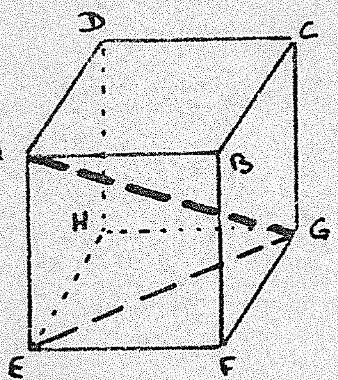
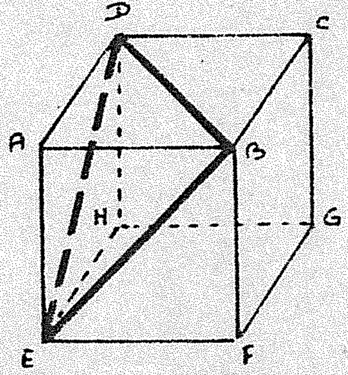
UNIVERSITÉ DE POITIERS

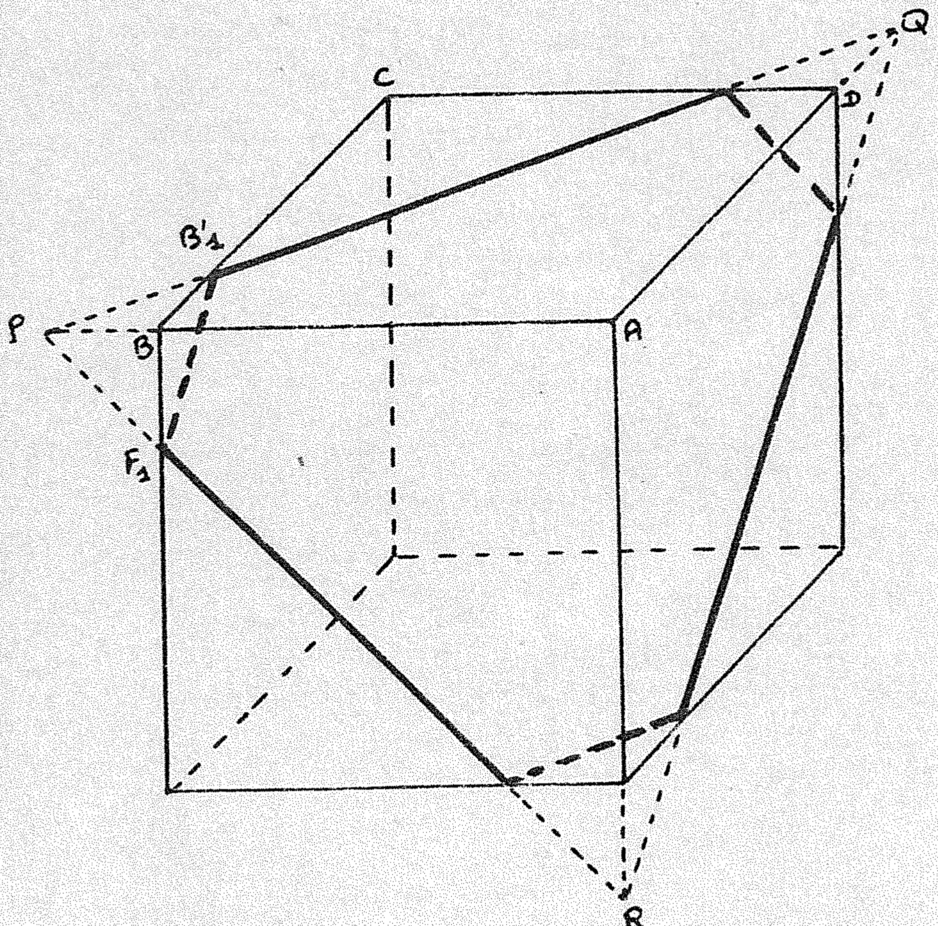
Institut de Recherche
sur l'Enseignement des Mathématiques

Octobre 1982



Activités sur le cube





Jeannine CARTRON
Claude FEYSSAGUET

ACTIVITES SUR LE CUBE

INTRODUCTION :

Il s'agit ici d'un document de travail. Nous proposons des fiches rédigées pour des élèves de 3ème. Cette activité peut s'envisager de deux façons différentes.

1ère méthode :

Le document est donné tel quel et fait l'objet d'un dossier de recherche à faire à la maison, chaque élève réalisant son propre cube en le reconstituant à l'aide des solides des différentes sections. (le professeur restant à la disposition des élèves pour toute indication utile)

2ème méthode :

Le travail est fait en classe par groupes de 3 à 4 élèves se répartissant la réalisation des sections et les calculs correspondants. Dans ce cas, les tableaux seront remplis de façon collective. Le fil à couper le polystyrène peut être d'une grande utilité pour réaliser les sections et "voir" ce qui se passe avant de dessiner les patrons des sections.

Remarque :

Ce problème met en oeuvre les théorèmes de Thalès et de Pythagore, des calculs de périmètres, d'aires et de volumes (l'utilisation des calculatrices est souhaitable pour les calculs des valeurs décimales). Il permet de faire des constructions, des graphiques et d'extrapoler les résultats pour établir des lois générales.

ACTIVITES SUR LE CUBE

I - MANIPULATIONS

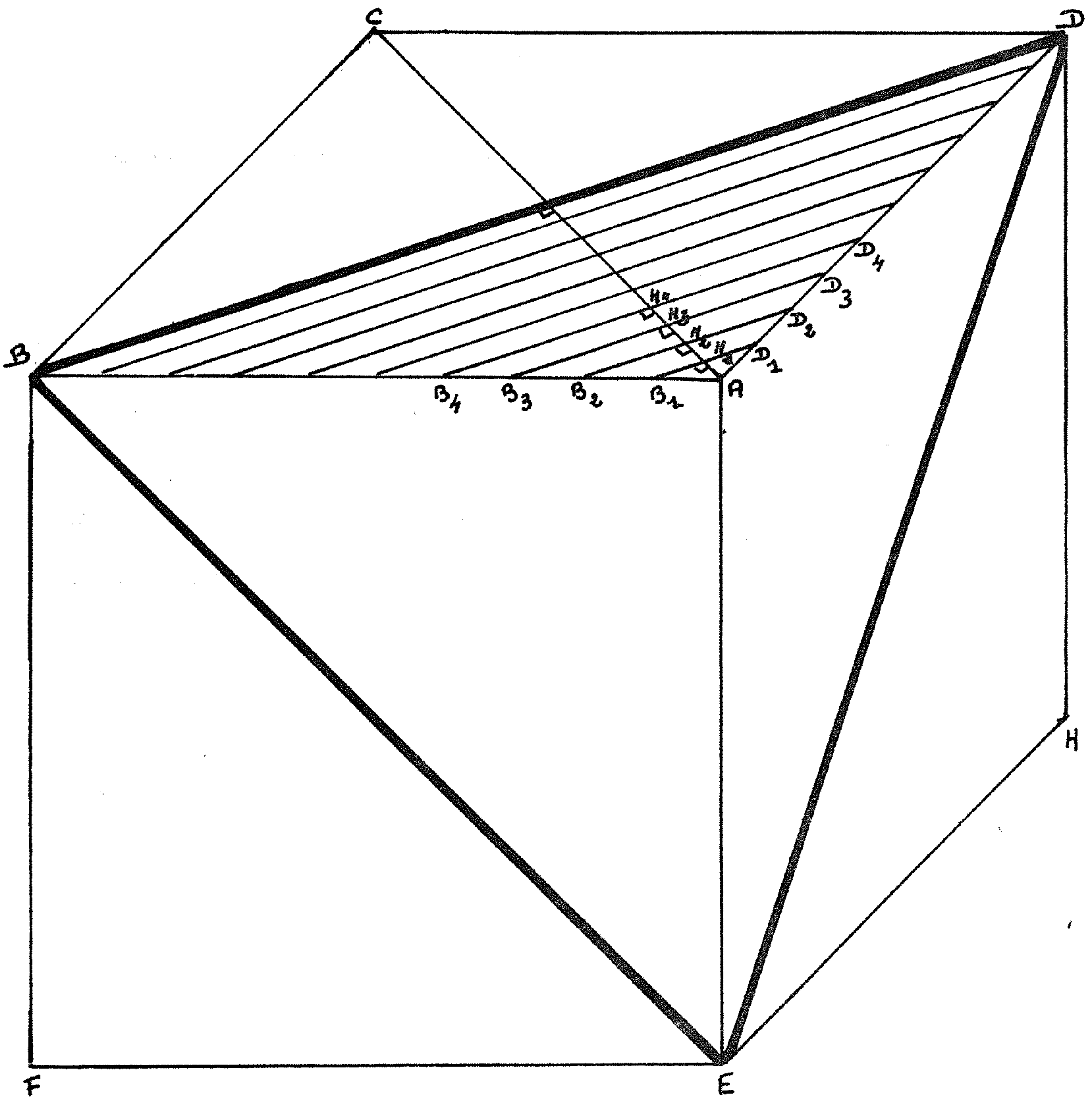
Réalise un cube d'arête 10 cm , par exemple :

* soit en carton fort ou bristol (les collages et les découpages à réaliser sont délicats)

* soit en mousse plastique que tu découperas au couteau électrique de ménage

* soit en polystyrène expansé, si tu disposes d'un fil à découper le polystyrène

* soit en tout autre matière (si tu as des idées).



Ⓐ Règle Il faut couper un "coin" du cube en respectant le schéma ci-dessus :

B_1, D_1, E_1 sont à 1 cm de A

B_2, D_2, E_2 sont à 2 cm de A

B_3, D_3, E_3 sont à 3 cm de A

etc...

Ⓑ Remarques

1/ Dans ce qui suit, le mot : "section" pourra être pris dans ses deux sens :

- action de couper
- face résultant d'une coupe.

2/ Dans un carré les diagonales sont perpendiculaires, or,

$$\left.\begin{array}{lll}(B_1 D_1) & \text{est parallèle à} & (BD) \\ (BD) & \text{est perpendiculaite à} & (AC)\end{array}\right\} \text{donc } (B_1 D_1) \text{ est perpendiculaire à } (AC) \text{ en } H_1$$

de même $(B_2 D_2)$ est perpendiculaire à (AC) en H_2 etc...

3/ Après la première section

Le premier solide obtenu est une pyramide dont la base est un triangle équilatéral et dont les faces sont des triangles rectangles isocèles.

4/ Après la 2ème section

Indique comment est formé le troisième solide obtenu.

Ⓒ Exercice

Fais le dessin à l'échelle 1 d'une face du cube d'arête 10 cm , et indique les traces des quatre premières sections.

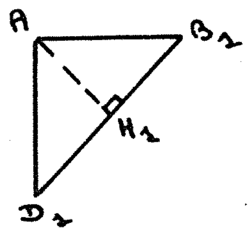
II - PROBLEMES

Remarque : Pour chaque section, le numéro de la section désigne également le numéro du solide obtenu.

Ⓐ Etude du solide obtenu après la première section. Pyramide (1er solide)

1/ Réalise son patron à l'échelle 1

2/ Etude d'une face : c'est un triangle rectangle isocèle



. quelle est la mesure de $[AB_1]$?

. quelle est la mesure de $[AD_1]$?

. calcule $d(B_1, D_1)$

. calcule la mesure de la hauteur $[AH_1]$

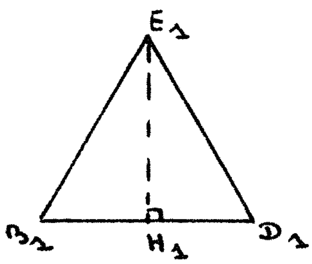
. place ces résultats dans le tableau 1

. si a est la mesure des côtés d'un triangle rectangle isocèle, calcule en fonction de a :

- la mesure de l'hypothénuse
- la mesure de la hauteur relative à l'hypothénuse de ce triangle

. place ces résultats dans le tableau 10 de la dernière page.

3/ Etude de la base : c'est un triangle équilatéral



. quelle est la mesure de son côté ?

Pourquoi ?

. calcule $d(E_1, H_1)$

. si a est la mesure d'un côté, donne en fonction de a l'expression de la hauteur d'un triangle équilatéral

. place ces résultats dans le tableau 10

4/ Calcule :

. le périmètre de base de la pyramide

. l'aire de base de la pyramide

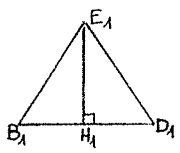
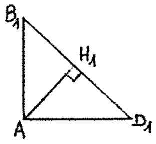
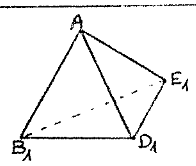
. l'aire d'une face de la pyramide

. l'aire latérale de la pyramide

. l'aire totale de la pyramide

5/ Complète le tableau suivant :

Tableau 1 :

			
Mesure de	de la base de la pyramide (B_1, D_1, E_1)	d'une face de la pyramide (B_1, A, D_1)	du périmètre de la base de la pyramide
côté du triangle			
base du triangle			
hauteur du triangle			
aire			
aire latérale			
aire totale			

Ⓑ Etude du tronc de pyramide obtenu après la 2ème section (2ème solide)

1/ Réalise son patron à l'échelle 1

2/ Etude d'une face

a) on rappelle que l'aire d'un trapèze est donnée par la formule suivante :

$$\frac{(b + B)}{2} \times H$$ avec

b = mesure de la petite base

B = mesure de la grande base

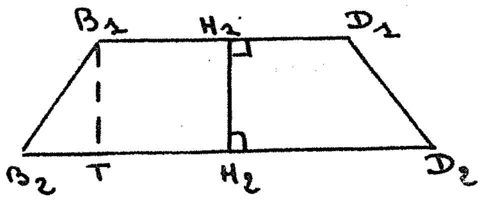
H = mesure de la hauteur

b) une face de ce solide est un trapèze

- quelle est la mesure de sa petite base ?

- quelle est la mesure de ses côtés obliques ?

c) compare $d(B_1, T)$ et $d(H_1, H_2)$. Explique ta réponse



d) calcule $d(H_1, H_2)$

e) calcule $d(B_2, D_2)$

f) complète le tableau suivant

Tableau 2 :

Mesure du	Bases du tronc de pyramide		Trapèze
	petit triangle de base (B_1, D_1, E_1)	grand triangle de base (B_2, D_2, E_2)	
côté			
hauteur			
petite base			
grande base			
périmètre			
aire			
aire latérale du tronc de la pyramide			
/ / / / / / / / / / / / / / /	/ / / / / / /	/ / / / / / /	/ / / / / / /
aire totale			

Ⓒ Etude du tronc de pyramide après la 3ème section (3ème solide obtenu)

Refais les mêmes calculs qu'au Ⓑ

Dresse le tableau n° 3 récapitulatif des résultats obtenus. En même temps commence à compléter le tableau 7 que tu trouveras plus loin.

Ⓓ Etude des solides n°4 et n° 5

Refais les calculs pour les 2 solides n° 4 et 5.

Trace les tableaux 4 et 5 correspondants et complète-les.

Ⓔ Tableau récapitulatif

Rassemble tous les résultats dans le tableau 7 ci-après

Si on considère un cube mesurant n cm d'arête, trouve les formules, exprimées en fonction de n qui permettent de calculer

1/ le côté de la grande base triangulaire de chaque solide

2/ le périmètre de la grande base triangulaire de chaque solide

3/ l'aire d'une face (triangle ou trapèze)

4/ l'aire latérale

5/ l'aire de la petite base de chaque solide

6/ l'aire de la grande base de chaque solide

Range ces formules dans le tableau 7.

Utilise ces formules pour compléter la 6ème ligne du tableau 7 , puis refais tous les calculs demandés au Ⓒ pour la 6ème section, et place les résultats dans le tableau 6 . Si ces résultats confirment ceux trouvés avec les formules générales, alors, complète le tableau 7 jusqu'à la 10ème ligne.

Tableau 7

Numéro du solide ou de la section	Petite base triangulaire			grande base triangulaire			périmètre de la grande base du solide	aire d'une face (triangle ou trapèze)	aire latérale	aire totale
	côté	hauteur	aire	côté	hauteur	aire				
n										
1										
2										
3										
4										
5										
6										
⋮										

Ⓕ Représentation graphique

Représente sur un même graphique, pour chacun des solides obtenus :

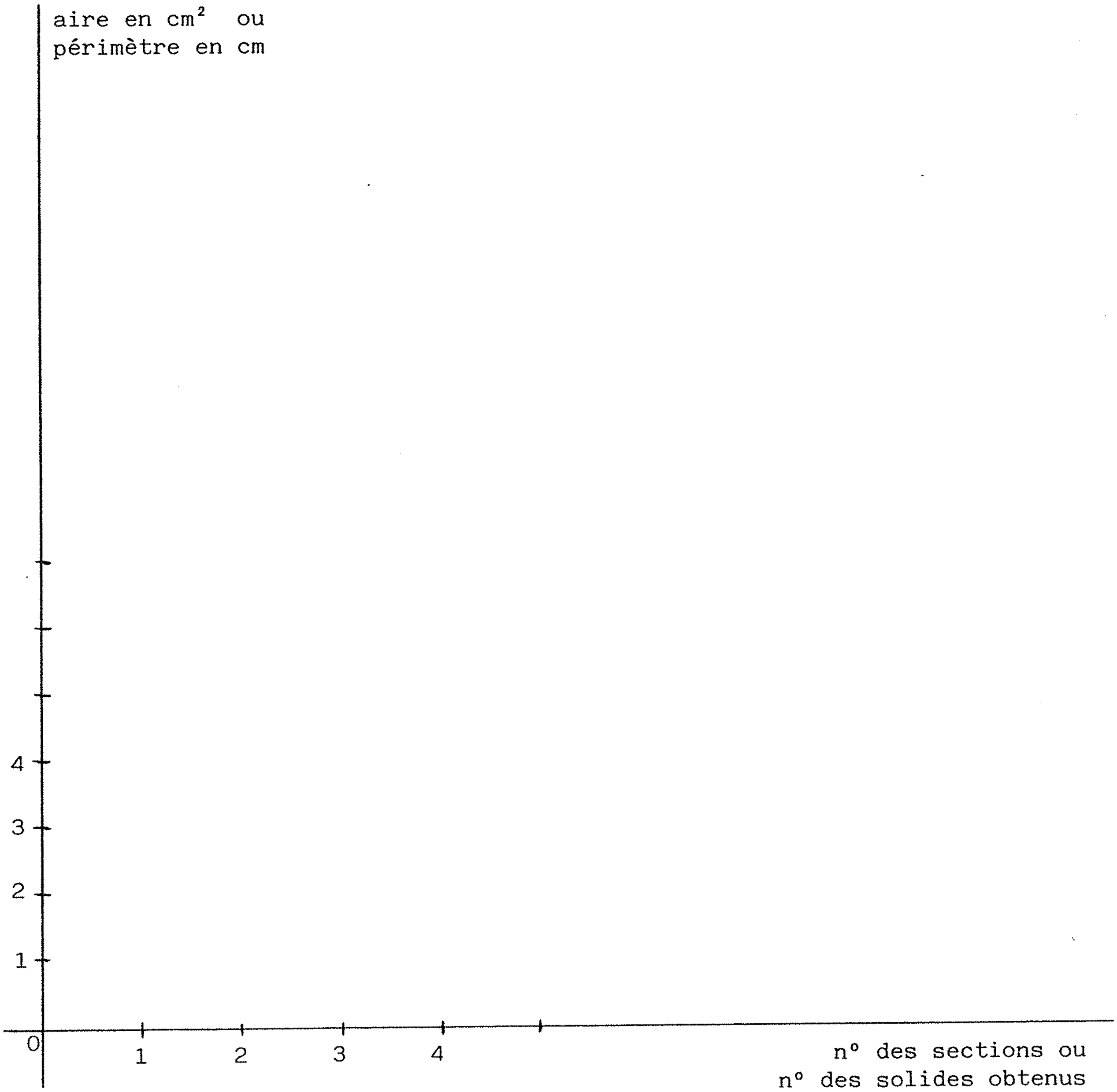
1/ le périmètre de la grande base

2/ l'aire d'une face

3/ l'aire latérale

4/ l'aire des bases

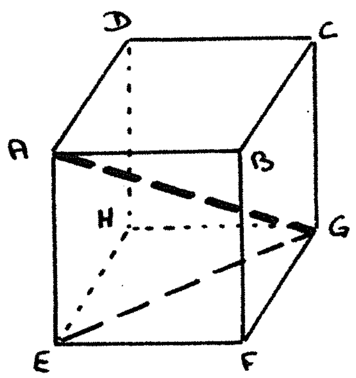
5/ l'aire totale



Remarque :

. Tu peux remarquer que les représentations graphiques de l'aire d'une face et de l'aire latérale étant des droites, elles correspondent chacune à des listes de nombres proportionnels. Quel est le coefficient de proportionnalité pour la série des aires d'une face ? Pour la série des aires latérales ?

6 / Volume



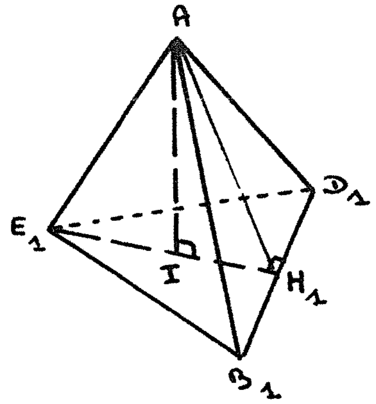
. soit un cube de côté a

. dans le carré (E, F, G, H) calcule d(E, G) en fonction de a

. calcule la longueur de [AG] , dans le triangle rectangle (A, E, G)

. rassemble ces résultats dans le tableau 10 de la dernière page.

. si on coupe le cube comme précedemment, calcule la hauteur de chacun des solides obtenus.



Pour cela, sers-toi du dessin ci-contre.

Dans ce tétraèdre de sommet A , la base (E_1 D_1 B_1) est un triangle équilatéral de côté $\sqrt{2}$

Calcule $d(E_1, H_1)$ (voir II, A , 3/)

I est le centre de gravité du triangle (E_1, B_1, D_1). Pourquoi ?

Déduis-en $d(I, H_1)$.

Calcule $d(A, I)$ dans le triangle (A, I, H_1) : c'est la hauteur de la pyramide : c'est aussi la hauteur de tous les troncs de pyramide obtenus précedemment.

. voici les formules exprimant les volumes :

volume d'une pyramide $= \frac{1}{3} \times \text{base} \times \text{hauteur}$

volume d'un tronc de pyramide $= \frac{1}{3} (B + b + \sqrt{B \times b}) \times h$

dans laquelle B représente l'aire de la grande base

b représente l'aire de la petite base

h représente la hauteur du tronc de pyramide

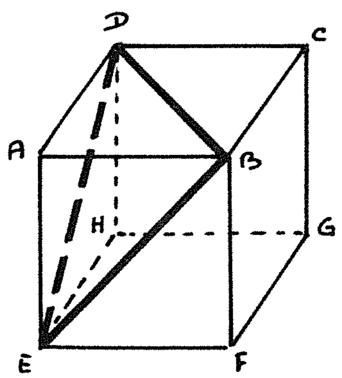
. complète le <u>tableau 8</u>

Tableau 8

N° de la section	Hauteur	Aire de la petite base	Aire de la grande base	Volume
1				
2				
3				
4				
5				
⋮				
⋮				
⋮				
n				

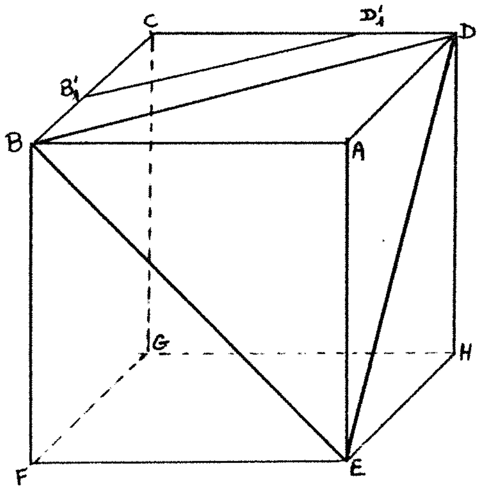
Trace la représentation graphique du volume en fonction du numéro de la section.

. le cube ayant 10 cm de côté, la 10ème section se fait suivant le triangle (B, D, E). Quelle fraction du volume total représente le volume du "coin" (A, B, D, E) ainsi obtenu ?



III - AVENTURES APRES LE PLAN DIAGONAL

Les différentes sections t'ont amené à couper suivant le triangle (B, E, D). Tu vas maintenant continuer, suivant la même technique à couper parallèlement au plan (B, D, E).



La face (A, B, C, D) (ou, ce qu'il en reste !) est coupée parallèlement à (BD), suivant la droite (B'_1, D'_1) de telle sorte que B'_1 et D'_1 soient placées respectivement à 1 cm de B et D sur les arêtes [BC] et [DC] .

Quelle est la forme de la section obtenue ?

Fais un dessin à l'échelle 1 de cette figure obtenue après la section (n + 1) = 11 (souviens-toi que le cube est supposé avoir 10 cm d'arête).

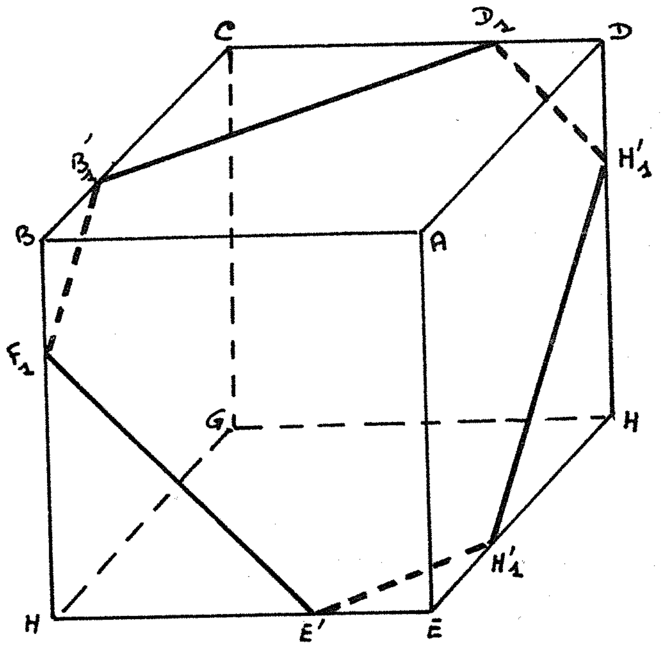
Tu noteras :

F_1 sur [BF] à 1 cm de B

E'_1 sur [EF] à 1 cm de E

H_1 sur [EH] à 1 cm de E

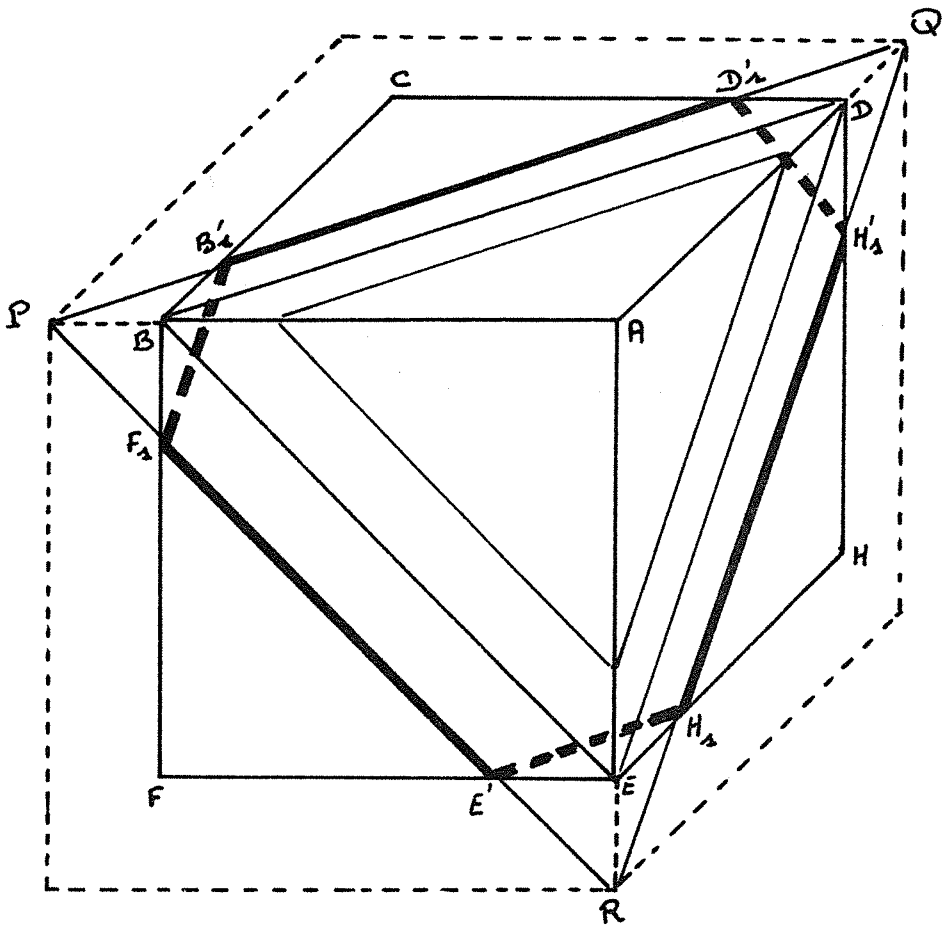
H'_1 sur [DH] à 1 cm de D



Tu as déjà fait au cours de II , les calculs te donnant les valeurs de : $d(B'_1, D'_1)$ et de $d(B'_1, F_1)$.

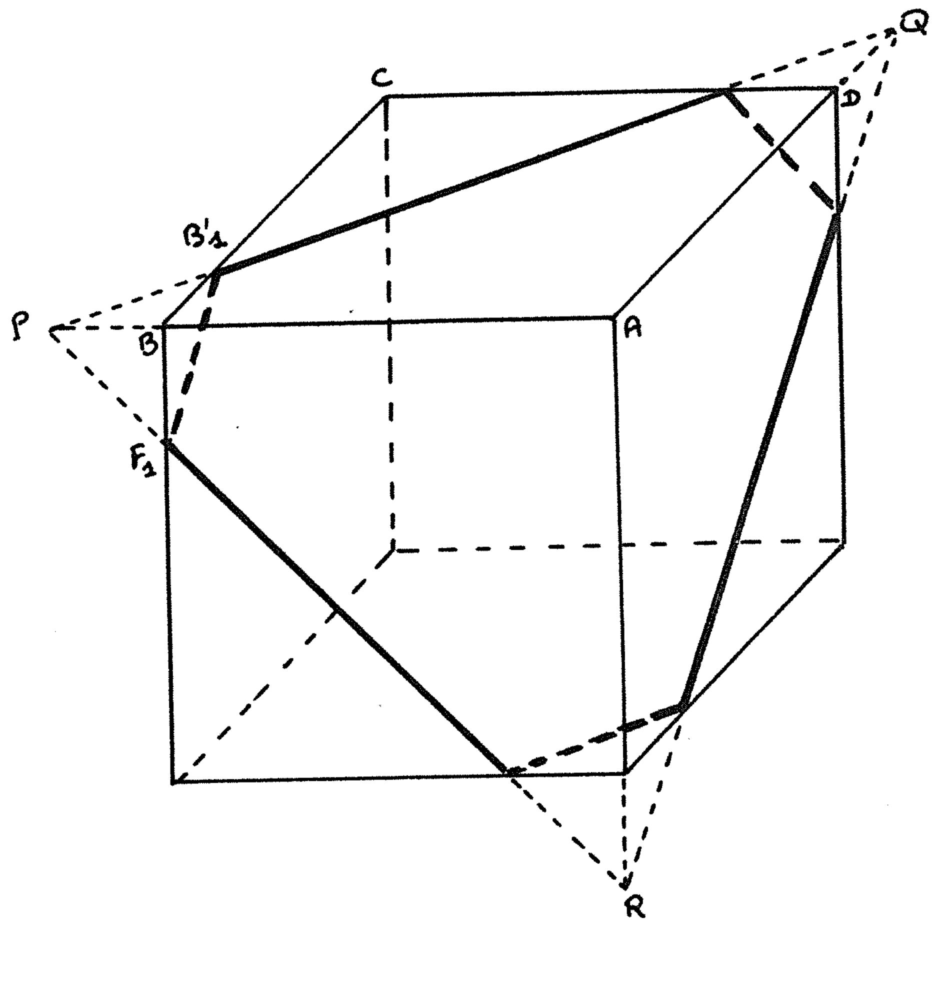
Recherche-les.

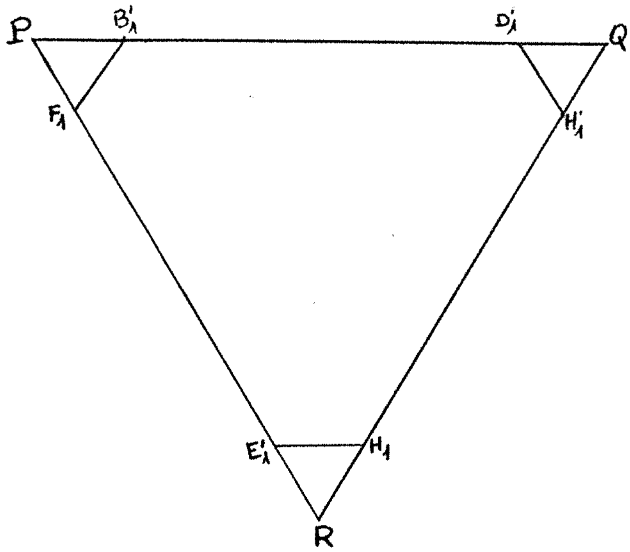
La figure obtenue à la 11ème section $[(n + 1)^e$ section] est un hexagone découpé dans un triangle équilatéral dont on a "rogné" les 3 sommets. En effet, regarde la figure ci-dessous et imagine un cube de 11 cm d'arête



coupé par son plan diagonal (P, Q, R). La trace de cette section passerait par B'_1, D'_1, H'_1, H_1, E', F_1 et serait telle que la distance (B, P) serait à 1cm, (équidistance des sections successives)

Donc, dans le triangle rectangle (P, F_1, B) on aurait :
$d(B, P) = 1$ et $d(B, F_1) = 1$ et par suite $d(P, F_1) = \sqrt{2}$
Il en serait de même à partir des points Q et R .



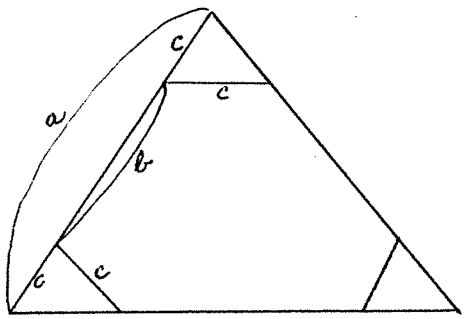


Donc, l'hexagone obtenu après la $(n + 1)^e$ section, est dessiné dans un triangle équilatéral dont le côté mesure : $d(P, B'_1) + d(B'_1, D'_1) + d(D'_1Q) = \sqrt{2} + 9\sqrt{2} + \sqrt{2} = 11\sqrt{2}$

Ce résultat se place normalement à la suite de la liste obtenue au tableau 7 pour les longueurs des côtés des triangles successifs, dont la forme générale était : longueur d'un côté du triangle équilatéral : $n\sqrt{2}$

Tu vas donc pouvoir calculer les aires de ces triangles successifs que l'on obtiendrait entre la 11ème et la 19ème section, pour chacun de ces triangles, en fonction du numéro n de la section, calcule :

- le côté du grand triangle équilatéral dans lequel est découpé l'hexagone,
- l'aire de ce triangle,
- le côté du petit triangle équilatéral à retirer,
- l'aire des 3 petits triangles équilatéraux,
- finalement, l'aire de l'hexagone obtenu par différence.



. On a vu que chaque base des solides obtenus étaient découpées dans des triangles équilatéraux dont on retirait les 3 "coins" eux mêmes triangles équilatéraux.

Si a, b, c sont les longueurs des côtés comme le montre la figure, on a :

$b = a - 2c$ et

$b + c = a - c$

donc le périmètre de l'hexagone : $3(a - c)$

Fais les calculs pour les différents cas ? Que constates-tu ?

. Complète le <u>tableau 9</u>

Tableau 9

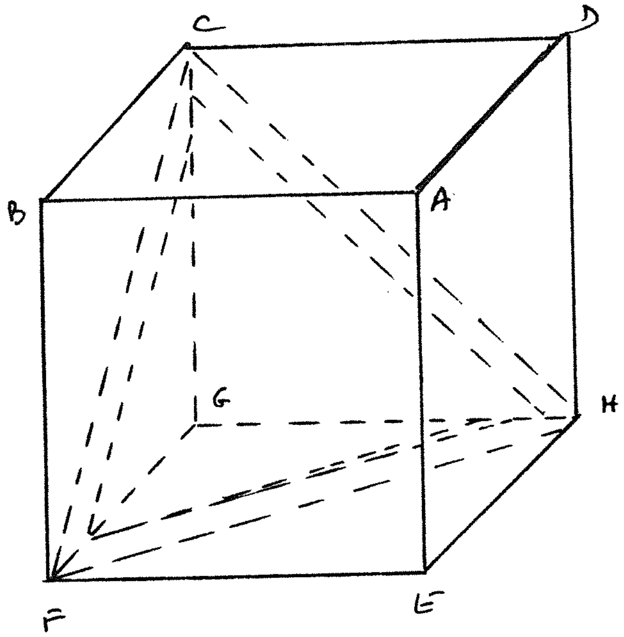
Numéro de la section	grand triangle équilatéral			petit triangle équilatéral			Aire de 3 petits triangles	Aire de l'hexagone	Périmètre de base
	Mesure du côté	Mesure de la hauteur	Aire	Mesure du côté	Mesure de la hauteur	Aire			
11e									

. sur le graphique déjà réalisé en (F) trace les représentations graphiques du périmètre et de l'aire de la base

. calcule l'aire latérale de chaque solide : quelle remarque peux-tu faire ?

. On pourrait calculer le volume de chaque solide obtenu de la 11ème à la 19ème section mais ce calcul étant difficile nous ne te le demanderons pas.

IV - RETOUR AU POINT DE DEPART



Après la 19 ème section, si tu continues à découper le cube parallèlement au plan diagonal (C, F, H) dans quelle situation te retrouves-tu ?

Tu peux donc te servir des résultats déjà trouvés et compléter les graphiques du paragraphe F

Trouve les équations des droites correspondants dans l'intervalle [0, 10]

dans l'intervalle [10, 20]

dans l'intervalle [20, 30]

Quelles remarques peux-tu faire à partir du graphique ?

Tableau récapitulatif des formules générales à connaître

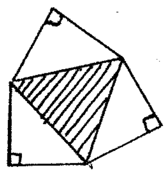
Tableau 10

	Mesure de
Triangle rectangle isocèle de côté a	hypoténuse
	hauteur
Triangle équilatéral de côté a	hauteur
Cube d'arête a	diagonale du carré
	diagonale du cube
Aire	triangle
	trapèze
Volume	pyramide
	tronc de pyramide
	cube

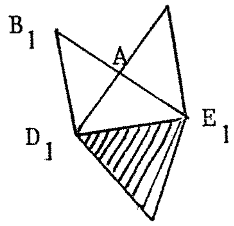
PROBLEMES

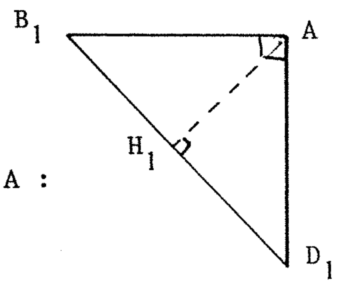
A - Solide obtenu après la 1ère section

1)



ou





2) . $d(A, B_1) = 1$ cm

. $d(A, D_1) = 1$ cm

. Par Pythagore, dans (A, B_1, D_1) rectangle en A :

$$d(CD_1, B_1)^2 = d(A_1 D_1)^2 + d(A, B_1)^2$$

$$\boxed{d(D_1, B_1) = \sqrt{2}}$$

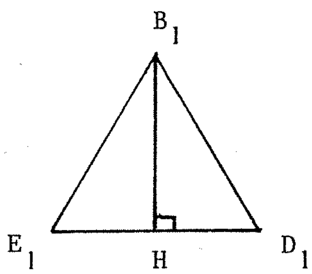
. (A, B, C) est rectangle en A; $[A H_1]$ est la hauteur relative à l'hypoténuse donc :

$$d(A, H_1) \times d(B_1, D_1) = d(A, D_1) \times d(A, B_1)$$

$$d(A, H_1) \times \sqrt{2} = 1$$

$$\boxed{d(A, H_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

3) La base de la pyramide est le triangle (B_1, D_1, E_1)



de côté $d(B_1, D_1) = \sqrt{2}$

La hauteur $[B_1, H]$ est aussi médiane relative à $[E_1 D_1]$.

Par Pythagore appliqué à (B_1, H_1, E_1) on a

$$\boxed{d(B_1, H) = \frac{\sqrt{6}}{2}}$$

4) . Périmètre de base de la pyramide : $\boxed{3\sqrt{2}}$

. Aire de base de la pyramide

c'est l'aire d'un triangle de base $[E_1\ D_1]$ et de hauteur $[B_1\ H]$

donc

$$\text{Aire de base} = \frac{d(E_1\ D_1) \times d(B_1,\ H)}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

$$\text{Aire de base} = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{\text{Aire de base} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

. Aire d'une face de la pyramide :

$$\frac{d(D_1,\ B_1) \times d(A,\ H_1)}{2} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

. $\boxed{\text{Aire latérale} = \frac{3}{2}}$

. Aire totale : $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 1,5 + 0,866$

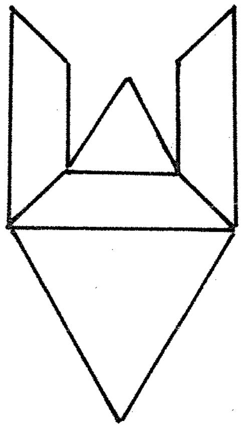
. $\boxed{\text{Aire totale} = 2,366}$

Solide obtenu après la 1ère section. TABLEAU 1

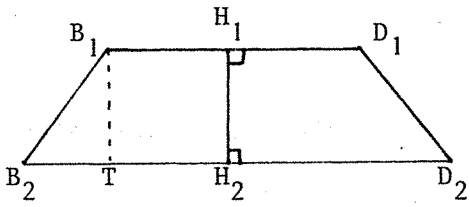
Mesure de	Base de la Pyramide	1 Face de la pyramide	Périmètre de base de la pyramide
côté	$\sqrt{2}$	1 cm	
hauteur	$\sqrt{6}/2$	$\sqrt{2}/2$	
base du triangle	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$
Aire	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	
Aire latérale		$\frac{3}{2}$	
Aire totale	$\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2,366$		

B - Tronc de pyramide obtenu après la 2ème section

1)



2) Face



. $\boxed{d(B_1, D_1) = \sqrt{2}}$

. $\boxed{d(B_1, B_2) = 1 \text{ cm}}$

. $d(B_1, T) = d(H_1, H_2)$

et $d(T, H_1) = d(H_1, H_2) = \dots \frac{\sqrt{2}}{2}$

dans (B_1, T, B_2) rectangle en T.

par Pythagore

$$d(B_1\ B_2)^2 = d(B_1, T)^2 + d(B_2, T)^2$$

$$1 = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + d(B_2\ T)^2$$

$$1 - \frac{1}{2} = d(B_2, T)^2$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} = d(B_2, T)} = d(H_1, H_2)$$

. Calcul de $d(B_2, D_2)$

$$d(B_2, D_2) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \text{petite base}$$
$$= \sqrt{2} + \sqrt{2}$$

$$\boxed{d(B_2, D_2) = 2\sqrt{2}}$$

. Périmètre du triangle (B_1, D_1, E_1) — calcul fait en A

$3\sqrt{2}$

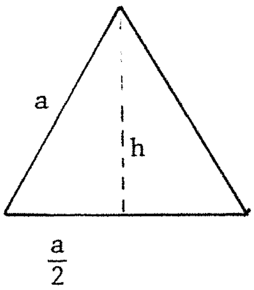
. Périmètre du triangle $(B_2, D_2, E_2) = 6\sqrt{2}$

. L'aire de la petite base — calcul fait en A

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

. Aire de la grande base : c'est un triangle équilatéral de côté $2\sqrt{2}$.

la hauteur de ce triangle mesure h telle que :



$$a^2 - \frac{a^2}{4} = h^2$$

$$\frac{3a^2}{4} = h^2$$

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = h$$

Si $a = 2\sqrt{2}$ la hauteur du triangle équilatéral est $\dfrac{2\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$

aire de la grande base triangulaire :

$$\frac{2\sqrt{2} \times \sqrt{6}}{2} = \sqrt{2} \times \sqrt{6} = \boxed{2\sqrt{3}}$$

. Aire d'un trapèze.

$$\frac{\text{grande base} + \text{petite base}}{2} \times \text{hauteur}$$

$$\frac{d(B_2, D_2) + d(B_1, D_1)}{2} \times d(H_1\ H_2)$$

$$\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{4} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

. Aire latérale du tronc de pyramide

$$\frac{3}{2} \times 3 = \boxed{\frac{9}{2}}$$

. Aire totale de la pyramide

aire petit triangle + aire grand triangle + aire des 3 trapèzes.

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} + \frac{9}{2} =$$

$$\frac{\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 9}{2} = \frac{5\sqrt{3} + 9}{2} = \frac{(5 \times 1{,}732) + 9}{2}$$

$$= \frac{8{,}66 + 9}{2} = \frac{17{,}66}{2} = \boxed{8{,}83}$$

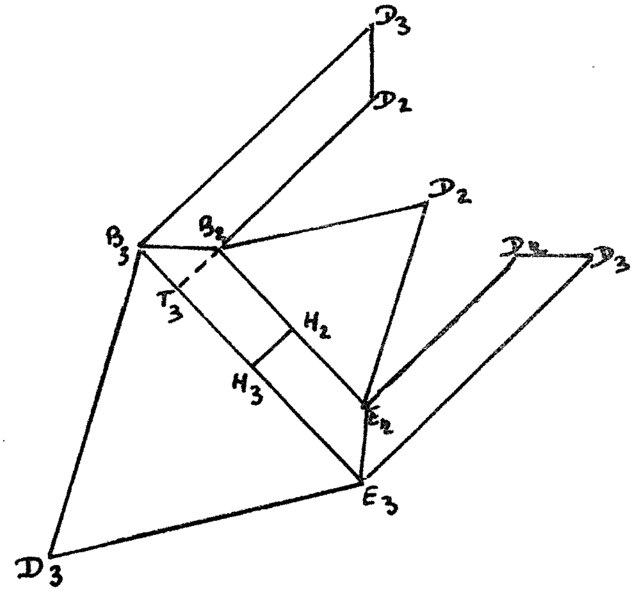
Tronc de pyramide obtenu après la 2ème section

TABLEAU 2

mesure	petit triangle	grand triangle	trapèze
côté	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$2\sqrt{2}$	
hauteur	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\sqrt{6}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
petite base			$\sqrt{2}$
grande base			$2\sqrt{2}$
périmètre	$3\sqrt{2}$	$6\sqrt{2}$	
Aire	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$2\sqrt{3}$	$\frac{3}{2}$
Aire latérale			$\frac{9}{2}$
Aire totale	$\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} + \frac{9}{2} = 8{,}83$		

C - Tronc de pyramide obtenu après la 3ème section

1)



2) $d(B_2, B_3) = 1$ cm

$d(B_2, E_2) = 2\sqrt{2}$

$d(H_2, H_3) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$d(B_3, T_3) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$d(B_3, E_3) = 2(\frac{\sqrt{2}}{2}) + 2\sqrt{2}$

ou $d(B_3, D_3) = \sqrt{2} + 2\sqrt{2}$

$\boxed{d(B_3, D_3) = 3\sqrt{2}}$

3) . périmètre de la petite base du tronc de pyramide

$d(B_2, D_2, E_2) = 6\sqrt{2}$

. périmètre de la grande base du tronc de pyramide

$d(B_3, D_3, E_3) = 9\sqrt{2}$

. aire de la petite base triangulaire : $2\sqrt{3}$

. aire de la grande base triangulaire

$$\frac{d(B_3, D_3) \times h}{2} \quad \text{avec } h = \frac{\text{côte} \times \sqrt{3}}{2} = \frac{d(B_3, D_3) \times \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{donc l'aire} = \frac{3\sqrt{2} \times \frac{3\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\frac{9 \times 2 \times \sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

4) Face

petite base du trapèze : $d(B_2, D_2) = 2\sqrt{2}$

grande base du trapèze : $d(B_3, D_3) = 3\sqrt{2}$

hauteur du trapèze : $d(H_2, H_3) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

aire de 1 trapèze

$$\frac{d(B_2, D_2) + d(B_3, D_3)}{2} \times d(H_2, H_3) =$$

$$\frac{2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5 \times 2}{4} = \frac{5}{2}$$

TABLEAU 3

mesure	petit triangle	grand triangle	trapèze
côté	$2\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	
hauteur	$\frac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}$	$\frac{3\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
petite base			$2\sqrt{2}$
grande base			$3\sqrt{2}$
périmètre	$6\sqrt{2}$	$9\sqrt{2}$	
aire	$\frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$	$\frac{9\sqrt{3}}{3}$	$\frac{5}{2}$
aire latérale			$\frac{15}{2}$
aire totale	$2\sqrt{3} + \frac{9\sqrt{3}}{2} + \frac{15}{2} = \frac{13\sqrt{3}}{2} + \frac{15}{2} = 18,758$		

D - Solide obtenu après la 4ème section

TABLEAU 4

mesure	petit triangle	grand triangle	trapèze
côté	$3\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	
hauteur	$\frac{3\sqrt{6}}{2}$	$\frac{4\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{6}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
petite base			$3\sqrt{2}$
grande base			$4\sqrt{2}$
périmètre	$9\sqrt{2}$	$12\sqrt{2}$	
aire	$\frac{9\sqrt{3}}{2}$	$\frac{16\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$	$\frac{7}{2}$
aire latérale			$\frac{21}{2}$
aire totale	$\frac{9\sqrt{3}}{2} \times \frac{16\sqrt{3}}{2} + \frac{7}{2} =$	$\frac{25}{2}\sqrt{3} + \frac{27}{2} =$	35,1506

Solide obtenu après la 5ème section

TABLEAU 5

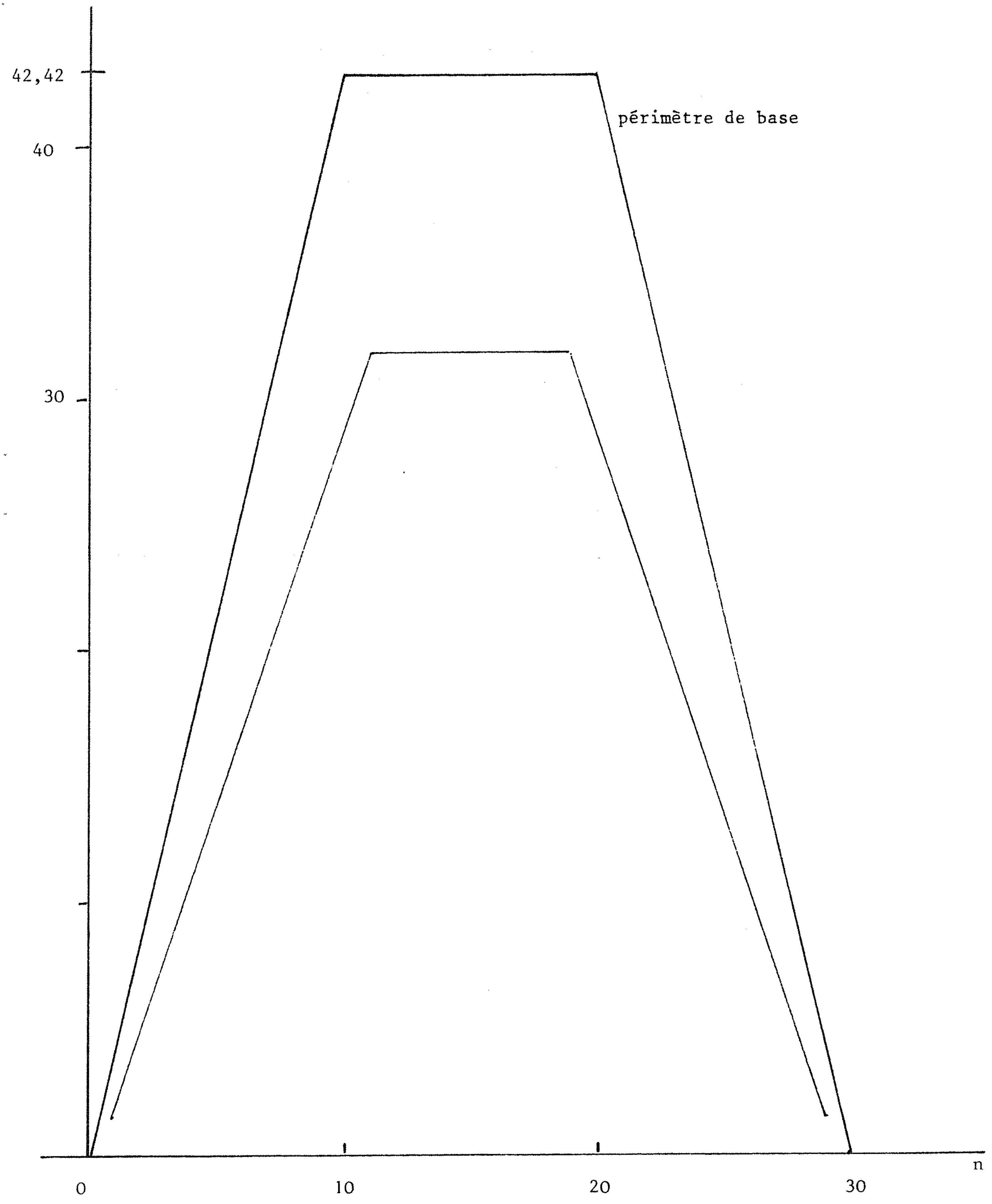
mesure	petit triangle	grand triangle	trapèze
côté	$4\sqrt{2}$	$5\sqrt{2}$	
hauteur	$\frac{4\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{6}$	$\frac{5\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
petite base			$4\sqrt{2}$
grande base			$5\sqrt{2}$
périmètre	$12\sqrt{2}$	$15\sqrt{2}$	
aire	$\frac{16\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$	$\frac{25\sqrt{3}}{2}$	$\frac{9}{2}$
aire latérale			$\frac{27}{2}$
aire totale	$\frac{16\sqrt{3}}{2} + \frac{25\sqrt{3}}{2} + \frac{27}{2}$	$\frac{41\sqrt{3}}{2} + \frac{27}{2} =$	49,007

Tableau 7

Numéro du solide ou de la section	Petite base triangulaire			grande base triangulaire			périmètre de la grande base du solide	aire d'une face (triangle ou trapèze)	aire latérale	aire totale
	côté	hauteur	aire	côté	hauteur	aire				
n			$\frac{\sqrt{3}}{2}(n-1)^2$			$\frac{\sqrt{3}}{2}n^2$	$3n\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}(2n-1)$	$\frac{3}{2}(2n-1)$	
1				$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$3\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2,366
2	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{6}$	$\frac{4\sqrt{3}}{2}$	$6\sqrt{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$	8,83
3	$2\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$3\sqrt{2}$	$\frac{3\sqrt{6}}{2}$	$\frac{9\sqrt{3}}{2}$	$9\sqrt{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{15}{2}$	18,758
4	$3\sqrt{2}$	$\frac{3\sqrt{6}}{2}$	$\frac{9\sqrt{3}}{2}$	$4\sqrt{2}$	$\frac{4\sqrt{6}}{2}$	$\frac{16\sqrt{3}}{2}$	$12\sqrt{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{21}{2}$	35,1506
5	$4\sqrt{3}$	$\frac{4\sqrt{6}}{2}$	$\frac{16\sqrt{3}}{2}$	$5\sqrt{2}$	$\frac{5\sqrt{6}}{2}$	$\frac{25\sqrt{3}}{2}$	$15\sqrt{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{27}{2}$	49,007
6			$\frac{25\sqrt{3}}{2}$							
⋮										

E

Sodide obtenu après la	Périmètre de la grande base	Aire d'une face	Aire latérale	Petite	base	grande	base	aire totale
				hauteur	aire	hauteur	aire	
1e section	$3\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$			$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 1^2$	2,366
2e section	$6\sqrt{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{2\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \times 2^2$ ou $\frac{4\sqrt{3}}{2}$	8,83
3e section	$9\sqrt{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{2\sqrt{6}}{2}$	$\frac{4\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \times 3^2$ ou $\frac{9\sqrt{3}}{2}$	18,758
4e section	$12\sqrt{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{21}{2}$	$\frac{3\sqrt{6}}{2}$	$\frac{9\sqrt{3}}{2}$	$\frac{4\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \times 4^2$ ou $\frac{16\sqrt{3}}{2}$	25,150
5e section		$\frac{9}{2}$			$\frac{16\sqrt{3}}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2} \times 5^2$ ou $\frac{25\sqrt{3}}{2}$	
n^e section	$3n\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}(2n-1)$	$\frac{3}{2}(2n-1)$		$\frac{\sqrt{3}}{2}(n-1)^2$		$\frac{\sqrt{3}}{2} \times n^2$	


42,42
40
30
périmètre de base
0
10
20
30
n

G - Volume

. calcul de $d(A, G)$.

dans (A,E,G) rectangle en E :

$d(A,E)$ est le côté du cube de longueur $\underline{a}$

$d(E,G)$ est la diagonale d'un carré de côté $\underline{a}$, donc $d(E,G) = a\sqrt{2}$

par pythagore : $d(A,E)^2 + d(E,G)^2 = d(A,G)^2$

$$a^2 + 2a^2 = d(A,G)^2$$

$$\boxed{d(A,G) = a\sqrt{3}}$$

. dans (E_1, D_1, B_1) $d(E_1 B_1) = \sqrt{2}$

$d(E_1,H_1)$ est la hauteur donc $d(E_1,H_1) = \frac{\sqrt{6}}{2}$

. comme I est le centre de gravité du triangle, il est placé au $\frac{1}{3}$ de la médiane (ou hauteur) à partir de son pied, donc $d(I, H_1) = \frac{\sqrt{6}}{6}$

. dans (A, I, H_1) rectangle en I on a :

$$d(A, I)^2 + d(I, H_1)^2 = d(A, H_1)^2$$

$d(A, H_1)$ est la hauteur d'une face du tétraèdre donc $d(A, H_1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (voir II A 2))

donc:

$$d(A, I)^2 + \frac{6}{36} = \frac{2}{4}$$

$$d(A, I)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$$

$$= \frac{3}{6} - \frac{1}{6}$$

$$d(A, I)^2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{d(A, I) = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

TABLEAU 8

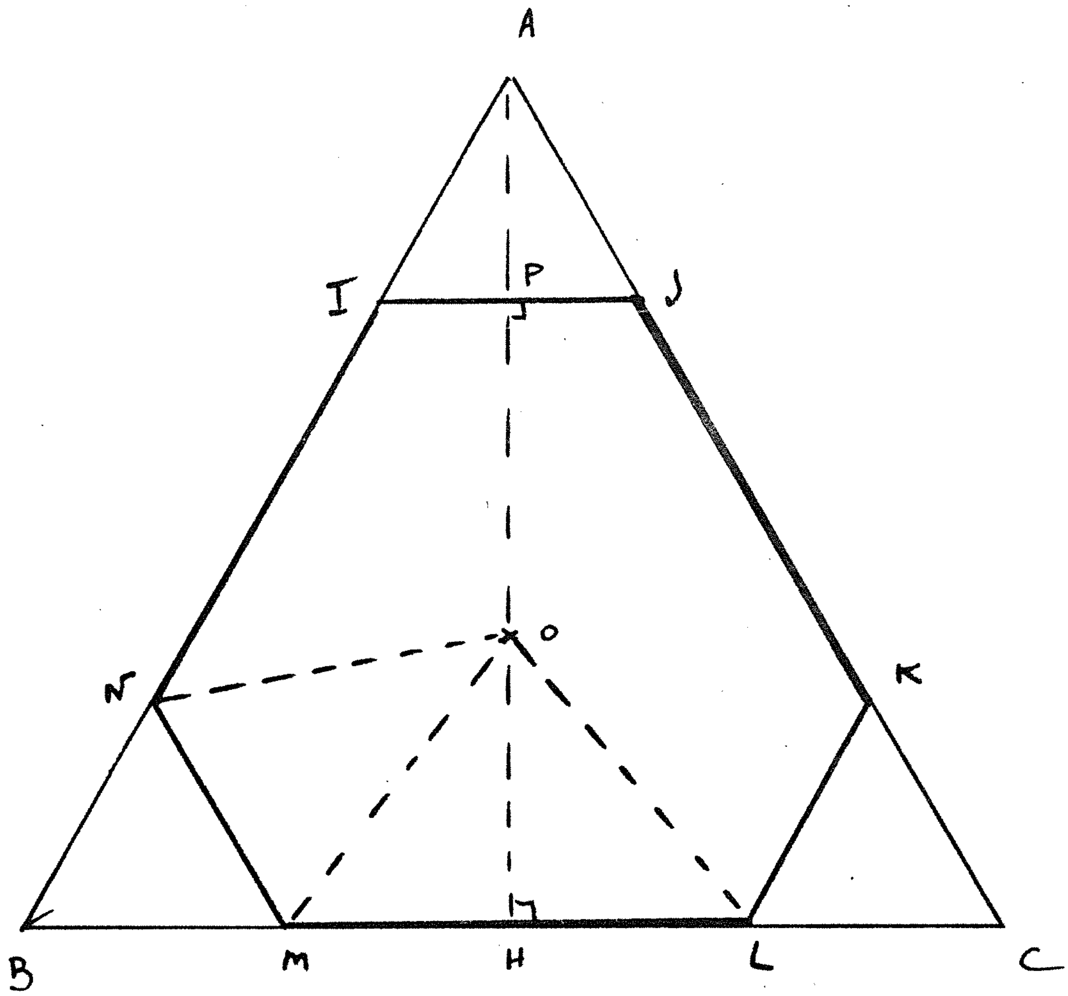
volume de la pyramide : $\frac{1}{3}$ b × h

volume du tronc de pyramide : $\frac{1}{3} \times h \times (B + b + \sqrt{B \times b})$

N° de la section	hauteur	aire de la petite base	aire de la grande base	volume
1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\frac{1}{6}$
2		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$2\sqrt{3}$	$\frac{7}{6}$
3		$2\sqrt{3}$	$\frac{9\sqrt{3}}{2}$	$\frac{19}{6}$
4		$\frac{9\sqrt{3}}{2}$	$\frac{16\sqrt{3}}{2}$	$\frac{37}{6}$
5		$\frac{16\sqrt{3}}{2}$	$\frac{25\sqrt{3}}{2}$	$\frac{61}{6}$
6				$\frac{91}{6}$
n				$V_n = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{1}{6}$

Tableau 9

Numéro du solide ou de la section	grand triangle équilatéral			petit triangle équilatéral			aire des 3 petits triangles	aire de l'hexagone	périmètre de base
	côté	hauteur	aire	côté	hauteur	aire			
11^e	$11\sqrt{2}$	$\frac{11\sqrt{6}}{2}$	$\frac{121\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$59\sqrt{3}$	$30\sqrt{2}$
12^e	$12\sqrt{2}$	$\frac{12\sqrt{2}}{2}$	$\frac{144\sqrt{3}}{2}$	$2\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{6}}{2}$	$\frac{4\sqrt{3}}{2}$	$\frac{12\sqrt{3}}{2}$	$66\sqrt{3}$	$30\sqrt{2}$
13^e	$13\sqrt{2}$	$\frac{13\sqrt{6}}{2}$	$\frac{169\sqrt{3}}{2}$	$3\sqrt{2}$	$\frac{3\sqrt{6}}{2}$	$\frac{9\sqrt{3}}{2}$	$\frac{27\sqrt{3}}{2}$	$71\sqrt{3}$	$30\sqrt{2}$
14^e	$14\sqrt{2}$	$\frac{14\sqrt{6}}{2}$	$\frac{196\sqrt{3}}{2}$	$4\sqrt{2}$	$\frac{4\sqrt{6}}{2}$	$\frac{16\sqrt{3}}{2}$	$\frac{48\sqrt{3}}{2}$	$74\sqrt{3}$	$30\sqrt{2}$
15^e	$15\sqrt{2}$	$\frac{15\sqrt{6}}{2}$	$\frac{225\sqrt{3}}{2}$	$5\sqrt{2}$	$\frac{5\sqrt{6}}{2}$	$\frac{25\sqrt{3}}{2}$	$\frac{75\sqrt{3}}{2}$	$75\sqrt{3}$	$30\sqrt{2}$
16^e	$16\sqrt{2}$	$\frac{16\sqrt{6}}{2}$	$\frac{256\sqrt{3}}{2}$	$6\sqrt{2}$	$\frac{6\sqrt{6}}{2}$	$\frac{36\sqrt{3}}{2}$	$\frac{108\sqrt{3}}{2}$	$74\sqrt{3}$	$30\sqrt{2}$
17^e	$17\sqrt{2}$	$\frac{17\sqrt{6}}{2}$	$\frac{289\sqrt{3}}{2}$	$7\sqrt{2}$	$\frac{7\sqrt{6}}{2}$	$\frac{49\sqrt{3}}{2}$	$\frac{147\sqrt{3}}{2}$	$71\sqrt{3}$	$30\sqrt{2}$
18^e	$18\sqrt{2}$	$\frac{18\sqrt{6}}{2}$	$\frac{324\sqrt{3}}{2}$	$8\sqrt{2}$	$\frac{8\sqrt{6}}{2}$	$\frac{64\sqrt{3}}{2}$	$\frac{192\sqrt{3}}{2}$	$66\sqrt{3}$	$30\sqrt{2}$
19^e	$19\sqrt{2}$	$\frac{19\sqrt{6}}{2}$	$\frac{361\sqrt{3}}{2}$	$9\sqrt{2}$	$\frac{9\sqrt{6}}{2}$	$\frac{81\sqrt{3}}{2}$	$\frac{243\sqrt{3}}{2}$	$59\sqrt{3}$	$30\sqrt{2}$
20^e	$20\sqrt{2}$	$\frac{20\sqrt{6}}{2}$	$\frac{400\sqrt{3}}{2}$	$10\sqrt{2}$	$\frac{10\sqrt{6}}{2}$	$\frac{100\sqrt{3}}{2}$	$\frac{300\sqrt{3}}{2}$	$50\sqrt{3}$	$30\sqrt{2}$
⋮									



3 triangles (M, N, O) + 3 triangles (M, O, L) =

1 hexagone (I, J, K, L, M, N)

Préambule

Si on coupe au delà du plan diagonal à 1cm de B et de D, on obtient un côté de type IN dont la mesure est $(n-1)\sqrt{2}$ si n est la mesure de l'arête du cube en cm.

Donc si le cube a 10cm de côté.

1ère coupe IN mesure $9\sqrt{2}$

2ème coupe IN mesure $8\sqrt{2}$

3ème coupe IN mesure $7\sqrt{2}$

....

Mesure correspondante de IJ

IJ est la base du triangle rectangle isocèle restant "attaché" au cube pour la

1ère coupe IJ mesure $\sqrt{2}$

2ème coupe IJ mesure $2\sqrt{2}$

3ème coupe IJ mesure $3\sqrt{2}$

Aire de (I, J, K, K, M, N) = 3 × Aire (N, O, M) + 3 × (Aire (M, O, L)

hauteur [O H] (de M, O, L) est telle que :

$$O\,H = \frac{1}{3}\ AH = \frac{1}{3}\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times B\,C\right) = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{6}\ B\,C}$$ et BC = IN + (AI + BN)

hauteur $\boxed{O\,P}$ de (N, O, M) est telle que :

$$O\,P = \frac{2}{3}\ AH - AP$$

$$A\,P = IJ\ \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$O\,P = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times B\,C - I\,J \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{O\,P = \frac{\sqrt{3}}{3}\ B\,C - \frac{\sqrt{3}}{2}\ I\,J}$$

Aire (M,O,L) : $\frac{1}{2}$ I N × O H

Aire (N,O,M) : $\frac{1}{2}$ I J × O P

1ère coupe si le cube a 10 cm de côté :

$$IN = 9\sqrt{2} \quad \text{et} \quad IJ = \sqrt{2}$$

$$\boxed{BC} = 9\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = \boxed{11\sqrt{2}}$$

$$\boxed{OH} = \frac{\sqrt{3}}{6} \times 11\sqrt{2} = \boxed{\frac{11\sqrt{6}}{6}}$$

$$\boxed{\text{Aire } (M, O, L)} : \frac{1}{2}\left(9\sqrt{2} \times \frac{11\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{99\sqrt{12}}{12} = \boxed{\frac{33\sqrt{3}}{2}}$$

$$\boxed{OP} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 11\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{2} = \frac{11\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{2} = \boxed{\frac{19\sqrt{6}}{6}}$$

$$\boxed{\text{Aire } (N, O, M)} : \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} \times \frac{19\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{19\sqrt{12}}{12} = \boxed{\frac{19\sqrt{3}}{6}}$$

2ème coupe $IN = 8\sqrt{2}$ $IJ = 2\sqrt{2}$

$$\boxed{BC} = 8\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = \boxed{12\sqrt{2}}$$

$$\boxed{OH} = \frac{\sqrt{3}}{6} \times 12\sqrt{2} = \frac{12\sqrt{6}}{6} = \boxed{2\sqrt{6}}$$

$$\boxed{\text{Aire } (M, O, L)} = \frac{1}{2}\ 8\sqrt{2} \times 2\sqrt{6} = \boxed{16\sqrt{3}}$$

$$\boxed{OP} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 12\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{2}$$

$$= \frac{12\sqrt{6}}{3} - \sqrt{6} = \frac{12\sqrt{6}}{3} - \frac{3\sqrt{6}}{3} = \frac{9\sqrt{6}}{3} = \boxed{3\sqrt{6}}$$

$$\boxed{\text{Aire } (N, O, M)} = \frac{1}{2}\ (2\sqrt{2} \times 3\sqrt{6}) = \boxed{6\sqrt{3}}$$

3ème coupe $IN = 7\sqrt{2}$ et $IJ = 3\sqrt{2}$

$$\boxed{BC} = 7\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = \boxed{13\sqrt{2}}$$

$$\boxed{OH} = \frac{\sqrt{3}}{6} \times 13\sqrt{2} = \boxed{\frac{13\sqrt{6}}{6}}$$

$$\boxed{\text{Aire } (M, O, L)} = \frac{1}{2}\left(7\sqrt{2} \times \frac{13\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{91\sqrt{12}}{12} = \boxed{\frac{91\sqrt{3}}{6}}$$

$$OP = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 13\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3\sqrt{2}$$

$$= \frac{13\sqrt{6}}{3} - \frac{3\sqrt{6}}{2} = \frac{26\sqrt{6}}{6} - \frac{9\sqrt{6}}{6} = \boxed{\frac{17\sqrt{6}}{6}}$$

$$\boxed{\text{Aire } (N, O, M)} = \frac{1}{2}\left(3\sqrt{2} \times \frac{17\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{51\sqrt{12}}{2\times 6} = \boxed{\frac{17\sqrt{3}}{2}}$$

<u>4ème coupe</u>

$$IN = 6\sqrt{2} \qquad IJ = 4\sqrt{2}$$

$$BC = 6\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$$

$$OH = \frac{\sqrt{3}}{6} \times 14\sqrt{2} = \frac{7\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Aire } (M, O, L) = \frac{1}{2}\left(6\sqrt{2} \times \frac{7\sqrt{6}}{3}\right) = 14\sqrt{3}$$

$$OP = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 14\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4\sqrt{2}$$

$$= \frac{14\sqrt{6}}{3} - 2\sqrt{6} = \frac{14\sqrt{6}}{3} - \frac{6\sqrt{6}}{3} = \frac{8\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Aire } (N, O, M) = \frac{1}{2}\left(4\sqrt{2} \times \frac{8\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{32\sqrt{3}}{3}$$

<u>5ème coupe</u>

$$IN = 5\sqrt{2} \qquad IJ = 5\sqrt{2}$$

$$BC = 5\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$$

$$OH = \frac{\sqrt{3}}{6} \times 15\sqrt{2} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Aire } (M, O, L) = \frac{1}{2}\ 5\sqrt{2} \times \frac{5\sqrt{6}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

$$OP = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 15\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times 5\sqrt{2} = \frac{15\sqrt{6}}{3} - \frac{5\sqrt{6}}{2}$$

$$= \frac{30\sqrt{6}}{6} - \frac{15\sqrt{6}}{6} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Aire } (N, O, M) = \frac{1}{2}\left(5\sqrt{2} \times \frac{5\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

TABLEAU RECAPITULATIF

mesure de I N	mesure de I J	mesure de [O H]	Aire (M, O, L)	mesure de [O P]	Aire (N, O, M)	Aire totale
$9\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{11\sqrt{6}}{6}$	$\frac{33\sqrt{3}}{2}$	$\frac{19\sqrt{6}}{6}$	$\frac{19\sqrt{3}}{6}$	$59\sqrt{3}$
$8\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{6}$ ou $\frac{12\sqrt{6}}{6}$	$16\sqrt{3}$	$3\sqrt{6}$ ou $\frac{18\sqrt{6}}{6}$	$6\sqrt{3}$	$66\sqrt{3}$
$7\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$\frac{13\sqrt{6}}{6}$	$\frac{91\sqrt{3}}{6}$	$\frac{17\sqrt{6}}{6}$	$\frac{17\sqrt{3}}{2}$	$71\sqrt{3}$
$6\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	$\frac{7\sqrt{6}}{3}$ ou $\frac{14\sqrt{6}}{6}$	$14\sqrt{3}$	$\frac{8\sqrt{6}}{6}$ ou $\frac{16\sqrt{6}}{6}$	$\frac{32\sqrt{3}}{3}$	$74\sqrt{3}$
$5\sqrt{2}$	$5\sqrt{2}$	$\frac{5\sqrt{6}}{2}$ ou $\frac{15\sqrt{6}}{6}$	$\frac{25\sqrt{3}}{2}$	$\frac{5\sqrt{6}}{2}$ ou $\frac{15\sqrt{6}}{6}$	$\frac{25\sqrt{3}}{2}$	$75\sqrt{3}$