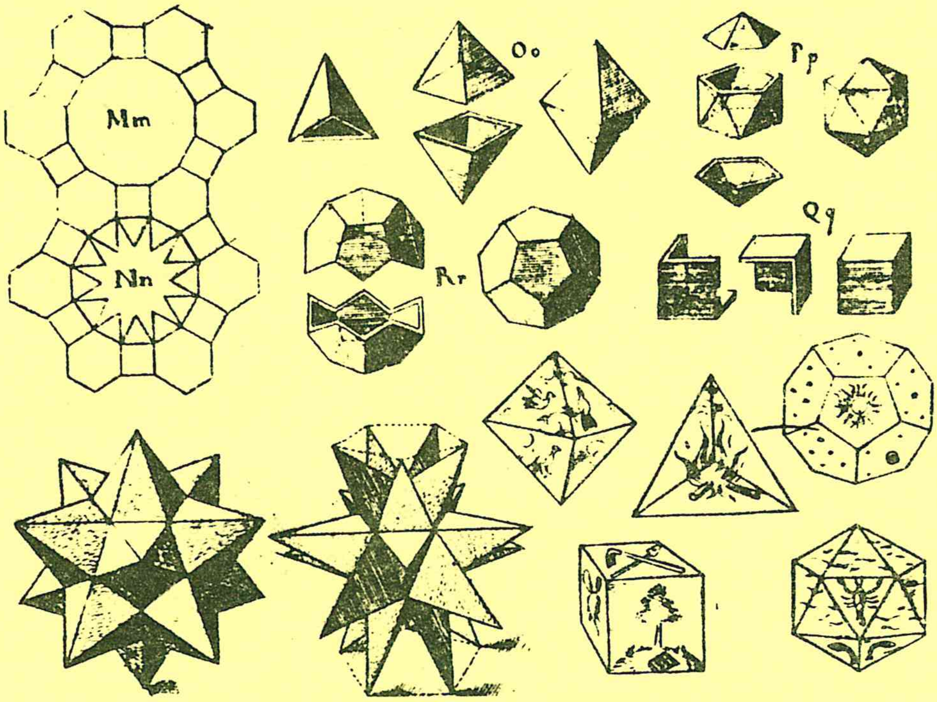
UNIVERSITÉ DE POITIERS

Institut de Recherche
sur l'Enseignement des Mathématiques

Mai 1979

POLYÈDRES ET RÉSEAUX



KEPLER : Mysterium Cosmographicum 1596.

Daniel DAVIAUD

PRÉFACE

Ce document n'est pas un document élève. C'est un outil de travail pour le professeur. Il a été en grande partie testé dans des classes de stagiaires de l'IREM de POITIERS.

Partout il a suscité l'enthousiasme et des professeurs non convaincus au départ de «l'utilité» d'un tel travail mais ayant accepté de le proposer dans leurs classes, se sont vite pris au jeu devant le plaisir que leurs élèves (et eux) avaient de travailler.

Le document a été fait en prenant en compte la grille d'objectifs et de verbes d'action de Régis GRAS (IREM de RENNES).

Jeannine CARTRON

Classes d'objectifs opérationnalisables	Heuristique	Traductif	Classificatoire	Calculatoire	Logique	Technique	Transfert	Critique	Prédictif
Verbes d'action permettant l'opérationnalisation	* bricoler * chercher * inventer * créer * émettre des hypothèses	* observer et choisir * analyser * schématiser * représenter * décrire * modéliser * transposer	* organiser classifier * discerner * ordonner * analyser * synthétiser * identifier	* dénombrer * calculer * appliquer un algorithme	* prouver * convaincre * rédiger (pour être lu) * tolérer * déduire * résoudre des problèmes	* soigner la présentation d'un dessin ou d'un calcul * se montrer précis, minutieux, méticuleux * se montrer persévérant et organisé	* appliquer * construire un exemple, un modèle * illustrer * faire fonctionner	* contrôler interpréter * évaluer * maîtriser la vraisemblance * critiquer (contre-exemple) * remettre en question * valider invalider * optimiser	* estimer (approximativement) * induire * prévoir * conjecturer

INTRODUCTION

Les pages qui suivent n'ont pas l'intention de remplacer les excellents ouvrages consacrés à l'étude des polyèdres et richement illustrés de dessins et de belles photos. Nous n'allons pas décrire ici les différents polyèdres, réguliers ou non, convexes ou étoilés, les prismes et les antiprismes, les pyramides et tous les solides obtenus en tronquant les sommets ou en rabotant les arêtes des précédents.

Citons, en guise de petite bibliographie :

A. HOLDEN : *Formes, espace et symétries* (Editions CEDIC)

H.M. CUNDY et A.P. ROLLET : *Modèles mathématiques - Chapitre 3* (Editions CEDIC)

H. STEINHAUS : *Mathématiques en instantanés - Chapitres 7, 8 et 12* (Editions Flammarion, Nouvelle Bibliothèque scientifique).

Les élèves prennent plaisir à feuilleter librement de tels livres et on aura soin d'en laisser à leur disposition. En particulier, le premier de ceux-ci déclenche l'envie de construire des polyèdres. Mais cette envie s'apaise vite si les élèves n'ont pas la possibilité de se procurer des matériaux de construction. Nous indiquerons ici plusieurs procédés de construction. L'un deux sera étudié en détail.

I QUELQUES CONSIDERATIONS SUR LE ROLE DES CONSTRUCTIONS DANS L'EDUCATION MATHEMATIQUE

Certains collègues pensent que les constructions qui sont du ressort du travail manuel, du bricolage, ne permettent pas d'acquérir le vocabulaire et les notions du programme de mathématiques. Ils trouvent en outre que ces constructions exigent beaucoup trop de temps.

Pour comprendre l'intérêt des constructions, il faut se rappeler que l'apprentissage d'une notion mathématique par un enfant passe par trois étapes largement reconnues et décrites dans les passages suivants, issus d'exposés de Régis GRAS (Références : annexe 1 du compte rendu de la réunion de coordination des équipes OPC de la recherche pédagogique : *L'enseignement de la géométrie en 4ème et 3ème, ses objectifs, leurs approches* (Mai 1976) ; et exposé présenté en séminaire IREM en Mai 1977 sur l'Action OPC).

" a) Lors d'une première étape, les élèves "bricolent", manipulent, recueillent des informations, formulent des hypothèses relativement aux algorithmes de construction qui modèlisent l'action de l'outil manipulé, soumettent par des simulations et des prévisions ces hypothèses à des confrontations effectives avec le réel. Les élèves conçoivent ici leurs premiers théorèmes en acte selon un modèle implicite : par exemple pour construire l'image d'un polygone par une symétrie orthogonale, on constate qu'il suffit de chercher l'image des sommets et de joindre... Pas de théorie ! Les interrelations que l'enfant a ici avec son milieu (professeur, camarade, appareillage, objets divers) sont dénommées par G. BROUSSEAU, dialectique de l'action. Les apprentissages sensori-moteurs acquis ici sont avantageusement réinvestis dans les activités plus mentales vécues ultérieurement.

b) Lors de la deuxième étape, l'élève fait fonctionner les algorithmes de construction graphique ou numérique précédemment conçus et se montre capable d'exprimer ses actes au moyen d'images ou du verbe *(dialectique de la formulation selon G. BROUSSEAU). Ces constructions se substituent à l'exécution faite par l'outil dans la phase initiale. Elles servent également de terrain d'apprentissage au dessin et à l'organisation de calculs où soin et minutie s'imposent ou sont exigibles naturellement.*

c) Enfin, dans une troisième étape, l'élève opère au niveau du modèle mathématique ou tout au moins il valide à travers le modèle ses actions antérieures. Cette activité est plus élevée dans la hiérarchie des démarches intellectuelles : en particulier, l'enfant est susceptible ici d'effectuer des opérations sur les opérations (raisonner à la deuxième puissance dirait PIAGET) à l'aide du langage formel dont il est maintenant muni. Par exemple, il validera un théorème en acte antérieur : "un triangle isocèle (AB = AC) est globalement invariant dans la symétrie d'axe la bissectrice issue du sommet A" ou bien, prouvera que la composée d'un nombre pair de symétries centrales est une translation. Bien entendu, ces trois types d'activités ne sont pas toujours séparés dans les actions et la pensée de l'enfant.

Remarque :

Au fur et à mesure du défilement des modules, le premier niveau perd de l'importance et au contraire, le troisième niveau se développe. Pour être plus exact, le niveau 1 change progressivement d'aspect. Les "manipulations physiques" des débuts sont progressivement remplacées par un "tatonnement mathématique" constitué par la considération de situations déjà abstraites formées par les modules qui précèdent. C'est que cette première phase puise dans l'acquis et par conséquent devient plus mathématique au fur et à mesure de la progression de l'éducation mathématique des enfants".

Dans le premier cycle, il est clair que le rôle des constructions est fondamental au premier niveau. C'est en construisant son polyèdre que l'élève prendra conscience de certaines propriétés mathématiques. Mais nous montrerons qu'une construction est aussi un moyen privilégié d'accéder au troisième niveau de connaissance. Comment ? En amenant l'élève à analyser l'objet à construire pour en dégager une méthode de construction où les notions déjà vécues aux niveaux 1 et 2 vont maintenant opérer sur la réalité. C'est une idée exprimée par René BOIREL dans le paragraphe sur les applications pédagogiques des mathématiques, pages 191 et 192 de *"Les Mathématiques"* (encyclopédies du Savoir Moderne).

"Si l'on veut former les intelligences créatrices dont les civilisations techniciennes ont besoin pour progresser et surmonter leurs difficultés, il faut donner aux élèves non seulement le sens des relations, mais aussi celui des conditions de réalisation : c'est alors, en effet, qu'ils réussiront à incarner leurs idées neuves dans des innovations effectives. Et cela suppose une intellignece qui a l'habitude de dégager les facteurs qui permettent d'aboutir. Or, de ce point de vue, rien ne vaut peut-être la pratique des constructions géométriques.

La géométrie euclidienne... a été la grande éducatrice de l'esprit humain : ne lui a-t-elle pas révélé la méthode pour dégager les conditions de réalisation, appelée justement "analyse", car, comme l'indique l'étymologie de ce mot, on "remonte" alors d'une figure supposée construite à ses conditions de construction, et plus généralement d'un projet à ses conditions de réalisation ?

Nous sommes ici très près des choix qu'assume le chercheur ou l'ingénieur, quand il opte pour un itinéraire d'investigation, mais aussi l'homme d'action quand il adopte une tactique : c'est l'imagination des possibilités opératoires et le sens des conditions de réalisation qui les orientent.

Les futurs techniciens, comme tous ceux qui seront des réalisateurs, doivent être entraînés à penser ainsi. Pour réussir, il ne leur suffit pas de savoir déduire rigoureusement ou de combiner des relations : il leur faut aussi discerner les conditions de réalisation, ce qui implique un dévéloppement de l'imagination opératoire".

Alors, la distinction entre travail manuel et travail intellectuel paraît bien fallacieuse. Que ce soit à l'atelier, dans la classe de mathématiques ou à la maison (pour gagner le temps précieux de l'école), la construction d'objets géométriques est une activité manuelle qui déclenche une activité intellectuelle et qui en tire profit : les deux types d'activités se nourissent mutuellement.

On peut terminer sur le rôle des constructions géométriques en citant la fin d'un texte de l'Académie des Sciences (voir Bulletin APM N° 316 p. 875)

"Les nouveaux programmes, et tout spécialement leur partie géométrique, mettent l'accent sur l'utilisation de l'acquis intuitif des élèves. La théorie n'est pas un but en soi, mais un outil pour répondre à des questions que pose la vie : technologie, physique, économie...

De ce point de vue l'analyse de situations et la résolution de problèmes jouent un rôle majeur. En particulier l'enseignement de la géométrie est indissociable de la recherche de constructions géométriques".

(II) QUELQUES PROCEDES POUR CONSTRUIRE DES POLYEDRES

Heuristique

1) Constructions par découpage du volume dans un matériau épais : du "massif" !

a) On peut penser au bois ou au métal, mais un minimum d'outillage s'impose. En tout cas, les solides construits par une classe qui dispose d'un atelier peuvent être prêtés à d'autres classes pour donner lieu à des activités d'observation, description, dessin, classement.

b) On pensera aussi au "fil à couper le beurre"

"Le polystyrène expansé peut être coupé par un fil de nickel-chrome chauffé en lui appliquant une tension de quelques volts. Il existe dans le commerce de petits appareils vendus sous le nom de "pyroscie" qui se branchent sur un appareil à pyrograver, ... et des plaques de toute épaisseur : 1 cm, 5 cm, 10 cm, 20 cm par exemple, dans lesquelles il est possible de découper des solides : prismes, pyramides, polyèdres divers, cylindres, cônes et autres surfaces réglées.

Dans un groupe de l'IREM de CLERMONT, nous utilisons une table inclinable. Elle permet de réaliser tel dièdre qui nous convient. Nous avons réalisé ainsi divers polyèdres réguliers".

Pour plus de détails sur cette table inclinable, on consultera l'article de Charles PEROL dans le compte rendu de la réunion de coordination des équipes OPC de la Recherche Pédagogique : *"L'Enseignement de la géométrie en 4ème et 3ème, ses objectifs, leurs approches"* (Le Bois, 28 et 29 Mai 1976).

Technique - Classificatoire - Critique et logique

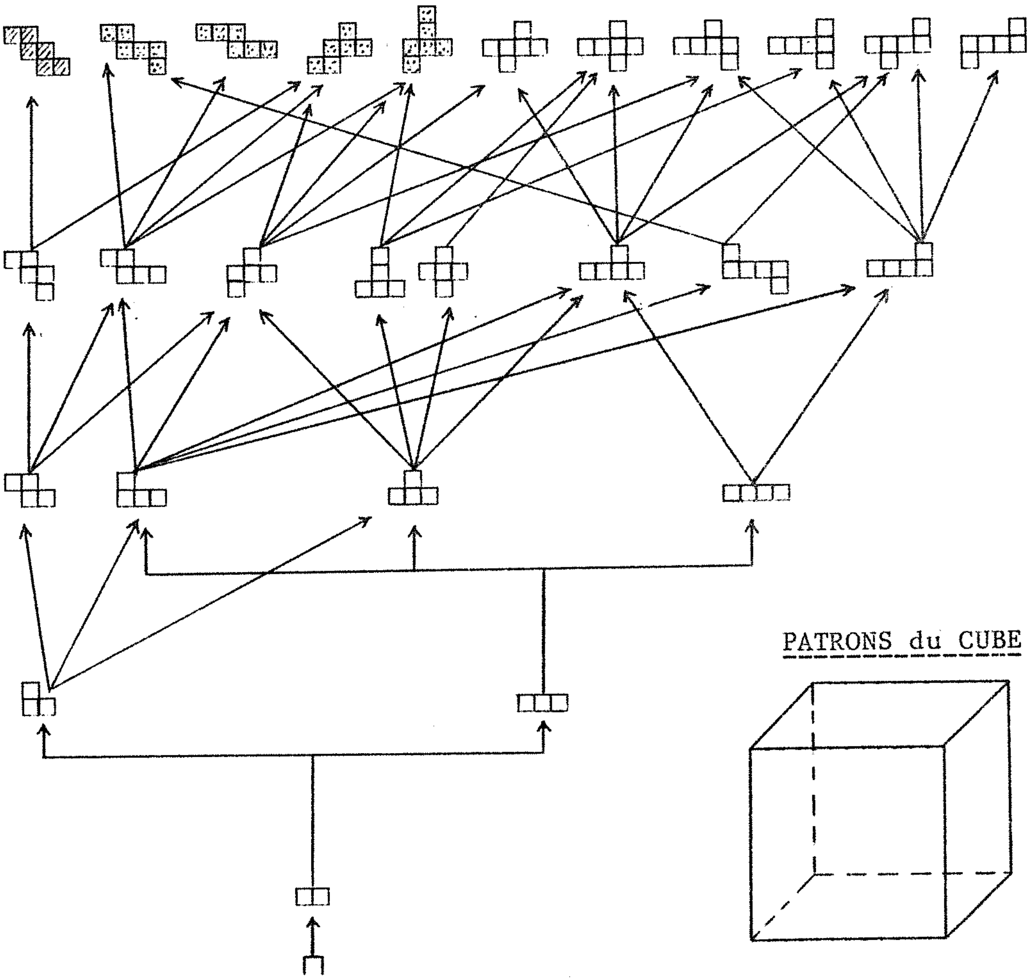
2) Constructions par les faces (réalisables par les élèves)

a) Traditionnellement, on dessine un patron du polyèdre sur une feuille de carton et on prévoit des onglets pour coller

On peut demander de prévoir tous les patrons possibles d'un même solide. A titre d'exemple, le schéma de la page suivante, extrait du n° 15-16 du *"Petit Archimède"* nous explique pourquoi le cube admet exactement 11 patrons différents.

Question d'un élève (de seconde) : *Y-a-t-il un patron pour lequel on aura moins de côtés à coller ?*

Trouve tous les patrons du tétraèdre régulier, de l'octaèdre. Au delà, cela devient très vite inextricable.



PATRONS du CUBE

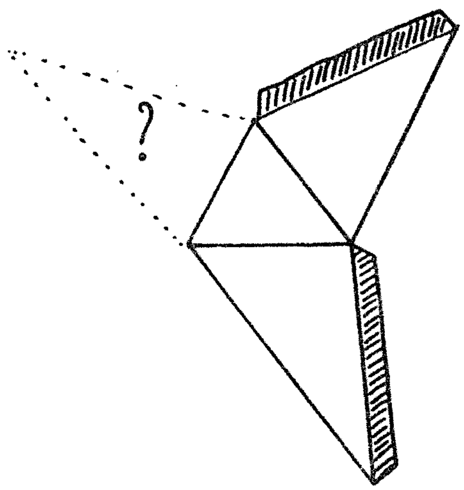
Patrons possédant en plus des alignements des 2 carrés

... 3 carrés

... 4 carrés

Technique et Critique

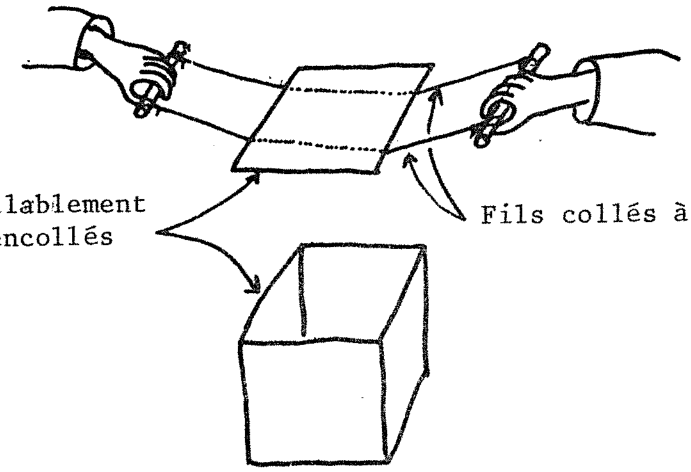
Trouve la face qui manque à ce tétraèdre irrégulier



L'expérience prouve que certains élèves se trompent en dessinant le patron et ne comprennent pas leur erreur tant que le carton reste à plat. L'erreur n'apparaît qu'au moment de la réalisation effective du solide. On fera donc construire à plat puis en volume toutes sortes de patrons de toutes sortes de solides réguliers ou non. Les modèles abordent dans les manuels et surtout dans le chapitre 3 de "Modèles Mathématiques" (Cundy et Rollet - CEDIC).

b) La méthode que Alan HOLDEN préconise et décrit dans *"Formes, espace et symétries"* consiste à découper séparément toutes les faces dans du carton (ce qui va très vite en utilisant une cisaille et des gabarits), et à les assembler en collant les bords, sans onglet, avec du ruban adhésif ou plutôt une colle à prise lente permettant un ajustage précis. Ce système permet de remplacer le carton par des feuilles de plastique coloré ou transparent voire par du plexiglass.

Souvent, la difficulté consiste à poser la dernière face. Voici la solution trouvée par un collègue du sud de la Charente :



Après, on coupe les bouts de fils qui dépassent.

c) Enfin, on peut fabriquer ou trouver dans le commerce(*) des polygones de carton dont chaque arête est munie d'une languette permettant l'assemblage à l'aide d'un élastique. Cette technique permet de réutiliser les mêmes faces dans d'autres constructions.

Ces constructions par les faces permettent de saisir pourquoi il n'y a que cinq polyèdres réguliers (appelés "solides de Platon", sans doute en l'honneur du texte étudié à la fin de ce fascicule).

Pour ce travail, nous reproduisons ici deux pages du *"Thème Cube"* publié par l'IREM de POITIERS en Octobre 1978.

Technique (assemble...) et traductif (combien...)

α) Découpe des triangles équilatéraux

1 - Assemble-les de façon que chaque sommet du solide que tu vas construire soit constitué par 3 triangles

Combien de faces le solide obtenu a-t-il ?

Combien de sommets ?

Combien d'arêtes ?

Ce solide est un tétraèdre (tétra veut dire quatre, èdre veut dire face plane).

(*) La librairie OCDL vend (pour 25 F en 1978) des pochettes de 36 triangles, 12 carrés, 12 pentagones et 4 hexagones dont les arêtes sont de même longueur et munies d'une languette.

2 - Recommence mais cette fois chaque sommet est constitué par 4 triangles et réponds aux mêmes questions que précédemment.

Ce solide est un octaèdre.

3 - Recommence, chaque sommet étant consitué par 5 triangles.

Ce solide est un isocaèdre.

Critique - Logique - Classificatoire - Prédictif

Que se passe-t-il si tu veux assembler 6 triangles pour former chaque sommet ?

Essaie d'expliquer pourquoi ?

β) Quand tu as étudié le cube, combien de faces fallait-il assembler par sommet ? Que ce serait-il passé si tu avais pris 4 carrés pour former chaque sommet ? Essaie d'expliquer pourquoi ?

γ) Découpe des pentagones et assemble-les de façon à ce que chaque sommet soit formé par 3 pentagones.

Combien as-tu de faces ? de sommets ? d'arêtes ?

Tu as obtenu un dodécaèdre

Que se passerait-il si tu voulais assembler 4 pentagones par sommet ?

Forme d'1 face	Nbre de faces	Nbre d'arêtes	Nbre de sommets	Nom du Polyèdre
Tri. équilatéral				
"				
"				
Carré				
Pentagone				

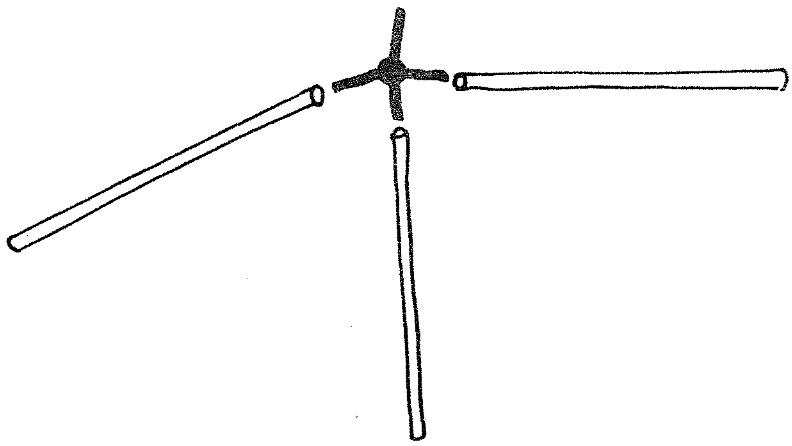
Les polyèdres réguliers sont les cinq "polyèdres de Platon"

δ) Y-a-t-il d'autres polygones pouvant donner un polyèdre régulier ? Essaie avec des hexagones. Peux-tu expliquer ce qui se passe ?

Technique - Prédictif - Logique

3) Constructions par les arêtes

a) Une fois de plus, le commerce y a pensé : on vend (assez cher) des jeux de pailles qui matérialisent les arêtes en s'assemblant par les extrémités à l'aide de rotules plastiques.



Malheureusement (pas pour tout le monde !) ces rotules finissent par casser sous les doigts des enfants.

Ce matériel permet cependant d'amorcer un travail quantificatif et prévisionnel. On demandera à l'élève de prévoir le nombre de pailles et de rotules dont il aura besoin pour réaliser tel ou tel polyèdre. La prévision devra être justifiée avant de commencer la construction et vérifiée après.

b) Sans être un bricoleur très talentueux, le maître pourra réaliser des squelettes de polyèdres avec des arêtes de fil de fer soudées aux extrémités.

Les fils de fer seront les tiges rondes qu'utilisent les soudeurs au chalumeau comme apport de métal. Elles sont cuivrées, donc inoxydables et faciles à souder entre elles à l'étain. On les coupe aisément à la longueur voulue avec une scie à métaux ou même avec une scie de ménage.

Calculatoire

Sachant qu'un dm^3 de fer pèse (? voir dictionnaire) et que les tiges mesurent un mètre de longueur, combien y-a-t-il de tiges de 3 mm de diamètre dans un kilogramme ?

En 1978, ce kg coûtait environ 7 F chez votre quincailler. Pour quelques dizaines de francs, vous acheterez un fer à souder, de l'étain et éventuellement de la graisse spéciale pour soudure à l'étain. Ce matériel vous sera utile pour réparer le poste à transistors ou l'électrophone que votre fils aura malmené.

Heuristique et Technique

Dans un groupe IREM d'Angoulême, nous avons ainsi construit quelques polyèdres. Au commencement, nous nous sommes inspirés des photos de *"Formes, espace et symétries"* pages 7 et 9. Il convient de travailler à deux ou trois car une paire de mains ne suffit pas. Faut-il préciser que les stagiaires féminines ont rivalisé d'habileté avec leurs collègues hommes ?

c) On peut remplacer les tiges de fer par des baguettes de bois (allumettes par exemple) et la soudure par de la colle à bois.

Au fait, qui sait faire quatre triangles avec six allumettes ?

d) Voici maintenant une méthode inspirée par la maxime : *"En France, on a peu de crédits, mais on a des idées"* ("Crédits" au pluriel, svp). Y-a-t-il dans l'environnement de l'élève, un matériau gratuit avec lequel il puisse construire ses polyèdres tout en ayant l'envie et l'occasion de faire fonctionner sa matière grise ? Oui, des tubes de stylos à billes , ceux que la France exporte dans le monde entier. Et comment les assembler ? En les enfilant avec l'élastique de la mercière, celui avec lequel les petites filles ont remplacé la corde à sauter de leur mère. C'est ce procédé de construction que nous développons maintenant.

III A VOS STYLOS, PRETS, PARTEZ !

(comme si vous y étiez)

Les élèves ont déjà vu et décrit des polyèdres. Ils savent ce qu'est une face, une arête, un sommet - ce qui a permis d'approcher les notions de plan, de droite et de point.

Peut-être connaissent-ils déjà les cinq polyèdres réguliers s'ils ont fait le travail indiqué à la fin du II 2).

Depuis plusieurs semaines, le maître leur a demandé de récolter le plus grand nombre possible de tubes de stylos à billes. Nul ne sait comment ils se sont débrouillés mais les trousses en sont pleines à craquer. Certains tubes mangés à un bout ou cassés à l'autre sont mis de côté ; plus tard on sciera la longueur récupérable.

Heuristique - critique - technique

Avec ces tubes, nous allons construire des polyèdres. La discussion s'engage sur la manière d'assembler les tubes. On pourrait passer un fil à l'intérieur et faire des nœuds aux extrémités. Oui, mais quel genre de fil ? Avec une ficelle raide, le polyèdre finira par prendre du jeu, même s'il est bien serré au montage. Alors nous prendrons de l'élastique. Du rond ou du plat ? Peut-être que les nœuds tiennent mieux avec du plat, mais le rond convient aussi.

Le maître a acheté de l'élastique avec les crédits d'enseignement. Il en donne environ un bon mètre à chaque groupe de deux ou trois élèves. Par la suite, les élèves s'en procureront eux-mêmes.

Et c'est parti ! Chaque groupe choisit un polyèdre et entreprend la construction. Les uns vont réaliser un tétraèdre, d'autres un cube, d'autres un octaèdre, d'autres une pyramide...

On tricote fièvreusement... Puis :

- "M'sieur, est-c'qu'on peut couper l'élastique ?"
- "M'sieur, y faut passer deux fois par le même tube" (1)

Précisons alors la règle du jeu : Ne pas couper l'élastique et, autant que possible, ne pas passer deux fois par le même tube.

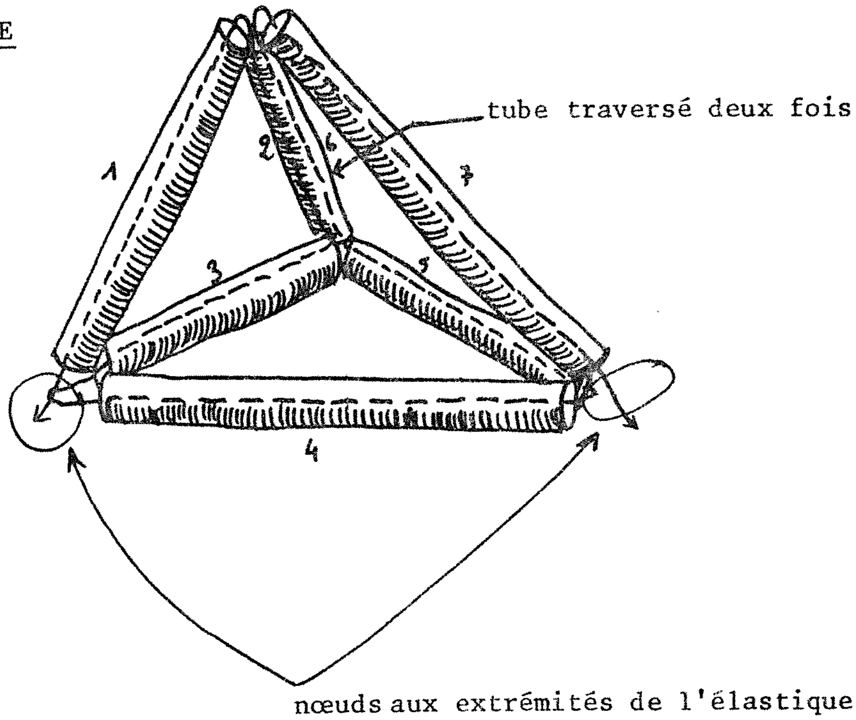
On se remet à l'ouvrage, mais dans la plupart des polyèdres achevé, l'élastique passe deux fois par un ou plusieurs tubes.

Ce travail (est-ce un "travail" ?) sera poursuivi assez spontanément à la maison (2)

Traductif - Technique

Et voilà les meilleures réalisations :

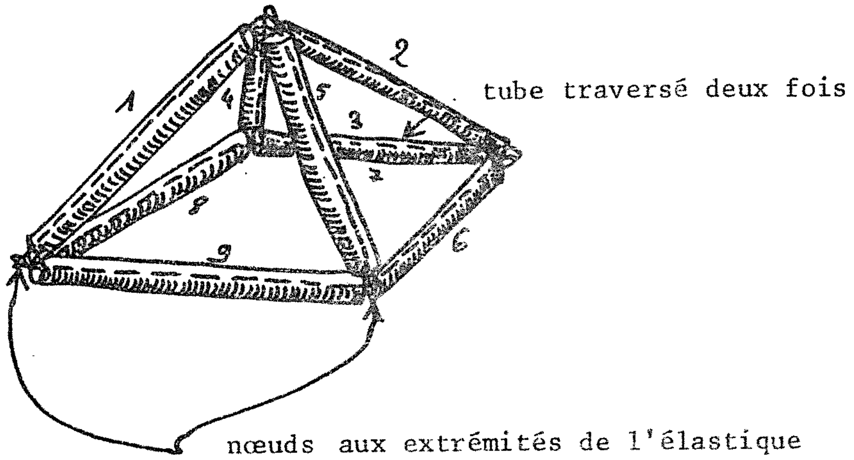
TETRAEDRE



(1) Si le lecteur ne s'est pas encore initié à ce procédé de construction, nous lui suggérons de s'arrêter un instant pour essayer, par exemple, avec six tubes de stylos et un bout de ficelle - s'il n'a pas d'élastique - de monter un tétraèdre.

(2) Si certains passages sont romancés, cette phrase, elle, est conforme à l'expérience.

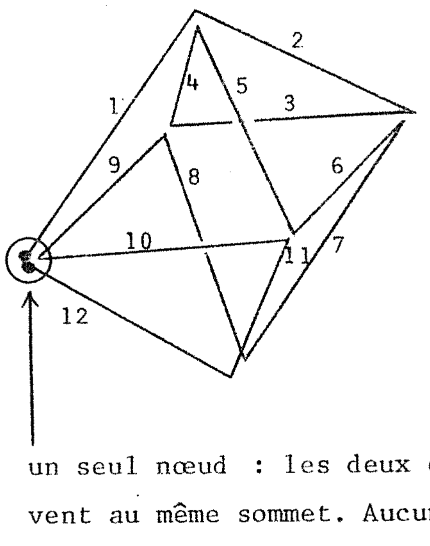
PYRAMIDE A BASE CARREE



Les dessins étant longs, difficiles et peu clairs, on s'achemine vers un mode de représentation plus efficace.

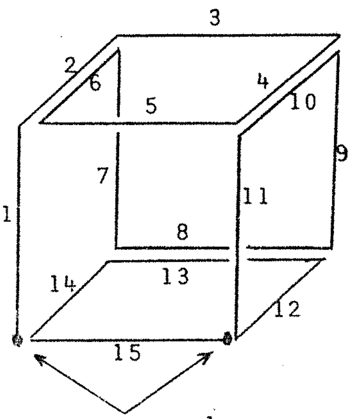
Contentons-nous maintenant du schéma de l'élastique. Comme précédemment, les numéros indiquent le sens du parcours.

OCTAEDRE



un seul nœud : les deux extrémités de l'élastique se retrouvent au même sommet. Aucun tube n'est traversé deux fois

CUBE



nœuds aux extrémités de l'élastique.

3 tubes sont traversés deux fois.

Remarque :

On peut faire d'autres nœuds aux sommets intermédiaires pour renforcer la solidité du montage.

Classificatoire - Logique - Critique - Prédictif

Grâce à ce procédé de construction, on observe que certains polyèdres sont déformables et que d'autres sont rigides. Lesquels ?

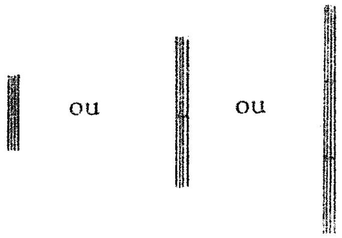
Qu'est-ce qui caractérise les polyèdres rigides ? Toutes leurs faces sont triangulaires.

Application : regarde les pièces des charpentes métalliques, les bras des grues... Cite un autre polyèdre rigide. On pourra construire les deltaèdres, c'est-à-dire les polyèdres à faces triangulaires. Ils sont présentés sur *"Formes, espace et symétries"* page 9.

La pyramide à base carrée est déformable ; l'octaèdre qui est formé de deux pyramides ayant la même base carrée est indéformable. Pourquoi ?

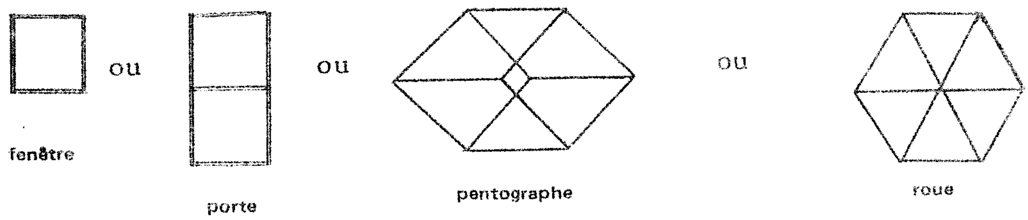
Le cube est un vrai pantin articulé. Avec lui, que peut-on faire ?

- <u>des figures linéaires</u> :

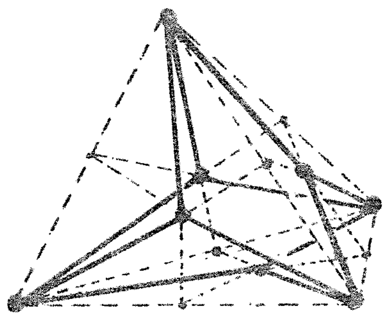


bâtons de longueurs 1, 2 ou 3

- <u>des figures planes</u> :



- <u>et dans l'espace</u> :



Chaque arête du cube devient le segment joignant un sommet et le centre de gravité d'une face dans un tétraèdre régulier.
Pour continuer, on laisse jouer les doigts et l'imagination.

Heuristique - Critique

Mais une question persiste, obsédante. Peut-on construire tous les polyèdres comme on a construit l'octaèdre, c'est-à-dire sans que l'élastique ne passe deux fois par le même tube ?

Ce problème est difficile et, à moins d'intervention géniale, le maître demandera de suspendre provisoirement le travail sur les polyèdres et proposera une petite excursion du côté de la théorie des graphes.

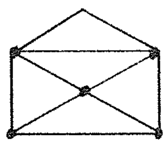
(IV) PROBLEMES DE RESEAUX

Heuristique - Logique

1) Vers l'énoncé d'une propriété mathématique

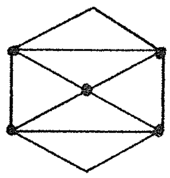
Pour les élèves, le mot "réseau" évoque un réseau routier ou un réseau de lignes de chemin de fer. Il paraît plus simple et plus riche de contenu que le mot "graphe" qui d'ailleurs conviendrait mal ici puisque les segments (ou arcs) que l'on considère ne sont pas orientés.

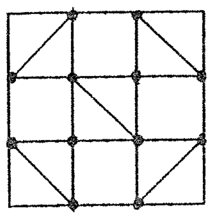
Sais-tu dessiner une enveloppe sans lever le crayon et sans passer deux fois par le même trait ?

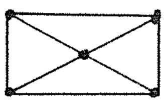


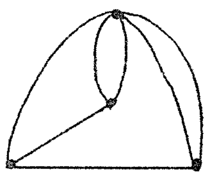
Trouve plusieurs solutions. Quels sont les points de départ et d'arrivée ? Peux-tu les changer ?

Mêmes questions avec ces réseaux









Imagine un réseau qui peut se parcourir entièrement sans lever le crayon et sans passer deux fois par le même trait. Propose-le à un camarade. Imagine aussi un réseau qu'on ne peut pas parcourir...

Prédictif - Logique

A quoi reconnais-tu les réseaux qu'on peut parcourir entièrement sans lever le crayon et sans passer deux fois sur le même trait ? Et ceux pour lesquels on ne peut pas ?

Peut-être faut-il fournir davantage d'indications à certains élèves ou tout simplement donner des exemples plus nombreux et plus faciles au départ. C'est le maître qui en est maître.

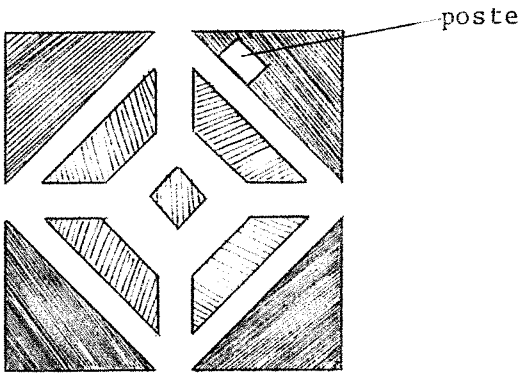
En fin de compte, on énoncera que "un réseau peut se parcourir entièrement sans lever le crayon et sans passer deux fois sur le même trait" signifie que "ce réseau n'a pas plus de deux points où l'on compte un nombre impair de traits" (ces deux points étant alors les deux extrémités du parcours)

En effet, chaque fois qu'on arrive à un point intermédiaire, il faut en repartir par un autre chemin ; en conséquence il doit y avoir un nombre pair de traits à tous les points intermédiaires.

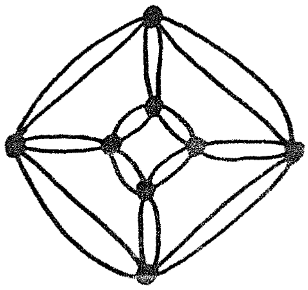
2) Utilisation d'un modèle mathématique connu dans la solution d'un problème

Transfert

a) Le facteur de ce village part de la poste et distribue son courrier en longeant une seule fois les deux côtés de chaque rue avant de revenir à la poste. Indique-lui un itinéraire (le facteur ne traverse les rues qu'aux carrefours).



Comment le réseau suivant permet-il d'affirmer que le facteur peut trouver un itinéraire ?

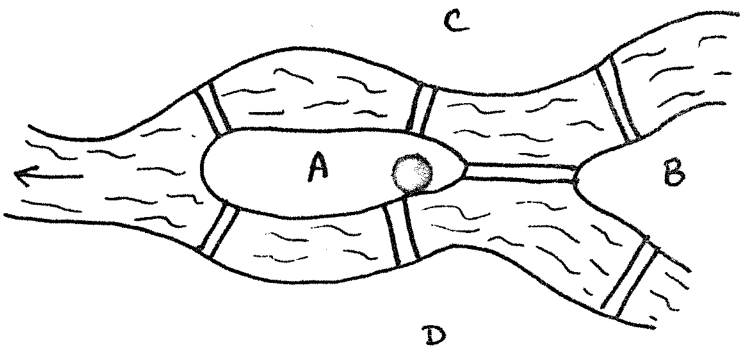


L'inspecteur des Ponts et Chaussées veut examiner l'état des rues du même village. Il lui suffit de passer une seule fois par chaque rue. Peux-tu lui proposer un itinéraire ? Explique bien ta conclusion.

b) Célèbre problème des ponts de Königsberg résolu par Euler en 1736.

Pour les noms propres que tu ne connais pas, consulte le dictionnaire ou un atlas.

Dans la ville de Königsberg, actuellement Kaliningrad, coulait la rivière Pregel. Les deux îles A et B de la rivière étaient reliées entre elles et aux rives C et D par sept ponts (voir dessin).

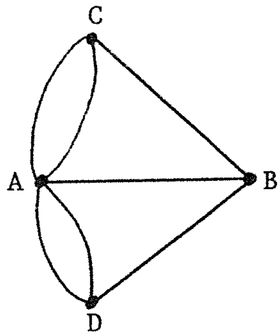


On raconte que les habitants de Königsberg discutaient de la possibilité ou de l'impossibilité de faire une promenade à pied en passant une seule fois par chaque pont. En 1736, personne n'avait encore résolu le problème, mais personne non plus n'avait pu prouver qu'il n'avait pas de solution ?

Et toi, qu'en penses-tu ?

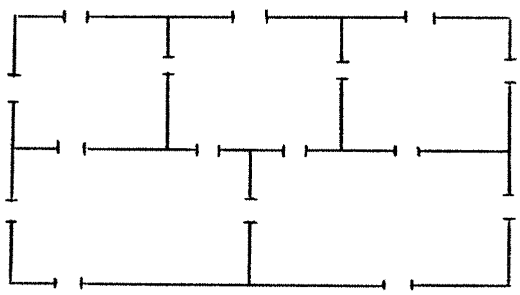
C'est alors que le grand mathématicien EULER donna une réponse définitive (Zorro est arrivé !).

Il indiqua d'abord que faire une promenade à pied en passant une seule fois par chaque pont était équivalent à parcourir entièrement le réseau suivant, sans lever le crayon et sans passer deux fois par le même trait.



Es-tu d'accord et peux-tu achever le raisonnement d'EULER ?

c) Voici <u>une maison</u> de cinq pièces avec des portes dans toutes les cloisons.



Peux-tu trouver un itinéraire qui permettent de franchir une seule fois toutes les portes ?

Justifie ton point de vue.

Critique - Logique

3) Retour vers les polyèdres et les stylos

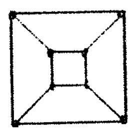
Peux-tu expliquer pourquoi on a construit l'octaèdre sans que l'élastique ne passe deux fois par le même tube ?

Et pour les autres polyèdres ?

A quelle condition peut-on construire un polyèdre sans que l'élastique ne passe deux fois par le même tube ?

Combien de tubes (au minimum) doivent être traversés deux fois dans la construction du cube ?

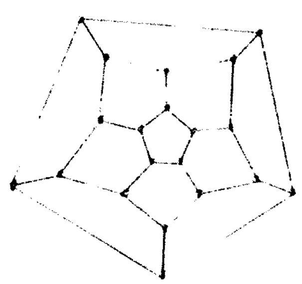
Ton raisonnement sera facilité si tu comprends que les arêtes du cube forment un réseau équivalent à ce réseau plat :

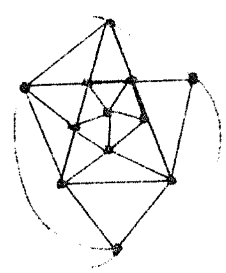


Traductif et Technique

Dessine des réseaux plats équivalents à ceux que forment les arêtes d'un tétraèdre, d'un octaèdre ?

Quels sont les polyèdres dont les arêtes forment des réseaux équivalents à ceux-ci ?





Logique

Peux-tu les construire sans que l'élastique ne passe deux fois par le même tube ?

V JEU DU PORTRAIT

Logique - Classificatoire

Les élèves possèdent maintenant une riche collection de prismes, pyramides et polyèdres, dont quelques uns peuvent être tronqués. Dans chaque groupe un élève sort ou tourne le dos. Les autres choisissent l'un des solides. L'élève sorti revient et doit déterminer le nom du polyèdre en posant des questions auxquelles on répond par oui ou par non. Ces questions porteront sur la forme géométrique des faces, sur le nombre de faces, de sommets ou d'arêtes, sur les symétries, etc...

Le gagnant sera celui qui trouvera avec un minimum de questions. Il devra faire preuve de stratégie, d'ordre, de mémoire, d'habileté à exploiter des informations, il devra aussi s'exprimer avec un vocabulaire précis.

VI UN POLYEDRE EN ENGENDRE D'AUTRES

Technique - Classificatoire

1) Prendre un polyèdre et rejoindre le "centre" de chaque face aux centres des faces adjacentes. On obtient ainsi les arêtes d'un nouveau polyèdre qui est appelé "dual" du précédent.

On pourra observer que cette construction évoque le graphe de la relation "est adjacente à" dans l'ensemble des faces d'un polyèdre.

On fera établir que le dual d'un tétraèdre est un tétraèdre, que le dual d'un cube est un octaèdre et vice-versa ; que le dual d'un dodécaèdre est un icosaèdre et vice-versa.

(voir *"Formes, espace et symétries"* pages 10 à 15).

2) Prendre un polyèdre et rejoindre les milieux de deux arêtes consécutives d'une même face. On obtient les arêtes d'un autre polyèdre qui, cette fois, évoque le graphe de la relation "a un sommet commun avec" dans l'ensemble des arêtes d'un polyèdre.

Le polyèdre obtenu résulte d'une troncature des sommets du précédent (voir *"Formes, espace et symétries"* pages 46 à 48).

Par ce procédé, le tétraèdre donne l'octaèdre, l'octaèdre et le cube donnent le cuboctaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre donnent l'icosidodécaèdre.

Heuristique - Classificatoire - Calculatoire - Prédictif - Critique - Logique

VII DECOUVERTE D'UNE FORMULE

L'intention est de faire découvrir la formule d'Euler (encore lui !) : $f + s = a + 2$ où f, s et a sont respectivement les nombres faces, de sommets et d'arêtes d'un polyèdre quelconque.

Pour conduire cette activité, on pourra s'inspirer d'un article paru sur le n° 2 de PLOT. On y relate le découverte de la formule de PICK dans une classe primaire. On y signale aussi que, quelques temps plus tard, les enfants entraînés par la recherche de la formule de PICK surent découvrir celle d'Euler avec assez de facilité !

Les élèves examinent leur nombreux polyèdres réguliers et irréguliers. Ils remplissent un tableau :

Nom du polyèdre (s'il y en a un)	f	s	a
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

Après quelques lignes, ils conjecturent une formule. Est-elle bonne ? Ils la testent sur un autre polyèdre. Si elle "ne marche pas" avec le nouveau polyèdre, elle est rejetée. Si elle "marche", on la teste encore. Les polygones de carton munis de languettes permettant un assemblage rapide par des élastiques (voir II - 2 - c) sont tout indiqués pour la confrontation expérimentale d'une formule conjecturée avec la réalité.

On retiendra la formule qui n'a pas pu être mise en défaut ; mais on fera bien comprendre que cela ne constitue pas une démonstration et que la question n'est donc pas close.

Si le maître sait ne pas être trop directif, les élèves découvriront peut-être une formule inattendue. Cette belle aventure s'est produite en Janvier 1979 dans une classe de 5ème près d'Angouleme. Un mathématicien "en culottes courtes" prétendait que $\frac{n \times s}{2} = a$ où n est le nombre de faces par sommets, s le nombre de sommets et a le nombre d'arêtes.

Tiens, tiens ! ? ?

Bien sûr, il faut se contenter des polyèdres ayant le même nombre n de faces à tous leurs sommets.

On s'est penché sur la question dans le groupe IREM.

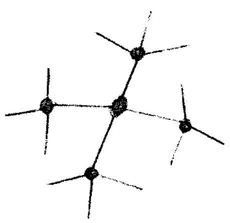
Essayons avec les cinq solides réguliers de Platon : ça marche !

Essayons aussi avec les solides semi-réguliers d'Archimède (voir *"Formes, espace et symétries"* page 52) : ça marche encore !

On tâchera donc de trouver une démonstration générale.

Et au cours de la semaine suivante, un collègue démontre la formule.

Il a remarqué que le nombre n de faces par sommets est aussi le nombre d'arêtes par sommets.



Pour 1 sommet, il y a n arêtes
($n = 4$ sur le dessin)

Pour s sommets, il y a $\frac{n \times s}{2}$ arêtes
(car une arête relie 2 sommets)

Le nombre d'arêtes est donc $a = \frac{n \times s}{2}$

En particulier, cette formule est vraie pour tout polyèdre tronqué car, après troncature des sommets d'un polyèdre quelconque, les nouveaux sommets ont tous 3 faces (ou 3 arêtes).

Mais, diriez-vous, quel est l'intérêt de cette formule ? Probablement aucun, sauf que, pendant ce temps, les élèves et aussi leurs professeurs - ce qui est peut-être encore plus rare - ont "fait" des maths, et librement.

Remarque :

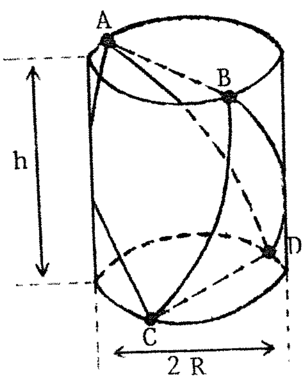
En plus de certains calculs d'aires et de volumes, la formule d'Euler est susceptible de fournir quelques exercices calculatoires dans ce thème à dominante géométrique.

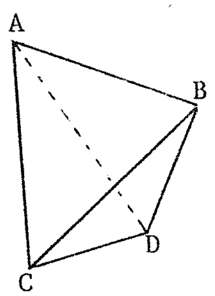
VIII UN PEU DE GEOMETRIE ET DE CALCUL : DU CLASSIQUE !

Logique et calculatoire

Lorsque les élèves connaîtront le théorème de Pythagore et les calculs sur les radicaux ils développeront leur aptitude à bien voir l'orthogonalité dans l'espace en calculant le volume de l'octaèdre et du tétraèdre régulier en fonction de la longueur de l'arête. Ce travail atteindra les mêmes objectifs pédagogiques que le traditionnel calcul de la diagonale du cube.

On s'attaquera également au problème du berlingot de lait. Les berlingots de lait appelés "tétrapack" sont fabriqués à partir d'une surface latérale de cylindre en carton. On la déforme comme l'indique le schéma pour obtenir un tétraèdre. Il suffit de coller sur deux arêtes.





Le rayon du cylindre étant R , calculer en fonction de R la hauteur h pour que le tétraèdre soit régulier.

Calculer ensuite R pour que ce tétraèdre contiennent un litre (on négligera l'épaisseur du carton).

(IX) LES POLYEDRES HORS DES MATHEMATIQUES

Transfert - Interdisciplinarité

1) Architecture, technologies de l'homme et des abeilles, jeux et sports.

Qu'est-ce qui a la forme d'une pyramide ? Nos clochers d'églises sont souvent des pyramides à base carrée ou octogonale. Certains toits de pigeonniers aussi. Et naturellement, il y a les pyramides d'Egypte. Sur ce sujet, on peut calculer des volumes, des aires ou des masses de matériau (voir Galion de 5ème).

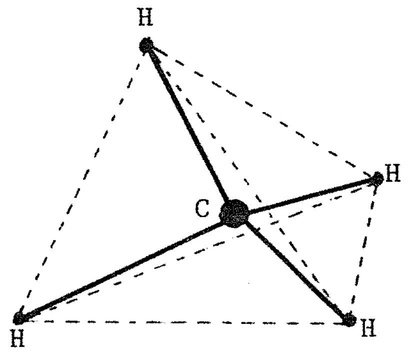
Qu'est-ce qui a la forme d'un prisme ? Une règle, un plumier, toutes sortes de boîtes. Les alvéoles des abeilles ont une section hexagonale (voir le *"Petit Archimède"* N° 53-54 - page 36 à 39), les tubes de stylos utilisés au II également, les écrous à six pans aussi, etc...

A la fois prisme et polyèdre régulier, le cube est bien connu des petits enfants.

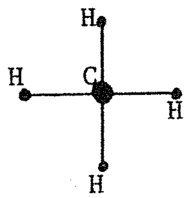
Les ballons de volley-ball sont des dodécaèdres (gonflés). Quant aux ballons de football "32 faces", ce sont des icosaèdres tronqués : par troncature des sommets, les 20 triangles d'un icosaèdre deviennent 20 hexagones et les 12 sommets font place à 12 pentagones.

2) Chimie

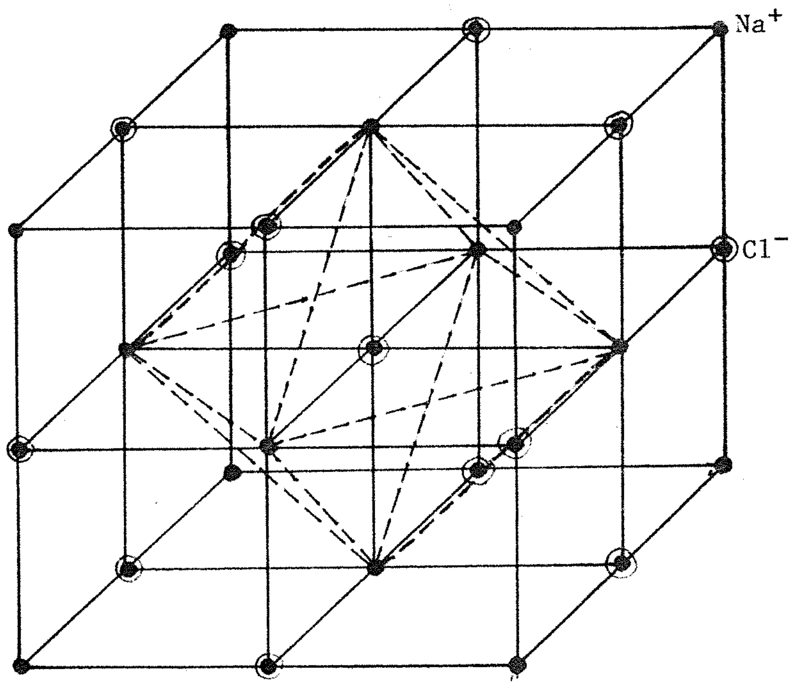
Le livre de chimie de la classe de seconde nous apprend que la molécule de méthane CH_4 correspond à un schéma tétraèdrique : les quatre atomes d'hydrogène sont placés aux sommets d'un tétraèdre dont le centre de gravité serait occupé par l'atome de carbone.



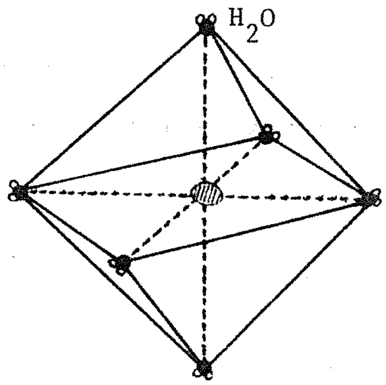
Cette représentation permet de donner de la géométrie de la molécule, une image plus correcte que la représentation plane de naguère



Savez-vous aussi qu'un cristal de chlorure de sodium est un assemblage d'ions sodium Na^+ et d'ions chlore Cl^- régulièrement répartis aux sommets de cubes juxtaposés ? Ainsi, chaque anions Cl^- (respectivement, cation Na^+) est entouré par six cations Na^+ (respectivement : anions Cl^-) disposés aux sommets d'un octaèdre régulier dont il est le centre.



Plus loin, on indique qu'en solution aqueuse, de nombreux cations sont hexahydratés : c'est-à-dire que six molécules d'eau se fixent sur chacun de ces ions en se plaçant aux sommets d'un octaèdre dont l'ion est le centre.



Dans *"Mathématiques en instantanés"* page 208, Steinhauss note que le cristal de pyrite Fe S_2 ressemble au dodécaèdre régulier, et la photo est frappante. Il signale aussi des formes polyédrales plus compliquées pour d'autres cristaux.

Epistémologie

3) Histoire, Art, Philosophie

Dans *"Mathématiques et Mathématiciens"* (Ed. Magnard), P. Dedron et J. Itard écrivent que les cinq solides platoniciens semblent connus depuis une antiquité fort reculée. En 1885, on découvrit près de Padoue un dodécaèdre régulier étrusque paraissant remonter à la première moitié du premier millénaire avant notre ère. Dans le musée Sainte Croix de Poitiers, on remarque des dodécaèdres gallo-romains. Ils sont métalliques et creux. Leurs faces sont percées de trous circulaires de divers diamètres. Leurs sommets portent de petites sphères. L'utilisation de ces objets est mystérieuse. Ne ratez pas cette visite.

Merveilleux dodécaèdre admiré des anciens, redessiné par Léonard de Vinci pour illustrer la *"Divina Proportione"* de Luca Pacioli en 1509, gravé par Escher au 20ème siècle et recyclé aujourd'hui en calendrier de bureau, chaque mois de l'année étant imprimé sur une face.

Voici, pour terminer ce texte extrait du *"Timée"* de Platon. L'auteur fait parler le pythagoricien Timée qui expose ses théories devant Socrate. Et l'on partage l'amusement de Platon devant les élucubrations pythagoriciennes.

Un volume est déterminé par la surface qui l'entoure

Un plan est une réunion de triangles

Tout triangle se décompose en deux triangles rectangles

Il y a deux sortes de triangles rectangles : ceux qui sont isocèles et ceux qui ne le sont pas

Les 4 corps seront le cube, le tétraèdre, l'octaèdre et l'icosaèdre réguliers

Pour commencer, donc, le feu, la terre, l'eau et l'air sont des corps ; voilà qui est évident, sans doute et pour quiconque ; or, un corps de toute forme a aussi de la profondeur, mais la profondeur à son tour, de toute nécessité, est enveloppée par de la surface ; et, quand elle est rectiligne une surface plane, servant de base, se décompose en triangles. Quant aux triangles, tous ont leur principe dans deux triangles, ayant l'un et l'autre un angle droit, et deux angles aigus : ceux-ci, dans le premier cas, sont deux moitiés d'angles droit adjacentes à des côtés égaux ; dans le second, ils sont de l'angle droit deux portions inégales opposées à des côtés inégaux. Voilà quel est le principe du feu et des autres corps, dans notre hypothèse ; à partir de là, nous allons avancer par l'enchaînement nécessaire d'un raisonnement vraissemblable. Veut-on des principes encore plus reculés ? Dieu les connaît, et, parmi les hommes, qui est aimé de lui. Il nous faut donc expliquer de quelle nature peuvent être les corps les plus beaux, au nombre de quatre, dissemblables entre eux, mais capables, du moins certains d'entre eux, de s'engendrer les uns des autres en se dissolvant ; si nous y parvenons, nous aurons la vérité sur la genèse de la terre et du feu et de leurs intermédiaires proportionnels. Car il est un point que nous n'accorderont à personne : c'est qu'on puisse voir quelque part des corps plus beaux que ceux-ci, représentant chacun un genre distinct. Voici donc quel doit être le but de nos efforts :

les quatre genres de corps qui se distinguent par leur beauté, en faire la construction et déclarer que nous en avons saisi,

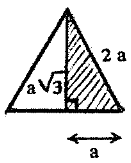
Les triangles rectangles isocèles sont semblables entre eux

comme il faut, la nature. Des deux triangles dont nous parlions, celui qui est isocèle n'a qu'une seule nature en partage ; celui

Ce n'est pas le cas des autres

qui est allongé en a une infinité : il nous faut donc, dans cette infinité encore, préférer le plus beau, si nous entendons commencer suivant le procédé voulu. Si donc quelqu'un en peut, d'après son choix, indiquer un plus beau pour la construction de ces corps, nous ne verrons pas en lui un adversaire, mais un ami, et reconnaîtrons sa victoire. Nous posons donc que, de cette multitude de triangles, il en est un, le plus beau de tous, et nous passons par dessus tous les autres : c'est celui dont deux en constituent un troisième, le triangle équilatéral. Pourquoi celui-là ? l'expliquer serait trop long ; mais à qui y fera reproche et de ses dires révèlera le bien fondé, nous remettons amicalement le prix. Donnons donc la préférence à deux triangles dont le corps du feu et ceux des autres genres seraient constitués : l'un est isocèle, l'autre a toujours son plus grand côté triple, en puissance, du plus petit.

Parmi les triangles rectangles non isocèles, le plus beau est celui qui est moitié du triangle équilatéral



La «puissance» du grand côté (de l'angle droit) est $(a\sqrt{3})^2 = 3a^2$; c'est le triple de la «puissance» du petit côté a^2

Ce qui a été dit plus haut de façon indistincte, il nous le faut maintenant préciser davantage. Les quatre genres, en effet, à travers leurs transformations réciproques paraissaient tous avoir un mutuel devenir ; mais c'était une apparence inexacte : il naît bien, en effet, des triangles auxquels nous avons donné la préférence, des genres au nombre de quatre ; mais trois proviennent d'un seul, celui qui a les côtés inégaux ; le quatrième est seul et unique à tenir du triangle isocèle sa structure. Il n'est donc pas possible que ces corps se résolvant tous les uns dans les autres, un grand nombre de petits donnent naissance à un petit nombre de grands, et inversement ; mais pour les trois premiers, la chose est possible. C'est en effet d'un seul élément qu'ils tirent tous leur nature et, quand se disolvent les plus grands, avec les mêmes éléments un grand nombre de petits se constituent en recevant la figure qui leur convient ; et des petits, quand inversement un grand nombre s'émiette en triangles,

Timée va montrer comment les tétraèdres, octaèdres et icosaèdres naissent du triangle qui est la moitié du triangle équilatéral, alors que le cube naît du triangle rectangle isocèle

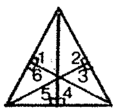
Le dernier paragraphe du texte éclairera ceci : il s'agit de la manière dont les quatre éléments (feu, terre, eau, étain) se transforment les uns en les autres

de cette multitude peut surgir l'unité d'un nombre, celui d'un volume unifié, et toute grande se réaliser par là une autre forme dans son unité.

Quel solide correspond à chacun des quatre éléments ? Par combien de triangles élémentaires ces solides sont-ils constitués ?

Mais en voilà assez sur leur génération mutuelle ; sous quelle forme, maintenant, s'est réalisé chacun d'eux, et de la rencontre de quels nombres, voilà ce qu'appelle la suite de notre discours. Voici pour commencer la forme qui vient en premier et qui est la plus petite par sa constitution ; elle a pour élément le triangle dont l'hypothénuse a une longueur double

Avec 6 des triangles rectangles non isocèles choisis précédemment, on forme un triangle équilatéral



du plus petit côté. Deux triangles de cette sorte étant juxtaposés par leur hypoténuse, et trois de ces figures étant rassemblées de manière que les hypoténuses et les petits côtés concourent en un même point comme en un centre, il forme un triangle équilatéral unique à partir des triangles élémentaires au nombre de six. De ces triangles équilatéraux si l'on réunit quatre,

4 triangles équilatéraux forment un tétraèdre régulier

avec chaque groupe de trois angles plans on forme un angle solide, qui fait immédiatement suite à l'angle plan le plus obtus ; avec quatre de ces angles ainsi formés se trouve constituée la première forme solide, qui a la propriété de diviser la sphère où elle est inscrite en parties égales et semblables.

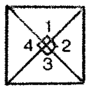
8 triangles équilatéraux forment un octaèdre régulier (qui a 6 sommets)

La deuxième est constituée des mêmes triangles élémentaires, qui s'unissent en huit triangles équilatéraux pour former avec quatre plans un angle solide ; il se forme six de ces angles, et le deuxième corps arrive ainsi à son accomplissement.

L'icosaèdre a 12 sommets et 20 faces qui sont des triangles équilatéraux, chacun formé avec 6 triangles élémentaires. Il faut donc 120 triangles élémentaires pour faire l'icosaèdre

Le troisième est fait de l'assemblage de cent vingt éléments ; il est formé de douze angles solides, délimités chacun par cinq plans qui sont des triangles équilatéraux, et il y a vingt bases qui sont des triangles équilatéraux. Et le premier élément fut quitte de sa tâche

4 triangles rectangles isocèles forment un carré



après avoir engendré ces corps ; et ce fut au triangle isocèle d'engendrer la nature du quatrième : de tels triangles, se réunissant par quatre, faisant coïncider en un centre les sommets de leurs angles droits, réalisèrent par chacun de ces groupements,

6 carrés forment un cube (qui a 8 sommets)

un quadrilatère équilatéral ; six figures de cette sorte, par leur assemblage, aboutissent à former huit angles solides, composés chacun des trois angles plans qui sont droits ; la figure

Bien embarassé pour expliquer la formation du dodécaèdre régulier, Timée laisse cette tâche à Dieu

du corps ainsi constitué fut celle du cube, qui a pour bases six surfaces quadrangulaires équilatérales. Il restait encore une combinaison, la cinquième ; c'est à l'univers que le Dieu en fit application, pour en dessiner l'épure.

A la terre correspond le cube qui est le plus stable des 4 polyèdres décrits

 est plus stable que  ; et un carré est plus stable qu'un triangle équilatéral

A la terre, précisément, attribuons la forme cubique : le plus immuable, en effet, des quatre genres, c'est la terre et, des corps, le plus plastique ; or ces propriétés appartiennent principalement, c'est une nécessité, à celui qui a les bases les mieux assises. Or, en fait de base, parmi les triangles pris à l'origine pour hypothèse, ceux qui ont les côtés égaux en fournissent une naturellement mieux assise que ceux qui les ont inégaux ; et, des deux surfaces équilatérales constituées à partir de chacun d'eux, le carré et le triangle, la première dans ses parties et dans son ensemble, est plus stable nécessairement comme base. Aussi en attribuant cette figure à la terre, sauvons nous la vraissemblance de notre raisonnement.

eau	air	feu
↕	↕	↕
icosaèdre	octaèdre	tétraèdre

⟶

ordre croissant en mobilité, taille, acuité et agilité (d'autant plus grande que le nombre de faces est plus petit)

Voir l'illustration de la page de couverture

L'eau, à son tour, se verra attribuer des formes restantes la plus difficilement mobile ; la plus facilement mobile sera pour le feu, la forme intermédiaire pour l'air. De même le corps le plus petit reviendra au feu, le plus grand au contraire à l'eau, le moyen à l'air ; le plus aigu, enfin, ira pour le feu, le second à cet égard pour l'air, le troisième pour l'eau. Or entre tous ces corps, c'est celui qui a le plus petit nombre de bases qui est nécessairement de sa nature le plus mobile, étant de partout le plus tranchant et le plus aigu de tous ; il est en outre le plus agile, étant constitué du plus petit nombre des mêmes parties. Celui qui vient en second, avec un plus grand nombre de bases, à l'égard de ces propriétés a aussi le second rang ; à cet égard, le troisième rang est à celui qui a le plus grand nombre de bases. Concluons donc que, selon la droite raison comme selon la vraissemblance, le solide en forme de pyramide est l'élément et le germe du feu ; le second dans l'ordre de la genèse, disons qu'il est celui de l'air ; le troisième, celui de l'eau. Tous ces solides donc, il les faut concevoir assez petits pour que, pris un à un, dans chaque genre, *à cause de sa petitesse aucun ne soit vu par nous ; tels cependant que, rassemblés en grand nombre, les masses qu'ils forment soient visibles...*

La terre, quand elle se rencontre avec le feu et qu'elle est décomposées par son acuité, peut être entraînée, soit dans le feu lui-même, après dissolution, soit dans une masse d'air ou d'eau suivant les rencontres, jusqu'à ce que ses parties, venant à se rencontrer de nouveau s'ajustent les unes aux autres pour reformer de la terre (car jamais elles ne sauraient aboutir à une autre forme) ; quant à l'eau, divisée par le feu, ou encore par l'air, elle peut donner par recomposition un corpuscule de feu et deux d'air ; et les fragments de l'air, pour la décomposition d'une seule particule, donnent deux corpuscules de feu...

Le cube ne peut pas engendrer l'un des 3 autres polyèdres

1 eau = 1 feu + 2 airs
20 faces d'icosaèdre
= 4 faces de tétraèdre
+ 2 × 8 faces d'octaèdre

1 air = 2 feux
8 faces d'octaèdre =
2 × 4 faces de tétraèdre