UNIVERSITÉ DE POITIERS

INSTITUT de RECHERCHE
sur l'ENSEIGNEMENT
des MATHÉMATIQUES

Année 1976-1977

SUR L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE

N° 1 - FONCTIONS

2ème Édition revue et complétée

 Publication de l'IREM de POITIERS
Dépôt légal : 4ème trimestre 1976
ISBN : 2-85954-025-9

R. BARRA - J.J. PENSEC

SUR L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE

N° 1 - NOTION DE FONCTIONS

Préambule sur l'enseignement de l'Analyse	page 1
Réflexions sur la notion de fonction et sur la façon de l'enseigner	page 4
Tests - Commentaires sur les réponses	page 8
Indications pour une leçon sur les Fonctions en classe de seconde C	page 21
Compte-rendu d'une séance de travaux dirigés (par R. CHARNOLÉ - Lycée de BRESSUIRE)	page 49
Note Historique : extraits d'une note de Mlle Christine PHILI de l'Université d'ATHÈNES sur «Le développement du concept de Fonction» présentée au séminaire de philosophie et de mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure	page 53

PRÉAMBULE SUR L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE DANS LE SECONDAIRE

Les discussions entre collègues au sein de l'I.R.E.M. font apparaître qu'il est encore difficile d'enseigner l'Analyse. Et la question : "jusqu'où faut-il aller en Analyse" ? est de celles qui reviennent le plus souvent.

A une certaine unanimité, les difficultés rencontrées dans cet enseignement sont essentiellement dues à :

1°) une mauvaise préparation des élèves.

2°) au programme qui ne prévoit pas d'introduction ni surtout d'application motivante immédiate : par exemple la continuité est introduite en classe de première mais les conséquences remarquables sont énoncées et illustrées en Terminale.

3°) aux subtilités des notions elles-mêmes (limite, continuité)

4°) au manque de temps.

Aucun point ne semble avoir priorité sur l'autre sinon peut-être, le premier. Mais revenons rapidement sur chacun d'eux.

1 - Dans un bulletin de l'A.P.M. (avril 1972 n° 283) Monsieur REVUZ signalait déjà que, pour l'étude de la continuité en particulier, la difficulté venait de ce que les élèves connaissaient mal : "fonction" et "valeur absolue".

Malgré les progrès accomplis, la remarque de Monsieur REVUZ reste encore valable, on peut ajouter que les élèves actuels ne connaissent pas non plus suffisamment : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, distance, approximations, intervalles, et que l'habitude leur manque de penser en termes d'encadrement ou d'approximations.

[Les "encadrements" abordés en 4°, le seraient-ils prématurément ? pourquoi des élèves de seconde actuels manifestent-ils quelque "répulsion" lorsque le maître propose une révision sur ce sujet ?]

On ne voit pas comment un élève, de section C ou D, peut recevoir un enseignement efficace de l'Analyse, sans une connaissance totale des objets et des notions énumérées ci-dessus.

2 - Il doit être difficile pour un élève de mémoriser des définitions et des propriétés dont l'intérêt lui échappe ; et ce, parce que la suite du programme ne les utilise presque plus explicitement ; ainsi pour la continuité : beaucoup d'élèves ne voient pas, et ne peuvent pas voir, quels bénéfices tirer du fait qu'une fonction est continue en un point ou sur un intervalle, ils se bornent alors à réciter. Pour la dérivation, les élèves ont tendance à ne retenir que les règles de calcul (avec d'ailleurs une forte tendance à "dériver des nombres" plutôt que des fonctions)

3 - La notion de limite (ou de continuité) est une des plus subtiles de l'Analyse, du moins en ses débuts. La définition mathématique est finalement assez loin de la définition "intuitive" : "quand x se rapproche de x_o, $f(x)$ se rapproche de 1." (cette dernière définition ayant en outre l'inconvénient de mettre l'accent sur les "variables" et non sur la fonction). Le symbolisme logique est lourd, difficile à manier pour le débutant, et n'excite ni l'intuition ni l'imagination.

La démonstration de l'existence de la limite utilisant la définition, utilise un type de raisonnement nouveau pour l'élève : d'ordinaire il part d'une proposition A pour établir une proposition B ; ici une proposition B étant donnée (l'inéquation $|f(x) - l| < \varepsilon$) on lui demande de trouver des conditions A suffisantes pour que B soit vraie.

Enfin, techniquement, cette démonstration est difficile dès que l'on n'utilise pas le principe des majorations (remplacer l'inéquation : $|f(x) - l| < \varepsilon$ par une autre plus simple : $g(x) < \varepsilon$), principe dont la justification, si elle peut être instructive, est assez longue.

4 - Un grand nombre de collègues déplorent le manque de temps qui les oblige à écourter la "partie conceptuelle" du cours ; et pour la partie "applications", ils craignent que l'élève ne retienne que des recettes.

Face à ces difficultés il n'existe pas de remède miraculeux. Mais nous pensons qu'elles seront en partie surmontées, si les élèves entrant en première sont mieux préparés en Analyse. Dans les classes précédentes, le programme vise trop haut au niveau de l'abstraction et, par contre, les exercices naïfs de construction et d'illustration concrète manquent. (Par exemple, il paraît paradoxal qu'un élève sache donner la définitiob du mot fonction et ne sache pas trouver une fonction satisfaisant à certaines exigences simples ; ou qu'un élève de terminale ne sache pas trouver un irrationnel qui soit voisin de 2 à 1/10 près).

Il nous paraît important que le plus grand nombre possible d'élèves puissent apercevoir l'intérêt des notions introduites soit avant leurs définitions soit après ; et donc que suffisamment de temps soit consacré aux définitions difficiles, quitte à ne pas donner d'exercices techniques ou même certaines démonstrations. Il n'y a pas de contradiction : on peut très bien comprendre l'intérêt de la continuité et savoir ce que signifie qu'une fonction est continue, sans pour autant être habile dans le maniement des ε et des η ; (ainsi la démonstration du fait suivant : "si f est une fonction continue en a telle que $f(a) > 0$ alors f prend des valeurs strictement positives sur un intervalle ouvert de centre a " peut se faire simplement sans utilisation explicite des ε) par exemple encore, et seulement puisqu'il faut choisir, il nous semble préférable qu'un élève ait compris l'intérêt pour certaines fonctions d'envisager un quotient : $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ et les raisons d'un passage à la limite plutôt qu'il sache démontrer le théorème de dérivation d'un produit ou de fonction composée.

Pour essayer de répondre à la question : "jusqu'où faut-il aller en Analyse" ?, compte tenu de ce qui précède nous sommes tentés de dire : "pas très loin". L'Analyse n'est pas une discipline à part, il faut l'enseigner autant pour la contribution qu'elle apporte à la formation d'un élève que pour les connaissances. Un bachelier, s'il continue ses études, aura l'occasion d'acquérir la technique indispensable et ce d'autant mieux qu'il aura bien compris le sens des définitions et des théorèmes (toute la partie d'Analyse traitée dans le secondaire figure intégralement au programme des classes préparatoires, ou des "première année de Faculté de Sciences".) ; et si le bachelier ne poursuit pas ses études, on peut espérer que les aptitudes qu'il aura développées pendant sa scolarité lui seront aussi utiles que des connaissances, qui d'ailleurs sont bien vite oubliées lorsqu'elles ne sont pas utilisées.

Nous allons donc essayer de proposer quelques indications pour l'enseignement de l'Analyse dans ce sens là ; en commençant par : "fonction" (classe de seconde), "distance, approximation" (classe de seconde) et peut-être, une "étude" ayant pour objet les notions de condition suffisante, condition nécessaire (cette étude partant d'exemples variés et imagés, amèneraient sans faire pour cela un cours de logique à la maîtrise de ces notions).

RÉFLEXIONS SUR LA NOTION DE FONCTION ET SUR LA FAÇON DE L'ENSEIGNER

La genèse du concept de fonction a été longue et délicate (cf. note historique) ; il n'est pas étonnant que posséder une bonne notion sur ce sujet est pour les élèves, difficile.

La présentation de la notion de fonction dans les manuels est réduite à la plus simple expression : on croit avoir tout dit en donnant la définition la plus élaborée qui soit et en présentant quelques exemples : fonctions rationnelles, fonctions affines par morceaux. Plus tard on ajoutera les fonctions irrationnelles, logarithmes, exponentielles. Mais à travers ces exemples vécus l'élève va dépouiller le concept de sa généralité et va brouiller la bonne notion par des images parasites, autrement dit il aura du mal à concevoir d'autres fonctions que celles du type étudié. (cf. par exemple, le test plus loin ; un test à peu près semblable passé dans les académies de GRENOBLE et TOULOUSE donne sensiblement les mêmes résultats). Et c'est bien dommage car cette notion ne sera plus revue par la suite; certes on peut espérer apporter des retouches par ci, par là, et c'est souvent ainsi que l'on procède dans l'enseignement lorsqu'on ne sait pas comment faire autrement. Mais ici, nous pensons pour l'avoir vérifié que la grande majorité des élèves peut accèder à la bonne compréhension de cette notion, à condition que l'on ne mette pas l'accent sur la définition, mais sur les composantes essentielles du concept.

<u>Le verbalisme ici ne résout rien</u>, peu importe qu'un élève sache réciter la définition s'il n'est pas capable de construire lui même des objets-fonctions satisfaisant certaines propriétés. Or l'expérience le prouve assez bien, l'élève n'est pas capable très souvent, tout seul de dépasser le vocabulaire. Il faut l'y aider.

<u>Mais d'abord que doit-on dégager d'important sur la notion de fonction</u> ?

DU POINT DE VUE CONCEPTUEL :

Par dessus tout le fait suivant : pour fabriquer une fonction de E vers F il suffit de choisir deux ensembles E et F , et d'associer à tout élément de E un élément arbitrairement choisi de l'ensemble F .

Puis les autres faits suivants qui en résultent (pour les fonctions de E dans ℝ (E partie de ℝ) qui nous intéressent en premier lieu) :

1°) que E peut être une partie quelconque de ℝ (pas nécessairement une réunion d'intervalles).

2°) Qu'une fonction f n'est pas nécessairement définie par des assemblages algèbriques permettant le calcul de f(x) connaissant x ; (par exemple ; la fonction "partie entière").

3°) Qu'une fonction se définit ponctuellement et donc qu'il en résulte :

a) Que lorsqu'il y a calcul, l'algorithme permettant de calculer le nombre f(x) à partir du nombre x n'est pas nécessairement le même pour tous les nombres de l'ensemble de départ.

b) Que si x est "proche" de y , f(x) n'est pas nécessairement "proche" de f(y).

4°) Que deux fonctions définies sur deux parties disjointes peuvent être considérées comme deux "morceaux" d'une même fonction.

5°) Que si E est une partie infinie de ℝ , il est impossible d'écrire tous les couples (x, f(x)) et donc que pour définir explicitement une fonction sur E il va falloir trouver un procédé commode pour la décrire en un nombre fini de mots, d'où la nécessité en particulier de la notation "x ⟶ f(x) , si x appartient à ..."

6°) Que les fonctions usuelles ne sont qu'une toute "petite" partie de l'ensemble des fonctions de ℝ dans ℝ.

7°) Que la fonction f et le nombre $f(x)$ sont deux êtres mathématiques distincts mais non indépendants.

8°) Que la fonction n'est pas le "procédé" qui permet d'obtenir l'image d'un élément donné.

DU POINT DE VUE OPERATOIRE :

L'égalité de deux fonctions : le fait d'avoir $f(x) = g(x)$ pour tout élément x du domaine de définition n'implique pas en particulier que f et g aient même aspect formel, ou même aspect assemblage algèbrique, ni que le processus d'association $f(x)$ à x soit le même que celui de $g(x)$ au même x .

Les lois d'addition, de multiplication sur l'ensemble $\mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ (on additionne, on multiplie ponctuellement pour tous les points)

La composition.

COMMENT AMENER LES ELEVES A PRENDRE CONSCIENCE DE CES FAITS LA, c'est-à-dire à avoir une bonne idée de la notion de fonction.

Ce qui semble certain c'est que l'élève ne peut pas appréhender la notion de fonction par le vocabulaire et les mises en garde. Il semble presque certain qu'il y arrivera si on lui montre comment on peut construire les fonctions et si on lui demande d'en fabriquer lui même répondant à certaines exigences et ce avant l'étude des fonctions particulières du programme (On nous a objecté, on nous objectera peut-être encore, que demander de trouver une fonction prenant quatre valeurs données en quatre points donnés n'est pas très palpitant pour les élèves ; ce doit être vrai, mais nous pensons que c'est un moyen plus valable que d'autres de s'assurer de la compréhension du concept : un élève qui répond convenablement n'est pas loin de posséder l'essentiel - nous faisons remarquer que la démonstration de l'associativité d'une loi dont on ne voit pas l'utilité ne doit pas être non plus très palpitante et l'associativité est un concept moins utile à ce niveau que celui de fonction).

Nous proposons donc dans ce sens, un projet de leçon sur les fonctions, (classe de seconde). Cette "leçon", bien entendu, n'est pas donnée comme modèle : on veut simplement indiquer quelques aspects sur lesquels il paraît important d'insister. Elle pourra paraître longue en regard du temps qui lui est généralement consacré. Elle nous paraît pourtant fondamentale pour une bonne préparation à l'analyse, et nous semble donc avoir priorité sur d'autres leçons de cette classe. D'ailleurs, il n'est pas nécessaire qu'elle soit faite "linéairement", certains exercices peuvent être donnés longtemps après dans l'année, certains même en début de la classe de première. Enfin pour un même exercice, il est parfois indiqué plusieurs variantes.

La leçon est magistrale par morceaux (par exemple pour l'exercice 2) ; certains exercices sont prévus pour être travaillés individuellement ou par groupes, puiqu'un objectif de la leçon est précisément la manipulation et la construction.

VERS LA CONTINUITE DE $(x \longrightarrow x^2)$, $(x \longrightarrow \frac{1}{x})$

L'étude de ces deux fonctions là figurent explicitement au programme de la classe de seconde.

Il nous semble que tracer ces courbes d'un trait continu à partir d'un tableau de variations et d'un nombre fini de points peut déflorer le chapitre sur la continuité. Nous proposons quelques exercices simples de majorations pouvant conduire à la justification du trait continu. (cf. plus loin en fin de leçon).

DEUX TESTS SUR LA COMPRÉHENSION DE LA NOTION DE FONCTION

Ces deux tests reprennent et complètent un test élaboré en 1975 qui avait été utilisé dans 18 classes, et dont nous avions publié une analyse des résultats dans le premier fascicule "fonctions" (édition 1974-75).

Nous avons dans le préambule rappelé quelles sont à notre avis les composantes essentielles de la notion de fonction, ces deux tests ont comme objectif de cerner le degré de compréhension de ces diverses composantes par les élèves du second cycle de l'enseignement secondaire.

1°) Le test A a un caractère nettement conceptuel : il s'agit pour l'élève de construire des fonctions vérifiant certaines conditions, de reconnaître si un dessin, une phrase correspond à la définition d'une fonction et de sa représentation graphique, s'il sait distinguer fonction f et nombre $f(x)$. La plupart des questions posées admettent de multiples réponses (exercices de construction) et l'élève doit faire preuve d'initiative (il est toujours intéressant de voir quels types d'initiatives sont prises par les élèves). Pour ces raisons il nous semble adapté aux classes de première et de terminale.

2°) Le test B a un caractère opératoire plus marqué : les six premières questions sont consacrées à la notion "d'égalité" de deux fonctions, les quatre suivantes aux "opérations" sur les fonctions. Il s'agit de reconnaître sous deux habillages différents la même fonction, de distinguer deux fonctions ayant des points communs, de calculer des sommes ou des produits de fonctions. Pour ces raisons ce test nous semble adapté pour les classes de seconde et de première.

Le test A vu son caractère a été soumis à des élèves de 1ère et de terminale, le test B à des élèves de seconde et de première.

Nous donnons

1°) L'énoncé du test,

2°) Des résultats statistiques,

3°) Quelques commentaires sur les résultats.

Nous ne pouvons prétendre à donner une analyse finie, ni honnêtement à dégager des résultats moyennement valables : pour certaine question, telle classe aura presque toutes les réponses bonnes, telle autre presque toutes mauvaises (on verra néanmoins que pour certaines questions il y a une bonne répartition des mauvaises réponses). On notera pourtant que les résultats globaux donnent des indications précieuses et que les bonnes réponses ne sont pas forcément meilleures au niveau $n+1$ qu'au niveau n (par exemple, la moyenne des résultats des sections C est sensiblement égale à la moyenne des résultats des terminales).

Le test ne permet pas de déceler l'origine des fautes, pour nous il ne fait guère de doute qu'elles viennent de ce que dans la présentation de la notion de fonction, le verbalisme a caché les arbres de la forêt.

QUELQUES INDICATIONS POUR LE PASSAGE DES TESTS

La durée du test A est prévue pour 30 à 35 minutes, celle du B pour 45 minutes (50 en seconde).

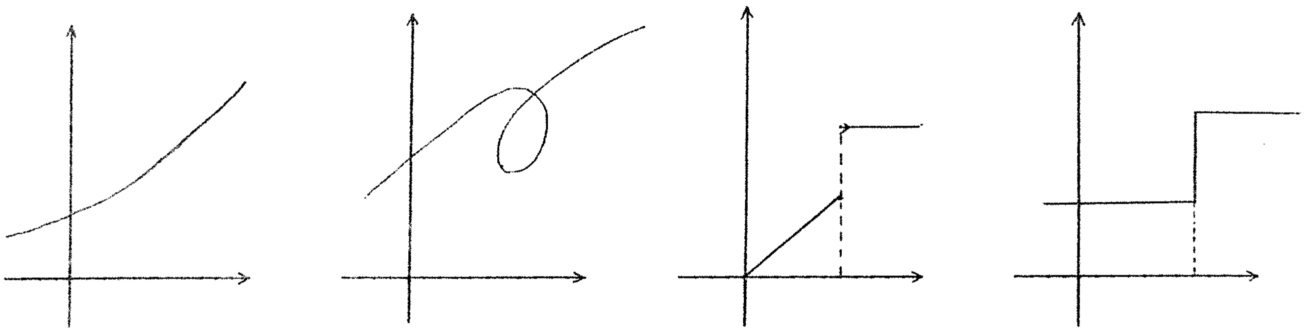
Les élèves devront être avertis que les questions sont faciles naïves même, et que les réponses sont immédiates pour qui a compris, afin qu'ils ne doutent pas de leurs réponses devant le caractère évident de celles-ci.

Conseiller aux élèves de ne pas sécher outre mesure sur une question, et qu'il vaut mieux dans ce cas passer à la question suivante.

TEST A

(Nous indiquons le temps prévu pour chaque question)

4' *1°) Les graphiques suivants sont-ils des représentations graphiques de fonctions ?*



oui *non* *oui* *non* *oui* *non* *oui* *non*

4' *2°) Trouver une fonction f dont le domaine de définition est $\mathbb{R}$ et telle que*

$$f(0) = 0{,}762 \quad ; \quad f(1) = \sqrt{5} \quad ; \quad f(2) = -2$$

Réponse :

2' *3°) Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = 1$ pour tout x élément de $\mathbb{R}$; u et v étant deux éléments de $\mathbb{R}$, quelle est l'image de $u + v$*

Réponse :

4' *4°) "Soit x un élément de $\mathbb{R}$; si x est à égale distance de deux entiers relatifs, on associe à x le plus grand de ces deux entiers, sinon on associe à x l'entier le plus proche". A-t-on défini ainsi une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?*

Réponse et justifications de la réponse :

4' *5°) Trouver une fonction* f *dont le domaine de définition est* $\mathbb{R}$ *et telle que l'image de tout entier positif impair soit supérieure à* 7

<u>*Réponse*</u> :

4' *6°) Trouver une fonction* f *dont le domaine de définition est* $\mathbb{R}$ *et dont l'ensemble image soit l'ensemble* $\mathbb{N}$

<u>*Réponse*</u> :

5' *7°) Trouver une fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *telle que*

a) $f(0) = 2$

b) la fonction de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ $\quad x \longrightarrow f(x) - f(1)$

soit constante.

<u>*Réponse*</u> :

6' *8°) Trouver trois fonctions* <u>*distinctes*</u> f_1, f_2, *et* f_3 *définies sur* $\mathbb{R}$ *telles que quel que soit le réel* x

$$|f_1(x)| = |f_2(x)| = |f_3(x)| = 2$$

<u>*Réponse*</u> :

TABLEAU STATISTIQUE SUR LE TEST A

441 élèves ont "subi" le test.

45 % des réponses viennnent des classes de Terminales.

55 % des réponses viennent des classes de Première.

60 % des réponses viennent de la section C .

POURCENTAGE de BONNES REPONSES

QUESTIONS	Sur l'Ensemble	Sur les Terminales	Sur la section C
N° 1	72	68	72
N° 2	28	33	34
N° 3	85	88	88
N° 4	47	51	50
N° 5	90	92	91
N° 6	42	56	46
N° 7	59	63	64
N° 8	8	9	8

COMMENTAIRES SUR LE TEST A

On peut remarquer que les résultats des élèves de Terminales ne sont guère meilleurs que ceux de Première à l'exception près de la question n° 6 (est-ce le fait qu'en Terminale $\mathbb{N}$ est au programme ?) et que la moyenne des résultats des sections C est sensiblement égale à la moyenne des résultats de Terminale.

1ère question :

Les mauvaises réponses se répartissent à peu près également entre les trois derniers dessins.

2ème question :

Assez significatif que 7 élèves sur 10 ne sachent pas répondre à une telle question en quatre minutes. Environ 4 élèves sur 10 n'ont donné aucune réponse ; on trouve quelques réponses du genre : une telle fonction ne peut pas exister ; bien que les valeurs numériques aient été choisies pour dissaduer les élèves de se lancer dans des claculs, ils ont fréquemment cherché la réponse sous forme d'un polynôme de second degré... Ce trinôme est souvent faux (sauf pour les $\mathbb{C}$).

3ème question :

C'est une question bien facile, il y a néanmoins 12 % des élèves de Terminale qui répondent $f(u+v) = 2$.

4ème question :

Cette question est après examen des réponses mal posée car elle fait intervenir trop d'éléments pour qu'on puisse tirer des enseignements valables. (si x est à égale distance de deux entiers, il y a une infinité de couples d'entiers dont x est équidistant et par conséquent son image n'est pas définie). On a compté comme bonnes réponses celles qui disaient que l'on a une fonction car chaque élément de $\mathbb{R}$ a une image définie. On a aussi compté comme bonnes réponses celles qui disaient que l'on n'a pas défini ainsi une fonction en le justifiant par le fait que certains éléments pouvaient avoir plusieurs images par le procédé indiqué.

Le nombre des bonnes réponses n'est pas très élevé.

5ème question :

La majeure partie des réponses est $f : x \longrightarrow x+7$

6ème question :

C'est une question mieux réussie en Terminale qu'en Première (connaissance de $\mathbb{N}$?)

En Première beaucoup de réponses sont du type :

$x \longrightarrow 2$ ou $x \longrightarrow x^2$ (!)

Mais on trouve également beaucoup d'erreurs semblables en Terminale ainsi que de nombreuses abscences de réponses.

Au total sur 100 élèves de Terminale, 44 ne savent pas résoudre ce petit problème.

7ème question :

Les mauvaises réponses sont là encore souvent des non réponses. En Première beaucoup d'élèves qui donnent de mauvaises réponses voient 2 conditions séparées, autrement dit, voient deux fonctions au lieu d'une. Cette vision n'est pas le fait des Terminales.

8ème question :

Assez significatif que le nombre de bonnes réponses est extrêmement faible même en Terminale ; et ce n'est pas la valeur absolue qui a fait barrage ; les erreurs trouvées sont du même type que celles relevées dans le test que nous avions commenté précédemment (éd. 1974-75) c'est-à-dire pour la troisième fonction

$$x \longrightarrow \sqrt{4} \qquad\qquad x \longrightarrow 2 \cos o$$

$$x \longrightarrow 2 \log e \qquad 2 \longrightarrow \frac{2|x|}{|x|} \qquad x \longmapsto 2\sqrt{\frac{|x+1|}{|x+1|}}$$

etc...

TEST B

2' 1°) "Les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$f : x \longrightarrow 2$ $\qquad$ $g : x \longrightarrow \sqrt{4}$

sont égales".

Cette affirmation est :

☐ vraie $\qquad$ fausse ☐

2' 2°) "Les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$f : x \longrightarrow x^2$ $\qquad$ $g : u \longrightarrow u^2$

sont égales".

Cette affirmation est :

☐ vraie $\qquad$ fausse ☐

3' 3°) "Les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$f : x \longrightarrow \sqrt{x^2}$

$g : x \longrightarrow \sup \{-x, x\}$ [$\sup \{-x, x\}$ désigne le plus grand des deux nombres x et $-x$] sont égales".

Cette affirmation est :

☐ vraie $\qquad$ fausse ☐

3' 4°) "Les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$f : x \longrightarrow |x|$ $\qquad$ $g : x \longrightarrow x^2$

sont telles que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$, $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$ donc elles sont égales"

Cette affirmation est :

☐ vraie $\qquad$ fausse ☐

3' 5°) "Les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$f : x \longrightarrow \sqrt{|x|}$$
$$g : x \longrightarrow x^2$$

sont telles que

$$f(0) = g(0) = 0$$
$$f(1) = g(1) = 1$$
$$f(-1) = g(-1) = 1$$

donc elles sont égales".

Cette affirmation est

☐ vraie fausse ☐

4' 6°) Trouver deux fonctions f et g distinctes de domaine de définition $\mathbb{R}$ telles que pour tout x de $[-1, +1]$ on ait

$$f(x) = g(x)$$

Réponse :

4' 7°) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x + 1 & \text{pour } x \geqslant 2 \\ f(x) = -x^3 + 3 & \text{pour } x < 2 \end{cases}$$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x) = x^3 - x & \text{pour } x > 2 \\ g(x) = 5x & \text{pour } x \leqslant 2 \end{cases}$$

Quelle est la fonction $f + g$?

Réponse :

5' 8°) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x \quad [0 \, , \, \frac{1}{2}] \\ f(x) = x & \text{si } x \quad]\frac{1}{2} \, , \, 1] \end{cases}$$

Soit n *la fonction nulle définie sur* $[0\ ,\ 1]$ *(quel que soit* x *élément de* $[0\ ,\ 1]$, $n(x) = 0$*).*

Peut-on trouver deux fonctions h_1 *et* h_2 *telles que*
$f.\ h_1 = n$ *et* $f.\ h_2 = n$ *?*

☐ *oui* ☐ *non*

Si oui, lesquelles ?

5' 9°) *Soit* f *la fonction définie sur l'intervalle* $[0\ ,\ 1]$ *de* $\mathbb{R}$ *par*

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x \text{ est décimal} \\ f(x) = x & \text{si } x \text{ est non décimal} \end{cases}$$

Soit n *la fonction nulle définie sur* $[0\ ,\ 1]$ *(quel que soit* $x \in [0\ ,\ 1]$, $n(x) = 0$*).*

Peut-on trouver deux fonctions h_1 *et* h_2 *telles que*
$f.\ h_1 = n$ *et* $f.\ h_2 = n$ *?*

☐ *oui* ☐ *non*

Si oui, lesquelles ?

5' 10°) n *étant la fonction nulle définie sur* $\mathbb{R}$ *(*$n(x) = 0$ *pour tout élément* x *de* $\mathbb{R}$*), le raisonnement suivant est-il correct.*

"Soient f *et* g *deux fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *telles que* $f.\ g = n$ *. Ceci veut dire que, quel que soit le réel* x, $f(x) \times g(x) = 0$ *. D'après les propriétés des nombres réels nous avons donc, quel que soit le réel* x , $f(x) = 0$ *ou* $g(x) = 0$ *et par conséquent* $f = n$ *ou* $g = n$*"*

Le raisonnement ci-dessus est correct

☐ *oui* ☐ *non*

TABLEAU STATISTIQUE SUR LE TEST B

428 élèves l'ont subi

Les réponses venant de première représentent 38 % de l'ensemble.

POURCENTAGE de BONNES REPONSES

QUESTIONS	Sur l'ensemble	Sur les classes de 1ère
N° 1	64	38
N° 2	90	91
N° 3	65	52
N° 4	88	90
N° 5	88	91
N° 6	2	2
N° 7	48	60
N° 8	17	17
N° 9	17	20
N° 10	18	20

COMMENTAIRES SUR LE TEST B

Les questions 1° et 3°, 4° et 5°, 8° et 9° ont obtenu des résultats similaires chez les mêmes élèves.

Questions (1°, 2°) , (4°, 5°) , (2°) :

Il semble que les élèves différencient plus facilement deux fonctions ayant des caractères communs (4°, 5°) qu'ils n'identifient des fonctions égales données avec des habillages différents.

Le nombre élevé de bonnes réponses (90 %) à la question (2°) permet de croire que ce n'est pas l'aspect purement formel d'écritures différentes qui les gêne.

Il nous semble donc que ce qui fait dire à 35 % des élèves de seconde et première (et en première mes résultats sont beaucoup plus mauvais qu'en seconde!) que les fonctions données dans les questions (1° et 3°) sont différentes, c'est que les processus qui associent à chaque x son image sont différents. Evidemment pour $x \longrightarrow 2$ et $x \longrightarrow \sqrt{4}$ c'est à première vue tout à fait incompréhensible, mais si pour 35 % des élèves $\sqrt{4}$ ce n'est pas 2 c'est sans doute que c'est une façon de calculer le nombre 2 . Comme nous l'avons dit dans le préambule, il nous semble essentiel de faire comprendre que si donner une fonction c'est souvent donner un (ou des) processus pour calculer $f(x)$ à partir de x , la fonction n'est pas le processus de calcul.

Question (6°) :

Cette question s'apparente aux questions posées dans le test A - le nombre de réponses correctes infimes vient sans doute du fait que les élèves sont rarement placés dans de telles situations.

Question (7°) :

Le nombre de bonnes réponses est faible 48 % (60 % en première). Les mauvaises réponses viennent toutes de ce que le calcul de $f(2)$ est escamoté. Cela signale l'incompréhension du caractère ponctuel de la défition de la somme de deux fonctions. A signaler également que nombre de réponses (comptées évidemment comme bonnes) donnent pour $x = 2$ $f(x) = 6x + 1$ et non $f(2) = 13$.

Questions (8°, 9°, 10°)

Malgré l'apparente concordance en pourcentage des résultats à ces différentes questions, on peut dire que moins de la moitié des gens ayant donné une bonne réponse au (8° et 9°) ont répondu correctement au 10°. Par contre, ce sont les mêmes élèves qui répondent correctement aux questions (8° et 9°) (la question 9 pourrait donc être éliminée dans une refonte du test) et les élèves qui donnent des réponses correctes ont également répondu correctement à la question 7. On peut estimer qu'il s'agit là des élèves qui ont parfaitement compris le caractère ponctuel de la définition des opérations sur les fonctions et par conséquent du caractère ponctuel du concept de fonction ; le pourcentage semble faible, il est le même en première qu'en seconde.

La 10ème question soulève un problème particulier du fait que plus de la moitié des élèves ayant répondu correctement aux questions 8 et 9 y donnent une mauvaise réponse. Sans doute est-ce l'indice de la difficulté de reconnaître la signification concrète d'un raisonnement, de raisonner sur f lorsque f n'est pas précisée.

Il est fort vraisemblable que les élèves qui ont donné une réponse correcte à cette question après avoir donné des réponses fausses au 8° et 9° ne comprennent pas encore la signification mathématique du "ou" puisque certains prennent soin de préciser en justification : "f et g peuvent être nulles toutes les deux"!.

Il nous semble après dépouillement, que ce test destiné au 2ème et 1ère pourrait être modifié, en supprimant les questions 6° et 9°, en demandant une justification au 10°, en posant deux questions nouvelles pour pouvoir préciser les incompréhensions que révèlent les réponses aux questions 1° et 3°.

INDICATIONS POUR UNE LEÇON SUR LES FONCTIONS

(CLASSE DE SECONDE)

Les élèves doivent connaître : intervalles (en particulier le fait que tout intervalle non réduit à un point contient une infinité d'éléments même si sa longueur est "petite") ; valeur absolue au besoin.

COMMENT FABRIQUER UNE FONCTION

Pour fabriquer une fonction, on se donne une partie E de $\mathbb{R}$ (libre choix) et à chaque élément de E on associe un nombre réel bien déterminé dont le choix n'est soumis à aucune condition.

EXERCICE 1

E étant l'ensemble : $\{0, 5, \frac{1}{2}, 2, \sqrt{2}\}$ trouver une fonction f de E dans $\mathbb{R}$.

Le but de cet exercice est de s'assurer que l'élève OSE choisir pour chaque élément de E un réel quelconque associé.

On fait écrire : $f(0) = \ldots$, $f(1) = \ldots$, etc...

On demande l'ensemble image ; une représentation graphique. On peut faire comparer les résultats, faire remarquer que toutes les fonctions trouvées ne sont pas égales et déjà faire exprimer précisément ce que signifie : "les fonctions f et g sont (ne sont pas) égales".

EXERCICE 2

On prend pour E l'intervalle $[0,1]$. Comment trouver une fonction de E dans $\mathbb{R}$?

Le but de cet exercice est de faire prendre conscience aux élèves de la difficulté, du blocage ; de situer l'origine de cette difficulté (l'ensemble E est infini) et de montrer comment on la contourne :

puisqu'il est impossible d'écrire tous les éléments de E, il va falloir procéder autrement que dans l'exercice 1 ; ce qui amènera à la nécessité de désigner par une même lettre n'importe quel nombre de E et à la notation : $x \longmapsto$ ..

C'est l'exercice clé de la leçon.

Ensuite, pour répondre, on commence par le plus simple :

- à tout nombre de E on peut associer le même nombre a : fonction constante ; notation, ensemble image, graphique.

- à tout nombre de E on peut associer "son double", traduction, notation, ensemble image.

- les fonctions : $x \longmapsto ax + b$, cas particulier : $x \longmapsto x$.

- à tout nombre de E on associe son carré, notation, ensemble image.

- les fonctions polynômes.

- fonctions "racine carrée", valeur absolue.

- fonctions rationnelles : $x \longmapsto \frac{ax + b}{cx + d}$, c et d choisis pour que f soit bien définie sur E (discussion).

Lorsque tout le stock paraît épuisé, on essaiera de provoquer l'étonnement en affirmant qu'il existe encore bien d'autres moyens de fabriquer une fonction ; on insiste alors sur le fait que le choix du nombre f(x) lié à x étant arbitraire, il n'est pas nécessaire que le nombre f(x) "s'exprime à partir du nombre x de la même façon pour tous les nombres". Ainsi : en associant à tout nombre x de $[0,\frac{1}{2}]$ le nombre x^2 , et à tout nombre x de $]\frac{1}{2},1]$ le nombre $\sqrt{x}$, on définit bien une et une seule fonction de E dans $\mathbb{R}$; et on le prouve. Notation.

Autre exemple : les fonctions affines par morceaux ;

Autre exemple important : fonction caractéristique d'une partie E' de E : on prend d'abord pour E' un ensemble fini ; puis un ensemble dénombrable du type $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots , \frac{1}{n}, \dots\}$; puis une réunion d'intervalles fermés disjoints ; puis l'ensemble des décimaux ; l'ensemble des rationnels on essaie de tracer les graphiques.

EXERCICE 3 (Contrôle)

1°) On considère l'ensemble $E = [0,1]$; à 0 on associe 0 , à 1 on associe $\frac{1}{2}$, à tout nombre x de $]0,1[$ on associe $2x + \sqrt{2}$.

A-t-on défini une fonction de E dans $\mathbb{R}$? Si oui en appelant f cette fonction, l'écrire avec les notations usuelles.

2°) $E = [0,1]$; si y est un nombre de $[0,\frac{1}{2}]$ on lui associe le nombre y^3 ; si y est un nombre de $]\frac{1}{2},1[$ on lui associe le nombre $\frac{1}{y}$; à 1 on associe 3 . Mêmes questions.

3°) $E = [0,1]$; si u est un nombre décimal on lui associe le nombre qui figure après la virgule dans l'écriture de u dans le système décimal : si x est un réel non décimal on lui associe x ;
Mêmes questions, plus :
Quel est l'ensemble image des décimaux ? Quel est le graphe de la fonction ? Représentation.

4°) $E = \mathbb{R}$. Trouver une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont l'ensemble image est : $\{1, 3, 2\}$.

5°) E = $[0,1]$; si x est un nombre de $[0,\frac{1}{2}]$ on lui associe le nombre 1 ; si x est un nombre de $[\frac{1}{2},\frac{2}{3}]$ on lui associe le nombre 2 ; si y est un nombre de $[\frac{2}{3},1]$ on lui associe 3 . On n'a pas défini ainsi une fonction de E dans $\mathbb{R}$.

Pourquoi ? (Faire un dessin). Comment modifier ?

6°) E = $[-4,4]$ si x est un nombre de $[-4,-2]$ on lui associe sa valeur absolue, si x est un nombre de $[-2,1]$ on lui associe le nombre $\frac{x^2}{2}$, si x est un nombre de $[1,4]$ on lui associe le nombre $\frac{1}{2}$. A-t-on ainsi défini une fonction ?

EXERCICE 4 (Fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$)

Convention : on écrit ainsi la liste des images d'une telle fonction : f(0) , f(1) , f(2) , f(3) ,........... , f(n) , ...
(On donne des exemples. Une telle fonction est une suite de nombres réels)

1°) On écrit le début de la liste des images d'une suite :

1, 3, 5, 7, 9, ...

et on suppose qu'elle "se continue logiquement". Trouver le nombre qui vient après 9 (c'est-à-dire f(5)). Puis trouver f(10) ; f(12) ; ... ; Si n est un entier quelconque, comment trouver son image f(n) ?
(Donner avant des exemples faisant comprendre le sens de "logiquement continuée")

2°) On écrit la suite : ("logiquement continuée")

$1 , \frac{1}{1} , 1 , \frac{1}{3} , 1 , \frac{1}{5} , 1 , \frac{1}{7} , \ldots , \ldots$

Quelle est l'image de 56 ? de 116.454 ? de 10^{64} ?

Quelle est l'image de 11 ? de 203.631 ?..

Quelle est l'image d'un nombre pair ? Quelle est l'image d'un nombre impair ? Ecrire avec les notations usuelles la fonction f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ ainsi définie.

3°) On écrit la suite : ("logiquement continuée")

1, 3, 7, 9, 13, 15, ...

Trouver l'image d'un nombre entier n . Ecrire la fonction ainsi définie.

4°) On écrit la suite : ("logiquement continuée")

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Quel nombre vient après 13 ? Ecrire quelques termes consécutifs de la suite. Comment calcule-t-on l'image de l'entier n quand on connait l'image de l'entier $n-1$ et de l'entier $n-2$? L'écrire.

5°) Autres exemples.

6°) Demander aux élèves d'inventer des débuts de suites qui se continuent logiquement et de les proposer à leurs camarades pour que ceux-ci découvrent la fonction ainsi définie.

REMARQUE : Cette série d'exercices a pour but de montrer des procédés classiques de construction de fonctions sur un ensemble infini (ici $\mathbb{N}$) qui ne sont pas analogues à ceux utilisés habituellement dans $\mathbb{R}$. De même que dans $\mathbb{R}$ toute les fonctions ne sont pas des polynômes, des fonctions rationnelles,.. dans $\mathbb{N}$ les fonctions ne sont pas des toutes des suites "logiquement continuées", il convient sans doute de le faire remarquer.

EXERCICE 5 (transition)

Une personne dit : "je définis une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en associant à tout nombre réel x son inverse $\frac{1}{x}$. A-t-elle raison ? A-t-elle tort ? (Justifier la réponse). Mêmes questions avec : en associant à tout nombre réel x un nombre y tel que $y^2 = x$

Ces exercices amènent les révisions sur le domaine de définition (nombre d'élèves confondent avec l'ensemble image).

Divers exemples. Dans les cas simples (fonction constante, etc.) on demande de trouver l'ensemble image.

AUTRES EXERCICES POSSIBLES

6 - Trouver une fonction f définie sur tout l'ensemble $\mathbb{R}$ telle que si le nombre x est dans R^*+ le nombre $f(x)$ y soit aussi ; que si le nombre x est dans R^*- , $f(x)$ y soit aussi ; que $f(0)$ ne soit pas nul.

7 - Trouver une fonction définie sur tout l'ensemble $\mathbb{R}$ dont l'ensemble image soit infini et telle que pour tout nombre u , $f(u)$ soit positif ou nul.

DEFINITION D'UNE FONCTION DE E VERS F

La terminologie ne paraît pas très fixée, si l'on en juge par les sujets d'examen et des collègues demandent une "définition unificatrice", susceptible de plaire à tous.

L'objet du préambule sur les fonctions était d'indiquer que c'est la richesse des exemples vécus qui, seule, peut aider les élèves à prendre conscience de toutes les composantes du concept de fonction ; que la définition ne peut être qu'un premier pas vers la compréhension, et qu'à la limite, ce qui importe ce n'est pas la définition du mot fonction, mais l'explicitation de quelques procédés de fabrication, (il est évidemment exclu de construire des fonctions définies par des séries, des limites de suites de fonctions, etc...,), ainsi que les règles de calcul sur les fonctions et la définition de l'égalité.

En ce qui concerne les fonctions, il nous semble que les abus de langage sont inévitables, et peut-être même souhaitables (en particulier pour les compositions).

Voici la définition et les conventions que nous donnerions :

DEFINITION D'UNE FONCTION D'UN ENSEMBLE E DANS UN ENSEMBLE F

> On appelle fonction de E dans F une application dont l'ensemble de départ E' est inclus dans E et dont l'ensemble d'arrivée est F. E' est appelé domaine de définition de la fonction.

Dans un premier temps, on n'étudiera que des fonctions de R dans R . Dans la pratique le domaine de définition n'est pas toujours précisé, il est nécessaire de la préciser avant tout travail sur la fonction ; lorsqu'est seulement donnée la façon d'associer au nombre x le nombre $f(x)$, on convient alors que le domaine de définition est l'ensemble des réels qui ont, par le procédé indiqué, un nombre réel associé (ou une image). Par contre l'ensemble d'arrivée est toujours $\mathbb{R}$.

On se permettra les abus de langage et d'écriture suivants :

"Soit f la fonction qui au nombre réel y associe le nombre $f(y)$ ainsi défini : ...."

"Soit f la fonction définie par : ...."

"Soit f la fonction : $x \longmapsto$ ...."

"Soit f la fonction définie sur E' par : ...."

Mais dans la rédaction des textes mathématiques, on adoptera la terminologie suivante :

"Soit f la fonction d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : ...."
lorsque le domaine de définition n'est pas donné.

"Soit f la fonction de E dans $\mathbb{R}$, définie sur E par : ...."
lorsqu'on veut préciser que le domaine de définition est E.

REMARQUES SUR LA DEFINITION ET LES CONVENTIONS

1°) Nous n'avons pas retenu la définition présentant la fonction comme une relation particulière de E vers F, car d'abord, elle n'est pas très mémorisable (les élèves se trompent souvent entre "au plus une image" et "au moins une image"), ensuite, elle oblige à passer un certain temps sur la distinction entre application et fonction, à introduire l'expression : "application associée à la fonction" qui dans la pratique ne paraît pas d'un grand intérêt.

2°) Une application étant un triplet (E, G, F), (E, F, G sont des ensembles assujettis à certaines conditions), en toute rigueur les applications :

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \rightsquigarrow \sqrt{x} \end{array}$$

et

$$g : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \rightsquigarrow \sqrt{x} \end{array}$$

ne sont pas égales. En précisant que l'ensemble d'arrivée d'une fonction est R, nous voulons éviter ce genre de problèmes. Certes la mention de l'espace d'arrivée est essentielle dans la définition d'une application, on s'en rend compte par exemple, dans l'étude des produits tensoriels, mais dans le cadre de l'enseignement secondaire, il n'y a aucun inconvénient à considérer que l'espace d'arrivée est R et à ne pas sortir de cette situation.

Par contre, il est essentiel de distinguer deux applications (fonctions) qui n'ont pas mêmes ensembles de départ (respectivement : mêmes ensembles de définition), car la pratique élémentaire nous met fréquemment en situation de faire ce genre de distinction ("simplification" d'une fonction rationnelle, somme, produit, composition de fonctions).
A ce propos, il nous semble judicieux d'introduire la notion de restriction, nous éviterons ainsi nombre de périphrases.

3°) Nous avons remplacé "fonction numérique de la variable réelle" par l'expression "fonction d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$" (ou vers $\mathbb{R}$) ceci évite l'emploi du mot "variable"; nous ne voyons que des inconvénients dans l'emploi de ce mot indéfinissable qui n'a même pas l'avantage de la commodité : toutes les expressions où il intervient peuvent être avantageusement remplacées, tout en conservant au langage un caractère "imagé" soutenant l'intuition.

En fait lorsqu'on dit : "on appelle x la variable", on ne dit rien d'autre que x est un nombre réel du domaine de définition. Définir correctement le mot variable pose plus de problèmes que ça n'en résout. A ce stade, il apparaît que la définition du mot variable est superflue. Par ailleurs, insister sur ce mot risque d'amener à la notion confuse de "nombre variable" qui va se superposer à la notion de fonction (toujours la confusion entre f et $f(x)$) ; et plus tard, l'élève ne sait plus très bien si l'on doit parler de limite de la fonction f ou de limite de $f(x)$. La notion confuse de nombre variable a été remplacée par celle de fonction. Dire que c'est la lettre qui est variable n'apporte guère de renseignements.

Il paraît suffisant de faire prendre conscience que la lettre x désigne un nombre quelconque pris dans un certain ensemble. Par contre il paraît très utile de faire remarquer que, par exemple, la fonction $x \longmapsto 2x + 1$, peut aussi s'écrire $y \longmapsto 2y + 1$. Par la suite, on pourra pour habituer l'élève, employer d'autres lettres que la lettre x pour désigner la variable.

4°) Il est à noter que de nombreux auteurs étrangers ne donnent pas la définition conceptuelle du mot fonction mais la définition opérationnelle. Ainsi Monsieur BSZ. NAGY dans son livre (d'un bon niveau), "Introduction aux fonctions réelles" (1965) dit ceci : "comme nous l'avons indiqué dans l'Introduction, le concept de fonction a subi un long développement avant d'atteindre la forme suivante :

Si on associe à chaque élément h d'un ensemble H un élément d'un ensemble K , et si on note cet élément par $f(h)$, alors on a défini une fonction f sur l'ensemble H".

5°) Par représentation graphique nous entendons le dessin selon les conventions habituelles du graphe. A propos des mots ou expressions : graphe; courbe représentative, représentation graphique, etc... nous ne soulevons aucun problème de définition à ce niveau, cela ne paraît pas nécessaire.

EXERCICES DE DESSIN

Il est bon en vue de limites, continuité, dérivation, que les élèves soient habitués à ce que certaines "courbes" dans le plan puissent être considérées comme la représentation graphique d'une fonction, et qu'ils "dessinent des fonctions" répondant à certaines exigences, sans pour cela expliciter par le calcul ou le langage, les fonctions vérifiant ces exigences. En outre, il est permis d'espérer qu'avec le graphique les élèves prendront mieux conscience de la différence de nature entre f et $f(x)$.

EXERCICE 8

1°) Dessiner la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

Dessiner une fonction non nulle, qui s'annule une infinité de fois (abus de langage à expliciter)

2°) Dessiner une fonction f non constante telle que pour tout x de son domaine de définition (supposé infini) on ait : $-1 < f(x) < 1$

3°) Représenter graphiquement la fonction partie entière sur l'intervalle de $\mathbb{R}$: $[0,4]$. Puis représenter graphiquement la droite d'équation $y = 2x - 2$; En examinant le graphique, pensez-vous que l'on puisse trouver une fonction f définie sur $[0,4]$ et telle que pour tout x , on ait $E(x) \leqslant f(x) \leqslant 2x - 2$?

4°) Dessiner une fonction définie sur $[0,2]$, telle que pour tout $y > 1$, et tout $x < 1$, on ait $f(y) - f(x) = 2$;

5°) Dessiner :

- une fonction f définie sur $[0,1]$ telle que l'ensemble image de f soit l'intervalle $[0,1]$;
- une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que son ensemble image soit $[0,1]$;
- une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que son ensemble image soit $[0,1]$ privé du point $\frac{1}{2}$;
- une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que son ensemble image soit $\mathbb{N}$.

REPRESENTATION GRAPHIQUE : UTILISATION

EXERCICE 9 :

1°) Représenter graphiquement la fonction f $(x \longmapsto f(x))$ où x désigne le poids en gramme d'une lettre ou d'un colis postal et $f(x)$ le prix en francs de l'affranchissement relatif au poids x. (donner le tableau correspondant des P et T).

2°) Représenter graphiquement la fonction f suivante : $(x \longmapsto f(x)$, x est le revenu imposable, et $f(x)$ le montant de l'impôt relatif au revenu x, en francs :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 6600 \\ f(x) = 0{,}1\,x - 660 & \text{si} \quad 6600 \leqslant x \leqslant 11500 \\ f(x) = 0{,}15x - 1235 & 11500 \leqslant x \leqslant 19000 \\ f(x) = 0{,}2\,x - 2185 & 190000 \leqslant x \leqslant 28000 \\ f(x) = 0{,}3\,x - 4985 & 28000 \leqslant x \leqslant 44000 \\ f(x) = 0{,}4\,x - 9385 & 44000 \leqslant x \leqslant 87000 \\ f(x) = 0{,}5\,x - 18085 & 87000 \leqslant x \leqslant 173000 \\ f(x) = 0{,}6\,x - 35385 & 173000 \leqslant x \leqslant \end{cases}$$

REMARQUES IMPORTANTES (?)

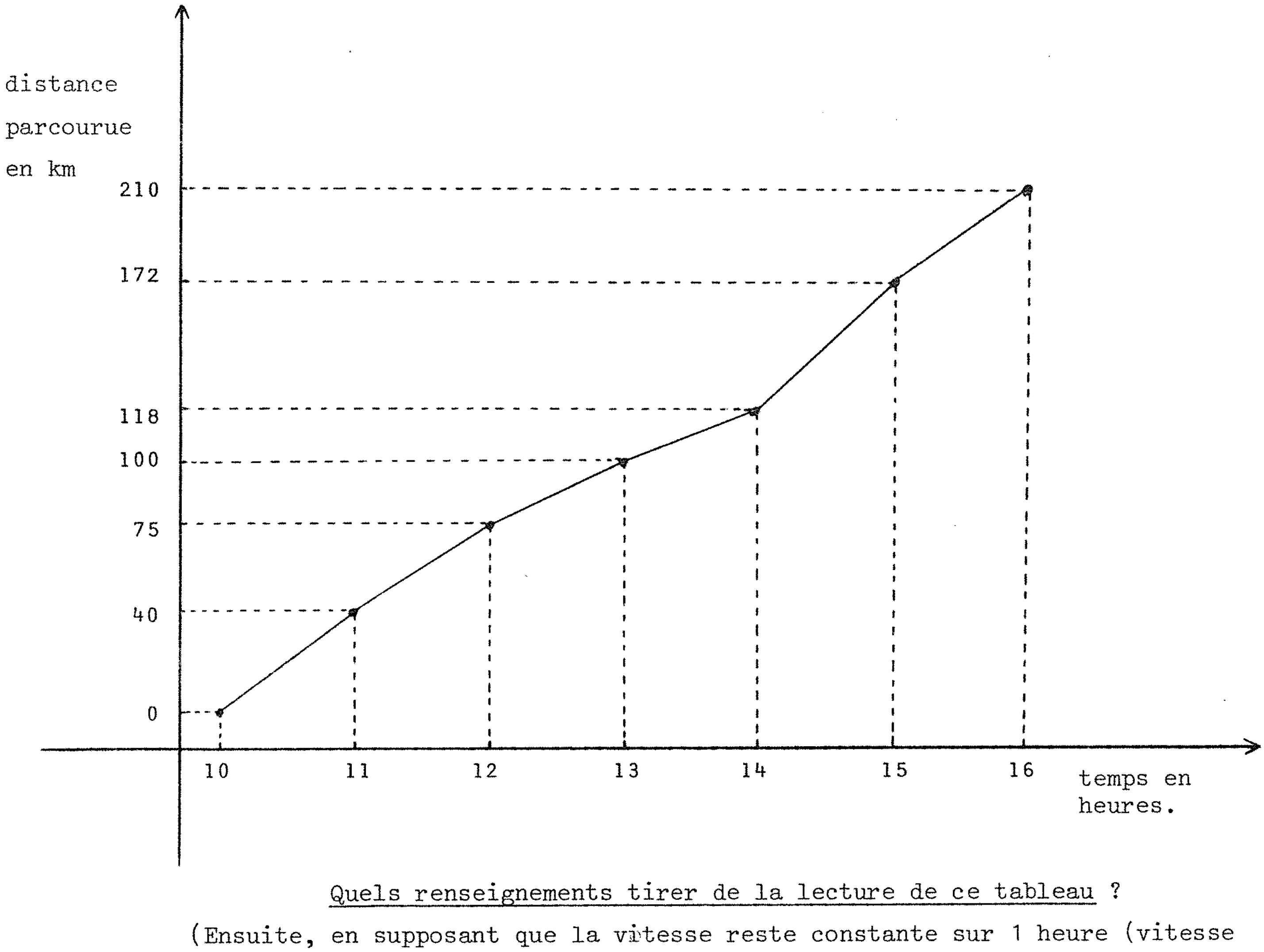
1°) Les élèves feront remarquer, où l'on pourra faire remarquer que pratiquement les nombres réels sont superflus pour indiquer le poids d'une lettre, ou un revenu imposable ; les nombres décimaux suffisent pour cela ; mais cependant il est plus facile et plus commode de travailler dans R . On rejoint là l'idée d'une certaine "mathématisation" qui pourra être approfondie lors de l'étude des approximations des réels (mesures).

2°) On fera bien entendu remarquer l'avantage du graphique sur le tableau de nombres : lecture plus rapide, vision des variations, de croissance rapide ou lente, etc... Bref, on apprendra dès maintenant à lire un graphique pour en tirer des renseignements utiles. Par exemple : l'étude du montant de l'impôt en fonction du revenu peut donner lieu à un certain nombre de commentaires.

Autre exemple, pour les sportifs :

EXERCICE 10

On donne le graphique suivant : (étape du tour de France)



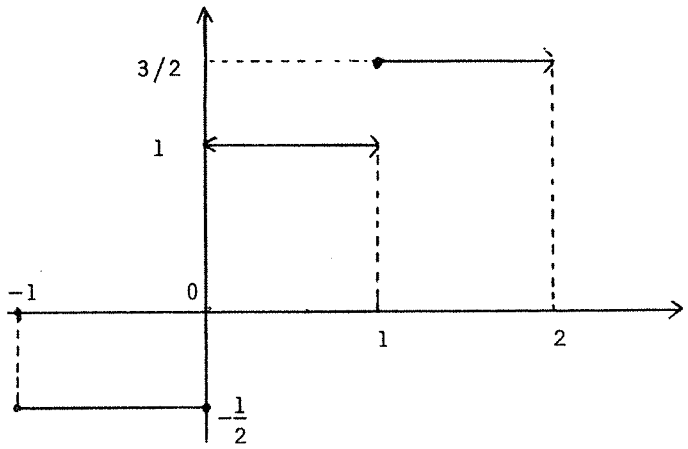
Quels renseignements tirer de la lecture de ce tableau ?

(Ensuite, en supposant que la vitesse reste constante sur 1 heure (vitesse moyenne) dessiner la représentation de la vitesse "fonction" du temps, sachant que la vitesse moyenne est de 40 km à l'heure sur le plat, donner un aperçu du profil de l'étape).

3°) On montrera à chaque occasion de représentation graphique la différence entre f et $f(x)$: sur un graphique, f s'identifie à toute la courbe, le nombre $f(x)$ s'identifie à un point de l'axe des ordonnées. On interprétera aussi graphiquement l'ensemble image.

EXERCICE 11

On donne une fonction f définie sur $[-1, 2]$ par son graphe représenté ci-dessous.



Définir la fonction $f : x \longmapsto f(x)$ de la manière usuelle.

EXERCICE 12 Fonction partie entière

Soit x un nombre réel. Alors il existe un entier relatif unique n tel que : $n \leqslant x < n+1$; On pose $n = E(x)$ et on dit que n est la partie entière de x .

Exemple : si $x = \sqrt{2}$, $E(x) = 1$; si $x = 1$, $E(x) = 1$ ...
Représenter graphiquement la fonction : $x \longmapsto E(x)$ lorsqu'on restreint son intervalle de définition à $[-5 , + 6]$

EXERCICE 13

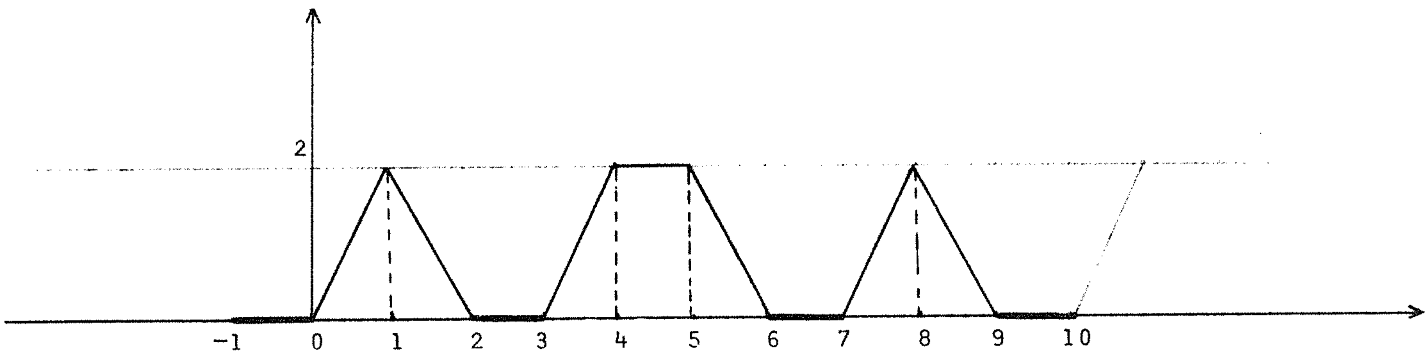
On donne sur un graphique deux points A et B (d'abscisses différentes) par leurs coordonnées. Trouver la fonction linéaire dont le graphe contient les points A et B.
Trouver une fonction non linéaire ayant la même propriété.

EXERCICE 14

On donne sur un graphique trois points A, B, C par leurs coordonnées. Trouver une fonction dont le graphe contient ces 3 points. On donnera plusieurs situations en particulier une situation où deux des trois points sont sur une droite parallèle à oy.

EXERCICE 15

On donne la frise suivante :



On la suppose prolongée indéfiniment. Expliciter la fonction qu'elle représente. (idée de "continuation logique" et de périodicité).

EXERCICE 16

Le cercle est-il la représentation graphique d'une fonction ? Même question avec le demi-cercle.

AUTRES EXERCICES POSSIBLES (dès la classe de TROISIEME voire de QUATRIEME)

1°) Applications définies sur un ensemble fini

a) A chaque département français on associe son numéro minéralogique.
(Si le département x est voisin géographiquement du département y , f(x) n'est pas voisin de f(y)).

b) Code postal : à chaque localité x on attribue un nombre de 5 chiffres f(x) : (expliciter le mode d'attribution qui est en fait plus compliqué, mais on peut se limiter aux villes importantes ; ou aux localités du département de la Vienne). Faire écrire f(x) pour quelques x donnés. Faire trouver un ensemble image (pour un ensemble de départ bien précisé) - bornes de cet ensemble. Représentation graphique.

c) N° d'identification individuel (N° SS ou N° INSEE ?)

Sur une population d'individus on pratique l'opération suivante : à un individu x on associe un nombre f(x) de la manière indiquée maintenant : f(x) est pour tout x un nombre de 5 chiffres : abcde et :

si x est masculin a = 1

si x est féminin a = 2

bc : deux derniers chiffres de l'année de naissance de x

de : deux chiffres indiquant le mois de naissance de x.

On donne des exemples :

Pour une population donnée (celle de la classe par exemple) demander de trouver l'ensemble image ; les bornes de cet ensemble. L'application ainsi définie est-elle injective ?

On peut reprendre avec 7 chiffres pour le nombre f(x) les deux derniers donnant le numéro minéralogique du département de naissance de x. [Discussion possible : sur l'ensemble des salariés français, (mais cet ensemble en est-il un ?) quel doit être le nombre minimum de chiffres de f(x) pour que f soit injective ? Indiquer comment on attribue un numéro personnel de sécurité sociale].

REMARQUE : Un des buts de ces exercices est de proposer des applications définies sur des ensembles finis, mais assez gros, telles que le nombre f(x) ne soit pas un assemblage algébrique.

2°) <u>Fonctions linéaires - affines par morceaux</u>

a) Allongement d'un ressort en fonction du "poids" suspendu ; fournir les données physiques : longueur au repos l_o , coefficient d'élasticité k , poids (force) : f , force de rupture : f_1 .

Discussion sur la validité de la formule : $f = k(l-l_o)$ ou $l = \frac{f+kl_o}{k}$; domaine de définition ; ensemble image. Représentation graphique, lecture, fonction réciproque : quel poids donnerait un allongement numériquement donné ? Domaine de définition de la fonction réciproque, etc...

b) Dilatation d'une tige métallique en fonction de la température. l_o = longueur à 0° degré - α = coefficient de dilatation ; t = température (unités à préciser) - l = longueur à la température
$l = l_o \ (1+\alpha t)$; t_1 = température de fusion?

Discussion sur le domaine de validité de cette formule et mêmes questions qu'au (a).

c) Prix d'un parcours S.N.C.F. Indiquer avec les tarifs actuels comment se calcule le prix d'un parcours par chemin de fer (nous ne donnons pas ces tarifs car ils sont ces temps-ci sujets à variation ; se renseigner auprès de la SNCF, ce n'est pas une publicité).

Faire expliciter la fonction, demander le domaine de définition, l'ensemble image, la représentation graphique, l'existence de la fonction réciproque, etc... ; faire calculer le prix de certains parcours. Y-a-t-il avantage à aller loin plutôt que près ? Un voyageur qui ferait 100 000 kms, paierait-il cher les derniers kilomètres, est-ce prévu ? ...

d) Etablissement d'une facture de consommation d'électricité.

e) Fonction signal (lumineux) et fonction caractéristique.

f) Fonction "densité" sur un solide linéaire homogène par morceaux et fonction en escalier. Fonction "masse" pour le même solide et fonction affine par morceau.

3°) <u>Fonctions et géométrie</u>

a) Soit M un point d'une droite graduée par un repère A(0) B(1). A l'abscisse de M on associe le nombre $\overline{MA}.\overline{MB}$. Montrer qu'on définit ainsi une fonction f de R dans R. Où placer M pour avoir $\overline{MA}.\overline{MB} < 0$? La fonction f est-elle injective ?

b) Dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ orthonormé, soit (D) la droite d'équation $y - x = 0$. A tout point M de cette droite on associe le point P de l'axe des abscisses tel que la droite MP soit perpendiculaire à (D). Quelle est la fonction f qui permet de connaître l'abscisse f(x) de P quand x désigne l'abscisse de M ?

c) Soit (D) la droite d'équation $y - 3x = 0$ et (Δ) celle d'équation $y - 2x = 0$. A tout point M de la droite (D) on associe un point P de la manière suivante : de M on mène la parallèle à l'axe des abscisses qui coupe (Δ) en un point N ; P est le milieu de MN . Même question qu'en (b). Quel est l'ensemble image des points P ?

d) Soit (D) la droite d'équation $y - 2x = 0$ et (Δ) la droite d'équation $y - x = 0$. A tout point M de (D) on associe un point P défini ainsi : P est le symétrique de M par rapport à la droite (Δ) . Mêmes questions qu'en (b) et (c).

e) Soit (c) le cercle de centre O de rayon 1 , et A le point de coordonnées (0,2). A tout point M du cercle on associe le point P de l'axe des abscisses où la droite AM coupe cet axe. Mêmes questions.

f) Variantes.

<u>REMARQUES</u> :

1°) <u>Le but de tous ces exercices est triple</u> :

- habituer l'élève, sans le dire, à ce que le nombre f(x) "ne s'exprime pas à partir de x" de la même manière pour tous les x du domaine de définition.

- amener la discussion sur la mathématisation du phénomène physique et sur le caractère approximatif (mais suffisamment approché) et limité des formules.

- amener une discussion déjà autour de limite et continuité par certaines questions : que devient la longueur de la barre lorsque sa température approche la température de fusion, la longueur du ressort lorsque le poids suspendu approche le poids de rupture, ou lorsqu'il est très "petit" ? Pour la courbe des tarifs postaux : lorsque le poids de la lettre est voisin de 20 grammes, une petite variation du poids peut amener à une grande différence pour le prix de l'affranchissement ; de même pour la fonction signal ; etc...

2°) On peut prendre occasion là, et discuter des significations du mot "fonction" dans le langage courant et en mathématique ; ainsi dans l'expression : allongement du ressort en fonction du poids suspendu ; proposer d'autres exemples d'utilisation du mot fonction dans le langage courant.

CALCULS DANS $\mathcal{F}$ (R, $\mathbb{R}$)

1 - EGALITE DE DEUX FONCTIONS

Deux fonctions f et g sont égales lorsqu'elles ont le même domaine de définition E et lorsque pour tout nombre x de E on a : $f(x) = g(x)$.

On écrit alors $f = g$

Exemples classiques.

EXERCICE 17

On donne ici une liste de couple de fonctions dont l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$. Dans chaque cas, préciser si $f_1 = f_2$ ou si $f_1 \neq f_2$.

1 - $f_1 : x \longmapsto x^2$; $f_2 : u \longmapsto |u^2|$

2 - $f_1 : x \longmapsto 2$; $f_2 : y \longmapsto \sqrt{4}$

3 - $f_1 : x \longmapsto \dfrac{1}{x-1}$; $f_2 : x \longmapsto \dfrac{x+1}{x^2-1}$

4 - $f_1 : x \longmapsto x^3$; $f_2 : x \longmapsto |x^3|$

5 - $f_1 : x \longmapsto (2x+1)^2$; $f_2 : x \longmapsto 4x^2 + 4x + 1$

6 - $f_1 : x \longmapsto \dfrac{2x^2}{2}$; $f_2 : t \longmapsto t^2$

7 - $f_1 : t \longmapsto \sqrt{(1+t)^2}$; $f_2 : x \longmapsto (1+x)$

(f_1 et f_2 sont supposées définies sur $[-1, +\infty[$)

8 - $f_1 : x \longmapsto \cos x$; $f_2 : x \longmapsto 1-2\sin^2 \dfrac{x}{2}$

REMARQUES :

Le but de cet exercice est de faire prendre conscience aux élèves que la fonction n'est pas "le procédé de calcul".

EXERCICE 18

On propose des couples de fonctions f_1 et f_2 définies par morceaux sur trois intervalles I_1, I_2, I_3 et qui ne diffèrent éventuellement qu'aux bornes des intervalles.

Le but est de montrer que deux fonctions définies sur un même ensemble E sont distinctes dès qu'il existe au moins un x de E tel que $f_1(x) \neq f_2(x)$

AUTRES EXERCICES POSSIBLES : ceux des tests

EXERCICE 19

Indiquer deux fonctions f et g distinctes, ayant même ensemble de définition et ayant même ensemble image (on pourra choisir un ensemble image fini).

2 - RESTRICTION D'UNE FONCTION

Le mot "restriction" ne figure pas au programme. Il sera pourtant utile en classe de première. On amène la définition par des exemples. Exercices de compréhension, et du type : "Indiquer une fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui n'est pas égale à la fonction $x \longmapsto x^2$, mais qui coïncide sur $[-1, +1]$ avec cette fonction".

3 - SOMME DE DEUX FONCTIONS

Définition : interprétation graphique

On note n la fonction nulle : $x \longmapsto 0$.

EXERCICE 20

Soit f la fonction définie sur $E = [0,1]$ par : $x \longmapsto f(x) = x$;

Quelle est la fonction g définie sur $[0,1]$ telle que :

$f + g = n$? est-elle unique ?

EXERCICE 21

Soit f la fonction définie sur $E = [0,1]$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = x & \text{lorsque } x \text{ est élément de }]0,1[\\ f(1) = \sqrt{2} \end{cases}$$

Quelle est la fonction g définie sur $E =]0,1[$ telle que $f + g = n$? Est-elle unique ?
Représenter f et g graphiquement.

4 - PRODUIT DE DEUX FONCTIONS - PRODUIT D'UNE FONCTION PAR UN NOMBRE REEL

Définition

EXERCICE 22

1°) Soit f_1 , f_2 , f_3 , les fonctions caractéristiques respectives des intervalles : $[0,1[$, $[1, \sqrt{6}]$, $[\sqrt{6},3]$
Représenter graphiquement la fonction $g = 2\,f_1 + 2\,f_2 + f_3$

2°) Soit E la fonction partie entière $x \longmapsto E(x)$ définie sur $[0,3[$. Ecrire E comme une somme de 3 fonctions f_1 , f_2 , f_3 chacune de ces fonctions étant une fonction caractéristique d'un intervalle. Existe-t-il plusieurs choix pour f_1 , f_2 , f_3 ? Même question : $E = a\,f_1 + b\,f_2 + c\,f_3$ a, b, c étant trois nombres réels, f_1 , f_2 , f_3 trois fonctions caractéristiques d'intervalles.

EXERCICE 23

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $x \longmapsto 2x$;
Représentation graphique.

Indiquer une fonction g définie sur $[0,1]$ et telle que $f.g = n$.

Montrer qu'il existe plusieurs fonctions, deux à deux distinctes, ayant la même propriété que la fonction g .

Le produit de deux fonctions se comporte-t-il comme le produit de deux nombres réels. Est-ce étonnant ?

Ou variante plus difficile :

EXERCICE 24

Indiquer deux fonction f et g telles que $f.\ g = n$ sans que pourtant on ait $f = n$, $g = n$.

Le produit de deux fonctions se comporte-t-il comme le produit de deux nombres réels ? Est-ce surprenant ?

5 - COMPOSITION DE DEUX FONCTIONS :

EXERCICE 25

Représentation graphique de translatées (f étant une fonction donnée, construire la fonction g définie par $g(x) = f(x+a)$ a réel fixé, construire la fonction h définie par $h(x) = f(x) + a$.

EXERCICE 26

Fonction entière à composer avec d'autres fonctions usuelles.

Exemples :

1 - $x \longmapsto \dfrac{1}{E(x)}$

2 - $x \longmapsto E(\frac{1}{x})$

3 - $x - E(x)$

4 - $\dfrac{1}{x-E(x)}$

5 - $\frac{1}{x} - E(\frac{1}{x})$

6 - $(-1)^{E(x)}$ (périodicité)

7 - $(-1)^{E(\frac{1}{x})}$ ($E(\frac{1}{x})$ est en exposant dans 7 et 8)

8 - $(-1)^{E(\frac{1}{x})} . x$

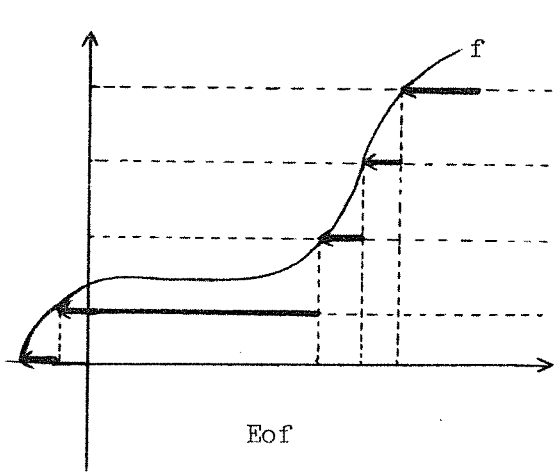
Ne pas voir les études de ces fonctions de façon formelle mais d'une façon intuitive et réaliser géométriquement comment on passe de l'une à l'autre de ces fonctions. La donnée initiale d'une telle fonction est sans doute artificielle.

Ce que les élèves doivent <u>sentir</u> c'est qu'on a là avec des moyens opératoires élémentaires (somme, produit, inverse, composition...) des possibilités infinies pour créer de nouvelles fonctions à partir de quelques unes d'entre elles, en particulier pour créer des fonctions qui auront des propriétés fixées à l'avance servant à illustrer les notions ultérieures (continuité, dérivabilité...) par des exemples et contre-exemples. Il est important de donner les interprétations graphiques du passage de :

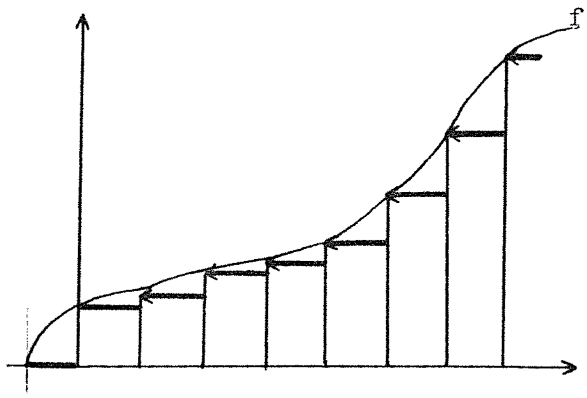
$$x \longrightarrow f(x) \quad \text{à} \quad x \longrightarrow \frac{1}{f(x)}$$

$$x \longrightarrow f(x) \quad \text{à} \quad x \longrightarrow E(f(x))$$

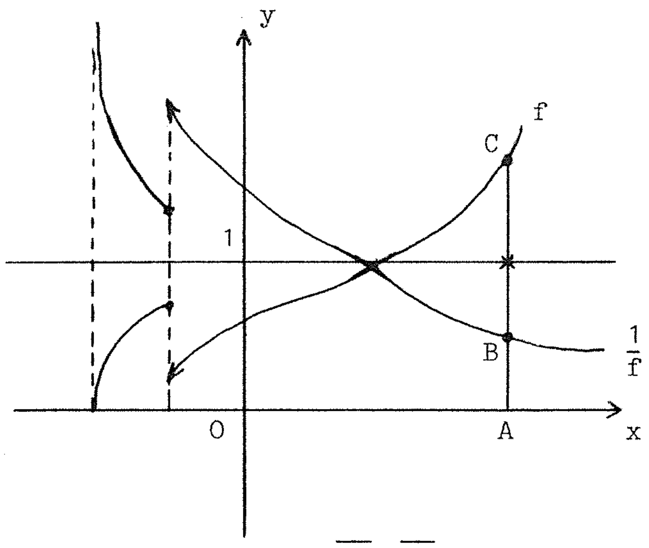
$$x \longrightarrow f(x) \quad \text{à} \quad x \longrightarrow f(E(x))$$



Eof



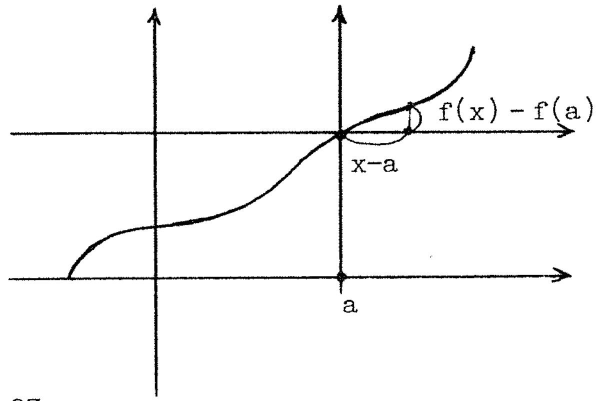
foE



$\overline{AB} \ \overline{AC} = 1$

REMARQUE IMPORTANTE :

On pourra insister sur le point suivant, particulièrement intéressant lorsqu'il faut étudier une fonction au voisinage d'un point a (continuité, dérivabilité, développement, limite...) : la courbe représentative de la fonction $h \longrightarrow f(h+a) - f(a)$ se déduit de celle représentative de la fonction $x \longrightarrow f(x)$ par un changement d'axe, la "nouvelle origine" étant le point $(a, f(a))$: signification géométrique des expressions $x-a$ et $f(x) - f(a)$, intérêt des expressions algèbriques du type $f(x) - f(a) = (x-a) . g(x)$

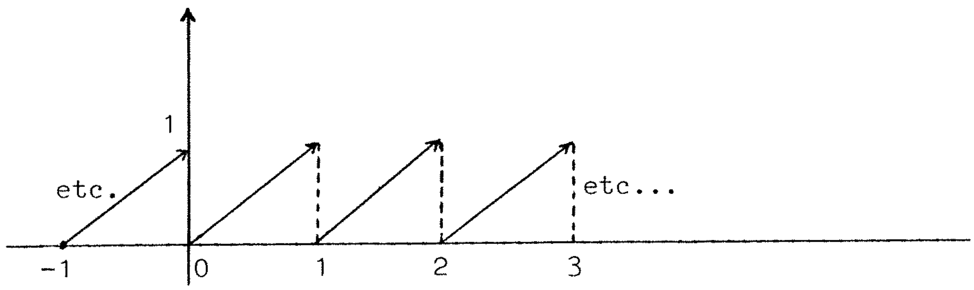


EXERCICE 27

1°) a étant un nombre réel donné non nul, recherche de toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, telle que $f(x+a) = f(x)$ pour tout x réel.

[Remarque : si l'énoncé est vraiment trop brutal, on pourra sérier si l'on veut en :

a) Soit f la fonction dont le graphe est :



Montrer que l'on a : $f(x) = f(x+1)$ pour tout x

b) Trouver d'autres fonctions ayant cette propriété

c) Les trouver toutes

d) Cas où $a \neq 1$]

2°) Trouver les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel a, tout réel x, $f(x+a) = f(x)$

3°) Soit f une fonction comme au 1°. Soit g la fonction : $x \longmapsto x+a$; trouver $f \circ g$ et $g \circ f$.

EXERCICE 28

Recherche des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que le milieu des images est l'image du milieu.

1°) Connaissez-vous de telles fonctions ? Sinon passez à la question suivante.

2°) On suppose $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, quelle est l'image de $x = \frac{1}{2}$? Soient A et B les points de coordonnées $(0,1)$, $(1,3)$; que dire du point $M\ (\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$?

3°) Quelle est l'image de 2 ?

4°) Indiquer d'autres nombres x tels que l'on puisse calculer $f(x)$ ou bien : peut-on poser $f(\frac{3}{8}) = 3$?

5°) Peut-on trouver tous les nombres x dont l'image $f(x)$ est déterminée par $f(0)$ et $f(1)$?

6°) Voyez-vous maintenant des fonctions possèdant la propriété cherchée ?

7°) Sont-elles les seules ?

Si on pose $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, $f(\sqrt{2}) = 0$, trouver tous les nombres x dont l'image $f(x)$ est déterminée par ces données. Les points $(x, f(x))$ sont-ils alignés ?

L'ensemble de ces nombres x est-il $\mathbb{R}$?

8°) Peut-on terminer la construction de cette fonction f ? (La réponse étant non, cette question ne figure que pour provoquer éventuellement une discussion "intéressante").

EXERCICE 29

1°) Recherche de fonctions f définies sur $[1, \infty[$ et telles que $f(x) = f(2x)$ pour tout $x \geqslant 1$.

2°) Serait-ce plus difficile si au lieu de $[1, \infty[$ on avait pris l'intervalle $[0, \infty[$?

EXERCICE 30

Recherche de fonctions f telles que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (même démarche qu'au 8).

EXERCICE 31

On donne le système d'inéquations :

$$(S) \quad \begin{cases} 8x > 15 \\ 3x + m > 6 - 5x \end{cases}$$

ou m est un nombre réel donné ;
On cherche à résoudre le système dans $\mathbb{N}$.

1°) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles (S) n'a pas de solutions (dans $\mathbb{N}$)

2°) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles (S) a une solution unique.

3°) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles (S) a deux solutions, trois solutions, ..., 10 solutions, ... n solution.

4°) On définit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui au réel m associe le nombre de solutions de (S)

Représentation graphique de f .

EXERCICE 32

1°) Etude de la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$x \longmapsto x\, E(\frac{1}{x})$$

2°) Etude de :

$$x \longmapsto E(x + \frac{1}{2}) - E(x)$$

EXERCICE 33

Les fonctions caractéristiques et les fonctions en escalier

L'aspect linéaire : l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$ correspondant au partage $(a_o = a, a_1, \ldots, a_n = b)$ est un espace vectoriel réel de dimension $n+1$ si l'on impose des conditions de continuité à gauche aux bornes des intervalles du partage [On n'est pas obligé d'employer le mot "continuité"] (dimension $2n+1$ si l'on n'impose pas de condition de continuité).

Présenter les fonctions caractéristiques comme fonctions utilisables en physique.

EXERCICE 34

Utiliser les tables de fonctions (notion de fonction connue "approximativement" : sinus, cosinus).

L'interpolation linéaire à étudier ; précision du résultat ; signification géométrique de la règle de trois.

EXERCICES SUR RECHERCHE D'ENSEMBLES IMAGES, COMPOSITION, "DECOMPOSITION"

Il semble intéressant que les élèves sachent aussi "décomposer" des fonctions en vue de l'application des théorèmes de la continuité et de la dérivation et s'habituent à traduire sans effort des égalités comme $f = g \times (h \circ k)$ par : pour tout x d'un certain ensemble : $f(x) = g(x).h(k(x))$ et inversement.

Il est intéressant que les élèves voient déjà le mécanisme du "changement de variables" $x = \frac{1}{X}$, qui est en fait un changement de fonctions (changer de variables c'est composer deux fonctions).

EXERCICE 35

Proposer plusieurs fonctions f_1 , f_2 , ..., f_n , définies sur des intervalles et demander d'écrire chacune d'elles comme "combinaisons" de somme, de produit, de composées. Unicité de l'écriture ? Faire préciser les ensembles sur lesquels les égalités sont valables.

EXERCICE 36

Montrer sur des exemples que toute fonction peut être un produit.

Par exemple : $\begin{cases} x \longmapsto x^2 \sin \frac{1}{x} \\ 0 \longrightarrow 0 \end{cases}$

Soit $g : x \longmapsto x^2$; $h : \longmapsto \sin \frac{1}{x}$; on n'a pas $f = hg$ sur $\mathbb{R}$;

mais si on appelle :

$k : \begin{cases} x \longmapsto \sin \frac{1}{x} \\ 0 \longmapsto 0 \end{cases}$

On a : $f = kg$ (malgré tout, on n'aura pas en 0 $f'(0) = k'(g(0)).g'(0)$ car k est non dérivable en 0).

EXERCICE 37

Trouver des fonctions f, g, h telles que

$f \circ h = g \circ h$ avec f non égale à g

(On pourra commencer par des fonctions définies sur un ensemble fini).

Donner d'autres variantes de l'énoncé dans cet ordre d'idées.

EXERCICE 38

Toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est-elle la composée de deux autres fonctions ?

EXERCICE 39

Recherche d'ensembles images :

En particulier recherche de l'image de $[a, \infty[$ par la fonction $g : x \longrightarrow \frac{1}{x}$.

Soit f une fonction (non nécessairement explicitée) définie sur $[0,1]$. Quel est le domaine de définition de (gof) ? Vérifier que si l'on a $|f(y)| < b$ pour les nombres y qui sont tels que $0 < y < a < 1$ (a fixé), alors on a : $|(gof)(x)| < b$ pour les nombres x tels que $x > \frac{1}{a}$.

Donner des exemples avec des fonctions f explicitées.

Puis le problème inverse.

EXERCICE 40

VERS LA CONTINUITE - REPRESENTATION PAR UN TRAIT CONTINU des FONCTIONS $x \longrightarrow x^2$ et $x \longrightarrow \frac{1}{x}$

On pourra d'abord insister que l'on ne peut placer qu'un nombre fini de points et que rien a priori (vu la définition d'une fonction) ne permet de les joindre par un trait continu. On pourra essayer d'entamer une justification par des discussions - exercices du genre suivant :

pour $a = 2$ on a $f(a) = a^2 = 4$

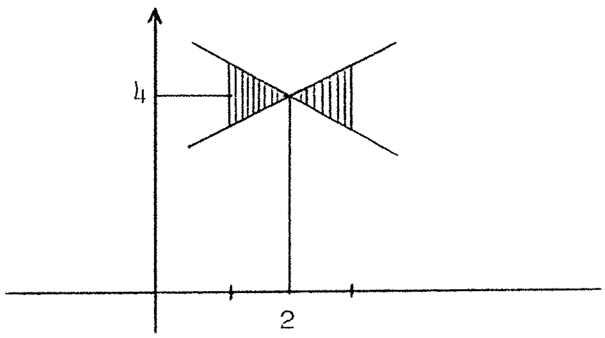
Et distance de x^2 à 4 , $|x^2 - 4| = |x - 2| . |x + 2|$

autrement dit la distance de $f(x)$ à $f(a)$ est lié à la distance de x à a , on pourrait voir alors (dessiner !) si une valeur $f(x)$ peut être loin de 4 quand x est près de 2 . Il faudrait pouvoir neutraliser le facteur $|x + 2|$ qui est une "fonction de x" . Autour de 2 , sur $[\frac{3}{2} , \frac{5}{2}]$, on a $|x + 2| < \frac{9}{2}$

(ou encore $\frac{7}{2} \leqslant (x + 2) \leqslant \frac{9}{2}$)

d'où $|x^2 - 4| \leqslant \frac{9}{2} |x - 2|$

d'où le graphe de f , autour de 2, va être dans papillon



qu'on pourra "réduire" encore en travaillant sur un intervalle inclus dans $[\frac{3}{2} , \frac{5}{2}]$. On voit alors que le graphe ne peut présenter de sauts très brusques. Et donc le dessin n'étant qu'une représentation approximative de la fonction, il est permissible de tracer le graphe autour de 2 par un trait continu.

Etude analogue avec $x \longmapsto \frac{1}{x}$

COMPTE RENDU D'UNE SEANCE DE TRAVAUX DIRIGES ET COMMENTAIRES
(par Roland CHARNOLE - Lycée de Bressuire)

L'année dernière j'avais usé très modérément en classe de seconde des séances de Travaux Dirigés. Je donnais aux élèves des exercices à chercher, applications directes du cours. Cette année j'ai voulu essayer le travail par groupes (et là on se rend compte de l'insuffisance de formation pédagogique... car animer des groupes d'élèves, ce n'est pas facile). La première constatation qui s'impose, les élèves "aiment" ce genre de travail et d'autant plus dans la mesure où les exercices proposés n'ont qu'un lointain rapport avec le cours. Ils discutent entre eux. On peut craindre que la conversation sorte des sentiers mathématiques : ce genre de tentation disparait vite pour peu que l'on passe facilement d'un groupe à l'autre pour relancer le travail. J'ai plusieurs élèves dont l'attitude a complètement changé depuis que ces séances sont organisées. Les cours mêmes semblent les intéresser. L'idéal d'après les élèves serait de tout faire en séance de Travaux Dirigés... On peut rêver.

Il est bon que les élèves voient le maître s'asseoir auprès d'eux : il leur est plus facile alors de poser des questions. D'autre part ils se rendent compte que d'autres, soi-disant "forts" ont parfois les mêmes difficultés et celà les réconforte. Des élèves "muets", "lents", "peu intéressés" se montrent parfois supérieurs aux autres... La vivacité d'esprit n'est pas forcément une qualité propre aux "bons élèves"... Résultat immédiat : certains élèves arrivant en cours de maths en traînant les semelles, ... se redressent, car ils se rendent compte qu'après tout... ils peuvent faire mieux que d'autres sur certains problèmes. Cette petite conséquence peut paraître ridicule, mais le "dégoût" des maths est maladie trop courante à l'arrivée en seconde pour négliger des "médicaments" soulageant même pendant quelques instants... .

ETUDE DE LA FONCTION $x \longmapsto x - E(x)$ *en classe de seconde C*

Elèves en Travaux Dirigés : 16 par séances donc 4 groupes de 4

La fonction est donnée en "pâture" au début de la séance. Les cours "généraux" sur les fonctions ont été faits, si bien que les élèves se mettent au travail avec (déjà!) en tête le "plan d'étude" d'une fonction.

1) Certains élèves cherchent "naïvement" quelques valeurs prises par $f(x)$ *. Comme les fonctions de type* $x \longrightarrow \frac{k}{x}$ *sont faciles à reconnaitre, on s'attend "au pire", à une fonction définie en deux ou trois morceaux.*

Et dans ce cas, les valeurs choisies pour x *sont presque toujours des entiers (positifs, c'est plus sûr...) on trouve à chaque fois zéro... perplexité... on écoute ce qui peut se faire dans le groupe voisin.*

2) Un groupe avec au centre une "grosse tête".

** Domaine de définition - pas de problèmes.*

** Propriétés particulières : parité ? Peu d'hésitation car un exercice fait quelques jours auparavant avait montré qu'il n'y a pas grand-chose à attendre de ce côté-ci pour* E *!*

** "grandes" valeurs de* x *?*

Comme on choisit toujours des entiers $f(x) = \ldots 0$ *et toujours zéro... Alors là c'est un peu la panique : on n'a pas idée d'étudier cette fonction. Certains élèves sont prêts à dire que* f *est la fonction nulle... Ce sera plus vite terminé...*

Quelques décimaux "grands" et non entiers remettent toute leur théorie en question.

Mais déjà deux groupes se sont mis à étudier f *sur* $[0,1]$ *(la "sécurité" des intervalles fermés), et le disent. Et c'est là que le mot vient presque partout "il <u>faut</u> prendre des intervalles de longueur 1" Pourquoi ? "à cause de la fonction* $\underline{E}$ *"*

Ces intervalles ? $[0,1[$ $[1,2[$

le "réflexe" de l'ouvert à droite vient tout de suite.

L'étude de $x \longrightarrow E(x)$ *est encore présente à l'esprit (un exercice en devoir sur* $E(1-2x)$ *a provoqué quelques dégâts à ce sujet). A remarquer que pour les élèves, les intervalles de longueur* 1 *sont du type* $[n, n+1[$ *avec* $\underline{n \in \mathbb{N}}$ *et non* $[\alpha, \alpha+1[$ *avec* α *réel quelconque ("on verra après pour les négatifs").*

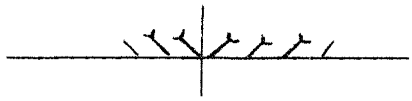
La séance a commencé depuis *1/4 h.* *environ.*

L'étude sur $[0,1[$ *s'accompagne d'un dessin.*

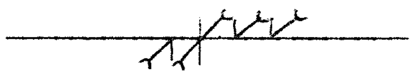
les points sont alignés... f "coïncide" sur $[0,1[$ *avec une fonction affine ? ... ils m'interrogent : je leur réponds de regarder* $E(x)$ *sur* $[0,1[$ *...*

Et de là, tout va très vite car sur $[1,2[$ $f(x) = \ldots = x-1$ *puis de manière générale sur* $[n, n+1[$ $f(x) = x-n$ *(plus ou moins correctement montré...)*

Pour les négatifs, des réflexes bizarres : on complète le "dessin" et ce qui est vraiment bizarre, en utilisant (certains n'ont pas du tout étudié cette question) une éventuelle *parité*



ou



Il faut leur dire de regarder de plus près.

3) *Equations* $f(x) = 1/2 \quad (x \in \mathbb{R})$

$f(x) = 0$

$f(x) = 1$

$f(x) = k \quad k \in \mathbb{R}$

Peu de difficultés : le graphique est là, et, alors qu'il n'en a pas été question en seconde, la résolution graphique d'une équation semble leur venir naturellement.
Des hésitations sur $f(x) = 1$

La mise en forme de l'ensemble solution de $f(x) = k$ *pour* $\alpha k < 1$ $\{x/x = k + n \ , \ n \in \mathbb{Z}\}$ *amène assez naturellement la question de la période. Les élèves commencent à en avoir assez de cette fonction (il y a à peu près 40 mm qu'ils sont dessus). Deux ou trois minutes de "détente" sur la notion de phénomènes "périodiques", les anniversaires, la position d'un cycliste sur une piste circulaire, les pendules, certains parlent d'électricité...*

Et on peut reprendre

. *Montrer que* $f(x + 1) = f(x)$ *pour tout* x *réel*

On prend des exemples ... et cela doit suffire.

Là, net blocage de la généralisation du problème. J'envoie un élève au tableau. On passe alors à $f(x+2) = f(x)$ *en prenant l'intermédiaire de* $x+1$: $u = x+1$ *donc* $f(u+1) = f(u) = f(x)$

Pour n *entier naturel* $f(x+n) = f(x)$ *pas de difficultés. Quand il est question de* n *entier relatif... soupirs*

La notion de période est dégagée de là : les exemples au niveau de la seconde sont assez rares.

Conclusion des élèves : "c'est intéressant", avec des nuances - "est-ce qu'il y en aura au prochain devoir en classe" ? parce qu'avant tout c'est ce qui compte : réussir ses devoirs.

En tout cas, en séances dirigées, cela change des exercices du type : étudier la fonction : $x \longrightarrow /ax + b/ + x$ *où c'est facile de s'en tenir à la recette - et où les valeurs choisies pour* x *sont souvent des entiers... Or les élèves ont un peu tendance à dire "les réels, on "connaît", mais c'est tellement plus simple de prendre des entiers... "*

NOTE HISTORIQUE : EXTRAITS D'UNE NOTE DE Mlle Christine PHILI de l'Université d'ATHENES sur "LE DEVELOPPEMENT DU CONCEPT DE FONCTION" présentée au séminaire de philosophie et de mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure

---

Le concept de fonction tel qu'on le définit et utilise de nos jours en mathématiques, s'est développé progressivement. Au fur et à mesure que les besoins pratiques se faisaient sentir, on inventait les définitions nécessaires. Et c'est à cause de cela qu'on est arrivé à une prolifération de notions vagues et inexactes.

LA PREHISTOIRE

On rencontre une vague notion de fonction sous forme des tables de correspondance provenant de l'observation des phénomènes naturels car l'idée de fonction est liée historiquement à la perception développée de corrélations entre les phénomènes de la nature.

Les Babyloniens ont fait un remarquable progrès.

La notion de fonction se rencontre dans les tablettes astronomiques de la période séleucide. Sur ces tablettes, existent des relations arithmétiques provenant de l'observation de phénomènes conjoints, par exemple les périodes de visibilité d'une planète et la distance angulaire de cette planète au soleil.

Dans la plus profonde structure des mathématiques grecques, manquait le concept de fonction et même n'existait aucune orientation vers cette notion. Les grecs n'ont jamais étudié les fonctions, dans leur sens propre, ni dans les mathématiques ni dans d'autres domaines de leur système de connaissance. Spécialement la géométrie grecque s'intéressait aux formes plutôt qu'à leurs variations, et, c'est peut-être à cause de cela que l'idée de la fonction ne s'est pas développée. En plus, dans la géométrie grecque, n'existe aucune mention ni d'une courbe commune correspondante à une fonction, ni une définition satisfaisante de la tangente en termes du concept des limites.

Vers le 14ème siècle, les différents savants, reprenant les idées d'Aristote sur le mouvement, ont développé considérablement la cinématique ; comme branche de mécanique, elle est évidemment reliée à la géométrie de manière que, son développement ne peut pas être considéré *isolément et séparément de la discussion générale de relations fonctionnelles dans le monde naturel. Un de ces savants était Thomas BRADWARDINE qui, dans son traité, aborde le concept de fonction puissance (Tractatus de proportionibus 1328). Après ce traité, plusieurs travaux ont paru dans lesquels la théorie des proportions était développée en relation avec cette fonction.*

Particulièrement, Nicole ORESME (1323-1382), évêque de Normandie, dans son Algorismus proportionum, explore les règles pour manipuler les fonctions puissance et est le premier qui ait conçu la notion des puissances fractionnaires. En plus, ORESME, en utilisant les expressions de "latitude" et "longitude", notamment pour la représentation des trajectoires des astres, est amené au repérage graphique. Plusieurs historiens de mathématiques considèrent qu'ORESME avec les mots "latitudo formarum" a introduit le germe de l'idée de fonction.

LA PERIODE INITIALE

Jusqu'au 17ème siècle, les courbes étaient bien définies par leurs propriétés géométriques et le concept de fonction était une notion qui manquait à l'étude des courbes.

DESCARTES avec ses applications de méthodes algèbriques en géométrie, ouvrait la voie pour l'introduction de la notion de fonction.

NEWTON, dans sa "methodus fluxionum" (rédigée en 1671, mais publiée en 1736) fait usage de la locution "relata quantitas" expression qui approche assez du sens du mot fonction.

En 1673, dans son mémoire "Methodus tangentium inversa sen de fonctionibus", LEIBNITZ emploie l'expression "functionem faciens" ou en abrégé "functio" pour désigner les grandeurs dont les variations sont liées par une loi.

Il dit que si l'on déplace le point de la courbe auquel correspond une valeur définie de ces grandeurs, celles-ci varient en même temps que l'abscisse ou l'ordonné de ce point.

En 1698, Jean BERNOUILLI utilise le terme "fonctions" des ordonnées" dans une lettre concernant le problème des isopérimètres, qu'il adressait à LEIBNITZ.

En 1718, il donne la définition suivante : "on appelle fonction d'une grandeur variable, une quantité qui se compose d'une certaine manière de cette grandeur et de constantes". Dans ce mémoire, Jean BERNOUILLI a donné, comme symbole, la lettre grecque φ , pour représenter la fonction *d'une variable donnée"... en prenant φ pour la caractéristique de ces fonctions...".*

EULER, fut le plus grand formaliste du 18ème siècle du calcul infinitésimal. Ayant correctement rejeté les arguments géométriques comme des moyens valables pour établir la science des infiniment petits, EULER a fondé le sujet sur une théorie formelle de fonctions et ses moyens dépendaient de la conception de fonction. Pour EULER, la fonctionalité était la matière de la représentation formelle, plutôt qu'une reconnaissance conceptuelle d'un rapport.

Il faut bien noter qu'EULER fut le premier, qui ait employé les parenthèses en 1734 et aussi la lettre f (initiale du mot fonction).

EULER dans le 1er volume de son introductio in analysis infinitorum (1748), a défini la fonction comme une expression analytique quelconque. Plus précisément il a donné la définition suivante : "la fonction est l'expression analytique quelconque des quantités variables et de nombres ou avec des quantités constantes".

Cependant on doit dire sur cette définition d'EULER que :
i) les opérations admises ne sont pas assez clairement distinguées,
ii) il n'exclut aucune expression qui contient des opérations infinies (pas de problème de convergence).

Dans son Introductio in analysis infinitorum, EULER donne le premier rôle à la théorie algèbrique des fonctions, où entre autres, il dénote les constantes avec a, b, c ; les variables avec x, y, z, et introduit sa classification des fonctions comme algèbriques ou transcendantes, explicites ou implicites, uniformes ou multiformes (c.a.d. simples ou avec plusieurs valeurs). Mais l'analyse des cordes vibrantes a donné la première extension de la notion de fonction et elle a conduit EULER dans son 2ème volume à faire la distinction entre une courbe "continue" ou "discontinue". A cette époque, l'idée de la fonction était liée à l'étude analytique de courbes. Une courbe qui était représentée par une équation algèbrique ou transcendante s'appelait <u>une courbe continue</u>.

Les courbes qui exigeaient différentes équations pour la représentation de leurs diverses parties constituantes, s'appelaient <u>discontinues</u> (ou mixtes, ou irrégulières). En ce qui concerne les courbes "arbitraires", le point du débat était, alors la légitimité d'assumer leur continuité dans le sens susdit, et sinon quand est-ce que ces courbes pourraient peut-être encore, surpasser la classe de courbes continues.

En liaison avec le concept de continuité pour les courbes, les fonctions déterminées par <u>une</u> expression analytique pour tout le domaine *de la variable indépendante s'appelait continue (bien sur la continuité au sens d'EULER). Alors d'une part, on avait les "vraies" fonctions et d'autre part les fonctions discontinues et arbitraires qui évidemment n'étaient pas de "vraies" fonctions. De toute façon, EULER considérait comme continues les courbes qui obéissent à une loi constante ; et comme discontinues, les courbes dont leurs diverses portions ont comme expressions des fonctions différentes de x .*

Remarquons qu'EULER appelle une fonction discontinue celle qui est différentiable par morceaux.

Cependant, le mot fonction pour EULER ne signifie pas tellement la quantité conçue comme dépendante des variables, mais comme une expression analytique avec constantes et variables qui seront représentées par des simples symboles.

Quelquefois, EULER utilisait une autre définition de "fonction" c.a.d. "la relation entre Y et X exprimée sur le plan par une courbe tracée en main libre".

Comme on verra, ces deux définitions concurrentes se retrouvent dans l'histoire ultérieure. Ainsi, LAGRANGE a poursuivi l'idée exprimée dans la première définition, tandis que FOURIER a poursuivi l'idée de la seconde définition.

Vers la dernière moitié du 18ème siècle on trouve d'une part la recherche sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique, recherche qui résultait de l'investigation de problèmes physiques? Et d'autre part, on trouve des discussions du genre : existe-t-il des fonctions plus générales que celles définies par un développement trigonométrique, et peut-on prolonger le domaine des fonctions ?

Mais la conception de la fonction ne répondait pas suffisamment à tous les besoins de la science. En effet, elle se trouvait insuffisante dans le domaine de la physique mathématique ; et surtout en ce qui concerne les problèmes des cordes vibrantes. Nous éviterons de nous perdre dans les détails de la fameuse discussion dans laquelle furent engagés dès 1741 D'ALEMBERT et EULER et peu après d'autres savants éminents de cette époque. Nous allons nous contenter de la simple remarque que ce fut D'ALEMBERT qui a apporté au choix de ces fonctions des restrictions qui ont provoqué de grandes objections de la part d'autres mathématiciens de son époque et notamment de la part d'EULER. Celui-ci, en effet, insistait sur le point suivant : la nature du problème exige qu'on admette toutes les fonctions figurées par des lignes tracées par un mouvement libre de la main. Par la suite, EULER insiste sur le fait que les fonctions arbitraires de ce genre ne sont pas en général représentables par une expression analytique unique qui reste invariable pour toutes les valeurs de la variable indépendante.

N'étant pas satisfait de la définition déjà citée de la fonction, EULER se sentit obligé d'en formuler une autre. Cette nouvelle définition figure dans la préface de son oeuvre Institutiones calculi differentialis, qu'il a écrite en 1755. Avec cette nouvelle définition, EULER a abandonné :
i) les expressions analytiques comme la substance principale de la définition d'une fonction,
ii) le problème de la représentation analytique. La nouvelle conception d'EULER consiste à donner la définition de fonction comme une relation arbitraire entre les quantités variables d'une dépendance quelconque.
Plus précisément sa définition est la suivante : "des quantités dépendent des autres de manière que si les autres changent ces quantités changent aussi. Par là, on a l'habitude de les nommer fonctions, métonymie, qui est évidente et qui contient en elle-même les manières avec lesquelles une quantité peut être déterminée par les autres. Alors, si je pouvais dénommer la variable des quantités toutes les quantités qui dépendent d'une certaine façon de x ou qui peuvent être déterminées, on l'appelle fonction de cette variable".

Cette idée de fonction, dégagée de toute considération d'expression analytique était latente, même qu'elle était souvent utilisée. Pourtant, EULER fut le premier qui l'énonça : d'une manière claire tout en soulignant la généralité de la nouvelle définition.

Ce nouveau concept d'EULER n'a pas tardé à trouver de consentants. Un des premiers savants qui a adopté la nouvelle définition d'EULER fut CONDORCET.

La conception de fonction est exposée par CONDORCET dans son traité du calcul intégral qui fut présenté à l'Académie des Sciences de Paris par parties en 1778-1782.

L'auteur, tout d'abord, donne la définition d'une fonction analytique. "Je suppose que j'aie un certain nombre de quantités $x, y, z, \ldots F$, et que chaque valeur déterminée de $x, y, z \ldots, F$ ait une ou plusieurs valeurs déterminées qui y répondent ; je dis que F est une fonction de $x, y, z,$". C'est remarquable : le concept de la fonction selon CONDORCET, approche assez la définition contemporaine.

Ensuite l'auteur continue en disant : "... si je sais que lorsque $x, y, z,$ seront déterminés, F le sera aussi, quand même je ne connaîtrais ni la manière d'exprimer F en $x, y, z,$ ni la forme de l'équation entre F et $x, y, z,$ je saurai que F est une fonction de $x, y, z, \ldots$"

par une série trigonométrique. Cette assertion parut à LAGRANGE si inattendue, qu'il la contesta bien fort ; car cette proposition était en contradiction avec la notion de fonction telle qu'elle était acquise à cette époque.

FOURIER a brisé la continuité eulérienne comme le dit HANKEL dans un article où l'on trouve aussi des remarques intéressantes sur l'histoire du concept de fonction. "... toute la conception de l'idée de fonction, comme celle d'EULER, que je décrirai brièvement a subi le premier coup difficile en 1807 par l'importance découverte de FOURIER, qu'il est possible de représenter par des séries périodiques, non seulement les fonctions analytiques (ou continues au sens d'EULER) mais d'autres fonctions tout à fait quelconques qui ne satisfont pas à une loi simple ou même à diverses lois en diverses parties (discontinues) ce sont les fonctions que j'appellerai fonctions illégitimes. ... Alors j'ai cru que l'unique voie pour arriver à élucider la discontinuité et à décider de la nature des fonctions, est celle de renier tous les concepts, auxquels même le plus moderne mathématicien est attaché par l'intermédiaire de l'idée de la fonction eurélienne et en premier lieu, d'interpréter l'ensemble de rapports de quantités possibles de deux variables qui sont contenues dans l'idée pure de la fonction de DIRICHLET, mais en même temps de donner une attention particulière aux fonctions illégitimes qui sont jusqu'aujourd'hui très peu étudiées..."

Nous croyons que les mathématiciens du 18ème siècle influencés par le vieil adage latin "natura non facit saltus", considéraient que la notion de discontinuité était exclue dans la Science. C'est à cause de cela qu'ils pensaient que la propriété de discontinuité renferme en elle, une notion maladive (courbes discontinues ou irrégulières selon EULER), (illégitines selon FOURIER). Dès que l'analyse fut libérée de la structure étroite de continuité, elle a évolué et révisé ses principes avec plus de rigueur.

Les méthodes de FOURIER, furent critiquées par les mathématiciens ultérieurs. Il faut bien noter que, FOURIER était principalement un physicien et qu'il gardait constamment dans son esprit l'idée de la représentation.

On verra plus tard, que DIRICHLET a voulu examiner plus attentivement les conditions que la fonction doit satisfaire, pour démontrer la convergence de la série qu'elle représente (convergence que FOURIER avait supposée à priori).

19ème SIECLE

LES CONCEPTS DE FONCTION ET DE CONTINUITE

A cette époque, commencent les premières incertitudes sur les principes de l'analyse. En effet comme maintenant lorsque les méthodes antérieures se montrent défectueuses et incorrectes, il faut en chercher la cause à l'origine.

Plus spécialement on peut considérer comme principaux représentants de l'évolution du concept de fonction : CAUCHY, BOLZANO, DIRICHLET, et RIEMANN.

ABEL dans une lettre envoyée à HAUSTEEN en 1826, insiste sur l'insuffisance de démonstrations de la théorie des séries infinies et il indique la véritable origine des paradoxes qu'on rencontrait en analyse. Voilà, plus précisément un extrait de cette lettre ..."Je consacrerai toutes mes forces à répandre de la lumière sur l'immense obscurité qui règne aujourd'hui dans l'Analyse... Dans l'Analyse supérieure bien peu de propositions sont démontrées avec une rigueur définitive? Partout on trouve la malheureuse manière de conclure du spécial au général et ce qu'il y a de merveilleux, c'est qu'après un tel procédé on ne trouve que rarement ce qu'on appelle des paradoxes. Il est vraiment très intéressant de rechercher la raison de ceci. Cette raison à mon avis, il faut la voir dans ce que les fonctions dont s'est jusqu'ici occupée l'analyse, peuvent s'exprimer pour la plupart, par des puissances.

"Quand il s'y en mêle d'autres, ce qui, il est vrai n'arrive pas souvent, on ne réussit plus guère, et pour peu qu'on tire de fausses conclusions, il en naît une infinité de propositions vicieuses qui se tiennent les unes les autres. J'ai examiné plusieurs de celles-ci et j'ai été assez heureux pour en venir à bout".

CAUCHY, dit LEBESQUE , remarqua que les difficultés qui résultent des recherches de FOURIER se présentent même lorsqu'on ne se sert que d'expressions très simples, c'est-à-dire que, suivant le procédé employé pour donner une fonction, elle apparaît comme continue ou non. CAUCHY cite comme exemple, la fonction égale $a + x$ *si,* $x > 0$, *à* $-x$ *si,* $x < 0$ *. Cette fonction n'est pas continue, elle est formée de parties des deux fonctions continues* $+x$, $-x$ *; elle apparaît au contraire comme continue quand on la note* $\sqrt{x^2}$

De là, la notion de continuité renouvelée apparaît réformée et va servir comme instrument général à l'étude des fonctions.

CAUCHY, dans son cours d'Analyse à l'Ecole Polytechnique en 1821 ne donne pas (la) une définition de la fonction en disant que : "... Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que, la valeur de l'une d'elles étant donnée on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de variable indépendante et les autres quantités exprimées au moyen de la variable indépendante sont ce qu'on appelle des fonctions, de cette variable".

Dans ce même cours, CAUCHY donne la définition suivante pour la continuité : " ... Soit $f(x)$, une fonction de la variable x, et supposons que, pour chaque valeur de x intermédiaire entre deux limites données, cette fonction admette constamment une valeur unique et finie. Si, en partant d'une valeur de x comprise entre ces limites, on attribue à la variable x un accroissement infiniment petit a, la fonction elle-même recevra pour l'accroissement la différence

$$f(x+a) - f(x)$$

qui dépendra, en même temps, de la nouvelle variable a et de la valeur de x. Cela posé, la fonction $f(x)$ sera, entre les deux limites assignées à la variable x, fonction continue de cette variable, si pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence

$$f(x+a) - f(x)$$

décroit infiniment avec celle de x. En d'autres termes, la fonction $f(x)$ restera continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même. On dit encore que la fonction $f(x)$ est dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x, fonction continue de cette variable, toutes les fois qu'elle est continue entre deux limites de x, même très rapprochées, qui renferment la valeur dont il s'agit".

Grâce à ces définitions de CAUCHY, la notion de fonction cesse d'être surbordonnée à l'hypothèse de continuité.

BOLZANO, plus que d'autres mathématiciens, représente la transition des concepts rigoureux de LAGRANGE et CAUCHY à ceux de WEIERSTRASS.

BOLZANO a donné une définition de continuité, quelques années avant CAUCHY, en 1817.

"... Selon une définition correcte ce que l'on comprend par l'expression qu'une fonction $f(x)$ pour toutes les valeurs de x, qui

se trouvent, à l'intérieur, ou en dehors de certaines limites, change, selon la loi de continuité, si x quelconque prend une telle valeur, la différence $f(x+w) - f(x)$ puisse devenir plus petit que toute quantité donnée, quand on peut accepter w , tellement petit qu'on le veut".

Cette définition de BOLZANO est antérieure à celle de CAUCHY, elle est plus rigoureuse (car dans la définition de CAUCHY on ne sait pas trop quelle continuité est définie : locale, globale, uniforme) et indique la direction vers la conception locale. Dans ce même traité BOLZANO critique comme incorrecte la définition de la continuité, selon laquelle quand $f(x) = a$, $f(y) = b$, $a \neq b$, $f(z)$ prend toutes les valeurs entre a et b si $x \leqslant z \leqslant y$.

DIRICHLET, est le premier qui a fait une étude rigoureuse sur les séries de FOURIER. Il a fait des recherches pour établir des conditions suffisantes pour que la série de FOURIER représente une fonction.

En 1837, DIRICHLET, a publié un article important "Sur la représentation des fonctions arbitraires en séries de sinus et cosinus" dans lequel il définit le mot fonction et la continuité.

Sa définition de la fonction est non seulement dégagée, d'expression analytique" mais ce qui est remarquable, elle aboutit à la description de correspondance univoque d'une manière assez lucide. En ce qui concerne la continuité, DIRICHLET traite seulement la continuité globale.

RIEMANN, a donné la définition sur le concept de fonction dans son discours inaugural à GOTTINGEN en 1851.

"... Soit z une quantité variable, qui prend peu à peu, toutes les valeurs réelles possibles, alors on appelle w une fonction de z , si à chacune de ces valeurs correspond une valeur unique de la quantité indéfinie w et si z parcourt continûment toutes les valeurs qui se trouvent entre deux valeurs constantes w change aussi continûment alors on appelle cette fonction continue.

Cette définition, ne définit apparemment aucune loi entre les valeurs différentes de la fonction, de cette manière, s'il existe une fonction définie dans un certain intervalle son prolongement, en dehors du même intervalle, est laissé à l'arbitraire.

La dépendance de la quantité w de z peut être donnée par un principe (loi) mathématique de telle façon qu'il se trouve pour chaque valeur de z , le w correspondant par certaines opérations quantitatives.

La possibilité de définir toutes les valeurs qui se trouvent dans un intervalle donné de z par la même loi de la dépendance était reconnue antérieurement seulement pour certaines fonctions (fonctions continues, selon le langage de EULER).

Pourtant de nouvelles recherches ont prouvé qu'il existe des expressions analytiques par lesquelles on peut représenter chaque fonction continue dans un intervalle donné. A cause de cela, il est indifférent qu'on définisse la dépendance de la quantité w par la quantité z , comme une fonction arbitrairement donnée par certaines opérations quantitatives.

On voit que, dans la définition de fonction de RIEMANN, existe aussi la conception de correspondance.

WEIESTRASS, dans son cours, intitulé "Introduction à la théorie des fonctions analytiques du semestre d'été 1874, commence par l'étude de fonction analytique. Il donne la définition de la fonction, en faisant des réserves sur sa trop grande généralité, et n'attribue pas la paternité de la définition uniquement à DIRICHLET, mais aussi à FOURIER et à CAUCHY.

En ce qui concerne la définition de fonction WEIERSTRASS, ne la considère pas suffisante, pour qu'on puisse tirer des conclusions sur ses propriétés.

Finalement, WEIERSTRASS, <u>évite de donner une définition de la fonction mais "peu à peu au cours de ces leçons" il donnera une représentation correcte et utilisable de la fonction</u>.

Dans son dernier cours d'Analyse, à l'Université de BERLIN en 1886, ayant comme titre "chapitres choisis de la théorie des fonctions", il consacre son premier chapitre à l'étude historique de l'évolution du concept de fonction. Considérant, l'idée de fonction comme une relation arithmétique entre deux quantités (notion qui a son origine chez LEIBNITZ) et celle de DIRICHLET que WEIERSTRASS considère comme plus générale, il donne la définition de fonction comme correspondance entre les éléments et arrive à conclure que lorsque cette correspondance est continue ces deux notions sont les mêmes (th. de WEIERSTRASS qui donne l'expression analytique d'une fonction continue quelconque).

MENGER, considère WEIERSTRASS, comme le mathématicien qui a fourni à la définition de fonction un aspect ensembliste..." l'introduction par WEIERSTRASS des fonctions analytiques comme ensembles des séries entières, fut pendant plusieurs décennies la seule définition de fonction purement ensembliste . Jusqu'à ce que vers les années trente du XXème siècle, on introduise la définition des fonctions comme ensembles de couples de *nombres, car les vieilles définitions de DIRICHLET et d'autres, malgré leur très grande fécondité ne peuvent pas être considérées comme ensemblistes".*

En 1875, DARBOUX donne une définition de la continuité comme une propriété locale, en disant que : "Une fonction $f(x)$ est dite continue pour la valeur $x = xo$ quand on peut prendre h assez petit pour que l'on ait :

$$|f(x_o + \Theta h) - f(x_o)| < \varepsilon$$

Θ pouvant prendre toutes les valeurs positives plus petites que 1 et étant aussi petit qu'on le veut".

Dans ce même mémoire, DARBOUX fait la remarque suivante : "il existe des fonctions discontinues qui jouissent d'une propriété que l'on regarde quelquefois comme le caractère distinctif des fonctions continues, celle de ne pouvoir varier d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires".

LEBESQUE dit qu'en FRANCE existait l'habitude de définir une fonction continue comme celle qui ne peut passer d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires, et cette définition était considérée comme équivalente à celle de CAUCHY. <u>DARBOUX a pu montrer que les deux définitions de la continuité étaient fort différentes</u>.

Comme le dit BRUNSCHVICG, il y aurait quelque injustice à ne pas marquer la place de FREGE dans l'histoire. FREGE, esprit polyvalent, a voulu refonder les idées fondamentales, parmi lesquelles la conception de fonction.

En 1831 dans une étude sur fonction et concept, FREGE écrit : "Mon point de départ est de savoir ce qu'on appelle fonction en mathématiques... nous devons retourner à l'époque où l'Analyse était découverte, si nous voulons savoir ce que le mot "fonction" signifiait à l'origine. La réponse que nous aurons probablement à cette question est : "La fonction de x était considérée comme une expression mathématique, contenant x, une formule qui contient la lettre x, ainsi l'expression $2x^3 + x$ sera une fonction de x, et $2.2^3 + 2$ sera une fonction de 2 ? Cette réponse ne peut pas nous satisfaire, dans ce cas-là aucune distinction n'était faite sur la signification entre la forme et le contenu, le signe et l'objet."

<u>LE DEBUT DU XXème SIECLE</u>

Alors que la théorie des ensembles de CANTOR, pénétrait progressivement dans les mathématiques, la conception de fonction n'était pas assez *lucide au début du XXème siècle.*

Plusieurs savants dont BAIRE voulaient clarifier l'idée de fonction.

LEBESQUE, essaie de donner une introduction sur le concept de fonction.

"Bien que, depuis DIRICHLET et RIEMANN, on s'accorda généralement à dire qu'il y a fonction quand il y a correspondance entre un nombre y *et des nombres* x_1 , x_2 , ... x/a *, sans se préoccuper du procédé qui sert à établir cette correspondance, beaucoup de mathématiciens semblent ne considérer comme de vraies fonctions que celles qui sont établies par des correspondances analytiques."*

"On peut penser qu'on introduit peut-être ainsi une restriction assez arbitraire ; cependant il est certain que cela ne restreint pas pratiquement le champ des applications, parce que, seules, les fonctions représentables analytiquement sont effectivement employées jusqu'à présent."

"Dans certaines théories générales, dans la théorie de l'intégration au sens de RIEMANN, par exemple, on ne se préoccupe pas de savoir si les fonctions que l'on considère sont ou non représentables analytiquement. Mais cela ne veut pas dire qu'elles ne le sont pas toutes et, dans tous les cas, quand on applique effectivement ces théories, c'est toujours sur des fonctions représentables analytiquement qu'on opère. On peut dire plus : quand on emploie les expressions analytiques que M. BAIRE a considérées dans sa thèse, on reconnait facilement que toutes les fonctions qui ont été citées jusqu'ici, qu'elles se soient présentées naturellement ou qu'elles aient été construites de toutes pièces pour fournir des exemples de singularités, sont toutes représentables analytiquement. Ce résultat, surprenant au premier abord, étonnera moins si l'on se rappelle que la fonction $X(x)$, *si souvent citée comme exemple de singularité, égale à un pour* x *rationnel, à zéro pour* x *irrationnel, admet la représentation suivante :*

$$X(x) = \lim_{m} \left[\lim_{n} (\cos^2 m!\, \pi x)^{2n} \right]$$

(Cet exemple est dû à DIRICHLET)

"Ainsi il n'est pas évident qu'il existe des fonctions non représentables analytiquement : il y a donc lieu de rechercher s'il existe de telles fonctions et, ..."

Ensuite, dans le même travail, LEBESQUE définit ce que l'on entend par "expression analytique" et par "fonctions représentables ou exprimables analytiquement".

"Une fonction est représentable ou exprimable analytiquement, lorsqu'on peut la construire en effectuant suivant une loi donnée, certaines opérations ; cette loi de construction constitue une expression analytique..."

Ci-après, LEBESQUE cite comment un "objet" est défini.

"Un objet est défini ou donné quand on a prononcé un nombre fini de mots s'appliquant à cet objet et à celui-là seulement, c'est-à-dire quand on a nommé une propriété caractéristique de l'objet. Pour donner une fonction $f(x_1 , x_2 \dots x_n)$ *on nomme généralement une propriété appartenant à tous les ensembles de nombres :*

$$x_1 , x_2 \dots , f(x_1 , x_2 \dots , x_n)$$

et à ceux-là seulement ; mais cela n'est nullement nécessaire, on peut nommer d'autres propriétés caractéristiques de cette fonction. C'est ce que l'on fait, par exemple, lorsque, une fonction $f(x)$ *étant définie d'une manière quelconque, on dit que* $F(x)$ *est celle des fonctions primitives de* $f(x)$ *qui s'annule pour* $x = 0$. *C'est nommer une fonction que de dire qu'elle est égale à zéro ou un suivant que la constante d'EULER* C *est rationelle ou non.*

"Il ne faudrait d'ailleurs pas croire qu'une fonction est nécessairement mieux définie quand on donne une propriété caractéristique de l'ensemble $y , x_1 , x_2 , \dots x_n$, *car une telle propriété ne permet pas en général de calculer* y , *par exemple, la fonction* $X(x)$ *qui admet même une représentation analytique connue, n'est pas connue pour* $x = C$, *bien que l'on sache calculer* C *avec autant de décimales que l'on veut et, si nous la connaissons pour* $x = \pi$, *ce n'est pas son expression analytique qui nous la fait connaître.*

"On ne devra donc pas s'étonner si, dans la suite, <u>je considère comme parfaitement définies et données des fonctions que je ne saurai calculer pour aucune valeur de variables</u> ; je ne connaîtrai en général rien de plus sur ces fonctions, que leurs définitions".

La question sur l'existence et la définition de fonction était un des points de controverses entre BOREL et LEBESQUE. En 1912 BOREL, développant ces idées sur la théorie d'intégration, cite ses pensées sur l'existence et la définition d'objets mathématiques :

"Nous dirons qu'une fonction est calculable, lorsque sa valeur est calculable pour toute valeur calculable de la variable. En d'autres termes, si a *est un nombre calculable, on doit savoir calculer la valeur de* $f(a)$ *à un nombre près, quel que soit* n. *"Une fonction ne peut donc être calculable que si elle est continue, au moins pour les valeurs calculables de la variable".*

Les polémiques entre LEBESQUE et BOREL continuaient. En 1918, LEBESQUE a répondu à l'article de BOREL, de 1912.

"M. BOREL voit une grande différence entre ses définitions et les miennes, parce que je considère les fonctions et les ensembles en soi (c'est-à-dire sans m'occuper de la façon dont ces fonctions et ensembles me sont donnés), tandis qu'il prétend raisonner uniquement sur des êtres donnés d'une certaine manière. Dès que j'applique les définitions, je ne rencontre il est vrai, dans la pratique que les fonctions et ensembles étudiés par M. BOREL".

Ci-après, LEBESQUE se défend en utilisant des exemples historiques :

"D'habitude, on oppose CAUCHY et RIEMANN à WEIERSTRASS, M. BOREL oppose CAUCHY et RIEMANN l'un à l'autre parce que le premier n'a jamais écrit une phrase de définition au mot fonction, tandis que le second en a écrit une".

"Mais à moins d'attribuer une vertu magique aux mots, il n'y a pas en cela matière à opposition puisque tous deux, quand il s'agit de démontrer, raisonnent sur les propriétés logiques de la classe des fonctions sur lesquelles ils opèrent. Il est d'ailleurs impossible de faire autrement, si l'on raisonne. Cependant, il y a cette différence entre CAUCHY et RIEMANN d'une part, WEIERSTRASS de l'autre, que les premiers raisonnent sur les valeurs de la fonction et le dernier sur une représentation de la fonction. Quand, par exemple, CAUCHY définit une fonction de variable complexe, il fait intervenir une propriété des valeurs de la fonction sans se préoccuper de la façon dont la fonction est donnée. C'est seulement lorsqu'il s'agit de reconnaître si une fonction particulière donnée satisfait à la définition générale posée que CAUCHY s'occupe du procédé particulier qui a servi à donner la fonction. C'est exactement de la même façon que j'opère. Au contraire, la façon de M. BOREL est à rapprocher de celle de WEIERSTRASS avec cette circonstance, en quelque sorte aggravante, qu'un même ensemble, qu'une même fonction peuvent être donnés d'une infinité de manières entièrement différentes. Par suite, à une même fonction, à un même ensemble, donnés de diverses façons, correspondent des procédés différents de définition de l'intégrale ou de la mesure. Cela rend particulièrement sensible l'intérêt qu'il y a à considérer ces procédés comme servant seulement au calcul et à donner une définition établissant un lien direct entre la fonction et l'intégrale, entre l'ensemble et la mesure, qui ne dépende que de la fonction ou de l'ensemble, non de la façon dont ils sont donnés. C'est en faisant cela que l'on peut légitimement se réclamer du nom de CAUCHY".

Il semble que cet article de LEBESQUE de 1918, met fin à la controverse en faveur de LEBESQUE. BOREL a écrit quand même plusieurs articles par la suite sur la question fondamentale des définitions en mathématiques.

A la même époque, que ces controverses entre BOREL et LEBESQUE se déroulaient, M. FRECHET et ELIAKINN, HASTINGS MOORE créaient la conception actuelle de fonction.

FRECHET dès 1914 (dans sa thèse) généralise la définition d'une fonction comme suit : "Nous supposons donner une certaine catégorie (éléments quelconques, nombres, surfaces etc...) dans laquelle on sache discerner les éléments distincts. Nous pourrons dire que va est une fonction (ou opération fonctionnelle), uniforme dans un ensemble E d'éléments de c , si à tout élément A de E correspond un nombre bien déterminé Va".

Ainsi dès 1904-5, on était arrivé à la conception de valeur numérique définie dans un ensemble absolument quelconque.

Dès 1909 FRECHET généralisait aussi l'ensemble où la fonction prend ses valeurs. Nous lui empruntons un passage de son fameux livre "les espaces abstraits".

"... Une remarque toutefois. Si l'on a généralisé la théorie des fonctions en remplaçant la variable numérique par une variable quelconque, pourquoi ne pas généraliser intégralement en remplaçant aussi la fonction numérique par une fonction de nature quelconque.

"Et alors <u>l'Analyse générale apparaît maintenant comme l'étude des relations entre deux éléments de nature quelconque</u> (dont l'un pourra jouer le rôle de variable et l'autre de fonctionnelle).

"Le cas où la fonctionnelle est un nombre est celui qui a été étudié jusqu'ici avec le plus de détails ; pourtant l'étude des propriétés infinités, des relations entre deux variables de nature quelconque a déjà attiré l'attention. Elle n'est autre que l'étude des transformations abstraites continues ou bicontinues."

"Nous avons envisagé dès 1909 ces transformations et particulièrement les "homéomorphies" c'est-à-dire les correspondances biunivoques et bicontinues entre deux éléments de nature quelconque".

De cette façon, la conception actuelle de fonction a été, pour l'essentiel, formulée dans les années 1904-1909.

<u>NOTE</u> : On ne doit pourtant pas sous-estimer la contribution du précurseur de cette évolution, Vito VOLTERRA, qui en édifiant toute une théorie pour

les fonctions de lignes avait préparé les esprits à cette évolution. HADAMARD, ayant remarqué ce point le signale.

L'EPOQUE MODERNE

Le concept de fonction, a progressivement pénétré dans les mathématiques.

Les difficultés qui se produisaient sur le concept de fonction, étaient dues au fait que les mathématiciens choisissent eux-mêmes leurs définitions selon les théories qu'ils voulaient développer.

CARATHEODORY, en 1917, définit la fonction comme une correspondance d'un ensemble sur les nombres réels.

En 1939, on trouve dans les structures fondamentales de l'Analyse, de BOURBAKI la définition suivante : "Soient E et F, deux ensembles distincts ou non, une relation entre une variable x de E et une variable Y de F est dite relation fonctionnelle en y, ou relation fonctionnelle de E vers F, si pour tout x appartenant à E, il existe un seul y appartenant à F, qui soit dans la relation considérée avec x.

"On donne le nom de fonction à l'opération qui associe ainsi à tout élément x dans E, l'élément y dans F qui se trouve dans la relation donnée avec x ; on dit que y est la valeur de la fonction pour l'élément x, et que la fonction est déterminée par la relation fonctionnelle considérée. Deux relations fonctionnelles équivalentes déterminent la même fonction...".

L'importance intrinsèque de cette évolution du concept de fonction, est qu'elle a refondu les principes de l'Analyse. Particulièrement, en considérant la fonction comme une correspondance, on a élargi les concepts disons "classiques" comme par exemple continuité, continuité uniforme, discontinuité, en étudiant maintenant les conceptions plus récentes comme celles de : semi-continuité, à droite ou à gauche, oscillation d'une fonction, fonction à variation bornée ; notions qui doivent leurs apparitions à la nouvelle définition de fonction comme correspondance et par l'investissement des propriétés topologiques des ensembles de points.