul. Le dessin géométrique plan, avec des instruments, sera pratiqué.

Le vocabulaire dit « moderne » sera utilisé. Il n'a pourtant pas à faire l'objet d'un chapitre détaillé du programme ; tout développement sur les « relations » serait superflu.

C'est à dessein et pour tenir compte de l'âge des élèves, qu'on ne fera systématiquement, en Sixième, que de la géométrie plane, et aussi qu'on n'y étudiera pas la multiplication des décimaux relatifs ; cette dernière sera réservée (après une révision suffisante de l'addition et de la soustraction) à la classe de Cinquième.

2. En classes de Quatrième et Troisième

Le calcul numérique sera développé (fractions, nombres rationnels et décimaux, encadrements) ; le calcul littéral sera introduit. Les élèves étudieront et représenteront graphiquement des fonctions simples ; il sera opportun, sur des exemples concrets, de définir des taux de croissance et de donner quelques exemples de croissance de type exponentiel.

La géométrie partira de l'expérience acquise avec le dessin géométrique. Des observations physiques, bien choisies, conduiront à dégager des faits expérimentaux qui seront présentés comme « propositions initiales », à partir desquelles seront déduites, par voie logique, des conséquences, illustrées par des figures soignées ; leur recherche développera l'imagination des élèves et leurs qualités de raisonnement.

MÉTHODES ET TYPES D'ACTIVITÉS

Les objectifs visés par l'enseignement des mathématiques dans les collèges ne seraient que très partiellement atteints si cet enseignement se bornait à faire acquérir un certain savoir. Un élève pourrait certes en tirer un profit intellectuel, en participant activement à la formation des concepts et à l'élaboration des raisonnements qui conduisent aux résultats mathématiques à connaître. Mais ces connaissances risquent d'être mal assurées si on ne les fait pas « fonctionner ». Un verhis cognitif s'écaille vite ; le savoir s'estompe, s'il n'est pas utilisé.

L'enseignement doit donc se donner aussi pour but de faire acquérir des techniques d'utilisation du savoir, de développer ainsi chez l'élève des savoir-faire, des capacités d'action. C'est par l'action, et par la satisfaction qu'elle leur procure, que beaucoup d'élèves prennent goût aux mathématiques, et parviennent de surcroît à une meilleure compréhension des concepts.

L'ambition d'un enseignement de mathématiques ne peut pas se mesurer à l'étendue du contenu des programmes, mais à l'usage qui en est fait. L'éducation mathématique n'a de sens que si l'élève est formé à exploiter, dans les circonstances et les péripéties quotidiennes de la vie, et en quelque sorte spontanément, les connaissances que cette éducation lui a apportées et les qualités qu'elle a développées en lui.

Il est donc essentiel que les élèves de collège soient exercés à résoudre des exercices et des problèmes nombreux et variés. C'est dans cette recherche qu'on éprouvera leur aptitude à mettre en œuvre les connaissances acquises, aptitude dont le développement est l'une des finalités d'un enseignement de culture.

CLASSE DE QUATRIÈME

(Arrêté du 16 novembre 1978)

Les notions et les propriétés que les élèves doivent connaître et savoir utiliser sont énumérées ci-dessous ; leur groupement en alinéas ne vise qu'à la commodité de la présentation.

En algèbre comme en géométrie certaines propriétés, au choix du professeur, seront admises : elles permettront d'obtenir les autres par voie déductive.

Les notions suivantes :

Applications ; composition des applications ;

Bijection ; bijection réciproque ;

Partition d'un ensemble et relation d'équivalence,
n'ont pas à faire l'objet d'un apprentissage pour elles-mêmes : on les dégagera progressivement à partir des exemples qui se présenteront dans l'étude du programme.

I. — CALCUL NUMÉRIQUE

Exemples introduisant la notion de fraction.

Révision des opérations sur les décimaux.

Pratique des opérations sur les rationnels, sur les réels.

Relation d'ordre ; valeur absolue ; exemples de calculs approchés.

Produits $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $(a + b)\ (a - b)$: leur utilisation.

Exemples numériques d'équations et d'inéquations du premier degré à une inconnue.

II. — GÉOMÉTRIE PLANE

L'étude de la géométrie plane est nécessairement alimentée par l'observation et l'expérimentation, lesquelles requièrent l'usage des instruments de dessin : règle graduée, compas, équerre : l'effort de réflexion qu'elles suggèrent conduit au raisonnement déductif.

Le programme est rédigé en termes d'acquisition, non de progression. Il revient au professeur de suivre une ligne cohérente, mais aucun choix d'hypothèses ne lui est imposé. Il a notamment toute latitude pour faire intervenir, dès que cela lui paraît opportun, les notions de distance, de cercle, de parallélisme, d'orthogonalité, qui ont été introduites jusque-là de façon intuitive.

Droites du plan ; demi-droites.

Abscisse d'un point d'une droite dans un repère de cette droite ; notation $\overline{MN}$; relation de Chasles.

Médiatrice : sa construction. Losange : triangle isocèle.

Symétrie orthogonale par rapport à une droite. Rectangle.

Parallélisme, orthogonalité.

Projection sur une droite selon une direction ; conservation du milieu par projection. Projection orthogonale ; distance d'un point à une droite.

Parallélogramme. Symétrie centrale.

Coordonnées d'un point du plan dans un repère quelconque.

Translation ; composition des translations. Vecteur ; addition des vecteurs.