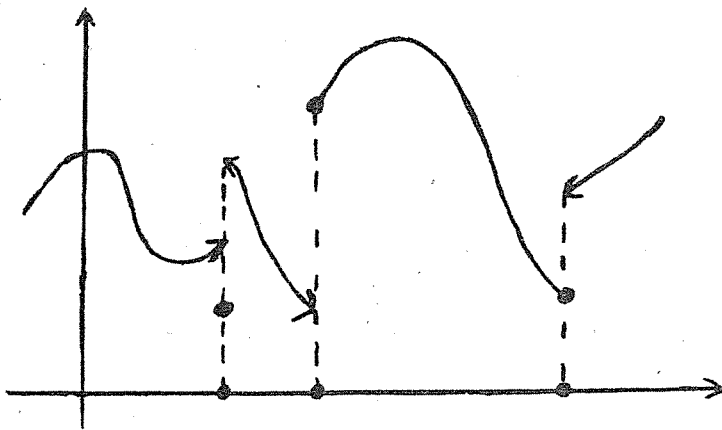


Juin 1980

Représentation graphique et continuité



Jacques SAVARIAU

S O M M A I R E

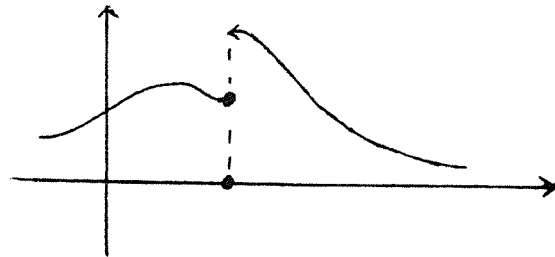
Interprétation

continuité : tout un chacun

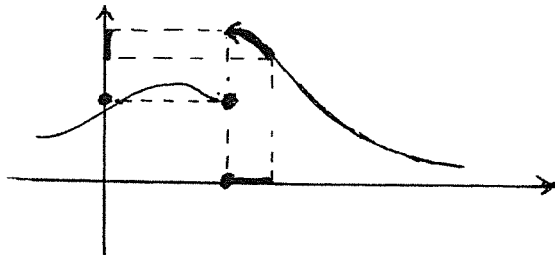
Continuité : Epsilon

Il y a continuité et Continuité

- *tout un chacun :*
la discontinuité,
c'est la coupure
en morceaux (§ 0)



- Epsilon :
la discontinuité
c'est la rupture
d'un contact (§ 1)



- *tout un chacun :*
Je ne vois pas la différence.

- Epsilon :
Il y a une différence, mais on ne peut pas la voir (§ 2)

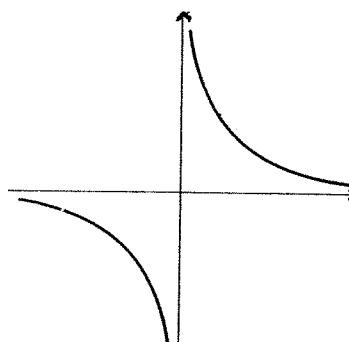
INTRODUCTION

Pour le savant, la connaissance sort de l'ignorance comme la lumière sort des ténèbres. Le savant ne voit pas que l'ignorance est un tissu d'erreurs positives, tenaces, solidaires. Il ne se rend pas compte que les ténèbres spirituelles ont une structure et que, dans ces conditions, toute expérience objective correcte doit toujours déterminer la correction d'une erreur subjective.

G. BACHELARD - *La philosophie du non* -

La notion de continuité n'est pas immédiate. Pour pouvoir aborder et utiliser efficacement la définition, il convient de maîtriser suffisamment les notions de fonction, de valeur absolue, les techniques de majoration, l'emploi des quantificateurs. L'approfondissement de ces notions préliminaires constitue la préparation appropriée aux techniques de l'analyse.

"La fonction
 $x \rightarrow \frac{1}{x}$ est-elle continue
ou bien continue par intervalles ?"

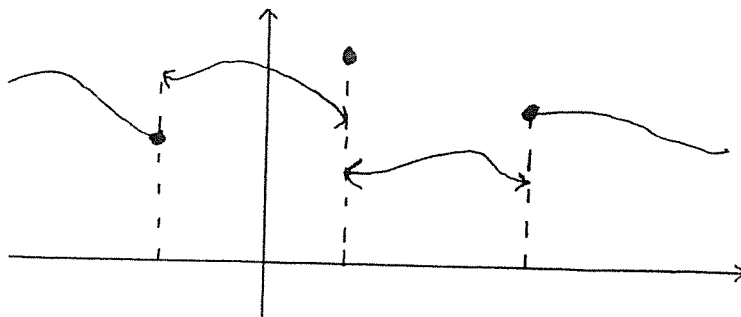


La préoccupation qui tente de s'exprimer dans cette question d'un élève, peut résumer l'objet de ce document : à côté des problèmes techniques, reste posée la question de la signification de la notion, des rapports entre la définition mathématique, formelle, et l'intuition visuelle, graphique, de la continuité.

Il est bien artificiel, de se priver, lorsqu'on fait des mathématiques, de l'apport des dessins ; illustrer le contenu théorique par des figures facilite indéniablement la compréhension. Mais, en retour, le raisonnement sur les dessins peut acquérir une autonomie, développer implicitement sa propre logique, sans qu'elle coïncide nécessairement avec la théorie de départ.

Comme tant d'autres notions scientifiques, la notion mathématique de continuité est précédée d'une idée spontanée issue de la vie courante, qui s'investit dans le domaine mathématique et se met à fonctionner, parallèlement à la définition formelle. Un pur produit de cette intervention de la notion usuelle de continuité est "l'évidence" graphique suivante :

Une fonction f apparaît continue lorsque son graphe est fait d'un seul morceau, lorsqu'on peut le tracer sans lever la main ; sinon, les points de discontinuité de f correspondent aux extrémités des morceaux du graphe, aux points où on lève la main.



Cette interprétation graphique de la continuité constitue l'objet principal de notre étude, essentiellement dans le cas où elle résiste vraiment, celui où le domaine de définition est un intervalle ouvert.

Ce document est avant tout un récit, celui de nos propres relations avec la notion de continuité ; il prend donc comme point de départ une expérience personnelle : si nous nous intéressons à une certaine appréhension de la continuité (§ 0), c'est qu'elle nous a concerné, étant élève.

Sans que cela soit le résultat d'une enquête, nous avons acquis le sentiment, au contact des étudiants, et par les échanges avec d'autres enseignants, que l'intervention de la notion spontanée de continuité a tendance, chez nombre d'élèves, à se stabiliser autour de cette interprétation graphique. Pour qu'un élève puisse maîtriser cette intrusion de l'intuition courante, il convient qu'elle soit explicitée et comparée à la notion mathématique, cela bien entendu en des termes qui lui restent accessibles.

Une fois mathématisée, l'appréhension de la continuité, suggérée par le graphique, se révèle erronée (§ 2) .

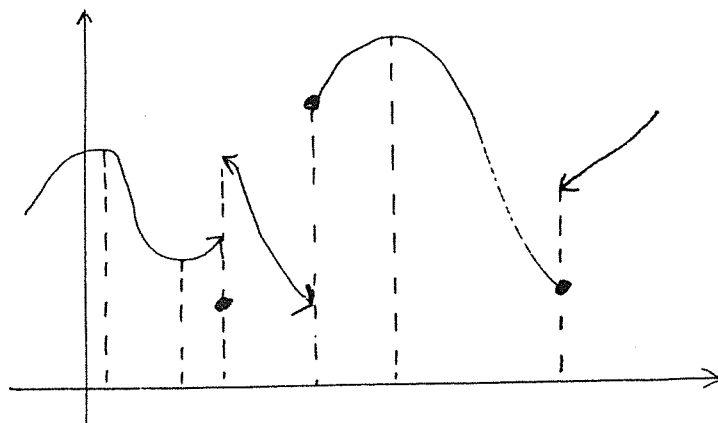
Globalement, si, lorsqu'une application définie sur un intervalle est continue, le graphe est bien constitué d'un seul morceau, la réciproque

est fausse ; on peut même construire une fonction dont le graphe, d'une part est constitué d'un seul morceau, d'autre part rencontre tout disque de $\mathbb{R}^2$, ce qui fait qu'en un certain sens cette fonction est le moins continue possible.

Ponctuellement, même lorsque une application f est définie sur un intervalle ouvert I , il n'y a pas de lien logique entre la discontinuité de f en un point a et la propriété mathématique qui exprime que $(a, f(a))$ est extrémité d'un des morceaux du graphe ; aucune de ces deux propriétés n'implique l'autre.

Et pourtant, chaque fois qu'on trace le graphe d'une telle fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, l'interprétation graphique se trouve en accord avec la définition formelle ; on constate que les points de discontinuité de f sont bien les points de I à la verticale desquels on lève la main. Ce qui est vrai, c'est que, si on peut tracer le graphe de f , alors les points de discontinuité sont effectivement les points de I à la verticale desquels on lève la main (§ 2). En effet, il va de soi que pouvoir représenter le graphe impose à cette fonction des conditions, en particulier, de finitude :

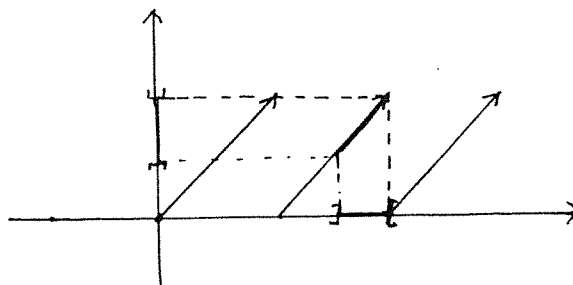
On ne peut lever la main du papier, et monter ou descendre le tracé du crayon, qu'un nombre fini de fois ; conditions sous lesquelles la continuité et son interprétation graphique coïncident.



C'est sa validité, dans le cas, nécessaire à son fonctionnement, où l'on peut représenter le graphe, qui permet à cette interprétation graphique de se mettre en place, sans risquer d'être démentie.

De même que les applications croissantes sont celles qui conservent l'ordre et les applications linéaires, celles qui conservent l'addition et la multiplication par un scalaire, les applications continues sont celles qui, en termes imagés, conservent le contact (§ 1) ; par exemple :

$f : x \rightarrow x - E(x)$ est
discontinue en $a \in \mathbb{Z}$,
car a est en contact
avec $X =]a - \frac{1}{2}, a[$,
mais $f(a) = 0$ n'est
pas en contact avec
 $f(X) =]\frac{1}{2}, 1[$; la
discontinuité de



f en a peut ainsi être perçue comme la rupture d'un contact en a .

Cette caractérisation, efficace pour établir la discontinuité, offre un support conceptuel qui complète l'efficacité technique de la définition habituelle dont il n'est pas question de sous-estimer l'importance primordiale ; mais surtout elle suggère une visualisation de la continuité, susceptible de contrarier efficacement l'interprétation graphique erronée issue du langage courant.

La continuité est une propriété topologique, et, par là même, "fait intervenir l'infini". Il n'est donc pas surprenant que traiter le graphe comme un objet concret, en donne une idée erronée ; la référence au "réel" est confortée par les usages mathématiques eux-mêmes ; en effet, on a l'habitude de parler de continuité en termes d'espace métrique, pas d'ensemble totalement ordonné ; par exemple dans $\mathbb{R}$, pas dans $\overline{\mathbb{R}}$; on pourrait dire qu'en mathématiques élémentaires, la continuité n'est envisagée que lorsque l'uniforme continuité a un sens.

Lorsque a et l sont finis, que l soit limite à gauche ou à droite de f en a , est de nouveau perçu à partir des extrémités - "des limites" - de morceaux de graphe. L'intervention de la notion de limite ne change donc pas la perception graphique de la continuité.

Lorsque a ou l est infini - mais alors l'usage fait qu'on ne parle pas de continuité - l'expression du langage courant : "à la limite", aussi imprécise qu'elle soit, et à cause même de cette imprécision, n'est pas en contradiction avec la notion mathématique ; la notion de limite fera l'objet d'un autre document intitulé : "Ordre et Convergence".

§ 0 : UNE APPREHENSION DE LA CONTINUITE

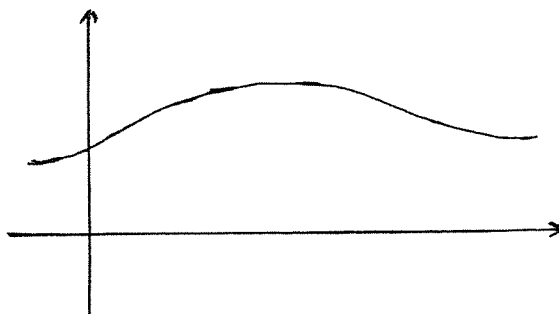
Une ligne continue, une ligne discontinue

Un bruit continu, un bruit discontinu

Les adjectifs "continu" et "discontinu" font partie du langage courant. On trouve au mot "continu", par exemple dans le dictionnaire ROBERT :

- 1/ Qui n'est pas interrompu dans le temps
- 2/ Composé de parties non séparées, perçu comme un tout
- 3/ Ce qui n'est pas divisé, interrompu

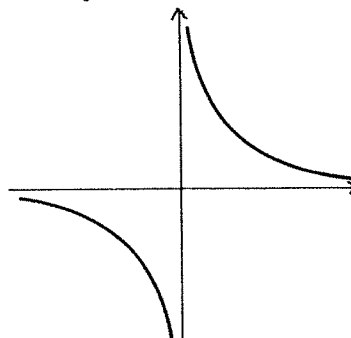
Ces adjectifs peuvent donc qualifier un phénomène de nature spatiale ou temporelle, tel qu'un dessin, par exemple la représentation du graphe d'une fonction, effectuée par un élève de Seconde ; celui-ci aura alors l'impression d'avoir affaire à quelque chose de continu, lorsque la représentation forme un tout, est constituée d'un seul morceau, lorsque le tracé a été effectué sans interruption, sans lever la main.



Lorsqu'elle est introduite pour approfondir la connaissance des fonctions, la définition mathématique de la continuité est donc précédée d'une idée spontanée issue du langage courant qui a naturellement tendance à se fixer sur la représentation graphique, partie intégrante de l'étude d'une fonction.

La perception visuelle de la continuité est en contradiction immédiate avec la définition formelle.

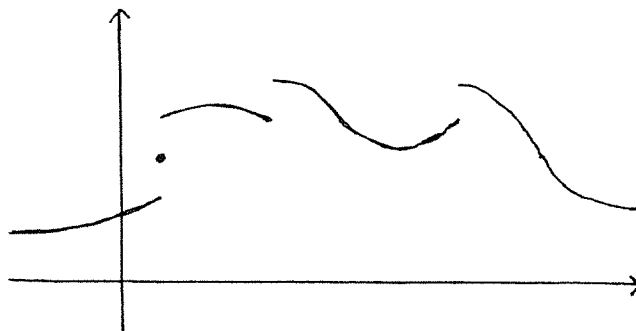
Une fonction qui n'est pas définie sur un intervalle peut être continue, alors que, nécessairement, son graphe est constitué de plusieurs morceaux ; c'est le sens de l'interrogation à propos de la fonction $x \rightarrow \frac{1}{x}$ relatée dans l'introduction.



Cet obstacle est rapidement esquivé ; l'adjectif "continu" attribué à une fonction quelconque, est ressenti comme une convention terminologique, exprimant que les restrictions aux intervalles du domaine de définition sont, elles, "vraiment" continues.

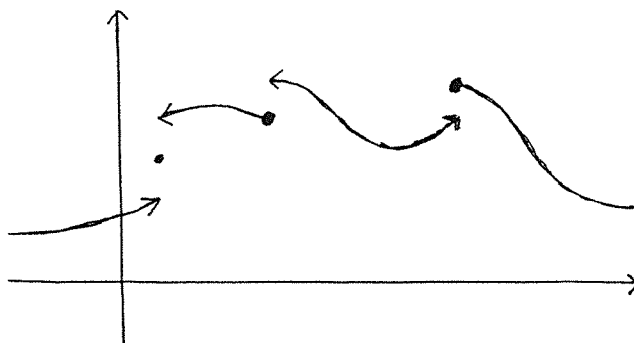
Un autre obstacle provient du fait que la présentation mathématique de la continuité est ponctuelle - f est continue en a -, alors que, par nature, la continuité, au sens usuel du terme, est une notion globale ; étymologiquement "continu" provient de "continere : tenir ensemble".

Mais dans le cas particulier d'une représentation graphique, la notion courante de continuité peut s'enrichir spontanément d'une perception ponctuelle, en interprétant les points de discontinuité, de non-continuité, comme correspondant aux points du graphe où l'on ne continue pas, c'est-à-dire aux points où on lève la main, aux extrémités des morceaux du graphe.



A vrai dire, ce n'est pas la perception de la continuité qui devient ponctuelle ; elle reste, sinon globale, pour le moins locale ; il apparaît que, suffisamment près d'un point de continuité, il n'y a que des points de continuité. Puisqu'il faut avoir tracé le graphe, pour que cette intuition prenne place, la fonction subit suffisamment de contraintes pour que cette perception locale ne puisse pas être mise en défaut. C'est la discontinuité qui apparaît comme une notion ponctuelle, et le domaine de continuité est obtenu par complémentarité.

Avec les conventions graphiques, la perception est plus précise, elle s'oriente. A ce stade l'intervention



de la notion usuelle de continuité se stabilise autour de l'évidence graphique suivante :

Etant donné une fonction f d'un intervalle I ouvert, par exemple à droite, dans $\mathbb{R}$, les points de discontinuité à droite de f correspondent aux extrémités droites des morceaux du graphe.

(Lorsque I est fermé à droite, la mise en défaut de cette intuition visuelle au point extrémité droite de I , ne fait que souligner le rôle particulier de ce point, et le côté formel de la continuité à droite en ce point).

Cette perception de la continuité, n'étant jamais démentie, toujours, parce qu'on se restreint à certaines fonctions en traçant le graphe, elle s'installe de manière tenace.

La coexistence de cette interprétation graphique et de la définition n'est pas sans provoquer un certain malaise plus ou moins avoué ; comment la phrase formelle :

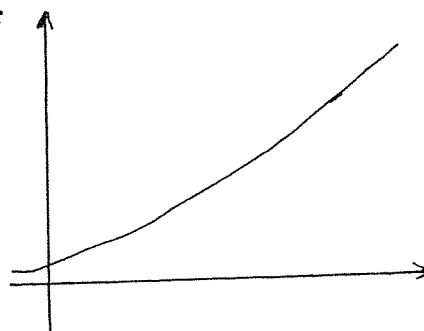
$$\forall a \in I \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in D : |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

pourrait-elle rendre compte du fait que le graphe de f est formé d'un seul morceau ? Et pourtant, lorsqu'on représente le graphe, on constate que ce qu'on voit est toujours en accord avec les mathématiques. Mais considérons, par exemple, la notion de croissance ; non seulement on constate que la définition mathématique :

$$\forall x, y \in X : x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

est toujours en accord avec le graphisme, mais, encore, on comprend bien qu'ils expriment le même phénomène :

"En avançant, on monte".



C'est cette expression commune d'une même idée qui n'apparaît pas pour la continuité.

L'interprétation graphique de la continuité peut se mettre en place d'autant plus facilement que la définition donnée :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in I : |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

apparaît peu significative, reste surtout formelle. Certaines transformations trouvent leur signification à l'intérieur même des mathématiques. Par exemple les applications linéaires sont celles qui "conservent" l'addition :

$$\forall u, v, w \in E : w = u + v \Rightarrow f(w) = f(u) + f(v)$$

et la multiplication par un scalaire

$$\forall \lambda \in K \quad \forall u, v \in E : v = \lambda u \Rightarrow f(v) = \lambda f(u)$$

De même, les fonctions croissantes sont celles qui "conservent" l'ordre :

$$\forall x, y \in X : x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

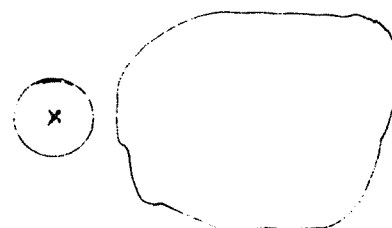
Qu'en est-il pour la continuité ? Ne parlons pas de l'expression - si x tend vers a , alors $f(x)$ tend vers $f(a)$ -, dont on sait que l'implication porte sur des "propriétés" qui n'ont pas de sens en analyse (tout au moins en analyse standard). Lorsqu'on avance en mathématiques, on rencontre la définition :

- Si W est un voisinage de $f(a)$, alors $f^{-1}(W)$ est un voisinage de a -
 Mais cette présentation, sous forme de morphisme "réciproque" au lieu de morphisme "direct", est beaucoup moins satisfaisante pour l'intuition.

Le paragraphe suivant a pour objet une caractérisation de la continuité sous forme de morphisme "direct".

§ 1 : UNE CARACTERISATION DE LA CONTINUITE

Etant donné un point a et une partie X d'un espace métrique E , a est dit non adhérent à X , lorsqu'on reste à une certaine distance de a en parcourant X :



$$\exists \alpha > 0 \quad \forall x \in X : d(a, x) \geq \alpha$$

c'est-à-dire, posant $B(a, \alpha) = \{x \in E / d(a, x) < \alpha\}$,

$$\exists \alpha > 0 : X \cap B(a, \alpha) = \emptyset$$

a est donc adhérent à X , lorsqu'on peut s'approcher aussi près qu'on veut de a , tout en restant dans X :

$$\forall \alpha > 0 \quad \exists x \in X : d(a, x) < \alpha$$

en d'autres termes

$$\forall \alpha > 0 : X \cap B(a, \alpha) \neq \emptyset$$



La discontinuité s'exprime naturellement en termes d'adhérence :

Considérons, par exemple, une application f d'une partie D de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; la discontinuité de f en un point a de D consiste en l'existence d'un $\varepsilon > 0$ vérifiant :

$$\forall \eta > 0 \quad \exists x \in D : |x - a| < \eta \quad \text{et} \quad |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$$

c'est-à-dire :

$$\forall \eta > 0 : \{x \in D / |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon\} \cap]a - \eta, a + \eta[\neq \emptyset$$

condition qui signifie que :

$$\underline{a \text{ est adhérent à } \{x \in D / |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon\}}$$

La notion d'adhérence intervient aussi, de manière sous-jacente dans les démonstrations de discontinuité :

Plus précisément, la propriété :

$$\forall \eta > 0 \quad \exists x \in D : |x - a| < \eta \quad \text{et} \quad |f(x) - f(a)| \geq \epsilon$$

est en général établie en se référant, sans l'expliciter, à une partie X de D vérifiant :

$$f(X) \cap]f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon[= \emptyset$$

$$\forall \eta > 0 \quad X \cap]a - \eta, a + \eta[\neq \emptyset$$

Par exemple :

$$* \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

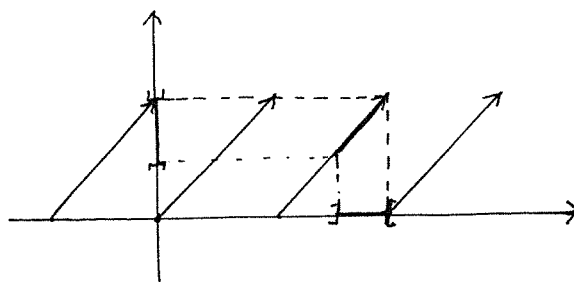
$$x \mapsto x - E(x)$$

$$\epsilon = \frac{1}{2}$$

$$a \in \mathbb{Z}, \quad f(a) = 0$$

$$X =]a - \frac{1}{2}, a[,$$

$$f(X) =]\frac{1}{2}, 1[$$



$$* \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

définie par :

$$f(x) = \sin \frac{1}{x} \quad \text{pour} \quad x \neq 0$$

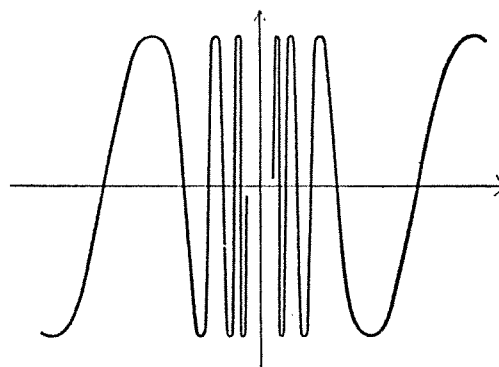
$$\text{et} \quad f(0) = 0$$

$$\epsilon = \frac{1}{2}$$

$$a = 0, \quad f(a) = 0$$

$$X = \left\{ \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \mid k \in \mathbb{N} \right\}$$

$$f(X) = \{1\}$$



L'utilisation d'un tel ensemble X est bien justifiée ;
en effet :

Il est immédiat que, pour $\epsilon > 0$, la propriété de discontinuité :

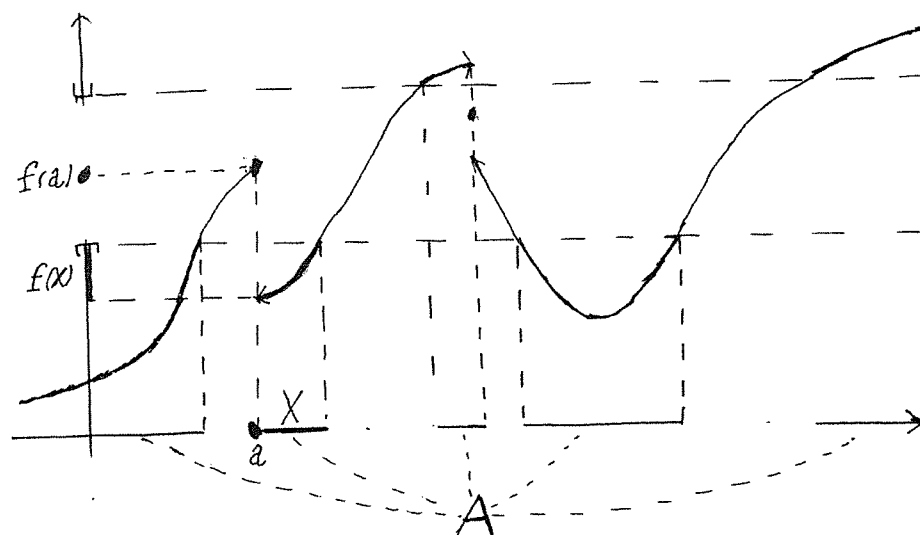
$$\forall \eta > 0 \quad \{x \in D \mid |f(x) - f(a)| \geq \epsilon\} \cap]a - \eta, a + \eta[\neq \emptyset$$

équivaut à l'existence d'une partie X de D vérifiant

$$f(X) \cap]f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon[= \emptyset$$

$$\forall \eta > 0 : X \cap]a - \eta, a + \eta[\neq \emptyset$$

(en d'autres termes, l'adhérence de a à A équivaut évidemment à l'adhérence de a à une partie X de A).



Alors, intervertissant les interventions de ϵ et de X , la discontinuité de f en a se trouve caractérisée par l'existence d'une partie X de D vérifiant :

$$\exists \epsilon > 0 : f(X) \cap]f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon[= \emptyset$$

$$\forall \eta > 0 : X \cap]a - \eta, a + \eta[\neq \emptyset$$

conditions qui signifient respectivement que :

$f(a)$ n'est pas adhérent à $f(X)$

a est adhérent à X

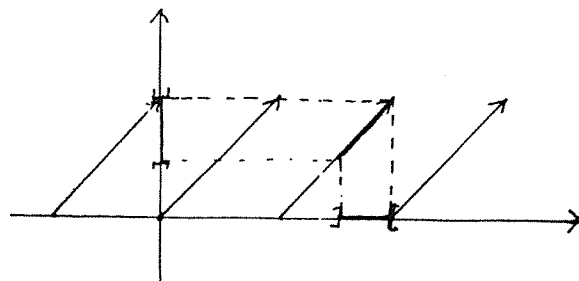
En conclusion, on obtient, par contraposition, que la continuité de f en a équivaut à la propriété :

"Si a est adhérent à $X \subset D$, alors $f(a)$ est adhérent à $f(X)$ "

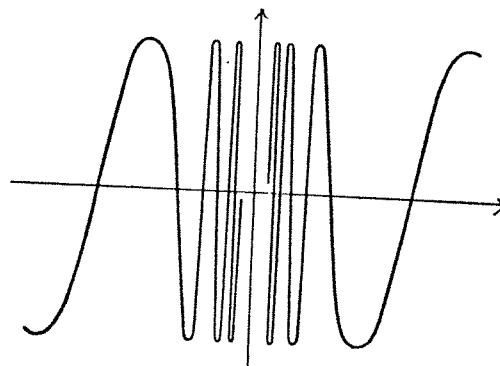
Dans la pratique, on étudie les discontinuités à gauche et à droite, ce qui revient à considérer les restrictions de f aux intervalles : $D \cap]-\infty, a]$ et $D \cap [a, +\infty[$.

Par exemple :

* $f : x \rightarrow x - E(x)$ est discontinue à gauche en tout point $a \in \mathbb{Z}$, car a est adhérent à $X =]a - \frac{1}{2}, a[$, mais $f(a) = 0$ n'est pas adhérent à $f(X) =]\frac{1}{2}, 1[$



* f définie par : $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(0) = 0$, est discontinue à gauche et à droite en 0, car 0 est adhérent à $X_1 = \left\{ \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} / k \in \mathbb{N} \right\}$ et à $X_2 = \left\{ \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} / k \in \mathbb{Z} - \mathbb{N} \right\}$, mais, $f(0) = 0$ n'est pas adhérent à $f(X_1) = f(X_2) = \{1\}$



En fait, plutôt que sur la fonction f , l'attention se porte sur la fonction graphe $g : x \rightarrow (x, f(x))$, laquelle rend bien compte de f , puisque :

l'application identique $x \rightarrow x$ étant évidemment continue, la continuité de f en a équivaut à la continuité de $g : x \rightarrow (x, f(x))$ en a .

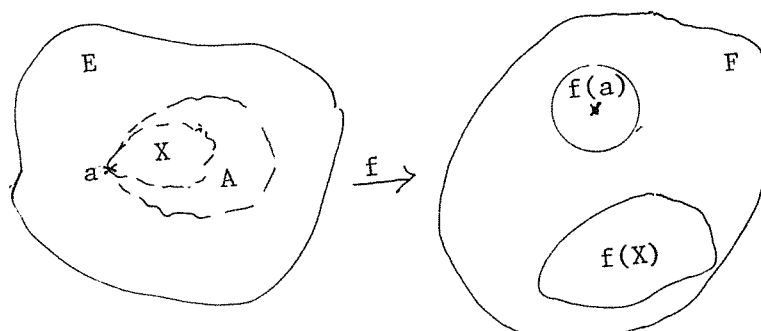
On peut donc observer la discontinuité de f en a comme l'existence d'une partie X de D vérifiant :

a est adhérent à X

$g(a)$ n'est pas adhérent à $g(X)$

Remplaçant $|u - v|$ par $d(u, v)$, la démonstration de la caractérisation de la continuité par l'adhérence, qui vient d'être effectuée, se généralise immédiatement aux espaces métriques.

Il est d'ailleurs plus facile de suivre la démonstration sur le dessin ci-contre :



Posant, pour un point a et une partie X , $d(a, X) = \inf \{d(a, x) / x \in X\}$, l'adhérence de a à X équivaut à l'égalité : $d(a, X) = 0$; la continuité de $f : E \rightarrow F$ en $a \in E$ équivaut à la propriété :

$$\underline{\forall X \subset E : d(a, X) = 0 \Rightarrow d(f(a), f(X)) = 0}$$

Se restreindre à $\mathbb{R}$ pour introduire l'analyse n'apporte pas de simplification, au contraire. Les propriétés de $\mathbb{R}$ sont trop particulières pour que puissent se dégager dans leur généralité les notions étudiées. L'intuition, en se portant sur la fonction graphe, se libère de $\mathbb{R}$ comme espace d'arrivée, pour le remplacer par $\mathbb{R}$; mais le domaine de définition reste le même, une partie de $\mathbb{R}$; De même que les parties de $\mathbb{R}$ "qu'on peut représenter" se réduisent aux intervalles et à leurs réunions finies, la classe des fonctions d'une variable réelle "dont on peut tracer le graphe" est très restreinte ; ces fonctions ont, en chaque point, des limites à gauche et à droite (éventuellement infinies lorsque le graphique est obtenu par extrapolation, par exemple à l'aide d'asymptotes)

Si f est discontinue en a , par exemple à droite, et a une limite à droite ℓ en a , choissant $\varepsilon > 0$ tel que :

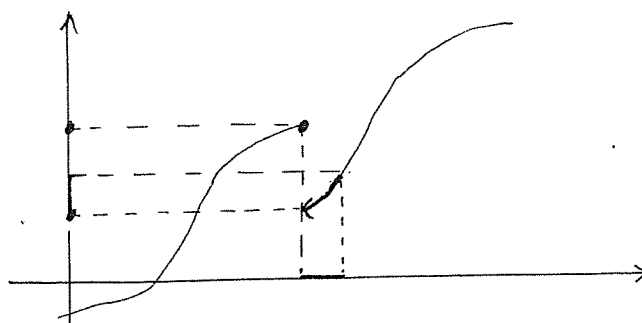
$$0 < |f(a) - \ell| < 2\varepsilon, \quad \varepsilon \text{ vérifie évidemment}$$

$$\forall \eta > 0 : \{x \in D / |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon\} \cap]a - \eta, a + \eta[\neq \emptyset$$

mais aussi la propriété plus forte

$$\exists \eta > 0 : \{x \in D / |f(x) - f(a)| < \varepsilon\} \cap]a - \eta, a + \eta[= \emptyset$$

propriété trop forte,
pour que le dessin
puisse suggérer ef-
ficacement l'idée
générale de discon-
tinuité



Non seulement, il existe une partie X de D vérifiant

a est adhérent à X

$f(a)$ n'est pas adhérent à $f(X)$

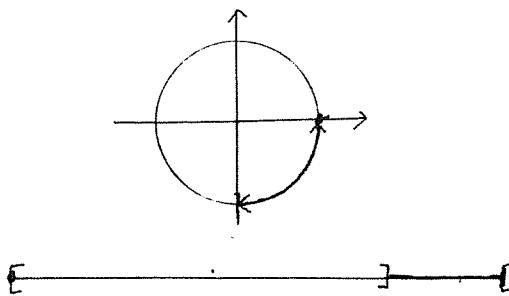
mais encore cette partie X peut être un intervalle, un intervalle $]a, a + \eta[$, où $f([a, a + \eta[\subset]l - \epsilon[$

La notion d'intervalle est liée à la structure d'ordre total de $\mathbb{R}$, dont on peut déduire la topologie de $\mathbb{R}$ aussi bien que, comme c'est l'usage, de la structure d'espace métrique de $\mathbb{R}$. Que la topologie de $\mathbb{R}$ provienne d'un ordre total vérifiant l'axiome de la borne supérieure fait que, d'une part cette topologie vérifie des propriétés très particulières - par exemple, la réciproque d'une bijection continue est continue -, d'autre part, la visualisation, faisant trop de cas des intervalles, suggère une idée erronée de la discontinuité.

L'espace métrique $\mathbb{R}^2$ offre plus de possibilités ; les dessins qui y sont plus variés, peuvent mieux illustrer la notion de discontinuité.

Par exemple :

la bijection $f : [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ est continue, mais sa réciproque f^{-1} n'est pas continue en $a = (1, 0)$, car a est adhérent au quart de cercle ouvert X qui se trouve dans le quatrième quadrant, mais $f^{-1}(a) = 0$ n'est pas adhérent à $f^{-1}(X) =]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$



On peut observer ici la "rupture d'un contact" sans qu'il y ait "coupure en morceaux", alors que, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant, lorsqu'on peut représenter une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, ces deux phénomènes coïncident.

La notion d'adhérence, et la caractérisation qu'elle donne de la discontinuité, trouvent leur place dans le cadre le plus général, celui des espaces topologiques.

Que ce soit globalement, le plus souvent par les ouverts, plus rarement par les fermés, ou localement par les voisinages, une structure topologique est habituellement présentée comme la donnée d'un ensemble de parties (dans le cas local, attachées à un point) vérifiant certains axiomes. Une structure topologique peut aussi être introduite, comme par exemple, dans : "Introduction to set theory and Topology, K. KURATOWSKI", par la donnée d'une relation d'adhérence, c'est-à-dire :

une relation $a \mathcal{R} X$ entre les éléments a et les parties X de l'ensemble E , vérifiant, si $\bar{X}$ désigne l'ensemble des points a adhérents à X , les quatre axiomes de structure suivants :

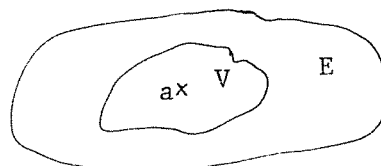
$$X \subset \bar{X}$$

$$\overline{X \cup Y} = \bar{X} \cup \bar{Y}$$

$$\overline{\emptyset} = \emptyset$$

$$\overline{\bar{X}} = \bar{X}$$

Un voisinage V d'un point a est alors défini comme une partie V de E telle que a ne soit pas adhérent à $E - V$.



Les deux principaux exemples de relation d'adhérence sont :

* pour un espace métrique, par exemple $\mathbb{R}^n$:

" X rencontre toute boule ouverte de centre a de E "

* pour un ensemble totalement ordonné, par exemple $\mathbb{R}$ ou $\bar{\mathbb{R}}$:

" X rencontre tout intervalle ouvert de E contenant a ".

(Dans le cas de $\mathbb{R}$, ces deux relations coïncident)

Dans la pratique mathématique, la notion de voisinage joue un rôle fondamental qu'il n'est pas question ici de minimiser. Mais l'adhérence, par l'aspect relationnel qu'elle présente, se prête bien à être introduite comme notion première. Pouvoir faire de l'analyse dans un ensemble E peut alors être présenté comme avoir donné un sens à l'expression : " $a \in E$ est en contact avec $X \subset E$ ", un voisinage V de a apparaissant ensuite comme un "no man's land", comme une partie de E qui "protège a de tout contact avec ce qui est hors de V ". Quant à la continuité, elle se présente sous forme de "morphisme direct" comme le fait de "conserver le contact"; en termes mathématiques :

La continuité de $f : E \rightarrow F$ en a équivaut à la propriété :
Si a est adhérent à X , alors $f(a)$ est adhérent à $f(X)$.

$$\forall X \subset E : a \in \overline{X} \Rightarrow f(a) \in \overline{f(X)}$$

Faisant appel à la notion de voisinage fondamental, on peut généraliser aux espaces topologiques, la démonstration de cette caractérisation effectuée dans le cas réel au début du paragraphe.

La démonstration plus classique permet de mieux suivre comment on passe de la caractérisation par l'adhérence, à celle par les voisinages.

On passe de "adhérent" à "voisinage"

d'abord par négation :

adhérent — non adhérent

puis par complémentarité :

A non adhérent à $X \Leftrightarrow E - X$ voisinage de a

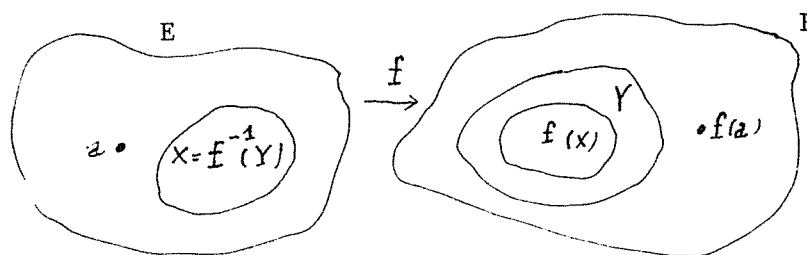
Ce schéma se retrouve dans ce qui suit :

Pour $f : E \rightarrow F$ et $a \in E$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1/ Si a est adhérent à X , alors $f(a)$ est adhérent à $f(X)$.
- 2/ Si $f(a)$ n'est pas adhérent à Y , alors a n'est pas adhérent à $f^{-1}(Y)$.
- 3/ Si V est un voisinage de $f(a)$, alors $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a .

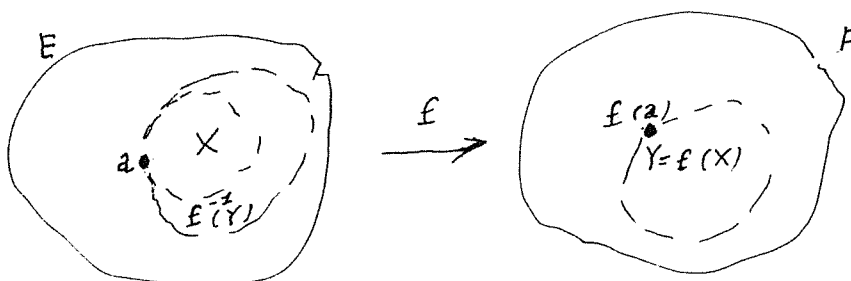
1/ $\Leftrightarrow$ 2/ ; par contraposition

Supposons 1/ ; soit $Y \subset F$ tel que $f(a)$ ne soit pas adhérent à Y ; posons $X = f^{-1}(Y)$; alors $f(a)$ n'est pas adhérent à



$f(X) = f(f^{-1}(Y)) \subset Y$; donc d'après 1/ a n'est pas adhérent à $f^{-1}(Y) = X$

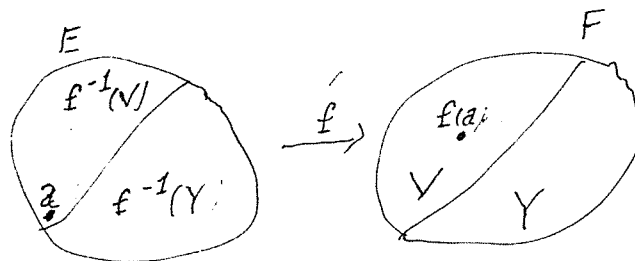
Supposons 2/ ; soit $X \subset E$ tel que a soit adhérent à X ; posons $Y = f(X)$; alors a est adhérent à $f^{-1}(Y) = f^{-1}(f(X)) \supset X$;



donc d'après 2/ $f(a)$ est adhérent à $f(X) = Y$

2/ $\Leftrightarrow$ 3/ ; par complémentarité

Soit Y et V deux parties complémentaires de F ; alors $f^{-1}(Y)$ et $f^{-1}(V)$ sont deux parties complémentaires de E .



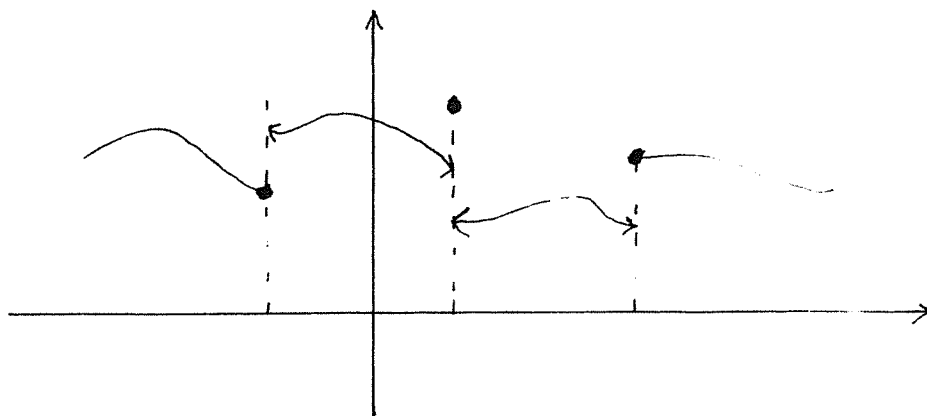
On a donc

a non adhérent à $Y \Leftrightarrow V$ voisinage de $f(a)$
 a non adhérent à $f^{-1}(Y) \Leftrightarrow f^{-1}(V)$ voisinage de a
 d'où l'équivalence de 2/ et 3/.

§ 2 : UNE ILLUSION D'OPTIQUE

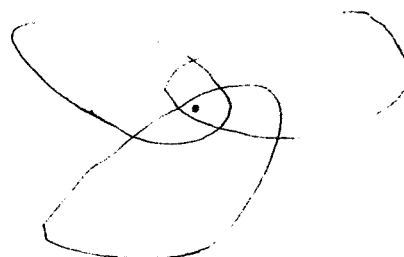
Dans ce paragraphe, nous étudions la validité mathématique de l'interprétation graphique suivante de la continuité :

Etant donné une application f d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, f apparaît continue lorsque le graphe de f forme un tout, est constitué d'un seul morceau, et, sinon, les points de discontinuité de f coïncident avec les points de I , projections des extrémités des morceaux du graphe.

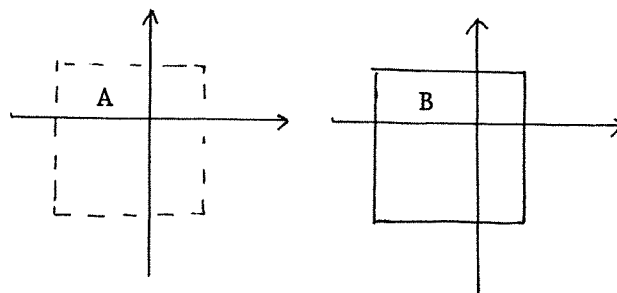


La propriété topologique qui exprime qu'une partie d'un espace métrique E forme un tout, est constituée de parties non séparées, est la connexité (à l'exception d'une propriété - signalée -, tout ce qui est exprimé dans ce paragraphe en termes d'espace métrique, se généralise immédiatement aux espaces topologiques). Les parties connexes de E vérifient certaines propriétés intuitivement évidentes :

- Si des parties connexes ont au moins un point en commun, alors leur réunion est également connexe.



- Si l'on rajoute à une partie connexe A des points qui lui sont adhérents, alors la partie B qu'on obtient reste connexe.

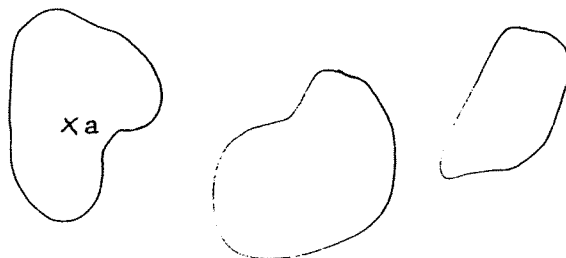


- Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.



Etant donné une partie quelconque A de E , à tout point a de A , on peut associer le morceau auquel il appartient, qu'on appelle la composante connexe de a dans A :

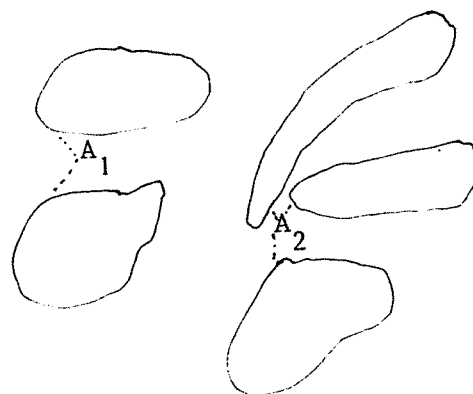
- Par définition, la composante connexe dans A de $a \in A$, est la plus grande partie connexe de A contenant a



- Les composantes connexes de A forment une partition de A .

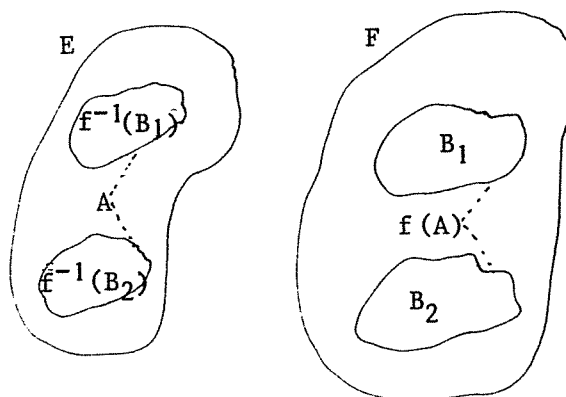
Les démonstrations de ces propriétés de la connexité sont simples, mais tout à fait classiques ; c'est pourquoi nous les rappelons en annexe. Quant à la définition mathématique d'une partie connexe, elle correspond parfaitement à l'une des définitions du mot : continu, dans le dictionnaire Robert : composé de parties non séparées :

- Par définition, une partie A de E est dite non connexe, lorsqu'il existe une partition de A en deux parties (non vides) A_1 et A_2 séparées c'est-à-dire vérifiant : aucun point de l'une n'est adhérent à l'autre.



Une application $f : E \rightarrow F$ étant continue (si et) seulement si elle vérifie, pour tout $x \in E$: (si $f(x)$ n'est pas adhérent à $Y \subset F$, alors x n'est pas adhérent à $f^{-1}(Y)$) on obtient, par contraposition :

- Etant donné une application continue $f : E \rightarrow F$, si A est une partie connexe de E , alors $f(A)$ est une partie connexe de F .



Les ouverts de A étant les parties X de A vérifiant : aucun point de X n'est adhérent à $A - X$, A est donc non connexe si, et seulement si, il existe une partition de A en deux ouverts (non vides) de A .

Dans la pratique, pour établir la non-connexité de A , il est souvent commode d'utiliser une caractérisation par les ouverts de E :

- Une partie A de E est non connexe si (et seulement si) il existe deux ouverts O_1 et O_2 de E qui induisent sur A une partition, c'est à dire, tels que :

$$A \cap O_1 \neq \emptyset ; A \cap O_2 \neq \emptyset$$

$$A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$$

$$A \subset O_1 \cup O_2$$

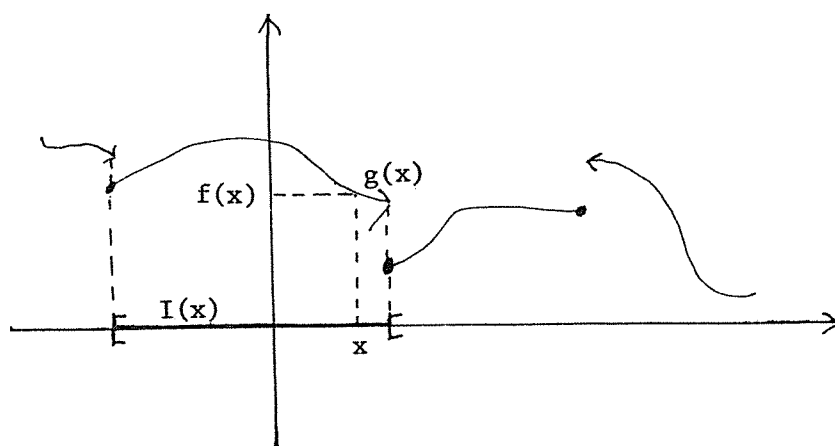


Pour obtenir la condition suffisante, il suffit de poser : $A_1 = O_1 \cap A$, $A_2 = O_2 \cap A$ (et pour la condition nécessaire : $O_1 = E - \overline{A_2}$, $O_2 = E - \overline{A_1}$, où $\overline{X}$ désigne l'ensemble des points de E adhérents à X).

* GRAPHE et CONNEXITE

Soit $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $G = \{(x, f(x)) / x \in D\}$ le graphe de f . Considérons les bijections réciproques :

$$\begin{array}{ll} g : D \rightarrow G & p : G \rightarrow D \\ x \rightarrow (x, f(x)) & (x, f(x)) \rightarrow x \end{array}$$



Puisque l'application identité : $x \rightarrow x$ est continue, étant donné $a \in D$, g est continue, d'un côté en a si, et seulement si, f est continue du même côté en a .

Puisque p est une restriction de la projection $(x, y) \rightarrow x$ qui est continue, p est continue.

p étant continue, les projections sur D des composantes connexes dans G sont connexes, c'est-à-dire des intervalles de $\mathbb{R}$; p étant une bijection ces intervalles forment une partition de D .

Pour $x \in D$, nous noterons $I(x)$ l'intervalle auquel x appartient, et $C(g(x))$ la composante connexe de $g(x)$ dans G ; $I(x)$ est donc la projection sur D de $C(g(x))$ et $C(g(x))$ le graphe de la restriction de f à $I(x)$.

Les propriétés qui mathématisent l'interprétation graphique, et que nous allons comparer aux définitions formelles, sont

- pour la continuité globale

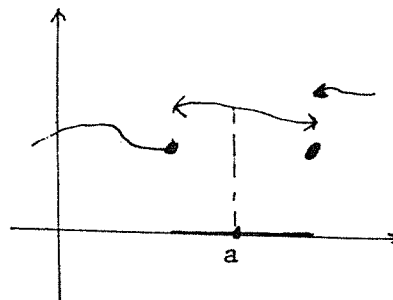
de f :

Le graphe G de f est
connexe.

- pour la continuité à droite

de f en a :

a n'est pas extrémité droite
de l'intervalle $I(a)$, projec-
tion sur le domaine de défini-
tion de f de la composante
connexe $C(g(a))$ de $g(a)$
dans G



On pourrait introduire un terme (par exemple : connexe à droite en a) qui résumerait par convention cette propriété dont l'expression est bien lourde. Outre que surcharger le vocabulaire mathématique apporte rarement plus d'avantages que d'inconvénients, cette pratique se justifie d'autant moins ici que nous voulons vérifier le caractère erroné de cette appréhension de la continuité, issue du langage courant.

Si nous étudions cette propriété c'est pour se débarrasser de son intervention parasite ; on pourrait dire, de manière caricaturale, que, si nous nous en préoccupons, c'est justement parce qu'elle ne présente pas d'intérêt mathématique !

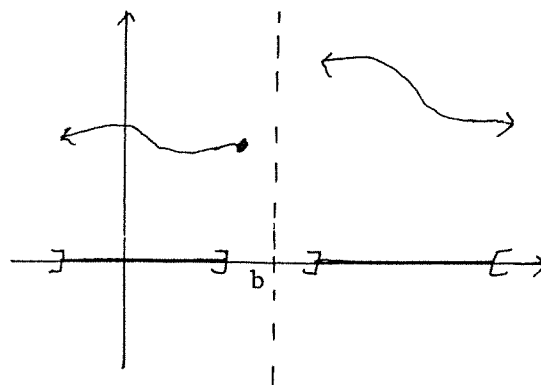
* CONTINUITÉ GLOBALE et CONNEXITÉ

Il s'agit de comparer les propriétés :

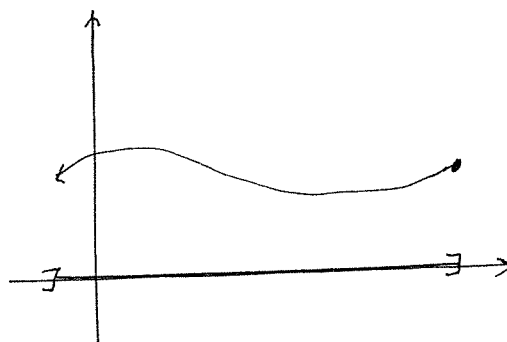
f est continue

le graphe G de f est connexe

Si le domaine de définition D de f n'est pas un intervalle, alors le graphe G de f ne peut être connexe. En effet, puisque D n'est pas un intervalle, il existe $a \in D$, $b \notin D$ et $c \in D$ tels que $a < b < c$; alors les deux demi-plans ouverts définis par la droite d'équation : $x = b$, induisent une partition sur G .

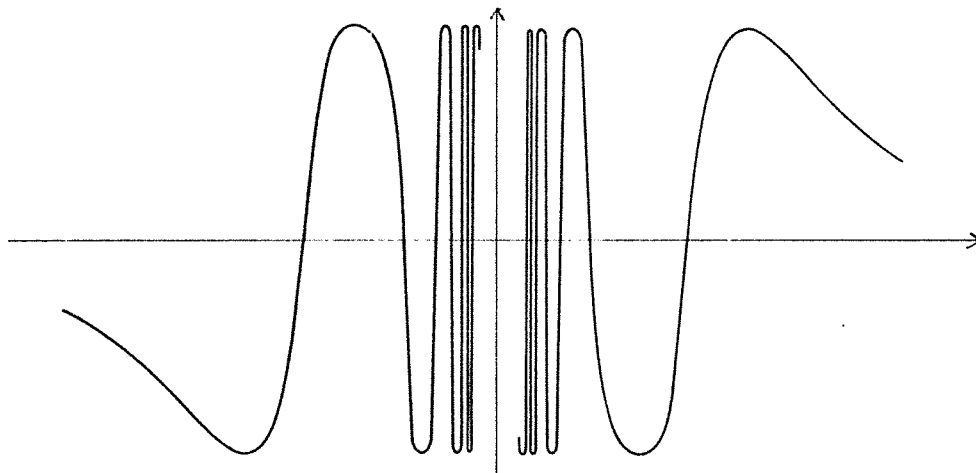


Si f est définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et est continue, alors son graphe G est connexe. En effet, f étant continue, l'application $g : x \rightarrow (x, f(x))$ est continue ; l'image de l'intervalle I par g , c'est-à-dire le graphe de f , est donc connexe.



Par contre, la réciproque est fautive ; il suffit de considérer le contre-exemple classique qu'est la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, pour $x \in \mathbb{R}^*$, et $f(0) = 0$:

En effet, f est discontinue à gauche et à droite en 0 ,
 car 0 est adhérent à $X_1 = \left\{ \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \mid k \in \mathbb{Z} - \mathbb{N} \right\}$ et à
 $X_2 = \left\{ \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \mid k \in \mathbb{N} \right\}$, mais $f(0) = 0$ n'est pas adhérent à
 $f(X_1) = f(X_2) = \{1\}$



De plus, les restrictions de f aux intervalles $] -\infty, 0[$ et $] 0, +\infty[$ sont continues ; leurs graphes $G_1 = g(] -\infty, 0[)$ et $G_2 = g(] 0, +\infty[)$ sont donc connexes. $g(0) = (0, 0)$ est adhérent aux ensembles $\left\{ \left(\frac{1}{2k\pi}, 0 \right) \mid k \in \mathbb{Z} - \mathbb{N} \right\}$ et $\left\{ \left(\frac{1}{2k\pi}, 0 \right) \mid k \in \mathbb{N}^* \right\}$ qui sont inclus dans G_1 et G_2 , respectivement ; d'où, $g(0)$ est adhérent à G_1 et G_2 ; les parties $g(] -\infty, 0]) = G_1 \cup \{g(0)\}$ et $g([0, +\infty[) = \{g(0)\} \cup G_2$ sont donc connexes ; puisqu'elles se rencontrent, leur réunion, c'est-à-dire le graphe de f , est connexe.

* CONTINUITE PONCTUELLE et CONNEXITE

Les propriétés à comparer sont :

f est discontinue à droite en a

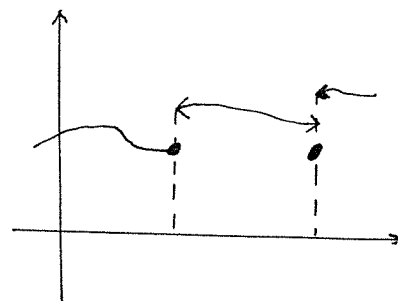
a est extrémité droite

de l'intervalle $I(a)$, projection

de la composante connexe $C(g(a))$

de $g(a) = (a, f(a))$ dans le

graphe G de f .



Même lorsque f est

définie sur un intervalle ouvert, aucune de ces deux propriétés n'implique l'autre ; en effet :

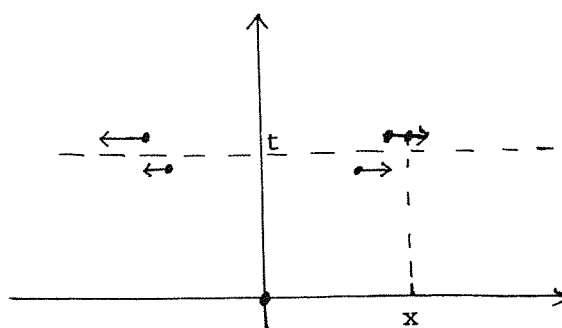
Nous venons de voir que l'application f définie par $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ pour $x \in \mathbb{R}^*$, et $f(0) = 0$, est discontinue à gauche et à droite en 0 , mais que son graphe est connexe, c'est-à-dire $I(0) = \mathbb{R}$.

Soit f la fonction de $] -1, +1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{n}$ pour $\frac{1}{n+1} \leq |x| < \frac{1}{n}$ $n \in \mathbb{N}^*$, et $f(0) = 0$. Puisque

$$0 \leq f(x) \leq \frac{2}{|x|},$$

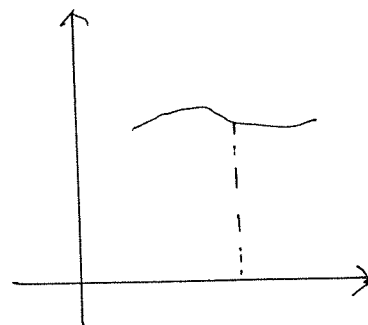
f est continue en 0 .

Considérons un intervalle I inclus dans $] -1, +1[$ contenant strictement 0 ; il existe $x \in I$, $x \neq 0$, par exemple $x > 0$.



Etant donné $t \in]0, x[$, vérifiant $\frac{1}{t} \notin \mathbb{N}$, les deux demi-plans ouverts définis par la droite d'équation $y = t$ induisent une partition sur $g(I)$, $g(I)$ n'est donc pas connexe, d'où $I(0) = \{0\}$.

Cette fonction fournit aussi un contre-exemple à la visualisation locale de la continuité, c'est-à-dire à l'idée qu'une fonction en un point est continue sur un intervalle ouvert contenant ce point.



* ORIGINE de l'ILLUSION d'OPTIQUE

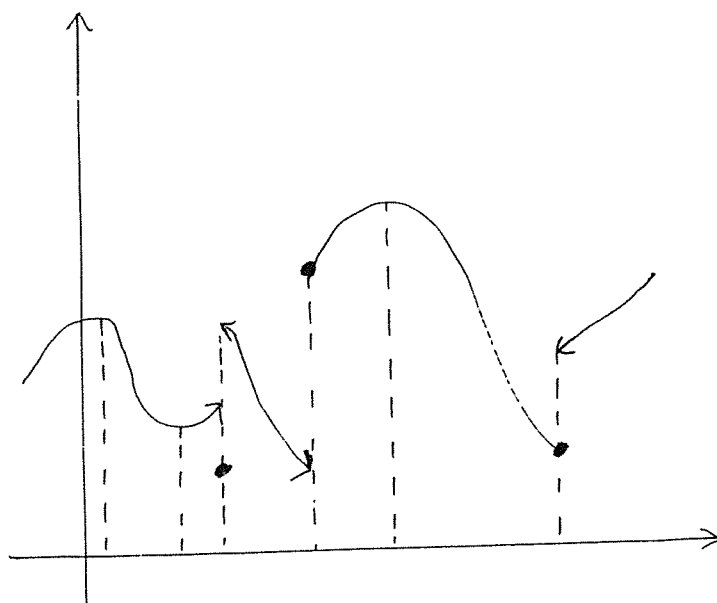
Lorsqu'on effectue un dessin, il est bien évident qu'on ne peut lever la main de la feuille, et monter ou descendre le tracé du crayon, qu'un nombre fini de fois.

Il est donc naturel de considérer qu'une fonction

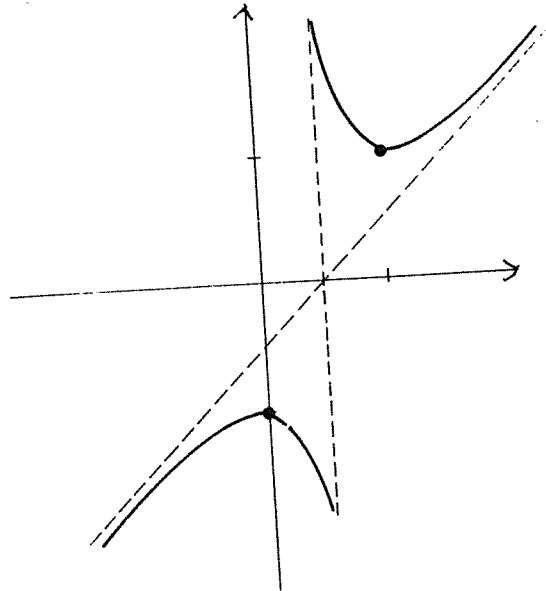
$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ "dont on peut représenter le graphe" vérifie :

le graphe de f n'a qu'un nombre fini de composantes connexes.

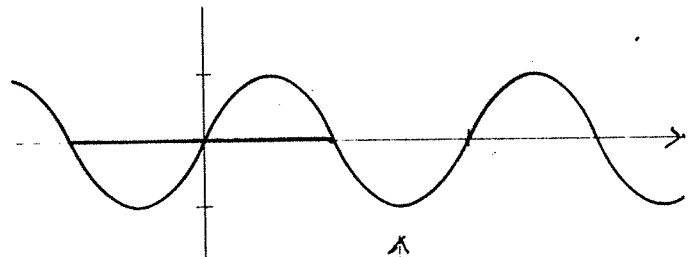
Il existe une partition finie de D , en intervalles de monotonie pour f .



Notons que le graphe de f peut ne pas être borné ; en d'autres termes, nous n'éliminons pas les représentations obtenues par extrapolation, par exemple à l'aide d'asymptotes.



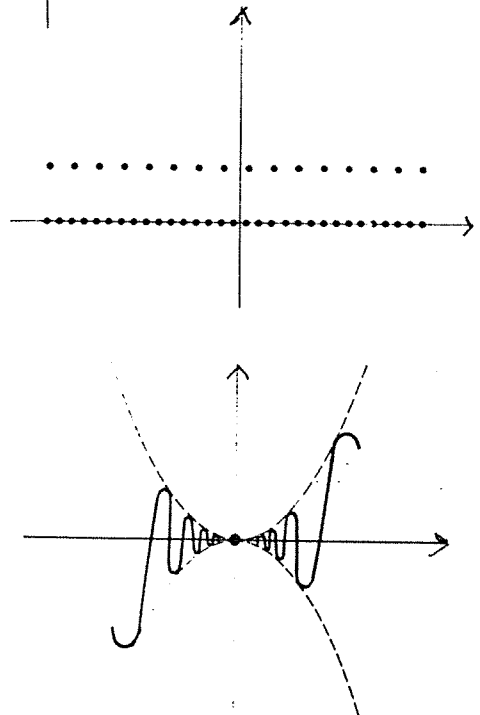
Les fonctions étudiées dans l'enseignement secondaire vérifient, pratiquement toutes, ces deux propriétés (pour les fonctions périodiques, c'est la restriction au domaine d'étude qu'il faut considérer).



En effet, à l'exclusion de quelques contre-exemples classiques comme la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ ou les fonctions du type

$$f : \begin{cases} x \rightarrow x^a \sin \frac{1}{x}, & \text{pour } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 \rightarrow 0 \end{cases}$$

leurs tableaux de variations ne comportent qu'un nombre fini de valeurs ; plus précisément :



Le domaine de définition est réunion finie d'intervalles.

Les points de discontinuité sont en nombre fini ; il existe donc une partition finie du domaine de définition en intervalles de continuité ; d'où, le graphe n'admet qu'un nombre fini de composantes connexes.

Le nombre de points où la fonction n'est pas dérivable est fini et les changements de signe de la dérivée sont en nombre fini ; il existe donc une partition finie du domaine de définition en intervalles de monotonie.

Nous allons voir que, pour les fonctions définies sur un intervalle ouvert "dont on peut représenter le graphe", la continuité coïncide avec son interprétation graphique ; en termes mathématiques :

Si une fonction f définie sur un intervalle ouvert à droite I vérifie : "il existe une partition finie de I en intervalles de monotonie pour f ", "le graphe G de f a un nombre fini de composantes connexes", alors, pour $a \in I$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(C) f est continue à droite en a

(E) a n'est pas extrémité droite de l'intervalle $I(a)$, projection de la composante connexe $C(g(a))$ de $g(a)$ dans G .

(Cela se généralise immédiatement au cas où la fonction est définie sur une réunion R d'intervalles ouverts à droite ; pour se ramener au cas d'un intervalle ouvert, il suffit de considérer la restriction de la fonction à la composante connexe de a dans R).

Nous utiliserons la propriété intermédiaire :

(A) : $g(a)$ est adhérent à $g(I \cap]a, +\infty[)$

et suivrons le schéma logique suivant :

i) sans hypothèse sur f , l'implication $(C) \Rightarrow (A)$ est vérifiée, et, dans le cas particulier où il existe une partition finie de I en intervalles de monotonie pour f , alors il en est de même de la réciproque : $(A) \Rightarrow (C)$.

ii) sans hypothèse sur f , l'implication $(\bar{E}) \Rightarrow (A)$ est vérifiée, et dans le cas particulier où G n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, alors il en est de même de la réciproque : $(A) \Rightarrow (\bar{E})$

Soit, donc, $I =]c, d[$, un intervalle ouvert à droite de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I et $a \in I$.

i) S'il existe une partition finie de I en intervalles de monotonie pour f , alors a vérifie :

(L) f a une limite à droite, finie ou infinie, en a

(de même à gauche, bien entendu) ; en effet, d'après l'hypothèse, il existe $b \in]a, d]$ tel que la restriction de f à $]a, b[$ soit monotone, laquelle admet donc une limite en a , finie ou infinie, qui est aussi limite à droite de f en a .

L'implication $(C) \Rightarrow (A)$, et sa réciproque dans le cas particulier où il existe une partition finie de I en intervalles de monotonie pour f sont donc conséquences de ce qui suit :

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes

1/ (C) : f est continue à droite en a

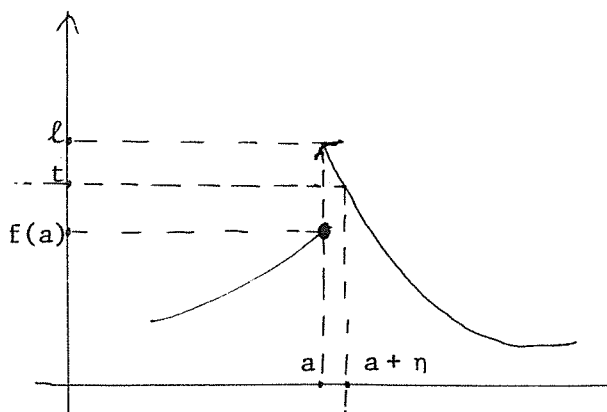
2/ (A) : $g(a)$ est adhérent à $g(]a, d[)$

(L) : f admet une limite à droite, finie ou infinie, en a

En effet si f est continue à droite en a , alors, d'une part $f(a)$ est limite à droite de f en a , d'autre part g est continue à droite en a , d'où, puisque a est adhérent à $]a, d[$, $g(a)$ est adhérent à $g(]a, d[)$.

Réciproquement, supposons que f admette une limite à droite ℓ finie ou infinie, mais que f ne soit pas continue à droite en a , c'est-à-dire $f(a) \neq \ell$; par exemple $f(a) < \ell$;

Etant donné $t \in]f(a), \ell[$,
 puisque ℓ est limite à
 droite de f en a , il
 existe $\eta > 0$ tel que
 $f(]a, a+\eta[) \subset]t, +\infty[$;
 alors, le quart de plan, ou-
 vert, $]-\infty, a+\eta[\times]-\infty, t[$
 contient $g(a)$ et ne rencon-
 tre pas $g(]a, d[)$; $g(a)$
 n'est donc pas adhérent à
 $g(]a, d[)$.



ii) Soit A une partie d'un espace métrique ; la composante connexe C dans A d'un élément x de A est une partie fermée de A , c'est-à-dire : aucun point de $A - C$ n'est adhérent à C ; soit en effet y un point de A adhérent à C ; puisque C est connexe, $C \cup \{y\}$ est connexe ; puisque C est la plus grande partie connexe de A contenant x , $y \in C$.

$A - C$ est réunion des autres composantes connexes dans A , qui sont donc des parties fermées de A ; si A n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, $A - C$ est réunion finie de parties fermées de A , donc une partie fermée de A ; en d'autres termes, C est une partie ouverte de A , c'est-à-dire voisinage dans A de tous ses points ; en résumé, si A est une partie d'un espace métrique, n'ayant qu'un nombre fini de composantes connexes, alors tout point x de A vérifie :

la composante connexe $C(x)$ de x dans A est un voisinage de x dans A , c'est-à-dire x n'est pas adhérent à $A - C(x)$.

L'implication $(\bar{E}) \Rightarrow (A)$, et sa réciproque $(A) \Rightarrow (\bar{E})$ dans le cas particulier où le graphe G n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, sont donc conséquences de ce qui suit :

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1/ $(\bar{E})$: a n'est pas l'extrémité droite de l'intervalle $I(a)$, projection de la composante connexe $C(g(a))$ de $g(a)$ dans G

2/ (A) : $g(a)$ est adhérent à $g(]a, d[)$

(V) : $g(a)$ n'est pas adhérent à $g(]a, d[) - C(g(a))$

En effet, supposons que $g(a)$ ne soit pas adhérent à $g(]a, d[)$:
il existe $\alpha > 0$ tels que $B(a, \alpha) \cap g(]a, d[) = \emptyset$; les deux ouverts
 $O_1 = (]-\infty, a[\times \mathbb{R}) \cup B(a, \alpha)$ et $O_2 =]a, +\infty[\times \mathbb{R}$ vérifient :

$$O_1 \cap O_2 \cap G = \emptyset$$

$$G \subset O_1 \cup O_2$$

d'où

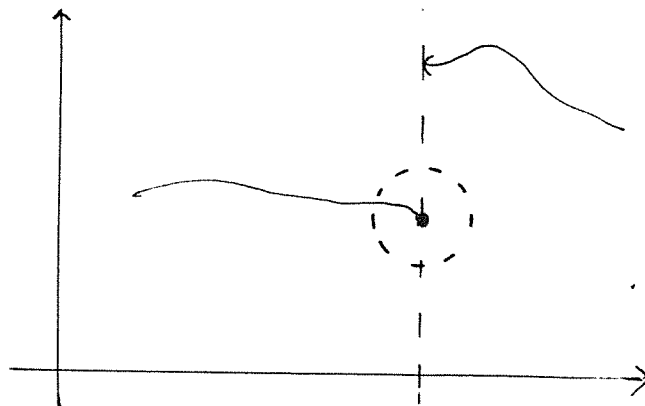
$$O_1 \cap O_2 \cap C(g(a)) = \emptyset$$

$$C(g(a)) \subset O_1 \cup O_2$$

de plus, $g(a) \in O_1 \cap C(g(a))$;

alors comme $C(g(a))$ est

connexe, on a $O_2 \cap C(g(a)) = \emptyset$, d'où $]a, +\infty[\cap I(a) = \emptyset$; en d'autres termes, a est extrémité droite de $I(a)$; on a donc $(\bar{E}) \Rightarrow A$.



Supposons que l'extrémité droite b de $I(a)$ soit distincte
de a : $a < b$; alors le
demi-plan ouvert

$]-\infty, b[\times \mathbb{R}$ contient

$g(a)$ et ne rencontre pas

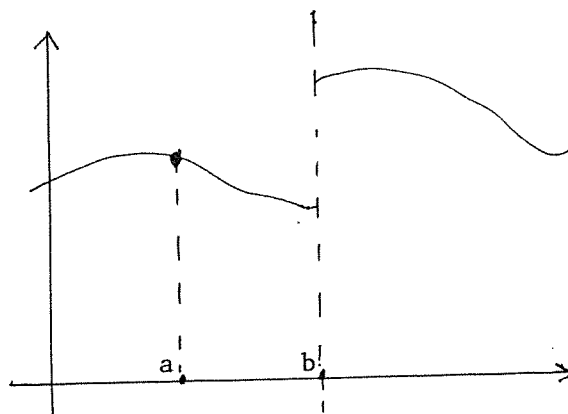
$g(]a, d[) - C(g(a))$,

d'où $g(a)$ n'est pas

adhérent à

$g(]a, d[) - C(g(a))$; on

a donc $(\bar{E}) \Rightarrow (V)$



Réciproquement si $g(a)$ est adhérent à $g(]a, d[)$, mais pas
à $g(]a, d[) - C(g(a)) = g(]a, d[- I(a))$, on a
 $]a, d[- I(a) \neq]a, d[$, c'est-à-dire $I(a) \cap]a, d[\neq \emptyset$; en d'autres
termes a n'est pas extrémité droite de $I(a)$.

On a donc (A) et (V) $\Rightarrow (\bar{E})$

ANNEXE
-----DEMONSTRATION DES PROPRIETES DE LA CONNEXITE

Etant donné une partie B d'un espace métrique E ,

- si B contient une partie connexe A à laquelle tout point de B est
adhérent

ou

- si B est réunion d'un ensemble de parties connexes dont l'intersection
est non vide

alors B est connexe.

Soit, en effet, B une partie non connexe de E : il existe une partition de B en deux parties (non vides) B_1 et B_2 telles qu'aucun point de l'une ne soit adhérent à l'autre. Pour qu'une partie A de B soit non connexe, il suffit que $A \cap B_1$ et $A \cap B_2$ soient non vides.

Supposons que A soit une partie de B à laquelle tout point de B soit adhérent ; Soit $x \in B_1$; x est adhérent à A mais pas à B_2 , donc $A \not\subset B_2$, c'est-à-dire, $A \cap B_1 \neq \emptyset$; de même $A \cap B_2 \neq \emptyset$.

Supposons, maintenant que B soit réunion d'un ensemble X de parties dont l'intersection est non vide. Soit a un élément de l'intersection ; a appartient à B_1 ou B_2 , par exemple B_1 ; puisque B_2 est non vide, il existe $A \in X$, tel que $A \cap B_2 \neq \emptyset$; considérant a , on a aussi $A \cap B_1 \neq \emptyset$; cette partie A est donc non connexe.

Soit A une partie d'un espace métrique E ; la relation $x \mathcal{R} y$ définie, sur A , par :

il existe une partie connexe de A contenant x et y est évidemment symétrique ; elle est réflexive, car pour tout point x de A , la partie $\{x\}$ est connexe ; puisque la réunion d'un ensemble de parties connexes, dont l'intersection est non vide, est connexe, d'une part la relation est transitive, d'autre part la classe d'équivalence d'un point x de A est la plus grande partie connexe de A contenant x ; on l'appelle la composante connexe de x dans A .

Pour caractériser les parties connexes de $\mathbb{R}$ comme les intervalles, nous allons utiliser la propriété suivante :

Etant donné un ouvert O non vide de $\mathbb{R}$, il existe une et une seule partition de O en intervalles ouverts.

L'existence de cette partition s'établit de la même façon que pour les composantes connexes ; en effet la relation définie sur O , par : il existe un intervalle ouvert inclus dans O contenant x et y est réflexive, car O est un ouvert de $\mathbb{R}$. La réunion d'un ensemble d'intervalles ouverts, dont l'intersection est non vide, est un intervalle ouvert (admettant, pour extrémités, finies ou infinies, à gauche la borne inférieure des extrémités gauches, à droite la borne supérieure des extrémités droites). On en déduit que, d'une part la relation est transitive, d'autre part la classe d'équivalence d'un élément x de O est le plus grand intervalle ouvert inclus dans O contenant x .

Soit X une partition de O en intervalles ouverts et $I \in X$, $I =]a, b[$; alors a et b ne peuvent appartenir à O , sinon, si par exemple, a appartenait à O , l'élément de X contenant a rencontrerait I ; d'où, étant donné $x \in I$, I est le plus grand intervalle ouvert inclus dans O , contenant x ; La partition X est donc la même que la précédente.

(Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, l'application qui, à un élément $q \in \mathbb{Q} \cap O$, associe l'intervalle ouvert de la partition auquel il appartient, est une surjection de $\mathbb{Q} \cap O$ sur la partition ; celle-ci est donc dénombrable).

Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles

En effet, si A n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$, alors il existe $a \in A$, $b \notin A$, $c \in A$ vérifiant $a < b < c$; on obtient la non connexité de A en considérant $A \cap]-\infty, a[$ et $A \cap]a, +\infty[$

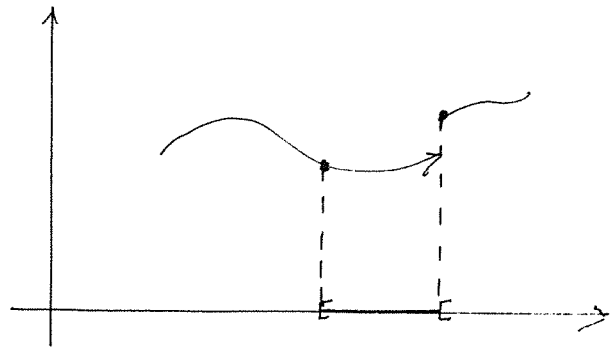
Soit maintenant I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$; supposons I non connexe; il existe une partition de I en deux ouverts non vides O_1 et O_2 de I ; I étant un ouvert de $\mathbb{R}$, O_1 et O_2 sont des ouverts de $\mathbb{R}$; il existe donc des partitions X_1 et X_2 de O_1 et O_2 , respectivement, en intervalles ouverts; alors $\{I\}$ et $X_1 \cup X_2$ sont deux partitions de I en intervalles ouverts, distinctes, puisque la deuxième admet au moins deux éléments, ce qui contredit l'unicité de la partition d'un ouvert de $\mathbb{R}$ en intervalles ouverts; l'intervalle ouvert I est donc connexe.

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$; si J est vide ou réduit à un point, J est connexe; sinon, puisque l'intervalle ouvert I , ayant mêmes extrémités que J , est connexe et que tout point de J est adhérent à I , J est connexe.

* L'INTERVENTION DE LA CONNEXITE LOCALE

Nous allons voir, sans entrer dans le détail des démonstrations, comment "la possibilité de représenter le graphe" est liée au caractère localement connexe de ce graphe.

Tout d'abord, étant donné une application $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dont le graphe G est connexe, la restriction de f à tout intervalle inclus dans I a aussi un graphe connexe. Il s'en suit que, pour $a \in I$, la composante connexe de $g(a)$ dans $g(I \cap [a, +\infty[)$ est la partie de la composante connexe de $g(a)$ dans G qui "se trouve à droite" de $g(a)$, c'est-à-dire $g(I(a) \cap [a, +\infty[)$.



Posant $A = g(I \cap [a, +\infty[)$, $x = g(a)$ et $C(x) = g(I(a) \cap [a, +\infty[)$, la propriété (V) exprime que la composante connexe $C(x)$ de x dans A est un voisinage de x dans A , c'est-à-dire que x n'est pas adhérent à $A - C(x)$. (De même les propriétés $(\bar{E})$ et (A) expriment respectivement que $C(x) \neq \{x\}$, et que x n'est pas isolé dans A , c'est-à-dire est adhérent à $A - \{x\}$; pour une partie quelconque A d'un espace métrique, l'implication $(\bar{E}) \Rightarrow (V)$ n'est pas nécessairement vérifiée). La propriété (V) est liée à la locale connexité. En effet :

Une partie A d'un espace métrique E est dite localement connexe lorsque tout point x de A vérifie :

(LC) tout voisinage de x dans A contient un voisinage connexe de x dans A

Cette propriété est vérifiée si et seulement si :

- tout voisinage de x dans $C(x)$ contient un voisinage connexe de x dans $C(x)$
- (V) la composante connexe $C(x)$ de x dans A est un voisinage de x dans A

Globalement, A est donc localement connexe, si et seulement si, les composantes connexes dans A sont d'une part localement connexes, d'autre part, ouvertes dans A .

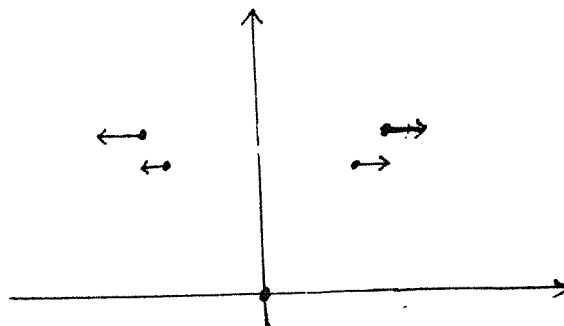
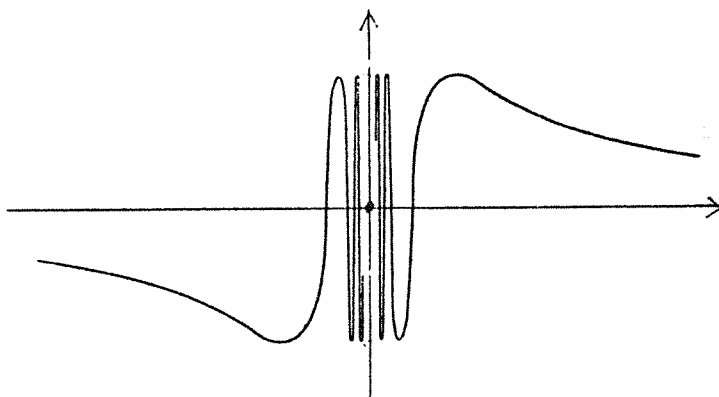
Par exemple, les applications :

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{pour } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

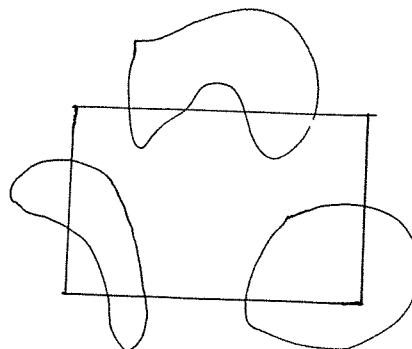
$$]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } \frac{1}{n+1} \leq |x| < \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



ont des graphes qui ne sont pas localement connexes.

Si une partie A du plan "a pu être représentée", il est bien évident que, étant donné un rectangle, la partie F de A comprise dans ce rectangle "se trouve ainsi représentée" ; une telle partie F ne peut donc "comporter qu'un nombre fini de morceaux".



Si une partie A du plan vérifie : toute intersection de A avec un rectangle à côtés parallèles aux axes n'a qu'un nombre fini de composantes connexes - alors A est localement connexe.

Il est donc naturel de considérer que les parties du plan "qu'on peut représenter" sont localement connexes.

Les deux conditions de finitude que nous avons considérées :

- il existe une partition finie du domaine de définition en intervalles de monotonie
 - le graphe a un nombre fini de composantes connexes
- impliquent que toute intersection du graphe avec un rectangle à côtés parallèles aux axes a un nombre fini de composantes connexes.

Nous avons vu qu'étant donné une fonction f définie sur un intervalle ouvert à droite $I =]c, d[$, on a :

$$(C) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (L) \\ \text{et} \\ (A) \end{array} \right. \qquad (\bar{E}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (V) \\ \text{et} \\ (A) \end{array} \right.$$

La propriété

(LC) tout voisinage de $g(a)$ dans $g([a, d[)$ contient un voisinage connexe de $g(a)$ dans $g([a, d[)$

est liée aux propriétés (C) , $(\bar{E})$ et A par l'équivalence suivante :

$$\text{et } \left. \begin{array}{l} (C) \\ (\bar{E}) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (LC) \\ (A) \end{array} \right. \text{ et}$$

Chacune des trois propriétés (C), $(\bar{E})$ et (LC) implique donc l'équivalence des deux autres. Globalement, on obtient pour une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ l'équivalence :

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ est continue} \\ \text{et} \\ D \text{ est intervalle} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} G \text{ est connexe} \\ \text{et} \\ \text{localement connexe} \end{array} \right.$$

Remplaçant intervalle par connexe, cette propriété n'est pas nécessairement vérifiée dans un espace métrique quelconque ; elle est conséquence du fait que la topologie de $\mathbb{R}$ provient d'un ordre total pour lequel toute partie majorée non vide admet une borne supérieure.

* DES CONTRE-EXEMPLES

Nous venons d'étudier, pour une fonction f définie sur un intervalle ouvert à droite $I =]c, d[$, et un point a de I , les liens logiques entre les propriétés

(C) : f est continue à droite en a

($\bar{E}$) : a n'est pas l'extrémité droite de l'intervalle $I(a)$, projection sur I de la composante connexe $C(g(a))$ de $g(a)$ dans le graphe G de f

(A) : $g(a)$ est adhérent à $g(]a, d[)$

Nous avons vu que, dans le cas général, on a :

$$(C) \Rightarrow (A) \quad \text{et} \quad (\bar{E}) \Rightarrow (A)$$

et que, sous certaines conditions, les réciproques

$$(A) \Rightarrow (C) \quad \text{et} \quad (A) \Rightarrow (\bar{E})$$

sont vérifiées, donc aussi les implications :

$$(C) \Rightarrow (\bar{E}) \quad \text{et} \quad (\bar{E}) \Rightarrow (C)$$

Nous considérons, ici des contre-exemples à ces quatre implications ; des contre-exemples où l'application non vérifiée le soit le moins possible. Pour cela nous utiliserons les notions de partie dense, et de partie totalement discontinue.

Par définition, une partie A d'un espace métrique E est dense dans E , lorsque tout point de E est adhérent à A .

Une partie A de $\mathbb{R}$ est donc dense dans $\mathbb{R}$, si, et seulement si, étant donné $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, il existe $z \in A$ vérifiant : $x < y < z$.

Etant donné $a \in \mathbb{R}^*$, $\mathbb{Q}a^* = \{qa / q \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Soit, en effet, $a \in \mathbb{R}^*$; puisque $\mathbb{Q}a^* = \mathbb{Q}(-a)$, on peut supposer $a > 0$; soit $x, y \in \mathbb{R}$, $0 \leq x < y$; d'après la propriété d'Archimède, d'une part, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n(y - x) > a$, d'autre part

l'ensemble des entiers

$p \in \mathbb{N}^*$ tels que $pa > nx$

est non vide; notons m

le plus petit d'entre eux;

alors $ma > nx$ et

$(m-1)a \leq nx$; d'où,

posant $q = \frac{m}{n}$,

$qa \leq x + \frac{a}{n} < x + (y-x) = y$;

en résumé l'élément qa de $\mathbb{Q}a^*$ vérifie $x < qa < y$; $\mathbb{Q}a^*$ est donc dense dans $\mathbb{R}^+$; alors, par symétrie, $\mathbb{Q}a^*$ est dense dans $\mathbb{R}$.



Posant $a = 1$, puis $a = \sqrt{2}$ et utilisant le fait qu'une partie contenant une partie dense est dense, on obtient :

$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

La démonstration de la densité de $\mathbb{Q}a^*$ dans $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$, se généralise immédiatement aux parties X de $\mathbb{R}$ vérifiant : il existe une suite (a_n) d'éléments de $\mathbb{R}^{+*}$ tendant vers zéro, telle que

$X = \left\{ m a_n / m \in \mathbb{Z}^*, n \in \mathbb{N} \right\}$. Par exemple, pour $a_n = \frac{1}{10^n}$,

puis $a_n = \frac{\sqrt{2}}{10^n}$, on obtient :

l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est dense dans $\mathbb{R}$, ainsi que $\mathbb{R} - \mathbb{D}$

Par définition, une partie A de E est totalement discontinue, lorsque toute composante connexe dans A est réduite à un point.

Le graphe G de $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est donc totalement discontinu si, et seulement si, pour tout point a de D , $I(a) = \{a\}$.

La fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ définie par : $f(x) = 1$ pour $x \in \mathbb{Q}$, et $f(x) = 0$ pour $x \notin \mathbb{Q}$, vérifie :

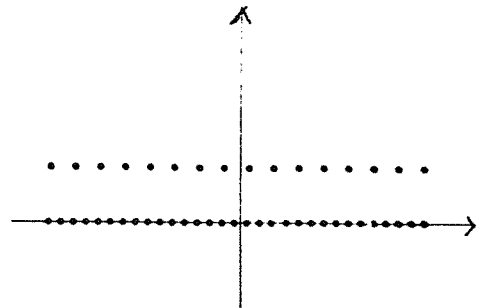
(C) f est discontinue à gauche et à droite en tout point de $\mathbb{R}$

(E) le graphe G de f est totalement discontinu

(A) pour tout $a \in \mathbb{R}$, $g(a)$ est adhérent à $g(]-\infty, a[$ et à $g(]a, +\infty[$

Soit, en effet, $a \in \mathbb{R}$; notons A celle des deux parties $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ à laquelle a appartient.

Soit $\alpha > 0$; puisque A est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $b, c \in A$ tels que :
 $a - \alpha < b < a < c < a + \alpha$;
 le disque $B(g(a), \alpha)$ de $\mathbb{R}^2$, contenant $g(b)$ et $g(c)$, rencontre $g(]-\infty, a[$ et $g(]a, +\infty[)$; $g(a)$ est donc adhérent à chacun de ces deux ensembles.



Puisque $\mathbb{R} - A$ est dense dans $\mathbb{R}$, a est adhérent à $B_1 =]-\infty, a[- A$ et à $B_2 =]a, +\infty[- A$; mais $f(a)$ n'est pas adhérent à $f(B_1) = f(B_2) = \{1 - f(a)\}$; f est donc discontinue à gauche et à droite en a .

Soit I un intervalle contenant strictement a ; puisque $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, $I \cap \mathbb{Q}$ et $I - \mathbb{Q}$ sont non vides ; alors, les deux demi-plans ouverts définis par la droite d'équation : $y = \frac{1}{2}$ induisent une partition sur $g(I)$; $g(I)$ n'est donc pas connexe ; d'où $I(a) = \{a\}$.

En conclusion, G est totalement discontinu.

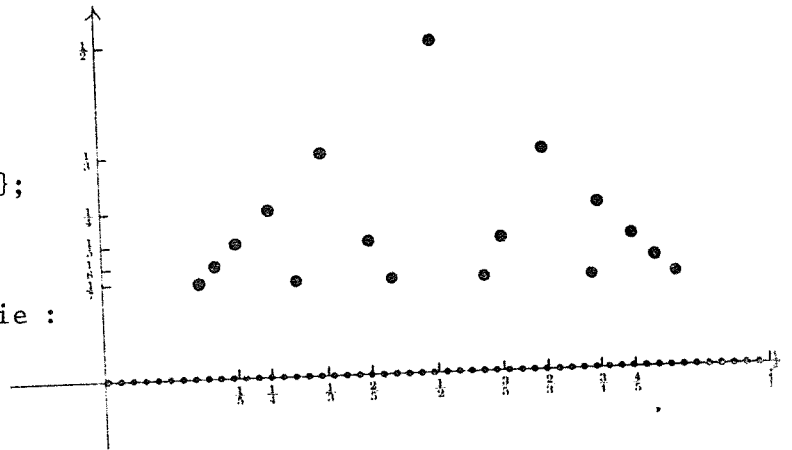
Soit $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 0$ pour $x \notin \mathbb{Q}$, $f(x) = \frac{1}{q}$ pour $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $p, q \in \mathbb{N}^*$, p, q premiers entre eux ; la fonction f vérifie :

(C) f est continue en tout point de $]0, 1[- \mathbb{Q}$ car 0 est limite de f en tout point de $]0, 1[$

(E) le graphe de f est totalement discontinu.

Remarquons, tout d'abord qu'étant donné $\varepsilon > 0$, l'ensemble $X_\varepsilon = \{x \in]0, 1[/ f(x) \geq \varepsilon\}$ est fini ; en effet, si $f(x) \geq \varepsilon$, alors $x = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}^*$, p, q premiers entre eux ; puisque $\frac{1}{q} = f(x) \geq \varepsilon$, et $\frac{p}{q} < 1$, on a $p < q \leq \frac{1}{\varepsilon}$; l'ensemble $\{(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* / p < q \leq \frac{1}{\varepsilon}\}$ étant fini, il en est de même de X_ε .

Soit $a \in]0, 1[$;
 étant donné ε tel que $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$, $X_\varepsilon - \{a\}$ est non vide ; posons $\eta = \inf \{|b - a| / b \in X_\varepsilon - \{a\}\}$;
 X_ε étant fini, on a $\eta > 0$;
 de plus, si $x \in]0, 1[$ vérifie : $0 < |x - a| < \eta$, alors $0 \leq f(x) < \varepsilon$; d'où 0 est limite de f en a .



Soit I un intervalle de $]0, 1[$, non réduit à un point ;
 puisque $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, il existe $a \in \mathbb{Q} \cap I$ et $b \in I - \mathbb{Q}$; $a = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}^*$, p, q premiers entre eux ; on a $f(a) = \frac{1}{q}$ et $f(b) = 0$; $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$, il existe $t \in]0, \frac{1}{q}[- \mathbb{Q}$;
 alors, les deux demi-plans ouverts définis par la droite d'équation : $y = t$, induisent une partition sur $g(I)$; d'où, $g(I)$ n'est pas connexe.

Les parties réduites à un point sont donc les seules parties connexes de G ; en d'autres termes, G est totalement discontinu.

(La considération des ensembles X_ϵ permet d'établir facilement que f est intégrable et que son intégrale est nulle).

On ne peut espérer trouver une application f , continue sur un intervalle I non réduit à un point, et dont le graphe soit totalement discontinu ; en effet, la continuité de la restriction de f à I implique que le graphe de cette restriction est connexe.

Il existe des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, continues sur une partie A dense dans $\mathbb{R}$ dont les graphes sont totalement discontinus, et qui, de plus, sont strictement croissantes, vérifiant ainsi la propriété de finitude étudiée dans le paragraphe 3 : il existe une partition finie du domaine de définition en intervalles de monotonie.

Remarquons, tout d'abord, qu'une fonction f croissante discontinue en tout point d'une partie B dense dans $\mathbb{R}$ a un graphe totalement discontinu ; soit, en effet I un intervalle non réduit à un point ; B étant dense dans $\mathbb{R}$, il existe un point a de B , qui est à l'intérieur de I ; f est discontinue en a , par exemple à droite ; d'où, $\inf \{f(x) / x > a\} > f(a)$; alors, étant donné $t \in]f(a), \inf \{f(x) / x > a\}[$, les deux demi-plans ouverts définis par la droite d'équation $y = t$ induisent une partition sur $g(I)$; $g(I)$ n'est donc pas connexe.

Considérons la fonction $f : d_0, d_1 d_2 \dots \rightarrow d_0, 0 d_1 0 d_2 0 \dots$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, où $d_0, d_1 d_2 \dots$ désigne l'écriture décimale du nombre réel : $d_0 \in \mathbb{Z}$, $0 \leq d_n \leq 9$, il n'y a pas que des 9 à partir d'un certain rang. f est strictement croissante ; on peut voir directement que f n'est pas continue car elle ne vérifie pas la propriété des valeurs intermédiaires ; ponctuellement, on a :

$$\inf \{f(u) / u > t\} = f(t), \quad \sup \{f(u) / u < z\} = f(z) \quad \text{si } z \notin \mathbb{D}, \text{ et}$$

$$\sup \{f(u) / u < d\} = d_0, 0 d_1 0 d_2 0 \dots 0 (d_n - 1) 0 9 0 9 \dots$$

si $d \in \mathbb{D}$, $d = d_0, d_1 d_2 \dots d_n$, $0 < d_n \leq 9$ ou $n = 0$; f est donc continue en tout point de $\mathbb{R} - \mathbb{D}$, et continue à droite mais pas à gauche en tout point de $\mathbb{D}$.

Si, pour les décimaux $d = d_0, d_1 d_2 \dots d_n$, on considère l'écriture décimale "truquée" $d = d_0, d_1 d_2 \dots (d_n - 1) 99 \dots 9 \dots$ l'application : $t_0, t_1 t_2 \dots \rightarrow t_0, 9 t_1 9 t_2 9 \dots$ vérifie les mêmes propriétés que f , au fait près qu'en tout point de $\mathbb{D}$, elle est continue à gauche, mais pas à droite.

On peut aussi considérer, étant donné une série convergente $\sum a_n$, à termes strictement positifs, par exemple $\sum \frac{1}{2^n}$, et une bijection φ de $\mathbb{N}$ sur une partie A de $\mathbb{R}$, par exemple $\mathbb{Q}$, les fonctions k et ℓ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$k(x) = \sum_{\{n / \varphi(n) < x\}} a_n \quad \text{et} \quad \ell(x) = \sum_{\{n / \varphi(n) \leq x\}} a_n$$

Alors k et ℓ sont croissantes (si, de plus, A est dense dans $\mathbb{R}$, par exemple $A = \mathbb{Q}$, alors k et ℓ sont strictement croissantes).

On a $\sup \{k(u) / u < x\} = k(x)$; en effet, étant donné $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble des $\varphi(m)$ vérifiant : $m < n$ et $\varphi(m) < x$

étant fini, admet un plus grand élément p ; alors : $k(x) - k(p) \leq \sum_{r \geq n} a_r$;

puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r \geq n} a_r = 0$, on a bien $\sup \{k(u) / u < x\} = k(x)$;

de même : $\inf \{k(u) / u > z\} = k(z)$ si $z \notin A$, et

$\inf \{k(u) / u > q\} = k(q) + a_{\varphi^{-1}(q)}$ si $q \in A$.

f est donc continue en tout point de $\mathbb{R} - A$, et continue à gauche mais pas à droite en tout point de A . De la même façon, ℓ est continue en tout point de $\mathbb{R} - A$, et continue à droite mais pas à gauche en tout point de A .

* UN MONSTRE

Nous allons maintenant construire une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dont le graphe G est dense dans $\mathbb{R}^2$ et connexe

La densité dans $\mathbb{R}^2$ et la connexité du graphe seront déduites du fait que G rencontre toute partie fermée de $\mathbb{R}^2$ dont la première projection contient un intervalle non réduit à un point.

La densité de G dans $\mathbb{R}^2$ implique que f est discontinue à gauche et à droite en tout point, car, pour tout $(a, \ell) \in \mathbb{R}^2$, (a, ℓ) est adhérent à $g(]-\infty, a[)$ et à $g(]a, +\infty[)$; en d'autres termes, en tout point a de $\mathbb{R}$, tout point ℓ de $\mathbb{R}$ est valeur d'adhérence à gauche et à droite de f , ce qui fait, qu'en un certain sens, f est le moins continue possible à gauche et à droite.

Préliminaires aux propriétés de l'application :

Soit A une partie d'un espace métrique E ; considérons l'application $x \rightarrow d(x, A) = \inf \{d(x, a) / a \in A\}$ de E dans $\mathbb{R}$.

Par définition de $d(x, A)$, un point x de E est adhérent à A si et seulement si $d(x, A) = 0$.

L'application $x \rightarrow d(x, A)$ de E dans $\mathbb{R}$ est continue ; soit, en effet, $x, y \in E$; on a :

$$\forall a \in A : d(x, A) - d(x, y) \leq d(x, a) - d(x, y) \leq d(y, a)$$

d'où, puisque $d(y, A) = \inf \{d(y, a) / a \in A\}$:

$$d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A)$$

c'est-à-dire :

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$$

l'application $x \rightarrow d(x, A)$ est donc continue.

La continuité de cette application permet de donner une caractérisation de la non connexité ; elle est spécifique aux parties d'un espace métrique, c'est-à-dire ne se généralise pas à tout espace topologique :

Une partie A d'un espace métrique E est non connexe si, et seulement si, il existe deux ouverts O_1 et O_2 de E vérifiant :

$$O_1 \cap A \neq \emptyset ; \quad O_2 \cap A \neq \emptyset$$

$$O_1 \cap O_2 = \emptyset$$

$$A \subset O_1 \cup O_2 .$$

Supposons, en effet, que A soit non connexe ; il existe donc, une partition de A en deux ouverts non vides A_1 et A_2 de A . L'application $C : x \rightarrow d(x, A_1) - d(x, A_2)$ étant continue, les images réciproques $O_1 = C^{-1}]-\infty, 0[$ et $O_2 = C^{-1}]0, +\infty[$ sont des ouverts de E ; et ils vérifient :

$$A_1 \subset O_1 ; \quad A_2 \subset O_2$$

$$O_1 \cap O_2 = \emptyset$$

Propriétés de l'application :

Etant donné une application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, si le graphe G de f rencontre tout fermé de $\mathbb{R}^2$ dont la première projection contient un intervalle non réduit à un point, alors :

(C) f est discontinue à gauche et à droite, en tout point car G est dense dans $\mathbb{R}^2$

(E) G est connexe.

En effet, d'après l'hypothèse, G rencontre tout disque de $\mathbb{R}^2$, donc est dense dans $\mathbb{R}$; alors, puisque le graphe G rencontre tout rectangle $]t, u[\times]v, w[$ de $\mathbb{R}^2$,
 $-\infty \leq t < u \leq +\infty$, $-\infty \leq v < w \leq +\infty$, en aucun point x , $-\infty \leq x \leq \infty$,
 f n'a de limite, finie ou infinie, que ce soit à gauche ou à droite.

Supposons, maintenant G non connexe : il existe deux ouverts O_1 et O_2 de $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$O_1 \cap G \neq \emptyset ; O_2 \cap G \neq \emptyset$$

$$O_1 \cap O_2 = \emptyset$$

$$G \subset O_1 \cup O_2$$

Les premières projections $pr_1(O_1)$ et $pr_1(O_2)$ sont des ouverts non vides de $\mathbb{R}$, dont la réunion est égale à $\mathbb{R}$;

$\mathbb{R}$ étant connexe

ces deux ouverts se

rencontrent donc ;

c'est-à-dire qu'il

existe $a, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$

tels que $(a, b_1) \in O_1$

et $(a, b_2) \in O_2$.

O_1 et O_2 étant ou-

verts, il existe $\varepsilon > 0$

tels que

$$]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\times \{b_1\} \subset O_1$$

et $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\times \{b_2\} \subset O_2$. Soit $x \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$; considérons

le segment $I = \{x\} \times [b_1, b_2]$; les ouverts O_1 et O_2 vérifient :

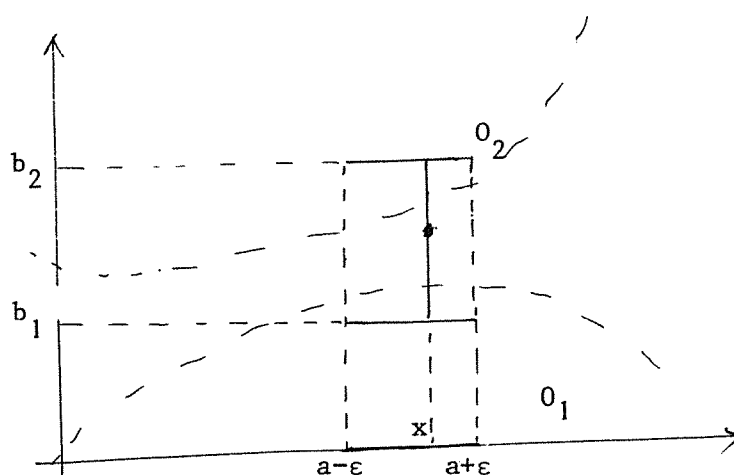
$O_1 \cap I \neq \emptyset$, $O_2 \cap I \neq \emptyset$ et $O_1 \cap O_2 = \emptyset$; I étant connexe, on a :

$I \not\subset O_1 \cup O_2$; en résumé, pour tout point x de $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$, il

existe un point y de $\mathbb{R}^2$ tel que $(x, y) \notin O_1 \cup O_2$; $\mathbb{R}^2 - O_1 \cup O_2$

est donc un fermé de $\mathbb{R}^2$ dont la première projection contient l'intervalle

$]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$; comme $\mathbb{R}^2 - O_1 \cup O_2$ ne rencontre pas le graphe, l'hypothèse est contredite.

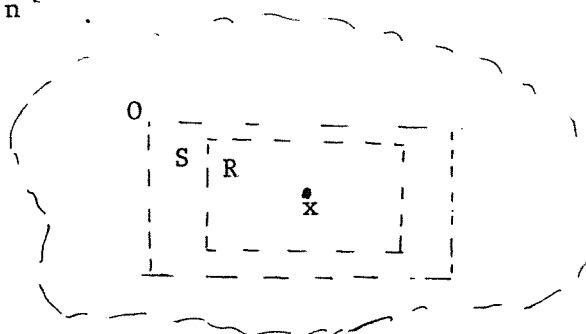


Préliminaires à la construction de l'application :

L'ensemble des fermés de $\mathbb{R}^n$ à la puissance du continu.

Par complémentarité, cela revient à montrer que l'ensemble Ω des ouverts de $\mathbb{R}^n$ à la puissance du continu. L'application qui, à un point x de $\mathbb{R}^n$, fait correspondre la boule ouverte de centre x et de rayon 1 est une injection de $\mathbb{R}^n$ dans Ω ; il suffit donc de montrer qu'il existe une surjection d'un ensemble ayant la puissance du continu sur Ω ; soit $0 \in \Omega$ et $x \in 0$; 0 étant un ouvert, il existe un rectangle ouvert $S =]a_1, a'_1[\times \dots \times]a_n, a'_n[$ contenant x et inclus dans 0 .

Notons T l'ensemble des rectangles ouverts $]q_1, q'_1[\times \dots \times]q_n, q'_n[$ à coordonnées rationnelles : $q_1, q'_1, \dots, q_n, q'_n \in \mathbb{Q}$.



$\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$, il existe $R \in T$ contenant x et inclus dans S ; en résumé, pour tout élément x de 0 , il existe $R \in T$, contenant x et inclus dans 0 ; en d'autres termes, l'application de l'ensemble $\mathcal{P}(T)$ des parties de T dans Ω , définie par $h(X) = \bigcup_{T \in X} T$ est surjective ; l'application :

$]q_1, q'_1[\times \dots \times]q_n, q'_n[\rightarrow (q_1, q'_1, \dots, q_n, q'_n)$
de T dans $\mathbb{Q}^{2n}$ étant injective, T est dénombrable ; T étant infini dénombrable, $\mathcal{P}(T)$ est de cardinal continu.

Construction de l'application :

On peut construire, par récurrence, une application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant : le graphe G de f rencontre tout fermé de $\mathbb{R}^2$ dont la première projection contient un intervalle non réduit à un point.

Considérons en effet, l'ensemble Δ des fermés de $\mathbb{R}^2$ dont la première projection contient un intervalle non réduit à un point.

L'ensemble des fermés de $\mathbb{R}$, ou de $\mathbb{R}^2$, étant de cardinal continu, il en est de même de Δ . Comme tout ensemble, Δ peut être muni d'un bon ordre, c'est-à-dire d'un ordre tel que toute partie non vide admette un plus petit élément, et comme pour tout ensemble, ce bon ordre peut être choisi initial, c'est-à-dire, désignant par P le plus petit élément de l'ensemble, tel que tout segment $[P, F[= \{L / L < F\}$ de l'ensemble, ait un cardinal strictement inférieur à celui de l'ensemble.

Soit $F \in \Delta$, $F > P$, et h une application du segment $[P, F[$ dans $\mathbb{R}$; $\text{pr}_1(F)$, contenant un intervalle non réduit à un point, est de cardinal continu; $[P, F[$ étant de cardinal strictement inférieur au continu, $\text{pr}_1(F)$ n'est pas inclus dans l'image de h ; nous noterons $\varphi(h)$ l'un des éléments de $\text{pr}_1(F) - h([P, F[)$.

Soit $p \in \text{pr}_1(P)$; puisque l'ordre sur Δ est un bon ordre, on peut définir par réurrence transfinie, une (et une seule) application t de Δ dans $\mathbb{R}$, vérifiant :

$$t(P) = p$$

$$\forall F \in \Delta - \{P\} : t(F) = \varphi(t / [P, F[)$$

On a $t(F) = \varphi(t / [P, F[) \in \text{pr}_1(F) - t([P, F[)$; donc, d'une part $t(F) \in \text{pr}_1(F)$, d'autre part t est injective. Alors, à tout point a de $t(\Delta)$, on peut associer un et un seul point $f(a)$ de $\mathbb{R}$ tel que $(a, f(a)) \in F$, où $t(F) = a$; on définit ainsi une application f de $t(\Delta)$ dans $\mathbb{R}$, dont le graphe rencontre tout élément de Δ ; il suffit, maintenant de prolonger f à $\mathbb{R}$ de manière quelconque.

(On peut construire f de façon à ce que f soit un endomorphisme de $\mathbb{Q}$ - espace vectoriel : Bourbaki Top. gén. Chapitre VI § 1 Ex 12).

B I B L I O G R A P H I E

- N. BOURBAKI *Eléments de mathématique, livre III : Topologie générale* - Hermann
- M. KLEIN J. RIVIERE *L'amour et la haine* - Payot
- K. KURATOWSKI *Introduction to set theory and topology (2ème éd.)* - Pergamon Press
- M. SPIVAK *Calculus* - Addison Wesley
- L. VIENNOT *Le raisonnement spontané en dynamique élémentaire* - Hermann.

