VIETE ET L'AVÈNEMENT DU CALCUL LITTÉRAL

Jean-Paul GUICHARD
IREM&S de Poitiers

Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique : Actes de la cinquième université d'été, ESU 5, Prague, 19-24 juillet 2007 (pages 475-487)

RÉSUMÉ

Examen de l'apport de Viète.
La résolution des équations : un changement de point de vue. Étude de l'équation $x^2 + ax = b$ dans les textes d'Al Khawarizmi et Viète. Le rôle de la géométrie et des identités avec une utilisation en classe.
La résolution de problèmes de construction par l'algèbre. Étude de l'inscription d'un carré dans un triangle dans les textes d'Al Khawarizmi et Bezout. Mise en équations et traitement littéral de la géométrie avec utilisations en classe.
L'importance du calcul littéral.

1 L'apport de Viète

Le calcul littéral date de 1591, quand François Viète (1540-1603), un juriste né à Fontenay-le-Comte, en Poitou, conseiller du Roi de France, publie, à Tours, un opuscule de 14 pages qui allait révolutionner la pratique des mathématiques : *In Artem Analyticem Isagoge (Introduction à l'Art analytique).* La preuve ? Trois ans plus tard, le 10 octobre 1594, à Fontainebleau, Viète résout, en trois heures, le défi qu'Adrien Romain a lancé à tous les mathématiciens de la Terre : "*Ut legi, ut solvi" (Aussitôt lu, aussitôt résolu*). Et il ajoute : « *Moi qui ne fais pas profession de mathématicien, mais que l'étude des Mathématiques charme, quand j'ai du temps libre* ». Le problème est de résoudre une équation du quarante-cinquième degré. Incroyable ! Viète donne les 23 solutions positives avec 9 décimales et leur construction géométrique (voir annexe 5.1). Comment Viète, un mathématicien inconnu, a-t-il pu battre tous les mathématiciens de son temps ?

1.1 Une algèbre nouvelle

Dans le contexte de la Renaissance, Viète redécouvre les œuvres des grands juristes, poètes, écrivains et mathématiciens de l'Antiquité. Ceux des savants grecs, parfois incomplets, fournissent de nombreux résultats, mais aussi des problèmes non résolus, des solutions perdues, et pas d'indications sur la méthode, l'analyse, qui a permis de trouver ces résultats. Il redécouvre alors la solution du problème d'Apollonius : comment tracer un cercle tangent à trois cercles donnés ? (Voir annexe 5.1) Il publiera sa solution en 1600. Il travaille aussi sur la trisection de l'angle, la construction de l'heptagone régulier, la duplication du cube, la quadrature du cercle. À cette époque, il y a de nombreux traités d'Algèbre, et la nécessité de notations apparait clairement : ils abondent, mais la méthode pour résoudre les problèmes et les équations est toujours donnée avec des exemples numériques. Ainsi les recherches de Viète le conduisent à créer une algèbre nouvelle :

> « *Tous les mathématiciens savaient que sous leur Algèbre ou* Almulcabale *qu'ils vantaient, et qu'ils nommaient le* Grand Art*, étaient cachées des masses d'or incomparables, mais ils ne les trouvaient pas. Aussi vouaient-ils des hécatombes, faisaient-ils des sacrifices à Apollon et aux Muses lorsqu'ils*

parvenaient à la solution d'un seul de ces problèmes que je résous spontanément par dizaines, par vingtaines ; ce qui prouve que notre art est la méthode d'invention la plus certaine en mathématiques. » (Dédicace à Catherine de Parthenay)

Il nomme cette algèbre nouvelle L'*Art Analytique* qu'il définit comme « *la science de bien trouver dans les mathématiques* » et à laquelle il assigne comme but de résoudre tout problème : « *L'Art analytique s'attribue justement le magnifique problème des problèmes qui est : résoudre tout problème* ». Pour y arriver, il crée un calcul portant entièrement sur des symboles au lieu de nombres, qu'il nomme « *Logistique spécieuse :*

« *Mais la forme sous laquelle on doit aborder la recherche exige les ressources d'un art spécial, qui exerce sa logique non sur des nombres, suivant l'erreur des analystes anciens, mais au moyen d'une logistique nouvelle … Logistique spécieuse est celle qui est exposée par des signes ou des figures, par exemple, par des lettres de l'alphabet.* »

Ce calcul utilise seulement des lettres : la lettre A ou tout autre voyelle E, I, O, U, Y pour les grandeurs cherchées, les lettres B, C, D ou tout autre consonne pour les grandeurs données. C'est ce que nous appelons maintenant le calcul littéral. Ce calcul obéit à la loi des homogènes, c'est-à-dire tient compte de la dimension des grandeurs ; pour la dimension 2 : A carré, B plan, pour la dimension 3 : D cube, F solide… Alors nous écrivons avec des lettres les relations entre les grandeurs et nous obtenons soit des équations, soit des formules.

1.2 La possibilité de résoudre les problèmes avec l'algèbre dans le cas général

Pour illustrer sa nouvelle algèbre, Viète publie en même temps que l'*Isagoge*, cinq livres de recherches : *Les Zététiques.* La plupart d'entre eux sont des problèmes des *Arithmétiques* de Diophante. Ainsi, il veut faire apprécier au lecteur l'important changement apporté par son nouveau calcul.

Étudions d'abord le premier problème du premier livre : « Étant donné la différence de deux côtés et leur somme, trouver les côtés. » (Texte des *Zététiques* I 1 : voir annexe 5.2). Diophante traite le problème avec un exemple, comme le font les contemporains de Viète. Il prend 100 pour la somme, et 40 pour la différence. Choisissant pour inconnu le plus petit des deux nombres cherchés, il trouve 30 et 70. Que fait Viète ? Il utilise la même démarche pour la résolution, mais il note B la différence, D la somme, A le plus petit des nombres cherchés, et E le plus grand. Il trouve A égal à $\frac{1}{2}$ D – $\frac{1}{2}$ B et E égal à $\frac{1}{2}$ D + $\frac{1}{2}$ B. Ensuite il met le résultat en mots comme une règle générale et termine par une application numérique. Avec quels nombres ? Devinez. Ceux de Diophante !

Pour tous les problèmes Viète suit la même démarche : solution générale utilisant le calcul littéral (sa *logistique spécieuse*), établissement d'une règle ou d'un théorème, application numérique utilisant l'algèbre numérique de ses contemporains (*logistique numéreuse* selon ses termes) avec les symboles cossiques. Ainsi, les données sont préservées : elles se trouvent dans des formules donnant les quantités inconnues en fonction des quantités connues. Le problème est résolu dans le cas général. Pour le cas particulier, il suffit de faire une application numérique. C'est un procédé qui est devenu standard, et courant en Physique. Sans calcul littéral, Diophante, ou tout autre, aurait de nouveau résolu le problème pour d'autres données numériques.

Pour le premier problème de ses *Zététiques*, Viète suit Diophante pour la façon de procéder. Mais pour les autres problèmes, Viète nous montre que sa nouvelle algèbre permet, pour la première fois, de prouver des formules et des théorèmes en utilisant le calcul, d'en créer de nouveaux, et de les utiliser. Ainsi Viète est capable de créer de nouvelles méthodes pour résoudre des problèmes. Considérons le quatrième problème du second livre des *Zététiques* : « Étant donné le produit de deux nombres et leur somme, on trouvera les nombres » (Texte des *Zététiques* II 4 : voir annexe 5.2). C'est un problème classique : il se trouve chez Diophante, mais aussi dans les mathématiques Babyloniennes. Pour résoudre ce problème, Viète ne suit pas du tout Diophante : il utilise une formule reliant xy, $x+y$ et $x-y$ pour ramener le problème au problème 1 du livre I des *Zététiques*. Regardons sa méthode avec nos notations. Traduction avec des lettres : trouver x et y sachant que $x + y = S$ et $xy = P$. Viète utilise la formule $(x + y)^2 - 4xy = (x - y)^2$ établie dans son ouvrage *Notae priores.* Alors il trouve $x - y$ en fonction de S et P. Connaissant $x + y$ et $x - y$, on peut trouver x et y au moyen du premier problème (*Zététiques* I 1). Viète termine avec une application numérique : $S = 12$, $P = 20$, alors $(x - y)^2 = 64$, et il nous laisse finir. L'utilisation des identités remarquables, ou d'autres identités obtenues à partir d'elles, permet de résoudre beaucoup de systèmes du second degré à deux inconnues. Cette méthode permet aussi de résoudre l'équation du second degré d'une façon différente de la méthode habituelle. Voici comment : on écrit l'équation sous la forme $x^2 + ax = b$, et ensuite comme un produit constant $x(x + a) = b$. En posant $y = x + a$, on doit trouver x et y sachant que $xy = b$ and $y - x = a$: c'est le problème 3 du livre II des *Zététiques* (voir annexe 5.2) résolu comme *Zététiques* II 4.

2 Résolution des équations : un changement de point de vue

Pour apprécier le changement dû à Viète, comparons la solution de l'équation $x^2 + ax = b$ dans l'œuvre d'Al Khwarizmi et dans celle de Viète (textes : voir annexe 5.3). Nous allons utiliser les notations actuelles pour comparer les méthodes, mais il est important de se confronter aux textes originaux. Actuellement, l'algèbre est souvent associée à l'utilisation de symboles. Cependant le texte d'Al Khwarizmi montre qu'il est possible de pratiquer l'algèbre sans aucun symbole. Et même dans le texte de Viète, le langage reste pour désigner égalité, puissances, dimensions des constantes (loi des homogènes), multiplication (in), double (bis)… mais sans symboles pour les quantités connues et inconnues, le calcul littéral ne peut pas exister : c'est là l'invention de Viète.

2.1 Avant Viète

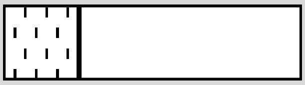
On transforme une figure géométrique, un rectangle, en un carré, *au moyen d'un gnomon ou d'une croix.*
C'est la figure géométrique de l'expression algébrique, les théorèmes sur la transformation des figures géométriques de même aire, et la figure géométrique que l'on veut obtenir qui sont les guides du procédé algorithmique et sa validation.

2.2 Avec Viète

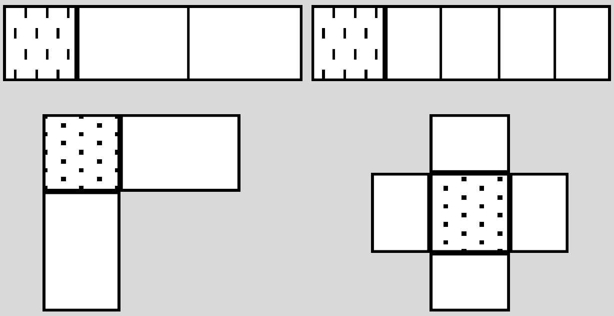
On transforme une forme algébrique, une somme algébrique, en un carré, *au moyen d'identités et de changements de variables.*
C'est la forme de l'expression algébrique, le répertoire des formes *(identités)*, et la forme que l'on veut obtenir *(équation canonique)* qui sont les guides du procédé algébrique.

Méthode de résolution de l'équation $x^2 + ax = d$ avant Viète pour $x^2 + 2x = 20$

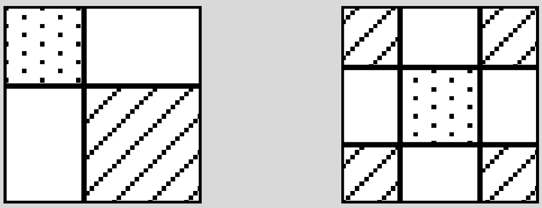
Représentation et transformation géométrique du membre de gauche (rectangle)



Méthode du gnomon Méthode de la croix



On obtient un carré d'aire connue



$(x + 1)^2 = 20 + 1$ $(x + 1)^2 = 20 + 4\times 0,25$

$(x + 1)^2 = 21$ donc $x + 1 = \sqrt{21}$ et

$x = \sqrt{21} - 1$

Méthode de résolution de l'équation $x^2 + ax = d$ avec Viète

On fait un changement de variable
$a = 2b$

$x^2 + 2bx = d$ (forme affectée)

On utilise une identité
$x^2 + 2bx + b^2 = (x + b)^2$

$x^2 + 2bx + b^2 = d + b^2$

et un changement de variable
$x + b = X$

$X^2 = d + b^2$ (forme pure)

$X = \sqrt{d + b^2}$

$x = \sqrt{d + b^2} - b$

Application numérique : b= 1, d = 20, alors
$x = \sqrt{21} - 1$

Nous pouvons noter que Viète, ainsi qu'Al Khwarizmi, « omettent » une solution, la négative. Mais ce n'est pas une omission. Pour Al Khwarizmi, une telle solution ne peut pas apparaitre parce que les algorithmes sont basés sur les transformations géométriques. Et pour Viète, seules les quantités positives existent. Néanmoins par l'utilisation du calcul littéral, petit à petit les mathématiciens accepteront l'existence de quantités négatives et imaginaires.

2.3 Utilisation en classe

Nous avons vu, dans la solution de l'équation $x^2 + ax = d$ et dans la résolution des problèmes 3 et 4 du livre II des *Zététiques*, la place centrale des formules littérales dans la méthode algébrique de Viète.

Dans le livre II des *Zététiques*, Viète ramène la solution de tout problème du second degré à 2 inconnues à la solution d'un système du premier degré à 2 inconnues en utilisant des formules. Les éléments de ces formules (identités) sont x^2, y^2, $x + y$, $x - y$, xy, $x^2 + y^2$, $x^2 - y^2$.

Je pense que l'utilisation en classe de ces problèmes et de la méthode de Viète est un bon travail d'utilisation des identités remarquables pour les élèves parce que, souvent, le travail demandé sur ce sujet est seulement technique, sans résolution de problème. Des exemples sont donnés dans l'annexe 5.4 (Voir aussi [U1]).

3 Résolution de problèmes géométriques utilisant l'algèbre

3.1 Section des angles

En créant sa nouvelle algèbre, Viète voulait résoudre les fameux problèmes de l'Antiquité. Et à la fin de l'*Introduction à l'Art Analytique* il souligne le fait que sa nouvelle algèbre lui a permis de pénétrer, entre autres, le mystère des sections angulaires :

> *« L'analyste résout, à l'aide de son Art, les problèmes les plus fameux appelés jusqu'à présent irrationnels tels que le problème mésographique [duplication du cube], la section d'un angle en trois parties égales, l'invention du côté de l'Heptagone et tous les autres qui tombent dans ces formules d'équations /.../ Le mystère des sections angulaires, que personne jusqu'à présent n'a connu, montre et apprend pour l'Arithmétique et pour la Géométrie :*
> *- À trouver la raison des côtés étant donnée la raison des angles,*
> *- À trouver un nombre qui soit à un nombre comme un angle est à un angle. »*

En fait, sa nouvelle algèbre lui a permis d'établir des formules littérales de trigonométrie (voir annexe 5.5), et de ramener la division d'un angle en n parties égales à une équation de degré n. Alors, pour lui, répondre au défi d'Adrien Romain devenait facile (voir annexe 5.6).

3.2 Inscription d'un carré dans un triangle

Le calcul littéral permet de résoudre un problème géométrique de construction dans le cas général : cet objectif de Viète sera repris par Descartes dans sa *Géométrie* avec une extension aux problèmes de lieux. Pour mesurer le changement, nous proposons de nouveau le même problème traité par Al Khwarizmi et par Bezout : deux textes utilisés en classe avec des élèves (voir annexe 5.7).

Avec le texte d'Al Khwarizmi les élèves peuvent découvrir la résolution d'un problème géométrique au moyen de l'algèbre : une algèbre avec des coefficients numériques − *l'algèbre* d'avant Viète qu'il appelait *logistique numéreuse* −, un triangle isocèle (cas particulier) et des données numériques. C'est un problème intéressant, je l'utilise avec mes élèves âgés de 13-14 ans (voir annexe 5.7.a). Pour une utilisation dans d'autres classes, voir [U2].

D'un autre côté, le calcul littéral permet le traitement de ce problème dans le cas général, comme le montre le texte de Bezout. Deux siècles après l'invention de Viète, nous voyons sa méthode fonctionner avec nos notations :

1) Traduction algébrique : une équation littérale (ce qui diffère du traitement par de la géométrie analytique avec des coordonnées).

2) Résolution algébrique de l'équation : au moyen du calcul littéral, l'inconnue est écrite comme une formule fonction des données.

3) Cette formule permet de construire géométriquement la solution et de faire des applications numériques.

Ce problème est une bonne situation pour travailler le calcul littéral en classe (voir [U2]).

4 Importance capitale de l'invention du calcul littéral

L'analyse est issue de l'algèbre « spécieuse » : notion d'équations de courbe, de variable, de fonction… L'explicitation des propriétés des opérations est issue du calcul littéral. La modélisation avec le langage algébrique a permis le rapide progrès des mathématiques et des autres sciences.

Mais actuellement, en France, dans l'enseignement secondaire, il y a une utilisation quasi exclusive de l'« *algèbre numéreuse* », et l'enseignement du calcul algébrique est fait formellement dans le champ des nombres. Il est donc urgent, de notre point de vue, de réhabiliter *l' « algèbre spécieuse »* comme *outil pour la résolution de problèmes dans le champ des grandeurs* pour :

– résoudre des problèmes géométriques : construction, démonstration, lieu de points…

– établir des formules générales : périmètres, aires, volumes, propriétés des nombres…

Les utilisations en classe que nous avons présentées, basées sur des textes historiques, montrent des exemples de cette réhabilitation.

RÉFÉRENCES

Œuvres de Viète

– Originaux et traductions en Français, voir Gallica.
– Des traductions en Anglais ont été faites par Richard Witmer.

Utilisation en classe

– [U1] **Identités remarquables**
J-P Guichard « Un problème de Diophante au fil du temps » dans *4000 ans d'histoire des mathématiques*, IREM de Rennes, 2002, (*). ou « D'un problème de Diophante aux identités remarquables » dans *Repères-IREM* n°53, 2003 (*).

– [U2] **Un carré dans un triangle**
Texte d'Al Khwarizmi : utilisations avec des élèves de 12-17 ans dans plusieurs classes, décrites dans *Mnémosyne* n°15, 1999, IREM de Paris 7 (*). Voir aussi P. Guyot, *Repères-IREM* n°51, 2003 (*), un exemple d'utilisation en BEP.
Texte de Bezout : IREM de Dijon *Pot pourri : activités historico-mathématiques*, 2004, et *Repères-IREM* n°63, 2006 (*).

Didactique

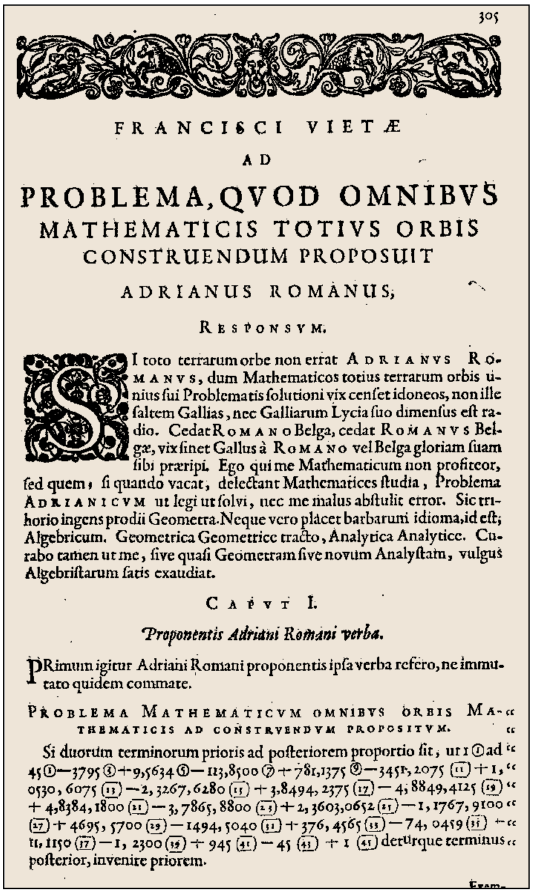
– [D1] IREM de Poitiers, *Le calcul littéral au collège*, 1999.
– [D2] *Repères-IREM* n°28, 1997 (Spécial algèbre) (*).
– [D3] J-C Duperret, « L'accès au littéral et à l'algébrique », *Repères-IREM* n°34, 1999 (*).
– [D4] J-P. Guichard, « Équations et calcul littéral en 4e », *Repères-IREM* n°46, 2002 (*).
– [D5] F. Moinier, « Quelques problèmes pour donner du sens à des règles du calcul littéral », *Repères-IREM* n°42, 2001 (*), ou [D1].
– [D6] Y. Chevallard, « Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège », *Petit x* n°5-19-23, IREM de Grenoble (*).
– [D7] J. Gascón, « Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'arithmétique généralisée », *Petit x* n°37, IREM de Grenoble (*).

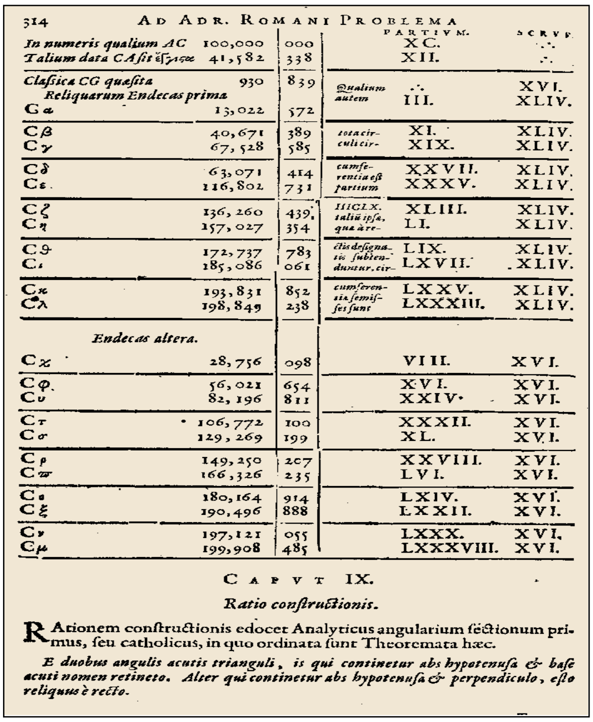
(*) : En ligne sur le site de Publimath

5 Annexe

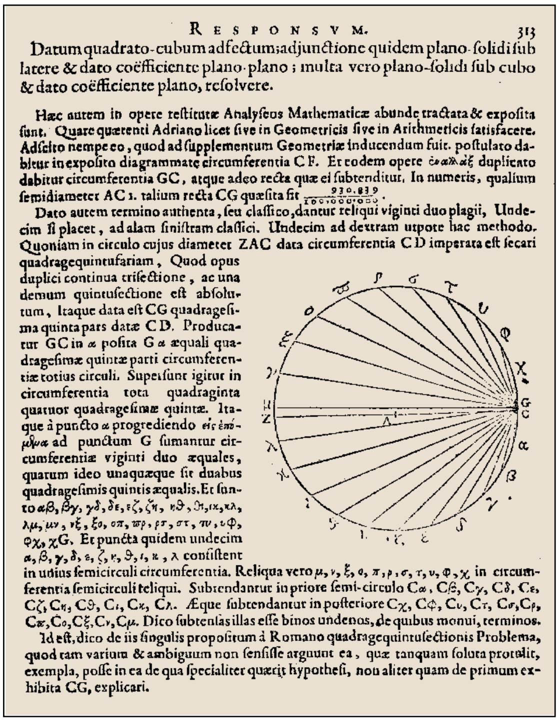
Cette annexe contient des documents historiques illustrant l'article. Trois d'entre eux indiquent une utilisation avec des élèves.

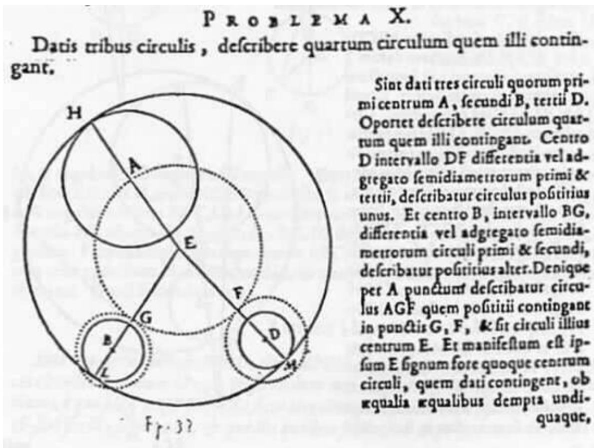
5.1 Solution de Viète au problème posé par Adrien Romain et problème d'Apollonius





Ad problema quod omnibus mathematicis totius orbis construendum proposuit Adrianus Romanus, Franscisci Vietae responsum (Réponse au problème d'Adrien Romain), Mettayer, Paris, 1595





Franscisci Vietae Apollonius Gallus (L'Apollonius français), Le Clerc, Paris, 1600

5.2 Trois problèmes de Viète : *Zététiques,* Mettayer, Tours, 1591

Livre I, problème 1

ZETETICVM I.

DAta differentia duorum laterum, & adgregato eorumdem, invenire latera.

Sit data B differentia duorum laterum, & datum quoque D adgregatum eorumdem. Oportet invenire latera.

Latus minus eſto A, majus igitur erit A + B. Adgregatum ideo laterum A 2 + B. At idem datum eſt D. Quare A 2 + B æquatur D. Et per antitheſim, A 2 æquabitur D — B, & omnibus ſubduplatis, A æquabitur D $\frac{1}{2}$ — B $\frac{1}{2}$.

Vel, latus majus eſto E. Minus igitur erit E — B. Adgregatum ideo laterum, E 2 — B. At idem datum eſt D. Quare E 2 — B æquabitur D. & per antitheſim, E 2 æquabitur D + B, & omnibus ſubduplatis E æquabitur D $\frac{1}{2}$ + B $\frac{1}{2}$.

Data igitur differentia duorum laterum & adgregato eorumdem, inveniuntur latera. Enimvero

Adgregatum dimidium laterum minus dimidia differentia æquale eſt lateri minori, plus eadem, majori.

Quod ipſum eſt quod arguit Zeteſis.

Sit B 40. D 100 *A fit* 30. E 70.

Étant donné la différence de deux côtés et leur somme, trouver les côtés.

Soit B la différence donnée des deux côtés, et soit D leur somme. Il faut trouver les côtés.

Soit A le côté le plus petit, donc le plus grand sera A + B. Pour cette raison la somme des côtés sera 2A + B. Ce qui est la même chose que D. C’est pourquoi 2A + B est égal à D. Et par antithèse, 2A sera égal à D – B, et tout étant divisé par deux, A sera égal à $\frac{1}{2}$ D – $\frac{1}{2}$ B.

Ou soit E le côté le plus grand. Le plus petit sera donc E – B. Pour cette raison la somme des côtés sera 2E – B. Ce qui est la même chose que D. C’est pourquoi 2E – B sera égal à D, et par antithèse 2E sera égal à D + B ; et tout étant divisé par deux, E sera égal à $\frac{1}{2}$ D + $\frac{1}{2}$ B.

Donc la différence des deux côtés et leur somme étant données, les côtés seront trouvés. En effet :

La moitié de la somme des côtés, moins la moitié de la différence, est égal au côté le plus petit ; les mêmes quantités ajoutées donnent le plus grand côté.

C’était la recherche à faire.

Soit : B 40. D 100. A fait 30. E fait 70.

Livre II, problème 4

ZETETICVM IIII.

Dato Rectangulo ſub lateribus & adgregato laterum inueniuntur latera.

Enimuerò quadratum adgregati laterum, minùs quadruplo Rectangulo ſub lateribus, æquatur quadrato differentiæ laterum.

Vt rurſus ex proximè repetitâ ordinatione licet inferre per antitheſim.

Sit 20 *Rectangulum ſub duobus lateribus quorum ſumma eſt* 12. *Differentia laterum eſto* 1*N*. 1*Q æquatur* 64.

Étant donné le produit de deux nombres et leur somme, on trouvera les nombres *.
En effet : Le carré de la somme des nombres, diminué de quatre fois leur produit, est égal au carré de leur différence.
Comme on peut le voir de nouveau par antithèse à partir de la même démarche que précédemment.
Soit 20 *le produit des deux nombres, dont la somme est* 12. *Leur différence est* 1*N*. 1*Q (le carré de leur différence) sera* 64.

* Nous avons adapté la traduction en remplaçant côté par nombre, rectangle par produit…

Livre II, problème 3

ZETETICVM III.

Dato Rectangulo ſub lateribus & differentia laterum inueniuntur latera.

Enimuerò quadratum differentiæ laterum adiunctum quadruplo Rectangulo ſub lateribus æquatur quadrato adgregati laterum.

Iam enim ordinatum eſt, Quadratum adgregati laterum minùs quadrato differentiæ æquari quadruplo Rectangulo ſub lateribus, adeò vt ſola fuit opus antitheſi. Datâ porro differentia duorum laterum & eorum ſumma dantur latera.

Sit 20 *Rectangulum ſub duobus lateribus quorum differentia eſt* 8. *Summa laterum eſto* 1*N*. 1*Q æquatur* 144.

Étant donné le produit de deux nombres et leur différence, on trouvera les nombres *.
En effet : Le carré de la différence des nombres, ajouté à quatre fois leur produit, est égal au carré de leur somme.
En effet on a déjà établi que le carré de la somme des nombres moins le carré de leur différence est égal à quatre fois leur produit, donc le reste en découle par le moyen de l'antithèse. La différence des deux nombres et leur somme étant données, nous avons les nombres.
Soit 20 *le produit des deux nombres, dont la différence est* 8. *Soit* 1*N la somme des côtés.* 1*Q (son carré) sera égal à* 144.

* Nous avons adapté la traduction en remplaçant côté par nombre, rectangle par produit…

5.3 La résolution des équations : *équation $x^2 + ax = b$*

5.3 a) Texte d'Al Khwarizmi : Algèbre, Chapitre IV. Des carrés et des racines qui équivalent à des nombres

(Traduction J-P Levet à partir de la traduction latine de Robert de Chester, XII[e] siècle, IREM de Poitiers, 1997)

Il y a équivalence entre des carrés et des racines d'une part et des nombres d'autre part, si, par exemple, on dit qu'un carré et dix racines valent 39 unités.
La recherche que l'on doit mener en présence d'un tel système d'équation est la suivante : il faut trouver quel est le carré qui, si on lui adjoint l'équivalent de 10 de ses propres racines, permet d'aboutir, pour l'ensemble ainsi formé, à un total de 39 unités.
Voici quelle est la manière de trouver la solution.
On divise par 2 le nombre des racines proposé dans l'énoncé. Dans ce problème, les racines étant au nombre de 10, pose 5. Une multiplication de ce nombre par lui-même donnera 25. Ajoute tout cela à 39, tu arriveras à 64. Après avoir extrait la racine carrée de ce nombre, c'est-à-dire 8, tu retrancheras de cette racine la moitié du nombre des racines, 5, et il restera 3. Le nombre 3 correspond donc à une seule racine de ce carré, qui est évidemment 9. C'est donc 9 qui constitue ce carré.
De la même façon, quel que soit le nombre de carrés posé au départ, il faut le réduire à un seul carré. Semblablement, quels que soient, avec les carrés, les nombres seuls et les nombres indiquant la quantité des racines, il convient de réduire tout cela de la même manière que les carrés.

5.3 b) Texte de Viète : Traité des équations

(De Emendatione aequationum tractatus secundum, Laquehay, Paris,1615)

De Reductione Quadratorum adfectorum ad pura.
Formulae tres.

I I.

Si A quadratum − B in A bis } aequetur Z plano.
A − B esto E. igitur E quadratum, aequabitur { Z plano + B quadrato.
Consectarium.
Itaque, l. { Z plani. + B quadrato. } + B, fit A, de qua primum quaerebatur.
Sit B 1. Z planum 20. A 1 N.
1 Q − 2 N. aequabitur 20. & fit 1 N l. 21 + 1.

De la réduction des équations carrées affectées aux pures
Trois formules

II.

Si $A^2 - 2AB = Zp$. Posons $A - B = E$, alors $E^2 = Zp + B^2$.
C'est pourquoi $\sqrt{Zp + B^2} + B = A$, ce qui était demandé.
Soit $B = 1$, $Zp = 20$, $A = 1N$
$1Q - 2N = 20$ et N est égal à $\sqrt{21} + 1$.

5.4 Exercices sur les *Zététiques* de Viète

Ces exercices ont été donnés à des élèves de 14-17 ans durant l'étude des identités remarquables. Voir aussi [U1].

Démontrer les théorèmes suivants énoncés et démontrés en 1591 par le mathématicien français François Viète (1540-1603), né à Fontenay le Comte, alors capitale du Bas Poitou.

1)Le double du produit de deux nombres, ajouté à la somme de leurs carrés est égal au carré de leur somme ; si on l'enlève à la somme de leurs carrés, on obtient le carré de leur différence.
2)Le carré de la somme de deux nombres, ajouté au carré de leur différence est égal au double de la somme de leurs carrés.
3)Le carré de la somme de deux nombres, diminué du carré de leur différence est égal à quatre fois leur produit.
4)Lorsqu'on divise la différence des carrés de deux nombres par la différence des nombres, on obtient leur somme.
5)Lorsqu'on divise la différence des carrés de deux nombres par la somme des nombres, on obtient leur différence.

Dans le livre 3 de ses* Recherches *(*Zététiques*), Viète applique son calcul avec des lettres, dont il est l'inventeur, pour trouver des formules sur les triangles rectangles. Retrouver ses formules.

1. Étant donné un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle et la différence entre l'autre côté et l'hypoténuse, trouve cet autre côté et l'hypoténuse. Application numérique : 5 et 1.
2. Étant donné un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle et la somme de l'autre côté et de l'hypoténuse, trouve cet autre côté et l'hypoténuse. Application numérique : 5 et 25.
3. Étant donné l'hypoténuse d'un triangle rectangle et la différence entre les deux côtés de l'angle droit, trouve les côtés de l'angle droit. Application numérique : 13 et 7.
4. Étant donné l'hypoténuse d'un triangle rectangle et la somme des deux côtés de l'angle droit, trouve les côtés de l'angle droit. Application numérique : 13 et 7.

Utiliser ces théorèmes pour résoudre, comme l'a fait Viète dans le livre 2 de ses* Recherches *(*Zététiques*), les systèmes de deux équations à deux inconnues qui suivent, en les ramenant à la recherche de la somme et de la différence de deux nombres.

1) $xy = 20$ and $x^2 + y^2 = 104$.

2) $xy = 20$ et $x - y = 8$.

3) $x - y = 8$ et $x^2 + y^2 = 104$.

4) $x + y = 12$ et $x^2 + y^2 = 104$.

5) $x - y = 8$ et $x^2 - y^2 = 95$.

6) $x + y = 12$ et $x^2 - y^2 = 95$.

7) $xy = 20$ et $x^2 - y^2 = 95$.

8) $xy + x^2 + y^2 = 124$
et $x + y = 12$.

9) $x^3 - y^3 = 316$
et $x^3 + y^3 = 370$.

10) $x^3 - y^3 = 316$ et $xy = 1$.

11) $x - y = 6$ et $x^3 - y^3 = 504$.

12) $(x - y)\ (x^2 - y^2) = 32$
et $(x + y)\ (x^2 + y^2) = 272$.

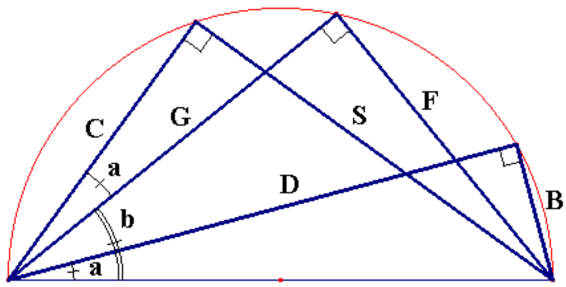
13) $x^2 + y^2 = 20$
et $\dfrac{xy}{(x-y)^2} = 2$.

14) $x^2 + y^2 = 20$
et $\dfrac{xy}{(x-y)^2} = 1$.

5.5 Trigonométrie et trisection

Trigonométrie : formules d'addition

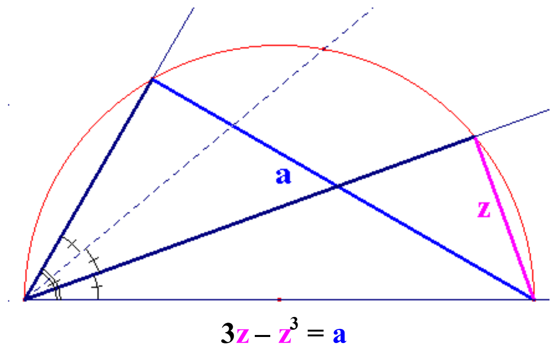
Les 3 triangles rectangles de Viète, inscrits dans un demi-cercle, et dont l'angle aigu du premier ajouté à celui du second est égal à celui du troisième.



Avec les notations de Viète (dans sa réponse à Adrien Romain) *:*
Le rapport de **S** à l'hypoténuse est le même que celui de **F in D + B in G** au carré des hypoténuses. Et pour **C** : **G in D – F in B**.

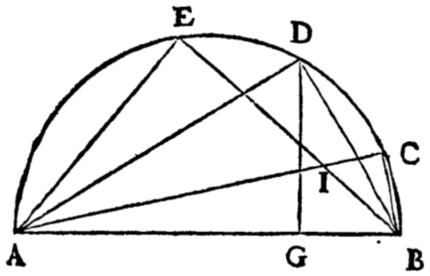
Trisection de l'angle

Avec les notations modernes



Avec les notations modernes :
sin(a + b) = sinb cosa + sina cosb
et **cos(a + b) = cosb cosa -- sinb sina**

Avec la figure de Viète (dans son traité sur la section des angles, théorème 2)



Viète démontre (en utilisant des triangles semblables) que :
1) EB×AB est égal à AD×CB + DB×AC
2) AE×AB est égal à AD×AC – CB×DB
égalités dont il divise chaque longueur par AB.

Ce qui donne, avec nos notations :
1) sin(a+b) = cosb sina + sinb cosa ;
2) cos(a+b) = cosb cosa – sina sinb ;
(en notant a l'angle $\widehat{BAC}$, b l'angle $\widehat{BAD}$, a+b l'angle $\widehat{BAE}$).

5.6 Méthode de Viète pour résoudre le problème posé par Adrien Romain

L'équation d'Adrien Romain

Transcription en notations actuelles

$45x - 3795x^3 + 95\ 634x^5 - 113\ 8500x^7 + 781\ 1375x^9 - 34512075\ x^{11} + 10530\ 6075x^{13} - 2\ 3267\ 6280x^{15} + 3\ 8494\ 2375x^{17} - 48849\ 4125x^{19} + 4\ 8384\ 1800\ x^{21} - 3\ 7865\ 8800\ x^{23} + 2\ 3603\ 0652\ x^{25} - 1\ 1767\ 9100\ x^{27} + 4695\ 5700.\ x^{29} - 1494\ 5040\ x^{31} + 376\ 4565\ x33 - 74\ 0259\ x^{35} + 11\ 1150\ x^{37} - 12300\ x^{39} + 945\ x^{41} - 45\ x^{43} + x^{45} =$ **a**.

Avec **a** égal à : $\sqrt{\frac{7}{4}-\sqrt{\frac{5}{16}}-\sqrt{\frac{15}{8}-\sqrt{\frac{45}{64}}}}$

Le principe de la reconstruction de Viète

Diviser un angle en *n* parties égales peut se réduire à résoudre une équation de degré *n*.
Si l'équation donnée est celle de la division d'un angle en 45 parties égales, 45 = 3 × 3× 5, on peut faire trois étapes.

Premier temps : Soit z tel que $3z - z^3 = a$ (1)
Équation correspondant à la division d'un angle en 3 parties égales.
Deuxième temps : Soit y tel que $3y - y^3 = z$ (2)
Même chose ; l'angle de départ se trouve alors divisé en 9 parties égales.
Troisième temps : Soit x tel que $5x - 5x^3 + x^5 = y$ (3)
Équation correspondant à la division d'un angle en 5 parties égales ; l'angle de départ se trouve alors divisé en 45 parties égales.
L'équation (2) s'écrit en utilisant (3) :
$3(5x - 5x^3 + x^5) - (5x - 5x^3 + x^5)^3 = z.$
L'équation (1) devient donc :
$3[3(5x - 5x^3 + x^5) - (5x - 5x^3 + x^5)^3] - [3(5x - 5x^3 + x^5) - (5x - 5x^3 + x^5)^3]^3 = a.$
En développant, on trouve l'équation d'Adrien Romain.

5.7 Inscription d'un carré dans un triangle

5.7. a) Un problème d'Al Khwarizmi (extrait de Kitab al-Jabr wal Muqabala)

Une page de
L'abrégé du calcul par l'algèbre et la muqàbala
d'al-Khwârizmî (IX^e s.)

D'après une traduction orale d'Ahmed Djebbar lors d'un exposé.

Si on dit une terre triangulaire ayant des côtés de 10, 10, 12 coudées dans son ventre (à l'intérieur) une terre carrée, quel est le côté de cette terre ?
Multiplie la moitié de la base par elle-même, retranche la de l'un des côtés les plus petits multiplié par lui-même et c'est 100, il reste 64.
Prends sa racine qui est 8, et c'est la hauteur. Et son aire est 48 et c'est le produit de la hauteur par la moitié de la base qui est 6.

Nous posons l'un des côtés de la terre carrée une chose, nous la multiplions par elle-même, elle devient " le capital ", nous la conservons. Puis nous constatons qu'il nous reste deux triangles sur les flancs du carré et un triangle au-dessus de lui. Quant aux deux triangles qui sont sur les flancs de la terre carrée, ils sont égaux et leur hauteur est la même et ils ont un angle droit. Donc leur aire s'obtient en multipliant une chose par 6 moins une demie chose, ce qui donne six choses moins une demi d'un carré ; et c'est l'aire des deux triangles ensembles qui sont sur les deux flancs de la terre carrée. Quant à l'aire du triangle supérieur, elle s'obtient en multipliant 8 moins une chose, qui est la hauteur, par la moitié d'une chose, cela donne 4 choses moins la moitié d'un carré. Ceci est l'aire de la terre carrée et des trois triangles, et c'est 10 choses et égales à 48 qui est l'aire du grand triangle. La chose est dont 4 coudées et 4/5 et c'est chaque côté de la terre carrée et voici sa figure.

Extrait de Kitab al-Jabr wal Muqabala

Ce texte a été utilisé avec des élèves de 13-14 ans, avec les questions suivantes (voir aussi [U2]).

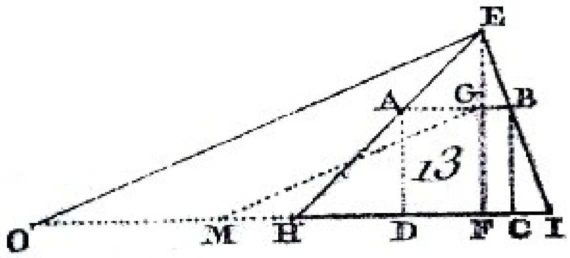
1) Que cherche Al Khwarizmi dans son problème ? Fais une figure en notant les données et en coloriant en rouge ce qui est cherché.
2) Que trouve Al Khwarizmi ? Vérifie si son résultat est correct.
3) Explique la méthode d'Al Khwarizmi.
4) Voici un extrait de l'introduction du livre d'Al Khwarizmi :

« J'ai rédigé, dans le domaine du calcul par le jabr, un abrégé englobant les plus fines et les plus nobles opérations du calcul dont les hommes ont besoin pour la répartition de leurs héritages et de leurs donations, pour leurs partages et leurs jugements, pour leurs transactions commerciales et pour toutes les opérations qu'ils ont entre eux, relatives à l'arpentage, à la répartition des eaux de rivières, à l'architecture ainsi qu'à d'autres aspects. »
Explique pourquoi Al Khwarizmi a inventé l'algèbre.

5) Pour mieux connaître Al Khwarizmi.
Cherche où il a vécu, ce qu'il a fait, en quoi consistent les règles d'al-jabr et d'al-muqabala, quel mot a été créé à partir de son nom… (Note les références des documents où tu as trouvé des informations : livres, sites…)

5.7. b) Le problème chez Bezout (*Cours de Mathématiques à l'usage des gardes du Pavillon de la Marine*, volume 3, 1766, et *Cours de mathématiques à l'usage du Corps Royal de l'Artillerie*, tome 2, 1788)

251. Propofons-nous donc pour premiere queftion, de *décrire un quarré* ABCD (Fig. 13) *dans un triangle donné* EHI.



Par ces mots, *un triangle donné*, nous entendons un triangle dans lequel tout est connu, les côtés, les angles, la hauteur, &c.

Avec un peu d'attention, on voit que cette question se réduit à trouver sur la hauteur EF un point G par lequel menant AB parallèle à HI, cette ligne AB soit égale à GF ; ainsi l'équation se présente tout naturellement, il n'y a qu'à déterminer l'expression algébrique de AB, & celle de FG, & ensuite les égaler.

Nommons donc a la hauteur connue EF ; b, la base connue HI, & x la ligne inconnue GF ; alors EG vaudra $a - x$.

Or puisque AB est parallèle à HI, on doit (*Géom.* 109) avoir $EF : EG :: FI : GB :: HI : AB$; c'est-à-dire, $EF : GE :: HI : AB$, ou $a : a - x :: b : AB$, donc (*Arith.* 169) $AB = \frac{ab - bx}{a}$; puis donc que AB doit être égal à GF, on aura $\frac{ab - bx}{a} = x$; d'où, par les règles de la première Section, on tire $x = \frac{ab}{a+b}$.

Pour construire cette quantité, il faut, conformément à ce que nous avons dit (184), trouver une quatrième proportionnelle à $a + b$, b, & a, ce que l'on exécutera en cette manière. On portera de F en O une ligne FO égale à $a + b$, c'est-à-dire égale à $EF + HI$, & l'on tirera EO ; puis ayant pris FM égale à $HI = b$, on mènera, parallèlement à EO, la ligne MG, qui par sa rencontre avec EF, déterminera GF pour la valeur de x; car les triangles semblables EFO, GFM, donnent $FO:FM::FE:FG$, ou $a + b : b :: a : FG$; FG vaudra donc $\frac{ab}{a+b}$.

Deux triangles qui ont les angles égaux chacun à chacun, ont les côtés homologues proportionnels, & sont, par conséquent, semblables.

(Géom.109)

Ce texte a été utilisé avec des élèves de 15-16 ans (voir [U2])