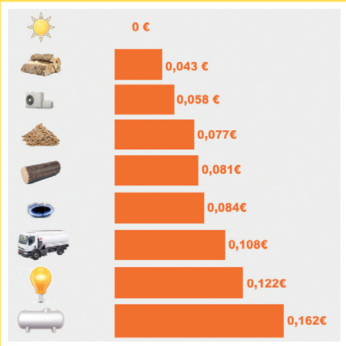
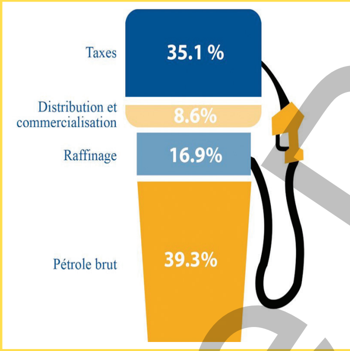
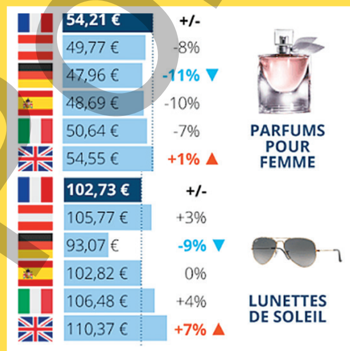
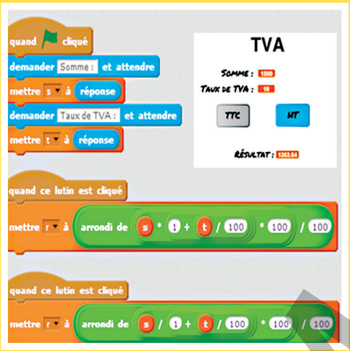
Enseigner les mathématiques en cycle 4
à partir des grandeurs :

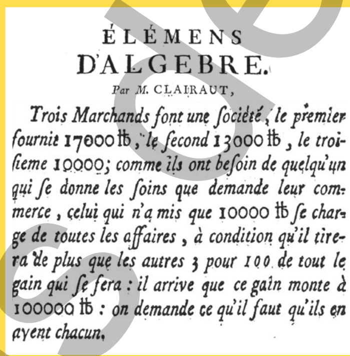
LES PRIX



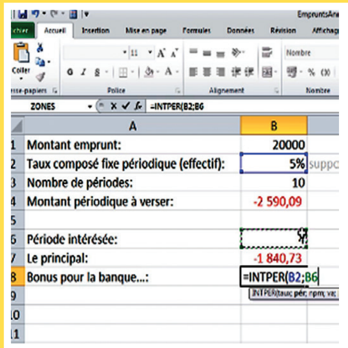


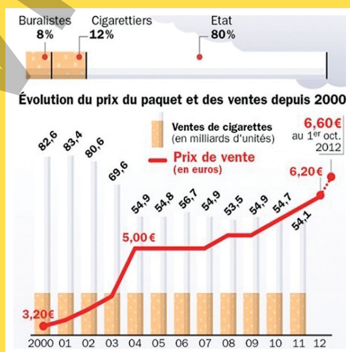





ÉLÉMENS
D'ALGEBRE.
Par M. CLAIRAUT,

Trois Marchands font une société, le premier fournit 17000 ₶, le second 13000 ₶, le troisieme 10000; comme ils ont besoin de quelqu'un qui se donne les soins que demande leur commerce, celui qui n'a mis que 10000 ₶ se charge de toutes les affaires, à condition qu'il tirera de plus que les autres 3 pour 100 de tout le gain qui se fera : il arrive que ce gain monte à 100000 ₶ : on demande ce qu'il faut qu'ils en ayent chacun.





Mai 2018

IREM de Poitiers • Groupe collège

Enseigner les mathématiques en cycle 4
à partir des grandeurs

Les PRIX

1. Introduction

« C'est pourquoi tout doit avoir un prix établi, car c'est la condition pour qu'il y ait toujours possibilité d'échanges, et partant d'association. La monnaie constitue une sorte d'étalon qui rend les choses commensurables et les met à égalité. » (Aristote, Éthique à Nicomaque, Livre V)

L'analyse faite pour le cycle 4 (*Enseigner les mathématiques en 5^{e}, 4^{e}, 3^{e}, à partir des grandeurs : Pourquoi ? Comment ?*, pp.3-7) nous a amenés à poursuivre l'étude des *Prix,* au cycle 4 pour les raisons suivantes :

- C'est une grandeur omniprésente dans la vie des hommes.
- C'est le lieu où une majorité des contenus des parties *Organisation et gestion de données, fonctions* et *Nombres et calculs* du programme peut être utilisée pour comparer, partager, calculer des prix, des variations de prix, étudier des prix en fonction d'une autre grandeur, et prévoir des prix :
  - statistiques pour étudier un grand nombre de données et faire des comparaisons ;
  - pourcentages, fractions, proportionnalité pour partager des prix ;
  - puissances pour calculer et comparer des placements ou des emprunts, pour traiter des situations où interviennent des grands nombres ;
  - nombres relatifs pour comparer ou calculer pertes ou bénéfices, pour calculer des variations de prix
  - probabilités pour évaluer des chances de gains ;
  - calcul littéral et équations dans des situations faisant intervenir des formules et des recherches de prix inconnus (par exemple retrouver un prix initial suite à une augmentation ou réduction de prix) ;
  - fonction linéaire et affine, grandeurs quotients et produits dans l'étude de la variation du prix en fonction d'une autre grandeur (durée, distance, volume, aire, énergie…).
- La programmation d'algorithmes y a aussi sa place : convertisseurs de monnaies, comparateurs de prix, calcul de mensualités d'un emprunt, quizz, pullulent sur la Toile.

L'intérêt de cette grandeur *Prix* est important. Une bonne partie de l'arithmétique pratique qui s'est construite au fil des siècles, mais aussi de l'algèbre élémentaire, est issue de problèmes liés au commerce, aux salaires, aux impôts, aux héritages, aux sociétés et à leurs bénéfices (voir partie 6. Histoire). Ces problèmes sont toujours vivants aujourd'hui. Les prix font partie de l'environnement des élèves et sont omniprésents dans notre vie quotidienne (voir partie 5. Écologie) :
- pour échanger, acheter ou vendre, on est souvent amené à comparer des prix, et aussi à calculer des prix en fonction de…
- pour payer un salaire, pour connaitre des mensualités à payer, des montants de réduction ou d'augmentation, des taxes, pour partager des biens ou des objets on est amené à multiplier et diviser des prix, à en prendre des fractions, à utiliser la proportionnalité et les nombres relatifs ;
- quand on s'informe sur la vie économique et sociale, on est amené à lire des graphiques, à comparer des prix : évolution des prix, des cours des monnaies ou des actions, comparaison des salaires de diverses professions, budgets…

Les prix sont aussi souvent liés à d'autres grandeurs : prix au kilogramme, au quintal ou à la tonne, au m ou au km, au m^2 ou à l'ha, au m^3, au litre ou au cl, tarif horaire, à la journée, à la semaine, salaire horaire, journalier, mensuel, annuel… Ceci permet de traiter des contenus de la partie *Grandeurs et mesures* du programme. Avec ces grandeurs produit ou quotient, nous sommes alors confrontés à de nombreux problèmes relevant de la proportionnalité, et pour lesquels il va falloir élaborer des outils et des méthodes pour les résoudre.

Les prix fluctuent, varient avec le temps, les époques, les lieux, les pays, ce qui amène fréquemment pour les comparer à construire des graphiques, à utiliser des équations.

Un grand nombre de jeux de hasard sont liés à l'argent que l'on peut espérer gagner, ce qui amène à initier aux rudiments du calcul des probabilités.

Nous voyons donc que les situations ne manquent pas, et qu'elles tournent autour de quelques questions fondamentales :

- comment comparer des prix ?
- comment partager des prix ?
- comment calculer des prix ?
- comment calculer des variations de prix ?
- comment étudier la variation d'un prix en fonction d'une autre grandeur ?
- comment prévoir un prix ?

Éclairés par ces analyses, nos chapitres sur les prix en cycle 4 s'organisent à chaque niveau en parcours autour de quelques unes de ces 6 grandes questions.

Pour faciliter le choix de chacun, nous vous proposons de voir les connaissances du programme qui peuvent y être investies, à quel niveau, et comment (2. Organisation mathématique).

Pour la mise en œuvre dans la classe nous vous proposons pour chaque question des exemples de situations de la vie des hommes, passée ou actuelle (4. Banque de situations). L'étude de ces situations du monde présentera d'autant plus d'intérêt qu'elle amènera les élèves à se poser des questions et à chercher à y répondre, dans une démarche de résolution de problèmes, où les connaissances du programme apparaitront comme des outils de modélisation et de résolution (voir programme, p.367, §4). Le choix de ces situations et de leur questionnement est donc important. Organiser l'étude des *Prix*, à chaque niveau d'enseignement, autour de quelques grandes questions comme *Comment comparer ? Comment partager ? Comment calculer ?* permet à la fois de faire le choix des situations à étudier, de structurer le parcours d'étude de la grandeur, et d'organiser les savoirs mathématiques rencontrés comme des réponses à ces questions (3. Organisation didactique).

Le programme insiste sur le fait que les connaissances et compétences visées doivent être travaillées de manière progressive et réinvesties sur toute la durée du cycle (p.367, §1) : c'est l'un des points forts de notre démarche (*Enseigner les mathématiques en 5^{e}, 4^{e}, 3^{e}, à partir des grandeurs : Pourquoi ? Comment ?*, p.7, p.23, p.60).

2. Organisation mathématique

Concernant les *Prix*, comme nous l'avons dit dans l'introduction, nous pouvons faire découvrir et travailler de nombreuses connaissances et savoir-faire mathématiques nouveaux du cycle 4 (voir le deuxième paragraphe sur la couverture du programme) autour de 6 grandes questions. Dans le premier paragraphe nous analysons chacune de ces questions. Les éléments de réflexion qui constituent le troisième paragraphe visent à montrer la place qui peut être donnée au travail de la technique, ainsi qu'à l'étude des relatifs, de l'algèbre et de la programmation dans un parcours sur les prix. Nous terminons par un paragraphe sur le cours de mathématiques : quelles connaissances institutionnaliser et comment le faire ?

Analyse

Les 6 grandes questions, que nous avons retenues pour concevoir des parcours d'étude et de recherche sur les prix, renvoient à des types de tâches fondamentales en mathématiques : comparer, partager, calculer, étudier des variations, prévoir. Nous avons montré dans l'introduction comment la plupart des contenus des parties *Nombres et calculs* et *Organisation et gestion de données, fonctions* du programme peuvent être des outils pour répondre à ces 6 questions. Voyons ce qu'il en est pour chacune de ces questions.

1. Comparer des prix

Comment comparer des prix ?

La réponse à cette question dépend beaucoup du type de comparaison que l'on veut faire, et donc du type de situations auxquelles on s'intéresse. En voici quelques uns, chacun permettant de travailler plus spécifiquement certains contenus des programmes du cycle 4.

a) Comparer deux prix

Quel est le meilleur prix ? Quel est le moins cher ? Combien de fois plus cher ? Combien de fois moins cher ?

Ce sont les questions que nous avons abordées en classe de 6^{e} (*Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : les PRIX*, pp.9-12) et qui permettaient de mettre en œuvre des connaissances de ce niveau. Mais ce questionnement peut continuer à se travailler en 5^{e} (on en trouvera des exemples dans la partie 3).

Les situations où vivent ces questions sont nombreuses :
- publicité, affichage des prix, promotions : ventes dans divers conditionnements ;
- choix d'un produit dans une gamme de produits de marques différentes.

Les notions et techniques :
- comparaison des décimaux, ordre de grandeur, multiples et fractions, rapport, quotient, division, pourcentage, fraction d'un nombre, proportionnalité ;
- se ramener à une norme commune : prix à l'unité, %, rapports de même dénominateur.

b) Situer un prix dans un ensemble de prix

Quel prix vaut une maison, un café, une baguette ? Où est-ce le moins cher ? Leclerc affirme être le moins cher, est-ce vrai ? Ce produit est-il cher ? Quels sont les pays les moins chers, les plus chers (par exemple pour le prix de l'électricité) ? Mon salaire est-il un gros salaire ? Gagne-t-on bien sa vie en France ? Comment comparer les salaires dans une entreprise ?

Ces questions nécessitent de redéfinir ce que veut dire cher : la comparaison ne se fait pas prix à prix, mais par rapport à des collections de prix plus ou moins importantes et plus ou moins explicites. On va alors être amené à classer des données, et à en situer certaines par rapport à des classes ou des indicateurs. Ce type de questionnement a bien sa place en 5^e et 4^e où il permet de traiter le domaine des statistiques (on en trouvera des exemples dans la partie 3).

Les situations où vivent ces questions sont nombreuses :
- tous les jours, à la télévision, dans les journaux et revues, sur Internet, les journalistes commentent des études nous comparant avec nos voisins européens, comparant le niveau de vie des Français, le prix de biens de consommation, les loyers, les salaires...
- salaires d'une entreprise, prix des voitures d'occasion d'un garage, offres immobilières (en vrac dans le journal/organisé par tranches de prix sur les sites des agences immobilières), prix moyen d'un produit…

Les notions et techniques : statistiques ; représentation et gestion de données, tableaux et représentations graphiques, moyenne, médiane, étendue.

c) Comparer des prix qui varient

Quel est le tarif le moins cher ? Quelle est l'offre la plus intéressante ? Quel est le meilleur placement ?

Ces questions concernent des comparaisons entre prix qui varient en fonction d'une autre grandeur : nombre de kilomètres (pour un péage autoroutier, une course en taxi), durée (pour un parking, un placement d'argent, un forfait téléphonique), nombre de kWh (pour de la fourniture d'électricité). On va alors être amené à faire des tableaux de valeurs, des graphiques, à utiliser le tableur, des formules, des fonctions linéaires et affines, des équations et inéquations du premier degré. Ces questions ont bien leur place en 4^e et 3^e (on en trouvera des exemples dans la partie 3). On peut aussi retrouver ces comparaisons comme sous questions dans l'étude de la question de la variation des prix en fonction d'une autre grandeur.

Les situations où vivent ces questions sont nombreuses : nous venons d'en évoquer un certain nombre. Elles se présentent souvent sous forme d'offres commerciales ou de tarifs diversifiés.

Les notions et techniques : fonctions ; utilisation de tableaux, de représentation graphiques, de formules, fonctions linéaires et affines, équations, inéquations.

d) Autres comparaisons

- ***Comparer des variations :*** en 4^e et 3^e on peut envisager de comparer des remises, ou des enchainements d'augmentations ou de baisses, faisant ainsi travailler pourcentages, calcul littéral, distributivité, équations (on en trouvera des exemples dans la partie 3). Mais ces questions peuvent être aussi intégrées à l'étude du calcul des variations de prix. Il faut savoir sur quoi on veut mettre l'accent.
- ***Comparateurs de prix :*** ils pullulent sur Internet ; en choisir certains, les étudier et les programmer permet de faire travailler le calcul numérique et d'aborder le calcul littéral à tous les niveaux suivant les situations choisies. Mais ces études peuvent aussi faire partie de la question *Comment calculer ?*

2. Partager des prix

Comment partager des prix ?

La réponse à cette question dépend du type de partage que l'on veut faire, et donc du type de situations auxquelles on s'intéresse. En voici quelques-uns, chacun permettant de travailler plus spécifiquement certains contenus des programmes du cycle 4.

a) Partager en parts égales

Combien chacun doit-il payer ? Combien va me coûter une mensualité ? Combien d'objets de même prix puis-je acheter avec une somme donnée ?

Une somme d'argent est à partager à plusieurs en parts égales. À la mise en œuvre de la division, s'ajoutent souvent des problèmes d'arrondis. La somme à partager peut-être donnée ou à calculer. Une ou plusieurs des personnes qui se la partagent peuvent avoir avancé l'argent. Donc bien d'autres savoir-faire du programme peuvent être impliqués. Dans le problème réciproque du partage d'une somme d'argent par le prix d'un objet, la division ne se fait pas avec un entier, et le calcul du reste est incontournable ; l'utilisation de la division euclidienne de la calculatrice conduit alors à des analyses intéressantes. Cette question est bien adaptée au niveau 5^{e} (on en trouvera des exemples dans la partie 3).

Les situations où vit cette question : coût individuel d'une sortie, d'un voyage, d'un repas, d'un achat en commun ; prix d'achat étalé sur plusieurs mois ; achats d'objets de même prix (ou d'une quantité d'un produit) avec une somme donnée : combien de kg de pommes à 1,65 €/kg puis-je acheter avec 10 € ?

Les notions et techniques : division, division euclidienne, reste, arrondi.

b) Partager en parts proportionnelles

Comment répartir des bénéfices, des charges ?

C'est une question qui relevait autrefois de ce qu'on appelait la règle de compagnie ou de société (voir partie 6. Histoire). Il s'agit de répartir une somme d'argent entre plusieurs personnes proportionnellement à la part qu'elles possèdent dans la société. Ces problèmes peuvent être étudiés en 5^{e} ou 4^{e}.

Les situations où vit cette question : répartition des bénéfices entre associés proportionnellement au nombre de parts qu'ils ont dans la société, répartition des charges ou des travaux entre les propriétaires d'un immeuble proportionnellement à la surface de leur appartement.

Les notions et techniques : proportionnalité, calcul d'une quatrième proportionnelle, fraction d'un nombre.

c) Partager en parts inégales fractionnaires

Quelle part du budget représente une dépense, une rentrée ? Quelle part du prix représentent les taxes ? Quelle part de la somme doit toucher chacun ?

Il s'agit de partager une somme d'argent en plusieurs parts exprimées sous forme de fractions ou de pourcentages, et de calculer ces parts. Cela nécessite de savoir calculer avec des fractions, d'exprimer des sommes d'argent sous forme de fractions ou de pourcentages. Les situations peuvent devenir complexes et nécessiter l'utilisation d'équations du premier degré. Les problèmes d'héritages ont été par exemple un moteur pour le développement de l'apprentissage de l'algèbre dans le Monde musulman (voir la partie 6. Histoire). Ces questions peuvent se travailler tout au long du cycle 4 en choisissant des situations adaptées au niveau d'enseignement (on en trouvera des exemples dans la partie 3).

Les situations où vivent ces questions : la répartition d'un budget (État, Région, Département, Commune, famille) et sa représentation sous forme de diagramme ; la répartition des différentes sommes qui entrent dans le prix de vente d'un litre d'essence, d'un paquet de cigarettes, d'un kWh (prix TTC, HT, TVA, taxes diverses) ; héritages ; paiements en plusieurs fois.

Les notions et techniques : fractions, pourcentages, taux, rapport, fraction d'un nombre, opération sur les fractions, équations du premier degré.

3. Calculer des variations de prix

Comment calculer des variations de prix ?

Les variations de prix à calculer peuvent être absolues ou relatives, ce qui correspond à des situations assez différentes et les outils à connaitre pour faire ces calculs ne sont pas les mêmes. Voyons donc les deux cas.

a) Calculer des variations absolues

Quelle remise ? Quel bénéfice ? Quelle perte ? Quel déficit ? Quelle baisse ? Quelle hausse ? Quel écart de prix ? Quel bilan financier ? Quelle variation du prix ?

Pour calculer une variation, il faut bien repérer l'état initial et l'état final. C'est un travail qui a déjà été fait en 6^e pour le calcul d'une durée à partir de deux dates (*Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : les DURÉES*), et que nous proposons de faire en 5^e en étudiant la grandeur *Température* (*Enseigner les mathématiques en 5^e à partir des grandeurs : les TEMPÉRATURES*). Ceci montre, en passant, un des intérêts de notre démarche : des questions importantes sont reprises à travers l'étude de plusieurs grandeurs, et à différents niveaux, ce qui permet de consolider et d'approfondir les connaissances afférentes. La formule qui sous-tend les calculs est du type additif : $P_2 – P_1 = V$. Donc pour le calcul d'une variation, il faut savoir entre quoi et quoi on calcule la variation. Si pour le calcul d'une remise le sens de variation est *évident* et ne nécessite pas l'utilisation de relatifs, le signe – est néanmoins largement utilisé par la publicité et la presse. Par contre gérer des entrées et des sorties d'argent, ou étudier les variations du prix d'un produit ou du cours d'une action qui fluctue tantôt à la baisse, tantôt à la hausse (comme le cours du baril de pétrole), cela amène naturellement à utiliser les relatifs à la fois pour repérer les deux cas (baisse ou hausse), et pour gérer plus facilement les opérations sur ces variations ; ce que l'on fait en remplaçant des suites mêlées d'additions et soustractions par une addition de relatifs. Ce questionnement sur les variations absolues est donc tout à fait approprié pour introduire, ou travailler, les nombres relatifs et les opérations d'addition et de soustraction sur ceux-ci au niveau 5^e. La recherche de valeurs initiales ou finales à partir d'une variation et d'une valeur connues, permet de travailler sur le sens des opérations addition et soustraction, et éventuellement de s'initier à la résolution des équations du premier degré et des écritures littérales dans un contexte simple.

Les situations où vit cette question : promotions publicitaires, articles de presse parlant de hausses et de baisses, vérification de comptes, d'un budget, variation des cours de la Bourse, du prix d'un combustible, d'une denrée alimentaire....

Les notions et techniques : notion de nombre relatif, addition et soustraction de décimaux et de relatifs, équations du premier degré.

b) Calculer des variations relatives

Quel pourcentage d'augmentation, de baisse, de remise ? Comment calculer le cumul de plusieurs réductions ou hausses exprimées en pourcentage ?

Ces questions amènent à travailler la notion de taux par rapport à un prix initial, et si l'on travaille sur les variations à utiliser des nombres relatifs et le quotient d'un relatif par un décimal positif. L'expression de ces taux en pourcentage oblige à des changements de format de nombre et à la maitrise des différentes écritures d'un quotient ou d'un rapport. La recherche d'une valeur de départ ou d'arrivée à partir d'un taux et d'une valeur donnés amène à transformer des écritures du type $\frac{a-b}{a} = c$. Le calcul de a conduit à sa mise en facteur et à la résolution d'équations du premier degré du type $mx + p = q$.

Les enchainements de variations montrent l'intérêt de la formule $P_2 = \alpha\ P_1$ permettant de calculer un prix après un pourcentage de remise ou de hausse sur un prix initial P_1 ; cette

formule permet de comprendre et de justifier le fait que les augmentations successives en pourcentage ne s'ajoutent pas, mais relèvent d'un modèle multiplicatif.
Certains problèmes peuvent être abordés en 5^{e} et approfondis en 4^{e} et 3^{e}, d'autres, comme les enchainements de variations relèvent plus des niveaux 4^{e} et 3^{e} (on en trouvera des exemples dans la partie 3). Tous ces problèmes peuvent, suivant les situations étudiées, relever d'un traitement au tableur ou d'une programmation.

Les situations où vit cette question sont nombreuses : les pourcentages de remises abondent dans la publicité et lors des soldes ; les informations délivrées par la presse (sous toutes ses formes) sur des augmentations de prix, du SMIC, des salaires, des budgets des différents ministères, etc. sont pléiade.

Les notions et techniques : quotient, rapport, taux, pourcentages, calcul numérique et littéral sur des expressions fractionnaires, équations du premier degré.

4. Calculer des prix

Comment calculer des prix ?

Comment calculer une taxe, un prix TTC, ses impôts ? Comment vérifier une facture, un ticket de caisse ? Comment convertir une monnaie en une autre monnaie ?
Ces questions amènent à travailler des programmes de calcul, à faire du calcul avec des fractions, des pourcentages, en calcul exact ou approché, mental ou à la main, à programmer des calculs avec un tableur ou Scratch, et ainsi se familiariser avec le calcul littéral. La recherche d'une valeur inconnue est l'occasion de résoudre des équations. L'étude de ces questions peut s'entreprendre en 5^{e}, se poursuivre et s'approfondir en 4^{e} et 3^{e} (on en trouvera des exemples dans la partie 3).

Les situations où vit cette question sont nombreuses dans la vie économique et sociale comme nous l'avons déjà esquissé : factures, tickets de caisse, achats, devis, taxes, impôts, fiches de paie, coût d'une annonce dans un journal, convertisseurs de monnaies, comparateurs de prix…

Les notions et techniques : calculer avec des fractions, des pourcentages, des décimaux, calculer une fraction de prix, écrire des programmes de calcul et des formules, calculer en utilisant un programme de calcul ou une formule, résoudre des équations du premier degré.

5. Étudier des variations de prix

Comment étudier la variation d'un prix en fonction d'une autre grandeur ?

Comment varie un tarif en fonction de la durée d'utilisation, de la consommation (eau, énergie), du nombre d'objets empruntés ou achetés, du nombre de kilomètres parcourus ?
Il s'agit d'étudier des situations qui relèvent essentiellement des fonctions linéaires et affines. Ici les outils d'étude en sont les tableaux de valeurs (en lien avec la question précédente), la réalisation et la lecture de graphiques, ou le calcul algébrique. Chacune des méthodes permet, en fonction des problèmes à résoudre, de fournir une réponse plus ou moins précise, donc plus ou moins satisfaisante suivant les besoins. Ici aussi l'utilisation de tableurs, grapheurs, logiciels de calcul ou de programmation permet de gérer des situations aux données multiples et variables. L'étude de ces questions peut s'entreprendre en 4^{e} et se poursuivre et s'approfondir en 3^{e} (on en trouvera des exemples dans la partie 3). En 5^{e}, l'étude de situations de proportionnalité peut s'inscrire dans ce cadre, et se concevoir comme une première approche de la question.

Les situations où vit cette question sont nombreuses dans la vie économique et sociale comme nous l'avons déjà esquissé : étude du coût d'un abonnement, d'une offre, d'un tarif, d'un emprunt, d'une location…

Les notions et techniques : notion de fonction, de variable, fonctions linéaires et affines, résolution d'équations et inéquations du premier degré.

6. Prévoir un gain

Comment prévoir un gain d'argent ?

Quelle chance ai-je de gagner telle somme d'argent ? Comment savoir quelle somme d'argent je peux espérer gagner dans un jeu ?

Nous avons fait le choix d'examiner la grande question *Comment prévoir un prix ?* dans le cadre de situations sur des sommes d'argent relevant des éléments du calcul des probabilités au programme du cycle 4. Certes, il pourrait être possible à ce niveau de voir comment dans la vie économique actuelle on anticipe une hausse ou une baisse des prix, à partir de données statistiques et d'hypothèse sur les taux de variations. Mais il nous semble que ce type d'étude a mieux sa place au lycée, et qu'au niveau du cycle 4 il ne peut pas faire découvrir de nouvelles connaissances du programme.

Dans notre société où les jeux d'argent sont omniprésents et très pratiqués dans de nombreuses familles de toutes catégories sociales, l'étude de certains d'entre eux permet d'aborder les éléments de calcul des probabilités au programme, mais aussi d'aider les futurs adultes à avoir un comportement rationnel et distancié face aux jeux d'argent.

Les situations où vit cette question : jeux de hasard avec un enjeu de gain d'argent.

Les notions et techniques : notion de probabilité, calculer des probabilités dans des cas simples, exprimer une probabilité dans différents formats (décimal, fractionnaire, pourcentage).

Nous venons de proposer une structuration de l'étude des Prix autour de 5 grands types de tâches mathématiques (comparer, partager, calculer, varier, prévoir) en les reliant à la fois aux contenus du programmes à acquérir au cycle 4, et aux types de situations dans lesquelles ces contenus peuvent intervenir. Ceci dans le but de faciliter, avec ces balises, la mise en œuvre de parcours d'étude et de recherche sur le thème des Prix qui motivent l'apprentissage des mathématiques.

Mais on pourrait concevoir de mettre en place des parcours plus ouverts, comme celui sur le prix du lait en 6^{e} (voir l'article de Repères IREM de Jean-Paul Mercier sur le sujet, 7. Bibliographie), en partant d'une question qui va susciter discussions et débats au sein de la classe. À partir de là, le professeur peut proposer des recherches et des études qu'il structurera petit à petit en un parcours cohérent permettant de rencontrer et travailler divers contenus du programme. Voici une liste de questions qui pourraient être abordées dans cet esprit dans le thème des *Prix*.

- Quel prix vaut une maison ?
- Quel supermarché est le moins cher ?
- Quel est le prix d'un café, d'une baguette ?
- Quelle part du prix revient au vendeur ou au producteur ?
- Comment choisir entre plusieurs offres commerciales ?
- En 10 ans, le prix de la baguette a-t-il baissé ?
- Mon pouvoir d'achat augmente-t-il ?
- Quelle chance ai-je de gagner 10 € au loto ?

Couverture du programme

PROGRAMME – Cycle 4

Nombres et calculs

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes

Utiliser diverses représentations d'un même nombre (écriture décimale ou fractionnaire, notation scientifique, repérage sur une droite graduée) ; passer d'une représentation à une autre.
Pratiquer le calcul exact ou approché, mental, à la main ou instrumenté.
Calculer avec des nombres relatifs, des fractions ou des nombres décimaux (somme, différence, produit, quotient).
Vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant son ordre de grandeur.
Effectuer des calculs numériques simples impliquant des puissances, notamment en utilisant la notation scientifique.

» *Nombres décimaux : Addition- Soustraction*	☐ 5^e ☐ 4^e ☐ 3^e
Multiplication - Division	☐ 5^e ☐ 4^e ☐ 3^e
» *Nombres rationnels (positifs ou négatifs), notion d'opposé.*	☐ 5^e ☐ 4^e ☐ 3^e
Addition- Soustraction	☐ 5^e ☐ 4^e ☐ 3^e
Multiplication - Division	☐ 5^e ☐ 4^e ☐ 3^e
» *Fractions, fractions irréductibles, cas particulier des fractions décimales.*	☐ 5^e ☐ 4^e ☐ 3^e
» *Définition de la racine carrée ; les carrés parfaits entre 1 et 144.*	☐ 5^e ☐ 4^e ☐ 3^e
» *Les préfixes de nano à giga.*	☐ 5^e ☐ 4^e ☐ 3^e

Comparer, ranger, encadrer des nombres rationnels.
Repérer et placer un nombre rationnel sur une droite graduée.

» *Ordre sur les nombres rationnels en écriture décimale ou fractionnaire.*	☐ 5^e ☐ 4^e ☐ 3^e
» *Égalité de fractions.*	☐ 5^e ☐ 4^e ☐ 3^e
» Définition des puissances d'un nombre (exposants entiers, positifs ou négatifs).	☐ 5^e ☐ 4^e ☐ 3^e
Cas particulier des puissances de 10	☐ 5^e ☐ 4^e ☐ 3^e

Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers

Déterminer si un entier est ou n'est pas multiple ou diviseur d'un autre entier.
Simplifier une fraction donnée pour la rendre irréductible.

» Division euclidienne (quotient, reste).	☐ 5^e ☐ 4^e ☐ 3^e
» Multiples et diviseurs.	☐ 5^e ☐ 4^e ☐ 3^e
» Notion de nombres premiers.	☐ 5^e ☐ 4^e ☐ 3^e

Utiliser le calcul littéral

Mettre un problème en équation en vue de sa résolution.
Développer et factoriser des expressions algébriques dans des cas très simples.
Résoudre des équations ou des inéquations du premier degré. Utiliser le calcul littéral pour prouver un résultat général, pour valider ou réfuter une conjecture.

» *Notions de variable, d'inconnue.*	☐ 5^e ☐ 4^e ☐ 3^e
Développer une expression	☐ 5^e ☐ 4^e ☐ 3^e
Factoriser une expression	☐ 5^e ☐ 4^e ☐ 3^e
Équations	☐ 5^e ☐ 4^e ☐ 3^e
Inéquations	☐ 5^e ☐ 4^e ☐ 3^e

Les cases sont conçues pour pouvoir être cochées par l'enseignant en fonction des choix d'études qu'il a faits.

Organisation et gestion de données, fonctions

Interpréter, représenter et traiter des données

Recueillir des données, les organiser. Lire des données sous forme de données brutes, de tableau, de graphique. Calculer des effectifs, des fréquences.	
» Tableaux, représentations graphiques (diagrammes en bâtons, diagrammes circulaires, histogrammes).	☐ 5e ☐ 4e ☐ 3e
Calculer et interpréter des caractéristiques de position ou de dispersion d'une série statistique.	
» Indicateurs : moyenne, médiane, étendue.	☐ 5e ☐ 4e ☐ 3e

Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilités

Aborder les questions relatives au hasard à partir de problèmes simples. Calculer des probabilités dans des cas simples.	
» Notion de probabilité.	☐ 5e ☐ 4e ☐ 3e
» Quelques propriétés : la probabilité d'un événement est comprise entre 0 et 1 ; probabilité d'événements certains, impossibles, incompatibles, contraires.	☐ 5e ☐ 4e ☐ 3e

Résoudre des problèmes de proportionnalité

Reconnaître une situation de proportionnalité ou de non-proportionnalité. Résoudre des problèmes de recherche de quatrième proportionnelle. Résoudre des problèmes de pourcentage.	
» Coefficient de proportionnalité.	☐ 5e ☐ 4e ☐ 3e

Comprendre et utiliser la notion de fonction

Modéliser des phénomènes continus par une fonction. Résoudre des problèmes modélisés par des fonctions (équations, inéquations).	
» Dépendance d'une grandeur mesurable en fonction d'une autre.	☐ 5e ☐ 4e ☐ 3e
» Notion de variable mathématique.	☐ 5e ☐ 4e ☐ 3e
» Notion de fonction, d'antécédent et d'image.	☐ 5e ☐ 4e ☐ 3e
» Notations f(x) et x → f(x).	☐ 5e ☐ 4e ☐ 3e
» Cas particulier d'une fonction linéaire, d'une fonction affine.	☐ 5e ☐ 4e ☐ 3e

Grandeurs et mesures

Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans les unités adaptées

Mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables, notamment des grandeurs composées, en conservant les unités. Vérifier la cohérence des résultats du point de vue des unités.	
» Notion de grandeur produit et de grandeur quotient.	☐ 5e ☐ 4e ☐ 3e
» Formule donnant le volume d'une pyramide	☐ 5e ☐ 4e ☐ 3e
d'un cylindre	☐ 5e ☐ 4e ☐ 3e
d'un cône	☐ 5e ☐ 4e ☐ 3e
d'une boule	☐ 5e ☐ 4e ☐ 3e

Comprendre l'effet de quelques transformations sur des grandeurs géométriques

Comprendre l'effet d'un déplacement, d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs, les aires, les volumes ou les angles.	
» Notion de dimension et rapport avec les unités de mesure (m, m^2, m^3).	☐ 5e ☐ 4e ☐ 3e

Espace et géométrie

Représenter l'espace

(Se) repérer sur une droite graduée, dans le plan muni d'un repère orthogonal, dans un parallélépipède rectangle ou sur une sphère.	
» Abscisse, ordonnée, altitude.	☐5e ☐4e ☐3e
» Altitude.	☐5e ☐4e ☐3e
» Latitude, longitude. Utiliser, produire et mettre en relation des représentations de solides et de situations spatiales. Développer sa vision de l'espace.	☐5e ☐4e ☐3e

Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

Mettre en œuvre ou écrire un protocole de construction d'une figure géométrique. Coder une figure. Comprendre l'effet d'une translation, d'une symétrie (axiale et centrale), d'une rotation, d'une homothétie sur une figure. Construire des frises, des pavages, des rosaces. Utiliser un logiciel de géométrie dynamique, notamment pour transformer une figure par translation, symétrie, rotation, homothétie. Faire le lien entre parallélisme et translation, cercle et rotation. Résoudre des problèmes de géométrie plane, prouver un résultat général, valider ou réfuter une conjecture.	
» Position relative de deux droites dans le plan.	☐5e ☐4e ☐3e
» Caractérisation angulaire du parallélisme, angles alternes / internes.	☐5e ☐4e ☐3e
» Médiatrice d'un segment.	☐5e ☐4e ☐3e
» Triangle : somme des angles.	☐5e ☐4e ☐3e
» Triangle : inégalité triangulaire.	☐5e ☐4e ☐3e
» Triangle : cas d'égalité des triangles.	☐5e ☐4e ☐3e
» Triangle : triangles semblables.	☐5e ☐4e ☐3e
» Triangle : hauteurs.	☐5e ☐4e ☐3e
» Rapports trigonométriques dans le triangle rectangle (sinus, cosinus, tangente).	☐5e ☐4e ☐3e
» Parallélogramme : propriétés relatives aux côtés et aux diagonales.	☐5e ☐4e ☐3e
» Théorème de Thalès et réciproque.	☐5e ☐4e ☐3e
» Théorème de Pythagore et réciproque.	☐5e ☐4e ☐3e

Algorithmique et programmation

Écrire, mettre au point et exécuter un programme simple

Décomposer un problème en sous-problèmes afin de structurer un programme ; reconnaître des schémas. Écrire, mettre au point (tester, corriger) et exécuter un programme en réponse à un problème donné. Écrire un programme dans lequel des actions sont déclenchées par des événements extérieurs. Programmer des scripts se déroulant en parallèle.	
» Notions d'algorithme et de programme.	☐5e ☐4e ☐3e
» Notion de variable informatique.	☐5e ☐4e ☐3e
» Déclenchement d'une action par un événement, séquences d'instructions, boucles, instructions conditionnelles.	☐5e ☐4e ☐3e

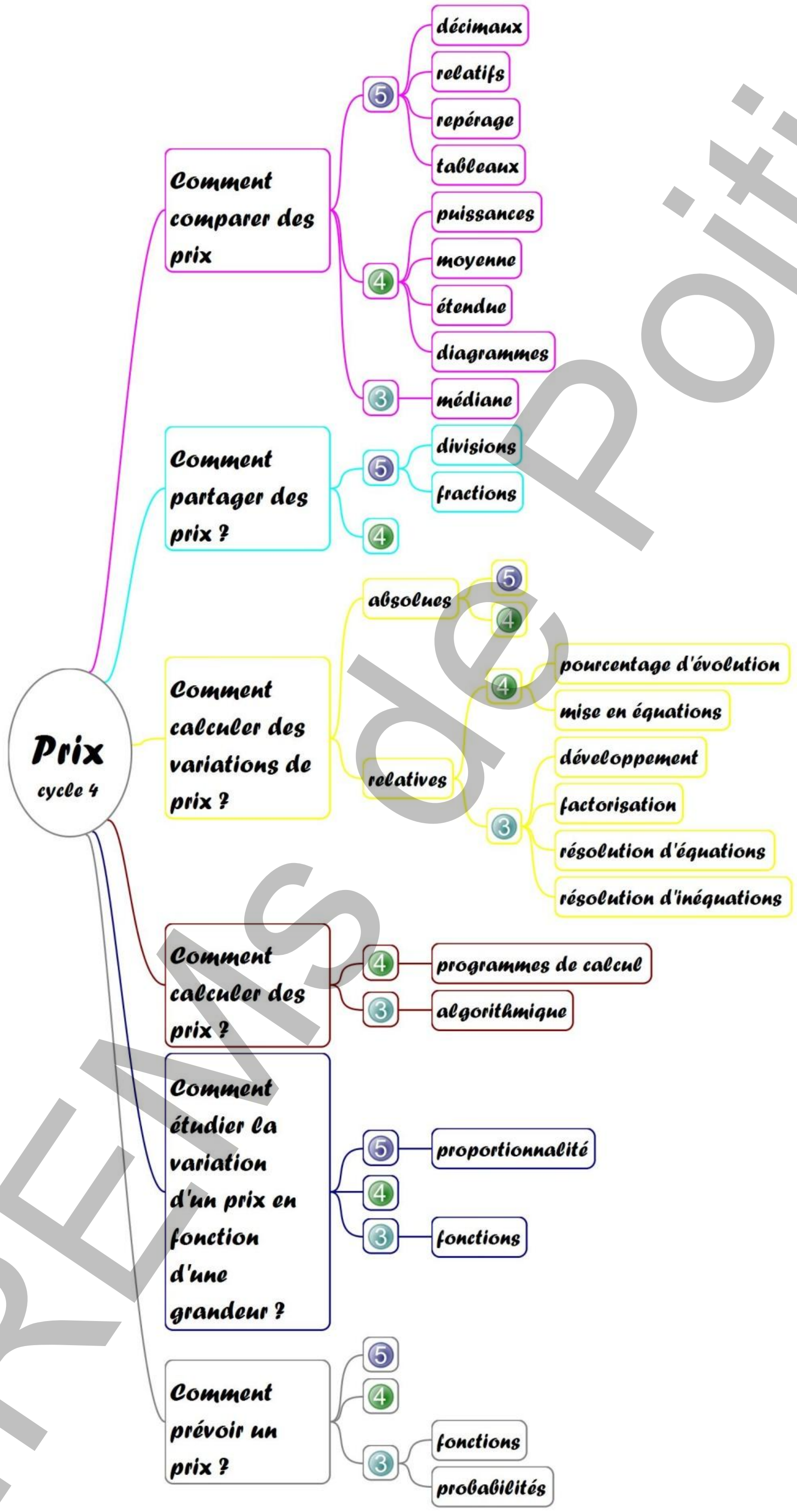


Schéma proposant un choix personnel d'étude des 6 questions en fonction des niveaux, et des contenus traités.

Éléments de réflexion

Comment faire travailler la technique, l'algèbre, les relatifs, la programmation à travers l'étude des prix ? Voilà les sujets que nous allons aborder.

Travail de la technique

Nous savons que dans l'enseignement des mathématiques le travail de la technique est souvent hypertrophié au détriment de la résolution de problèmes et de l'étude de véritables situations. Pour une règle ou une méthode, souvent introduites de façon artificielle, combien d'exercices répétitifs sont donnés à faire aux élèves pour les faire acquérir, avec un taux de réussite bien souvent décevant, avec des erreurs récurrentes, avec des séances de remédiation à mettre en œuvre… La démarche que nous proposons vise à redonner sens et intérêt à l'apprentissage des mathématiques et à éviter que celui-ci ne soit perçu que comme un apprentissage de recettes dont on ne sait pas à quoi elles servent. Mais l'étude de situations et la recherche de réponses à de vraies questions (non guidées) à l'aide de notions et d'outils mathématiques construits à cette fin suffisent-elles à assurer la maitrise de ces notions et outils ? Les gammes sur des exercices formels ne sont-elles pas indispensables ? À quel moment travailler la technique et comment ?
Ce sont des questions difficiles, sur lesquelles nous sommes en recherche et nous expérimentons, en sachant qu'il est difficile de se départir de la représentation que l'on a de ce que c'est que faire des mathématiques.
Les pistes que nous donnons et pratiquons ne sont pas exclusives.

1) Avec des activités mentales

Tel un musicien faisant ses gammes, les activités mentales sont des exercices systématiques permettant de travailler les automatismes sans contrainte de rédaction. Du tac au tac sur des questions simples sans technicité excessive, elles permettent l'entraînement sur des techniques pures. Elles ne prennent pas un temps trop important mais ritualisent le début du cours. L'activité mentale sonne le début de la concentration et de la mise au travail individuel dans le silence. Les notions travaillées en activités mentales ne sont pas nécessairement contextualisées dans la grandeur à l'étude et ne sont pas nécessairement contemporaines de celles vues en classe. En effet, par exemple, on peut traiter la notion de fonction (image, antécédent, graphique, programme de calcul, mise en équation, fonctions affine et linéaire) après son introduction dans la grandeur *Durées*, par le biais d'activités mentales hors contexte, pendant l'étude de la grandeur *Angles*. Cela permet de la faire vivre dans le temps et permettre aux élèves de l'acquérir progressivement dans une immersion quotidienne à dose homéopathique ! Il n'y a donc pas de règle systématique pour le choix des thèmes des activités mentales mais c'est à l'enseignant d'arbitrer en fonction de ses objectifs au sein de sa progression annuelle.
On pourra trouver dans le paragraphe *Le chapitre Prix : déroulement* de la partie 3 :
- un exemple contextualisé dans la grandeur *Prix* (exemple 3 du niveau 5^{e}),
- un exemple décontextualisé (exemple 1 du niveau 3^{e}).

2) Avec des diapos

Le premier temps de classe (les 5 ou 10 premières minutes de la séance) est particulièrement propice au travail de la technique. La « mise en train » crée un rituel et facilite l'installation. Il s'agit la plupart du temps d'un diaporama projeté dont la première

diapositive est visible dès l'entrée en classe. Les élèves travaillent sur des connaissances ou des compétences comme le calcul mental, le travail de la technique, la mémorisation des formules, ... Le professeur en profite pour faire participer tous les élèves, y compris ceux qui sont le plus en difficulté car le travail demandé est court, répétitif, méthodique, le plus souvent uniquement à l'oral et donc plus facilement accessible. Ils sont alors valorisés au moins une fois pendant la séance et mis au travail dès le début. La difficulté des questions du diaporama est un bon moyen de gérer l'hétérogénéité. Le contenu de ces diaporamas est contextualisé ou pas, en lien avec le reste de la séance ou pas et porte autant sur des formules à apprendre, que des méthodes à acquérir ou sert à montrer la diversité des méthodes disponibles et à parler de l'efficience de certaines d'entre elles. C'est au professeur de voir quels sont les besoins de ses élèves. Par exemple, les élèves de cinquième ont travaillé sur le calcul de pourcentages à partir du prix de départ, du prix d'arrivée ou à la recherche du coefficient mais également sur la distributivité et la factorisation de manière décontextualisée et le calcul astucieux en se servant de distributivité. Les élèves de troisième ont travaillé sur les programmes de calcul de manière déconnectée du reste de la séance pour réactiver la distributivité, le calcul littéral et la résolution d'équation. Il y avait une progression de la difficulté lors des séances pour faire travailler chacune des connaissances de manière plus spécifique. La répétition lors de chaque début de séance permet d'ancrer les connaissances dans la durée et de voir les avancées dans les apprentissages. C'est aussi un bon moyen de reprendre une connaissance ou une compétence qui a posé problème plus tard dans l'année sans devoir en faire un chapitre spécifique.
Quatre diapositives en 5e

Le prix a-t-il baissé de plus ou moins de 20 %	Calculer le pourcentage de vente de chaque console	Compléter ces étiquettes
 OFFRE DU JOUR 1.899,00 € Prix conseillé : ~~2.399,00 €~~ ( )	Ventes de la semaine Switch 126.701 PS4 24.653 3DS 17.283 PS Vita 3.705 Xbox One 97 3 Calculer de deux façons chaque expression : a $5 \times (2{,}2 + 3{,}8)$; b $9 \times (10{,}7 - 6{,}4)$; c $2 \times 2{,}7 + 2 \times 10{,}3$; d $7 \times 13{,}4 - 7 \times 11{,}2$.	OFFRE DU JOUR Prix : ~~26,99 €~~ (-25%) OFFRE DU JOUR 18,88 € Prix : ~~32,99 €~~ (%)

3) Avec des exercices en situation

Les connaissances mathématiques sont construites à partir de quelques situations sur les prix (une, deux, trois) et sont réinvesties dans un certain nombre d'exercices (dans le contexte des prix, ou éventuellement dans un autre contexte).

On pourra en trouver deux exemples dans le paragraphe *Le chapitre Prix : déroulement* de la partie 3 : exemple 1 du niveau 5e, et exemple 2 du niveau 4e, et un autre avec le témoignage qui suit.

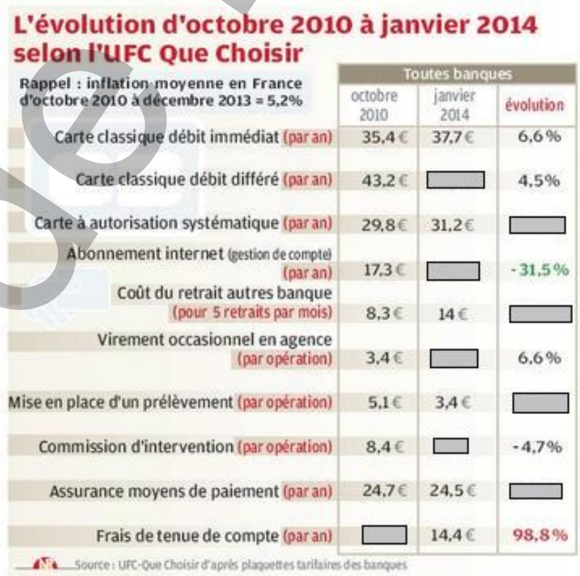
Je consacre 2 temps durant lesquels je travaille plus particulièrement la technique :

- soit lors d'activités mentales (avec au maximum 5 questions) qui me permettent de développer des automatismes. Je privilégie, lors de ces moments, le travail de la technique avec unités. Par exemple, dans la grandeur Prix, j'ai donné la question : « Voici le montant de mes dépenses pour des vêtements durant l'été : 10 € - 35 € - 19 € - 15 € - 31 €, quelle somme ai-je dépensée en moyenne pour l'achat de mes vêtements ?».

Cela dure moins de 10 min, les élèves ayant juste à marquer leurs réponses sur une feuille et la correction se faisant oralement ou au tableau mais toujours sans prise de note.
- soit dans les feuilles d'exercices que les élèves collent généralement dans leur cahier de cours en face des fiches technique correspondantes. Il s'agit de feuilles avec environ dix exercices qui permettent de travailler une notion, voire une partie plus importante du programme. Par exemple, dans la grandeur Prix*, ma première fiche technique s'intitule « Statistiques ». Elle me permet de faire le bilan sur les 3 indicateurs vus au collège, étendue, moyenne et médiane. En face de cette fiche, les élèves collent la feuille d'exercices plutôt orientée sur l'utilisation directe des différentes notions. Les exercices de technique sont rarement réalisés en classe, généralement ils les font à la maison ou bien en cours lorsqu'ils sont en avance.*

4) Avec quelques situations d'étude

On peut privilégier de n'étudier que peu de situations, mais en choisissant des situations permettant de travailler de nombreuses fois une même technique tout en travaillant plusieurs compétences
On pourra en trouver deux exemples dans le paragraphe *Le chapitre Prix : déroulement* de la partie 3 : exemple 1 du niveau 4^{e}, et exemple 2 du niveau 3^{e}.



L'évolution d'octobre 2010 à janvier 2014 selon l'UFC Que Choisir

Rappel : inflation moyenne en France d'octobre 2010 à décembre 2013 = 5,2%

	Toutes banques octobre 2010	janvier 2014	évolution
Carte classique débit immédiat (par an)	35,4 €	37,7 €	6,6 %
Carte classique débit différé (par an)	43,2 €		4,5%
Carte à autorisation systématique (par an)	29,8 €	31,2 €	
Abonnement internet (gestion de compte) (par an)	17,3 €		-31,5 %
Coût du retrait autres banque (pour 5 retraits par mois)	8,3 €	14 €	
Virement occasionnel en agence (par opération)	3,4 €		6,6 %
Mise en place d'un prélèvement (par opération)	5,1 €	3,4 €	
Commission d'intervention (par opération)	8,4 €		-4,7%
Assurance moyens de paiement (par an)	24,7 €	24,5 €	
Frais de tenue de compte (par an)		14,4 €	98,8 %

Source : UFC-Que Choisir d'après plaquettes tarifaires des banques

Par exemple un document comme celui ci-contre permet de faire calculer 10 fois un pourcentage d'évolution (augmentation et diminution), ou de retrouver 10 fois le tarif de 2014, ou celui de 2010, ce qui peut être l'occasion de résoudre 10 équations du premier degré. Mais aussi, comme ici, de panacher l'apprentissage des deux techniques. À partir de là peut s'enclencher un travail d'écriture d'une formule générale, en programmant une feuille de calcul sur tableur, ou un calculateur avec Scratch.
Il est clair qu'une telle présentation des données favorise l'acquisition de compétences importantes comme celle de lecture de documents et de tableaux.

5) Aves des gammes ponctuelles

On peut après l'étude de plusieurs situations vouloir faire travailler une technique qui a pris du sens de façon décontextualisée, comme par exemple la résolution d'équations.
On pourra en trouver un exemple dans le paragraphe *Le chapitre Prix : déroulement* de la partie 3 : exemple 1 du niveau 3^{e}.

Nous pensons qu'il faut travailler les techniques (lorsque c'est possible) de toutes les manières envisagées : mentalement, sur des situations simples mais qui varient de l'une à l'autre, sur une situation répétitive, mais aussi en les programmant.

Interactions

Un des intérêts de construire l'apprentissage des mathématiques sur l'étude des grandeurs et non de domaines ou de sous-domaines des mathématiques est que cela permet une interaction forte des différentes parties du programme qui correspondent à ces domaines.

Le programme mentionne bien d'ailleurs (p.376) que *le thème Grandeurs et mesures se prête particulièrement à des connexions avec les autres thèmes du programme*.

Les éléments d'analyse du début montrent bien qu'à travers l'étude des prix tout un corpus mathématique va pouvoir s'élaborer essentiellement du côté numérique, algébrique, fonctionnel ou algorithmique. Pour montrer ces interactions nous vous proposons l'analyse de deux situations. Et c'est le cumul de ces interactions, et non l'occasionnel voire le fortuit, qui va permettre de passer à l'abstraction mathématique.

1) Tickets de caisse


Julie fruits
fruits & légumes

SARL JULIE FRUITS

N° SIRET : 52924058200013
N° TVA INTRACOM. : FR53529240582
CODE APE : 4721Z

29/09/2017 - 10:31:14
CAISSE N°1 - TICKET : TICKET/144350

0.26 BRIE DE MEAUX	5.59
0.4906 RAISIN MUSCAT	3.90
0.2947 FIGUE FRAICHE	2.21
0.3739 BANANE	0.86
TOTAL TICKET :	12.56 EUR
1 ESPECE	20.00
1 RENDU	-7.44
TOTAL :	0.00 EUR

--Taux--	--TVA--	---HT---	---TTC---
5.50%	0.65	11.91	12.56

Chez Julie

Quel était le prix affiché dans le magasin pour les différents produits ?

Un ticket sans prix au kg, et avec des poids étonnants (au mg, et au dg ou avec la règle des zéros inutiles supprimés : qui fait les programmes de ce type de caisse ?). Donc du travail de lecture, décodage, interprétation fondé sur le sens.

En calcul mental (relativement aisé avec des ordres de grandeur assez simples), et avec la calculatrice (problème des arrondis, qui amène à des tâtonnements pour trouver le prix au kg, donc moins simple qu'il n'y parait). Division comme opération inverse de la multiplication, intérêt d'une formulation littérale du type : poids × prix au kg = prix payé, ou P = m × p d'où p = P /m. On peut remarquer que l'expression littérale et les unités permettent de conserver le sens et éviter de faire la « mauvaise » division. Un prix au kg c'est un prix divisé par une masse (ou un poids). Initiation aux équations aux dimensions de la physique.

Comment ont été obtenus les prix de la dernière ligne du ticket ?

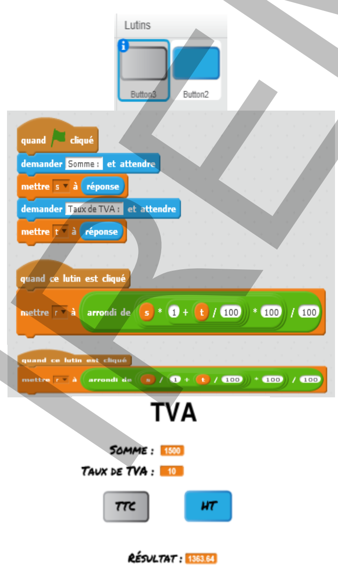
Écrire un programme en Scratch ou une formule sous Excel qui permette d'obtenir l'impression de cette dernière ligne.

La TVA est une taxe que le commerçant doit reverser à l'état et qu'il fait payer à l'acheteur. C'est une part du prix du produit (partager…). Mais de quel prix ? Si on ne le sait pas, on peut tester et vérifier.

Le calcul du prix HT nécessite l'utilisation du calcul littéral : équation PHT + PHT×5,5/100 = 12,58 (ou PTTC) ou x + 0,055x = P, et mise en facteur du prix HT, puis résolution de ax = b. Donc une bonne initiation au calcul littéral et à son intérêt.

La programmation permet de privilégier le tout littéral en faisant expliciter une formule de calcul (PHT = P/(1+0,055).

Pour la programmation voir *Algorithmique et programmation au Cycle 4 à partir des grandeurs*, pp.30-31.




POISSONNERIE MOREAU
TEL:05-46-00-31-82

0030 29-09-2017 08:46
Ray. 1 App. 01

kg	PLU €/kg	€
	Entrée prix unit.	
1,210	16,90	20,45

U 5 1Art TOTAL 20,45

Vous avez été servi(e) par :
guillaume

MERCI DE VOTRE VISITE


TK1-417181 29/09/2017 17:17

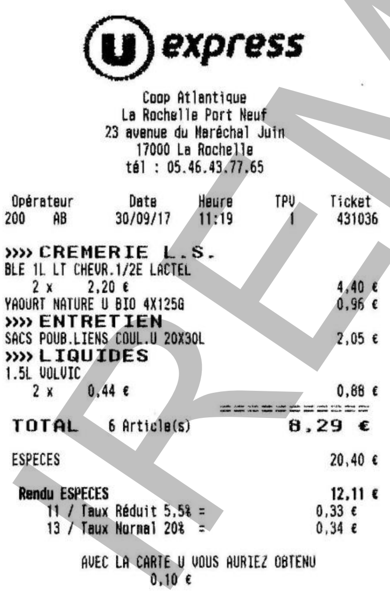
AUX COULEURS NOUVELLES
DROGUERIE BAZAR DU MARCHE
56 RUE DES MERCIERS

Client: XCAISSE1
Vendeur: MICHELE

Désignation	Qt	PrixUnit
belvia cass 12cm	1,00	33,50
patin feutre 25mm x8	1,00	2,65
patin feutre 25mm x8	1,00	2,65
Patin feutre 22MM X4	1,00	2,65
bonde 90x80	1,00	6,05

Total brut HT:	39,58
Total Net HT:	39,58
Total TVA:	7,92
Total TTC:	47,50
soit en Euro	47,50

Paiement par CARTE BANCAIR EUR


U express

Coop Atlantique
La Rochelle Port Neuf
23 avenue du Maréchal Juin
17000 La Rochelle
tél : 05.46.43.77.65

Opérateur	Date	Heure	TPV	Ticket
200 AB	30/09/17	11:19	1	431036

»» CREMERIE L.S.
BLE 1L LT CHEVR.1/2E LACTEL
2 x 2,20 € 4,40 €
YAOURT NATURE U BIO 4X125G 0,96 €
»» ENTRETIEN
SACS POUB.LIENS COUL.U 20X30L 2,05 €
»» LIQUIDES
1.5L VOLVIC
2 x 0,44 € 0,88 €

TOTAL 6 Article(s) 8,29 €

ESPECES 20,40 €

Rendu ESPECES 12,11 €
11 / Taux Réduit 5,5% = 0,33 €
13 / Taux Normal 20% = 0,34 €

AVEC LA CARTE U VOUS AURIEZ OBTENU
0,10 €

À la poissonnerie Moreau

Vérifier le prix payé.

La multiplication donne 3 chiffres après la virgule (ce peut même être 5 dans certains cas), qu'il faut arrondir à 2 puisque dans la vie pratique on ne va pas au-delà des centimes (monnaie, mais aussi chèques).

Sur le montant du ticket, combien le poissonnier doit-il rendre à l'État ?

Quelle part du montant payé cela représente-t-il ?

La part à rendre est la TVA. On ne connait pas son taux, mais on peut supposer (et vérifier que c'est le même que pour les fruits et légumes). Pour trouver la TVA, il faut trouver le prix HT. On réinvestit ce qu'on a vu dans le ticket de Julie.

Les taux de TVA devrait faire partie des nombres à connaitre par le citoyen. Connaissances : fraction d'un prix, exprimée en %, différentes façons de calculer une fraction d'un prix (ou d'autre chose : donc connaissances transférables à d'autres grandeurs).

Le calcul de la part du montant payé peut être l'occasion de bien comprendre que cette part ne dépend pas du prix payé (factorisation, simplification d'une fraction) :

$0{,}055/(1+0{,}055) \approx 5{,}2$ %.

À la droguerie du marché

Quelle somme d'argent le droguiste doit-il rendre à l'État sur l'argent que lui a payé le client ?

Lecture du ticket. Extraire l'information pertinente (ce qui montre la compréhension du document).

Quel est le taux de TVA pour les produits achetés en droguerie ?

Quels sont les différents taux de TVA en France ? Pourquoi y en a-t-il plusieurs ? Est-ce pareil dans les autres pays ?

Le calcul du taux ne donne pas exactement 20%. Comment l'expliquer ?

Là encore une expression littérale du type

TVA = x%×PHT peut faciliter la compréhension de l'opération à faire.

Au supermarché

Un document où l'on trouve des réponses aux questions précédentes, et qui peut donner lieu à la programmation du ticket avec un test sur le type de produit pour utiliser le bon taux de TVA.

Autant de tickets, autant de situations intéressantes. On voit comment calcul numérique, programmation et calcul littéral peuvent interagir pour résoudre de vrais problèmes, initiant ainsi progressivement un usage du calcul littéral et de l'algèbre.

2) Variations : formules, calcul littéral et équations

a) Variation absolue : comme pour les horaires, une formule peut être intéressante pour envisager les différentes situations possibles. Elle lie 3 variables : le prix P_1, sa variation dP_1, et la valeur de P_2 de P_1 *après* variation.

$$P_2 = P_1 + v_1 \text{ (1) ou } v_1 = P_2 - P_1 \text{ (2) ou } P_1 = P_2 - v_1 \text{ (3)}$$

La variation d'un prix P, v, pourrait être définie comme la différence entre la nouvelle valeur de P et sa valeur initiale. Si on s'intéresse principalement à la variation, on va institutionnaliser la formule (2), et on pourra donner du sens au signe de la variation :

- si $P_2 > P_1$, c'est que P_1 augmente, $v_1 > 0$: v_1 est une augmentation ;
- si $P_2 < P_1$, c'est que P_1 diminue, $v_1 < 0$: v_1 est une diminution.

Si à partir de (2) on veut établir (3) (par exemple connaissant la variation d'une action et sa valeur en clôture de Bourse, on veut connaitre sa valeur à l'ouverture), il y a un vrai travail de calcul littéral à faire. On voit ainsi l'intérêt de trouver des situations intéressantes à traiter au tableur, car alors la transformation de l'écriture littérale est incontournable. Si l'on n'étudie qu'un cas, dans un cadre numérique, c'est plutôt l'écriture d'une équation qui va s'imposer.

La formule littérale permet aussi de bien saisir ce que signifie l'ajout de plusieurs variations, donc c'est un outil de validation (démonstration) intéressant. On trouve ici un des aspects importants du calcul littéral.

b) Variation relative : pour prendre conscience de ce à quoi correspond l'addition de 2 variations relatives, l'étude dans des cas numériques est une première approche. Mais comprendre comment se calcule la variation relative résultant de l'enchainement de 2 variations en fonction des 2 variations relatives nécessite de passer au littéral, ce qui permet d'établir une formule qui montre que la somme des variations relatives est une approximation de la variation relative globale.

Si P_1 devient P_2, et P_2 devient P_3

Si $(P_2 - P_1) / P_1 = a_1\% = k_1$ (1)

Si $(P_3 - P_2) / P_2 = a_2\% = k_2$ (2)

Alors $(P_3 – P_1) / P_1 = ? = x$ (3).

(1) peut s'écrire : $P_2 - P_1 = k_1 \times P_1$ ou $P_2 = P_1 - (k_1 \times P_1)$ ou $P_2 = (1+k_1) \times P_1$

De même : $P_3 = (1+k_2) \times P_2$ et $P_3 = (1+x) \times P_1$

D'où $P_3 = (1+k_2) \times (1+k_1) \times P_1$ et donc $1+x = (1+k_2) \times (1+k_1)$, soit $x = k_2 + k_1 + (k_2 \times k_1)$.

$k_2 \times k_1$ est « petit » devant k_1 et k_2. De quel ordre ? Quand pourrait-on le négliger ? Et si on enchaine les 300 variations journalières, quelle sera l'incidence sur la variation annuelle ? Comment s'actualise la valeur annuelle ?

La formule de calcul est-elle valable si k_2 est négatif ? Si k_1 est positif ? Si k_1 et k_2 sont négatifs ? On retrouve sur cette situation la façon dont Clairaut introduit le produit des relatifs dans ses *Élemens d'Algèbre*.

On voit sur cet exemple que se posent tous les problèmes du calcul littéral (dans un contexte qui les nécessite) :

- factorisation, développement
- $1 \times x = x$
- règle de simplification <u>conjointe</u> de × et des parenthèses pour alléger les écritures, en conservant une écriture où ab est perçu comme un bloc : l'ancien (a×b)
- principe d'identification
- généralité du calcul littéral : la lettre recouvre le positif et le négatif, la formule est valable même si les valeurs des lettres sont négatives
- produit de relatifs et distributivité

C'est sur ce type de situations, démarrées de façon purement numérique, que l'utilisation de l'algèbre prend sens et se construit petit à petit.

C'est notamment lors des activités de travail de la technique évoquée plus haut avec une situation nécessitant la répétition d’une même technique qu’on est amené à passer à la programmation avec le message constant suivant : quand c’est technique, il y a toujours le moyen de programmer ou même il y a des machines ou logiciels qui le font (voir geogebra pour la simplification de fractions, la résolution d’équations ....). Et on a de la matière pour le faire :
- convertisseurs (avec un taux variant ou pas), programmation d’une technique (calcul d'un pourcentage ...)
- programmation pour la résolution de problèmes (voir partie 4. Banque de situations)
- pour simplifier « la vie » et expliquer ce qui se fait aujourd’hui : calcul automatique du montant des impôts, programmation d'une caisse enregistreuse.
Avec tout cela on développe un lien fort à l’algèbre. C'est dans la programmation d’un tableur qu'on peut commence à algébriser (dès la 6^e d’ailleurs) sur des choses simples pour commencer : programmation d'un ticket de caisse avec prix unitaire, quantité, total, et après avoir fait plusieurs exemples, parler de la formule.

Le cours de mathématiques

L’organisation mathématique sert de cadre à ce qui peut être fait en classe tant en ce qui concerne le déroulement du parcours (voir 3. Organisation didactique) qu’en ce qui concerne l’institutionnalisation des savoirs ou ce que l’on appelle plus traditionnellement le cours. La forme et les supports de ce cours peuvent être très variés : énoncés avec ou sans démonstration, manuscrit ou photocopié, rédigé à partir des propositions des élèves ou du texte conçu par le professeur, complet ou à trous, support spécifique (répertoire, cahier de cours) ou non (classeur, cahier unique, manuel)… Au niveau de l’équipe, les choix sont divers. Mais il nous semble important de réfléchir à la façon dont nous pouvons extraire et institutionnaliser les connaissances mathématiques rencontrées, à la façon dont nous avons de les décontextualiser, et à la trace que gardent les élèves du parcours qu’ils ont fait sur les prix, en particulier pour comprendre les différentes formes de cours qui figurent dans les exemples de déroulement du chapitre *Prix* donnés dans la partie 3 (Organisation didactique). Ces exemples montrent une variété de possibles.

Décontextualisation et parcours

En classe de 6^e nous avions pris le parti d’un cours où les notions mathématiques étaient contextualisées (*Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : les PRIX*, pp.17-26). Le cours était structuré par les 3 grandes questions du parcours ; donc, naturellement, des éléments de connaissances sur les prix (la monnaie, le format) y étaient présents, et les connaissances mathématiques permettant de répondre aux 3 grandes questions étaient pour la plupart contextualisées (multiple et fraction d’un prix, rapport entre deux prix…). D’autre part tous les exemples choisis pour instancier des notions ou des méthodes décontextualisées (multiplier des décimaux, ordres de grandeur, …) faisaient référence à des prix. Il nous semble qu’au cours du cycle 4, il est souhaitable de séparer progressivement l’institutionnalisation des connaissances mathématiques, qui prendra alors une forme plus canonique, et la mémoire du parcours sur les prix avec les réponses données aux grandes questions qui l’ont informé. Ce n’est pas forcément à faire dès la 5^e, et même en 3^e cela peut se faire après avoir abordé le même concept dans deux grandeurs différentes Cette mise en lumière du corpus mathématique décontextualisé permet une prise de conscience de son caractère général qui en fait sa puissance et sa transférabilité, et auquel les mathématiques doivent leur nom. Mais sans oublier les contextes dans lequel il a été élaboré et les champs de problèmes qu'il a permis et permet de résoudre. Cela peut se faire en évoquant les situations marquantes rencontrées dans les différentes grandeurs. En effet, il ne s'agit pas de décontextualiser une notion ou une méthode lorsqu'elle est vue pour la première fois. C'est un des intérêts de notre démarche que de proposer une conceptualisation progressive en travaillant les notions et connaissances dans des contextes différents qui nous sont fournis par l'étude de plusieurs grandeurs tout au long d'une année, et tout au long du cycle 4. C'est peut-être en fin de 3^{e} par exemple que sera institutionnalisée de façon formelle la définition et l'écriture f(x) d'une fonction. Donc il y a des étapes à ménager entre l'institutionnalisation d'une technique à travers un thème, comme celui des *Prix*, à un niveau donné, et sa décontextualisation totale.

Institutionnalisation des connaissances mathématiques du chapitre *Prix*

Selon le choix des questions et des situations étudiées dans le chapitre *Prix*, à un niveau donné, le parcours mis en place permet de traiter en 5^{e} ou 4^{e} une grande partie des statistiques au programme, et de la proportionnalité, ou en 5^{e} des nombres relatifs, et en 3^{e} des fonctions. On en trouvera des exemples dans la partie 3. Il y a donc le chapitre *Prix* objet de l'étude, que nous appelons entre nous le parcours *Prix*, avec son cahier où sont étudiées les situations et faits les exercices, et des bilans mathématiques sur Statistiques, Fractions, Nombres relatifs, Proportionnalité, Fonctions… Ces bilans peuvent être des encadrés dans le cahier d'étude, ou prendre la forme de fiches méthodes, ou figurer dans un cahier de cours sous forme de chapitres « mathématiques » intitulés Statistiques, Fractions, … Si tout le contenu du programme sur les fonctions, par exemple, n'est pas abordé dans l'étude d'une seule grandeur, mais sur plusieurs grandeurs, on peut être amené à fractionner le chapitre *Fonctions* en *Fonctions* 1, *Fonctions* 2, … Le fait d'avoir à compléter un secteur de connaissances mathématiques lors de l'étude d'autres grandeurs amène certains d'entre nous à préférer la forme de fiche que l'on peut compléter à celle d'un cours sur un cahier.

Voyons maintenant la question de la décontextualisation. Les connaissances à institutionnaliser ont été vues à travers un parcours sur les *Prix*. On peut prendre le parti de les décontextualiser complètement à la fois dans l'expression des méthodes et des exemples choisis en illustration (on en trouvera des exemples dans la partie 3). Mais on peut aussi faire le choix que les exemples pris dans le cours soient ceux vus dans les études ou fasse référence au contexte d'étude, c'est-à-dire ici celui des *Prix*.

Mémoire du parcours

Le chapitre *Prix* est, dans l'esprit de la théorie anthropologique du didactique (TAD) de Chevallard, un parcours qui vise à répondre à quelques grandes questions sur les *Prix*. Il nous semble donc utile, qu'à l'issue du chapitre, il reste une trace mémorielle du parcours qui mette en valeur le fait que les mathématiques, grâce à leurs notions, leurs objets et leurs méthodes, nous permettent de résoudre un certain nombre de problèmes de la vie des hommes. Vous trouverez un exemple de la forme que peut prendre cette mémoire du chapitre *Prix* en allant voir, dans le paragraphe *Le chapitre Prix : déroulement* de la partie 3, le cours de l'exemple 2 du niveau 4^{e}.

3. Organisation didactique

L'intérêt d'insérer dans sa progression, à un ou plusieurs niveaux du cycle 4, un chapitre sur les *Prix* est de pouvoir traiter la majorité des connaissances et compétences des parties 1 et 2 du programme (voir le tableau de la partie 2) à partir de situations de la vie qui donnent sens et intérêt aux notions mathématiques étudiées. Vous pouvez ainsi remplacer vos chapitres numériques traditionnels (Fractions, Proportionnalité, Relatifs, Statistiques, Équations, Fonctions …) par un seul chapitre sur les Prix. Si vous trouvez alors que ce chapitre prend trop de volume vous pouvez le découper en deux ou trois chapitres, chacun étant centré sur l'étude d'une ou deux grandes questions, associées à des types de tâches : comparer des prix, partager des prix, calculer des variations de prix, calculer des prix, faire varier des prix en fonction de, prévoir des prix ; d'où l'intérêt des grandes questions pour structurer à la fois l'organisation mathématique de l'étude des *Prix* (voir la partie 2), et son organisation didactique. Par exemple les trois études d'un chapitre *Prix* en 4^{e} donné en exemple dans la suite (Étude 1 : comparer, Étude 2 : partager, calculer, Étude 3 : variation) pourraient être trois chapitres distincts sur les prix dans votre progression annuelle. Vous en trouverez un exemple pour la classe de 5^{e} dans la brochure *Enseigner les mathématiques en 5^{e}, 4^{e}, 3^{e} à partir des grandeurs Pourquoi ? Comment ?* (page 30). Pour que vous puissiez vous faire une idée du contenu d'un chapitre *Prix* aux différents niveaux du cycle 4, nous vous proposons une sélection de déroulements que certains d'entre nous mettent en œuvre (*Le chapitre Prix : déroulement)*, puis les contrôles donnés (*Évaluations)*.

Si vous décidez d'adopter ce point de vue d'un apprentissage des mathématiques à partir des grandeurs pour toute votre progression, alors vos élèves travailleront les parties 1 et 2 dans d'autres grandeurs. C'est un des atouts de notre démarche, car les mêmes connaissances du programme sont vues plusieurs fois dans l'année, et donc les élèves peuvent vraiment se les approprier progressivement, et de façon plus robuste car elles sont vues dans des contextes différents. Et si vous l'adoptez pour tout le cycle 4, l'acquisition des attendus de fin de cycle en sera d'autant facilitée.

Les choix que vous ferez des situations à étudier dans le chapitre *Prix* peuvent dépendre de la place du chapitre dans votre progression et des choix d'étude faits pour les autres grandeurs. Par exemple pour l'apprentissage des relatifs en 5^{e}, vous pouvez estimer que le chapitre sur les *Prix* est un bon endroit pour y confronter les élèves : gains-pertes, avoirs-déficits, hausses-baisses, augmentations-diminutions sont des types de situations où l'on emploie les nombres relatifs. Et donc l'étude de la question du calcul des variations de prix présente un grand intérêt. Mais elle n'aura pas la même physionomie si ce chapitre sur les *Prix* est le premier de votre progression annuelle, ou s'il a été précédé par l'étude d'une autre grandeur où les relatifs ont déjà été rencontrés, par exemple les *Températures* ou les *Longueurs* (voir la brochure *Enseigner les mathématiques en 5^{e} à partir des grandeurs : les Températures*, page 15). Pour vous donner une idée de la place que peut occuper le chapitre *Prix* dans une progression annuelle, nous vous proposons des exemples de nos progressions pour chaque niveau du cycle 4 (*Le chapitre Prix dans la progression annuelle)*.

Pour faire vivre dans la classe l'étude de chaque grande question choisie, il va vous falloir choisir des situations pour lesquelles la recherche de réponses à la question va permettre aux élèves de rencontrer et de faire fonctionner des savoirs et des techniques utiles faisant partie du programme du niveau considéré. Ces situations, nous les voulons, autant que faire se peut, proches de la vie présente ou passée des hommes, pour montrer aux élèves qu'ils étudient une science vivante qui a aidé et aide les hommes à résoudre leurs problèmes. Pour en trouver, nous sommes allés interroger la vie quotidienne et l'histoire (voir parties 5 et 6), et nous vous proposons une banque (voir partie 4) dans laquelle nous avons puisé une grande partie de nos sujets d'étude, d'exercices et de devoirs. À partir de cette banque, chacun de nous personnalise le parcours du chapitre qu'il va proposer à ses élèves, en en conservant l'organisation mathématique générale.

Le chapitre *Prix* : déroulement

Les feuilles de route que nous vous présentons sont fort diverses quant à leur forme et à leur contenu. Elles reflètent la grande souplesse de notre démarche et les diverses possibilités de se l'approprier, de la personnaliser, de l'adapter aux différents publics, et de la faire évoluer.

Par exemple nous n'avons pas tous la même façon de concevoir l'évaluation en cours de chapitre (sa forme et sa place), la forme de l'institutionnalisation des connaissances (contextualisée ou décontextualisée, mémoire du parcours ou fiches techniques), le travail de la technique (à l'intérieur de l'étude de situations peu nombreuses et riches, ou sur des exercices simples, voire décontextualisés, et en assez grand nombre), l'utilisation ou non d'un manuel, la place du calcul mental… Les situations et exercices proposés à l'étude ne relèvent pas tous de la vie réelle ou de l'histoire des hommes, même si c'est un objectif pour nous. Il n'est pas toujours simple de trouver des situations vraies qui correspondent à la grande question étudiée et aux connaissances que nous voulons enseigner à travers leur étude. Nous savons d'expérience que ce travail de recherche est long et difficile, même mené en équipe. Aussi contraints par le temps nous avons été amenés à créer parfois des situations à la réalité possible, ou à la réalité fabriquée, comme celles que l'on trouve le plus souvent dans les manuels d'aujourd'hui ou des temps anciens.

Nous n'avons pas tous, non plus, les mêmes contextes de classe. Les exemples donnés correspondent à des classes dans deux ZEP (REP+), dans deux zones rurales, et dans une zone périurbaine.

Ces feuilles de route montrent aussi, pour un même niveau, des choix différents quant aux connaissances prioritairement travaillées dans le chapitre. En voici une illustration pour le niveau 4^{e} dans ce qui suit : le premier exemple donné se centre sur les puissances de 10, le calcul avec les fractions, le calcul littéral et les équations, les fonctions, alors que le deuxième exemple met l'accent sur les statistiques, proportionnalité et pourcentages, calcul littéral et équations. Mais l'essentiel demeure : une organisation autour de grands types de tâches relevant chacun de l'étude d'une des six grandes questions que nous avons retenues pour l'étude des *Prix* (voir partie 2), étude faite à partir de situations de la vie des hommes.

Niveau 5e ***Exemple 1 :*** Chapitre 3 : *Prix*

Organisation mathématique

a. Comparer i. Étude statistiques : 1. Vocabulaire 2. Fréquence 3. Diagramme en bâtons 4. Diagramme en tuyaux d'orgue 5. Diagramme en bande 6. Diagramme semi-circulaire ii. Comparaison de fractions avec même dénominateur iii. Comparaison de fractions avec même numérateur iv. Cas général Simplifier une fraction pour la rendre irréductible v. Étude statistiques (suite) 1. Répartition en classe 2. Histogramme	3. Diagramme circulaire **b. Calculer** i. Quotient- Fraction 1. Définition 2. Proportion Coefficient de proportionnalité ii. Distributivité 1. Développement 2. Factorisation iii. Vocabulaire des opérations iv. Priorités opératoires 1. Calculs avec parenthèses 2. Calcul sans parenthèses v. Calcul d'un pourcentage

Déroulement

Exercice 1

Sur un site de vente de VTT par correspondance on trouve ces informations :

Gamme de prix d'un VTT	Nombre de références
90 € à 490 €	39
490 € à 1480 €	115
1480 € à 3060 €	125
3060 € à 4540 €	32
4540 € et plus	9

Proposer une exploitation de ces données sous la forme de pourcentages et de représentations graphiques.

Exercice 2

Un magasin de produits biologiques a relevé les montants des achats de ses clients pendant une journée. Les résultats ont été regroupés en classes et figurent dans le tableau ci-dessous :

Montant des achats en €	**De 0 € à 40 €**	**De 40 € (exclu) à 80 € (inclus)**	**De 80 € (exclu) à 120 € (inclus)**	**De 120 € (exclu) à 160 € (inclus)**
Effectif	**86**	**144**	**38**	**12**

1. À partir de ces informations, quels renseignements peut recueillir le gérant du magasin ?
2. Calculer les fréquences de chaque classe. Étudier les différents formats.
3. Quel est le pourcentage des clients qui ont dépensé entre 40 € et 120 € ?
4. Représenter la répartition des fréquences en pourcentages suivants les différentes classes par un **histogramme**.
5. Représenter la répartition des fréquences en pourcentages suivant les différentes classes par un **diagramme circulaire**.

1. Statistique

Voici les notes obtenues par les élèves d'une classe lors d'un devoir noté sur 10 :
6 ; 7 ; 2 ; 4 ; 7 ; 4 ; 10 ; 7 ; 4 ; 4 ; 10 ; 2 ; 5 ; 5 ; 4 ; 6 ; 6 ; 7 ; 6 ; 7.
Ces notes constituent *un relevé statistique*.
La population étudiée est : les élèves de la classe.
Le caractère étudié est : la note d'un devoir.
Les données du caractère sont : les 20 notes obtenues.
Les valeurs du caractère sont : les six notes différentes donc 2 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 et 10.
L'effectif d'une valeur est le nombre de fois que cette valeur apparait.
L'effectif total est le nombre de données donc c'est aussi la somme des effectifs de chaque valeur.
La fréquence d'une valeur est le quotient de l'effectif de cette valeur par l'effectif total. On peut exprimer cette fréquence par un pourcentage.

Exemple :

5 élèves sur 20 ont eu la note de 7 donc la fréquence de la note 7 est de $\frac{5}{20}$

ou $\frac{5}{20} = 0,25 = 25\%$, donc 25% des élèves ont eu une note égale à 7.

Quand les valeurs du caractère sont trop nombreuses, on les regroupe *en classes* (en intervalles) pour simplifier leur interprétation. Il est plus simple de choisir des classes d'égale amplitude.
Représentation :
On peut représenter les résultats par un diagramme en bâtons, en barres ou en tuyaux d'orgue, en bande, semi-circulaire ou circulaire ou un histogramme.
Dans tous les cas, la hauteur des bâtons ou des barres, la longueur des bandes, la taille des secteurs ou l'aire des rectangles doivent être proportionnelles à l'effectif de la valeur qu'il représente.
Par exemple pour un diagramme circulaire, pour trouver l'angle correspondant au secteur cherché, on doit multiplier la fréquence de la valeur à représenter par 360° et on multiplierait par 180° au lieu de 360° pour un diagramme semi-circulaire.

Exercice 3

Fréquences en pourcentages.

On effectue un relevé de prix de lecteurs DVD portables vendus dans une grande enseigne. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Prix en €	Nombre de lecteurs	Fréquences			Angle
		Fract.	Décimale	%	
[60 ; 90[	12				
[90 ; 120[	16				
[120 ; 150[	36				
[150 ; 180[	20				
[180 ; 210[	14				
[210 ; 240[	8				
[240 ; 270[	6				
Total					

Compléter les colonnes des formats de fréquences : fractionnaire, décimale arrondie au centième, en % et la colonne de l'angle arrondi au degré.
Faire un diagramme en barre correspondant.

Exercices 4, 5, 6, 7 *(Belin Prisme)*

Exercices de statistiques : un dans la grandeur *Prix*, deux dans la grandeur *Populations*, un dans la grandeur *Masses*.

Exercice 8

Dans une classe, 21 élèves sur 28 ont acheté une équerre-rapporteur à 1,04 € et les autres à 0,77 €.
Quel est le pourcentage d'élèves ayant payé 1,04 € ?
Quel est le pourcentage d'élèves ayant payé 0,77 € ?

Exercice 9

L'an dernier, un locataire payait 560 € de loyer. Cette année, son loyer s'élève à 574 €.
Quel est le pourcentage d'augmentation du loyer ?

Exercice 10

Le réservoir d'une voiture contient 56 L. Au départ, le compteur indique 56 394 km et le réservoir est rempli aux sept huitièmes de sa capacité.

À l'arrivée le dessin ci-contre s'affiche sur le tableau de bord de la voiture.

1-Prends les informations nécessaires sur le dessin pour calculer la consommation d'essence pour 100 km.
2-Le carburant est payé 1,08 € le litre. Quel est la dépense pour 100 km ?
3-Si maintenant le conducteur veut refaire le plein, quel est le montant du paiement ?

2. Fractions
Soient a et b, deux nombres avec $b \neq 0$
Le quotient de a par b est le nombre qui, multiplié par b, donne a.

Ce quotient se note a : b ou en écriture fractionnaire $\frac{a}{b}$ avec a qui est le numérateur et b qui est le dénominateur.
Dans le cas où le numérateur et le dénominateur sont entiers, on appelle cette écriture une fraction.
On dit aussi qu'il s'agit d'un nombre rationnel.

Si on dit que la proportion d'élèves externes est de $\frac{2}{5}$, cela signifie que, sur 5 élèves du collège, 2 sont externes.

Exercice 11
Loïc boit tous les jours les ⅔ d'une bouteille qui contient ¾ de litre de lait à 0,70 € le litre.
1-Quelle quantité de lait boit-il tous les jours et à quel prix ?
2-S'il achète par lot de 8 bouteilles, quel est le prix du lot et dans combien de jours devra-t-il se réapprovisionner ?

Exercice 12
Une usine vend les trois cinquièmes des objets qu'elle fabrique en Italie. Sur la partie restante, les ¾ sont expédiés en région parisienne.
Quelle fraction des objets fabriqués peut-être vendue dans d'autres régions ?

Supplément
1. Alexia a dépensé le tiers de ses économies pour s'acheter un coffret de CD, et les 5/12 de ses économies pour compléter son équipement de roller. Combien lui reste-t-il en proportion de sa somme de départ ?
   Si elle avait au départ 150 €, combien lui reste-t-il en euros ?
2. Alexia a dépensé le quart de ses économies pour s'acheter un jeu vidéo et les 1/3 du reste de ses économies pour compléter son équipement de roller. Combien lui reste-t-il en proportion puis en pourcentage de sa somme de départ ? Si sa somme de départ était de 200 €, combien lui resterait-il ?
3. Alexia a dépensé les 4/7 de ses économies pour s'acheter un coffret de CD, et les 1/12 de ses économies pour compléter son équipement de roller. Combien lui reste-t-elle en proportion de sa somme de départ ?
   Si elle avait au départ 180 €, combien lui reste-t-il en euros ?
4. Alexia a dépensé les 5/13 de ses économies pour s'acheter un jeu vidéo et les 4/7 du reste de ses économies pour compléter son équipement de roller. Combien lui reste-t-il en proportion puis en pourcentage de sa somme de départ ? Si sa somme de départ était de 100 €, combien lui resterait-il ?

Exercice 13
Dans une station-service, un litre de gazole coûte 1,289 € et dans une station concurrente il coûte 1,265 €.
a) Si je prends 40 L de gazole dans la seconde station, quelle économie vais-je réaliser ?
b) Calculer cette économie de deux façons différentes.

Exercice 14

Cinq jours par semaine, Antoine achète pour son repas du midi une boisson à 90 c et un sandwich à 2,10 €.

a) Calculer la dépense hebdomadaire d'Antoine pour les boissons puis celle pour les sandwichs et enfin la dépense totale.

b) Calculer la dépense quotidienne d'Antoine puis sa dépense hebdomadaire.

c) Quelle est la méthode la plus simple ?

3. Comparaison de fractions

Deux fractions ayant le même dénominateur sont rangées dans l'ordre de leurs numérateurs.

Si a<b et c ≠0 alors $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

Exemple : 4<7 donc $\frac{4}{5} < \frac{7}{5}$

Deux fractions ayant le même numérateur sont rangées dans l'ordre inverse de leurs dénominateurs.

Si a<b et a, b, c ≠0 alors $\frac{c}{b} < \frac{c}{a}$

Exemple : 4<7 donc $\frac{5}{7} < \frac{5}{4}$

Si deux fractions ne sont pas dans les cas précédents, on essaie de s'y ramener en les réduisant ou on peut les calculer.

4. Simplification de fractions et fractions irréductibles

Simplifier une fraction, c'est écrire une fraction qui lui est égale mais avec un numérateur et un dénominateur plus petits. Pour les rendre plus petits on utilise la règle suivante :

Un quotient ne change pas quand on multiplie ou quand on divise son numérateur et son dénominateur par un même nombre différent de 0 (non nul).

Quand une fraction ne peut plus être simplifiée, on dit qu'il s'agit d'une fraction irréductible.

Cela veut alors dire que le numérateur et le dénominateur n'ont pas de diviseur commun autre que 1.

On appelle nombre premier un nombre qui n'a que deux diviseurs : 1 et lui-même ce qui simplifie la recherche de diviseurs communs.

Exercice 15

Un chef d'entreprise a acheté 25 chaises pour équiper sa salle de réunion.

Le prix d'une chaise est de 45 €. Le vendeur lui accorde une remise de 2 € par chaise achetée.

a) Écrire deux expressions qui permettent de déterminer le montant de cet achat.

b) Effectuer ces deux calculs.

Exercice 16

Tous les mois, Mina achète deux magazines : l'un à 6 € 20 c et l'autre à 5,4 €.

a) Sans effectuer aucun calcul, donner deux expressions différentes qui permettent de calculer sa dépense annuelle.

b) Calculer maintenant cette dépense annuelle.

5. Calculs avec les parenthèses

Pour calculer une expression **avec parenthèses**, on effectue d'abord les calculs entre parenthèses.

Exemples :

A = 3 × (5 + 4)	B = (2 + 3) : 4	C = (5 + 2) × (6 – 4)
A = 3 × 9	B = 5 : 4	C = 7 × 2
A = 27	B = 1,25	C = 14

Quand il y a plusieurs niveaux de parenthèses, on effectue d'abord les calculs dans les parenthèses les plus intérieures.

Exemples :

D = 14 – [3 × (5 – 1,5)]	E = 12 : [(5 – 1) × 2]
D = 14 – (3 × 3,5)	E = 12 : (4 × 2)
D = 14 – 10,5	E = 12 : 8
D = 3,5	E = 1,5

Exercice 17

Pour son cours d'EPS, un professeur a commandé 28 raquettes de badminton à 12,50 € l'unité et 28 raquettes de ping-pong à 8,60 € l'unité.

Calculer de deux manières le montant de la facture du professeur d'EPS.

Exercice 18

Madame Lafleur confectionne des bouquets de roses. Chaque bouquet est constitué de 6 roses rouges et de 6 roses jaunes. Le prix d'une rose rouge est de 3,70 € et le prix d'une rose jaune est de 2,30 €.

a) Écrire deux expressions différentes qui permettent de calculer le prix d'un bouquet.

b) Calculer les deux expressions.

c) Comparer les résultats.

d) Quelle expression permet d'effectuer des calculs plus simples ?

6. Distributivité

k, a et b représentent trois nombres.

k × (a + b) = k × a + k × b   k × (a - b) = k × a - k × b

Exemples :

5 × (p + 3) = 5 × p + 5 × 3 = 5p + 15   6 × (y - 2) = 6 × y - 6 × 2 = 6y – 12

Quand on transforme un produit en somme, on dit que l'on développe l'expression.

7. Factorisation

k × a + k × b = k × (a + b)   k × a - k × b = k × (a - b)

Exemples :

2 × f + 2 × g = 2 × (f + g)	3 × a - 3 × b = 3 × (a - b)
2 est un facteur commun	3 est un facteur commun

Quand on transforme une somme en un produit, on dit que l'on factorise l'expression.

Exercice 19

On achète 3 kg de pommes pour un montant de 6,90 €.

a) Quel prix paiera-t-on pour 5 kg de pommes ?

b) Quelle quantité de pommes a-t-on achetée si l'on a payé 5,75 € ?

8. Vocabulaire des opérations

L'addition :

45 + 27 = 72

45 et 27 sont les termes de l'addition.

72 est la somme de cette addition.

La soustraction :

45 – 27 = 18

45 et 27 sont les termes de cette soustraction.

18 est la différence de cette soustraction.

La multiplication :

4 × 5 = 20

4 et 5 sont les facteurs de cette multiplication.

20 est le produit de cette multiplication.

La division :

73 : 9 = 8 reste 1

73 est le dividende.

9 est le diviseur.

8 est le quotient. 1 est le reste.

Exercice 20

Voici un extrait du catalogue d'une grande enseigne de vente par correspondance. Compléter les données manquantes :

T-shirt tunique
LA REDOUTE CRÉATION
………..€
19,99 € -50 %

Gilet manches 3/4 maille fantaisie
LA REDOUTE CRÉATION
16,90 €
………. € -32 %

Robe tunique coton biologique manches 3/4
LA REDOUTE CRÉATION
11,96 €
29,90 € - ……. %

Exercice 21

Un site Internet propose des bons de réduction dans magasin de chaussures :

15 € de réduction dès 75 € d'achat jusqu'au 31/01/2012

DÉTAILS & CONDITIONS :

- frais de livraison gratuits
- minimum de 75 € d'achat

1) Calculer le pourcentage d'économie réalisé pour un achat de 75 €, pour un achat de 100 €.

2) Compléter le tableau suivant :

Montant de l'achat	**50 €**	**75 €**	**100 €**	**125 €**	**150 €**
Pourcentage d'économie réalisé					

Exercice 22

	EUR
ELECTRICITE-PLOMBERIE	
DOUILLE E27 ACIER LAITONNE BAKELITE 150W	
H 3276000238393	2.35
DOUILLE E27 PLASTIQUE LISSE BLANC 150W	
H 3276000238386 3 x 2.50	7.50
SANITAIRE	
P/SERVIETTE ANNEAU EDEN CHROME	
H 3276005098329	29.90
PATERE POISSON URBAN CHROM	
H 3276005127548 2 x 4.90	9.80
PATERE 2T EDEN CHROME	
H 3276005098282 2 x 9.90	19.80
P/SERVIETTE 3BM EDEN CHROME	
H 3276005127869	44.90
PEINTURE	
EPONGE VEGETALE GROS TRAVAUX BISEAUTEE	
H 3549169137273	2.95
ECLAIRAGE	
LOT 3 STD LED 8=60W B22 300° 3000K LXM	
H* 3276000293286	7.90
FLAM.LISS.HALO 46W=60W B22 CL LEXMAN	
H 3276000201991	3.99
3STD LED FILMT 75W E27 BLC FRD EDF OSRAM	
H* 4058075820999	19.90
Dont éco-part. unitaire DEEE 0.58	
APPL.DESC.COPENHAGEN 60W E27 GALVA 15ANS	
H 5024005706304	44.90
TOTAL (EUR)	
Dont éco-part. recyclage DEEE 0.58	
CARTE BANCAIRE 000689	EUR

*** TVA EUR ***

Tva H 20.00% : HT :

TOTAL TVA : Total HT :

1 EURO = 6.55957 FRF

Questions :

1. Vérifier les calculs automatiques en bout de ligne.
2. Calculer le total.
3. Calculer la TVA et le prix HT.
4. Calculer le pourcentage payé pour l'écotaxe.
5. Calculer la TVA payée sur chaque article.

Exercice 23 : Tarifs des taxis à Paris *(Zénius)*

Exercice 24 : *Les petites rivières font de grands fleuves* : remplacement d'ampoules par des ampoules basse consommation *(Sesamath)*

Exercice 25

Par mesure écologique, les téléviseurs sont vendus avec une estimation du coût de la consommation
Vérifier les résultats annoncés pour les télévisions suivantes

Philips TV écran plat LED 47''

Classe ECO	A
Coût annuel moyen	14 euros (pour une mise en marche de 4h par jour, le reste en veille avec un kWh a 0.1125 euros)
Consommation (en fonctionnement)	83 watts
Consommation (en veille)	0,1 Watts

Panasonic TV écran Plat plasma 50''

Classe ECO	C
Coût annuel moyen	33 euros (pour une mise en marche de 4h par jour, le reste en veille avec un kWh a 0.1125 euros)
Consommation (en fonctionnement)	199 watts
Consommation (en veille)	0,3 Watts

LG Ecran Plat LED 80''

Classe ECO	B
Coût annuel moyen	42 euros (pour une mise en marche de 4h par jour, le reste en veille avec un kWh a 0.1125 euros)
Consommation (en fonctionnement)	256 watts
Consommation (en veille)	0,3 Watts

Ecrire la formule commune à ces trois calculs quand on connait les chiffres de consommation pour trouver le coût.

Niveau 5^e^ ***Exemple 2 :*** Chapitre 4 : *Les Prix*

I- Retour sur les nombres relatifs

Où peut-on trouver des nombres négatifs indiquant une somme d'argent ?
Visualisation de documents divers sur lesquels figurent des prix négatifs.
Bilan : relevés bancaires, comptes financiers d'une entreprise ou d'un établissement, soldes, remises, baisses…

Lorsqu'un objet est acheté, c'est un gain ou un crédit pour le vendeur, c'est une perte ou un débit pour l'acheteur.
Pour l'acheteur, le prix est compté négativement : il correspond à une baisse sur mon compte.
Lorsque je reçois de l'argent, le prix est compté positivement, car c'est une augmentation sur mon compte.

II- Comparer des prix.

Situation 1 : Prix d'une plaquette de beurre

Ci-contre, présentation de deux plaquettes de beurre telles qu'elles sont présentées sur le site d'un supermarché drive.

Quelle plaquette est-il le plus intéressant d'acheter ?

Pour pouvoir comparer des prix, il faut choisir une ***unité*** *de base, puis des unités plus petites (fractions de l'unité de base). Cette unité a varié suivant les pays et suivant les époques. En France, actuellement, l'unité monétaire est* ***l'euro (€)****, divisé en 100 centimes.*
1 centime = 1/100 d'euro.

Le format (rappel)
Un prix peut s'écrire :
- avec une écriture décimale : 1,103 €, 59,90 €…
- avec une écriture fractionnaire : 1/10 €, ½ €…
- avec une écriture complexe : 6 € 5 c, 18 € 50 c…

Un même prix peut s'écrire dans les 3 formats.
Exemple : 2,7 € = 2,70 € = 2 € 70 c = 2 € + 70/100 € = 270/100 €.

La méthode pour comparer des prix
Règle 1 : Pour pouvoir comparer des prix il faut qu'ils soient écrits dans le même format.
Règle 2 : On compare les unités, les unes après les autres, en commençant par la plus grande : d'abord les euros, puis les décimes, puis les centimes, etc.
ou
On écrit les nombres avec le même nombre de chiffres après la virgule.
Puis on compare les parties entières, puis les parties décimales.

Situation 2 : Comparer des prix d'objets de même qualité

a. Dans un supermarché, une boîte de 100 trombones vaut 4 € 03c et une boîte de 200 trombones vaut 8 €. Comparer les prix de ces deux produits.

b. Vaut-il mieux, à qualité égale, acheter une boîte de 6 œufs pour 1,20 € ou une boite de 10 œufs pour 2 € ?

c. Malika a acheté un lot de 10 sucettes pour 7,3 €. Erika a acheté un lot de 6 sucettes de la même marque dans un autre magasin pour 4 euros 40 centimes.
Comparer les prix de ces deux produits.

Recherche

Est-ce plus intéressant de retirer à la banque 15 € ou 13 $? (Chercher sur Internet le cours de change du jour)

Le Taux de Change (ou Cours de Change) d'une monnaie est le prix que vaut l'unité de cette monnaie dans une autre. Les différences de valeur des deux monnaies se placent dans une situation typique de proportionnalité : les devises varient entre elles d'une façon proportionnelle.

Situation 3 : Enfin les vacances !

Vous partez 10 jours à New-York. Une semaine avant le départ, vous souhaitez changer 350 € en dollars. Votre banquier vous donne le cours du jour : 1 $ = 0,75 €.
Combien de dollars allez-vous obtenir ?
À votre retour de New-York, il vous reste 95 $ que vous voudriez maintenant convertir en euros. Sur le site Internet de votre banque, vous obtenez les renseignements suivants :

Pays	Devise	Achat	Vente
États-Unis	1 $	0,72 €	0,78 €

Si deux grandeurs sont proportionnelles on peut passer de l'une à l'autre en multipliant ou en divisant toujours par un même nombre non nul. Ce nombre est appelé coefficient de proportionnalité.

Situation 4 : Quelques salaires à Alexandrie au III^e^ siècle av. J.-C. (Éditions Autrement, 1992)

On connaît le montant des salaires fixés en 259 av. J.-C : 30 drachmes par mois pour les percepteurs, 20 drachmes pour les employés, 15 drachmes pour le notaire, et 100 drachmes pour l'inspecteur chargé de contrôler les activités sur le terrain. À titre de comparaison, Cléon, le géomètre cité plus haut, recevait un salaire annuel de 5 000 drachmes (soit environ 416 drachmes par mois), tandis qu'un ouvrier qui travaillait à la construction des canaux et des digues gagnait une obole par jour (c'est-à-dire, s'il travaillait tous les jours, 5 drachmes par mois).
On veut comparer les salaires mensuels des différentes professions dont parle le texte.
1) Classe les salaires des différentes professions.
2) Certains gagnent beaucoup plus que d'autres. Combien de fois plus ?
3) Certains gagnent beaucoup moins que d'autres. Combien de fois moins ?
4) Compare ainsi les salaires de chaque profession par rapport aux autres.
5) Explique comment l'auteur de l'article a fait pour trouver les salaires mensuels du géomètre et de l'ouvrier qu'il a indiqués entre parenthèses.

Remarque : on trouvera plusieurs comptes-rendus de l'étude de cette situation dans la brochure *Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : Les Prix* (pages 47-50).

III- Calculer

Calcul d'un pourcentage
Un pourcentage est une proportion de dénominateur 100.

Situation 5
Dans une classe, 21 élèves sur 28 ont acheté une équerre-rapporteur à 1,04 € et les autres à 0,77 €. Quel est le pourcentage d'élèves ayant payé 1,04 € ?

Calculer un pourcentage revient à déterminer le nombre d'élèves qui aurait acheté cette équerre-rapporteur dans une classe de 100 élèves.

Situation 6
L'an dernier, un locataire payait 560 € de loyer. Cette année, son loyer s'élève à 574 €. Quel est le pourcentage d'augmentation du loyer ?

Situation 7
a) Quelle est la proposition la plus avantageuse : ¼ en moins sur le prix ou 20% de réduction ?
b) Proposer trois autres comparaisons sur le même modèle.

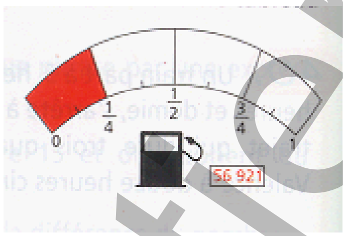
On peut transformer les pourcentages en fraction irréductible et ensuite on met au même dénominateur ou au même numérateur pour comparer.
20/100 = 1/5 or 1/5 et 1/4 ont le même numérateur donc 1/5 est plus petit
*1/4 = (25*1)/(25*4) = 25/100 donc 25/100 est plus grand que 20/100.*

Situation 8
Alexis a dépensé le tiers de ses économies pour s'acheter un coffret de CD, et les 5/12 de ses économies pour compléter son équipement de roller. Quel achat lui coûte le plus cher ?

Situation 9

Le réservoir d'une voiture contient 56 L. Au départ, le compteur indique 56 394 km et le réservoir est rempli aux 7/8 de sa capacité. À l'arrivée le dessin ci-contre s'affiche sur le tableau de bord de la voiture.

1. Prends les informations nécessaires sur le dessin pour calculer la consommation d'essence pour 100 km.
2. Le carburant est payé 1,08 € le litre. Quel est la dépense pour 100 km ?



3. Si maintenant le conducteur veut refaire le plein, quel est le montant du paiement ?

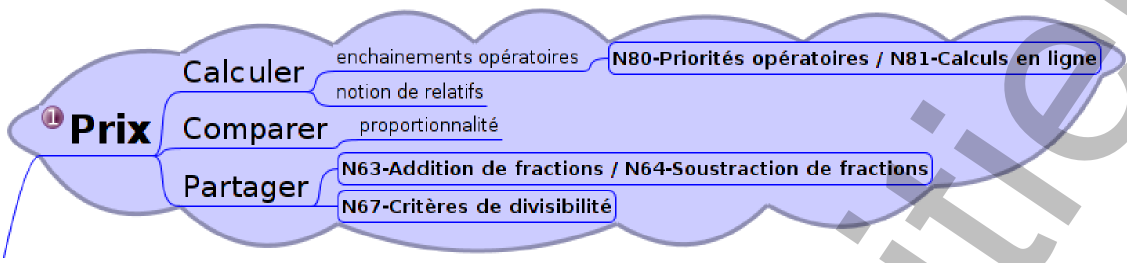
Situation 10 : **Prévoir une distribution :**

Chacun des 50 enfants d'un centre de loisirs reçoit dans une boite en carton, 2 kinder bueno, 2 kinder délice, 2 kinder country.


Kinder Bueno ou Bueno White
Le lot de 6 paquets de 2 barres (258g) à **2€99**
Le kg : 11€59
ou Kinder délice cacao
Le paquet de 10 (420g) à **2€96** - Le kg : 7€05
ou Kinder country
Le paquet de 9 (211,5g) à **2€22** - Le kg : 10€50

1- Prévoir le coût total pour le centre de loisir.
2- Prévoir le coût et la masse de la boite.

Niveau 5^e^ ***Exemple 3*** : Chapitre 1 : *Prix* (21 séances)



Déroulement

Séance 1
Étude 1 : liste des fournitures scolaires

Séance 2
Correction Étude 1
Étude 2 : forfait B&You
À faire : Etude 3 – forfait SFR

Séance 3
Entraînement priorités opératoires (jeux et matoumatheux)
À faire : Devoir maison 1 « Crêpes »

Séance 4
Activité mentale 1 (1/2)
Correction étude 3
Étude 4 : Top chef
À faire : étude 4 avec la version « prix au plus juste » et la version « quantité au plus juste »

Séance 5
Activité mentale 1 (2/2)
Correction étude 4
Fiche savoir : Priorités opératoires
À faire : apprendre la fiche savoir

Séance 6 - 2h
Activité mentale 1 (notée)
Applications des fiches savoirs
Interrogation technique enchaînements opératoires
À faire : apprendre les règles de priorité et faire la situation « Course de taxi »

Séance 7
Activité mentale 2 (1/2)
Remédiation « priorités opératoires »
Groupe 1 : sur ordinateur avec l'objectif de mémorisation
Groupe 2 : exercices avec l'objectif de rédaction
Groupe 3 : situation « Prix de forfaits avec ou sans téléphone »

Séance 8
Ramasser devoir maison 1 « Crêpes »
Activité mentale 2 (2/2)
Correction situation « Course de taxi »
Fiche savoir : Utiliser la proportionnalité / Vérifier la proportionnalité
À faire : faire les applications des fiches savoirs

Séance 9
Situation « Facture Séolis »

Séance 10
Activité mentale 2 (notée)
Correction des applications des fiches savoirs : Utiliser la proportionnalité / Vérifier la proportionnalité
Fiche savoir : Produit en croix
À faire : application 3 de la fiche savoir « Produit en croix »

Séance 11
Devoir surveillé 1

Séance 12 - 2h
Activité mentale 3 (1/2)
Correction application 3 de la fiche savoir « Produit en croix »
Correction situation « Seolis »
Correction Devoir surveillé 1
Situation « Compte bancaire » (*première rencontre avec les nombres négatifs*)
À faire : corriger l'exercice 1 du devoir surveillé 1

Séance 13
Activité mentale 3 (2/2)
Situation « Vacances à Biarritz »
À faire : finir la partie Train et faire la partie Camping de la situation « Vacances à Biarritz »

Séance 14 Activité mentale 3 (notée) Correction de la situation « Vacances à Biarritz », partie Camping Partie « Planche à voile » Fiche savoir : Addition de fractions / Soustraction de fractions *À faire : Lire, comprendre et faire la fiche savoir « Addition de fractions »* **Séance 15** Matoumatheux : travail sur les additions de fractions **Séance 16** Activité mentale 4 (1/2) Correction des applications de la fiche savoir « Addition de fractions » Fiche savoir : Critères de divisibilité *À faire : Lire, comprendre et faire la fiche savoir « Soustraction de fractions »*	**Séance 17** Activité mentale 4 (2/2) Correction des applications de la fiche savoir « Soustractions de fractions » Contrôle formatif addition et soustraction de fractions *À faire : faire la partie « Gâteau »de la situation « Vacances à la mer »* *Devoir maison 2 « Cigarettes »* **Séance 18** Activité mentale 4 (notée) Correction la partie « Gâteau »de la situation « Vacances à la mer » Messages codés (Jeux, APMEP) – travail sur les tables de multiplications **Séance 19** Ramasser devoir maison 2 « Cigarettes » Activité mentale 5 (1/2) Carte mentale sur les notions vues dans le chapitre Prix

Les activités mentales sont données à chaque séance de cours dans les 5 premières minutes. Il y a deux séances d'entraînement (les questions de 1 à 5 puis 5 à 10) et une séance évaluée (avec 2 sujets pour éviter la triche). Elles sont présentées sous forme de diaporama et les questions d'entraînement sont corrigées à la fin par les élèves. Il y a un ou deux thèmes abordés qui ne sont pas nécessairement dépendants des notions abordées en classe et pas nécessairement avec la grandeur travaillée. Ce rituel permet une mise au travail des élèves et un démarrage de la concentration.

Exemple : activité mentale n°3

Entraînement 1 **Prix unitaires**	Combien coûtent 2kg de pommes à 2,60€ le kilo ?	Combien coûtent 5kg de poireaux à 2,50€ le kilo ?	Combien coûtent 500 g de carottes à 1,60€ le kilo ?	Combien coûtent 10 kg de poires à 3,03€ le kilo ?	Combien coûtent 0,5 kg de viande à 12€ le kilo ?
Entraînement 2 **Prix unitaires**	Combien coûtent 2kg de poires à 3,60€ le kilo ?	Combien coûtent 5kg de pommes à 1,50€ le kilo ?	Combien coûtent 500 g de pommes à 1,70€ le kilo ?	Combien coûtent 10 kg de fraises à 4,95€ le kilo ?	Combien coûtent 0,5 kg de viande à 15€ le kilo ?
Évaluation (partie gauche)	**Combien coûtent 2 kg de viande à 8,97€ le kilo ?**	**Combien coûte 0,5 kg de lotte à 24,08€/kg ?**	**Combien coûtent 5 plants de fleurs à 4,80€ le plant ?**	**Combien coûtent 1,5 kg de fromage à 17€ /kg ?**	**Combien coûtent 250 g de crevettes à 2€ les 100 g ?**
Évaluation (partie droite)	**Combien coûtent 1,5 kg de fromage à 17€ /kg ?**	**Combien coûtent 250 g de crevettes à 2€ les 100 g ?**	**Combien coûte 0,5 kg de lotte à 24,08€/kg ?**	**Combien coûtent 5 plants de fleurs à 4,80€ le plant ?**	**Combien coûtent 2 kg de viande à 8,97€ le kilo ?**

Niveau 4^e ***Exemple 1 :*** Séquence 3 *Prix*

Notions

Puissances d'un nombre

Pour a un nombre quelconque, si n est un entier supérieur ou égal à 2 alors :

$$a^n = \underbrace{a\times a\times\ldots\times a\times a}_{n \text{ fois}}$$

Par convention : $a^0 = 1$.

Exemples :

- $2^3 = 2\times2\times2 = 8$

Attention, ne pas traduire $2^3=8$ en $2\times3=6$

- $3^1 = 3$
- $3^0 = 1$
- $(-2)^4 = 16$

Opérations sur les puissances

Si a est un nombre non nul et m et n des entiers relatifs, on a

$$a^m\times a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Exemples :

- $2^3\times2^2=2\times2\times2\times2\times2=2^5$
- $\frac{3^4}{3^2}=\frac{3\times3\times3\times3}{3\times3}=3\times3=3^{4-2}=3^2$
- $(3^4)^2= (3\times3\times3\times3)\times(3\times3\times3\times3)=3^{4\times2}=3^8$

Propriété : Si a et b sont non nuls et n un entier relatif alors

$a^n\times b^n =(a\times b)^n$

Exemple :

$4^5\times3^5 = (4\times4\times4\times4\times4)\times(3\times3\times3\times3\times3) = (4\times3)\times(4\times3)\times(4\times3)\times(4\times3)\times(4\times3)= (4\times3)^5$

Fractions

Pour multiplier deux fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$$

Pour diviser deux fractions, on multiplie la première fraction par l'inverse de la deuxième

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a\times d}{b\times c}$$

Puissances de 10

Quel que soit l'entier n positif :

$10^n=100\ldots0$ avec n zéros

$10^{-n}=0,00\ldots01$ avec n zéros

Exemples :

- $10^5 = 100\ 000$
- $10^{-5}=0,00001$

Propriété :

- Pour multiplier un nombre par 10^n, on décale les chiffres du nombre de n rangs vers la gauche en rajoutant des zéros si nécessaire.
- Pour multiplier un nombre par 10^{-n}, on décale les chiffres du nombre de n rangs vers la droite en rajoutant des zéros si nécessaire.

Exemples :

- $25,1\times10^3= 25\ 100$
- $25,1\times10^{-3} = 0,025\ 1$

Définition : La notation scientifique d'un nombre décimal est l'écriture du nombre de la forme $\pm\ a\times10^n$ avec a un nombre décimal tel que $1\leq a < 10$ et n un exposant relatif

Exemples :

- $8\ 520 = 8,52\times10^3$
- $-3\ 561\ 000 = -\ 3,561\times10^6$
- $5 = 5\times10^0$

+

Pourcentage

Calcul littéral : distributivité simple et double, factorisation, tableur, produits en croix et équation

Étude 1 : Comparer

Situation : Deux évolutions en une

a/ Louise se demande si un prix qui baisse deux fois de suite de 10% a baissé en tout de 20%. Faire un essai avec un prix de 100 € et conclure.
b/ Si un prix augmente de 12% par an, augmente-t-il de 24% en deux ans ?
c/ Si un prix augmente de 10% une année puis baisse de 10% l'année suivante, revient-il au prix initial ?

a/ 10% de 100 € = 10 € nouveau prix après $1^{ère}$ baisse : 90 €
10% de 90 € = 9 € nouveau prix après $2^{ème}$ baisse : 81 €
20% de 100 € = 20 €
Une baisse de 20% permet de payer un article de 100 € à 80 €, alors que deux baisses successives de 10% mettent l'article à 81 €. …
Remarque : 100 € + 20% de 100 € = 100 € x (1 + 20%) c'est la distributivité. On a factorisé.
Cours : distributivité simple
Méthode de calcul de pourcentage plus rapide :
Pour augmenter un prix de p%, on calcule : prix x (1 + p%).
Pour diminuer un prix de p%, on calcule : prix x (1 - p%).
b/ test sur 100 €…
c/ test sur 100 € …

Situation : pourcentage final

Un article est en solde à -30% puis à la deuxième démarque, on fait alors une remise supplémentaire de 20% sur le nouveau prix. De combien est finalement la remise sur le prix de départ ? Est-ce plus ou moins de 50% de remise sur le prix initial ?

Test sur 100 € :
Nouveau prix à la $1^{ère}$ démarque : 70 €.
$2^{ème}$ démarque : 20% de 70 € = 14 €. Donc nouveau prix : 56 €.
Il semble donc que la remise sur le prix de départ est de 44%.
Il faut le démontrer pour tous les prix : on utilise donc le calcul littéral !
Soit P un prix.
30 % du prix = 0,30 x P
Soit P_1 le prix à la $1^{ère}$ démarque. P_1 = P - 0,30 x P = (1-0,3) P = 0,7 P
Soit P_2 le prix à la $2^{ème}$ démarque. P_2 = P_1 - 0,20 x P_1 = (1-0,2) P_1 = 0,8 P_1 = 0,8 x 0,7 P = 0,56 P = (1 – 0,44) P.
Remarque :
(1 – 0,3) x (1 – 0,2) = 1*1 – 0,2*1 – 0,3*1 – 0,3*(-0,2) = 1 – 0,2 – 0,3 + 0,06 = 1 – 0,44
C'est la double distributivité !
(a + b) (c + d) = a*c + a*d + b*c + b*d
Illustration avec le rectangle de côté (a + b) et (c + d).

Reprise de la situation 4 : Montrer à l'aide de la double distributivité que…
a/ … baisser deux fois de suite de 10% revient à baisser en tout de 19%.
b/ … augmenter deux fois de suite de 12% revient à augmenter en tout de plus de 25%.
c/ … si un prix augmente de 10% une année, puis baisse de 10% l'année suivante, il aura alors baissé de 1% en 2 ans.

Situation : compte bancaire

Je possède une somme de 10 000 €.
Pour la placer, le banquier me propose 2 possibilités :

1. chaque année, on vous donne 600 €
2. chaque année, on vous rajoute 4,2% de la somme acquise

Quelle solution est la plus rentable au bout de 10 ans ? De 20 ans ? De 30 ans ?
Faites le comparatif des deux placements en fonction du temps (en années).
Représenter ces deux possibilités graphiquement.
Donner la formule permettant de calculer la somme obtenue en fonction du nombre d'années pour les 2 possibilités.

Premiers calculs jusqu'à 5 ans, puis tableau complet à distribuer pour faire les comparatifs.
Jusqu'à 17 ans de placement, le choix 1 est plus avantageux, puis à partir de 18 ans de placement, il vaut mieux avoir fait le choix 2.

Représentation graphique : départ à 10 000 €

Recherche de la formule pour le choix 1 :
Année 0 : 10 000
Année 1 : 10 000 + 600
Année 2 : 10 000 + 2*600
Année n : 10 000 + n*600
Calcul pour n = 10, 20, 30.

Recherche formule pour choix 2 :
Année 0 : 10 000
Année 1 : 10 000 + 0,042*10 000 = 10 420 OU 10 000 * (1 + 0,042)
Année 2 : 10 420 *(1 + 0,042) =…
OU 10 000 *(1 + 0,042) *(1 + 0,042) = 10 000 *$(1 + 0,042)^2$
Année n : $(1 + 0,042)^n$ *10 000
Calcul pour n = 10, 20, 30.

Utilisation du tableur : faire chercher la formule pour choix 1 dans feuille essais
Faire noter les formules : choix 1 : dans case B3 =10 000 + A3*600
Choix 2 : dans case C3 =1,042^A3*10000
Tracer des graphiques :
Sélectionner les 3 colonnes.
Insertion -> diagramme
Plage de données : en colonne, 1ère colonne comme étiquette
Possibilité de changer les graduations de l'axe vertical : clic droit sur l'axe : formater : -min…

Situation : placement intéressant

Je veux placer 40 000 €.
Voici les propositions de deux banques :
Banque 1 : Placement à 3,5% net
Banque 2 : Placement à 3,9% mais à la fin on doit payer des frais de 15% sur l'argent gagné.
Lequel me rapportera le plus ? Combien de plus ?

Banque 1 : Au bout de n années, on a : $(1,035)^n$*40 000 €
Banque 2 : Au bout de n années, on a : $(1,039)^n$*40 000 € auxquels il faut retirer 15% de l'argent gagné :
15% de [$(1,039)^n$*40 000 € - 40 000 €] = 0,15*[$(1,039)^n$*40 000 € - 40 000 €]
Au bout de n années, on récupère donc : $(1,039)^n$*40 000 € - 0,15*[$(1,039)^n$*40 000 € - 40 000 €]
Voir tableur
Puis calcul des écarts
Jusqu'à 25ans, il vaut mieux placer son argent dans la banque 1. Mais l'écart le plus grand est lorsqu'on récupère l'argent au bout de 15 ans : avec la banque 1, on gagne jusqu'à 659 € de plus.
Mais au-delà de 25 ans, c'est la banque 2 la plus avantageuse…

Étude 2 : Partager, Calculer

Situation : Héritage

Un homme décède, il possédait 100 000 € et lègue tout à parts égales à ses 2 petits-enfants.
À l'aide des tableaux ci-dessous, combien chacun de ses petits-enfants devra-t-il payer de frais de successions ?

Abattements sur les successions et les donations

Degré	2011
Conjoint (donation)	80 724 euros
Enfant	159 325 euros
Petits-enfants	31 865 euros
Arrière-petits-enfants	5 310 euros
Frère ou sœur	15 932 euros
Neveu ou nièce	7 967 euros
Autre	1 594 euros
Don en argent	31 865 euros
Personne handicapée	159 325 euros

Taux d'imposition après abattement

En ligne directe :

Taux	2011
5%	moins de 8 072 euros
10%	entre 8 072 et 12 109 euros
15%	entre 12 109 et 15 932 euros
20%	entre 15 932 et 552 324 euros
30%	entre 552 324 et 902 838 euros
35%	entre 902 838 et 1 805 677 euros
40%	plus de 1 805 677 euros

Vocabulaire : *L'abattement permet de réduire les sommes imposables. Par exemple un abattement de 20% sur un bien de 100 € entrainera son imposition sur 80 €.*

Les petits-enfants bénéficient d'un abattement de 31 865 €.
Ils paieront donc des frais de succession sur le reste : 100 000 € - 31 865 € = 68 135 €.
Calcul des frais de succession : 20% de 68 135 € = 13 627 €
13 627 : 2 = 6 813,50 €.
Chacun des petits-enfants devra payer 6 813,50 € de frais de succession.

Situation : calcul de l'impôt

Part du quotient familial R / N*	Taux marginal	Calcul de l'impôt brut
N'excédant pas 5 963 euros	0 %	0
De 5 964 à 11 896 euros	5,50 %	(R x 0,055) - (327,97€ x N)
De 11 896 à 26 420 euros	14 %	(R x 0,14) - (1 339,13€ x N)
De 26 420 à 70 830 euros	30 %	(R x 0,30) - (5 566,33€ x N)
Supérieure à 70 830 euros	41 %	(R x 0,41) - (13 357,63€ x N)

*R = revenu net imposable. N = nombre de parts du foyer fiscal.

Une famille de 2 personnes ayant 1 enfant (N = 2,5 parts) annonce un revenu net imposable de 28 750 €.
Calculer les impôts qu'ils vont devoir payer. Combien aurait-il dû gagner de plus pour que le calcul se fasse avec la tranche supérieure. Dans ce cas, combien aurait-il payé d'impôts ?

Calcul de la part du quotient familial : 28 750 € : 2,5 = 11 500 €.
Le taux marginal est donc à 5,5%.

Calcul de l'impôt brut : (28 750* 0,055) – (327,97*2,5) = 761,33 €
Pour que le calcul se fasse avec la tranche supérieure, il aurait fallu que R/2,5 = 11869 €
R = 11869 € * 2,5 = 29740 €.
29 740 € - 28 750 € = 990 €.
Ils auraient dû gagner 990 € de plus.
29 740 € *0,14 – 1 339,13 € * 2,5 = 815,78 €.
Dans ce cas ils auraient payé 815,78 €.

Remarque : résolution d'équation a/b = c/d
x/4 = 5/7 donc x = (5/7) * 4 opération inverse de la division est la multiplication !
4/x = 5/7 donc 4 = 5x/7 (en multipliant par x de chaque côté du signe =)
4*7=5x
7*4/5 = x
Enfin <u>a/b = c/d</u> est équivalent à dire que

a	c
b	d

est un tableau de proportionnalité.
On peut donc utiliser l'égalité des produits en croix.

Situation : Rembourser la dette

Gaëlle rembourse les $\frac{2}{3}$ de ce qu'elle doit, puis les $\frac{3}{5}$ du reste. Elle doit encore 240 €.
Combien devait-elle ?

Faire un schéma de 15 carreaux de long. Partager.
Mise en équation : soit x la somme que Gaëlle devait.
x = 2/3 *x + 3/5 * 1/3*x + 240 €

1. On développe et on réduit l'écriture :
x = 2/3 *x + 3/15*x + 240 € ; x = 13/15*x + 240 €.
2. On regroupe les « x » du même côté :
x – 13/15*x = 240 € ; 2/15*x = 240 € ; x = 240 € : (2/15) = 1800 € (à la calculatrice)

Remarque : division par une fraction
<u>Diviser par une fraction</u> revient à <u>multiplier par son inverse</u>.
L'inverse de la fraction a/b, c'est la fraction b/a.
<u>a et b sont deux nombres inverses l'un de l'autre</u> signifie que <u>a * b = 1.</u>
En particulier, l'inverse du nombre a est 1/a.
<u>Exemples :</u> 240 : (2/15) = 240*(15/2) = 1800
8 : (1/2) =… ; 12 : (3/7) = … ; ¾ : 2 = … ; 2/3 : 4 = …
Rappel sur les additions et soustractions de fractions

Situation : Une dette

Marie rembourse les 4/7 de ce qu'elle doit puis 3/5 du reste. Elle doit encore 120 €.
Combien devait-elle ?

Même chose (700 €)

Situation : Une dette (bis)

René rembourse les 5/9 de ce qu'il doit puis les 1/3 de ce qu'il doit. Il doit encore 160 €.
Combien devait-il ?

Même chose (540 €)

Exercice : résolution d'équation

Étude 3 : Variation (Prix du carrelage)

A. Prix au détail

M. Paul veut carreler lui-même sa maison. Il choisit des carreaux qui coûtent 22 euros par m². Avant de passer commande, il étudie le prix des carreaux en fonction de la quantité.

1. Compléter le tableau

Quantité (m²)	1	10	20	25	30	50	80	100
Prix (euros)	22	220	440	550	660	1100	1760	2200

Faire un graphique avec les quantités en abscisses et les prix en ordonnées. (1 carreau pour 100 euros, 2 carreaux pour 10 m²).

Le prix est représenté par une droite passant par l'origine du repère. (voir doc géogébra)
Remarque : représentation graphique
Lorsqu'une situation est représentée par une droite passant par l'origine du repère, il s'agit d'une situation de proportionnalité.

B. Prix de gros

M. Paul est un bon client. Le vendeur lui propose de payer un forfait de 100 euros pour le premier m² puis de lui faire payer les autres m² à 20 euros le m². M. Paul étudie alors les prix proposés.

1. Compléter le tableau suivant :

Quantité (m^2)	1	10	20	40	50	70	90
Prix (euros)							

2. Porter ces prix en euros sur le graphique du A.

Cette fois le prix est aussi représentée par une droite, mais elle ne passe pas par l'origine du repère. Ce n'est pas une situation de proportionnalité.

C. Prix dégressif

Le vendeur lui propose une troisième possibilité :

- les premiers m² sont à 25 euros le m²
- 10% de remise à partir de 30 m² achetés
- 20% de remise à partir de 60 m² achetés
- 25% à partir de 80 m² achetés

1. Compléter le tableau suivant :

Quantité (m^2)	1	15	30	50	60	75	80	100
Prix (euros)								

2. Porter ces prix en euros sur le graphique du A.

D Prix à la quantité

Le vendeur lui propose une dernière possibilité :

- les 20 premiers m² sont à 23 euros le m²
- les 20 m² suivants seront à 22 euros le m²
- les m² suivants seront à 18 euros le m² seulement

1. Compléter le tableau suivant :

Quantité (m^2)	1	10	20	30	40	50	60	80
Prix (euros)	23	230	460	680	900	1080	1260	1620

2. Porter ces prix en euros sur le graphique du A.

Dire pour chaque quantité achetable quelle est la solution la plus économique parmi les 4 proposées. Quelles remarques pouvez-vous faire sur les graphiques obtenus ?

Attention, pour 30m² : 460 € + 10*22 € ; pour 40 m² : 460 € + 20*22 € ; …

Niveau 4^{e} *Exemple 2 :* Chapitre 1 : *Les Prix* (9 semaines)

Planification

Contenus du programme	Détails supplémentaires	Situations et fiches méthodes
Nombres et calculs • - Opérations (+, - , x , :) sur les nombres relatifs et fractionnaires • Utiliser le calcul littéral pour prouver un résultat général, pour valider ou réfuter une conjecture • Réduire une expression littérale (Somme ; Différence) *Organisation et gestion de données, fonctions* • - Reconnaître une situation de proportionnalité ou de non proportionnalité • - Résoudre des problèmes de recherche de quatrième proportionnelle • - Résoudre des problèmes de pourcentages • - Étude de données statistiques (lecture et représentation) – Tableur • - Résoudre des problèmes modélisés par des fonctions (équations)	- Lecture de données (Graphique / Tableau…) - Travail sur la proportionnalité (Tableau /Produit en croix …) - Proportionnalité et représentation graphique - Statistiques (Étendue / Moyenne / Médiane) - Calculs de pourcentages - Calcul de valeurs grâce à une formule - Calcul littéral (Réduire une expression) - Résolution d'équations et mise en équation (Type a x + b = c x + d) - Utilisation du tableur et de SCRATCH - Fractions (+, -, x, :) **Automatismes** - Étendue ; Moyenne ; Médiane - Proportionnalité - Calcul littéral (Calcul de valeurs ; Réduction) - Pourcentage	**Situations** 1- SMIC Européen 2- Ticket de métro 3- Prix de la craie 4- Impôt sur le revenu 5- Location de DVD 6- Pourcentages **Fiches techniques** Statistiques Proportionnalité Pourcentages Calcul littéral (1^{e} Partie) Équations

Grandes questions abordées

- Comparer des Prix - Partager des Prix - Calculer des Prix -

Déroulement

Manuel utilisé en classe : *Mission Indigo Cycle 4 Niveau 4^{e} Hachette*

Semaine 1

Situation 1 – SMIC dans l'UE
Notions abordées : Moyenne – Médiane – Étendue – Conversions de monnaies
À faire : Exercice 1 (feuille d'exercices) + exercice 29 P 160
Fiche technique n°1 – Statistiques
À faire : Exercice 25 P 160 + Exercice 2 (feuille d'exercices)

Situation 2 – Prix ticket de métro
Notion abordée : Représentation graphique et proportionnalité
Calcul mental n°1 sur les prix + exercice n°24 P 160 + exercice n°4 (feuille d'exercices n°1)

Semaine 2

Situation 2 (suite) – Achat de pommes
Travail sur la *proportionnalité : Rappel Tableau de proportionnalité et produit en croix*
Exercice n°51 P 165
Fiche technique n°2 – La proportionnalité
Exercice n°14 a) P 126 + Exercices n°5 et n°7 (feuille d'exercices n°1)
Restitution de connaissances n°1 (Contrôle surprise, Durée 20 min)
Exercice n°14 b), n° 15 et n°17 P 126 + Exercices n°58 P 167

Semaine 3

Situation 3 – Achat de craies
Travail sur la proportionnalité et la non proportionnalité, calculs de valeurs dans un tableau et représentation graphique
Exercice n°3 (feuille d'exercices n°1) + exercice n° 21 P 127
Point méthode : Construction graphique
Calcul mental n°2 sur les prix
Exercice n°8 (feuille d'exercices n°1) + corriger le test n°1

Semaine 4

Situation 4 – Pourcentages
Notion abordée : Calculs de pourcentages
Exercice n°54 P 166 + n° 27 P 142 + 56 P 167
Restitution de connaissances n°2 (Contrôle surprise, Durée 20 min)
Fiche technique n°3 – Pourcentages
Exercice n°16 (feuille d'exercices n°1) + corriger le test n°2

Semaine 5

Situation 5 – Impôts sur le revenu
Exercice n°48 P 165 ; Exercices n°6 – n°14 - n°18 (feuille d'exercices 1) - Exercices n°1 et n°2 (feuille d'exercices n°2)

Semaine 6

Situation 6 – Location de DVD
Travail sur la proportionnalité et la non proportionnalité, calculs de valeurs dans un tableau et représentation graphique
Exercice n°22 P 160 ; Exercice n°9 – n°10 - n°11 (feuille d'exercices 1) - Exercice n°39 P 163
Égalité des 2 tarifs par utilisation du graphique et par résolution d'une équation.

Semaine 7

Cours sur les Prix
Exercice de Brevet (Salaire des Français) - Exercices n°6 et n°8 (feuille d'exercices n°2)
Exercices n°9 et n°14 (feuille d'exercices n°2) + Exercice n°12 et n°13 (feuille d'exercices n°1)

Semaine 8

Contrôle n°1 (1h)
Activité : Résoudre une équation
Travail sur les 4 cas de figure (Addition/Soustraction/Multiplication/Division)
Exercices sur les équations
Devoir maison n°1 Travail sur les pourcentages

Semaine 9

Fiche technique n°4 –Calcul littéral (1e partie)
Exercice n°13 P 107 – Exercice n°11 (feuille d'exercices n°2) - Corriger Exercice n°1 du contrôle n°1
Fiche technique n°5 –Résoudre une équation
Problèmes n°1 – n°2 et n°3 (Feuille d'exercices n°2) Mise en équation

Cours

Les prix

En France, actuellement l'unité monétaire est **l'euro (€) :** <u>2 pièces et 7 billets en euros,</u> <u>6 pièces en centimes d'euros</u>

2 €	**1 €**	**0,50 €**	**0,20 €**	**0,10 €**	**0,05 €**	**0,02 €**	**0,01 €**
200 c	**100 c**	**50 c**	**20 c**	**10 c**	**5 c**	**2 c**	**1 c**

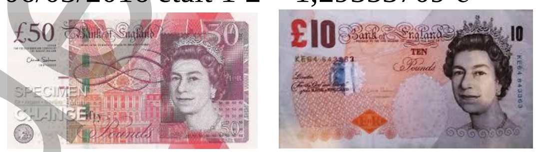
5 €	**10 €**	**20 €**	**50 €**	**100 €**	**200 €**	**500 €**

<u>COMPARER DES PRIX</u>

Dans le monde, d'autres monnaies existent comme par exemple :

- le Dollar dont le taux de change le 06/03/2016 était 1 USD = 0,908130 €

- la livre Sterling dont le taux de change le 06/03/2016 était 1 £ = 1,29353709 €



Pour comparer des prix, il faut qu'ils soient exprimés dans la même monnaie et il faut les écrire dans le même format.

L'étude de données statistiques est très courante dans notre société. Tous les jours, à la télévision, dans les journaux, sur Internet, les journalistes commentent des sondages nous comparant à nos voisins Européens, nous comparant entre hommes et femmes, comparent le niveau de vie des Français… Il est donc important de comprendre le fonctionnement de chacun des indicateurs utilisés par les statistiques.

Statistiques - <u>Fiche technique n°1.</u> **– Étendue – Moyenne – Médiane**

Formules avec abonnement, sans abonnement, prix à l'unité, prix en lot... Comparer des prix pour faire le meilleur choix est donc important.

Grandeurs proportionnelles - <u>Fiche technique n°2.</u> **– Proportionnalité**

<u>PARTAGER DES PRIX</u>

Les notions de taux (taux d'emprunt, taux d'imposition, TVA …), de réduction, d'augmentation … sont très présentes dans la vie courante. Ils s'expriment souvent en pourcentages.

Pour calculer les t% d'une quantité, il suffit de multiplier la quantité par ....
<u>Fiche technique n°3</u> – **Pourcentages**

La répartition d'un budget (État, Région, Département, Commune, Famille) et sa représentation sous forme de diagramme nécessite de savoir partager des sommes d'argent.
C'est aussi le cas quand on veut connaitre les différentes sommes qui entrent dans le prix d'un litre d'essence ou d'un paquet de cigarettes.

CALCULER DES PRIX

Je place 900 euros sur mon livret jeune dont le taux net d’impôt est de 1,5%. Combien cela me rapportera-t-il au bout d’un an ?

Que penser de cette offre ?

Les calculs de prix soldés, de pourcentages de remise, de hausse des prix, d’impôts, … font partie de la vie quotidienne dans notre société. Vérifier si l’affichage des prix est correct est important.
Pour arriver à faire certains calculs on est amené à utiliser des lettres et à résoudre des équations.

Exemple de fiche technique

FICHE TECHNIQUE N°3
Pourcentages

Calculs de pourcentages

Toutes ces écritures signifie que sur un total de 100 on en prend 60 : $60\ \% = \frac{60}{100} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

- Exemple - Un article coûte 78€. Son prix est soldé, le commerçant accorde une remise de 23,40€. Quel est le pourcentage de la remise ?

Utilisation de pourcentages

- A savoir -

PROPRIETE
Pour calculer t% d'une quantité, on multiplie cette quantité par

- Exemple -

EXEMPLE – Calculer les 15 % de 60 euros

1ère méthode	2e méthode	3e méthode
$15\ \% = \frac{15}{100} = \ldots\ldots\ldots$	$15\ \%\ \text{x}\ 60 = \frac{15}{100}\times 60 = \frac{15\times 60}{100}$	$15\ \%\ \text{x}\ 60 = \frac{15}{100}\times 60 = 15\times\frac{60}{100}$
Donc 15 % x 60 = 0,15 x 60 = 9	$= \frac{900}{100} = 9$	$= 15\times 0{,}6 = 9$
Soit 15 % de 60 € est égal à 9 €	Soit 15 % de 60 € est égal à 9 €	Soit 15 % de 60 € est égal à 9 €

- Exemples -

Quel est son prix soldé ?

Méthode 1	Méthode 2	Méthode 3

Feuille d'exercices n°1

Exercice n°1 -
Le tableau ci-dessous représente l'investissement de l'État français quant à l'éducation du second degré (exprimés en milliers d'euros) :

Année	1980	1990	2000	2006
Investissement	12,8	30,7	47,9	53,1

Déterminer quel a été l'investissement moyen pour l'éducation du second degré.
(on arrondira les résultats au dixième).

Exercice n°2 - Une entreprise publie le montant des salaires mensuels de ses employés :

Salaire (en €)	1200	1300	1600	1700	2000	6800
Effectif	2	3	1	2	1	1

a- Quel est le salaire moyen dans cette entreprise ? Quelle est l'étendue des salaires ?
b- Quel est le pourcentage d'employés percevant un salaire inférieur à ce salaire moyen ?
c- Ce salaire moyen représente-t-il bien les salaires de cette entreprise ? Pourquoi ?

Exercice n°3 – Prime de l'US Open

Les montants des primes pour le tournoi de l'US Open de Tennis de 2015 sont donnés dans ce tableau :

On précise que chaque joueur atteignant au moins les quarts de finale ne reçoit qu'une seule prime.

Quel est le montant moyen des primes distribuées aux joueurs atteignant au moins les quarts de finale ?

Tour	Prime
Victoire	3 700 000 $
Finale	1 825 000 $
1/2 finale	920 000 $
1/4 de finale	470 000 $

Exercice n°4 -

Voici les prix moyens mensuels d'un kg de tomates en 2014, en France. (Source INSEE)

	J	F	M	A	M	J	Jt	A	S	O	N	D
Prix (en €)	2,94	2,85	3,17	3,44	2,75	2,74	2,56	2,15	2,67	2,89	2,91	2,87

1- Calculer le prix moyen d'1 kg de tomates en 2014. Donner une valeur approchée au centime près.
2- Calculer le prix médian des tomates en 2014. Interpréter le résultat.

Exercice n°5 - Complète les tableaux de proportionnalité :

Masse en kg	11	...
Prix en €	4	15,2

Surface en m²	500	.....
Prix en €	9000	13050

Volume en L	...	5,4
Prix en €	23,4	17,55

Exercice n°6 -
Gaspard effectue des travaux de jardinage. Il est payé à l'heure. Cette semaine, pour 20h de travail, il a gagné 213 €.
a- La semaine prochaine, il prévoit de travailler 17h. Quelle somme d'argent va-t-il gagner ?
b- La semaine dernière, il a gagné 138,45 €. Pendant combien d'heures a-t-il travaillé ?

Exercice n°7 -
Lucie achète 1,2 kg de carottes et paye 1,02 €.

1. Combien coûtent 2 kg de carottes ?

2. Quelle masse de carottes peut-elle acheter avec 1,36 € ?

Exercice n°8 – Pâte à crêpes

Les ingrédients pour 8 personnes : 500 g de farine, 6 œufs, un litre de lait et 50 g de sucre.
Quelle est la liste des ingrédients pour 14 personnes ?

Exercice n°9 -

Pour l'achat d'un article à 1560 euros, le vendeur demande un acompte de 124,80 euros.
Quel pourcentage de la somme totale représente cet acompte ?

Exercice n°10 -

Chaque semaine le gérant d'un magasin de chaussures fait ses comptes sur tableur.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Prix (€)**	29	49	79	99	129	**Total**
2	**Nombre de ventes**	5	8	18	11	5	
3	**Montant encaissé**						

a- Quelle formule a été rentrée dans la cellule B3 ? Choisir parmi les propositions ci-dessous :

=B1+B2	=A1*A2	=B1*B2	=Somme(B1:B2)

b- Quelle formule doit-on saisir dans la cellule G2 ? L'écrire de 2 façons différentes.
c- Dans la cellule B4, le gérant veut entrer le prix moyen d'une paire de chaussures vendues.
Quelle formule doit-il saisir ?

MOYENNE(B2:F2)	MOYENNE(B3:F3)	=G3/5	=G3/G2

Qu'affichera le tableur dans cette cellule ?
d- Après vérification, une erreur a été commise en relevant les ventes de chaussures à 99 euros.
Ce ne sont pas 11 mais 9 paires qui ont été vendues.
Après correction, quel est le prix moyen d'une paire de chaussures vendue cette semaine là ? Faire le calcul.

Exercice n°11 -

a- Calculer 50% d'une quantité, c'est multiplier cette quantité par .... (ou la diviser par ....)
b- Calculer 10% d'une quantité, c'est multiplier cette quantité par .... (ou la diviser par ....)
c- Calculer 25% d'une quantité, c'est multiplier cette quantité par .... (ou la diviser par ....)
d- Calculer 20% d'une quantité, c'est multiplier cette quantité par .... (ou la diviser par ....)

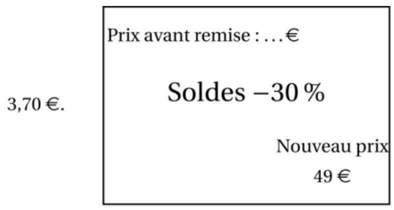
Exercice n°12 -

Le salaire actuel de Mélissa est de 2142 euros par mois.
Son employeur lui annonce qu'au 1er janvier son salaire augmentera de 6%.
Quel sera le nouveau salaire de Mélissa ?

Exercice n°13 –

Quel est le nombre caché par la tache sur cette étiquette ?

Exercice n°14 -



Quel était le prix avant remise ?

Exercice n°15 -

Un sac coûte 50 euros. Son prix est réduit de 30%. Quel est son nouveau prix ?

Exercice n°16 -

Une veste coûte 128 euros. Pendant les soldes, elle est vendue avec 40% de réduction. Quel est le prix soldé de cette veste ?

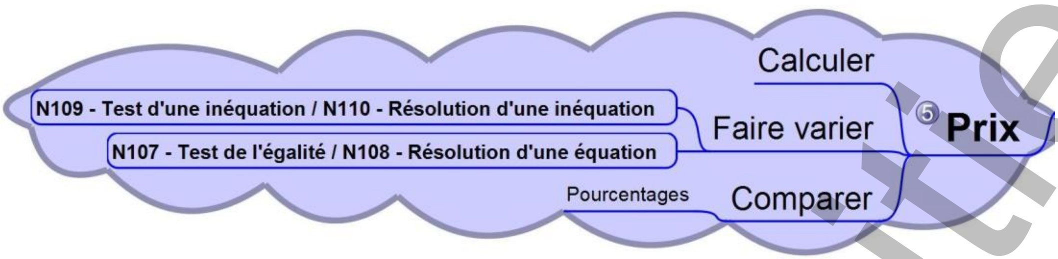
Exercice n°17 -

Un téléphone portable coûte 180 euros. Son prix augmente de 12%. Quel est son nouveau prix ?

Exercice n°18 -

Une tablette coûte 480 euros et est soldée au prix de 432 euros. Quel est le pourcentage de réduction sur le prix de cette tablette ?

Niveau 3e *Exemple 1* : Chapitre 5 : *Prix* (13 séances)



Déroulement

Séance 1 Activité mentale 22 (1/2) Situation « impôts sur le revenu » *À faire : Situation « impôts sur le revenu » – bis* **Séance 2** Activité mentale 22 (notée) Correction « impôts sur le revenu »-bis Situation « Rachat WhatsApp » *À faire : Finir la situation « Rachat de WhatsApp »* **Séance 3** Activité mentale 23 (1/2) Correction « rachat WhatsApp » *À faire : Situation « inflation »* **Séance 4** Activité mentale 23 (2/2) Correction « Inflation en 2014 et 2015 » *À faire : Situation « intérêts d'emprunts »* **Séance 5** Activité mentale 23 (notée) Correction « emprunts » Situation « Vente de voitures en 2013 » Situation « Salaires nets mensuels des salariés » *À faire : Situation « Promotions »* **Séance 6** Activité mentale 24 (1/2) Cours : pourcentages, statistique avec les données regroupées par classe, équations (premier degré) *À faire : Résoudre 6 équations*	**Séance 7** Activité mentale 24 (notée) Correction équations Cours : équations produits Exercice de résolution d'équations produits Cours : inéquations *À faire : Résoudre 6 inéquations* **Séance 8** Résolution d'équations et d'inéquations *À faire : Résoudre 6 inéquations* **Séance 9** Activité mentale 25 (2/2) Correction équations / inéquations *À faire : Résoudre 6 inéquations.* **Séance 10** Correction des inéquations Cours : résolution de systèmes Situation « Embauche des informaticiens et mathématiciens » *À faire : Résoudre 2 systèmes* **Séance 11** Activité mentale 26 (1/2) Correction des systèmes Situation « Soldes » *À faire : Finir la situation « Soldes » et faire la situation « Squash »* **Séance 12** Activité mentale 26 (2/2) Correction « soldes » et « squash » Situation « Meubles » *À faire : Situation « maraîcher »* **Séance 13** Brevet blanc

Les activités mentales sont données à chaque séance de cours dans les 5 premières minutes. Il y a deux séances d'entraînement (les questions de 1 à 5 puis 5 à 10) et une séance évaluée (avec 2 sujets pour éviter la triche). Elles sont présentées sous forme de diaporama et les questions d'entraînements sont corrigées à la fin par les élèves. Il y a un ou deux thèmes abordés qui ne sont pas nécessairement dépendants des notions abordées en classe et pas nécessairement avec la grandeur travaillée. Ce rituel permet une mise au travail des élèves et un démarrage de la concentration.

Exemple : activité mentale n°24

Entraînement 1 **Factorisation**	Factoriser : 3x+x	Factoriser : 15-3x	Factoriser : $5x^2+3x$	Factoriser : 10x-x	Factoriser : 5y-5
Entraînement 2 **Factorisation**	Factoriser : 4x+6y	Factoriser : $\frac{7}{3}p-\frac{1}{3}p$	Factoriser : 3ab+4ab	Factoriser : $4x^2-10$	Factoriser : $6t\times s-6t$
Évaluation (partie gauche)	Factoriser : $\frac{7}{5}-\frac{2}{5}t$	Factoriser : $k\times a-k\times b$	Factoriser : 10x+15y	Factoriser : $15y-7y^2$	Factoriser : $21x^2-5x^2$
Évaluation (partie droite)	Factoriser : 10x+15y	Factoriser : $15y-7y^2$	Factoriser : $\frac{7}{5}-\frac{2}{5}t$	Factoriser : $21x^2-5x^2$	Factoriser : $k\times a-k\times b$

Déroulement

Étude 1 : La publicité sur les prix

Discussion sur les remises, signification, classification des remises de même « type », comparaison de quelques-unes en fonction des réactions (par exemple les 3 premières ou celle « +10% gratuit » avec une qui serait 10% de réduction immédiate).

Étude 2 : Comparer des remises

Comparer les remises sur les 4 produits ci dessus

Si j'achète un produit à 10 € à -30% et un autre produit à 20 € à -20% quel est le pourcentage de la réduction sur la globalité.

Étude 3 : Exercice du brevet

Exercice 2 — **6 points**

Léa a besoin de nouveaux cahiers. pour les acheter au meilleurs prix, elle étudie les offres promotionnelles de trois magasins. Dans ces trois magasins, le modèle de cahier dont elle a besoin a le même prix avant promotion.

Magasin A	Magasin B	Magasin C
Cahier à l'unité ou lot de 3 cahiers pour le prix de deux	Pour un cahier acheté, le deuxième à moitié prix.	30% de réduction sur chaque cahier acheté.

1. Expliquer pourquoi le magasin C est plus intéressant si elle n'achète qu'un cahier.
2. Quel magasin doit-elle choisir si elle veut acheter :
   a) deux cahiers ?
   b) trois cahiers ?
3. La carte de fidélité du magasin C permet d'obtenir 10% de réduction sur le ticket de caisse, y compris sur les articles ayant déjà bénéficié d'une première réduction.
   Léa possède cette carte de fidélité, elle l'utilise pour acheter un cahier. Quel pourcentage de réduction totale va-t-elle obtenir ?

Étude 4 : Impôts sur le revenu

Le barème de l'impôt sur le revenu sert à calculer le montant de l'impôt brut : il est composé de 5 tranches de revenu imposable et d'un pourcentage d'imposition pour chacune de ces tranches d'impôt.
Le barème d'imposition de l'année 2016 pour une part fiscale est le suivant :

Tran-che	Revenu imposable	Taux
1	Jusqu'à 9 700 €	0%
2	De 9 700 € à 26 791 €	14%
3	De 26 791 € à 71 826 €	30%
4	De 71 826 € à 152 108 €	41%
5	Plus de 152 108 €	45%

Exemple : un contribuable dont le revenu imposable est de 10 000 € n'est pas imposé sur 9 700 € puis est taxé à 14% sur 300 €.

1-Calculer le montant de l'impôt pour ce contribuable et le pourcentage réel du revenu imposable correspondant.

2-Mêmes questions pour des contribuables dont les revenus imposables sont respectivement de 40 000 € et de 80 000 €.

3-Construire un graphique représentant le montant de l'imposition d'un contribuable en fonction de son revenu imposable (compris entre 0 € et 200 000 € annuel).

Prolongements en fonction du travail réalisé
1 Fabriquer un calculateur qui donne le montant de l'impôt en fonction du revenu imposable. (*Algorithme et programmation*)
2 Construire un graphique représentant le taux réel de l'imposition en fonction du revenu imposable.

Étude 5 : Deux portefeuilles d'actions

Voici les rendements de 2 portefeuilles d'actions de 2008 à 2015

Performances annuelles exprimées en pourcentage (1)								
Supports	2015	2014	2013	2012	2011	2010	2009	2008
Actions Asie	+6,09	+0,93	+8,74	+15,65	-6,41	+9,44	+28,11	-22,16
Actions Europe	+7,97	+4,12	+15,54	+16,33	-4,63	+11,91	+31,07	-40,31

(1) Les performances passées ne préjugent pas des performances à venir

Le portefeuille d' « Actions Europe » a-t-il été « positif » sur la période 2008-2010 ?
Sur ces huit années quel aura été le meilleur placement ?
Quel est le rendement annuel moyen des « Actions Asie »?

Étude 6 : boites de chocolat

Problème
Les suisses sont les plus gros consommateurs de chocolat. Ils consomment en moyenne 10 kg de chocolat par an et par habitant. Mr Chocos est le directeur d'un supermarché dans la banlieue de Zurich. Il achète à une usine des boites de chocolats au prix de 5 € la boite. Il revend ses boites de chocolat dans son supermarché à 13,60 € la boite. Habituellement, il en vend 3000 par semaine. Mr Chocos réalise une étude de marché qui montre que chaque baisse du prix de 50 centimes fera augmenter ses ventes de 300 boites par semaine.
Votre mission : aider Mr Chocos à fixer le prix de vente de la boite de chocolat pour réaliser un maximum de bénéfices.

Étude 7 : Tableau d'amortissement

Banque : … Caisse : …

Numéro du prêt : 000103607 10 Titulaire du prêt : …

Liste des remboursements

Période	Capital en début de période	Capital de l'échéance	Intérêts de l'échéance	Assurance et frais	Terme remboursé (assurance incluse)
05/10/2016	38 371,43	810,17	83,14	6,69	900,00
05/11/2016	37 561,26	811,93	81,38	6,69	900,00
05/12/2016	36 749,33	813,69	79,62	6,69	900,00
05/01/2017	35 935,64	815,45	77,86	6,69	900,00
05/02/2017	35 120,19	817,22	76,09	6,69	900,00
05/03/2017	34 302,97	818,99	74,32	6,69	900,00
05/04/2017	33 483,98	820,76	72,55	6,69	900,00
05/05/2017	32 663,22	822,54	70,77	6,69	900,00
05/06/2017	31 840,68	824,32	68,99	6,69	900,00
05/07/2017	31 016,36	826,11	67,20	6,69	900,00
05/08/2017	30 190,25	827,90	65,41	6,69	900,00
05/09/2017	29 362,35	829,69	63,62	6,69	900,00
05/10/2017	28 532,66	831,49	61,82	6,69	900,00
05/11/2017	27 701,17	833,29	60,02	6,69	900,00
05/12/2017	26 867,88	835,10	58,21	6,69	900,00
05/01/2018	26 032,78	836,91	56,40	6,69	900,00
05/02/2018	25 195,87	838,72	54,59	6,69	900,00
05/03/2018	24 357,15	840,54	52,77	6,69	900,00
05/04/2018	23 516,61	842,36	50,95	6,69	900,00
05/05/2018	22 674,25	844,18	49,13	6,69	900,00
05/06/2018	21 830,07	846,01	47,30	6,69	900,00
05/07/2018	20 984,06	847,84	45,47	6,69	900,00
05/08/2018	20 136,22	849,68	43,63	6,69	900,00
05/09/2018	19 286,54	851,52	41,79	6,69	900,00
05/10/2018	18 435,02	853,37	39,94	6,69	900,00
05/11/2018	17 581,65	855,22	38,09	6,69	900,00
05/12/2018	16 726,43	857,07	36,24	6,69	900,00
05/01/2019	15 869,36	858,93	34,38	6,69	900,00
05/02/2019	15 010,43	860,79	32,52	6,69	900,00
05/03/2019	14 149,64	862,65	30,66	6,69	900,00
05/04/2019	13 286,99	864,52	28,79	6,69	900,00
05/05/2019	12 422,47	866,39	26,92	6,69	900,00
05/06/2019	11 556,08	868,27	25,04	6,69	900,00
05/07/2019	10 687,81	870,15	23,16	6,69	900,00
05/08/2019	9 817,66	872,04	21,27	6,69	900,00
05/09/2019	8 945,62	873,93	19,38	6,69	900,00
05/10/2019	8 071,69	875,82	17,49	6,69	900,00
05/11/2019	7 195,87	877,72	15,59	6,69	900,00

Page 1/2

Liste des remboursements					
Période	Capital en début de période	Capital de l'échéance	Intérêts de l'échéance	Assurance et frais	Terme remboursé (assurance incluse)
05/12/2019	6 318,15	879,62	13,69	6,69	900,00
05/01/2020	5 438,53	881,53	11,78	6,69	900,00
05/02/2020	4 557,00	883,44	9,87	6,69	900,00
05/03/2020	3 673,56	885,35	7,96	6,69	900,00
05/04/2020	2 788,21	887,27	6,04	6,69	900,00
05/05/2020	1 900,94	889,19	4,12	6,69	900,00
05/06/2020	1 011,75	891,12	2,19	6,69	900,00
05/07/2020	120,63	120,63	0,26	6,69	127,58
Total		**38 371,43**	**1 948,41**	**307,74**	**40 627,58**

Les questions sont données au fur et à mesure :

1- Qu'est-ce que ce document ?
2- À quoi correspond chaque colonne ?
3- Sachant que ce prêt est au taux de 2,60% comment calculer les intérêts de l'échéance ? (4^{e} colonne)
4- Reproduire ce tableau d'amortissement sur tableur.
5- L'assurance mensuelle restant constante,
   a. donner la durée de ce prêt (pour un même taux) si le remboursement mensuel est de 450 €
   b. donner la mensualité à payer (pour un même taux) pour que la durée du prêt soit divisée par deux.
   c. avec un taux deux fois plus bas, la durée de l'emprunt est-elle divisée par deux ?
6- Comment varie la durée du prêt en fonction du taux.

Et plein d'autres questions de ce genre

Étude 8 : Téléphones portables

Formule A : 0,0625 € par minute
Formule B : 5 € pour un forfait de 2h et 0,125 € par minute de dépassement du forfait
Formule C : 6,50 € pour un forfait de 2h et 0,075 € par minute de dépassement du forfait
Formule D : 10 € illimité

Parmi les 4 formules ci-dessus, laquelle choisir ?

Étude9 : Placement d'argent

Indices des prix des logements anciens - France métropolitaine - Ensemble - Base 100 au 1er trimestre 2010 - Série brute - Source Insee 08-2015

http://ww1.meilleurplacement-2017.com/a/ou-placer-son-argent-en-2017.php?utm_source=mp-a&utm_medium=desktop&utm_campaign=1547&utm_content=C266_txt116_img110&utm_ref=nrjgroup-nrjfr

Voici les conseils que l'on peut trouver sur un site de placement :
La première règle est de devenir propriétaire de sa résidence principale. Plus de 57.7% des français l'ont compris (statistiques INSEE 2010) : chaque euro dépensé en loyer est un euro définitivement perdu. Investir dans un bien immobilier est un incontournable qui laissera la possibilité de revendre plus tard quand ce sera le bon moment. Bien entendu, on peut se poser la question des variations du prix de l'immobilier. Mais quand on sait qu'en 20 ans les prix de l'immobilier ont été multipliés quasiment par 3 (voir notre graphique ci-contre), on peut se rassurer. Même si le marché s'effondrait de 25% - ce qui n'est jamais arrivé - les prix seraient encore deux fois plus élevés qu'en 1995 !

1- Que pensez-vous de l'affirmation de la dernière phrase ?
2- Quels sont la signification et l'intérêt de la « Base 100 » mentionné dans les lignes écrites en dessous du graphique ?
3- Donner les prix d'un logement de 100 000 € au 1er trimestre 2010 en 2001.

Cours

I Comparer

1/ **La comparaison absolue** : l'écart de prix
L'écart de prix entre 25 € et 22,15 € est de :
25-22,15 = 2,85 € → on calcule la différence (soustraction)

Lorsqu'on compare le prix de deux produits, il faut bien faire attention à en avoir la même quantité ou le même nombre.

2/ **La comparaison relative** (un prix par rapport à un autre)

- sous la forme d'un coefficient entre le domaine de Brad Pitt et Angelina Jolie en France (35 millions d'euros) et le prix moyen d'un bien immobilier en France 220 387 €
le domaine est : 35 000 000 : 220 387 ≈ 159 fois plus cher → on calcule le quotient (division)
On parle de rapport entre les deux valeurs

- sous la forme d'une fraction entre deux paquets de café à 8 €/kg et 12 €/kg :
Le premier est $\frac{8}{12}$ (ou $\frac{3}{4}$) du deuxième

- avec un pourcentage
Le prix moyen de la baguette a augmenté de 3% par rapport au prix moyen de l'an dernier.

3/ **La comparaison de deux augmentations**
Comparer deux augmentations a un sens pour une même quantité (un même nombre) de départ, on utilise donc le plus souvent les pourcentages.

II Calculer un prix

1/ Prix à l'unité, prix d'une certaine quantité … on utilise la proportionnalité

Exemple : 350g de farine coûte 0,64 €. Combien coûte 1kg ?

Poids de farine (en g)	350	1000
Prix (en €)	0,64	

2/ Fraction d'un prix :

Exemple : Je consacre les 2/5 de mon salaire de 1800 € à payer mon loyer.
Mon loyer est de :

1800 :5 = 360 (1/5 du loyer) **ou** $1800\text{x}\frac{2}{5} = 720$ €

360×2 = 720 €

3/ Prix pour lequel il est question de pourcentage

a/ avec ou sans tableau

Exemples : 30% de 120 € correspond à

Prix (en €)	120	?
Pourcentage correspondant	100%	30%

ou : 120 :100 = 1,20 € → 1% de 120 €
1,20 € x 30 = 36 € → 30% des 120 €
$30\% = \frac{30}{100}$

Quel est le prix d'un pantalon à 90 € après une augmentation de 15% ?

Prix (en €)	90	?
Pourcentage correspondant	100%	115%

ou on calcule les 15% qu'on rajoute à 90 €
ou les 115% de 90 €

Quel était le prix à l'origine de cette bague à 30,60 € qui a subi une baisse de 15% ?

Prix (en €)	30,60	?
Pourcentage correspondant	85%	100%

30,60 € correspond à 100%-85% = 15%
ou la somme correspondant à 1% puis …

b/ avec une règle

Ajouter 5% revient à multiplier par 1+5/100 = 1,05
Soustraire 8% revient à multiplier par 1-8/100 = 0,92

Exemples : Pour ajouter 13% à 51 € : 51×1,13 = 57,63
Pour diminuer 60 € de 35% : 60×0,65

Compléments :
-Attention aux combinaisons de pourcentages :
Ajouter 30% puis 20% ne revient pas à ajouter 50%.

Démonstration : ajouter 30% revient à multiplier par 1,30, ajouter 20% à multiplier par 1,20 +30% puis +20% revient à faire ×1,30×1,20 c'est-à-dire ×1,56 soit +56%

Ou on calcule l'effet de ces deux augmentations sur un prix choisi.
-Ajouter 35% à un premier objet et 35% à un deuxième revient à ajouter 35% sur le total des deux objets. (Voir travail sur l'exercice de brevet sur les cahiers)

+ *Éventuellement un paragraphe sur le système d'équations*

Exemples d'évaluations

Comme nous l'avons dit dans l'introduction de la partie précédente consacrée à divers exemples de déroulement du chapitre *Prix*, nous n'avons pas tous la même façon de concevoir l'évaluation en cours de chapitre (sa forme et sa place). Les exemples qui suivent traduiront donc la variété de nos pratiques. En particulier le contenu de certains contrôles concerne uniquement le chapitre *Prix*, alors que dans d'autres sujets certaines questions évaluent des connaissances ou compétences de chapitres antérieurs portant sur d'autres grandeurs. Les questions elles-mêmes sont soit contextualisées, soit complètement décontextualisées, et ce dans une proportion variable. Il ne s'agit pas ici de se faire une idée de ce qui peut être mis en place dans les classes comme évaluation globale sur une année et un niveau, mais de voir quelles questions peuvent être objet d'évaluation concernant les *prix*, et en quoi il s'agit bien de mise en œuvre de connaissances mathématiques.

Niveau 5^{e} *Exemple 1*

Devoir 5	NOM :	Prénom
Appréciation	Note	

Exercice 1 :

Pull Irlandais ~~160,00 €~~ ◆ -40% ◆	Quel prix vais-je le payer ?
Parka Laine ◆ -20% ◆ 340,00 €	Quel était son prix de départ ?
360 € au lieu de 449 € EN SOLDES	Quel est le pourcentage de remise proposé ?

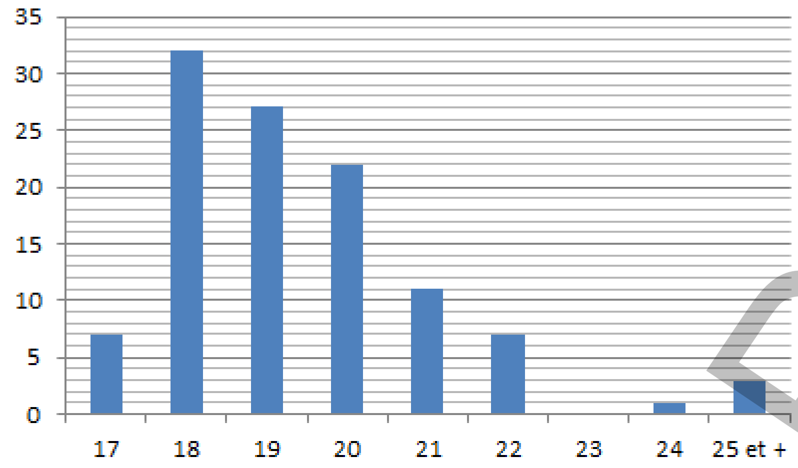
Exercice 2 : Alexia a dépensé le tiers de ses économies pour s'acheter un coffret de CD, et les $\frac{5}{12}$ de ses économies pour compléter son équipement de roller. Combien lui reste-t-il en proportion de sa somme de départ ?
Si elle avait au départ 160 €, combien lui reste-t-il en euros ?

Exercice 3 : À partir du tableau ci-dessous, calculer la fréquence de chaque console de jeux puis construire le diagramme circulaire correspondant.

	Ventes de la semaine
PS4	33.376
3DS	26.057
PS Vita	11.521
Wii U	794
PS3	557
Xbox One	35

Exercice 4 : J'achète 12 chaises à 142 € l'une. Mais on m'a fait une remise de 30 € sur chaque chaise.
Calculer de deux manières différentes la facture que je dois régler.

Exercice 5 : Voici la répartition des étudiants selon leur âge à l'entrée à l'université d'une filière à Paris 7.



Calculer la fréquence de chaque catégorie.
Quel pourcentage d'étudiants avaient 18 ans ou moins ? Puis avaient 22 ans ou plus ?

Niveau 5^{e} *Exemple 2*

Évaluation de mathématiques

Nom :
Prénom :
Classe :

La calculatrice est autorisée.
Tous les calculs nécessaires à la résolution d'un problème doivent être écrits sur ta copie.

Savoir utiliser mes connaissances et compétences mathématiques	
• Appliquer un pourcentage • Fractions	**/ 4** **/ 6**
• Reconnaître une situation de proportionnalité • Compléter un tableau de proportionnalité • Résoudre	**/ 2** **/ 2** **/ 5**
Maîtrise de la langue : • Rédiger un texte bref, cohérent et ponctué en réponse à une question ou à partir de consignes données	**/ 1**
Note :	**/20**

Exercice 1 :

Calcule les durées suivantes et donne le résultat en format HMS (Heure-Minute-Seconde) :

a) 50 % de 5 h   b) 30 % de 2 h   c) 80 % de 2 h

Exercice 2 :

Gabriel dit : « Le quart des deux-tiers d'heure s'est écoulé. »
Karine : « Les deux-tiers du dixième d'heure se sont écoulés. »
Claude : « La moitié d'un sixième de l'heure s'est écoulé. »

Qui a annoncé la plus longue durée ?

Exercice 3 :

Calcule : $D = \frac{15}{7} + \frac{6}{7}$; $E = \frac{6}{10} - \frac{5}{100}$; $F = \frac{6}{15} + \frac{2}{5}$; $G = 2 - \frac{5}{6}$

Exercice 4 :

Complète le tableau de proportionnalité suivant :

25	2		
	6	48	72

Exercice 5 :

Un robinet fuit de façon régulière et remplit un seau de 6 litres en 45 minutes.

a) Quel volume d'eau s'échappe en 15 minutes ?
b) Quel volume d'eau s'échappe en 1 h 30 minutes ?
c) On place une bassine de 50 litres sous le robinet. En combien de temps sera-t-elle remplie ?

Exercice 6 :

Voici une facture d'un garagiste :

Référence	Quantité	Prix unitaire HT	Montant HT
Main d'œuvre	………………	59 €	………………
courroie	1	25,50 €	………………
phares	2	179 €	………………

Total HT	………………
Taux TVA	20 %
Montant TVA	………………
Total TTC	………………

Complète cette facture sachant que le garagiste a passé 2 h 30 min pour réparer la voiture.

Niveau 5^e ***Exemple 3***

M@thém@tiques 5^{ième}

Nom et Prénom : Classe :	**Devoir surveillé n°1** Durées : *45 minutes*

– **La calculatrice est autorisée.**
– **La qualité de la rédaction et la présentation seront pris en compte (1 point).**

Exercice 1. [10 minutes - 7,5 pts]
Calcule les expressions suivantes en détaillant, pour chacune, les étapes de calcul.

$A = 24 - 16{,}2 - 6 + 7$

$B = 19{,}4 - 3{,}2 + 4 \times 2$

$C = 25 - 6 \times (8 - 6) + 9{,}3$

$D = (105 - 12 \times (3 + 5)) \div 2$

$E = 16 \div (5 + 3) + 4 \times 2{,}5 - (11{,}1 + 0{,}9)$

Exercice 2. [5 minutes - 2 pts]
Combien coûtent 5 boutons ?

Source : https://www.mapetitemercerie.com

Exercice 3. [15 minutes - 3,5 pts]
1. Est-ce que les forfaits Jet d'Orange ont un prix proportionnel au nombre de Go proposés ?
2. Déterminer le prix annuel de chaque forfait.
3. Déterminer l'écart de prix annuel entre ces deux forfaits.
4. Je choisis le forfait Jet 80Go pour économiser de l'argent pour acheter le Samsung Galaxy à 499,99 €. Dans combien de temps pourrais-je l'acheter ?

Exercice 4. [15 minutes - 5 pts]
En pleins travaux dans sa maison, Caro a besoin de refaire le carrelage de sa cuisine. Elle est rectangulaire et mesure 5,5 m de long et 3,5 m de large. Caro est allée voir sur internet et a trouvé le carrelage qu'elle voudrait acheter :

Source : http://www.lapeyre.fr

1. Quel est le prix au m^2 de ce carrelage ?
2. Quelle surface peut-on carreler avec une boite de ce carrelage ? Quel est le prix de cette boite ?
3. Quelle est la superficie de la cuisine ?
4. De combien de boites Caro aura-t-elle besoin pour carreler sa cuisine ?
5. Quel va être le prix de sa commande (arrondir à la dizaine d'euros près) ?

Niveau 4^e^ ***Exemple 1***

Évaluation de mathématiques

Nom :
Prénom :
Classe :

Compétences :

D1.3 - Comprendre, s'exprimer en utilisant le langage mathématique : • Utiliser le système décimal et les langages formels : ***Calculer avec des fractions*** ***Écrire une équation, puis la résoudre*** ***Utiliser des pourcentages*** • Produire et utiliser des représentations (***Faire des schémas***) • Utilisation du langage informatique ***(Utiliser le tableur)***	
D4 – Pratiquer des démarches scientifiques : • Prélever, organiser et traiter l'information ***(Comprendre la situation)***	

Code de l'évaluation des compétences :
NA : Non Acquis *ECA : En Cours d'Acquisition* *A : Acquis* *E : Expert*

Calculs sans calculatrice :

$\frac{3}{4}+\frac{19}{20}$ $\frac{3}{4}\times\frac{11}{12}$ $\frac{3}{4}\div\frac{2}{3}$

Résolution d'équations : Dans chaque cas, trouver la valeur de x :

a) 4 x = 36 b) x + 35 = 100 c) x – 56 = 80
d) 3x + 14 = 50 e) 7x + 13 = 5x + 73

Situation 1 : Remises
Une paire de chaussures à 100 € est soldée à 50 %. Elsa n'a malheureusement pas assez d'argent pour se l'acheter. Une semaine plus tard, elle retourne au magasin et se réjouit de voir qu'il est écrit : « Deuxième démarque, 20 % sur le prix soldé ! ».
Elle a 32 € en poche. Va-t-elle pouvoir acheter la paire de chaussure tant convoitée ?

Situation 2 : Banque
Luc disposait de 150 €. En 2016, il les a placés sur un livret rapportant 2 % d'intérêt par an.
a. De quelle somme disposera t-il en 2017 ? et en 2018 ?
b. Quelle opération doit-il effectuer pour connaître la somme dont il disposera en 2026 ?

Situation 3 : Emprunt
Pour pouvoir financer sa maison, Sonia a fait un emprunt à la banque : pendant 25 ans, elle va rembourser chaque mois 850 €.
a. Au bout des 25 ans, quelle somme aura-t-elle remboursée ?
b. Elle souhaite utiliser le tableur pour obtenir un récapitulatif de la somme remboursée et du reste à payer mois par mois.
Quelle formule doit-elle écrire dans la cellule C2 pour ensuite l'étendre à toute la colonne C ?

Quelle formule doit-elle écrire dans la cellule D2 pour ensuite l'étendre à toute la colonne D ?

	A	B	C	D
1	date	n° de mois	Somme payée	Somme restante
2	Sept 16	1		
3	Oct 16	2		
4	Déc 16	3		
5	Jan 17	4		
6	Fév 17	5		
7	...	...		

Situation 4 : Dette

Arthur a emprunté de l'argent à un ami. Il lui rembourse d'abord 3/8 de ce qu'il lui doit. Puis il rembourse les 7/10 du reste. Il lui reste 30 € à payer.
Quel était le montant de sa dette ?

Niveau 4e ***Exemple 2***

DEVOIR Surveillé N°1

Calculatrice autorisée

EXERCICE 1 – ***À faire sur votre feuille double*** **/ 5 points**

a- Le prix affiché est le prix après la remise.

Quel était le prix de l'horloge avant la remise ?

b- Que pensez-vous du prix soldé affiché sur ce site ?

EXERCICE 2 – ***À faire sur votre feuille double*** **/ 5 points**

Voici la répartition des salaires d'une entreprise en 2010 :

Emploi	Salaire en euros	Effectif
Stagiaire	980	2
Technicien	1400	7
Cadre	1800	9
Dirigeant	3450	2

1- Calculer le salaire moyen dans cette entreprise.

2- Déterminer le salaire médian de cette entreprise et interpréter concrètement le résultat.

3- Quel est l'écart entre le plus bas salaire et le plus haut salaire ? Comment cela s'appelle-t-il ?

4- Compléter cette phrase :

Avec la somme des salaires distribués, si chaque salarié recevait le même salaire, il gagnerait .... par mois.

<u>EXERCICE 3</u> - *À faire sur votre feuille double* / 3 points

Anna achète 4 m de tissu pour 31 euros.
1- Déterminer le prix de 7 m de tissu.
2- Déterminer la longueur de tissu avec 50 euros. Arrondir le résultat au centième.

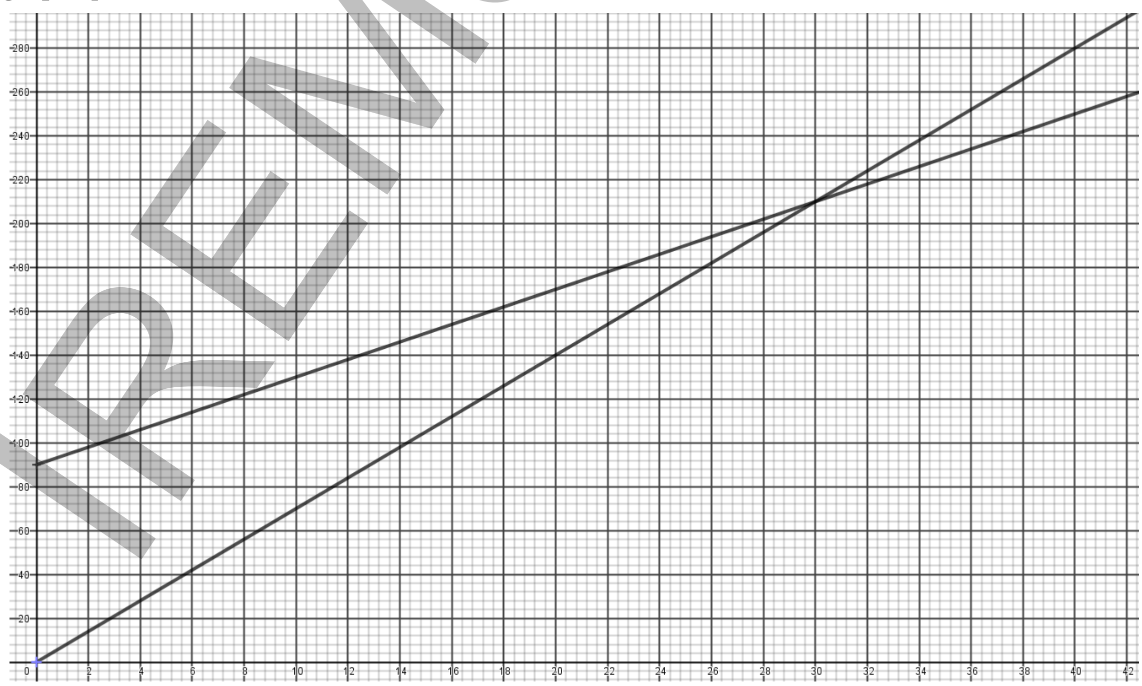
<u>EXERCICE 4</u> - *À faire sur votre feuille double* / 7,5 points

Un club multi-sports propose à sa clientèle de choisir entre les 2 formules suivantes :
- Formule A : 7 € par séance.
- Formule B : un abonnement de 90 € à l'année puis 4 € par séance.

1- Quel sera le prix à payer pour 15 séances pour chacune des formules.
2- Compléter le tableau ci-dessous :

<u>*Nombre de séances*</u>	2	10	24		
Prix à la séance en €				266	
Prix avec abonnement en €					286

3- On appelle *n* le nombre de séances suivies par une personne pendant une année.
Écrire la dépense en fonction de *n* avec la formule A puis avec la formule B.
4- a) Sur le graphique, mettre une légende sur les axes et dire à quelle formule correspond chaque droite.
b) Pour quel nombre de séances les 2 tarifs sont-ils égaux ? Où trouve-t-on l'information sur le graphique ?



Niveau 3e ***Exemple 1***

Nom : Prénom :	**Évaluation** **3ème**	**APPLIQUER** / **RAISONNER** /	

Ex 1 :

1-Les étudiants bénéficient-ils d'une réduction de 30% sur le plein tarif ?

2-Le tarif de 9,50 € la place est le résultat d'une augmentation de 10% par rapport à l'année précédente. Quel était le coût d'une place plein tarif l'année dernière ?

Tarif d'une place de cinéma :

Plein tarif :	9,50 €
Enfants (−12 ans) :	5,20 €
Étudiants :	6,65 €
Séniors :	7,40 €

Ex 2 :

Année	***1990***	***2000***
Prix moyen d'une voiture (en €)	7000	7500
Prix moyen d'un cahier (en €)	1,25	1,45

Est-ce le prix moyen du cahier ou celui de la voiture qui a subi la plus forte augmentation entre 1990 et 2000 ?

Ex 3 :

Pour financer un voyage scolaire, les élèves ont décidé de vendre lors des réunions parents-profs du diabolo fraise. Pour cela ils mélangent du sirop de fraise avec de la limonade en suivant la recette ci-contre :

Pour une personne (18cL):
- 3cL de sirop de fraise
- 15cL de limonade

Sachant que le prix au litre du sirop de fraise est de 5 € et celui de la limonade 3,50 €, calculer le prix de revient d'un litre de diabolo fraise.

Ex 4 :

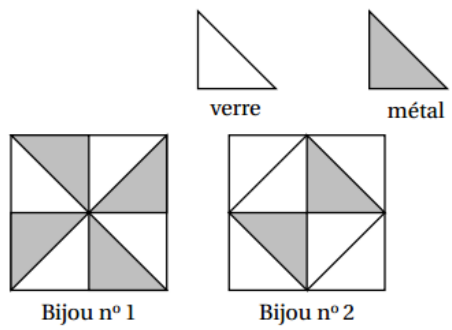
Germain souhaite acheter deux pulls et profiter de l'offre ci-contre. Le premier coûte 49,50 € et le second 23 €.

De quel pourcentage de réduction bénéficiera-t-il au final ?

* Offre valable du 12 au 16 novembre 2014 sur tous les pulls et gilets. Non cumulable avec toute autre promotion en cours, opération lot ou programme fidélité. Non valable sur les cartes cadeaux et retouches. Remise effectuée en caisse sur le moins cher des deux articles.

Ex 5

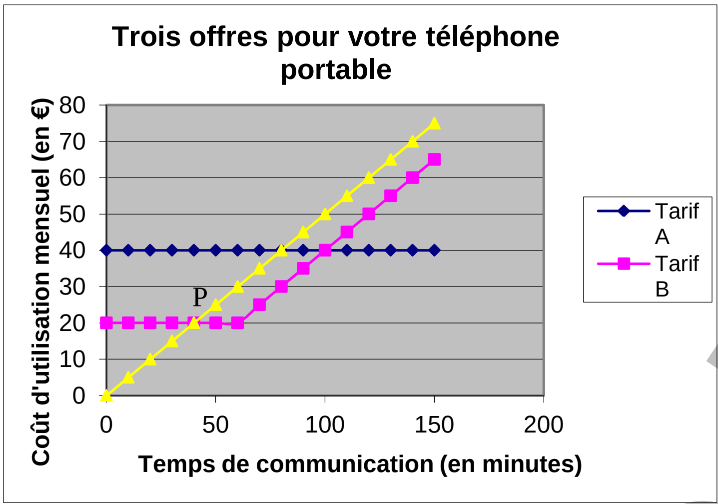
On fabrique des bijoux à l'aide de triangles qui ont tous la même forme. Certains triangles sont en verre et les autres sont en métal.
Deux exemples de bijoux sont donnés ci-dessous. Les triangles en verre sont représentés en blanc, ceux en métal sont représentés en gris.
Le bijou 1 coûte 11 € ; le bijou 2 coûte 9,10 €.
Quel est le prix d'un triangle de verre et celui d'un triangle de métal ?



Niveau 3e ***Exemple 2***

Nom : Prénom :	**Évaluation** **3ème**	**APPLIQUER** / **RAISONNER** /		**/20**

Ex 1 :



1/ Donner le prix payé pour une heure de communication mensuelle pour chacun des trois tarifs :

____

____

____

2/ Quel a été le temps de communication d'une personne ayant payé 50 € avec le tarif C ?

____

3/ Quel sera le coût d'utilisation correspondant à 80 minutes de communication avec le tarif B ?

____

4/ Dire à quelle situation correspond le point d'intersection P sur le graphique :

____

____

5/ Donner la fourchette de temps pour laquelle le tarif B est plus avantageux que les autres :

____

____

6/ A quel tarif (A, B ou C) correspond chacune des formules ci-dessous :

- formule à la minute (pas d'abonnement, on paie un coût fixe pour chaque minute consommée) :__
  Quel est le prix d'une minute ? ______________________________
- formule « illimité » (un coût invariant quelle que soit la durée de communication mensuelle) : ___
- formule « forfait » auquel est rajouté un coût fixe par minute de dépassement : __

Ex 2

Monsieur X possède deux usines de fabrication de jouets. Ces deux usines n'ont pas les mêmes coûts de fonctionnement. D'après ces constatations, il réalise le tableau suivant :

Nombre de jouets fabriqués	500	750	1000	1250	1500	1750	2000	2250	2500
Coût de fabrication dans l'usine A (en milliers d'euros)	12	18	23	28	32	36	40	43	46
Coût de fabrication dans l'usine B (en milliers d''euros)	15	20	24,5	28,5	31,5	34	37	40	43

1/ Dans quelle usine a-t-il intérêt à fabriquer les jouets s'il en veut 2000 (expliquer) ?

____

____

2/ Pour quel nombre de jouets à fabriquer peut-il hésiter entre l'usine A et l'usine B (expliquer) ?

____

____

____

Le chapitre *Prix* dans la progression annuelle

Les progressions qui suivent sont des exemples de ce qu'il est possible de faire si l'on organise le déroulement de son année à partir d'un certain nombre de grandeurs. Toutes les progressions mettent en avant les connaissances nouvelles qui vont être travaillées dans chacun des chapitres, permettant ainsi d'assurer la couverture du programme. Certaines présentations font voir les points clés de notre démarche : une organisation de chaque chapitre autour de grands types de tâches mathématiques (comparer, partager, calculer, varier …) qui correspondent à de grandes questions à résoudre à l'intérieur de chaque grandeur : Comment comparer des prix ? Comment comparer des angles ? … Questions dont l'étude, sur des situations bien choisies, permet de rencontrer et travailler toutes les notions au programme. Mais on pourra se rendre compte, par exemple pour le chapitre *Prix* en 5^e, que suivant sa place dans la progression, et les choix du professeur ou de l'équipe, il y a des variations dans les notions abordées. Par exemple si la proportionnalité est traitée dans le chapitre *Prix* des 3 progressions de 5^e ci-après, par contre seul l'exemple 1 choisit ce chapitre pour traiter de statistiques. Alors que les statistiques sont abordées dans les chapitres *Durées* et *Aires* dans l'exemple 3. Par contre elles ne sont pas traitées en 5^e dans l'exemple 2, les professeurs du collège en question ayant décidé d'en faire l'étude en 4^e et 3^e, liberté que procure la nouvelle organisation du programme par cycle. On les retrouve en 4^e dans le chapitre *Prix* de l'exemple 2. À chacun de trouver, seul ou en équipe, sur une année ou sur tout le cycle, la progression qui lui permettra de traiter le programme tout en donnant sens et intérêt aux mathématiques qu'il a à enseigner.

Niveau 5e *Exemple 1*

Chapitre 1 : Durées *a. Comparer* i. Nombres relatifs : 1. Définition 2. Somme de deux nombres relatifs 3. Différence de deux nombres relatifs 4. Équation à trou *b. Partager* i. Repérage sur une droite graduée 1. Définition 2. Abscisse d'un point 3. Distance à zéro ii. Comparaison de deux nombres relatifs 1. Avec une droite graduée 2. Selon les signes des deux nombres (même signe ou signes contraires)	*c. Calculer* i. Distance de deux points sur une droite graduée ii. Durées 1. Définition 2. Unités de durée 3. Calcul de durée 4. Conversion de durée Division euclidienne iii. Division de deux nombres décimaux

Chapitre 2 : Angles *a. Comparer* i. Angles alternes-internes ii. Angles correspondants iii. Angles opposés par le sommet iv. Propriétés angles et parallèles : cas d'égalité (sens direct et indirect) *b. Partager- Multiplier* i. Somme des angles d'un triangle ii. Cas particuliers : triangle rectangle, isocèle et équilatéral iii. Médiatrices d'un angle et cercle circonscrit *c. Mesurer-Outils* *d. Construire* Inégalité triangulaire *Chapitre 3 : Prix* *a. Comparer* i. Étude statistique : 1. Vocabulaire 2. Fréquence 3. Diagramme en bâtons 4. Diagramme en tuyaux d'orgue 5. Diagramme en bande 6. Diagramme semi-circulaire ii. Comparaison de fractions avec même dénominateur iii. Comparaison de fractions avec même numérateur iv. Cas général Simplifier une fraction pour la rendre irréductible v. Étude statistique (suite) 1. Répartition en classe 2. Histogramme 3. Diagramme circulaire	*b. Calculer* i. Quotient- Fraction 1. Définition 2. Proportion Coefficient de proportionnalité ii. Distributivité 1. Développement 2. Factorisation iii. Vocabulaire des opérations iv. Priorités opératoires 1. Calculs avec parenthèses 2. Calcul sans parenthèses v. Calcul d'un pourcentage *Chapitre 4 : Températures* *a) Comparer* i) Moyenne ii) Expression avec un quotient iii) Calcul d'une expression algébrique iv) Simplification d'écriture (parenthèses et signes) v) Expressions littérales vi) Simplification de l'écriture d'une expression vii) Notion d'égalité Modélisation Valider ou réfuter une conjecture *b) Calculer* i) Nombres relatifs opposés ii) Repérage dans le plan 1. Définition : ordonnée 2. Propriété

Chapitre 5 : Populations

a. Comparer

Probabilités (équiprobabilité)
Issue, événement, événement élémentaire, probabilité

b. Partager

i. Addition et soustraction de fractions de même dénominateur
ii. Multiples et diviseurs
iii. Addition et soustraction de fractions de dénominateurs multiples
iv. Égalité de quotients
v. Simplification de fractions

c. Calculer

i. Comparaison au nombre 1

Chapitre 6 : Aires

a. Comparer

i. Figures symétriques
ii. Parallélogramme
   1. Définition
   2. Propriétés (parallèles)
   3. Centre de symétrie
   4. Cas particuliers : éléments de symétrie, propriétés et propriétés réciproques

b. Partager-Multiplier

i. Symétrie centrale
   1. Centre de symétrie d'un parallélogramme
   2. Symétrique d'une figure
   3. Symétrique d'un segment
   4. Éléments de symétrie d'une figure
   5. Symétrique d'un cercle

c. Mesurer

i. Échelle d'un plan

d. Calculer

i. Aire
   1. Aire d'un triangle
   2. Aire d'un disque
   3. Aire d'un parallélogramme
   4. Aire de figures usuelles
ii. Proportionnalité
   1. Calculer une proportion
   2. Représentation graphique

e. Varier

i. Hauteurs d'un triangle
ii. Proportionnalité dans un tableau
iii. Calcul d'une quatrième proportionnelle
iv. Propriétés d'un parallélogramme (diagonales, côtés, angles) directes et réciproques

Algorithmique

Au cours de l'année, pendant les séances dédoublées.
Travail sur les variables et les conditionnelles

Niveau 5e *Exemple 2*

Angles (6 semaines)

- Retour sur les mesures à l'aide du rapporteur
- Construction de triangles
- Symétrie centrale
- Parallélogramme et quadrilatères particuliers (propriétés caractéristiques)
- Somme des angles d'un triangle (égalité des angles correspondants et alternes-internes)

Températures (6 semaines)

- Introduction : questionnement comme en classe de 6ème
- Notion d'opposé
- Repérer et comparer des nombres relatifs
- Classer des nombres relatifs
- Lire et représenter des graphiques
- Addition et soustraction de relatifs (notion d'écart)

Durées (6 semaines)

- Comparaison de fractions
- Simplification de fractions
- Additions et soustractions de fractions
- Multiplication de fractions
- Distributivité simple
- Calcul de pourcentages

Prix (3 semaines)

- Proportionnalité
- Pourcentages
- Lire et représenter des graphiques

Aires (4 semaines)

- Rappel de géométrie des quadrilatères
- Échelles
- Hauteur
- Calcul littéral (formule de l'aire de triangle)
- Calcul d'aires par assemblage ou inversement (cf. couronne)
- Exprimer en fonction de …

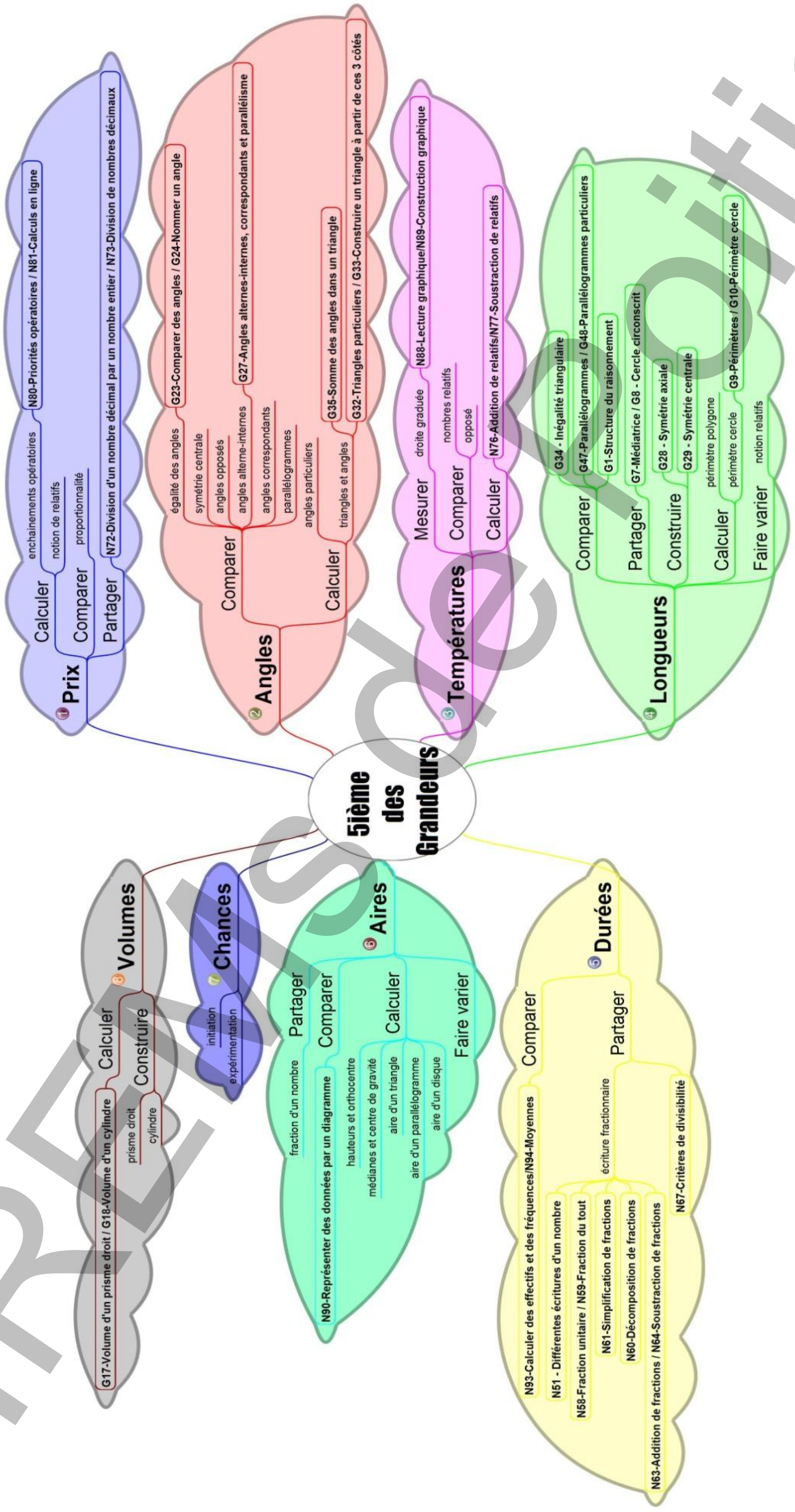
Volumes (4 semaines)

- Prismes et cylindres (patrons, formules)
- Calcul littéral
- Tableau de conversion
- Exprimer en fonction de …

Longueurs (4 semaines)

- Échelles
- Fractions
- Constructions géométriques (triangles, quadrilatères, …)
- Distance d'un point à une droite

Niveau 5^e^ ***Exemple 3***



Niveau 4^e *Exemple 1*

Volumes (9 semaines)

- Situation sur la casserole, liens entre les unités
- Description des solides (prismes et cylindres) : patrons, représentations, aires et volumes
- Tableur
- Les préfixes de nano à giga
- Des prismes aux pyramides ou inversement : description, patrons, représentations, aires et volumes, agrandissement et réduction, théorème de Pythagore
- Des pyramides aux cônes (ou des cylindres aux cônes) : description, patrons, représentations, aires et volumes, agrandissement et réduction, théorème de Pythagore
- Fractions
- Échelles, puissances

Températures (5 semaines)

- Nombres relatifs et coordonnées relatives de points.
- Opérations sur les nombres relatifs
- Représentations graphiques de la proportionnalité et de fonction affines (relations entre unités de températures)
- Résolution d'équation
- Notion de fonction
- Fractions
- Statistiques

Prix (9 semaines)

- Pourcentages et suites de pourcentages
- Notion de fonction
- Représentation graphique de fonctions et tableur
- Puissances
- Fractions
- Calcul littéral : développer une expression
- Résolution d'équation
- Programme de calcul (programmation en Scratch)

Longueurs (8 semaines)

- Notion de géométrie (médiatrice, vocabulaire sur le cercle) et rappel sur la géométrie des triangles
- Fractions
- Théorème de Pythagore
- Trigonométrie
- Théorème de Thalès, agrandissement et réduction

Angles (4 semaines)

- Rappel de géométrie des quadrilatères et théorème de l'angle droit
- Échelles
- Réciproque du théorème de Pythagore
- Théorème de Pythagore et trigonométrie

Niveau 4^{e} ***Exemple 2***

Contenus du programme	Détails supplémentaires	Situations et fiches méthodes
PRIX		
Nombres et calculs - Opérations (+, - , x , :) sur les nombres relatifs et fractionnaires - Utiliser le calcul littéral pour prouver un résultat général, pour valider ou réfuter une conjecture - Réduire une expression littérale (Somme ; Différence) *Organisation et gestion de données, fonctions* - Reconnaître une situation de proportionnalité ou de non proportionnalité - Résoudre des problèmes de recherche de quatrième proportionnelle - Résoudre des problèmes de pourcentages - Étude de données statistiques (lecture et représentation) – Tableur - Résoudre des problèmes modélisés par des fonctions (équations)	- Lecture de données (Graphique / Tableau…) - Travail sur la proportionnalité (Tableau /Produit en croix …) - Proportionnalité et représentation graphique - Statistiques (Étendue / Moyenne / Médiane) - Calculs de pourcentages - Calcul de valeurs grâce à une formule - Calcul littéral (Réduire une expression) - Résolution d'équations et mise en équation (Type a x + b = c x + d) - Utilisation du tableur et de SCRATCH - Fractions (+, -, x, :) **Automatismes** - Étendue ; Moyenne ; Médiane - Proportionnalité - Calcul littéral (Calcul de valeurs ; Réduction) - Pourcentage	**Situations** 1- SMIC Européen 2- Ticket de métro 3- Prix de la craie 4- Impôt sur le revenu 5- Location de DVD 6- Pourcentages **Fiches techniques** Statistiques Proportionnalité Pourcentages Calcul littéral (1^{e} Partie) Équations
LONGUEUR		
Nombres et calculs - Puissances de 10, notation scientifique (calculer des distances astronomiques, atomiques) ; Les préfixes de nano à giga - Mettre un problème en équation en vue de sa résolution / Résoudre des équations et des inéquations *Espace et géométrie* - Effets d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs - Distance d'un point à une droite ; Médiatrice d'un segment. - Altitude. - Échelles (agrandir et réduire une figure) - Mettre en œuvre ou écrire un protocole de construction de figure géométrique ; Coder une figure *Grandeurs et mesures* - Vitesse moyenne (v = d/t) et calcul de distances (d = v x t) - Résoudre des problèmes modélisés par des fonctions (équations)	- Infiniment petit / Infiniment grand - Agrandissement et réduction Triangles semblables / Échelle (Maquette) Théorème de Thalès - Introduction des formules v = d/t et d = v * t - Calcul littéral (Réduire une expression) - Programmes de calculs - Résolution d'équations et mise en équation - Utilisation du tableur et de SCRATCH **Automatismes** - Puissances de 10 (Notation – Calculs ….) - Agrandissement /	**Situations** 1- Infiniment petits et grands (Vidéo Zoom de l'infiniment petit à l'infiniment grand) 2- Infiniment grand et puissances de 10 3- Infiniment petit et puissances de 10 4- Triangles semblables 5- Applications Thalès Hauteur Pyramide de Khéops 6- Étagère échelle 7- Vitesse moyenne et calcul de distance 8- Distance d'arrêt

<table>
<tr><td>Organisation et gestion de données, fonctions

- Résoudre des problèmes de recherche de quatrième proportionnelle
- Résoudre des problèmes de pourcentages
- Calculer et interpréter des caractéristiques de position ou de dispersion d une série statistique
- Notion de variable mathématique

Algorithme et programmation

- Écrire et mettre au point et exécuter un programme en réponse à un problème donné
- Notion d algorithme et de programme</td><td>Réduction (Échelle)
- Triangles semblables
- Calcul littéral
- Calcules de vitesses, de distances</td><td>Fiches techniques
Puissances de 10
Vitesse moyenne
Triangles semblables</td></tr>
<tr><td colspan="3">TEMPÉRATURE</td></tr>
<tr><td>Nombres et calculs

- Nombres relatifs : Addition – Soustraction – Multiplication – Division
- Comparer, ranger, encadrer des nombres décimaux. Repérage sur une droite graduée
- Pratiquer le calcul exact ou approché, mental à la main ou instrumenté
- Utiliser le calcul littéral : Réduire et suppression de parenthèses (Addition / Soustraction)
- Mettre un problème en équation en vue de sa résolution
(utilisations de formules – programmes de calcul ...)
- Résoudre des équations du 1^{er} degré du type
x + a = b ; ax+b = c ; (x + a)/b =c
- Notions de variable, d'inconnue.
- Utiliser le calcul littéral pour prouver un résultat, pour valider ou réfuter une conjecture

Organisation et gestion de données, fonctions

- Interpréter, représenter et traiter des données
- Étude de données statistiques : Moyenne / Médiane / Étendue
- Représentation graphique (Abscisse – Ordonnée – Tableau de valeurs)
- Utilisation du tableur

Algorithme et programmation

- Écrire et mettre au point et exécuter un programme en réponse à un problème donné
- Notion d’algorithme et de programme</td><td>- Nombres relatifs (+, -, x, :)
- Lecture de données dans un graphique, tableau...
- Calcul littéral (Utilisation de formules – Résolution d'équations …)
- Calcul littéral (Réduire une expression, suppression de parenthèses)
- Programmes de calculs
- Statistiques
Utilisation de SCRATCH et du tableur

Automatismes
- Opérations avec des nombres relatifs
- Utilisation de formules / programmes de calculs
- Résolution d’équations
- Statistiques</td><td>Situations
1- Record de T°
2- Comparaison T° annuelle
3- Climatogramme
4- Convertisseur °C / °F
5- Résolution d’équations
6- T° ressenties
7- Coefficient d’aridité

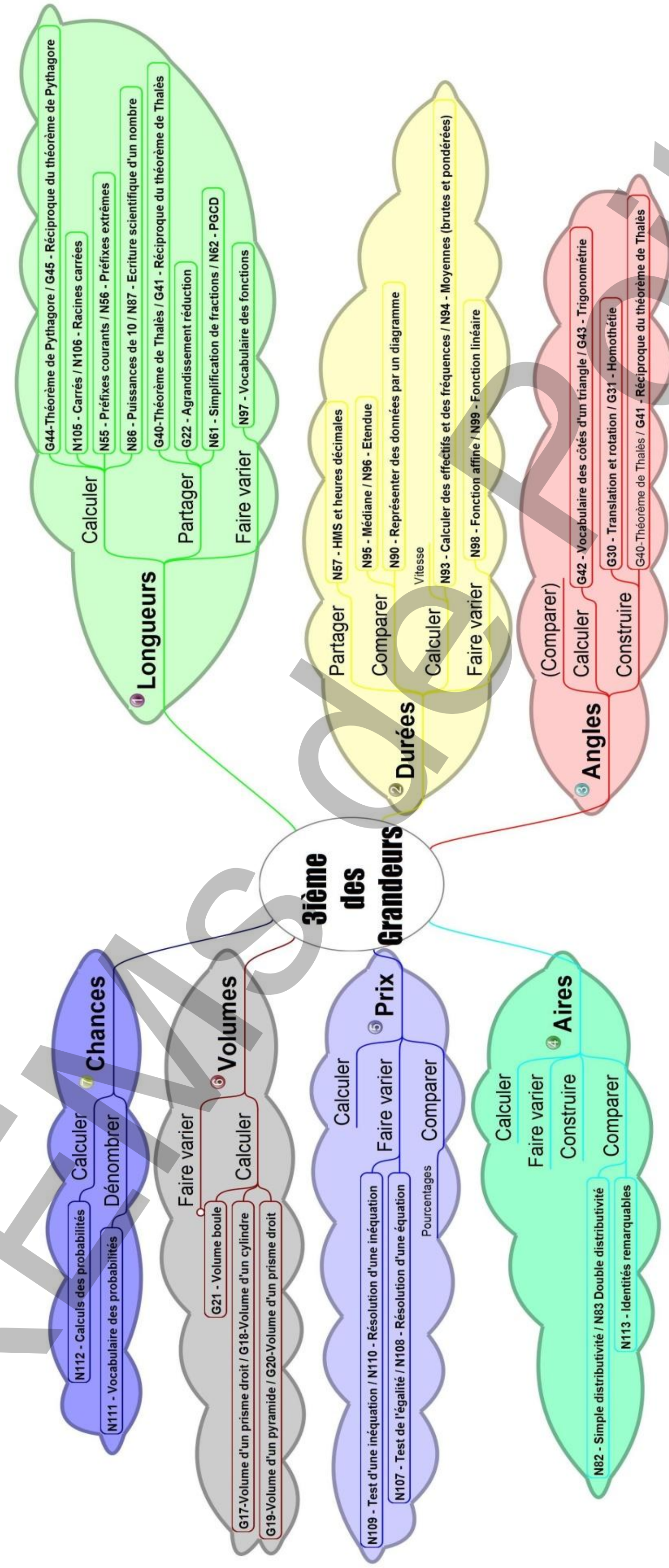
Fiches techniques
Nombres relatifs
(+, -, x, :)</td></tr>
<tr><td colspan="3">AIRE</td></tr>
<tr><td>Nombres et calculs

- Puissances d’exposant entier relatif (unités, changement d’unité)
- Mettre un problème en équation en vue de sa résolution
- Utiliser le calcul littéral pour prouver un résultat, pour valider ou réfuter une conjecture
- Utiliser le calcul littéral : développement et comparaison (multiplication)
simple distributivité : k(a+b) et k (a-b) et double</td><td>- Calculs d’aire (Figures usuelles)
- Simple et double distributivité
- Mise en équation
- Transformations du plan
- Pavages / Frises / Rosaces
- Théorème de Pythagore
Utilisation du tableur et de Scratch</td><td>Situations
1- Pose de pavés dans son jardin
2- Récupérateur d’eau de pluie
3- Pavage de l’Alhambra
4- À la découverte de Pythagore
5- Revêtement tremplin</td></tr>
</table>

distributivité (a + b) (c + d) *Grandeurs et mesures* - Mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables, notamment des grandeurs composées, en conservant les unités - Vérifier la cohérence des résultats du point de vue des unités - Calculs d'aires (Rappels aire figures usuelles) dans le plan et dans l'espace ; hauteur *Espace et géométrie* - Comparer des aires – Partager des aires, construire des figures d'aires soumises à des conditions - Mettre en œuvre ou écrire un protocole de construction de figure géométrique ; Coder une figure **- Théorème de Pythagore ;** Définition de la racine carrée, les carrés parfaits de 1 à 144 - Démontrer qu'un triangle est ou n'est pas rectangle (Pythagore) - Hauteur d'un triangle - Comprendre l'effet d'une translation, d'une rotation sur une figure - Construire des frises, des pavages, des rosaces. *Algorithme et programmation* - Écrire et mettre au point et exécuter un programme en réponse à un problème donné - Notion d'algorithme et de programme	**Automatismes** - Calculs d'aires - Puissances - Théorème de Pythagore	6- Le cric 7- Simple et double distributivité **Fiches techniques** Puissance d'un nombre Théorème de Pythagore Calcul littéral (2e Partie)
CHANCE		
Organisation et gestion de données, fonctions - Notion de probabilité - Propriétés : la probabilité d'un événement est comprise entre 0 et 1, probabilité d'un événement certain, impossible - Simulation d'expérience aléatoire, interprétation fréquentiste d'une probabilité - Recueillir des données, les organiser - Calculer des effectifs, des fréquences *Algorithme et programmation* *- Utilisation du tableur pour simuler une expérience aléatoire*	- Introduction des probabilités - Mise en place du vocabulaire - Simulation **Automatismes** - Notions de probabilité - Calculs de probabilité	**Situations** Activités du manuel *Mission Indigo* **Fiches techniques**
ANGLE		
Espace et géométrie - Mettre en œuvre ou écrire un protocole de construction de figure géométrique ; Coder une figure - Démontrer qu'un triangle est ou n'est pas rectangle (Cercle circonscrit) - Calcul d'angle (Cosinus d'un angle) - Somme des angles d'un triangle. - Triangles semblables ; triangles isométriques. - Tangente à un cercle, Bissectrice d'un angle. - Caractérisation angulaire du parallélisme - Pyramides et cônes de révolution	- Somme des angles d'un triangle - Angles alterne – interne - Coordonnées géographiques - Bissectrice d'un angle - Démonter qu'un triangle est ou n'est pas rectangle - Calcul d'angle (Cosinus…) **Automatismes** - Calcul d'angles	**Situations** 1- Cosinus d'un angle 2- Utilisation du cosinus 3- Se repérer sur Terre 4- Construction d'un motif à paver 5- Pente d'une route et panneaux de signalisation

- Coordonnées géographiques *Grandeurs et mesures* - Effets d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs, les aires, les angles.	- Triangle rectangle - Résolution d'équations (produit en croix) - Repérage sur un pavé, une sphère...	**Fiches techniques** Cosinus d'un angle Triangles semblables Théorème de Pythagore (Réciproque)
VOLUME		
Espace et géométrie - Développer sa vision dans l'espace - Altitude *Grandeurs et mesures* - Formules donnant le volume (cube – pavé – pyramide – cône – cylindre – prisme) - Effets d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs, les aires, les volumes *Algorithme et programmation* - Écrire, mettre au point et exécuter un programme simple	- Conversions de volume **Automatismes** - Calculs de volume - Conversions de volume	**Situations** **Fiches techniques** Agrandissement / Réduction
DURÉE		
Organisation et gestion de données, fonctions - Proportionnalité (Tableau / quatrième proportionnelle / représentation graphique) *Grandeurs et mesures* - Vitesse moyenne (v = d/t) et calcul de temps (t = d / v) *Nombres et calculs* - Nombres rationnels (positifs ou négatifs) , notion d'opposé. - Fractions, fractions irréductibles, cas particulier des fractions décimales	- Proportionnalité - Calculs de durées / de vitesse / de distances - Fractions - Conversions d'heures **Automatismes** - Calculs de durées - Conversions de durées - Proportionnalité	**Situations** 1- Tarifs parking 2- Triathlon 3- Radar tronçon 4- Chamonix **Fiches techniques** Conversions de durées Fractions (+ et -) Fractions (× et :)

Niveau 3e ***Exemple 1***



Niveau 3e *Exemple 2*

<u>Les angles</u> (5 à 6 semaines)
On y revoit toutes les propriétés sur les angles (dans le triangle, dans les triangles semblables), la caractérisation angulaire du parallélisme (correspondant, alternes/internes) tout ça notamment à partir d'instruments (plusieurs trisecteurs entre autres) ainsi que la trigonométrie, les coordonnées géographiques et les réciproques de Thalès et Pythagore, plus les polygones réguliers vus à travers les angles... et si ça se passe bien et vite angles inscrits, angles au centre avec les amers, construction d'un patron de ballon de foot ...

<u>Les longueurs</u> (6 semaines)
Plus « standard » avec Pythagore, Thalès, trigonométrie principalement, avec des problèmes d'optimisation comme l'aire de baignade avec ligne d'eau de longueur fixe et des calculs de longueurs de fractales simples (de longueur bornée ou de longueur aussi grande que l'on veut avec des grands et petits nombres).
Instruments étudiés : chevillière de cubage, dendromètre, pantographe de bijoutier.
Quelques démonstrations du théorème de Pythagore (qui utilisent les aires, mais il y a principalement des problèmes de triangles superposables et donc un travail sur les longueurs et les angles).
Exercices où il est question de vitesse.
Beaucoup de programmation dans cette grandeur.

<u>Populations</u> (3 semaines)
Statistiques, indicateurs de dispersion et de répartition, les diagrammes et leur pertinence.
Les grands nombres avec rappel de l'écriture scientifique déjà vue en 4ème et les puissances.

<u>Les prix</u> (5 semaines)
Calcul, comparaison : manipulation/ explication de toutes les réductions de "tous les jours", impôts, tableau d'amortissement ...
Programmation.

<u>Cryptographie</u> (2 à 3 semaines)
Puissances (nombre de combinaisons, nombres premiers, nombres de possibilités (arbres entre autres), culture générale (machine de Turing, programmation).

<u>Les volumes</u> (3 à 4 semaines)
Revisite des constructions, des calculs de volumes, travail sur les patrons, travail sur les longueurs, les angles.
Vitesse de remplissage, débits.
Problèmes d'optimisation comme la feuille dont on découpe 4 carrés identiques dans les coins pour former un pavé droit.

<u>Chance</u> (2 à 3 semaines)
Il y a déjà eu du travail fait sur le dénombrement dans cryptographie.
Probabilités, jeux de cartes ...
Situations marquantes : divers jeux à gratter ou situation de la vie de tous les jours (2 feux verts à la suite ...).

Dérapage vers la ***<u>Magie</u>*** (voir site Thérèse Eveilleau avec plusieurs exercices où l'« ordinateur » devine des infos personnelles), travail sur l'explication, calcul littéral.

<u>Histoire des nombres et des opérations</u> (2 semaines)
Avec beaucoup d'activités issues de la brochure *Si les nombres m'étaient contés* de l'IREM de Clermont-Ferrand avec des techniques de calcul digital ou « astuces » pour multiplier (par exemple 2 nombre entre 10 et 20), programmation et calcul littéral.

Plus une ou deux semaines de ***<u>Scratch</u>***, centrées sur des projets.

6. Histoire

En parcourant l'histoire des civilisations et un certain nombre de traités de mathématiques, on réalise que les problèmes de prix y sont présents, et que nombre d'entre eux sont toujours actuels : calcul du prix de marchandises, calcul de taxes, prêts et emprunts, conversions de monnaies, répartition des bénéfices dans des associations, héritages… Ces problèmes font intervenir constamment des fractions ; donc les soumettre à nos élèves peut être un bon moyen pour les faire calculer avec des fractions, et qu'ils mesurent l'écart avec nos pratiques actuelles. Les algorithmes sont très présents dans les méthodes utilisées et ce peut être un lieu pour travailler la programmation. Dans le matériau que nous vous proposons et dans celui qu'il reste à explorer, il y a aussi matière à des travaux interdisciplinaires.

Nous avons plus particulièrement regardé les mathématiques de Mésopotamie, de Chine, des pays arabes, et des manuels du 19^{e} siècle, et avons indiqué quelques pistes pour l'Égypte, l'Inde et le Moyen Age occidental.

Quant aux *Elémens d'Algèbre* de Clairaut, ils nous semblent dans leur démarche tout aussi intéressants que le sont ses *Eléments de Géométrie*, et ils peuvent, dans leur esprit, constituer un guide pour un apprentissage de l'algèbre et du calcul littéral qui ait un sens.

Les *prix* en Mésopotamie

Les marchands Assyriens (2000 av. J.-C.)

Exploitant la position stratégique de leur cité-État les habitants d'Aššur exportaient étain et étoffes en rapportant en retour or et argent. Ce commerce était favorisé par des accords et des conventions passés avec les princes locaux. Les Assyriens s'installèrent sur le plateau anatolien, à plus d'un millier de kilomètres de chez eux et y organisèrent des comptoirs commerciaux. Ils investirent les importants bénéfices réalisés dans les échanges à longue distance dans toutes sortes de transactions et d'associations à court ou à long terme.

Les créances, très nombreuses, concernaient des prêts en or, argent, cuivre ou plus rarement en céréales ; elles résultaient de simples prêts ou plus souvent de vente à crédit de marchandises. Un tel document était conservé par le créancier jusqu'au remboursement de la dette. On trouve aussi des listes de dépenses, des contrats d'embauche du personnel de la caravane, de transport ou de dépôts de marchandises, contrats d'investissements, d'association, de clôture de comptes, contrats d'achat de biens immobiliers et d'esclaves. Ces textes précisent notamment l'objet de la vente, le prix versé, diverses clauses protégeant l'acheteur en cas de revendication, un éventuel droit de rachat pour le vendeur.

Le commerce caravanier à longue distance

Les dépenses des caravanes étaient principalement les fourrages, les salaires des conducteurs d'âne et les taxes diverses. Voici un tableau des taxes.

Quelle taxe ?	Où ?	À quelle institution ?	Combien ?
Taxe d'exportation *(waṣītum)*	Aššur	Hôtel de Ville	1/120 de la valeur de la caravane en étain (*awītum*)
Taxe douanière *(dātum)*	*En route*	Autorités locales	10 % de la valeur de la caravane en étain (*awītum*)
Taxe personnelle (*qaqqadātum*)	*En route*	Autorités locales	10-15 sicles d'étain par personne

Taxe d'importation (*nishatum*)	Kaniš	Palais local	3 % sur l'étain et 5 % sur les textiles
« Dîme » (*išrātum*)	Kaniš	Palais local	Achat de 10 % des textiles à un prix avantageux
Taxe de transport (*šaddu'atum*)	Kaniš	Autorités du comptoir de commerce assyrien	1/60 de la valeur de l'or + de l'argent en route pour Aššur
Taxe d'importation (*nishatum*)	Aššur	Hôtel de Ville	4 % des métaux précieux importés

Les monnaies étaient basées sur un système de poids. L'unité était le sicle ou gin. Voici un tableau des monnaies et des poids correspondants.

Système des mesures pondérales			
1 gú (talent)	1 *ma-na* (mine)	1 gín (sicle)	1 še (grain)
60×60	60	1	1/180
≈ 30 kg	≈ 500 g	8,33 g	≈ 0,05 g

On trouve des documents comptables relatant les dépenses de la caravane, la nature des achats, les conditions de vente ainsi que d'éventuels remboursements de dettes.
Pour les prêts la durée est fixée en semaines voire en mois. En voici un exemple.

« Sceau de Katāya, fils d'Abu-šalim, sceau d'Alāhum, fils de Sukkallīya, sceau de Šamaš-bāni, fils de Puzur-Ištar. Alāhum a (en créance) 3 1/3 mines d'argent fin sur Šamaš-bāni. Depuis la semaine (nommée par) Ennam-Anum et Aššur-rē'ī, il payera (l'argent) dans 13 semaines. S'il n'a pas payé, il ajoutera 1 ½ sicle par mine et par mois (en intérêt). »

Différentes garanties pouvaient être également exigées (garant, gage, etc.).
Il existait des associations mettant des capitaux à la disposition de collègues pour engager une opération spécifique au terme de laquelle les partenaires établissaient les comptes, réglaient leurs dettes et répartissaient les profits en parts égales entre eux. D'autres qui, se réunissant en coopération de marchands, investissaient pour une opération pour laquelle ils partageaient bénéfices ou pertes. Une autre méthode consistait à remettre un capital à un marchand réputé s'assurant son exclusivité et le tiers des profits. La durée de ce « contrat » était longue (plusieurs années).
Dans la pratique de leur métier, les marchands assyriens étaient amenés à produire divers types de documents – lettres, contrats, notices comptables – et devaient être capables de pratiquer toutes sortes de calculs pour mener à bien des opérations parfois complexes. Ils devaient connaître les systèmes de mesure en vigueur à Aššur et en Anatolie et réalisaient quotidiennement des conversions pour calculer le prix des marchandises. Les calculs d'intérêts successifs sur les emprunts ou des bénéfices dans les associations commerciales nécessitaient la maîtrise des quatre opérations.

Les éléments du texte précédent sont issus de l'article en ligne de Cécile Michel :
- *La comptabilité des marchands assyriens de Kaniš (XIXe siècle av. J.-C.)* (http://journals.openedition.org/comptabilites/1437)
dans lequel on pourra trouver bon nombre de problèmes intéressants concernant les prix.
On pourra lire aussi un autre article en ligne de Cécile Michel :
- *Calculer chez les marchands Assyriens au début du IIe millénaire av. J.-C.* (http://culturemath.ens.fr/content/calculer-chez-les-marchands-assyriens-au-d%C3%A9but-du-iie-mill%C3%A9naire-av-j-c).

Problèmes d'argent en Mésopotamie : les prêts

Problème 1 [Thureau-Dangin, AO6770, 2-146, p.72]

„En ce moment, prête 1 *kur* à intérêt: en combien d'années (capital et intérêts composés) doivent-ils être égaux?

Toi, en opérant, tu opéreras pour quatre ans. De combien cela est-il moins (lire: plus) que 2 *kur*? Que dois-je poser à ce dont cela dépasse le (capital + intérêts) de trois ans, (qui me donne) ce que, pour (obtenir) 2 *kur* j'ai soustrait (du capital + intérêts) de quatre ans? Cela me donne 2 (mois) [3]) 33′20″: de quatre ans je soustrais 2 (mois) 33′20″, cela me donne les années entières et les jours."

Problème 2 [Thureau-Dangin, VAT8528, 2-218, pp.120-121]

„J'ai prêté à intérêt 10 *kur* de grain, au taux de 1 *maššiktu* pour 1 *kur*. J'ai reçu par jour, pendant une année, une *sûtu* de grain. Celui, auquel j'ai prêté du grain, attendu que le grain que j'ai reçu [2]) ne porte pas intérêt, de combien de grain est-il créancier sur moi?

Pose 50‵, le grain. Pose 10, la *sûtu*. Pose 6‵, l'année. Enfin pose 12′, l'intérêt. Puis porte 12′, l'intérêt, à 50‵, le grain: 10‵. Ajoute 10‵ à 50‵, le grain: 1‶. Que ta tête retienne 1‶. Qu'est l'intérêt de la *sûtu*? Porte 12′, l'intérêt, à 10, la *sûtu*: 2, l'intérêt de la *sûtu*. Dénoue l'inverse de 6‵, l'an[née: 10″]. Porte 10″ à 2, l'intérêt de la *sûtu*: 20″. Ajoute à 2, l'intérêt de la *sûtu*: 2°20″. Fractionne en deux 2°20″ : 1°10″. Porte 1°10″ à 6‵, l'année: 6‵1. [Por]te 6‵1 à 1, que ta tête retient [3]): 6‵1. C'est le grain dont il est créancier sur moi".

Problème 3 [Thureau-Dangin, YBC4669, 11-614, p.210]

„J'ai prêté de l'argent à intérêt au taux de 12 sicles pour 1 mine. A (la fin de) la troisième année, je suis allé recevoir 1 sicle d'argent. Qu'était le capital?

34″43‴20⁗."

1 mine = 60 sicles. Au bout d'1 an 12 sicles d'intérêt

Les moyens d'échanges

Pour les échanges les métaux précieux, or, argent et cuivre servaient d'étalon ; ils circulaient en lingots, le métal le plus employé était l'argent ; les lingots de poids défini étaient de forme ovoïde un peu aplatie, analogue à celle des premières monnaies. Les commerçants d'Assyrie et de Babylonie ont presque inventé la monnaie, car ils ne se sont pas contentés de peser l'argent et l'or employés dans les échanges, ni même de préparer d'avance des lingots d'un poids défini, ils ont taillé les lingots d'or sur un poids différent de celui de l'argent et avec un sicle particulier (8,415 g pour l'or ; 11,22 g pour l'argent) de manière à avoir entre l'or et l'argent un rapport exprimable en nombres entiers facilitant les calculs ; dix sicles d'argent valaient un sicle d'or et le rapport de valeur à poids égal entre l'or et l'argent était fixe : un à 13 1/3. On est bien près de la monnaie et même du bimétallisme moderne avec ces combinaisons. Ce n'est pas tout : la circulation fiduciaire qui, pour nous, a bien plus d'importance que la monnaie, était connue et pratiquée en Mésopotamie. Dès huit cents ans avant l'ère chrétienne, le commerce assyrien connaissait le chèque, rédigé sur tablette d'argile au lieu de l'être sur papier ; on a retrouvé des mandats de paiement tirés d'une ville sur une autre à soixante-seize jours de date ; l'authenticité du tireur est (à défaut de signature que ne comporte pas cette écriture) attestée par témoins, mais le mandat est au porteur. Il est incontestable que le commerce chaldéo-assyrien est l'inventeur de la lettre de change. La cause a dû être la même que celle qui la fit créer de nouveau au Moyen âge, l'insécurité des routes et le danger couru pour de grands transports de numéraire, mais peut-être aussi la facilité donnée pour la multiplication des opérations commerciales.

http://www.cosmovisions.com/Commerce-Mesopotamie.htm

Chine : la place des *prix* dans les *Neufs Chapitres*

Les Neuf Chapitres sur l'art mathématique est un livre anonyme chinois de mathématiques, dont les origines remontent à la dynastie Zhou, et qui fut compilé entre le 2e siècle av. J.-C. et le 1er siècle av. J.-C. au début de la période Han. Il propose une approche des mathématiques qui se focalise sur la recherche de méthodes générales de résolution de problèmes. Chaque chapitre comporte un ensemble de problèmes, suivis de leur solution et d'une explication de la procédure qui a mené à la solution.
L'étude des *Neuf Chapitres* et des commentaires de Liu Hui nous renseignent sur la nature même de la science chinoise. Pendant longtemps, elle fut en effet réputée n'être qu'un ensemble de « recettes » n'engageant aucune réflexion générale et abstraite sur le monde. Les travaux récents de Karine Chemla sur les *Neuf Chapitres* ouvrent de nouvelles perspectives. La lecture qu'elle en propose suggère en effet que l'abstraction n'est pas absente de la science chinoise, mais qu'elle se présente sous une forme radicalement différente de celle qui a pu être développée en Occident. Elle revêt un aspect algorithmique [voir *Algorithmique et programmation au cycle 4*].
On trouve des problèmes de prix dans 5 des 9 chapitres. Voici quelques exemples de textes d'exercices ainsi que l'optique dans lesquels on les trouve pour chaque chapitre. Pour information, la monnaie est le sapèque.

1. **Dans le chapitre 2 (*Petit mil et grains décortiqués*)**, les prix sont utilisés pour des divisions ou de la proportionnalité.

   2.32 *Supposons que l'on paie 160 sapèques pour acheter 18 lingpi (ce sont des briques). On demande combien vaut chacune.*
   Réponse : Une lingpi vaut8 sapèques 8/9 de sapèques.

   2.38 *Supposons que l'on paye 576 sapèques pour acheter 78 bambous. Si on veut, en fonction du fait qu'ils sont grands ou petits, en calculer les prix standards (LÜ), on demande combien coûte chaque sorte.*
   Réponse : 48 bambous d'une sorte valent chacun 7 sapèques ; 30 de l'autre sorte valent chacun 8 sapèques.

2. **Dans le chapitre 3 (*Parts pondérées en fonction des degrés*)**, les prix sont utilisés pour des partages équitables ou des proportions.

   3.3 *Supposons qu'alors que Jia possède 560 sapèques, Yi 350 sapèques et Bing 180 sapèques, les trois personnes, passant ensemble une douane, paient en tout une taxe douanière de 100 sapèques. Si elles veulent payer en pondérant en fonction des quantités (SHU) de sapèques, on demande combien chacune*.
   Réponse : Jia paie 51 sapèques 41/109 de sapèque ; Yi paie 32 sapèques 12/109 de sapèque ; Bing paie 16 sapèques 56/109 de sapèque.

   3.19 *Supposons qu'un salarié touche pour un an une somme de 2500 sapèques. Si l'on suppose qu'il en touche dans un premier temps 1200, on demande combien il doit travailler de jours*.
   Réponse : 169 jours 23/25 de jour.

3. **Dans le chapitre 6 (*Paiement de l'impôt*)**, il s'agit de calcul de proportions.

   6.7 *Supposons qu'on engage un salarié ; s'il parcourt 100 Li en portant 2 Hu de sel, on lui donne 40 sapèques. Si maintenant il parcourt 80 Li en portant 1 Hu 7 dou 3 sheng un tiers de Sheng de sel, on demande combien on lui donne de sapèque*.

Réponse : 27 sapèques 11/15 de sapèque.

6.15 *Supposons qu'une personne possédant 12 Jin d'or passe une douane et que la douane le taxe, en lui prenant 1/10. Si maintenant la douane prend 2 Jin d'or, et compense avec 5000 sapèques, on demande combien de sapèques vaut 1 Jin d'or.*
Réponse : 6250.

6.18 *Supposons que 5 personnes partagent 5 sapèques, en faisant en sorte que ce qu'obtiennent les 2 supérieurs soit égal à ce qu'obtiennent les 3 inférieurs. On demande combien obtient chacun.*
Réponse : Jia obtient 1 sapèque 2/6 de sapèque, Yi obtient 1 sapèque 1/6 de sapèque, Bing obtient 1 sapèque, Ding obtient 5/6 de sapèque, Wu obtient 4/6 de sapèque.

4. **Dans le chapitre 7 (*Excédent et déficit*)**, il s'agit d'équations.

7.1 *Supposons que l'on ait un achat en commun de quelque chose, et que, si chacun paie 8, il y ait 3 d'excédent, si chacun paie 7, il y ait 4 de déficit. On demande combien valent respectivement la quantité (Shu) de personnes et le prix de la chose.*
Réponse : 7 personnes. Le prix de la chose est 53.

7.7 *Supposons que l'on ait un achat en commun de chiens, et que, si chacun paie 5, il y ait 90 de déficit, si chacun paie 50, il y ait juste assez. On demande combien valent respectivement la quantité (Shu) de personnes et le prix des chiens.*
Réponse : 2 personnes. Le prix de la chose est 100.

7.19 *Supposons qu'une personne détenant de l'argent se rende à Shu pour faire du commerce avec un profit de 3 pour 10. Au premier retour, elle reprend 14000 ; au suivant, 13000 ; au suivant, 12000 ; au suivant 11000 et au dernier, 10000. L'argent qu'elle a repris en tout à ces 5 retours vient à bout de l'ensemble du capital et du profit. On demande combien valent respectivement l'argent qu'elle détenait à l'origine et les profits.*
Réponse : Le capital valait 30 468 sapèques 84 876/371 293 de sapèque ; les profits 29 531 sapèques 286 417/371 293 de sapèque.

5. **Dans le chapitre 8 (*Fangcheng*)**, il s'agit de systèmes d'équations.

8.7 *Supposons que 5 bœufs et 2 moutons valent 10 Liang d'or, que 2 bœufs et 5 moutons valent 8 Liang d'or. On demande combien d'or valent respectivement un bœuf et un mouton.*
Réponse : un bœuf vaut 1 Liang 13/21 de Liang d'or ; un mouton vaut 20/21 de Liang d'or.

8.17 *Supposons que 5 moutons, 4 chiens, 3 poulets et 2 lapins valent 1496 sapèques ; 4 moutons, 2 chiens, 6 poulets et 3 lapins valent 1175 sapèques ; 3 moutons, 1 chien, 7 poulets et 5 lapins valent 958 sapèques ; 2 moutons, 3 chiens, 5 poulets et 1 lapin valent 861 sapèques. On demande combien valent les prix respectivement d'un mouton, d'un chien, d'un poulet et d'un lapin.*
Réponse : Le prix d'un mouton vaut 177 ; le prix d'un chien vaut 121 ; le prix d'un poulet vaut 23 ; le prix d'un lapin vaut 29.

Les *prix* dans les mathématiques arabes

1. L'algèbre

Tout d'abord, une chose remarquable : dans les mathématiques arabes, l'algèbre utilise la grandeur *prix* pour désigner ses objets. Voici ce que dit Al-Khwarizmi, son créateur : *« J'ai trouvé que les nombres dont on a besoin, dans le calcul par le jabr et la muqābala sont de trois sortes qui sont les racines, les biens et le nombre seul »*. La racine, c'est la racine du *māl* qui est le bien (au sens de la fortune). Quant au nombre il prend le nom de *dirham* qui était la monnaie d'argent de l'empire musulman, dès que le nombre est précisé. Voici l'énoncé d'une des formes canonique de l'équation du second degré ($ax^2 + ax = b$) chez Al-Khwarizmi :
« Quant aux biens et aux racines qui sont égaux aux nombres, c'est comme lorsque tu dis : un bien et dix de ses racines égale trente neuf dirhams » [Djebbar, 2005].
Dans les problèmes à plusieurs inconnues on trouvera les désignations : *chose, dirham, dinar*, pour signifier x, y, z. On retrouve aussi les deux monnaies, *dirham* et *dinar*, dans la dénomination de méthodes de résolution arithmétiques de problèmes : procédé du dinar et du dirham.

2. Les problèmes d'héritage

Ensuite il faut noter l'importance des problèmes d'héritage et de testaments dans les mathématiques arabes : près de la moitié du célèbre livre d'Al-Khwarizmi *Livre abrégé sur le calcul par l'algèbre et la muqābala* est concerné par ce type de problèmes. Mais des auteurs y consacrent des ouvrages entiers qui font partie d'un corpus appelé la science des héritages [2, p.110-112]. Ces problèmes de la vie ont souvent servi aussi à la construction de problèmes artificiels en particulier dans les livres d'algèbre.
Un article intéressant d'Ezzaïm Laabid en ligne :
De la religion à l'algèbre : problèmes de partages successoraux selon les lois islamiques
(http://archimede.mat.ulaval.ca/amq/ancien/archives/1989/4/1989-4-part12.pdf)

3. La vie commerciale et sociale

Dans le monde arabe les transactions sont importantes qu'il s'agisse du commerce ou de la vie sociale, et sont soumises à des règles encadrées par la religion. Le calcul est indispensable pour l'achat et la vente de produits et de services, les salaires, la conversion des métaux et monnaies, le change (licite et illicite), les bénéfices, les profits et pertes, les impôts, l'aumône légale, les donations, les héritages, les indemnisations, Les problèmes étudiés sont soit concrets, soit pseudo-concrets [1, Djebbar].

4. Les méthodes pour résoudre ces problèmes

Les méthodes de résolution données sont nombreuses. On peut les séparer en deux catégories : celles des algébristes, et celles des calculateurs. Pour la méthode par le calcul les fondements sont : rapport, produit, division, et le principe, celui des « quatre grandeurs proportionnelles ».
Les fondements de cet art qui est appelé le calcul des transactions, sont trois *: le rapport, le produit et la division /…/ Les problèmes de transaction se ramènent tous à un seul principe, et ce sont les quatre nombres proportionnels, trois d'entre eux étant donnés et un l'inconnu cherché. Les trois sont le prix, le produit, ou ce qui fait fonction, et une grandeur donnée du genre du prix ou du genre du produit. Ce qui est cherché est la part de l'autre genre de la grandeur donnée* (Ibn al-Haytham) [1, Djebbar].
Le partage proportionnel (partage de quelque chose en parts inégales) est ramené à une sorte de division pour laquelle les mathématiciens arabes proposent plusieurs algorithmes, tout en

précisant son lien au principe des 4 nombres proportionnels : « *Sache que ce type de division fait partie des applications des quatre nombres proportionnels, car le rapport de chaque partie de ce partage à la somme de ces parties est comme le rapport de chaque partie du dividende au diviseur* (Ibn Ghazi) [1, Laabid].
Certains auteurs comme Al-Hububi donnent pour un même problème jusqu'à 6 méthodes différentes (procédés par l'algèbre, du dinar et du dirham, du Bab ou du remplissage, des lignes, des surfaces) [3, Djebbar p.17-20].

5. Des exemples

Testaments, successions, héritages

3 problèmes d'al-Hufi [2, Laabid]

1) *Une femme décédée laisse son mari <1/2> et sa sœur consanguine <1/2> et a, en outre, légué le tiers de son héritage au fils de son oncle.*
(Solution : le légataire : 1, le mari : 1 et la sœur : 1).

2) *Une femme décédée laisse son mari <1/4>, ses trois fils <1-1/4> ; et elle a, en outre, légué à son frère le quart et à ses trois sœurs le cinquième de son héritage. Les héritiers contestent l'excès au tiers pour tous les légataires.*
(Solution : les légataires : 54 parts, le frère : 30, chaque sœur : 8, le mari : 27, chaque fils : 27).

3) *Un homme décédé laisse quatre fils et lègue une portion de l'héritage qui est égale à la part de l'un de ses fils moins un tiers de ce qui reste du tiers <de l'héritage après en avoir prélevé la part>.*
(Solution : le bien : 24, la part d'un fils : 5).

1 problème d'al-Hububi [3, Djebbar, p.17]

4) *Un homme lègue à une personne l'équivalent de la part de l'un de ses fils et à une autre le tiers de ce qui reste du tiers après sa part, puis il meurt et laisse trois fils.*
(Solution : le bien est 33 et la part 8).

2 problèmes d'al-Hufi [1, Laabid, p.321-324]

5) *Une femme a laissé après sa mort, son mari <1/2>, sa mère <1/6>, sa sœur germaine <1/2>, sa sœur consanguine <1/6>, sa sœur utérine <1/6>. Et une succession constituée d'un esclave et de 15 dinars. La sœur germaine a pris pour sa quote-part l'esclave et a remboursé pour les autres héritiers 5 dinars. (Il s'agit de calculer le montant global de la succession, et la valeur de l'esclave, la quote part de chaque héritier).*
(Solution : montant global : 30, valeur de l'esclave : 15, la sœur germaine : 10, le mari : 10, la sœur consanguine et la sœur utérine : 3+1/3).

6) Même problème que 2) résolu avec la technique du partage proportionnel réitéré 3 fois en utilisant l'algorithme d'Ibn al-Banna (p.317).

Associations,compagnies

2 problèmes d'Ibn al-Banna [1, Souissi, p.308], résolus avec son algorithme

7) *Une personne doit de l'argent à 5 créanciers dans les rapports respectifs de 12, 6, 5, 4 et 3. La dette totale est de 200 dinars. Calculer la somme due à chaque créancier.*
(Solution : 80, 40, 33, 26, 20).

8) *2 associés ont des mises dans le rapport 14 à 7. Le rapport est égal à 100 dinars.* (Solution : 66 2/3, 33 1/3).

2 problèmes d'al Qalasadi et Ibn al-Banna [1, Laabid, p.320-321], résolus chacun avec l'algorithme de l'auteur

9) *Trois hommes (Zayd, cAmr, Bakr) se sont associés dans un négoce ; le premier a misé 22 dinars, le second a misé 19 dinars et le troisième a misé 7 dinars. Ils ont eu un bénéfice de 12 dinars.*
(Solution : Zayd : 5+4/8, cAmr : 4+6/8, Bakr : 1+6/8).

10) *Deux hommes possèdent 8 pains, le premier en a 5 et le second en a 3. Au moment de déjeuner, un troisième homme s'est joint à eux et ils ont mangé ensemble les 8 pains. Le troisième homme leur a payé 8 dirhams. L'homme possédant 5 pains a proposé que les dirhams doivent être partagés selon le nombre de pains que possédait chacun, mais celui qui n'avait que 3 pains a refusé cette solution.* (Il s'agit de les aider à partager les 8 dirhams)
(Solution : 7 dirhams et 1 dirham ; la part de pain que chacun donne au troisième homme est : 2+1/3, et 1/3 car chacun a mangé 2+2/3 des pains, donc les 8 dirhams doivent être partagés proportionnellement à ces parts).

Problèmes artificiels (que l'on retrouve dans d'autres traditions mathématiques) [1, Djebbar]

Problème des volatiles

11) *Si on donne cent dirhams et que l'on dise d'acheter cent volatiles de trois espèces différentes : oies, poulets et étourneaux, les oies à 5 dirhams l'unité », les étourneaux à 1 dirham les 20 et les poulets chacun à 1 dirham.* (Abu Kamil)

Problème de rencontre

12) *Si l'on dit : quatre personnes se rencontrent. La première dit à la seconde, si tu me donnes un dirham, j'aurai deux fois* ce qui te reste ; et le second dit au troisième : *si tu me donnes deux dirhams, j'aurai* trois fois ce qui te reste ; et le troisième dit au quatrième : *si tu me donnes trois dirhams, j'aurai quatre fois ce qui te reste ; et le quatrième dit au premier : si tu me donnes quatre dirhams, j'aurai cinq fois ce qui te reste. Combien a chacun d'eux ?* (Abu Kamil)

Problème de bénéfices

13) *Un homme avait avec lui un bien. Il a commercé avec et il a gagné son équivalent ; il a fait la charité pour dix dirhams, puis il a commercé et il a gagné l'équivalent de ce qu'il lui est resté ; il a fait la charité pour dix dirhams ; puis il a commercé une troisième fois avec ce qu'il lui est resté et il a gagné l'équivalent ; il a fait la charité pour dix dirhams. Il ne lui est alors rien resté. De combien était son capital ?* (Abu Kamil)

Problème de l'aumône

14) *Si on te dit : combien vaut l'aumône légale pour cent dinars pendant dix années consécutives ?* (Ibn al-Yasamin)

Dans [4], on pourra trouver 11 problèmes de bénéfices chez des auteurs divers, et les méthodes pour calculer l'aumône légale chez 4 auteurs différents.

Documents consultés

[1] *Commerce et Mathématiques du Moyen Age à la Renaissance, autour de la méditerranée*, Actes du Colloque International du Centre International d'Histoire des Sciences Occitanes, Beaumont de Lomagne, 13-16 mai 1999, Éditions du C.I.H.S.O., Université Toulouse II, 2001.

- SOUISSI Mohamed, *Application des proportions - partages proportionnels, problèmes d'arithmétique commerciale – règle de société, méthode de double fausse position*, p.301-314.
- LAABID Ezzaïm, *Le partage proportionnel* dans la tradition mathématique maghrébine, p.315-326.
- DJEBBAR Ahmed, *Les transactions dans les mathématiques arabes : classification, résolution et transmission*, p.327-344.

[2] BARBIN Évelyne & MALTRET Jean-Louis, *Les mathématiques méditerranéennes d'une rive à l'autre,* Ellipses, 2015.

- LAABID Ezzaïm, *Les testaments dans les mathématiques arabo-islamiques : entre l'artificialité des problèmes et le rôle réel des mathématiques,* p.109-124.

[3] DJEBBAR Ahmed, *Matériaux pour l'étude de la tradition algébrique arabe (IX*^{e}*-XV*^{e} *s.),* CII Epistémologie et histoire des mathématiques, 1996.

[4] DJEBBAR Ahmed, *Matériaux pour l'étude des problèmes récréatifs de la tradition algébrique arabe (IX*^{e}*-XV*^{e} *s.),* CII Epistémologie et histoire des mathématiques, Université d'été de Nantes, 1997.

Clairaut : apprendre l'algèbre en résolvant des problèmes sur les grandeurs

Nous pouvons trouver dans les *Eléments d'Algèbre* de Clairaut [Clairaut] une démarche proche de celle que nous proposons de pratiquer (voir partie 2, Interactions) : découvrir l'algèbre à partir de la résolution de problèmes sur les grandeurs, en commençant par des problèmes sur les *prix*, avec des données numériques, en montrant la nécessité de passer à l'algèbre, puis l'intérêt de passer au calcul littéral. L'ouvrage de Clairaut est vraiment très intéressant à lire : on peut facilement le télécharger sur la Toile, par exemple : http://books.google.fr/books?id=kbv_Vn_py9YC&printsec=frontcover&hl=fr#v=onepage&q&f=false (4^{e} édition de 1768). Nous vous proposons le début de la préface où Clairaut expose sa démarche, et les problèmes sur les prix sur lesquels il s'appuie pour une acquisition progressive des éléments de l'algèbre.

Préface des *Eléments d'Algèbre* de Clairaut (début)

Je me suis proposé de suivre dans cet Ouvrage, la même méthode que dans mes Eléments de Géométrie : j'ai tâché d'y donner les règles de l'Algèbre dans un ordre que les Inventeurs eussent pu suivre. Nulle vérité n'y est présentée sous la forme de théorèmes. Toutes, au contraire, semblent être découvertes en s'exerçant sur les Problèmes que le besoin ou la curiosité ont fait entreprendre de résoudre.
Des Problèmes utiles au commerce, comme ceux où il est question de partager des sommes entre différentes personnes à raison de leurs mises ou de quelques conventions faites entre elles, des règles d'alliage, &c. sont les Problèmes que je suppose avoir occupé les premiers Algébristes.

Je commence par donner la solution d'un des plus simples de ces Problèmes, telle qu'on la peut trouver, sans avoir aucune teinture de l'Algèbre. Il est aisé de reconnaitre dans cette solution, que si la mémoire suffit à retenir tous les raisonnements par lesquels il faut passer pour y arriver, c'est que la suite de ces raisonnements n'est pas bien longue ; & l'on voit en même-temps que, lorsqu'on s'élève à des Problèmes qui en demandent une plus grande, il faut chercher à les écrire d'une manière fort abrégée, il faut imaginer quelques signes, à l'aide desquels on puisse exprimer l'état où la difficulté est réduite à chaque pas qu'on fait pour la résoudre. Cette manière d'écrire les questions, est l'Algèbre que je fais, pour ainsi dire, inventer au Lecteur.
Pour aller toujours du plus simple au plus composé, je ne propose d`abord que des questions numériques parce que ce sont celles qui fixent le plus l'esprit des Commençants. Après en avoir résolu plusieurs qui ne diffèrent les unes des autres que par les nombres donnés dans l'énoncé, on s'aperçoit aisément qu'il y a toujours une partie de l'opération qui se trouve commune, dans chaque résolution, et qu'il serait à souhaiter de ne faire qu'une feule fois : je saisis cette occasion d'expliquer la manière de résoudre généralement les Problèmes, en employant, au lieu des nombres donnés par les conditions, des lettres qui expriment toutes sortes de grandeurs : & j'enseigne ensuite à tirer des solutions générales les solutions particulières, au moyen de la substitution des nombres à la place des lettres /…/

Extraits de la partie 1 (106 pages) : **Résolution des équations du premier degré**

8 problèmes : *Prix* : 1, 2, 3, 8 ; *Durées* : 4, 5, 7 ; *Volumes* : 6, 7, 8.

PREMIERE PARTIE.

De la Méthode Algébrique d'exprimer les Problêmes par des Equations, & de la réſolution des Equations du premier degré.

PARMI les différens Problêmes dont les premiers Mathématiciens qui ont eu le nom d'Algébriſtes ſe ſont occupés, je choiſis celui-ci, comme un des plus propres à faire voir comment ils ſont parvenus à former la Science qu'on nomme Algébre ou Analyſe.

Problème 1 : partage d'une somme en trois

Partager une ſomme, par exemple, 890 ₶ à trois perſonnes, en ſorte que la premiere ait 180 ₶ de plus que la ſeconde, & la ſeconde, 115 ₶ de plus que la troiſieme.

Problème 2 : la société des 3 marchands

Trois Marchands font une ſociété, le premier fournit 17000 ₶, le ſecond 13000 ₶, le troiſieme 10000; comme ils ont beſoin de quelqu'un qui ſe donne les ſoins que demande leur commerce, celui qui n'a mis que 10000 ₶ ſe charge de toutes les affaires, à condition qu'il tirera de plus que les autres 3 pour 100 de tout le gain qui ſe fera : il arrive que ce gain monte à 100000 ₶ : on demande ce qu'il faut qu'ils en ayent chacun.

Problème 3 : le salaire des ouvriers

Pour payer un certain nombre d'Ouvriers ſur le pied de 3 ₶ chacun, il manque 8 ₶ à un homme qui les fait travailler ; mais en ne leur donnant à chacun que 2 ₶, il lui reſte 3 ₶ : on demande combien cet homme a d'argent.

Problème 1 : partage d'une somme d'argent (pages 2 à 8)
- Résolution sans algèbre (I)
- Méthode algébrique d'exprimer le problème (II) : introduction des signes + et =, des termes équation, résoudre, inconnues (et de leurs définitions).
- Résolution de l'équation (III) : introduction du signe - .
- Autre solution (IV) : choix d'une autre inconnue, mise en équation, résolution (travail de la technique).

- Même problème avec d'autres données (V) : partage en 4, choix de l'inconnue, mise en équation, résolution (travail de la technique).
- Nouvelle forme du problème (VI) : partage en 2 avec des fractions : choix de l'inconnue, mise en équation, résolution (travail de la technique avec des fractions), introduction du signe ×.
- Conclusion : travailler la technique en variant l'énoncé.

Les Commençans pourront s'exercer à varier encore davantage l'énoncé du Problême précédent, & à le réſoudre dans les différens cas qu'ils imagineront, ils ſeront récompenſés de leurs peines par la facilité qu'ils acquerront. Afin de les aider davantage, je vais donner un autre Problême qui a encore beaucoup de rapport avec le précédent.

Problème 2 : la société des 3 marchands (sommes investies, répartition des bénéfices) (pages 8-9)
- Solution du problème (VII) : choix d'une autre inconnue, mise en équation, résolution (travail de la technique), additions de fractions de l'inconnue, calcul numérique avec des fractions (pour calculer la part des 2 autres à partir de la part trouvée pour l'un d'eux).

Bilan (institutionnalisation, et rencontre d'autres techniques) (pages 9-17)

- Les deux parties de la solution d'un problème (VIII) : mise en équation, résolution de l'équation.
- Équations et problèmes du premier degré (IX) : définitions.

On n'a pû parvenir à la réſolution de ces équations qu'après s'être exercé long-tems aux équations du premier degré. Nous allons donc chercher toutes les regles que demandent celles-ci.

- Les termes d'une équation (X)
- Règle de transposition des termes dans une équation (XI)
- Membre d'une équation (XII)
- Réduction des termes (XIII)
- Forme canonique ax=b (XIV) : faire évanouir le multiplicateur qui affecte l'inconnue.
- Faire disparaître le diviseur qui affecte l'inconnue (XV)
- Exemples d'équations résolues par les principes précédents (XVI) (travail de la technique)
- Suite, mais avec des fractions et la méthode de les faire évanouir (XVII).
- Pareil avec une autre méthode (XVIII)

- (XIX) page 17 :

XIX.

Pour ſuivre le plus vraiſemblablement qu'il eſt poſſible l'ordre des inventeurs, nous ne nous arrêterons pas maintenant à approfondir davantage la méthode de dégager l'inconnue, mais nous reviendrons à la maniere de mettre les Problêmes en équations. La réſolution des équations a pû, indépendamment des Problêmes auxquels elles ont rapport, occuper les Algébriſtes lorſque cette Science a été avancée à un certain point ; mais il eſt à préſumer que ceux qui en ont jetté les fondemens, n'ont examiné les équations qu'à l'occaſion des Problêmes dont elles étoient, pour ainſi dire, le dénouement. D'ailleurs il ſe trouve quelquefois dans les équations des complications dont on ne ſe ſeroit pas douté, ſi la nature des Problêmes qu'on cherchoit ne les avoit amenées.

Nous ne pouvons rien dire ici de plus clair, ſur la maniere générale de mettre les Problêmes en équations, que ce que nous avons dit, art. VIII ; mais nous allons donner pluſieurs exemples qui accoutumeront les Commençans à cette recherche.

Problème 3 : le salaire des ouvriers (somme à répartir, à partir de deux essais) (pages 17-20)
Introduction de la barre de division « extensible »

- Remarque à partir de l'équation précédente (x - 8/2 = x + 3/3) sur la notion de terme, et des erreurs à ne pas faire (XX)
- Autre solution du problème (XXI).

Indications sur la suite

Problème 4 : les courriers (heure de la rencontre) (pages 20-30)
- Résolution du problème (XXII) : expression des proportions en algèbre
- Étude du même problème complexifié (XXIII)
- Expression littérale de l'équation (XXIV) : lettres a, b, c… pour les connues, x, y, z… pour les inconnues ; écriture ab pour la multiplication ; généralisation des règles du calcul sur les fractions (pages 24-30)
- Applications numériques de la formule générale (XXV)

Problème 5 : les 3 ouvriers (temps pour réaliser un ouvrage) (pages 30-34)
- Résolution littérale du problème (XXVI)
- Exemple en nombres (XXVII) : application numérique
- Autre exemple en nombre en transposant le problème à 3 sources (Débits) (XXVIII)

Bilan (institutionnalisation) (pages 34 et suivantes)
- Les règles subsistent pour les équations littérales, et font découvrir des opérations de l'Algèbre (XXIX) : exemple 1 de résolution d'équations littérales
- Exemple 2 de résolution d'équations littérales (XXX)
- Bilan (XXXI) : réduction des termes à leur plus simple expression, dénomination termes positifs, termes négatifs
- L'addition algébrique (XXXII)
- Ajouter une quantité négative (XXXIII)
- La soustraction algébrique (XXXIV)
- On augmente une quantité lorsqu'on soustrait une quantité négative (XXXV)
- Exemple 3 de résolution d'équations littérales (XXXVI)
- Bilan (XXXVII) : multiplication répétée, puissance d'une lettre, exposant, coefficient.
- Découverte progressive des règles du calcul littéral, puis de celles du calcul avec des quantités négatives.

Les *prix* dans les manuels de cours complémentaire entre 1850 et 1900

L'étude de manuels anciens, ici de la deuxième moitié du 19e siècle, permet de prendre un recul critique sur les contenus d'enseignement actuels. En regardant ces manuels d'arithmétique on voit que les thématiques liées aux *prix* sont très présentes et recoupent très largement ce que nous avons vu près de mille ans plus tôt dans les mathématiques arabes, jusqu'aux problèmes de charité comme en témoigne le dernier exercice du premier manuel. Les problèmes sont parfois artificiels, mais la plupart d'entre eux traitent de problèmes qui nous concernent toujours : change, sociétés et partages des bénéfices, placements, assurances, salaires, valeur d'un bien… Comme aujourd'hui, proportionnalité, division, pourcentages sont les notions majoritairement utilisées. Mais on voit bien à travers les problèmes de conversions le rôle important qu'avait le calcul sur les fractions, et qu'il n'a plus actuellement. De même pour la méthode de fausse position, dont l'auteur du troisième manuel étudié dénonce l'usage pour inciter à l'utilisation de l'algèbre.

Leçons d'arithmétique (P.L. Cirodde, Éd. Hachette, 1850)

> *P116. XXVII.* Un négociant doit payer 3600 roubles à Pétersbourg et le change est à 44 fr pour 10 roubles. D'un autre côté, le change est à 56 florins ¾ d'Amsterdam pour

120 fr, à 35 florins ¼ d'Amsterdam pour 40 marcs de Hambourg, et à 148 marcs de Hambourg pour 64 roubles. Doit-il prendre directement un effet sur Pétersbourg, ou prendre sur Amsterdam pour l'échanger successivement contre du papier sur Hambourg et Pétersbourg ?

P214. n°282. Multiplication de nombres complexes (nombres concrets composés de différentes unités dépendantes les unes des autres suivant une loi quelconque autre que la loi décimale).
Multiplication de 12 livres tournois 13 s 10 deniers par 535 toises 5 pieds 8 lignes et 5/6 de ligne.
La toise se subdivisait en 6 pieds, le pied en 12 pouces et le pouce en 12 lignes.
La livre tournois se subdivisait en 20 sous et le sou en 12 deniers.

P219. n°286. Diviser 14 livres 5 sous 5 deniers par 5 toises 4 pieds 3 pouces

P228. LXVIII. Problèmes. Trois joueurs qui s'étaient associés ont fait un bénéfice de 30 louis. Le premier avait mis 20 louis, le second 60, et le troisième 70. Combien revient-il à chacun ?

P228. LXIX. Trois négociants s'étant associés ont fait un bénéfice de 4750 fr. On propose de le répartir entre eux, sachant que le premier avait fourni 2000 fr pendant 5 mois, le second 3000 fr pendant 15 mois, et le troisième 4000 fr pendant un mois.
On admet que les gains ou les pertes des associés sont proportionnels à leur mise et au temps pendant lesquels ces mises sont restées dans la société.

P125. XLV. Une personne charitable rencontre des pauvres auxquels elle distribue le quart de l'argent qu'elle a dans sa bourse, moins ¼ de franc : Dieu, pour la récompenser, double ce qui lui reste. Alors elle entre dans une église, et dépose dans un tronc le tiers de ce qu'elle a dans sa bourse, plus 1/3 de franc ; Dieu triple ce qui lui reste. Elle se rend ensuite dans une prison, où elle distribue la moitié de ce qu'elle a, plus ½ franc ; Dieu quadruple ce qui lui reste ; et elle rentre chez elle avec 100 francs. Combien avait-elle en sortant ?

Cours de mathématiques à l'usage des écoles primaires supérieures et des classes de lettres, des séminaires, des collèges et des lycées. Traité d'arithmétique (Dumouchel-Dupuis, 1863, Ed : Dezobry, Tandou)

P45. ***Problèmes sur la division des nombres entiers***
Ex n° 305. On demande de partager 3150 fr entre deux personnes, de manière que la première ait autant de pièces de 5 fr que la seconde de pièces de 2 fr.

P164.***Problèmes sur la règle de trois simple***
Ex n° 1166. 4^{l},5 de vin ont coûté 3^{f},60. Combien aurait-on de litres du même vin pour 6^{f},40 ?

P166. ***Problèmes sur la règle de trois composée***
Ex n° 1181. On a payé 360 francs à 15 ouvriers qui ont travaillé 8 h par jour pendant 9 jours. Combien aurait-on payé à 20 ouvriers qui travailleraient 10 h par jour pendant 12 jours ?

P171. ***Problèmes sur la règle d'intérêt simple***
Ex n° 1205. Est-il plus avantageux de placer 2400f. à 5% que d'en placer le tiers à 6% et le reste à 4 1/2 % ?

P172. ***Règles d'intérêt composé***
Ex n° 1209. Une personne place 500 f. à 4%, au commencement de chaque année, pendant 4 ans. Quel capital aura-t-elle après ces 4 années ?

P175. ***Problèmes sur les assurances***
Ex n° 1227. La cargaison d'un vaisseau vaut 450 000 fr, elle est assurée à 8% ; 1/12 est avarié. Que perd la compagnie d'assurance ?

P182. ***Problèmes sur la règle de société***
Ex n° 1271. Les mises de trois associés sont 300 fr, 600 fr et 1200 fr. On demande de partager le bénéfice 350 fr proportionnellement à leur mise.
Ex n° 1274. Une personne commence une entreprise avec 2000 fr ; 5 mois après elle prend un associé qui apporte 3000 fr. Au bout d'un an il y a un bénéfice égal à 3000 fr. Que revient-il à chacun des associés ?

P197. ***Problèmes divers***
Ex n° 1318. Un avare en comptant ses pièces de 20 francs 3 à 3, 4 à 4 et 5 à 5, trouve toujours qu'il en reste une, mais en les comptant de 11 à 11 il trouve qu'il n'en reste pas ; on demande combien il en a, sachant qu'il en a 150 au plus.
Ex n° 1319. On demande de payer 95 francs avec 10 pièces de monnaie, en ne prenant que des pièces de 5 francs et de 20 francs.

P211-221. ***Anciennes mesures de France. Principales mesures étrangères***
P211.n°395. L'ancienne unité de monnaie est la livre tournois, ainsi nommée parce qu'on la fabriquait à Tours. Elle valait 20 sous ; le sou valait 12 deniers. Le louis était une monnaie d'or qui valait 24 livres.
P211.n°404. 80 francs valent 81 livres donc 1 fr. = 1/80 de 81 livres = 1 livre + 1/80 livre = 240 deniers + 1/80 de 240 deniers = 243 deniers.
P211. n°405. Règle : Pour convertir en francs un nombre donné de livres, sous et deniers, on peut convertir d'abord ce nombre en deniers, puis diviser ce nombre de deniers par 243, valeur du franc en deniers.
Exemple. Convertir en francs 64 livres tournois, 2 sous, 6 deniers.
Une livre vaut 20 sous donc 64 livres valent 64 fois 20 sous soit 1280 sous et 2 sous font donc 1282 sous. Un sous vaut 12 deniers, donc 1282 sous valent 1282 fois 12 deniers ou 15384 deniers ; 15384 deniers et 6 deniers font 15390 deniers. Or 243 deniers valent 1 franc, donc 1 denier égale 1/243 de franc et 15390 deniers valent 15390 fois plus, ou 15390/243 de franc. En faisant la division, on trouve 63^{f},33 à moins d'un centime près.
P217. Ex n°1416 et 1417
Convertir en francs 12 livres tournois, 16 sous, 8 deniers.
Convertir en francs 25 livres tournois, 18 sous, 5 deniers.
P217. n°406. Mesures de Prusse. L'unité de monnaie est le rixdale ou thaler ; c'est une monnaie d'argent qui vaut 30 silbergros ou sous. Les monnaies d'or sont le ducat et le frédéric. 1 frédéric vaut 20f,78, 1 ducat vaut 11f,85, 1 rixdale ou thaler vaut 3f,71, 1 silbergros vaut environ 0f,12.
P217. Ex n° 1466. Convertir en francs 32 frédérics et 5 thalers.

P234-235. ***Problèmes d'agriculture***
P234. Ex n°1524
Une prairie de 475 ares rapporte 4500 kilogrammes de foin par hectare, au prix de 35 francs les 1000 kilogrammes. Les frais de culture, d'entretien et récolte s'élèvent à 35 francs par hectare. On demande la valeur de cette prairie, en supposant que le

revenu net d'une prairie se compte 4% ou au denier 25 du capital foncier, c'est-à-dire en supposant que la valeur d'une prairie soit égale à 25 fois le produit net.
P235. Ex n°1527
Une vigne de 250 ares rapporte 48 hectolitres de vin par hectare, au prix de 20 francs les 240 litres. Les frais de culture, d'engrais et de récoltes s'élèvent à 225 francs par hectare. On demande la valeur de cette vigne, en supposant que le revenu net d'une vigne se compte à 3 1/3% ou denier 30 du capital foncier, c'est-à-dire égale à 30 fois le produit net.
P235. Ex n°1530
On achète 18 000 francs une propriété rurale près de laquelle doit passer un chemin de fer. Au bout de 5 ans le chemin de fer est construit et le capital s'est accru de 2% par année. Quelle est alors la valeur de cette propriété ?

Cours gradué d'arithmétique pour l'enseignement primaire. Degré supérieur. (G.Bovier-Lapierre, 1886, Éd. Delagrave)

On retrouve à peu près le même type de développements que 20 ans auparavant :

-Numération des nombres entiers
-Numération romaine
-Notions sur quelques unités d'un usage fréquent
-Les 4 opérations sur les nombres entiers
-Critère de divisibilité
-Nombres premiers
-Fractions ordinaires : les 4 opérations
-Fractions décimales
-Système métrique
-Nombres complexes : les 4 opérations
-Résolution de problèmes : règle de trois, règle de trois composée, avec des fractions ordinaires
-Les intérêts
-Escompte
Une nouveauté : ***Échéance moyenne***.

Un homme doit au même créancier trois sommes : 2468 fr. payables dans 4 mois ; 1850 fr. payables dans 7 mois ; 2645 fr. payables dans un an. À quelle époque devra avoir lieu le payement de ces trois sommes en une somme unique, égale à leur total ?
Règle : On multiplie chaque somme par le temps compris depuis le moment du règlement jusqu'au jour de son échéance, on fait le total des produits et on divise par le total des sommes à payer. Le quotient indique le temps au bout duquel arrivera l'échéance moyenne du payement unique. Solution7 mois 25 j.

-Partages proportionnels
Une nouveauté : ***répartition inversement proportionnelle à des nombres donnés***.

Ex : Partager 600 fr entre 3 frères en parties inversement proportionnelles à leur âge, qui sont 3 ans, 4 ans et 5 ans. (Problème équivalent à partager 600 fr en 3 parties telles que la 1$^{\text{ère}}$ soit les 4/3 de la 2$^{\text{ème}}$ et que la 2$^{\text{ème}}$ soit les 5/4 de la 3$^{\text{ème}}$. Solution : 153$^{\text{f}}$,19 ; 191$^{\text{f}}$,49 ; 255$^{\text{f}}$,32.
Règle de société composée : des mises différentes sont restées dans l'association pendant des temps inégaux.

-Problèmes sur les mélanges
-Sur la méthode dite règle de fausse position

Ex. On a payé 120 fr. en donnant 33 pièces de monnaie, les unes de 2 fr. et les autres de 5 fr. Trouver le nombre de chaque pièce.
Solution. Si l'on ne donne que des pièces de 2 fr. on obtient 2 fr × 33 = 66 fr. Il manque alors 120 – 66 = 54 fr. Si on remplace une des pièces de 2 fr. par une pièce de 5 fr. la somme perd 2 fr. et augmente de 5 fr. ; elle augmente de 3 fr. Pour augmenter de 54 fr. il faut autant de pièce de 5 fr. qu'il y a de 3 fr. dans 54 fr. soit 18. 18 pièces de 5 fr. et 15 pièces de 2 fr.

Ex. Deux capitaux réunis font ensemble 167280 fr. Le premier placé à 4% pendant trois mois produirait un intérêt double de celui que produirait le deuxième, placé à 5% pendant 7 mois. Quels sont ces deux taux ?
Solution : Supposons 1000 fr. placé à 5% pendant 7 mois, il y aurait 166280 fr. placés à 4% pendant trois mois. L'intérêt de 166280 fr. sera 1662^{f},80. L'intérêt de 1000 fr. sera de 5×10×7/12 = 175/6 fr. Le double de cet intérêt est 175/3 fr. Or ce double diffère de 1662,80 de 4813,4/3. Ainsi le capital qui est placé à 5% n'est pas 1000 fr. Refaisons les calculs précédents avec 2000 fr. placés à 5%. On trouve cette fois un écart de 205/3. Pour réduire cette différence à zéro, il faudra ajouter au capital de 1000 fr. qu'on avait supposé en commençant autant de fois 1000 fr. qu'il y a 205/3 dans 4813,4 soit 23,48. Le capital placé à 5% est donc 1000 fr. + 1000fr. ×23,48 = 24480 fr., le capital placé à 4% est alors 167280 – 24480 = 142800 fr.
Remarque de l'auteur. On voit par ce dernier exemple combien est lente la règle de fausse position ; ce n'est pour ainsi dire qu'une démarche boiteuse, où un faux pas est corrigé par un autre faux pas. Dans ces questions, il y a tout avantage à emprunter à l'algèbre ses procédés abréviatifs.

-*Proportions*
-*Application des proportions*
-*Racine carrée*
-*Racine cubique*
-*Mesure des surfaces et des volumes*
-*Notion de comptabilité*
-*Calcul des intérêts de banque* : méthode des nombres, méthode des parties aliquotes du temps, comptes courants.

D’autres pistes à explorer

Mathématiques égyptiennes

Voici deux références pour avoir une idée des problèmes liés aux prix dans l’Égypte ancienne.

- *Les pratiques monétaires dans l’ancienne Egypte*, Charlotte Vantieghem (https://www.nbbmuseum.be/fr/2012/05/nederlands-geldgebruik-in-het-oude-egypte.htm).
- *Le problème de la monnaie dans l'Égypte antique avant Alexandre*, François Daumas (http://www.persee.fr/doc/mefr_0223-5102_1977_num_89_2_1116).

Mathématiques indiennes

Dans le chapitre 2 du livre *Les mathématiques éclairées par l’histoire, Des arpenteurs aux ingénieurs* (Vuibert 2012), intitulé *Calcul indien : la règle de trois, toute une histoire …*, Catherine Morice-Sing étudie les algorithmes utilisés pour les problèmes relevant de la règle de trois, simple ou composée, dans les mathématiques indiennes. Elle décrit ensuite une activité proposée à ses élèves de 5^{e} sur un des algorithmes indiens de la règle de trois, puis de cinq, de sept et de neuf. Les problèmes étudiés et ceux proposés aux élèves proviennent de textes indiens allant du 7^{e} au 12^{e} siècle. La majorité d’entre eux relèvent de la grandeur *prix*.
Un écrit intéressant avec des idées pour travailler *prix* et *algorithmique* en 5^{e}.

Mathématiques et commerce du Moyen Age à la Renaissance

L’étude des traités d’arithmétique commerciale fournit une mine de problèmes sur les *prix*, et sur les méthodes de calcul utilisées. On y voit là aussi l’importance du calcul avec les fractions, alors que pour le même type de problèmes le contexte numérique ayant complètement changé ce calcul est devenu inutile. Ce qui questionne l’importance qui est encore accordée aujourd’hui à ce calcul fractionnaire.
Lectures conseillées :

- Maryvonne Spiesser, *Les manuels d’arithmétique pour les marchands dans la France du XV^{e} siècle*, Bulletin de l’APMEP n°444, 2003, p.32-50. Version intégrale avec quelques corrections : Culture*MATH* (http://culturemath.ens.fr/histoire%20des%20maths/pdf/Spiesser-marchands_APM-bull.pdf) 2006.
- Maryvonne Spiesser, *La naissance d’un genre, le traité d’arithmétique commerciale (XIV^{e}-XVI^{e} s.)*, sur le site Images des Mathématiques (http://images.math.cnrs.fr/La-naissance-d-un-genre-le-traite-d-arithmetique-commerciale-XIVe-XVIe-s.html), 2017.

7. Bibliographie

Ouvrages

- BENOIT Paul, *Calcul, algèbre et marchandise,* in Michel Serres, *Éléments d'histoire des sciences,* Paris, Bordas Cultures, 1989.
- BOVIER-LAPIERRE, *Cours gradué d'arithmétique pour l'enseignement primaire. Degré supérieur***,** Delagrave, 1886.
- CHEMLA Karine, GUO Shuchun, *Les neuf chapitres*, *Le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*, Dunod, Paris, 2005.
- C.I.H.S.O., *Commerce et Mathématiques du Moyen Age à la Renaissance, autour de la méditerranée,* Actes du Colloque International du Centre International d'Histoire des Sciences Occitanes, Beaumont de Lomagne, 13-16 mai 1999, Éditions du C.I.H.S.O., Université Toulouse II, 2001.
- CIRRODE P.L., *Leçons d'arithmétique*, Hachette, 1850.
- CLAIRAUT Alexis, *Élémens d'Algèbre,* 4e éd., Paris, 1768. Téléchargeable sur la Toile.
- DJEBBAR Ahmed, *L'algèbre arabe*, Vuibert, Paris, 2005.
- DUMOUCHEL-DUPUIS, *Cours de mathématiques à l'usage des écoles primaires supérieures et des classes de lettres, des séminaires, des collèges et des lycées. Traité d'arithmétique,* éd. Dezobry, Tandou, 1863.
- FOURASTIE Jean, BAZIL Béatrice, *Pourquoi les prix baissent*, Pluriel, Hachette, 1984. En e-book sur Gallica.
- LAABID Ezzaïm, *Les testaments dans les mathématiques arabo-islamiques : entre l'artificialité des problèmes et le rôle réel des mathématiques,* in Évelyne Barbin & Jean-Louis Maltret, *Les mathématiques méditerranéennes d'une rive à l'autre,* Ellipses, 2015.
- MORICE-SING Catherine, *Calcul indien : la règle de trois, toute une histoire …*, in Évelyne Barbin dir., *Les mathématiques éclairées par l'histoire, Des arpenteurs aux ingénieurs,* Vuibert, 2012.
- THUREAU-DANGIN François. *Textes mathématiques babyloniens*, transcrits et traduits, E.J. Brill, Leyde, 1938. Retirage IREM de Dijon.

Brochures, revues, articles

- DAUMAS François, *Le problème de la monnaie dans l'Égypte antique avant Alexandre*, Mélanges de l'école française de Rome, 1977, 89-2 pp.425-442 (en ligne sur Persée).
- IREM de Poitiers, *Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : les PRIX,* Poitiers, 2011.
- IREM de Poitiers, *Enseigner les mathématiques en 5ème, 4ème, 3ème à partir des grandeurs. Pourquoi ? Comment ?,* Poitiers, 2014.
- IREM de Poitiers, *Algorithmique et programmation au cycle 4 à partir des grandeurs,* Poitiers, 2017.
- LAABID Ezzaïm, *De la religion à l'algèbre : problèmes de partages successoraux selon les lois islamiques,* Bulletin de l'AMQ, décembre 1989. En ligne.

Nos écrits autour de notre démarche

- **Grandeurs et géométrie, Matthieu Gaud, Actes du colloque *Mathématiques en cycle 3*, 8 et 9 juin 2017, Poitiers.**
- **La vie des hommes comme sujet d'étude,** Groupe collège, IREM de Poitiers, Les Cahiers pédagogiques n° 529, avril 2016.
- **Enseigner par les grandeurs au collège**, Jean-Paul Mercier et Jean-Paul Guichard, Losanges n° 28, mars 2015. (http://www.sbpm.be/2015/03/losanges-28/).
- **Le prix du lait**, Jean-Paul Mercier, Repères IREM n°90, janvier 2013, (http://publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/IWR13005.htm).
- **Évaluer les prix**, Frédéric de Ligt et Jean-Paul Guichard, APMEP, PLOT n°40, quatrième trimestre 2012, (http://publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/APL12022.htm).
- **Le volume de la pyramide**, Jean-Paul Mercier, Les mathématiques éclairées par l'histoire. Des arpenteurs aux ingénieurs, chapitre 5, Vuibert, 2012. (http://publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/IWH12006.htm).
- **Les grandeurs au collège,** Jean-Paul Guichard et Jean-Paul Mercier, juin 2011, CORFEM, Actes des 17ème et 18ème colloques, article en ligne sur le Portail des IREM (Commissions inter-IREM, CORFEM).
- **Organiser l'enseignement d'une année par des questions qui lui donnent du sens**, Jean-Paul Guichard et Sébastien Peyrot, Bulletin de l'APMEP n°492, janvier-février 2011, (http://publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/IWR10011.htm).
- **Les durées : un thème pour travailler les nombres et calculs en sixième**, Walter Mesnier, Repères IREM n°82, janvier 2011, (http://publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/IWR11003.htm), article en ligne sur le Portail des IREM (Repères IREM).
- **Les angles au collège : arpentage et navigation**, Jean-Paul Guichard, De grands défis mathématiques d'Euclide à Condorcet, chapitre 1, Vuibert, 2010. (http://publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/IWH10002.htm).

  Existe aussi en version anglaise électronique chez Springer, 2018.
- **Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs**, Fabrice Tarra, Repères IREM n°78, janvier 2010, (http://publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/IWR10011.htm), article en ligne sur le Portail des IREM (Repères IREM).
- **Le chapitre probabilités en troisième**, Thierry Chevalarias, Repères IREM n°78, janvier 2010, (http://publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/IWR10005.htm), article en ligne sur le Portail des IREM (Repères IREM).
- **Le volume de la boule en troisième**, Sébastien Peyrot, Repères IREM n°77, octobre 2009, (http://publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/IWR09016.htm), article en ligne sur le Portail des IREM (Repères IREM).
- **Les volumes en classe de sixième**, Jean-Paul Guichard, Repères IREM n°76, juillet 2009, (http://publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/IWR09013.htm), article en ligne sur le Portail des IREM (Repères IREM).

Bibliographie générale concernant les grandeurs

- BARBIN Évelyne, *Les Éléments de Géométrie de Clairaut : une géométrie problématisée.* Repères IREM, n° 4, p.119-133, Topiques Éditions, 1991. (En ligne)
- BARBIN Évelyne, *L'arithmétisation des grandeurs*. Repères IREM, n° 68, p.5-20, Topiques Éditions, 2007. (En ligne)
- CHAMONTIN Françoise & alii, *Des aires sans mesure à la mesure des aires*. Repères IREM, n° 44, p. 33-62, Topiques Éditions, 2001. (En ligne)
- CHARNAY Roland, *Quelle culture mathématique partagée à la fin de la scolarité obligatoire ?* Repères IREM, n° 64, p.49-61, Topiques Éditions, 2006. (En ligne)
- CHEVALLARD Yves, *Les mathématiques à l'école : pour une révolution épistémologique et didactique*. Bulletin APMEP n° 471, 2007, p.439-461. (En ligne)
- CHEVALLARD Yves, *Quel avenir pour les mathématiques au collège et au lycée ? Les mathématiques dans la cité,* 2009. (Texte en ligne)
- CHEVALLARD Yves, BOSCH Mariana, *Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée*. Petit x, n° 55, p.5-32, IREM de Grenoble, 2001. (En ligne)
- CHEVALLARD Yves, BOSCH Mariana, *Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II. Mathématisations*. Petit x, n° 59, p.43-76, IREM de Grenoble, 2002. (En ligne)
- CLAIRAUT Alexis, *Élémens de Géométrie.* Lambert et Durand, Paris, 1741. Réédition : J. Gabay, Paris, 2006. Plusieurs éditions sont téléchargeables sur le Net.
- DAHAN-DALMEDICO Amy et PEIFFER Jeanne, *Une histoire des mathématiques. Routes et dédales.* Points Sciences N° 49, Le Seuil, Paris, 1986.
- DORIER Jean-Luc & alii, *Actes de la XI^{ème} École d'été de didactique des mathématiques,* Thème 4 : Mesure et grandeur dans l'enseignement des mathématiques, La Pensée Sauvage, Grenoble, 2001.
- ÉduSCOL, *Grandeurs et mesures au collège.* Mathématiques, Ressources pour les classes du collège, Octobre 2007. (En ligne)
- *Grandeurs,* N° spécial. Repères-IREM n° 68, Topiques Éditions, 2007. (En ligne)
- LEBESGUE Henri, *La mesure des grandeurs*. Monographies de L'Enseignement Mathématique n° 1, Genève, 1935. Réédition : A. Blanchard, Paris, 1975.
- PRESSIAT André, *La place des grandeurs dans la construction des mathématiques*. APMEP, Bulletin 483, 2009. (En ligne)
- ROUCHE Nicolas, *Le sens de la mesure « Des grandeurs aux nombres rationnels ».* Collection Formation, Hatier, 1992.
- ROUCHE Nicolas, *Qu'est-ce qu'une grandeur ? Analyse d'un seuil épistémologique.* Repères IREM, n° 15, p. 25-36, Topiques Éditions, 1994. (En ligne)
- ROUCHE Nicolas, *Du quotidien aux mathématiques : nombres, grandeurs, proportions.* Ellipses, Paris, 2006.

8. Pour expérimenter

Si notre démarche vous intéresse, et que, pour l'expérimenter vous voulez utiliser certains de nos documents sous forme numérique, pour faire des recherches, pour concevoir des diaporamas, des fiches de travail, des évaluations pour vos élèves, nous avons ouvert un espace dédié, à accès réservé aux acheteurs de la brochure, sur notre site où vous trouverez tous nos documents : ceux figurant dans la brochure et d'autres documents que nous utilisons dans nos classes.

Contactez-nous au secrétariat de l'IREM de Poitiers :

Bâtiment de mathématiques H3,
Téléport 2 BP 30179,
Boulevard Marie et Pierre Curie
86962 FUTUROSCOPE-CHASSENEUIL cedex
tél : (+33) 05 49 45 38 77
mél : secrirem@math.univ-poitiers.fr.

Bonne expérimentation.

Auteurs BOUCARD Romain, CHEVALARIAS Thierry, COILLOT Jérôme, DEBERTONNE-DASSULE Florence, DE LIGT Frédéric, GAUD Matthieu, GUICHARD Jean-Paul, MERCIER Jean-Paul, REDONDO Cyril, avec la participation de BELHAJ Badri, CORNEAU Florence, FRUGIER Sébastien, HUTREL Delphine.

Titre **Enseigner les mathématiques au cycle 4 à partir des grandeurs : les Prix**

Éditeur IREM de POITIERS

Public concerné Professeurs de collège
Enseignants en formation initiale
Formateurs d'enseignants.

Date Mai 2018

Mots clés Prix, grandeur, nombres et calculs, proportionnalité, pourcentage, statistiques, variation, fraction, rapport, formule, fonction, algèbre, programmation, situation, vie des hommes, écologie, organisation mathématique, organisation didactique, compétences, étude, grande question, PER, histoire des mathématiques, Chevallard.

Résumé Cette brochure propose une étude des prix sur le cycle 4 qui permet un apprentissage progressif de la majeure partie du contenu des thèmes *Nombres et calculs, Organisation et gestion de données, fonctions* du programme, mais aussi de travailler la partie *Algorithmique et programmation.* Pour rencontrer et mettre en œuvre les connaissances du programme, on trouvera une banque de situations structurée autour de 6 questions clés internes aux mathématiques, et dont le contenu est ancré dans la vie présente des hommes, mais aussi passée. Plus de 80 situations dans des contextes variés permettent de travailler à la fois des compétences générales et des compétences mathématiques : lire un texte, une image, un document, comprendre une démarche, commenter et critiquer, modéliser, chercher, raisonner, calculer….

Ce travail s'inscrit dans un projet plus global de restructuration de tous les contenus du programme du collège autour des grandeurs.

* * *

IREM - Bâtiment de mathématiques H3, Téléport 2 BP 30179, boulevard Marie et Pierre Curie, 86962 FUTUROSCOPE-CHASSENEUIL cedex. **Tél.** : (+33) 05.49.45.38.77.
Mél. : secrirem@math.univ-poitiers.fr . **Adresse réticulaire** : http://irem2.univ-poitiers.fr/portail/ .

ISBN 978-2-85954-097-5

EAN 9782859540975 Prix cycle 4

9 782859 540975