ABAQUE ET ALGORITHME

Science, Politique et Religion au Moyen-Age

M. CAUSSE , Lycée de SAINTES

Dans l'exposé sur les "Mathématiques Arabes et Indiennes" présenté lors du Colloque inter-IREM de TAILLEVILLE en Juin 1977, nous avons dit que la pratique du "Calcul Indien" d'AL KHOWARIZMI (IXè siècle) avait dû provenir d'une réflexion sur le boulier chinois, ou "abaque" (sic).

Les deux termes sont équivalents pour le Dictionnaire Archéologique des Techniques [I] ; également pour J. NEEDHAM, Science an Civilization in China, t. III, p. 74 [2]. D'autre part, la préface de l'Arithmétique publiée à TREVISE en 1478 (cf.l'article de SMITH [3]) explique que "l'Arte del abbacho" est le nom vulgaire de l'Arithmétique, dont "l'algorisme" est une méthode. Enfin, à des détails au premier abord insignifiants près, la méthode d'AL KHOWARIZMI est identique à la méthode chinoise indiquée par R. SCHRIMPF dans [I], article "Calcul, Extrême-Orient".

Pourtant cette équivalence ne résiste pas à la confrontation avec les documents historiques : le Liber Abaci de GERBERT d'AURILLAC (env. 980) n'a rien à voir ni avec le boulier, ni avec la technique de l'Algorithme. Or on croyait que cet auteur, devenu pape en 999 sous le nom de Silvestre II, avait étudié en Espagne et avait joué un rôle capital dans la diffusion de la Science Arabe en Occident. Le grand mathématicien français Michel CHASLES, passionné d'Histoire des Mathématiques, a soutenu brillamment le contraire, en se fondant précisément sur les travaux de GERBERT et de ses disciples : l'Abaque est une technique purement grecque d'origine.

Même imbroglio à l'origine même de l'Algorithme, technique d'AL KHOWARIZMI. Nous exprimons ici le regret de n'avoir pas cité en 1977 le livre de G. GUITEL : "Histoire comparée des numérations écrites", 1975 [5]. Ce livre, à partir de la multiplication chinoise, expliquée sur la table à compter, donne la même technique sur le boulier que celle déduite par nous, d'après L. KARPINSKY [3]; t. III (1919), p. 401), de la méthode d'AL KHOWARIZMI.

Mais,

a) le nom même d'AL KHORWARIZMI ne figure même pas dans l'index de cet ouvrage ; la Mathématique Arabe paraît n'avoir eu, aux yeux de l'auteur, aucune importance pour son sujet.

b) Selon le propre témoignage de G. GUITEL ([5] p. 520), la numération chinoise est de base 100, et comporte 18 signes, plus le zéro représenté par un vide ; 10 joue le rôle de "base auxiliaire". Or le boulier est rigoureusement adapté à la base 10.

La comparaison chinoise nous inclinerait donc dans le sens de l'originalité d'AL KHOWARIZMI, si celui-ci ne présentait pas son système comme simplement emprunté aux Indiens. Mais toutes les attestations indiennes du "Calcul Indien" sont très postérieures à AL KHOWARIZMI. Alors ???

I - LA TECHNIQUE DE L'ALGORITHME

Nous reproduisons, ci-après les figures du boulier données dans notre rapport de TAILLEVILLE, en 1977, p. 87-90 ; en-dessous de chaque figure, l'étape correspondante de l'opération d'AL KHOWARIZMI, d'après L. KARPINSKY.

L'intérêt de procéder suivant les puissances décroissantes de 10, et non suivant les puissances croissantes selon la technique aujourd'hui habituelle, apparaît à la figure 4. Lorsqu'on a effectué tous les produits partiels de 3 par 2, 6, 4, le chiffre 3 n'aura plus à intervenir, et peut donc disparaître :

"Quando multiplicas ultimam (3 de 324) per primam (4 de 264) dele ultimam (efface le 3 pour écrire le 2 de 12).

Deinde protrahe figuras illius (déplace les chiffres du multiplicateur) ita quod prima illius (le 4 de 264) sit sub penultima eius quem multiplicas (afin que le premier chiffre à droite de 264 soit sous l'avant-dernier de 324)".

Même explication pour la figure 7.

Le langage de l'informatique est ici utile pour comprendre l'intérêt de la démarche. La procédure fait apparaître l'opération comme une succession d'états de l'instrument. Dans cet instrument, les tiges portant les chiffres ont fonction de mémoires, et la méthode des puissances décroissantes permet de réaliser une économie de mémoires, chaque fois qu'on peut effacer un chiffre du multiplicande.

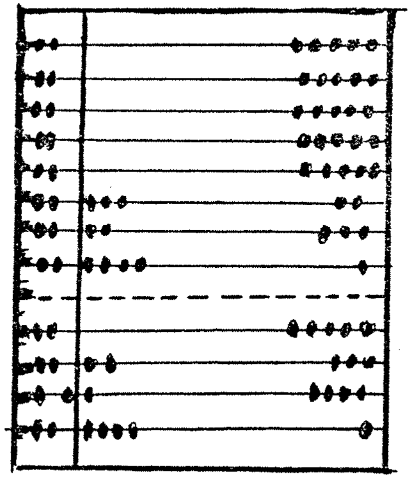
Laissant provisoirement de côté la question de la priorité historique dans l'écriture décimale et la technique opératoire correspondante, il nous semble qu'on doit relever la découverte épistémologique de la récurrence. On la trouve sous deux formes :

a) définition de la progression géométrique de raison 10 dans les ordres d'unités de la droite vers la gauche :
"et primus quod videndere oportes prenescere loca et differentias. Loca appellaramus spacia in quibus scribantur caracteres. Differentias vere numerus ab unitate ad decem, a decem ad e... Sic de istis per decennarium processio est locorum et differentiarum, mutate unaqueque figura per diversa loca diversas constituit differentias per decennarium."
(ainsi, au sujet de ces différents ordres d'unités, il y a une progression de raison 10 portant sur les ordres et les lieux, où chaque figure, suivant le lieu où elle se trouve placée, change de valeur selon cette progression de raison 10).

b) définition d'une suite limitée d'opérations, c'est à dire exactement de ce que nous appelons aujourd'hui... un algorithme. Ainsi écrit-il, ayant opéré jusqu'au second ordre à partir de la gauche :
"Similiter fac de reliquis usque ad primam" : opérez de même pour tous les autres chiffres, jusqu'au plus à droite.

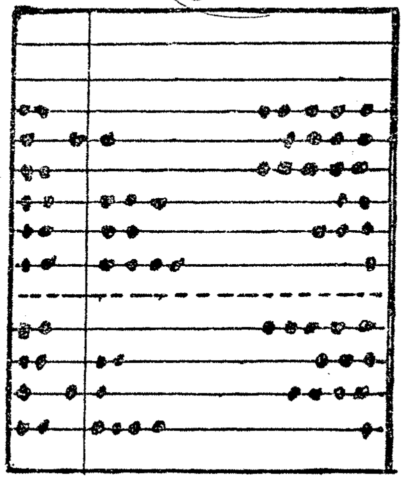
Quelques mots seulement sur la division. La pratique usuelle, procédant de gauche à droite, apparaît clairement comme réciproque de la multiplication ainsi pratiquée, et s'adapte sans peine au boulier. On place les quotients partiels en haut du boulier, et les dividendes partiels leur font progressivement la place, jusqu'au dernier qui est le reste.

1



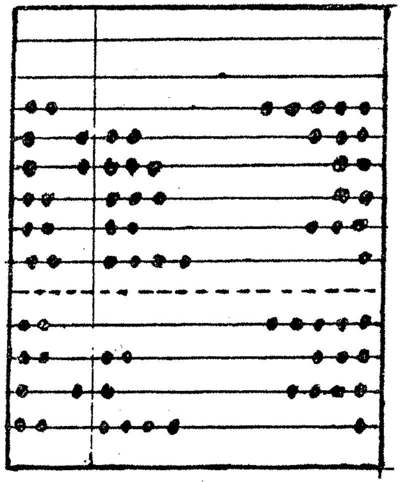
324
264

2



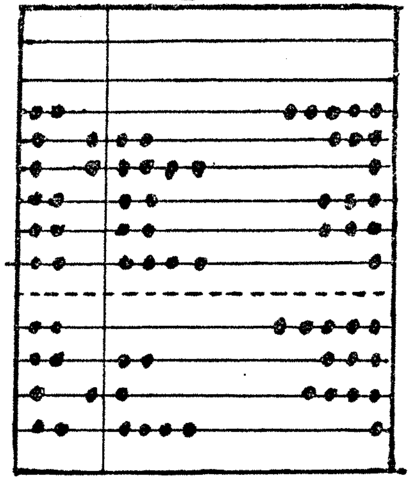
60324
264

3



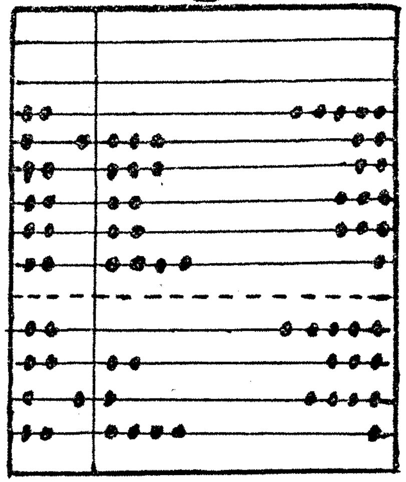
78324
264

4



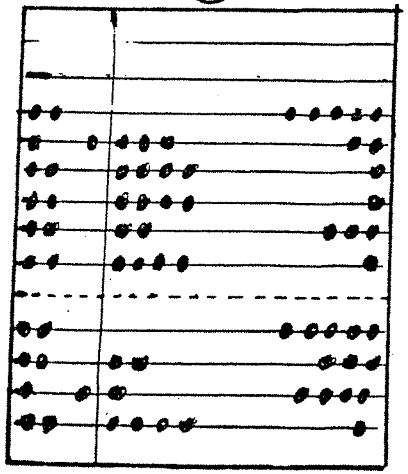
79224 → 79224
264 → 264

5



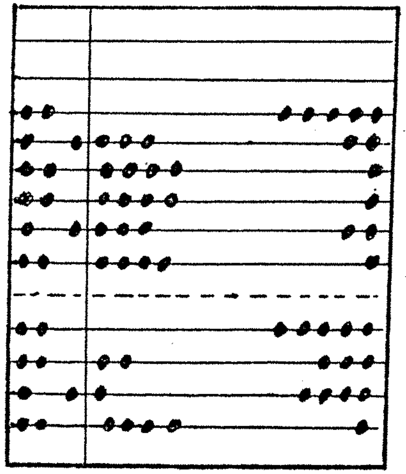
83224
264

6



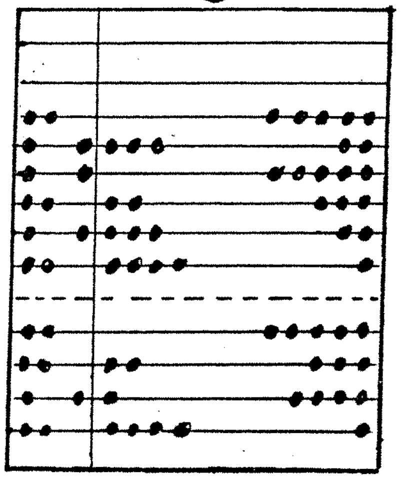
84424
264

7



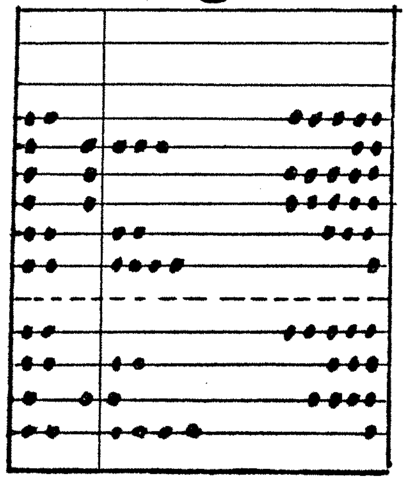
84484 → 84484
264 → 264

8



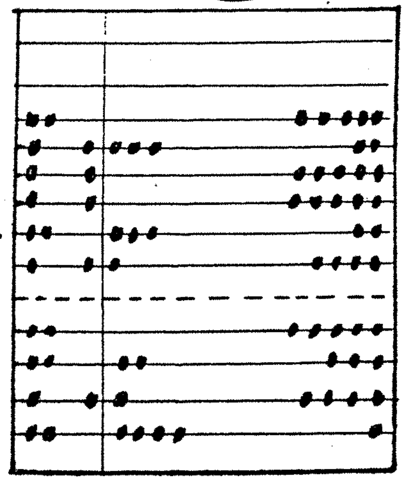
85284
264

9



85524
264

10



85536
264

II - L'ABAQUE

Nous citons surtout les descriptions de deux disciples de Gerbert ; Bernelinus (Gerbert Papa, Opera Mathematica, p. 381) et Raoul de Laon, (Arithmetische Tractat des Radulph von Laon, Von Dr Alfr. Nage - Bibl. Nat. V. 17. 625). Ce dernier texte donne l'exposé le plus clair et condensé de la pratique opératoire (en allemand)... Pour la confection de l'abaque, voir Bernelinus. Celui-ci dit, de Gerbert :

"*... abacum, id est tabulam dimensionibus aptam, opere scutarii effecit. Cujus longitudini in XXVII partibus deductae nevem numero nota omnem numerum significanter disposuit.*"

(Il fit l'abaque, c'est à dire une table de dimensions convenables, à la manière d'un bouclier -voir les images d'"Astérix" pour les boucliers romains- Et sur son étendue divisée en 27 parties, il disposa chaque nombre en signes au nombre de 9).

C α α	X α α	α α	C α	X α	α	C	X	1
				2	6	6	6	4
				4	12	12	12	8
				1	3	3	3	2

Problème : Un général dispose de 4 légions de 6666 légionnaires chacune ; soit 26.664 légionnaires. Combien doit-il réunir d'argent s'il veut les payer chacun 13.332 sesterces par an ?

Le multiplicande est disposé dans la ligne supérieure, le multiplicateur dans la ligne inférieure ; on commence par les unités ; enfin après chaque produit partiel, on effectue les retenues, ce qui conduit à effacer et réécrire plusieurs fois les chiffres de la ligne centrale. Le produit (355.484.448) ne peut dépasser 9 chiffres.

Nous nous sommes arrêtés à la figure du produit partiel par deux : le problème de l'instrument encre-papier, c'est d'éviter la nécessité d'effacer. L'opération est très simple au tableau.

En fait, il ne s'agit que d'une introduction encore maladroite à la pratique actuelle, et les collègues à qui nous exposions cette méthode se sont légitimement demandé en quoi nous lui trouvions de l'intérêt. C'est ici que la Politique intervient.

o
o o

"Pythagorici (...) descripserunt sibi quamdam formulam, quam ob honorem sui praeceptoris mensam pythagoream nouinabant, quia hoc, quod depinxerunt, magistre praemonstrante cognoverant a posterieribus appellabatur abaeus" (Opera, p. 157). [4]

"Les Pythagoriciens ont décrit un formulaire, qu'ils nommaient "table de Pythagore" en l'honneur de leur maître et cette table qu'ils avaient connue par le Maître, qui fut plus tard appelée "abaque"."

Même argumentation, p. 250 : Gerbert identifie l'abaque à la Table de Pythagore, connue par l'Arithmétique de Boèce, où elle se trouve en effet.

Moyennant quoi son disciple et biographe Richer écrit :
"Nec a saracenis abacum rapuit, nec primus in Gallia introduxit, sed solummodo "pene demersam" apud Gallos, Gallis restituit." (Opera, p. 387).

"Il n'a pas pris l'abaque chez les sarrasins, et il n'a même pas été le premier à l'introduire en France ; il l'a seulement rendue aux Français qui l'avaient un peu oubliée..."

... Mais tout le monde n'est pas d'accord. Wilhelm de Malmesbury (env. 1120) écrit : "... *abacum certe primus a Saracenis rapiens, regulas dedit"* (Opere, p. 387) :"il donna les règles de calcul sur l'abaque après les avoir assurément prises aux Sarrasins."

Une chose est en tout cas certaine : l'abaque en tant que méthode graphique de calcul ne se trouve pas exposée dans Boèce sous la forme que lui ont donnée Gerbert et ses disciples, et ils ont au contraire positivement tenté d'expliquer que l'abaque n'était rien d'autre que la Table de Pythagore.

Or, il est assuré, d'autre part, que Gerbert reconnaît devoir aux Arabes les données de l'Astronomie : Malmesbury a donc bien des chances d'avoir raison. Il est vrai que les Anglais ont eu au XIIè siècle un tout autre point de vue sur la question.

o
o o

En même temps que les Normands conquièrent l'Angleterre, leurs cousins réalisent les mêmes exploits dans le Sud de l'Italie et en Sicile. Et de même que, malgré quelques "bavures" romancées par Walter Scott, les Normands ont réussi leur fusion politique avec les Saxons, de même, en Sicile, ils ont réussi le même exploit diplomatique avec la Société grecque et la Société Arabe de l'île. C'est là, apparemment, que fut mis en route un processus accéléré de traduction en latin des manuscrits grecs et arabes. Les Normands d'Angleterre en furent les premiers bénéficiaires occidentaux, avec les Italiens, et c'est la raison pour laquelle, apparemment, les plus anciens manuscrits traduits de l'arabe se trouvent en Angleterre. L'Espagne vient un peu après.

Sur toutes ces questions, le livre publié en 1924 par Ch. M. Haskins, "Studies in the History of Mediaeval Science", réédité en 1960, fait encore autorité. [7]

Le nom donné au Ministre anglais des Finances, Chancelier de l'échiquier remonte à cette période. Scaccarius, l'échiquier, est un des noms de l'abaque, ou table à calculer.

C'est donc Adélard de Bath, vers 1115, puis son disciple Robert de Chester, qui paraissent avoir traduit l'Arithmétique d'Al Khowarizmi, et sûrement ses tables astronomiques.

Or, même en Angleterre, tous ces emprunts à la Science des Infidèles paraissaient dangereux à l'orthodoxie ecclésiastique (Voir Haskins, pp. 83ss), En sorte que, selon toute probabilité, Boèce joua pour l'occident Gallican le rôle de certains savants mythiques modernes, qui passent dans leur pays pour avoir tout inventé... Quant à l'Angleterre, c'était une île.

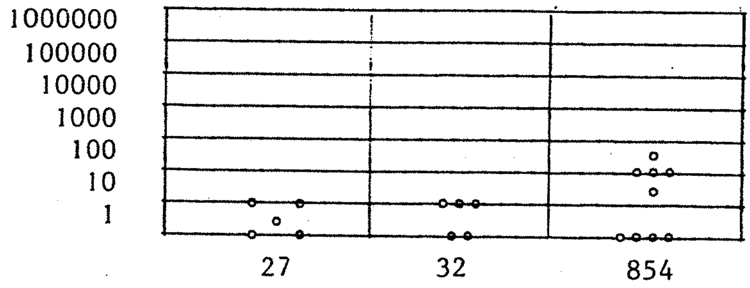
∴

On voit ainsi se dessiner deux courants intellectuels : un courant "intégriste" attaché à la tradition grecque de l'Eglise, et un courant "libéral" qui adopte l'algorithme. Certains auteurs brouillent les cartes ; par exemple on fait passer "Algorismus" pour un grec. Ou encore, comme Fibonacci (G. Sarton, Isis 21, P. 164ss) on intitule "Liber Abaci" un traité fondé sur l'Arithmétique d'Al Khowarizmi. Il existe aussi des "algorithmes" qui sont en fait des traités d'abaque. Tel celui de Reisch, Margarita Philosophica, Strasbourg 1504. [8]

Nous reproduisons côte à côte (p. 9).

a) d'après O. Ore, Numbert Theory and its history, 1948 : la représentation de "l'Abaciste" et de "l'Algoritmiste" d'après le traité de Reisch.

b) la table de Salamine, qui est un plateau de calcul antique, [3] dont la ressemblance avec la table d'algorithme est frappante. O. Ore donne, p. 23, une reproduction du texte de Reisch qui est suffisante pour comprendre son traitement de l'algorithme :



A ceci près, que les nombres sont représentés par des cailloux, il est procédé exactement comme sur la table de Gerbert ; en sorte qu'il est malgré tout possible de se demander si tel n'était pas le procédé employé sur la Table de Salamine, qui ne serait conservé. Un caillou placé entre deux lignes représente cinq unités de la ligne inférieure

D'autre part l'abaciste de la représentation de Reisch utilise les chiffres arabes, généralement liés à l'algorithme...

Cependant, la ligne générale est bien celle que nous avons indiquée. Au début du XVIè siècle, Lefèvre d'Etaples, l'un des grands humanistes, publie un traité sur l'Arithmétique de Boèce, "quem abacum dicunt" (qu'on appelle abaque), avec, en appendice, une description de l'Algorithme, qui est exactement la méthode d'Al Khowarizmi. (Bibl. Nat Res. V. 148, 649). [9]

Nous n'avons rien dit jusqu'ici des chiffres dits "de Boèce". Ces chiffres ne figurent sur aucun manuscrit antérieur au XIè siècle ; ils entreraient ainsi tout naturellement dans la technique "intégriste" d'emprunt aux Arabes transposé dans le passé antérieur Français ou Greco-romain. Ils n'apportent rien à l'histoire des nombres, ni à celle du raisonnement mathématique.

phique d'Athènes, nous permet de nous fair une idée de l'usage de l'abaque.

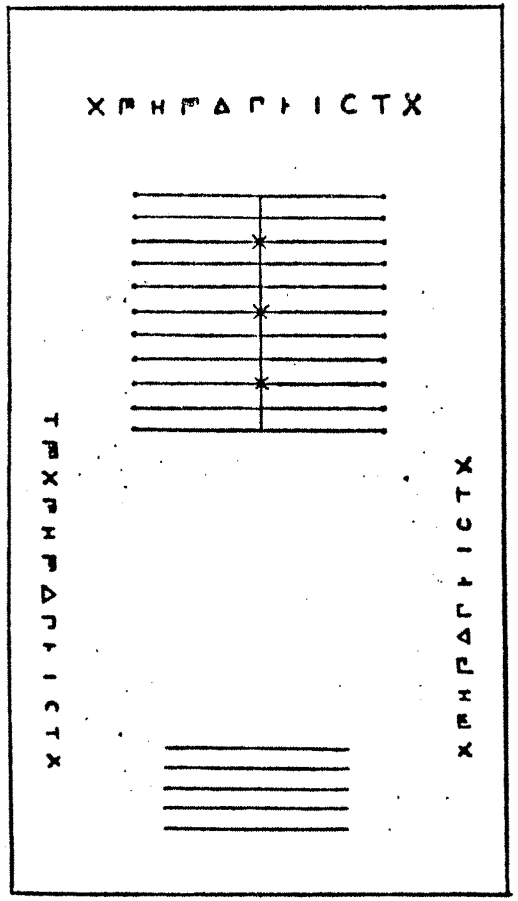
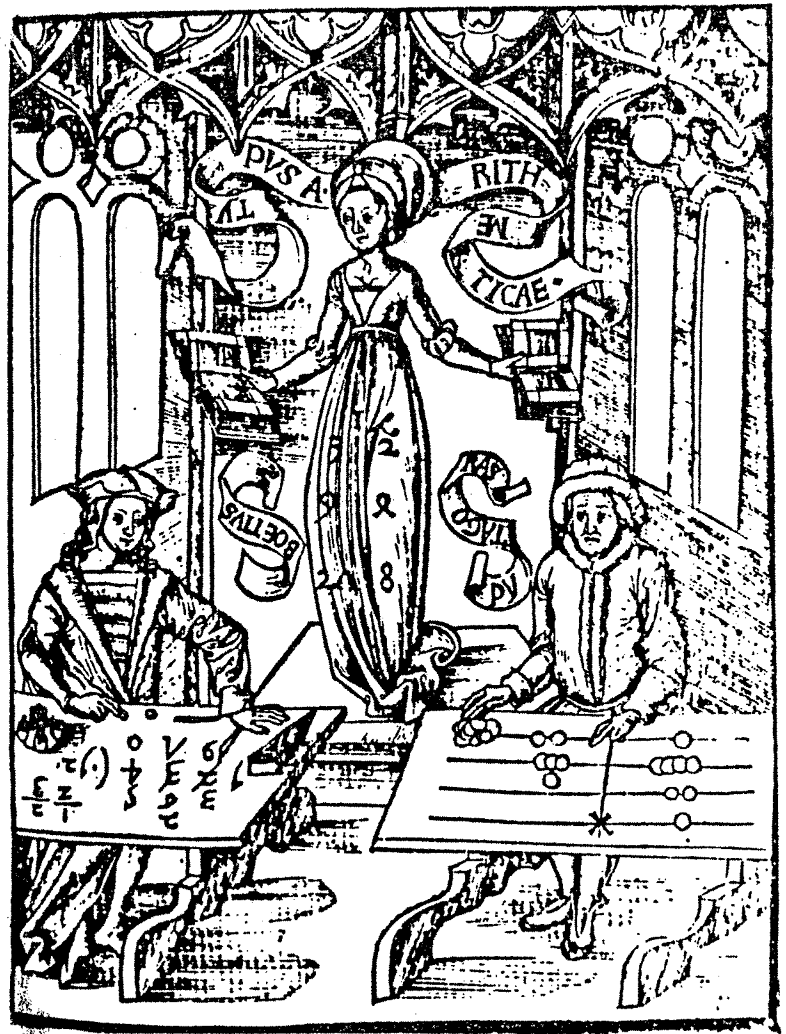


Table de Salamine (*Rev. archéolog.*, T. III, p. 296) découverte par Rangabé en 1846. Les caractères figurant sur trois côtés désignent des nombres (v. CALCUL). En plus, $\text{t} = 1$ drachme, $\text{I} = 1$ obole, $\text{C} = 1/2$ obole, $\text{T} = 1/4$ obole, $\text{X} = 1/8$ obole (Th. HEATH. *A history of Greek mathematics*, p. 49 sq. Oxford, 1921).



Abacist vs. Algorismist

From Gregor Reisch: Margarita Philosophica
Strassbourg 1504

Sur la figure que nous reproduisons ci-aprè les cinq colonnes de gauche sont réservées, thé riquement, aux myriades, aux milliers, aux cen taines, aux dizaines et aux unités, les quatr colonnes de droite aux fractions les plus usuelle

III - AUX SOURCES DE L'ALGORITHME

AL KHOWARIZMI n'est pas un Arabe, mais un Tartare, comme AL BIRUNI et Omar KHAYYAM, les plus grands savants de l'Islam. Les tribus tartares, entre la mer Caspienne et la Mongolie, sont connues surtout par la réputation que Jules VERNE a pu leur faire dans "Michel Strogoff". Pour notre sujet, il est plus intéressant de rappeler que ce sont les Tartares qui ont introduit le boulier chinois en Europe, alors que cet instrument n'a jamais été adopté apparemment par les Arabes. (Libri, Histoire de Mathématiques en Italie, 1835, p. 186, Bibl. Nat. Res. V. 3055) [10] il faut ajouter qu'à l'époque d'AL KHOWARIZMI, les échanges avec la Chine sont plus intenses que jamais : adoption de la céramique et de la faïence, industrie de la soie, du papier, du cuir, modèles artistiques... (Voir, par exemple J. Risler, "La Civilisation Arabe"). [11]

Nous sommes moins informés des relations avec l'Inde. Pour tout dire, aussi longtemps qu'on n'aura pas le texte arabe d'AL KHOWARIZMI, et le terme d'origine traduit au XIIè siècle par "*caracteres Indorum*", il faudra hésiter à attribuer quoi que ce soit à l'influence Indienne dans l'oeuvre d'AL KHOWARIZMI. Les Indiens ont tendance à projeter dans un passé lointain de leur propre tradition des connaissances relativement récentes, voir apprises de l'étranger. G.R. KAYE (Indian Mathematics, ISIS, t. 2, pp. 326-356) en donne toute une série d'exemples. Les plus typiques concernent les relations scientifiques avec les Chinois ; celles-ci nous sont connues exclusivement par des sources chinoises. "The History of Hindu Mathematic", de DATTA, 1935, [12], rééditée en 1962, écrite par un Indien, ne peut que nous confirmer dans le point de vue de KAYE.

Pour cet auteur, "beyond doubt", (p. 137) la méthode d'AL KHOWARIZMI remonte chez les Indiens au second siècle de notre ère... mais l'exemple le plus ancien cité, qui puisse se rapporter à cette méthode, est emprunté à Sridhara, (env. 750). "Placing the multiplicand below the multiplier as in KAPATASANDHI, multiply successively, in the direct or inverse order, moving the multiplier each time. This method is called KAPATASANDHI". (p. 136).

Toutes les autres explications sont empruntées à des textes du Xè siècle et postérieurs.

D'autre part cette pratique des opérations s'adapte, bien sûr à la numération de position décimale ; mais elle ne lui est pas liée ; elle peut se mener avec la numération grecque aussi bien, et c'est très certainement ainsi qu'on procédé les mathématiciens Indiens : la plus ancienne attestation sûre de la numération décimale en Inde est l'inscription de GWALIOR, de 876 (G. GUITEL [5], p. 618ss).

Tous ces faits nous orientent vers une confirmation de l'originalité d'AL KHOWARIZMI. Une certaine pratique opératoire antérieure est probable, appuyée sur la table à compter ou, à partir du 7è siècle, sur le boulier. Mais s'évanouissent toutes les tentatives pour trouver avant lui une définition cohérente et complète du système décimal.

Reste le nom de chiffres "hindis", donné par les arabes à leurs chiffres.

Ce mot, dans la littérature médiévale, ne désigne pas l'Inde avec plus de précision que "Roumi" ne désigne Rome. Ce dernier se rapporte à l'Occident chrétien, et l'autre à l'Extrême-Orient.

°
° °

Il faut enfin se garder de croire que AL KHOWARIZMI, s'il avait eu des titres d'inventeur à faire valoir, y aurais insisté lourdement. C'est sans doute le contraire qui est vrai. Dans la préface de son Algèbre qui fit autorité autant que son Arithmétique, il insiste sur l'extrême modestie des améliorations qu'il a pu apporter à l'héritage des anciens ; sur leur caractère purement pratique ; et sur sa fidélité religieuse : en Arabe, l'innovation, c'est l'hérésie. D'ailleurs la méthode d'AL KHOWARIZMI est loin de s'être imposée aussitôt dans le monde arabe. Le grand mathématicien AL KARKHI (XIè siècle), n'utilise pas les chiffres arabes dans son traité d'Arithmétique. MEHDI ABDELJAOUAD, donne dans [13] plusieurs exemples d'une véritable réticence à l'égard de ce calcul indien dans le monde arabe.

Mentionnons, en tout cas le traité d'AL UQLĪDISĪ, sur lequel il attire à juste titre l'attention (Xè siècle); découvert en 1966 par AS. SAÏDAN (ISIS, t. 57, 1966, pp. 475-490) ; traduit en anglais par le même (Saïdan, Kitab Al-Fusul fi al Hisab al Hindi, Al Uqlīdisī, Amman, 1974, en arabe ; Leyde, 1978, en anglais). [14]

Ce traité permet de prolonger notre propos dans deux directions.

1°) Au Xè siècle, soit un siècle après AL KHOWARIZMI, on voit se prolonger la dynamique du système décimal vers les nombres décimaux. Toujours contre des réticences tenaces.

2°) Ce traité nous apparaît <u>indépendant</u> d'AL KHOWARIZMI. La disposition de l'Algorithme n'est pas celle d'AL KHOWARIZMI adoptée également par les Indiens à partir du XIIIè siècle selon Datta (op. cit), mais celle transposée directement de la table à compter chinoise : trois colonnes ; multiplicateur à droite, produit au centre

Bien plus, AL UQLĪDISĪ explique que l'usage de la table à compter -c'est à dire pour nous l'abaque- est nécessaire ([15] ISIS, p. 478). Et, néanmoins, ce calcul est appelé "hindi", confirmant ainsi absolument l'interprétation que KAYE donnait de ce terme.

3 6 2	3 7 2	3 7 2	3 8	3 8	3 8
2 6	2 8 6	2 9 6	2 3 2	2 4 2	2 4 2
4 4	4 4	4 2 4	4 2 6	4 4 6	4 4 6
			4	4	8 4

etc...

Enfin bien d'autres procédés de calcul sont donnés, dont il faut reconnaître la supériorité sur celui d'AL KHOWARIZMI. L'un d'entre eux est la méthode des "maisons", qui s'est répandue aussi bien en Chine qu'en Occident. Nous en donnons deux représentations, l'une en Chine, l'autre en Italie, XVè siècle (page suivante).

Par rapport à l'enseignement des mathématiques, on observera que cette méthode figure dans les manuels scolaires de la célèbre collection "ALEPH" sous le nom de "multiplication musulmane" (sic) (Algèbre, Terminale CE, p. 85 publié par Hachette). Enfin elle a été réactualisée dans certains exposés de Mathématiques élémentaires "modernes" sur la multiplication des polynômes.

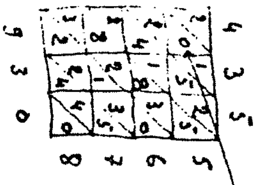
En conclusion, on voit que l'influence arabe a été multiple, nullement limitée à l'oeuvre d'AL KHOWARIZMI. Si, comme nous le pensons, l'identification cohérente du système décimal est bien son oeuvre, liée à son origine à la pratique du boulier, et à la logique décimale rigoureuse de cet instrument, il n'était pas moins évident que le système décimal pouvait s'affranchir de l'instrument. Il s'affranchira aussi de la table à compter qu'AL UQLĪDISĪ jugeait encore nécessaire. Resteront les nombres eux-mêmes. A l'inventeur, il est facile de trouver des précurseurs nombreux.

Alors... Pourquoi pas les Abacistes grecs ?

found in the works of Bhāskara[a] and other Indian mathematicians. The *gelosia*, or ...ting, method of multiplication, which was Indian or Arabic in origin,[b] is not found ... Chinese books until the *Suan Fa Thung Tsung* of +1593 (see Fig. 64) ... it was known ... the *yin chhêng thu*,[1] or *phu ti chin*.[2]

The multiplication table (*chiu chiu ho chüeh*[3]) is naturally ancient in China. Unlike ... Babylonian practice of arranging the numbers in columns, the table appears in the ... Chinese texts simply written out in words. Li Nien (8) and Yen Tun-Chieh (2)

mes deux corrections
la 4e colonne (8)
(intervention)



Fin du produit:
(4 . 6) . 10.000
3 9 30
100 100

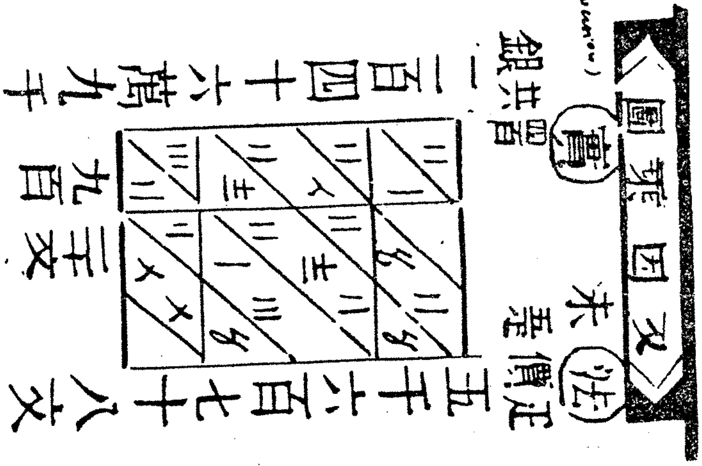


Fig. 64. The *gelosia* method of multiplication, from the *Suan Fa Thung Tsung* (+1593).

...have collected notes of the texts in which it appears; among the earliest may be the fragments embodied in the *Kuan Tzu* book,[c] perhaps before the −4th century. Yen Tun-Chieh has also described the multiplication tables on the bamboo tablets[d] recovered from the sand-buried city of Chü-yen at Edsin Gol—these are of Han date, c. −100. Portions of such tables continue to occur in texts down to the Sung, as, for example, in the *Sou Tshai I Wên Lu*[4] (In search of Strange Things),[e] by Yung Hêng.[5] The so-called Pythagorean form of the table, in which the numbers are arranged upon

a C. +1150; Taylor (1) tr. p. 10. And in the +10th-century Bakhshālī MS. See Renou & Filliozat (1), vol. 2, p. 175.
b Smith (1), vol. 2, p. 115.
c Chs. 58, 80.
d These bamboo slips also had written on them a number of problems similar to those in the *Chiu Chang Suan Shu*.
e Ch. 3, p. 4*a*.

e
nt
de

Arithmétique de Trevis, 1478

Incommincia vna practica molto bona et vtile a ciascaduno chi vuole vxare larte dela merchadantia.chiamata vulgarmente larte de labbacho.

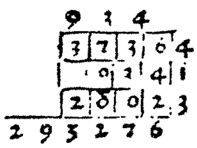
Regato piu e piu volte da alchuni zouani a mi molto dilectissimi: li quali pretendeuano a douer volere fare la merchadantia: che per loro amore me piacesse affadigarme vno puocho: de dargli in scritto qualche fundamẽto cerca larte de arismetrica: chiamata vulgarmente labbacho. Unde io constretto per amor di loro: et etiãdio ad vtilitá di tuti chi pretendano a quella: segondo la picola intelligentia del inzegno mio: ho deliberato se non in tuto: in parte tamẽ satisfare a loro. acio che loro virtuosi desiderii vale frutto recevere posseano. In nome di dio adoncha: toglio per pricipio mio el tuto de algorismo cosi dicẽdo.

1 Tute quelle cose: che da la prima origine hanno habuto producimẽto: per rasone de numero sono sta formade. E cosi come sono: hano da fir cognoscude. Pero ne la cognitione de tute le cose: questa practica e necessaria. E per intrar nel pposito mio: primo sapi lectore: che qñto fa al proposito nostro: Numero e vna moltitudine congregata ouero insembrada da molte vnitade. et al meno da do vnitade. come e. 2. el quale e lo primo e menore numero: che se truoua. La vnitade e quella cosa: da la quale ogni cosa fi ditta vna. Segõdario sapi: che se truoua numeri de tre maniere. El primo se chiama numero simplice. laltro numero articulo. El terzo se chiama numero

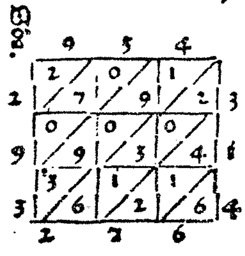
Voglio pero che tu intendi che sono altri modi de moltiplicare per scachiero: li quali lassaro al studio tuo: mettendo li exempli soi solamente in forma. come porai vedere qui sotto

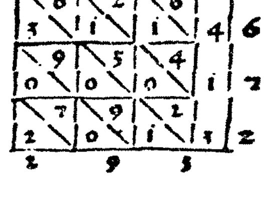
Or togli de fare lo predito scachiero. zoe. 3 1 4. fia. 9 3 4. e nota de farlo per li quatro modi come qui da sotto.

```
      9 3 4
  3 7 3 6 / 4
    9 3 4 / 1
2 8 0 2 / 3
2 9 3 2 7 6
```



Eôo.





Somme.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] Dictionnaire archélologique des techniques, tome 1 De Abaque à Greffe, Edit. de l'Accueil, 1963.

[2] NEEDHAM (Joseph), Science and Civilisation in China - Cambridge, University press, 1954.

[3] KARPINSKI (L.C.), Two Twelfth Century Algorisms
ISIS, 1919, Vol. 3, pp. 396-413.

KAYE (G.R.), Indian mathematics, 1913, 1914, Vol. 2, pp. 326-356.

SMITH (D.E.), The First Printed Arithmetic, 1919, 1922, Vol. 6, pp. 311-322
Treviso 1478.

[4] GERBERT d'AURILLAC, archevêque de Ravenne, pape sous le nom de SILVESTRE II
Oper mathematica, Ed. Bubnow, Berlin, 1899.

[5] GUITEL (G.) Histoire comparée des numérations écrites, Flammarion, Paris 19

[6] RAOUL DE LAON, Arithmetische Tractat, (Alfried Nage) Bibl. Nationale.

[7] HASKINS (C.H.) Studies in the History of Medieval Sciences, 1924, Cambridge réédité en 1960 à New-York.

[8] ORE (Oystein), Number theory and its history, New-York, Toronto, London, Mc. Graw-Hill book C°, 1948.

[9] LEFEVRE d'ETAPLES (J.) Arithmetica Boetii.

[10] LIBRI (G.), Histoire des Sciences mathématiques en Italie, Paris, 1838-41
4 volumes.

[11] RISLER (Jacques-C.), La civilisation arabe, Payot, 1955, coll. "Bibliothèqu historique".

[12] DATTA (Bibhutubnusan), SINGH (Avedhesh Narayan), History of Hindu mathematics, a source book, pat'l and 2, Bombay, Calcutta, London 1935, réédité en 1962, Asia publisching house.

[13] ABDELJAOUAD (M.) Vers une épistémologie des décimaux (La contribution des arabes à l'invention des décimaux) Bulletin de liaison et d'information n° 50 - ATSM, Tunis, 1978.

[14] SAÏDAN (A.S.), Fondements de l'arithmétique indienne d'AL UQLĪDISĪ, 1978
Dordrecht, D. Reidel.

[15] SAÏDAN (A.S.), The Earliest Extand Arabic Arithmetic. ISIS, 1966, Vol. 57, pp. 475-490.

[16] Boetins Arithmetica. Bâle 1570 Heuricus loricus Glorianus.
Table de Pythagore, p. 1314.