

UNIVERSITÉ DE POITIERS

INSTITUT de RECHERCHE
sur l'ENSEIGNEMENT
des MATHÉMATIQUES

Année 1976-1977

ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE

N° 2 - VALEUR ABSOLUE

© Publication de l'IREM de POITIERS
Dépôt légal : 4ème trimestre 1976
ISBN : 2-85954-024-6

R. BARRA - J.J. PENSEC
S. GOUIN - J. BURGAUD

VALEUR ABSOLUE

- Introduction : (causes des difficultés, ce qu'il faut savoir, remèdes ?)
- Deux présentations de la valeur absolue - exercices
- Fonction valeur absolue - exercices
- Propriétés de la valeur absolue - exercices - valeur absolue et relation d'ordre - exercices. Exemples de résolution graphique d'inéquations comportant des valeurs absolues. Sur des exemples densité $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}$
- Vers la continuité (page 18).

INTRODUCTION

C'est un fait que la valeur absolue ne passe pas très bien ; son maniement pose encore des problèmes même à des élèves de première. Pourtant cette notion est introduite très tôt : la valeur absolue est définie dans $\mathbb{Z}$ dès la classe de cinquième, définie et utilisée dans $\mathbb{R}$ en quatrième avec les graduations.

A - CAUSES DES DIFFICULTES

A notre avis il existe au moins deux raisons essentielles qui font obstacle à la compréhension ou à la manipulation.

1°) D'abord le fait que la plupart de nos élèves voient deux composantes dans un nombre (l'âme et le corps) : ils voient dans un nombre, un nombre "pur" (arithmétique ?) et un signe ; et ils croient que lorsque une lettre désigne un nombre, ce nombre est positif. D'où les fautes classiques, combien nombreuses et durables du type : le signe de x est le signe plus, le signe de $-a$ est le signe $-$, fautes que l'on voit ressurgir lors de l'étude de la racine carrée par exemple, et aussi de la valeur absolue.

Il est certain que cette vision fragmentaire du nombre est amenée par l'introduction de $\mathbb{Z}$, où des échos parasites font que l'élève voit un relatif comme un naturel et un signe ; et qu'elle est entretenue plus tard par l'emploi d'expressions du genre : "quel est le signe de ... ?"

2°) Ensuite, le fait que dans la définition : $|x| = \sup(-x, x)$ (ou $|x| = x$ si $x \geq 0$, $|x| = -x$ si $x \leq 0$) n'apparaît pas l'idée essentielle que la valeur absolue est une distance sur $\mathbb{R}$. A partir de cette définition, l'élève ne peut pas se fabriquer une image mentale du sujet, le genre d'image qui permet en général de "voir" ce qui se passe et donc de travailler vite et mieux.

3°) Ajoutons que les fautes relevées dans l'utilisation de la valeur absolue proviennent parfois (ou souvent ?) d'une incompréhension d'autres notions, en particulier de celles d'équations et d'inéquations.

B - CE QU'IL SERAIT SOUHAITABLE QUE L'ELEVE VOIT DANS VALEUR ABSOLUE

Surtout en vue de l'analyse :

1°) Que la valeur absolue est une distance sur $\mathbb{R}$ (et la chance ici est que le mot distance figure dans le vocabulaire courant ; c'est un mot usuel qui pour l'enfant a une signification, presque une réalité ; et même s'il ne sait pas dire correctement ce qu'est une distance, ses idées sur la distance sont bonnes et telles que lorsqu'il recevra la définition mathématique il n'en sera pas autrement surpris ; ce n'est donc pas tellement l'acquisition de la définition du mot distance qui doit être l'objectif mais plutôt la prise de conscience que la valeur absolue est une distance et se manie comme telle).

Avec cette distance on va pouvoir définir, voisinages, et avec eux, limite, continuité.

2°) Que la valeur absolue permet la description d'un intervalle ; il est important que l'élève sache que l'intervalle $]a, b[$ (ensemble des nombres compris pour la relation d'ordre entre a et b est aussi l'ensemble des nombres dont la distance à $\frac{a+b}{2}$ est strictement inférieure à $\frac{b-a}{2}$. Il semble important que l'élève soit habitué à la gymnastique qui consiste à traduire instantanément l'écriture : $|x - a| < r$ par "la distance de x à a est strictement inférieure à r , donc x est dans l'intervalle $]a-r, a+r[$; qu'il sache aussi que la réciproque est vraie . Et donc que la question de savoir si un intervalle I est inclus dans un intervalle J se résout en résolvant des inéquations comportant des valeurs absolues.

C - DES REMEDES ?

Il faut les chercher dans une autre présentation de la valeur absolue dès lors que l'on est convaincu que la présentation traditionnelle ne donne pas de très bons résultats.

Peut être est-il nécessaire de partir d'un point de vue naïf utilisant un langage suggestif, plutôt que de démarrer par la définition la plus élaborée ; cela exige que l'on veuille bien se permettre quelques écarts de langage et de rigueur, quitte à préciser et à solidifier ensuite.

Quoi qu'il en soit, il semble bien que les remarques qui suivent permettent quelques améliorations :

1°) Dans la construction des ensembles numériques, de grandes précautions oratoires devraient bien être prises pour éviter de parasiter la notion de nombre, pour éviter de faire croire par exemple, qu'un relatif est un naturel précédé d'un signe. Plus tard, des expressions du genre "étudions le signe de..." devraient bien être remplacées par : "étudier la position de ... par rapport à zéro" par exemple ; (un nombre positif n'étant pas un nombre dont le signe est le signe + mais un nombre supérieur à zéro).

De toute façon il ne semble pas inutile de faire, encore en classe de seconde, la remarque naïve suivante : lorsque l'on dit "soit x un nombre réel" on ne donne aucun renseignement sur la place de x par rapport à zéro, en particulier $(-x)$ n'est pas nécessairement un nombre négatif. Il serait bon de procéder à des exercices du genre : "calculer : $(-x)$ lorsque $x = \dots$, et dire si l'on a $(-x)$ négatif" [spécialiser x , par exemple : $x = 3 - 2\sqrt{3}$, $x = \pi^2 - 3\sqrt{10}$, $x = \frac{3-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3}$; etc...]

2°) Si l'on veut voir la valeur absolue comme une distance il vaut mieux définir $|x-y|$ avant $|x|$, $|x|$ est alors la distance de x à zéro.

3°) L'accent doit être mis sur le lien entre la valeur absolue et la relation d'ordre ; le résultat : $|x-a| < r$ équivaut à x est dans l'intervalle $]a-r, a+r[$ doit ressortir comme très important. Des exercices appropriés seront là pour le soutenir.

4°) LE ROLE DU DESSIN est primordial. Il faut "voir" un peu ce que l'on fait, rares sont les personnes qui peuvent travailler toujours dans l'abstrait ; dans le cas présent, les conventions de dessin sont si cohérentes et les représentations de R si convenables que le risque est quasiment nul d'inclure dans le raisonnement des axiomes implicites de dessin qui enlèveraient toute valeur à ce raisonnement. Lorsqu'on représente R par une droite graduée le nombre $|x-y|$ représente la longueur (au sens du physicien) du segment MN lorsque M est le point d'abscisse x et N le point d'abscisse y .

Il n'est pas rare de voir des étudiants qui sont pourtant au point techniquement sécher pour trouver la "bonne" majoration (celle qui permettra de conclure) uniquement parce qu'ils se privent de l'aide d'un croquis (par manque d'habitude certainement)

Chaque fois que cela se peut (et cela est possible souvent) il est souhaitable de présenter des solutions "géométriques" de la résolution d'équations et d'inéquations ; ces solutions pouvant précéder même la solution algébrique.

5°) Ce type d'exercices superpose d'ailleurs deux difficultés, l'une venant de "valeur absolue" l'autre venant "des équations". Il faut donc s'assurer que "équation" est un mot bien compris. C'est difficile. Si on prend par exemple l'équation : $|x-7| + |x-3| = 2$, l'élève doit voir finalement que l'ensemble des solutions est la réunion de l'ensemble des solutions de chacun des trois systèmes suivants :

$$\begin{cases} x-7 + x-3 = 2 \\ x > 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-3 + 7-x = 2 \\ +3 < x < 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3-x + 7-x = 2 \\ x < 3 \end{cases}$$

Dans ce genre d'exercices, la phrase rituelle "si $(x-a) > 0$ alors on a..." pourrait être remplacée avantageusement par : "cherchons si des nombres supérieurs à a peuvent être solutions", interrogation assez naturelle d'ailleurs lorsqu'on résout géométriquement.

* (voir annexe en fin).

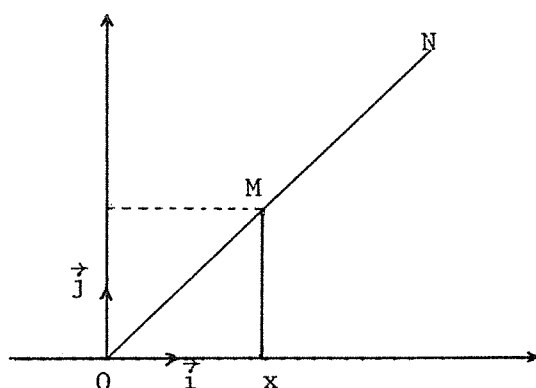
6°) Etaler dans le temps la pratique de la valeur absolue, et non la limiter à quelques exercices ponctuels ; on peut en reparler avec le trinôme, les fonctions, les approximations, etc...

Nous suggérons ici deux présentations de la valeur absolue. A la fin de chacune d'elles, nous faisons quelques remarques sur leurs défauts, leurs qualités. Nous proposons aussi des exercices, certains classiques, d'autres moins classiques préparant à l'idée de majorations et d'approximations. Nous utilisons le dessin pour résoudre. Puis quelques activités vers la continuité.

Il semble que les élèves qui les ont subi et qui dessinent, arrivent à bien se comporter. Mais connaissez-vous des profs sans illusions ?

PRESENTATIONS DE LA VALEUR ABSOLUE

A - PREMIERE PRESENTATION



Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, si un point M a pour coordonnées (x, y) on sait que la distance de O à M, ou encore la longueur OM, ou encore la norme du vecteur OM, est :

$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

Si le point N a pour coordonnées (x', y') la distance MN est :

$$\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$$

Lorsqu'un point M est sur l'axe $(O, \vec{i})$, son ordonnée est nulle et donc si les coordonnées de M sont $(x, 0)$, on a :
distance OM = $\sqrt{x^2}$



Et on sait (non en fait on ne sait pas - voir remarque en fin de cette présentation) depuis la classe de troisième que :

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

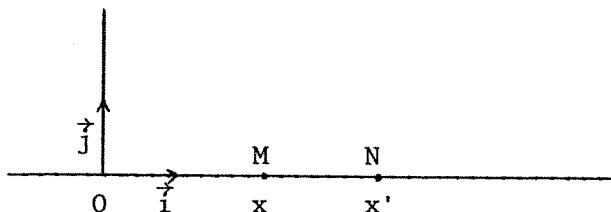
On note encore ceci par valeur absolue de $|x|$.

$$\text{On a donc : } d(O, M) = \sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Si M et N sont deux points de l'axe $(O, \vec{i})$ de coordonnées respectives $(x, 0)$ et $(x', 0)$: on a donc

$$\|\vec{MN}\| = d(M, N) = MN = \sqrt{(x-x')^2} = |x-x'|$$

$$\text{et donc : } d(M, N) = |x-x'| = \begin{cases} x-x' & \text{si } x-x' \geq 0 \text{ (} x \geq x' \text{)} \\ x'-x & \text{si } x-x' \leq 0 \text{ (} x < x' \text{)} \end{cases}$$



En résumé, si x et y sont deux nombres réels,

$$\text{on a : } |x-y| = \begin{cases} x-y & \text{si } x-y \geq 0 \quad \text{soit si } x \geq y \\ y-x & \text{si } x-y \leq 0 \quad \text{soit si } x < y \end{cases}$$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

CONVENTION DE DESSIN :

Lorsqu'on représente $\mathbb{R}$ par une droite graduée d'origine O , si au nombre x on associe le point M d'abscisse x , au nombre y on associe le point N d'abscisse y , alors le nombre valeur absolue de $x-y$, $|x-y|$, qui est la distance de x à y , est représenté sur la droite graduée par la longueur du segment MN ou encore la distance de M à N .

Le nombre : $|x|$ est la distance de x à zéro, sur le dessin, c'est la longueur de MO .

REMARQUES SUR CETTE PRESENTATION

1°) Elle permet pour les maîtres scrupuleux d'utiliser le mot "distance" comme un terme mathématique déjà défini puisque la distance euclidienne dans le plan est vue en classe de troisième ;

encore qu'il convienne de ne pas s'illusionner outre-mesure ; mais nous l'avons dit dans l'introduction, de faire passer la définition du mot distance n'est pas pour nous un objectif prioritaire.

2°) Elle permet de lier valeur absolue et racine carrée. Mais comme aussi bien, il semble que tous les élèves ne savent pas vraiment que

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$$

il sera peut-être nécessaire, avant cette présentation, de rappeler les définitions relatives à la racine carrée, et de proposer quelques exercices tournant autour de $\sqrt{a^2}$.

On pourra proposer par exemple le travail suivant :

a) Rappels sur la définition de $\sqrt{}$

1 - Si $B \geq 0$, $\sqrt{B}$ existe

2 - Par définition : B étant un élément de $\mathbb{R}^+$

$\sqrt{B}$ est le nombre positif ou nul dont le carré est B

En d'autres termes :

Si on écrit $b = \sqrt{B}$, b est caractérisé par les deux propriétés suivantes :

$$\begin{cases} 1) & b \geq 0 \\ 2) & b^2 = B \end{cases}$$

b) Expression de $\sqrt{a^2}$

(Le réflexe fréquent est : " $\sqrt{a^2} = a$ " oubliant que a peut être négatif et ne saurait alors être : "le nombre positif dont...")

- Revenant à la définition :

$$\sqrt{a^2} \text{ est le nombre } b \text{ tel que } \begin{cases} b \geq 0 & (1) \\ b^2 = a^2 & (2) \end{cases}$$

(2) nous indique que $b = a$ ou $b = -a$

$$(b^2 - a^2 = 0 \iff (b-a)(b+a) = 0)$$

a et $-a$ sont de signes contraires.

(1) nous dit qu'il nous faut retenir celui qui est dans $\mathbb{R}^+$

1er cas : si $a \geq 0$, pas de doute, seul a vérifie I et
 $\sqrt{a^2} = a$

2ème cas : $a < 0$ alors c'est $-a$ qui est positif et
 $\sqrt{a^2} = -a$

Résumé :

$$\text{Si } a \geq 0 \quad \sqrt{a^2} = a$$

$$\text{Si } a < 0 \quad \sqrt{a^2} = -a$$

d'où dans tous les cas

$$\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$$

c) Exercices du genre suivant :

1 - Calculer ou écrire sous une autre forme :

$$\sqrt{5^2} ; \quad \sqrt{(-7)^2} ; \quad (\sqrt{3})^2 ; \quad \sqrt{(x-3)^2} ; \quad \sqrt{(-x)^2}$$

2 - Peut-on écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2 ?$$

3 - Donner une expression plus simple de

$$\sqrt{23 - 4\sqrt{33}}$$

en remarquant que :

$$23 = 11 + 12 = (\sqrt{11})^2 + (2\sqrt{3})^2$$

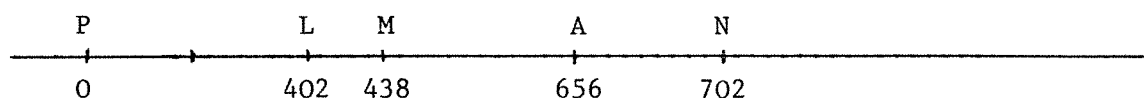
$$\text{et } 4\sqrt{33} = 2 \times \sqrt{11} \times 2\sqrt{3}$$

3°) Une difficulté de cette présentation peut venir justement du fait que l'on utilise la racine carrée qui n'est pas bien "aimée" par les élèves. Cette difficulté peut être tournée lorsque la racine carrée est traitée séparément et antérieurement. Il faut bien aussi que la racine carrée soit comprise.

B - DEUXIEME PRESENTATION

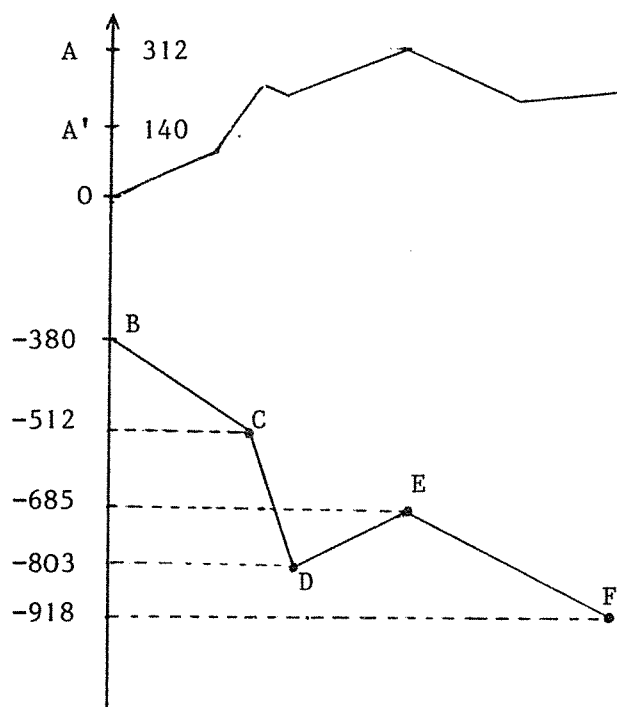
Elle consiste à faire ressentir l'utilité de définir une distance entre deux nombres réels ; pour cela, on pourra prendre des exemples en Physique, où sont employées des expressions comme : "proches de ...", "voisin de...", "négligeable vis à vis de...", et les expressions duales ; la nécessité de donner un sens précis à de telles expressions amène à définir une distance sur le corps des nombres réels : d'une manière assez naturelle (DESSIN) la distance entre x et y , sera "la différence positive entre x et y ".

Ou encore travailler sur des cas simples :
par exemple, sur les cartes d'entrée des autoroutes le parcours est souvent présentée ainsi, où l'échelle n'est pas nécessairement respectée :



Quelle est la distance de A à N , de N à M , de L à A ,
de A à P , de A à M etc...

Sur les cartes de spéléologue, les indications d'altitude
(zéro étant le niveau du sol, A la côte la plus haute aux alentours)



Calculer les différences de niveaux (distance "altimétrique" si l'on veut) entre les différents points.

On demande aux élèves d'expliquer comment ils procèdent : on retranche le plus grand du plus petit, au sens de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. Ainsi

$$d(A,F) = d(F,A) = 312 - (-918) = + 1230$$

On enchaîne en disant que ces exemples et d'autres, montrent la nécessité de définir une certaine loi sur l'ensemble des couples de nombres réels ; cette loi est la suivante : au couple (x,y) on fait correspondre le réel positif obtenu en retranchant le plus grand du plus petit.

La loi se note la distance valeur absolue, et le composé de deux réels par $|x-y|$. On a

$$|x-y| = d(x,y) \text{ valeur absolue de } x-y$$

Conséquences :

$$\begin{aligned} |x-y| &= |y-x| \\ |x+y| &= |x-(-y)| = d(x,-y) \\ |x| &= |x-0| = d(x,0) \end{aligned}$$

Lorsqu'on donne un couple (x,y) on ignore lequel des deux nombres est supérieur à l'autre. On a donc une discussion, à laquelle les élèves ont été préparés sur les exemples, qui aboutit à :

$$|x-y| = \begin{cases} x-y & \text{si } x \geq y \\ y-x & \text{si } x \leq y \end{cases}$$

puisque l'on retranche le plus grand du plus petit.

Donc
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

CONVENTION DE DESSIN

REMARQUES SUR CETTE PRESENTATION

Dans la première partie les exemples pris dans la physique peuvent être très simples : la longueur d'une table qui est voisine de 1m, des vitesses ; vitesse du son qui est négligeable devant la vitesse de la lumière, etc...

La deuxième partie (exemples concrets (?) de distance) va très bien. La démarche n'est peut-être pas très mathématique, mais elle paraît atteindre un objectif assez naturellement qui paraît essentiel : à savoir que l'élève comprenne pourquoi la valeur absolue a été ainsi définie (on retranche le plus grand du plus petit) et pourquoi il est donc nécessaire de discuter sur la place de x par rapport à y

Elle a l'avantage aussi d'identifier valeur absolue à la notion usuelle et courante de distance. On y définit : $|x-y|$ avant $|x|$ (Ceci permet d'éviter certaines fautes comme celle qui consiste à dire dans la résolution de : $|x-3| + |x-2| < 1$ par exemple : si x est ≥ 0 alors....)

C - EXERCICES

1°) Quels sont les nombres x tels que la distance de x à 3 soit 1 ? 0 ? etc... Dessiner. Trouver deux nombres dont la distance est $\sqrt{2}$? etc... Trouver deux nombres équidistants de 4 et dont la distance est égale à π . etc...

1°bis) Comparer les nombres :

a) $|-a|$, $|a|$, $-|a|$, $||-a||$

b) $|a^2|$, $|a|^2$, $|-a^2|$, $-|a^2|$, $||a^2||$

c) $-5+|x|$, $-5+x$, $|-5+x|$, $-|-5+x|$, $|5-x|$

2°) Dans chaque cas, quels sont les nombres x pour lesquels on a : (DESSINER)

a) $|x+3| = x+3$

b) $|x-2,5| = 2,5-x$

c) $|x^2-4| = 4-x^2$

d) $\sqrt{|x+1|^2} = 1-x$

3°) Compléter le tableau suivant :

$$|x-\sqrt{2}| = \begin{cases} \dots\dots\dots & \text{si} & \dots\dots x \dots\dots \\ \dots\dots\dots & \text{si} & \dots\dots x \dots\dots \end{cases}$$

$$|x+a| = \begin{cases} \dots\dots\dots & \text{si} & \dots\dots x \dots\dots \\ \dots\dots\dots & \text{si} & \dots\dots x \dots\dots \end{cases}$$

$$|x^2+3| = \begin{cases} \dots\dots\dots & \text{si} & \dots\dots x \dots\dots \\ \dots\dots\dots & \text{si} & \dots\dots x \dots\dots \end{cases}$$

4°) Dans chaque cas suivant, représenter dans un plan euclidien muni d'une base orthonormée $(0, \vec{i}, \vec{j})$, l'ensemble des points M de coordonnées (x,y) tels que :

a) $|x+y| = 2$

b) $|xy| = 1$

c) $|x| = |y|$

d) $|x^2+y^2| = 1$

5°) Distance d'un point à une droite (dans un plan euclidien, base orthonormée)

FONCTION VALEUR ABSOLUE

- Définition. Représentation graphique. Propriétés.

- Fonction : $x \mapsto |x-a|$

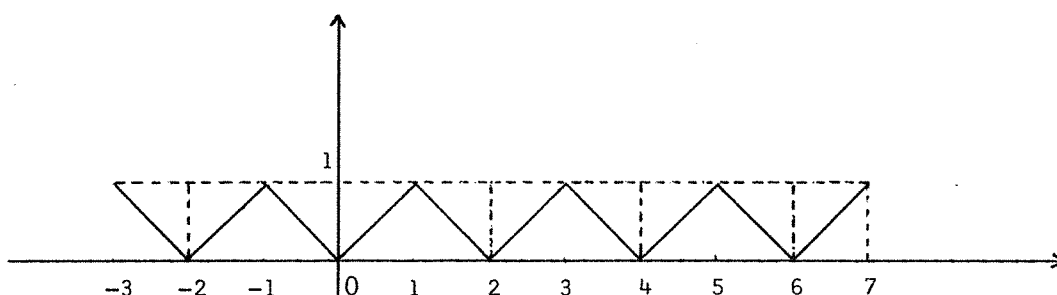
Représentation graphique. On pourra insister sur le fait que la courbe de la fonction $(x \mapsto |x-a|)$ s'obtient à partir de la précédente $(x \mapsto |x|)$ par une translation que l'on précisera.

EXERCICES

6°) Résolution par le graphique d'équations du type :

$|x-a| = |x-b|$ (et aussi par un croquis sur une droite).

7°) On donne la représentation graphique suivante d'une fonction notée f :



Expliciter cette fonction (c'est-à-dire donner le moyen de trouver $f(x)$ connaissant x).

[Utiliser les intervalles de centre les nombres pairs et de rayon 1].

PROPRIETES DE LA VALEUR ABSOLUE
MAJORATIONS - VERS LA CONTINUITE

Les propriétés de la valeur absolue sont les propriétés d'une distance.

L'inégalité triangulaire a une signification géométrique : dans un triangle, la longueur d'un côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres.

La relation : $|x+y| \leq |x|+|y|$ s'interprète aussi géométriquement : dans un parallélogramme la longueur de la diagonale est plus petite ou égale à la somme des longueurs de deux côtés consécutifs (pour avoir l'interprétation dans $\mathbb{R}$ on peut projeter).

On a aussi :

$$\begin{aligned} ||x|-|y|| &\leq |x-y| \\ |x-y| &\geq ||x|-|y|| \end{aligned}$$

La fonction valeur absolue n'est pas une application linéaire, mais la valeur absolue d'un produit est le produit des valeurs absolues.

Le principal intérêt des inégalités : $|x+y| \leq |x|+|y|$,
ou $|x-y| \leq |x|+|y|$, est que pour connaître un majorant de $|x-y|$, il suffit de connaître un majorant de $|x|$ et de $|y|$. Il paraît utile d'insister sur ce point, les exercices qui suivent sont prévus pour.

EXERCICES

8°) Existe-t-il un nombre réel a , ayant la propriété suivante :
pour tout $r > 0$, $|a| \leq r$.

9°) x et y étant deux nombres réels, on considère un parallélogramme A, B, C, D tel que la longueur $AB = |x|$, longueur $AC = |y|$. Comment suffit-il de choisir les nombres x et y pour être assuré que chacune des deux diagonales aura une longueur inférieure à $2\sqrt{3}$.

Comment aurait-on pu répondre si on ne connaissait pas les propriétés de la valeur absolue ?

10°) Soit r un nombre réel positif, par exemple $r = 10^{-4}$. Comment suffit-il de choisir deux entiers naturels m et n pour être assuré d'avoir :

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 10^{-4}, \text{ même question avec : } \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| < 10^{-4}$$

11°) Montrer que si $|x| < 1$ et $|y| < 1$ alors on a :

$$|x| + |y| > |x||y|$$

A quelle condition suffisante sur x et y a-t-on :

$$|x| + |y| \leq |x||y| ?$$

12°) Montrer en utilisant l'identité $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$ que si $|x| < 1$, et $|y| < 1$, alors :

$$|x^3 - y^3| < 6$$

Montrer que cette majoration n'est pas très utile (pas très bonne) car sans connaître l'identité on aurait pu écrire :

$$|x^3 - y^3| < \dots\dots\dots (\text{compléter})$$

qui donne un renseignement meilleur que la précédente sur l'écart entre x^3 et y^3 .

Montrer que l'on peut écrire, toujours sous les mêmes hypothèses que :

$$|x^3 - y^3| < 3|x-y|$$

Quels renseignements donne cette majoration ? Peut-on avoir y^3 proche de x^3 ? Comment alors choisir y et x ?

Exemple : $x = 0,5$. Comment suffit-il de choisir y , distinct de x , pour être assuré d'avoir $|x^3 - y^3| < 10^{-3}$.

VERS LA CONTINUITE

On vient d'en "parler" à la fin de l'exercice 12. Il n'est pas question ici d'en faire la théorie. On peut néanmoins, avec l'étude des fonctions inscrites explicitement au programme de la classe de seconde, et avec d'autres aussi, entamer des exercices préparatoires dont la motivation pourrait être la suivante :

la représentation graphique d'une fonction : on ne peut porter sur le graphique qu'un nombre fini de points.

Est-il légitime de les joindre par un trait continu, qui laisse croire finalement que si y est voisin de x , alors $f(y)$ est voisin de $f(x)$?

Le but de cet exercice sera le suivant :

Habituer l'élève à interpréter géométriquement des inégalités ; à faire intervenir au voisinage du point $x = a$ "l'infiniment petit principal" : $x - a$, à montrer l'intérêt de cet infiniment petit principal (terminologie à garder secrète).

Pour démontrer la continuité d'une fonction f en un point a , il est fréquent (lors de l'étude de la classe des fonctions usuelles) d'écrire :

$$|f(x) - f(a)| = |(x - a) \cdot g(x)| = |x - a| |g(x)|$$

où $g(x)$ est une fonction explicitée. Le problème est alors de borner $g(x)$ dans un "bon" voisinage de a . L'élève est toujours surpris par une telle démarche où l'on traite différemment les expressions :

$|g(x)|$ et $|x - a|$. Pourquoi borner g en non pas $|x - a|$? Il est bon avant même de parler continuité de montrer le pourquoi de cette manipulation : ainsi à l'exercice 12, on avait vu que l'on avait : $|x^3 - y^3| < 6$ mais aussi $|x^3 - y^3| < 3|x - y|$ qui donne de meilleurs renseignements.

Géométriquement borner g sur un intervalle ouvert de centre a , revient à déterminer un "papillon" dans lequel se trouve le graphe de f "autour de a ", en fait c'est déterminer des papillons d'ouverture constante (la borne de g) et d'envergure arbitraire (si "ça marche" sur un intervalle "ça marche" sur un intervalle plus petit).

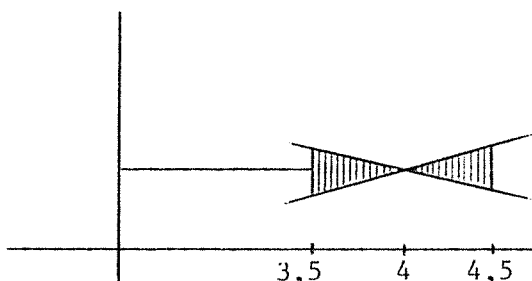
13°) EXEMPLE : graphe de $x \mapsto \frac{1}{x}$

Montrer que dans l'intervalle $]3,5 ; 4,5[$ on a :

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{4} \right| < \frac{1}{14} |x-4|. \text{ Conséquences sur le graphe de } f \text{ autour du point } 4.$$

Interprétation géométrique :

La courbe représentative de la fonction restreinte à $]3,5 ; 4,5[$ est comprise dans le papillon déterminé par les droites de pentes respectives $\frac{1}{14}$ et $-\frac{1}{14}$ passant par le point $(4, \frac{1}{4})$.



En fait ce papillon est encore moins ouvert. Cela veut dire qu'autour de 4 la courbe ne connaît pas de grands écarts, on ne commet pas beaucoup d'erreurs, ou plutôt on en a une idée suffisamment précise en la traçant par un trait continu.

14°) Exercices du même type avec $(x \mapsto x^2)$; $(x \mapsto x^3)$ pour cette dernière cf. exercice 12.

15°) On considère la fonction polynôme P :
 $(x \mapsto P(x) = 2x^5 + 4x^4 - 7x^3 + x^2 - x).$

Montrer que l'on a la majoration suivante valable pour $|x| < 1$:

$$|P(x)| < 5.7 \cdot |x| = 35|x|$$

En déduire que sur $[0,1[$ le graphe de P est en dessous d'une droite.

Peut-on obtenir une majoration plus fine ?

16°) Variantes sur ces types d'exercices.

17°) Autres exemples de distances - si l'on veut -

VALEUR ABSOLUE ET RELATION D'ORDRE

On établit le théorème suivant qui montre que l'on peut décrire un intervalle de deux façons : l'une en utilisant la relation d'ordre, l'autre en utilisant la distance :

THEOREME : x, a , étant deux réels, et r un réel > 0 , les relations :
 $a-r < x < a+r$ et $|x-a| < r$ sont équivalentes.

Ou encore dire que le nombre réel x appartient à l'intervalle ouvert de centre a et de rayon r équivaut à dire que la distance de x à a est inférieure à r , (soit : $|x-a| < r$)

COROLLAIRE : (ou autre forme d'énoncé)

L'ensemble des solutions de l'inéquation $|x-a| < r$ est l'intervalle ouvert $]a-r, a+r[$.

REMARQUES

- 1 - Insister sur les représentations graphiques.
- 2 - Enoncés analogues avec intervalle fermé et $\leq$.
- 3 - On a pris comme définition d'un intervalle $]a,b[$: ensemble des réels x tels que $a < x < b$.
- 4 - Il sera utile de faire noter que si c est un nombre de l'intervalle ouvert de centre a et de rayon r , alors on peut écrire $c = a + b$ avec : $|b| < r$. DESSIN

EXERCICES

Tous les exercices habituant l'élève à cette idée que l'appartenance de x à l'intervalle $]a-r, a+r[$ équivaut à distance de x à a inférieure strictement à r . On pourra commencer par des révisions sur les intervalles. Comme exemples, mais il en est d'autres :

18°) On donne $a = 2$, $b = 4$, et un nombre x tel que $d(x, 3) = |x-3| = 1,2$. x est-il dans l'intervalle $]a, b[$?

19°) Important : Deux nombres x et y appartiennent à l'intervalle $] -1,2 ; +3,8[$. Que peut-on dire de $d(x, y) = |x-y|$?

Faire un dessin.

Généraliser : si x et y appartiennent à $]a, b[$, que dire de $|x-y|$?

20°) Quel est l'ensemble des nombres x tels que $|x-3| < 3$ et $|x-4,7| < 2$? DESSINER.

21°) La longueur l d'une tige métallique est $1,003$ m à $1/1000$ près. A quel intervalle appartient le nombre l .

22°) Reprendre l'exercice 12. Dédire de la majoration trouvée que l'on peut trouver un intervalle I de centre zéro, tel que pour tout x dans I on ait :

$$|P(x)| < 10^{-4}.$$

Montrer que pour tout $r > 0$, on peut avoir

$$|P(x)| < r$$

lorsque x est dans un intervalle de centre 0 convenablement choisi.

23°) Exercices analogues avec d'autres fonctions.
Conséquences sur le graphe (encadrement).

24°) Montrer que si l'on a : $0 < a < b$ et $b-a > 1$ pour deux nombres réels a et b alors l'intervalle $]a, b[$ contient un nombre naturel entier.

[Pour ceux qui connaissent le sinus : en déduire que la fonction sinus prend une infinité de valeurs entre $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et 1 . Cette question est plus difficile]

25°) Compléter le tableau suivant, de telle sorte que les propositions écrites dans chaque colonnes soient équivalentes et de la forme demandée :

$a < x < b$	$x \in]a ; b[$	$d(x, a) < r$	$ x - a < r$	x est élément de l'intervalle de centre a et de rayon r .
	$x \in]5 ; 8[$			
		$d(x, -1) < 0,1$		
			$ x+2 < \frac{1}{4}$	
$-1 < x < 2$				
				x est élément de l'intervalle de centre a et de rayon r .

EXEMPLES de RESOLUTION d'INEQUATIONS COMPORTANT des VALEURS ABSOLUES

1°) Résoudre : $|x-a| < r$

On a : $a-r < x < a+r$. C'est le théorème.

2°) Résoudre : $|ax-b| < r$

On se ramène au cas précédent en l'écrivant : $|x-\frac{b}{a}| < \frac{r}{|a|}$

ou encore en utilisant les remarques précédentes, on a :

$d(ax, b) = d(ax-b, 0)$, or $d(ax-b, 0) < r$ équivaut à $-r < ax-b < r$ devenue techniquement plus simple.

3°) Résoudre : $|x-2| + |x-4| < 1$

Graphiquement, ayant placé sur la droite graduée représentant $\mathbb{R}$, le point A d'abscisse 2, puis le point B d'abscisse 4, résoudre l'équation revient à trouver un point M d'abscisse x tel que : $MA + MB < 1$. (Voir convention de dessin).



Un point M à gauche de A peut-il convenir ?

Si M est à gauche de A, on a :

$MB = MA + AB = MA + 2$, donc : $MA + MB > 2$, donc le point M ne peut être solution.

Si M est à droite de B, même impossibilité.

Si M est entre A et B, on a $MA + MB = AB = 2$, donc impossible. L'ensemble des solutions est l'ensemble vide.

Remarque : On donne parallèlement la solution classique

Autre remarque :

Une solution classique utilisant les propriétés de la distance est aussi celle-ci :

$$\text{On a à résoudre : } d(x,2) + d(x,4) < 1$$

Or on sait que : $d(x,y) + d(x,z) > d(y,z)$ (inégalité triangulaire) ; or $d(y,z)$, ici dans l'exercice est égal à 2.
Donc il ne peut y avoir de solution.

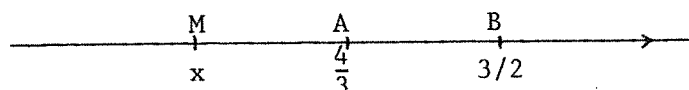
4°) Résoudre des variantes de ce type d'exercices.
(pour trouver des ensembles de solutions non vides)

$$5^{\circ}) \text{ Résoudre : } |2x-3| + |-3x+4| < 1$$

L'équation s'écrit :

$$2\left|x - \frac{3}{2}\right| + 3\left|x - \frac{4}{3}\right| < 1$$

Graphiquement on place les points $A(\frac{4}{3})$, $B(\frac{3}{2})$, $M(x)$.



Un point M à gauche de A peut-il être solution ?

Si M est à gauche de A , on a :

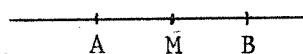
$$3MA + 2MB = 3MA + 2(MA + AB) = 5MA + \frac{1}{3}$$

donc on a : $5MA + \frac{1}{3} < 1$ pour M à gauche de A et

$MA < \frac{2}{15}$; $\frac{4}{3} - \frac{2}{15} = \frac{18}{15}$; soit C le point d'abscisse $\frac{18}{15}$;

Un point M entre A et B peut-il être solution ?

Si M est entre A et B , on a :



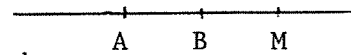
$$3MA + 2MB = 3MA + 2(AB - MA) = MA + \frac{1}{3}$$

donc : $MA + \frac{1}{3} < 1$ pour M entre A et B et $MA < \frac{2}{3}$

donc pour tout M de AB .

Un point M à droite de B peut-il être solution ?

Si M est à droite de B :



$$\text{on a : } 3MA + 2MA = 3MA + 2(MA - AB) = 5MA - \frac{1}{3}$$

$$\text{donc : } 5MA - \frac{1}{3} < 1 \text{ pour M à droite de B et } MA < \frac{4}{15} ; \frac{4}{3} + \frac{4}{15} = \frac{24}{15} ;$$

$$\text{Plaçons le point D d'abscisse } \frac{24}{15} = \frac{8}{5} ;$$

L'équation est vérifiée pour M dans l'intervalle $]C, D[$ et seulement dans cet intervalle ; d'où l'ensemble des solutions de l'équation est l'intervalle $] \frac{18}{15}, \frac{8}{5} [$

Remarque : On donne parallèlement la solution classique en faisant tous les rapprochements.

6°) Variantes de cet exercice

$$7^{\circ}) \text{ Résoudre : } |x^2 - 3| = |x^2 - 5|$$

$$\text{L'équation proposée s'écrit } d(x^2, 3) = d(x^2, 5)$$

$$\text{donc } x^2 = 4 \text{ (DESSIN) d'où les valeurs de } x.$$

$$8^{\circ}) \text{ Résoudre : } |x^2 - 3x - 1| < 2$$

$$\text{L'équation s'écrit } d(x^2 - 3x - 1, 0) < 2.$$

$$\text{D'après le théorème on a : } -2 < x^2 - 3x - 1 < 2$$

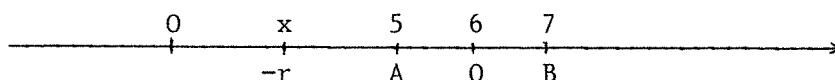
d'où on est ramené à résoudre le système

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 3 < 0 \\ x^2 - 3x + 1 > 0 \end{cases}$$

ou encore l'équation s'écrit $d(x^2 - 3x, 1) < 2$ et même méthode de résolution.

9°) Résoudre : $|x-a| + |x-b| < c$

Exemple : $|x-5| + |x-7| < \frac{1}{2}$



$$|x-5| + |x-7| = |(x-5)(x-7)| = |(x-6)^2 - 1^2|$$

$$|\overline{MA} \cdot \overline{MB}| = |\overline{MO}^2 - (\frac{\overline{AB}}{2})^2|$$

(idée - faire intervenir le milieu de $[5,7]$ pour exprimer ce produit comme une différence de carrés, puissance d'un point par rapport au segment $[5,7]$).

Dès lors cette expression s'interprète facilement en terme de distance.

- si $d(x,6) \leq 1$ soit $x \in [5,7]$

$$|(x-6)^2 - 1^2| = 1 - (x-6)^2$$

$$\text{d'où } 1 - (x-6)^2 < \frac{1}{2}$$

$$(x-6)^2 > \frac{1}{2}$$

$$|x-6| > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x \in [5, 6 - \frac{\sqrt{2}}{2}] \cup [6 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 7]$$

- si $d(x,6) > 1$ soit $x \notin [5,7]$

$$|(x-6)^2 - 1^2| = (x-6)^2 - 1$$

$$\text{d'où } (x-6)^2 - 1 < \frac{1}{2}$$

$$(x-6)^2 < \frac{3}{2}$$

$$|x-6| < \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$x \in]6 - \frac{\sqrt{6}}{2}, 5] \cup]7, 6 + \frac{\sqrt{6}}{2} [$$

d'où la solution $x \in]6 - \frac{\sqrt{6}}{2}, 6 - \frac{\sqrt{2}}{2}] \cup [6 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 6 + \frac{\sqrt{6}}{2} [$

REMARQUES

1) Nous avons pris ici l'exemple où les calculs sont les plus longs. En particulier si nous avons

$$|x-5| \quad |x-7| < 2$$

nos calculs montrent immédiatement que tous les points de $[5,7)$ sont solutions.

2) Ces opérations peuvent paraître longues. En fait les autres méthodes n'apportent pas de simplification bien au contraire.

Les "méthodes" précédentes ne permettent pas la résolution facile et imagée d'équations ou d'inéquations du type :

$|ax^2+bx+c| \leq |a'x^2+b'x+c'|$. Mais ce n'est pas une raison pour se priver du dessin dans les autres cas.

VALEUR ABSOLUE D'UNE FONCTION

1°) Définition

2°) Représentation graphique de $|f|$ à partir de la représentation de f . Exemples.

3°) Exercices du type représentation de :

$x \mapsto |ax+b|$; $x \mapsto |x^3|$; $x \mapsto |E(x)|$; (Comparer avec :
 $x \mapsto E(|x|)$).

4°) Exercices du type résolution graphique d'équations

$$|ax^2+bx+c| \leq |a'x^2+b'x+c'|$$

DENSITE DES IRRATIONNELS ET DES RATIONNELS, EXERCICES

25°) Tout intervalle de centre un rationnel contient un irrationnel.

1) n étant un nombre entier naturel, démontrer que $\frac{\sqrt{2}}{n}$ est irrationnel. (On admet que $\sqrt{2}$ est irrationnel ; raisonner par l'absurde).

2) Montrer que la somme d'un rationnel a et d'un irrationnel b est un irrationnel. (raisonner par l'absurde)

3) r étant un réel > 0 , montrer que l'on peut choisir n pour que :

$$\frac{\sqrt{2}}{n} < r.$$

4) En déduire que l'intervalle de centre 2 et de rayon 10^{-5} (dessiner) contient un irrationnel.

5) Insister sur le fait que cela est vrai quels que soient a rationnel et r , réel ≥ 0 .

REMARQUE :

Contrairement à ce que l'on pourrait croire cet exercice est facile lorsqu'on prend des valeurs numériques et atteint son objectif qui est que l'élève prenne conscience de ce grouillement d'irrationnels autour d'un rationnel.

26°) Tout intervalle contient un rationnel et un irrationnel.
(en fait une infinité ; utiliser les développements décimaux ; donner des exemples numériques).

ANNEXE

SUR LA RESOLUTION DE CERTAINES EQUATIONS

I - Les élèves sont souvent embarrassés pour rédiger la solution d'exercices du type :

- résoudre l'équation

$$|x-a| = b$$

- ou plus généralement

$f(x) = 0$ où f est une fonction définie par intervalles dans $\mathbb{R}$.

En général, les copies d'élèves recèlent des rédactions du type :

1°) Si $x \in A$ (A sous-ensemble de $\mathbb{R}$ dépendent de la définition de f) alors calculs

$x = \dots\dots$

2°) Si $x \in B$ idem

$$x = \dots\dots$$

jusqu'à épuisement de $\mathbb{R}$.

Les "moins bons élèves" oublient de s'assurer que les solutions partielles vérifient bien les conditions correspondant au cas traité - les "meilleurs" arrivent au résultat juste.

II - Il semble qu'une meilleure façon d'aborder le problème est la suivante :

Imaginons que la fonction soit définie par morceaux A, B, C ; ces morceaux formant une partition de $\mathbb{R}$.

On veut résoudre l'équation $f(x) = 0$.

On dira, si S est l'ensemble des solutions :

1°) Cherchons les solutions de (1) qui appartiennent à A
(c'est-à-dire $S \cap A$).

Dans A , l'équation a une forme....

2°) Cherchons $S \cap B$

3°) Cherchons $S \cap C$.

$S =$
