LES QUESTIONS et LEUR LOGIQUE

Gérold Stahl

PREFACE

La logique des questions, quoique d'une certaine actualité (si l'on considère les publications correspondantes), est, en même temps, un sujet qu'il faut encore élaborer en grande partie, et dont on peut discuter même les pas initiaux de sa formalisation. Le texte suivant peut être considéré comme une contribution à cette discussion. Il s'appuie, en partie, sur quelques uns de mes articles (voir bibliographie [13], [17], [15], [16], [18], et [21]), sans les suivre trop étroitement. Ainsi quelques définitions ont été changées, et cela modifie naturellement aussi les résultats.

Une connaissance élémentaire de la logique mathématique est suffisante pour suivre le texte, qui n'est pas excessivement technique. Les symboles et termes techniques utilisés sont expliqués à leur introduction.

TABLE des MATIERES

Chapitre 1

QUESTIONS et REPONSES

a. Les diverses façons de voir une question.

Les questions, comme beaucoup de sujets scientifiques, peuvent être regardées de plusieurs points de vue. Par exemple, pour les linguistes c'est un type spécial de phrases à côté des énoncés, des ordres, des exclamations, etc. Pour les informaticiens c'est un certain type de messages qui peuvent produire d'autres messages. Du point de vue de l'épistémologie la question constitue une étape dans la formation de la connaissance, dans l'éclaircissement des problèmes, dans la formulation des hypothèses, etc. Pour le logicien une question est une expression très spéciale ou (comme ici) une classe d'expressions.

Il y a des questions quotidiennes, administratives (par exemple dans la plupart des questionnaires), scientifiques, philosophiques, etc. Il y a des questions qui supposent que tout le monde connait des réponses vraies (les questions réthoriques), dont celui qui la pose connait des réponses vraies (dans un examen, par exemple) ou dont, selon l'état actuel des sciences, personne ne connait les réponses vraies. Dans ce dernier cas on peut communiquer d'autres informations, comme "Il s'agit d'un problème non résolu" ou "Je ne sais pas".

Il y a des questions qui suggèrent des ordres ("Voulez-vous quitter ma maison immédiatement ?"), des complaites ("Savez-vous ce qu'est le rhumatisme ?"), etc. Il y a des questions qui sont des armes psychologiques, non seulement des questions qui constituent des problèmes logiques comme "Avez-vous cessé de battre votre femme ?" (on verra ce type de questions dans le chap. 3), mais des questions aussi simples que "Etes-vous mêlé dans le scandale X ?".

En principe les questions et leurs réponses constituent une forme de dialogue, ce qui n'empêche pas qu'on puisse poser des questions à soi-même ou qu'une réponse soit un exposé extrêmement long (quoique dans le traitement formel toutes les questions admettent des réponses courtes).

b. Analyse logique des questions.

Si l'on ne regarde pas les questions d'une façon isolée, mais par rapport à leurs réponses, on peut se demander quelle est la relation entre une question et *une* de ses réponses et quelle est la relation entre une question et *la classe* de ses réponses. Naturellement en logique il faut indiquer avec toute précision le type d'expressions qu'on veut considérer comme des réponses par rapport à une question.

Un chemin qui semble très prometteur est d'identifier une question avec la classe de ses réponses, de façon à ce qu'une réponse soit un élément de la question de la même manière que Socrate est un élément de la classe des hommes. Ainsi, quand on pose une question, on présente une classe d'expressions et on exhorte la personne questionnée à choisir une d'entre elles (en espérant que ce sera "la vraie" ou "une vraie"). Ce choix se traduit quelquefois dans des formules comme "Ma réponse à cette question est ...", "Si vous me demandez, je vous dirai ...".

Si une question est une classe d'expressions, elle ne peut pas être une expression de son côté ; donc, dans le traitement proposé, il faut distinguer entre la question et l'expression de question.

Même si, en principe, on adopte le traitement mentionné, il reste toujours beaucoup de problèmes. Pour commencer, quel type d'expressions veut-on accepter comme réponses d'une question donnée ? On doit chercher une détermination qui ne soit ni trop étroite ni trop large, pour ne pas exclure des réponses acceptables ou inclure des expressions qu'on ne considère pas comme des réponses. Quelques années de recherche m'ont conduit à donner la préférence aux réponses d'une forme spéciale, appelée ici "réponses suffisantes". Naturellement on peut essayer d'autres possibilités, mais il semble difficile d'en trouver une qui satisfasse tous les goûts.

Pour donner une définition précise de "réponse suffisante", le sujet sera développé dans divers systèmes de la logique mathématique. Cela permet d'utiliser les résultats (théorèmes et métathéorèmes) correspondants et d'établir clairement le contexte dans lequel chaque question est traitée.

c. Limitations de l'analyse logique.

Naturellement une analyse logique ne couvre pas tous les aspects des questions. Par exemple, elle ne rend pas compte de l'attitude psychologique des personnes qui posent des questions ou donnent des réponses, elle ne considère pas les réponses non verbales (un rire, un geste), les réponses données effectivement (par exemple, quelqu'un répond à une question par une autre question), etc.

De même que la logique traite les déductions d'une façon idéalisée et abstraite, et non les déductions que les gens font réellement (ces dernières constituent un sujet de la psychologie, de la linguistique, etc.), elle s'occupe aussi des questions et de leurs réponses.

De plus, ici nous nous limiterons aux aspects syntaxiques et sémantiques des questions et des réponses, sans traiter les aspects pragmatiques (qui font référence aux participants du dialogue questions-réponses). Toute l'analyse formelle du texte suivant sera extensionnelle (c'est-à-dire que l'on considère seulement les expressions et ce qui est dénoté par elles, à l'exclusion de l'intension), un traitement, comme on le verra, parfaitement adéquat à la logique des questions et qui correspond à la plupart des systèmes de la logique mathématique.

Chapitre 2

TRAITEMENT FORMEL DES QUESTIONS ET REPONSES

a. Quelques systèmes de la logique mathématique.

Quand on veut développer un nouveau sujet, comme la logique des questions, il est préférable de s'appuyer sur quelque chose déjà établi. Une base simple pourrait être la logique habituelle, qu'on appelle aussi "logique déclarative" et dans laquelle on dispose d'un certain nombre de systèmes bien analysés. Il existe d'autres points de départ possibles, mais pour ce texte, on choisira (pour des raisons de simplicité) la logique déclarative. Plus précisément on aura recours aux systèmes suivants :
(a) le système fonctionnel élémentaire (de premier ordre), (b) le système fonctionnel supérieur (d'ordre ω , qui correspond à la théorie simplifiée des types), (c) les systèmes appliqués qu'on peut former à partir du système fonctionnel élémentaire.

Pour les expressions bien formées du système élémentaire et des systèmes appliqués on disposera des symboles de constantes individuelles "a", "b", etc. des symboles[1] de variables individuelles "x", "y", etc. Nous ne faisons pas de distinction entre fonction propositionnelle unaire et classe, entre fonction propositionnelle binaire et relation binaire (classe de couples ordonnés), etc. et nous symboliserons les fonctions propositionnelles constantes par "H", "H'", etc. et les variables par "F", "G", etc. Les symboles des variables fonctionnelles n'apparaissent pas dans les systèmes appliqués ; de plus quelques uns de ces derniers systèmes ont un nombre fini et même très limité de symboles de constantes individuelles et fonctionnelles, tandis que pour d'autres le nombre de ces symboles est (dénombrablement) infini. Les fonctions de vérité constantes utilisées ici seront symbolisées par les connecteurs "$\sim$", "v" , "$\wedge$", "$\supset$", et "$\equiv$" (négation, disjonction, conjonction, implication et équivalence). Toujours par rapport au système élémentaire et aux systèmes appliqués nous avons les opérateurs universels "(x)", "(y)", etc. et existentiels "(Ex)", "(Ey)", etc. Les systèmes considérés ici n'ont pas de symboles propositionnels.

[1]Ici on appellera "symboles de variables" ce qui fréquemment est appelé "variables".

A partir des symboles indiqués on formera les expressions bien formées du système élémentaire et des systèmes appliqués de façon habituelle[2] en utilisant largement les parenthèses pour faciliter la lecture. Les expressions avec quantification vide (par exemple "$(x)Fa$") sont incluses dans les bien formées.

Pour le système fonctionnel supérieur, on disposera en plus des symboles de fonctions propositionnelles (constantes et variables) d'ordre supérieur "J", "K", "L", etc. Avec des indices on pourrait indiquer cet ordre, en indiquant l'ordre de chacun de leurs arguments ; mais nous faisons peu d'usage des symboles fonctionnels d'ordre supérieur et on peut reconnaitre ici leur ordre toujours par le contexte. Dans le système supérieur, les opérateurs universel et existentiel peuvent contenir aussi des symboles de varaibles fonctionnelles d'un ordre (fini) quelconque.

Dans les systèmes ici mentionnés on dispose d'une symbolisation alternative pour les fonctions propositionnelles grâce à l'opérateur λ . Par exemple, la fonction propositionnelle unaire de premier ordre F peut être symbolisée par "F" ou aussi par "$\lambda x(Fx)$" ("la collection des x qui satisfont F", une autre symbolisation serait "$\{x/Fx\}$"). De la même manière la fonction binaire de premier ordre H peut être symbolisée par "H" ou par "$\lambda xy(Hxy)$", la fonction unaire de deuxième ordre K par "K" ou par "$\lambda F(KF)$", etc. De cette façon on a non seulement les expressions bien formées "Fy", "Hab" et "KG", mais aussi "$\lambda x(Fx)y$", "$\lambda xy(Hxy)ab$" et "$\lambda F(KF)G$", qui sont également bien formées. L'opérateur λ peut inclure des expressions bien formées complexes, comme par exemple "$(Ex) \sim Hzx$" ou "$Hz \wedge \sim H'za$ dans les expressions bien formées suivantes :

$$\lambda z((Ex) \sim Hzx)y$$

$$\sim\lambda z(Hz \wedge \sim H'za)x \vee Gx$$

Un traitement plus détaillé des expressions avec opérateur λ peut être trouvé, par exemple, dans [5].

Les expressions bien formées des systèmes dévloppés dans cette section seront *abrégées* par "A", "B", "C", etc.

---

[2]Ce travail est limité aux langues finitaires, où chaque expression est formée d'un nombre fini de signes.

Le contexte permettra toujours de déterminer sans difficulté le système dont il s'agit concrètement.

Les théorèmes des systèmes fonctionnels élémentaire et supérieur sont ceux qu'on obtient si l'on utilise une des axiomatisations habituelles (pour le système supérieur sans les axiomes de l'infini et de la sélection). Par rapport aux systèmes appliqués, chacun constitue une classe de théorèmes qui dépend des expressions bien formées (selon les symboles de constantes individuelles et fonctionnelles) et des axiomes spécifiques correspondants.

Tout ces systèmes (supposés consistants) ont leurs modèles, formés d'une classe non vide d'individus (appelée "univers du discours") et des fonctions propositionnelles n-aires de nombre fini ou infini. Seulement les modèles du système supérieur sont plus complexes (ils sont formés de l'univers du discours, d'une classe de fonctions propositionnelles unaires de premier ordre, d'une classe de binaires de premier ordre, d'une classe d'unaires de deuxième ordre, ...) ; mais un traitement détaillé des modèles en général et de ces derniers modèles en particulier n'est pas nécessaire pour la logique des questions ici développée.

On voit que les systèmes mentionnés sont assez riches pour être appliqués à une grande variété de champs, aussi bien scientifiques que philosophiques ou de la vie quotidienne. La logique des questions a la même richesse d'applications possibles, parce qu'elle prend, pour ainsi dire, sa matière première de tous ces systèmes.

Dans l'exposé suivant nous parlerons *sur* les expressions bien formées des systèmes indiqués, en affirmant qu'elles appartiennent à certaines classes d'expression (les questions). Cela signifie que le sujet est développé en *métalangue* ; les résultats, qui seront présentés ici d'une façon partiellement formalisée, n'appartiennent pas à un des systèmes mentionnés même, ils nous informent sur certaines relations entre expressions bien formées et classes d'expressions bien formées. Les expressions bien formées sont alors les individus pour un système spécial. Il s'agit d'un système appliqué avec identité du même type que les systèmes indiqués auparavant, mais dans un niveau de langage plus haut ; on pourrait l'appeler "métasystème appliqué".

On verra que, dans le métasystème, les individus seront symbolisés à l'aide de guillements et de lettres spéciales et les classes à l'aide de crochets ; on utilisera les mêmes connecteurs que dans le premier niveau de langage et en plus les symboles "ε" , "$\subseteq$" , "=" (entre classes), "$\cap$" , "$\cup$" , etc. , qui peuvent être introduits par définition dans un système fonctionnel élémentaire quelconque ($a \varepsilon F =_{df} Fa$, $F \subseteq G =_{df} (x)(Fx \supset Gx)$, etc.) et aussi "=" entre individus. Avec tous ces symboles on construit les expressions bien formées du métasystème de façon habituelle ; mais en même temps les symboles spéciaux permettent de distinguer facilement les expressions du métasystème de celles des systèmes de premier niveau de langage.

Les axiomes du métasystème sont ceux d'un système fonctionnel élémentaire avec identité. Dans les démonstrations du métasystème on a besoin aussi des implications et équivalences des systèmes de premier niveau considérés, pour savoir quelle expression implique quelle réponse, etc. ; mais on n'a pas besoin d'axiomes interrogatifs spéciaux.

b. Questions individuelles et fonctionnelles.

Dans les années 50 l'attitude vis-à-vis d'une éventuelle logique des questions était plutôt négative. Diverses publications (voir dans la bibliographie de [3]) indiquaient les difficultés que devrait envisager une logique de ce type. La logique habituelle, c'est-à-dire la déclarative, opère avec "vrai" et "faux", et il semble artificiel d'appliquer ces termes à des questions. Cependant rien ne nous empêche d'appliquer ces termes à des méta-affirmations sur les questions. Quoique les questions ne puissent être des théorèmes, on peut avoir des métathéorèmes sur les questions. En suivant cette ligne de penser tout le développement se fera dans le métasystème indiqué dans la section antérieure.

Ainsi on distinguera trois types fondamentaux de questions : les individuelles, les fonctionnelles et les questions de vérité (ces dernières seront traitées dans la prochaine section).

Pour commencer avec les questions individuelles, on peut se demander *quel est un individu qui satisfait une fonction unaire donnée,* supposons H. Avant de continuer, on a besoin de quelques définitions auxiliaires, qu'il faut donner par rapport à un système de premier niveau déterminé (supposons N) : Les expressions bien formées (par rapport à N) "Ha" , "Hb", etc. seront appelées "réponses simples" (par rapport à H et N). Celles d'entre elles qui ne sont pas des négations de théorèmes de N seront appelées "réponses directes" (par rapport à H et N). Une réponse directe ou une conjonction de réponses directes ou une généralisation des négations des réponses simples seront appelées "réponses parfaites" (par rapport à H et N)[3], sous la condition qu'elles ne soient pas des négations de théorèmes de N . Exemples : "Ha" , "Hb", ..., "$Ha \wedge Hb$", ...,"$(x) \sim Hx$","$(y) \sim Hy$", ... Les réponses parfaites (de même que les simples et les directes) sont des phrases, c'est-à-dire des expressions bien formées sans symboles de variables libres.

Maintenant une *réponse suffisante* (par rapport à H et N) est une expression bien formée (non nécessairement une phrase) qui n'est pas la négation d'un théorème de N et qui satisfait l'une des conditions suivantes :

(a) Elle implique (selon N) au moins une réponse parfaite qui n'est pas un théorème d'N.

(b) Elle est un théorème de N et au moins une expression parfaite est un théorème de N.

Exemples de réponses suffisantes : "$Fy \wedge Ha$" , "$Ha \vee Ha$", "$(x)(H'x \supset Hx) \wedge H'a$", etc.

---

[3]Dans la plupart de mes travaux sur la logique des questions il y avait parmi les réponses parfaites aussi les "conjonctions infinies", qui sont de la forme "$(x)(H'x \supset Hx)$" (il peut y avoir un nombre infini de x qui satisfont H' et par conséquent H). Actuellement il me semble préférable de ne pas inclure ces expressions parmi les réponses suffisantes. Par exemple, comme Belnap l'a indiqué (voir le compte rendu de Harrah, Journal of Symbolic Logic, 1967, p.548), "$(x) \sim H'x$" serait alors une réponse suffisante (l'affirmation que H' est la classe vide implique "$(x)(H'x \supset Hx)$"). L'exclusion des "conjonctions infinies" n'appauvrit pas trop la classe des réponses

La classe de toutes les réponses suffisantes (par rapport à H et N) est la question : Quel est un individu qui satisfait H ? (par rapport au système N). Cette classe de réponses sera symbolisée par "$[Hx?]_N$" , ou, si une référence explicite au système N n'est pas nécessaire, simplement par "$[Hx?]$".

Supposons que nous ayons une expression bien formée comme "Ha", qui n'est pas la négation d'un théorème. Alors elle est une réponse suffisante de la question $[Hx?]$, c'est-à-dire un élément de la classe $[Hx?]$, de façon à ce qu'on puisse écrire :

$$\text{"}Ha\text{"} \in [Hx?]$$

Dans cette métaexpression symbolique apparaissent les guillemets, une pratique à laquelle nous aurons recours fréquemment dans ce texte. Ceux qui n'aiment pas les guillemets à l'intérieur d'une expression symbolique peuvent écrire, par exemple, :

$$\mathcal{s} \in [Hx?]$$

et expliquer que le symbole en métalangue "$\mathcal{s}$" symbolise l'expression de premier niveau "Ha" . De tels procédés (assez lourds) ne seront pratiquement pas appliqués dans ce qui suit.

Quelques autres exemples de phrases du métasystème qui affirment qu'une réponse est élément d'une question seraient (si les individus comme "$Ha \wedge Hb$", ne sont pas des négations de théorèmes de N) :

$$\text{"}Ha \wedge Hb\text{"} \in [Hx?]$$

$$\text{"}(x) \sim Hx\text{"} \in [Hx?]$$

$$\text{"}Gc \wedge Ha\text{"} \in [Hx?]$$

---

siffisantes, parce que (a) on a toujours les substituts plus faibles "$H'a \wedge (x)(H'x \supset Hx)$", etc. comme des réponses suffisantes, (b) avec certains prémisses (voir section 4.e) on a même "$(x)(H'x \supset Hx)$" comme une des réponses suffisantes et cela sans le problème de Belnap, (c) sans prémisses spéciales on peut avoir "$(x)(H'x \supset Hx)$" comme une des réponses suffisantes à la question fonctionnelle (voir la fin de cette section) $[(x)F?x \supset Hx]$, si, au lieu de demander quel est l'individu qui satisfait H, on demande quelle est une classe de premier ordre dont les éléments satisfont H. La définition modifiée de "réponse parfaite", telle qu'elle est utilisée dans ce texte, implique naturellement un changement de certains résultats par rapport aux articles mentionnés.

Selon la section 1.b, il faut distinguer entre une question comme [Hx ?] (c'est-à-dire une classe d'expressions) et une expression de question comme "[Hx?]" (c'est-à-dire une suite de signes qui symbolisent la classe). Le symbole de variable qui précède le point d'interrogation (dans l'exemple "x"), appelé "noyau d'interrogation", est lié et sa portée est limitée par les crochets ; "[Hx?]" est bien un symbole de constante.

Avant de continuer la partie formelle de l'exposé, on peut donner quelques exemples concrets. Soit H la fonction *avoir mangé des carottes*. Alors "Paul a mangé des carottes" ε [Qui a mangé des carottes ?]. On a la même relation avec des expressions comme "Aucun individu n'a mangé de carottes", etc.

Fréquemment on répond d'une façon abrégée, par exemple seulement "Paul", une réponse qui devrait être traduite au symbolisme par "Ha".

Par rapport à certains univers du discours, on peut répondre sans difficulté aux questions avec "qui" et "que". Rien ne nous empêche d'utiliser des modèles dont l'univers contient aussi des moments temporels, des endroits géographiques, des événements (effectifs ou désirés), etc., ce qui nous permet de formuler des questions avec "quand" ("quel est un individu qui satisfait la fonction *être le moment* ..."), "où" ("quel est un individu qui satisfait la fonction *être l'endroit* ..."), pourquoi ("quel est un individu qui satisfait la fonction *être l'événement qui a produit* ..."), etc.

Dans le traitement formel on peut avoir des expressions de questions, dans lesquelles le noyau d'interrogation apparait plusieurs fois ou à l'intérieur d'une expression complexe, comme par exemple dans "[$Hx? \vee H'x?$]" ("Quel individu satisfait H ou H' ?") "[$(Ex) \sim Hy?x$]" ("Quel individu n'est pas en relation H avec au moins un x ?"), "[$Hx? \wedge \sim H'x?a$]" ("Quel individu satisfait H sans être en relation H' avec a ? "), etc. Grâce à l'opérateur λ on peut toujours réduire ces expressions à des expressions de question en forme standard (comme "[Hx?]") de la façon suivante :

$[\lambda z(Hz \vee H'z)x?]$ abrégée : $[H''x?]$

$[\lambda z((Ex) \sim Hzx)y?]$ abrégée : $[H'''y?]$

$[\lambda z(Hz \wedge \sim H'za)x?]$ abrégée : $[H''''x?]$

Ce procédé ne présente aucune difficulté, aussi grand que soit le nombre d'occurences du noyau d'interrogation et aussi complexe que soit l'expression de question, pourvu qu'il s'applique à des cas avec un seul noyau d'interrogation (pour deux ou pous de noyaux voir section 4.b). Ainsi à l'aide de l'opérateur λ on peut traiter les questions individuelles par rapport aux fonctions binaires, ternaires, etc.

Les expressions des questions "$[Hx? \vee H'x?]$" et "$[\lambda z(Hz \vee H'z)x?]$" sont différentes (il s'agit de suites différentes de signes), mais les deux dénotent la même question, qui a été introduite à partir de la définition standard.

La définition des questions fonctionnelles est tout à fait analogue à celle des individuels. Supposons qu'on ait une fonction K[4], qui est unaire de deuxième ordre sur les fonctions unaires de premier ordre, et qu'on se demande qu'elle est une fonction unaire de premier ordre qui satisfait K. Les définitions de "réponse simple" ("KH" , "KH'", etc.), "réponse directe", "réponse parfaite" et "réponse suffisante" sont totalement analogues à celles qui introduisent les questions individuelles, et de nouveau la question est la classe de toutes les réponses suffisantes (par rapport à K et N). Elle peut être symbolisée par "$[KF?]_N$" ou simplement par "$[KF?]$". De toute façon dans ce cas N doit être le système fonctionnel supérieur, parce que les éléments de $[KF?]$ ne sont pas bien formés dans un système de premier ordre.

Pour donner quelques exemples (en supposant que les réponses ne soient pas des négations de théorèmes) :

---

[4]Pour les fonctions propositionnelles de deuxième ordre, "J", "K", "J'", etc. seront utilisées comme symboles des constantes, "L", "L'", etc., comme symboles des variables, et "M", "M'", etc. seront utilisées comme symboles des constantes de troisième ordre.

$"KH" \in [KF?]$

$"(G) \sim KG" \in [KF?]$

$"Gc \wedge KH" \in [KF?]$

De la même manière on traitera en général les questions fonctionnelles par rapport aux fonctions unaires de $n+1$-ième ordre ($n > 1$) sur des fonctions non nécessairement unaires de n-ième ordre. Par rapport aux fonctions binaires, ternaires, etc., de $n + 1$-ième ordre, le traitement est analogue à celui des questions individuelles par rapport aux fonctions binaires, ternaires, etc, de premier ordre.

Ainsi en utilisant l'opérateur λ , on peut traiter par exemple "$[\sim KF?H]$" comme "$[\lambda G(\sim KGH)F?]$" (abrégée par "$[K'F?]$"). Un cas particulièrement intéressant est la question $[F?a]$ (Quelle est une fonction unaire de premier ordre satisfaite par l'individu a ? ou d'une façon plus simple : Quelle propriété[5] possède a ?, Comment est a ?). Avec l'opérateur λ cette question sera représentée par :

$[\lambda G(Ga)F?]$ abrégée : $[K''F?]$

On peut constater que, pour chaque réponse parfaite (simple, directe) à cette question fonctionnelle spéciale, il y a une expression équivalente qui est bien formée dans le système fonctoinnel élémentaire. Exemple : "Ha" ("$\lambda G(Ga)H$"), "$Ha \wedge H'a$", etc. L'expression "$(F) \sim \lambda G(Ga)F$", c'est-à-dire "$(F)\sim Fa$", n'est pas une réponse parfaite ; elle est la négation d'un théorème du système supérieur .

Revenons maintenant aux exemples concrets. Dans certains cas cela dépend du modèle considéré, si une question est individuelle ou fonctionnelle. Prenons : De quelle couleur est a . Si l'univers du discours contient des couleurs (le rouge, le bleu, etc.) on aura la question individuelle $[Hx?a]$, où H est la relation *être une couleur de*. Dans le cas contraire on a une question fonctionnelle. Pour voir sa construction, on introduira les classes de

---

[5]Dans le traitement extensionnel ici adopté on ne fera pas de distinction entre classe, fonction propositionnelle unaire et propriété.

couleur, comme la classe des individus rouges, la classe des individus bleus, etc. et on symbolisera par "J" la fonction unaire de deuxième ordre *être une classe de couleur*. La question fonctionnelle est alors $[JF? \wedge F?a]$ (Quelle est une classe de couleur à laquelle appartient *a* ?) ou $[\lambda G(JG \wedge Ga)F?]$.

Il y a beaucoup de questions qui peuvent être traitées de la même façon. Exemples : De quelle matière est *a* ? , De quelle forme est *a* ? , etc.

Les questions avec "combien" sont un peu différentes. Deux types seront indiqués ici, au premier correspond une question comme : Combien font 4 + 4 ? Si l'univers du discours inclut au moins les nombres naturels, on a $[4 + 4 = x\,?]$, c'est-à-dire $[\lambda z(4 + 4 = z)x?]$. Si, comme dans les "Principia Mathematica", les nombres naturels sont traités comme des classes de classes, on a $[4 + 4 = L?]$, c'est-à-dire $[\lambda L'(4 + 4 = L')L?]$. Au deuxième type correspond une question comme : Combien d'éléphants y-a-t-il dans les jardins zoologiques en Frances ? Quoiqu'on puisse traiter cette question comme individuelle (pour certains modèles avec des ensembles comme individus), ici seulement le traitement comme question fonctionnelle sera indiqué. Soit H la classe des éléphants dans ... . Supposons que parmi les classes de deuxième ordre on ait au moins les nombres naturels et que "M" symbolise la fonction unaire de troisième ordre *être un nombre naturel*. La question fonctionnelle est alors $[ML? \wedge L?H]$ (Quel est un nombre naturel auquel appartient H?) ou $[\lambda L'\ (ML' \wedge L'H)L?]$.

c. Questions de vérité.

Supposons que nous ayons des phrases (expressions bien formées sans symboles de variables libres) qui soient abrégées par "A", "B" , "C" , etc. Dans notre traitement extensionnel, "A", "B", "C", etc. dénotent alors ou bien la valeur de vérité *vrai*, ou bien la valeur de vérité *faux*. Selon la section 2.a, les connecteurs dénotent des fonctions de vérité qui peuvent être unaires, binaires, ternaires etc. On peut alors demander : (i) Quelle est une fonction de vérité unaire appliquée à A ? , (ii) Quelle est une fonction de vérité binaire entre A et B ? etc.

Par rapport à la première question il y a en principe quatre fonctions de vérité unaires : (a) celle qui lasse A inchangé, (b) la négation, qui transforme A dans la valeur opposée, (c) celle qui transforme A dans la valeur *vrai*, quelle que soit la valeur de A et (d) celle qui transforme A dans la valeur *faux*, quelle que soit la valeur de A. Ici nous utiliserons les fonctions de vérité unaires dans un sens restreint, c'est-à-dire sans (c) et (d).

Si l'on applique maintenant la traitement général des questions à (i), on a les réponses simples (par rapport à A) : "A" et "$\sim$A". Pour les directes il faut éventuellement exclure celle qui est négation d'un théorème du système N respectif. Les réponses parfaites et suffisantes se forment de la même façon que pour les questions individuelles, sauf qu'on n'a pas des conjonctions comme "$A \wedge \sim A$", qui sont des négations de théorèmes de tous les systèmes ici considérés, ni des généralisations des négations (d'une façon analogue à "$(x)\sim Hx$"), parce qu'une expression de ce type ne serait pas bien formée dans nos systèmes.

On arrive ainsi à la classe des réponses suffisantes qui est la question : Quelle est une fonction de vérité unaire appliquée à A ? Ou aussi : Est-ce que A ? (toujours par rapport au système N). En utilisant les lettres "f", "g", etc., pour symboliser les fonctions de vérité variables, on écrira "$[f?A]_N$" ou simplement "$[f?A]$".

Ainsi, en supposant que "A", "$\sim$A", etc., ne soient pas des négations d'un théorème de N, on a, par exemple :

$$"A" \; \varepsilon \; [f?A]$$

$$"\sim A" \; \varepsilon \; [f?A]$$

$$"Gc \wedge \sim A" \; \varepsilon \; [f?A]$$

Par rapport à l'expression de question "$[f?A]$", le symbole de variable "f", le noyau d'interrogation, est lié et sa portée est limitée par les crochets. L'opérateur λ ne sera pas utilisé dans ce type d'expressions de questions.

Des exemples concrets seraient : " Jean dort " ε [Jean dort-il ?] , " Ce n'est pas le cas que Jean dort " ε [Jean dort-il ?], etc. Les réponses abrégées comme "oui" ("si") et "non" seront traduites au formalisme par "A" et "$\sim$A" .

On a vu qu'il y a des questions de type (ii) Quelle est une fonction de vérité binaire entre A et B ? Ces questions ont des réponses simples comme "A $\vee$ B" , "A $\supset$ B" , "A $\equiv$ B", etc. et pourraient être symbolisées par "$[A\ \mathfrak{f}?\ B]_N$" , mais elles ne seront pas traitées ici ; leur importance semble minime dans la logique des questions. La même attitude sera adoptée vis à vis des questions par lesquelles on veut être informé sur des fonctions de vérité ternaires, etc.

Par rapport aux questions individuelles, fonctionnelles et de vérité en général on a appelé "expressions de questions" des expressions comme "[*Hx?*]" , "[*KF?*]" et "[$\mathfrak{f}$?A]" . Leurs règles de formation peuvent se déduire facilement de ce qui a été indiqué. Les expressions entre crochets, comme "*Hx?*", "*KF?*" et "$\mathfrak{f}$?A" seront appelées "expressions interrogatives" et abrégées par les lettres "P", "Q", etc. Avec cela on dispose d'une symbolisation générale des trois types de questions, qui est "[P]", "[Q]", etc. (éventuellement avec un indice pour marquer le système respectif).

d. Analyse des définitions précédentes.

On ne peut pas prétendre que les définitions de "question" et "réponse suffisante" des dernières sections soient les seules possibles ; mais elles représentent quand même un essai raisonnable. Naturellement cela n'exclut pas l'existence de points discutables, dont trois seront analysés au début de cette section.

Point 1 : Les définitions indiquées admettent des réponses fausses. Cela correspond à la pratique du dialogue questions - réponses où les réponses fausses sont au moins aussi fréquentes que les vraies. De plus, on peut isoler sans difficulté les réponses vraies (et valides) de la façon suivante. Supposons que nous ayons un modèle $\mathfrak{M}$ du système N et qu'on ait défini "V($\mathfrak{M}$)" , "la classe des phrases vraies et des schémas valides par rapport au modèle $\mathfrak{M}$ ". Alors la classe des réponses suffisantes vraies (et valides) d'une question $[P]_N$ est simplement l'intersection :

$$[P]_N \cap V(\mathfrak{M})$$

Point 2 : *Dans certains cas* (le cas (b) de la définition de "réponse suffisante") *tous les théorèmes du système respectif sont des réponses suffisantes.* A première vue, cela peut apparaître comme un élargissement excessif de la classe des réponses suffisantes. Cependent *un* théorème est équivalent à *tous* les autres théorèmes du système. Si, dans le cas (b), on élimine certains théorèmes, on élimine des réponses implicites (indirectes) étroitement liées aux réponses parfaites. La possibilité de répondre indirectement soit par implication dans le cas (a), ou au moins par équivalence dans le cas (b) ne devrait pas être écartée. Cependant, si l'on considère que les théorèmes du système N ou au moins du système fonctionnel élémentaire F soient trop triviaux, on peut de nouveau isoler les réponses suffisantes qui ne soient pas triviales dans ce sens, en formant une des intersections (où "-" symbolise le complément du système par rapport à la classe des expressions bien formées) :

$$[P]_N \cap -N$$

$$[P]_N \cap -F$$

Dans la pratique on est quelquefois intéressé dans une réponse qui est théorème (si, par rapport à un système mathématique, on veut connaître la valeur d'une fonction), tandis que pour la question [Qui est Voltaire ?] (dans la forme $[x? = a]$) on ne veut pas obtenir la réponse-théorème "Voltaire est Voltaire" mais plutôt quelque chose comme "François Maire Arouet est Voltaire" ou "L'auteur de CANDIDE est Voltaire" .

Point 3 : *Les négations des théorèmes ne sont pas des réponses suffisantes.* Tandis que les réponses fausses sont un phénomène typique des questions, les réponses illogiques, pour ainsi dire, le sont beaucoup moins ou pas du tout. La réponse "$A \wedge \sim A$" est considérée ou bien comme jeu de paradoxe, c'est-à-dire non comme réponse véritable, ou bien il s'agit de deux occurences de "A" qui ne sont pas prises dans le même sens, de façon à ce qu'on a au fond "$B \wedge \sim C$", où "B" est "A" dans un sens et "C" dans un autre. La dernière conjonction n'est plus négation d'un théorème.

Dans les points 1 et 2 on a vu que certaines conditions très générales concernant les réponses peuvent être établies formellement, par exemple *être vrai* ou *ne pas être un théorème*.

De la même façon on peut limiter le nombre d'occurences de signes (dans les mots croisés seulement des réponses formées d'un certain nombre d'occurences de lettres sont considérées) ou interdire l'usage de quelques mots (dans des sociétés avec des tabous verbaux) ou exiger que les réponses apparaissent entre les expressions d'une liste donnée (comme fréquemment dans les questionnaires : "célibataire", "marié(e)", ...). D'autre part, il y a des conditions qui sont absolument hors du traitement formel, par exemple si quelqu'un attend des réponses "profondes", "mesurées", "pratiques", etc.

Certaines conditions peuvent être formulées dans les expressions de question (comme "Quels sont tous les individus qui satisfont H ?", si l'on veut avoir des réponses exhaustives) et permettent quelquefois la construction d'un type spécial de questions[6]. Cependant en principe il faut faire une distinction entre les conditions imposées aux réponses (un sujet qui ne sera pas traité ici en détail) et les divers types spéciaux de questions, dont on verra quelques uns dans le chap. 4.

Quelques résultats peuvent être déduits trivialement à partir des définitions des dernières sections. Ainsi les classes des réponses directes et parfaites sont des sous-classes propres des questions respectives. Par rapport aux systèmes consistants (dans le sens de consistance absolue, où il y a au moins une expression bien formée qui n'est pas théorème), il peut y avoir des questions individuelles et fonctionnelles vides, c'est-à-dire sans réponse suffisante, tandis que les questions de vérité ne sont jamais vides. Ainsi on peut prendre un système des nombres naturels où l'on a seulement les symboles de constantes individuelles "0", "1", etc., et où l'on peut démontrer les théorèmes $\vdash \sim H0$, $\vdash \sim H1$, $\vdash \sim H2$, etc. et aussi $\vdash (Ex)Hx$ (un tel système peut être consistant,

---

[6]L'exemple correspond aux *questions avec des exigences de totalité*, qui seront traitées dans la section 4.g.

quoiqu'il ne soit pas ce qu'on appelle " ω-consistant "). Par rapport à ce système la question [$\mathcal{H}x$?] n'a ni de réponse directe, ni de parfaite, ni de suffisante. D'autre part, si l'on regarde les questions de vérité, seulement une des deux expressions "A" ou "∿A" peut être la négation d'un théorème, de façon à ce qu'on a toujours au moins une réponse directe.

e. Identité et sous-classe.

Le fait de traiter (dans le métasystème) les questions comme des classes, permet d'utiliser à leur égard tous les résultats dont on dispose dans un système fonctionnel appliqué, par rapport aux fonctions propositionnelles unaires, c'est-à-dire, par rapport aux classes. Ces résultats font référence à deux relations spécialement intéressantes, l'identité entre classes et la relation de sous-classe (voir la section 2.a).

La première des relations mentionnées nous permet d'établir *l'identité entre questions*. Ainsi [P] et [Q] sont identiques si elles ont les mêmes éléments, c'est-à-dire les mêmes réponses suffisantes.

Nous disons aussi qu'une question est une *sous-question* (sous-classe) d'une autre si toutes les réponses suffisantes de la première sont des réponses suffisantes de la seconde.

Dans le métasystème ici présenté, on peut démontrer, par exemple, les théorèmes suivants (ces théorèmes sont précédés de "M" et numérotés) :

M1 : [$\mathcal{f}$?A] = [$\mathcal{f}$?∿A]

Dém. : Dans un cas on a les réponses simples "A" et "∿A", dans l'autre "∿A" et "∿∿A", mais les réponses suffisantes sont les mêmes dans les deux cas, grâce aux implications mutuelles.

Ce résultat correspond parfaitement à notre intuition où l'on a : [Est-ce que ... ?] = [N'est-ce pas que ... ?] (ou un exemple plus libre : [Fait-il froid ?] = [Ne fait-il pas froid ?]). Les réponses pour une question de vérité affirmative sont les mêmes que pour sa contradiction. Il peut y avoir une différence d'emphase dans les formulations, mais du point de vue extensionnel on a deux fois la même question.

Les deux théorèmes suivants établissent un certain remplacement par équivalence. En écrivant "$\vdash_N$" pour indiquer que l'expression qui suit aux deux signes est un théorème du système N; on a :

M2 : Si $\vdash_N$ A $\equiv$ B , alors $[\jmath?A]_N = [\jmath?B]_N$

M3 : Si $\vdash_N$ $Hx \equiv H'x$, alors $[Hx?]_N = [H'x?]_N$

et de façon analogue pour les questions fonctionnelles. Dém. de M2 : En laissant de côté, pour le moment, les cas spéciaux (négations de théorèmes, théorèmes), toutes les réponses suffisantes de $[\jmath?A]_N$ impliquent ou bien "B" ou bien "$\sim$B" (selon l'équivalence) et sont ainsi des réponses suffisantes de $[\jmath?B]_N$; de même inversement. Si "B" ("$\sim$B") est la négation d'un théorème, "A" ("$\sim$A") est aussi exclue, et on n'a pas des réponses suffisantes impliquant "A" ("$\sim$A") ; de même inversement. Si et seulement si "B" ("$\sim$B") est un théorème, "A" ("$\sim$A") l'est aussi. La démonstration de M3 procède de façon analogue, les réponses suffisantes de $[Hx?]_N$ impliquent les réponses parfaites de $[H'x?]_N$ et vice-versa. Des exemples pour M2 et M3 seraient :

$[\jmath?A] = [\jmath?(A \vee A)]$

$[Hx?] = [\lambda y(Hy \vee Hy)x?] = [Hx? \vee Hx?]$

Un théorème de sous-classe serait :

M4 : Si l'on n'a pas $\vdash_N (Ex)Hx$, alors $[Hx?] \subseteq [\jmath?(Ex)Hx]$

La démonstration est analogue à celles de M2 et M3 .

Certaines questions sont identiques au système correspondant ou l'ont comme sous-classe. Pour indiquer quelques résultats faciles à démontrer, on a :

M5 : Si $\vdash_N A$ ou $\vdash_N \sim A$, alors $N = [\jmath?A]_N$

M6 : Si $\vdash_N Hx$ ou $\vdash_N \sim Hx$, alors $N = [Hx?]_N$

M7 : Si $N \subseteq [\jmath?A]_N$, alors $N = [\jmath?A]_N$

Des exemples pour M5 et M6 par rapport à tous les systèmes ici considérés seraient :

$$N = [\wp?(A \vee \sim A)]$$

$$N = [\wp?(A \wedge \sim A)]$$

$$N = [\lambda y(Hy \vee \sim Hy)x?]$$

$$N = [\lambda y(Hy \wedge \sim Hy)x?]$$

Il n'y a rien d'analogue à M7 pour les questions individuelles et fonctionnelles, c'est-à-dire, pour elles N peut être une sous-classe propre.

CHAPITRE 3

QUESTIONS ET PREMISSES

a. Suppositions des questions.

Si l'on regarde les formulations des questions hors de tout formalisme, on a l'impression qu'au moins la plupart d'entre elles contiennent des suppositions, qu'elles suggèrent quelque chose d'implicitement accepté. Cependant une des grandes tâches de la logique formelle est de faire explicite ce qui est dit ou suggéré implicitement. Comment y arriver dans le cas des suppositions de questions ? La solution est la suivante : on prend comme point de départ les questions qui n'ont pas d'autres suppositions que les théorèmes du système correspondant (chap. 2), on y ajoute des prémisses formulés explicitement (section 3.b) et on stipule qu'il n'y a pas d'autre supposition dans le traitement formel.

Afin de voir des cas concrets de type quotidien, nous indiquerons dans cette section deux exemples de questions auxquelles la plupart des personnes attribue des suppositions. Ces exemples peuvent être formalisés ou bien sans prémisses, ce qui veut dire que dans le traitement formel ils n'ont pas les suppositions qu'on leur attribue communément, ou bien avec prémisses (section 3.b) qui rendent explicite les suppositions respectives.

L'exemple le mieux connu est celui de la femme battue : [Monsieur a a-t-il cessé de battre sa femme ?]. Si l'on exprime symboliquement "cesser de battre" par "C_B", la question est [$\delta ? C_B a$] avec les réponses simples "$C_B a$" et "$\sim C_B a$", dont une des deux doit être vraie selon le tiers exclu. Ce dernier point se voit encore plus clairement si l'on analyse un peu l'expression "cesser de faire une chose". Si x cesse de faire une chose, cela veut dire qu'il l'a faite dans le passé et ne la fait plus dans le présent. On a en général :

$$C_F x \equiv (F_{pas}\, x \wedge \sim F_{pres} x)$$

et dans le cas concret :

$$C_B a \equiv (B_{pas} a \wedge \sim B_{pres} a)$$

Ainsi l'expression "$\sim C_{B} a$" signifie que Monsieur a n'a pas battu sa femme dans le passé ou qu'il la bat (encore) dans le présent.

Tout cela est très clair du point de vue de la logique. Mais si quelqu'un de mal intentionné demande en public à Monsieur a s'il a cessé de battre sa femme, aussi bien la réponse "oui" que la réponse "non" produisent une mauvaise impression : la première réponse est fréquemment interprétée comme s'il l'a battue (ce qui est correct), la deuxième comme s'il l'a bat encore (ce qui n'est pas correct). Naturellement si le public n'était formé que de bons logiciens, Monsieur a pourrait répondre tranquillement par "non" , sans que quelqu'un en déduise qu'il a battu sa femme ; mais comme cela n'arrive pas normalement, il vaut mieux qu'il proteste contre une question qui suggère quelque chose de contraire aux faits, ou qu'il réponde d'une autre façon que par "oui/non".

Un autre exemple d'une question à laquelle on est incliné à attribuer une supposition, est celui du roi (actuel) de France. Supposons que "A" abrège la phrase "Le roi de France est chauve", qui, comme toutes les phrases dans lesquelles l'existence de quelque chose est mise en doute, peut être symbolisée en utilisant les descriptions au sens Russellien (voir aussi [14]). La question [δ?A] a des réponses simples "A" et "$\sim$A", dont la deuxième ("Ce n'est pas le cas que ...") nie qu'il y ait exactement un individu qui soit le roi de France ou qu'il soit chauve. Ainsi la question [Le roi de France est-il chauve ?] n'a aucune supposition concernant l'existence du roi de France ; une réponse vraie serait "$\sim$A" .

Naturellement rien ne nous empêche d'introduire explicitement certaines suppositions (les prémisses), ce qui, au contraire, contribuera à un élargissement très intéressant de la logique des questions. A l'occasion on pourrait alors traiter les exemples de la femme battue et du roi de France d'une autre façon ; ce seront des questions relatives à des prémisses explicitement indiquées comme "Monsieur a a battu sa femme" ou "il y a exactement un individu qui est le roi de France".

b. Questions relatives à une classe de prémisses.

Dans un système logique pur ou appliqué on a des *théorèmes de base* ou *axiomes* (logiques ou spécifiques), à partir desquels on démontre les autres théorèmes du système grâce aux règles axiomatiques. On peut ajouter encore des suppositions de base qui ne sont pas considérées comme des théorèmes (mais quand même bien formés) et appellés "prémisses". Supposons que par rapport à un système N on a de plus une classe de prémisses symbolisés par "S". Les expressions qu'on peut déduire à partir de ces prémisses (grâce aux règles axiomatiques, éventuellement restreintes quand elles ne s'appliquent pas aux théorèmes) seront appelées "conclusions à partir de S". Les conclusions à partir de S incluent les théorèmes de N. Comme dans le cas des systèmes on considère ici seulement les classes consistantes (consistance absolue) de conclusions.

Tandis que, jusqu'à présent, on a considéré les questions par rapport à un système N, on les considèrera dans cette section par rapport à un système N et une de ses classes de prémisses S. Les questions du premier type ont été symbolisées par "$[P]_N$" , celles par rapport au système N et la classe des prémisses S seront symbolisées par "$[P]_N S$".

Pour définir "$[P]_N S$" on modifiera les définitions de "réponse directe", "réponse parfaite" et "réponse suffisante", en écrivant, "conclusion à partir de S" au lieu de "théorème" (toujours par rapport à N). Tandis que pour la définition de "$[P]_N$" on a exclu les négations des théorèmes et inclu, dans un cas déterminé, les théorèmes, on exclut maintenant les négations des conclusions à partir de S et on inclut, dans le cas correspondant, les conclusions à partir de S. Avant on a appliqué les implications qui étaient des théorèmes, maintenant on applique celles qui sont des conclusions à partir de S. Ainsi d'un côté $[P]_N S$ est plus pauvre que $[P]_N$ (il y a plus d'exclusions), d'un autre côté elle est plus riche que $[P]_N$ (il y a plus d'expressions admises au lieu des théorèmes et plus d'implications).

Supposons qu'on ait la prémisse "*b* a mangé des carottes" et qu'on veuille savoir qui (d'autre) a mangé des carottes (avec "H" pour "manger des carottes"), alors la question serait :

$$[Hx?]_N \{"Hb"\}$$

Dans ce cas une réponse comme "$(x) \sim Hx$" n'est pas suffisante, parce qu'elle contredit la conclusion "$(Ex)Hx$", qu'on peut obtenir à partir de la prémisse "Hb".

L'exemple de la femme battue avec l'unique prémisse "$B_{pas}a$" ("a a battu sa femme dans le passé") serait maintenant :

$$[\delta ? C_B a]_N \{"B_{pas}a"\}$$

On a de nouveau les réponses simples "$C_B a$" et "$\sim C_B a$" , mais cette dernière réponse implique maintenant "$B_{pres}a$" ("a bat sa femme dans le présent"). Grâce à la prémisse indiquée, ce qui était implicite dans la formulation suggestive est maintenant explicite. Monsieur a, quand il proteste, peut montrer qu'on le pousse à endosser une prémisse qu'il n'accepte pas.

Les questions du type de la femme battue ne sont pas desinnovations récentes. On les trouve déjà dans l'Ecole Mégarique sous la forme [Avez-vous perdu vos cornes ?]. La solution est exactement la même. Dans une application typiquement logique de cette théorie des questions, on montre le mécanisme des prémisses cachées (on dévoile la mauvaise foi) en l'occurence non dans l'argumentation mais dans la formulation des questions.

L'exemple du roi de France avec l'unique prémisse "$(E_1x)Hx$" ("Il y a exactement un individu qui satisfait la fonction *être le roi de France*") est maintenant :

$$[\delta ?A]_N \{"(E_1x)Hx"\}$$

On a de nouveau les réponses simples "A" (qui implique sans changement existence et calvitie) et "$\sim$A" (qui, avec la prémisse de l'existence, implique maintenant la non-calvitie).

En résumant ces exemples, on peut dire qu'en logique il faut distinguer clairement entre les questions avec ou sans certaines prémisses.

Comme pour les questions du chap. 2, on peut avoir des réponses fausses (si elles ne sont pas de négations de conclusions) et des questions individuelles et fonctionnelles vides, tandis que les questions de vérité ont toujours des réponses suffisantes.

Il y a des théorèmes tout à fait analogues à ceux de la section 2.e (on écrira "$S\vdash_N A$" pour dire que "A" est une conclusion à partir de S et on symbolisera par "$C_N(S)$" la classe des conclusions à partir de S, toujours par rapport à N) :

M1' : $[\delta?A]_N S = [\delta?\sim A]_N S$

M2' : Si $S\vdash_N A \equiv B$, alors $[\delta?A]_N S = [\delta?B]_N S$

M3' : Si $S\vdash_N Hx \equiv H'x$, alors $[Hx?]_N S = [H'x?]_N S$

M4' : Si l'on n'a pas $S\vdash_N (Ex)Hx$, alors $[Hx?]_N S \subsetneq [\delta?(Ex)Hx]_N S$

M5' : Si $S\vdash_N A$ ou $S\vdash_N \sim A$, alors $C_N(S) = [\delta?A]_N S$

M6' : Si $S\vdash_N Hx$ ou $S\vdash_N \sim Hx$, alors $C_N(S) = [Hx?]_N S$

M7' : Si $C_N(S) \subsetneq [\delta?A]_N S$, alors $C_N(S) = [\delta?A]_N S$

Supposons que nous ayons deux classes de prémisses S et T et que $S \subsetneq T$. On dit alors que la question $[P]_N T$ est plus (ou également[7]) concrète que $[P]_N S$, symboliquement :

$$[P]_N T \;\; Pc \;\; [P]_N S$$

Dans ce cas les réponses parfaites de la première question constituent une sous-classe des réponses parfaites de la deuxième (avec plus de conclusions il y a plus d'exclusions) ; mais en général les deux questions ne sont pas sous-questions l'une de l'autre.

Etant donné que la classe des théorèmes (le système) est la classe des conclusions à partir de la classe vide des prémisses ($N = C_N(\emptyset)$) et que la classe vide est sous-classe de toute classe, on obtient trivialement :

$$[P]_N S \;\; Pc \;\; [P]_N$$

Dans l'ordre partiel établi par Pc la question $[P]_N$ est l'élément zéro.

[7] Si S = T .

c. Un jeu de questions et de réponses.

Un jeu très élémentaire peut simuler d'un côté le dialogue questions-réponses dans la pratique et de l'autre la théorie des questions qu'on a vue jusqu'à présent (voir, par exemple, [23]).

Il s'agit d'un jeu entre deux personnes, le questionneur ("*q*") et le répondeur ("*r*"). Le jeu utilise des cartes sur lesquelles sont inscrites des phrases (soit en français courant ou en langue symbolique). Certaines de ces cartes (supposons les vertes) s'appellent "réponses", elles sont classées (à l'aide d'indices) en groupes, ces groupes sont appelés "questions". Les autres cartes (supposons les rouges) sont appelées "prémisses".

Au début du jeu *q* place certaines prémisses sur la table de façon qu'elles soient visibles aux deux joueurs. C'est "l'information commune". De plus, *q* retire un certain nombre de prémisses et les garde de telle façon que leur contenu ne soit visible qu'à lui-même. C'est "l'information additionnelle de *q*".

Maintenant *r* choisit une question et présente à *q* une réponse, c'est-à-dire une carte du groupe qui constitue la question. Si *q* ne peut pas démontrer que cette réponse contredit l'information (commune ou additionnelle) il doit l'accepter. C'est un point favorable à *r*. La réponse sera ajoutée à l'information commune.

Si *q* démontre, au contraire, que la réponse contredit l'information (commune ou additionnelle), il la refuse. C'est un point favorable à *q*. L'information additionnelle qu'il a utilisée dans la démonstration (s'il en a utilisé) devient maintenant commune ; les cartes correspondantes doivent être ajoutées à celles qui constituent l'information commune.

Après cela, le jeu continue avec une nouvelle question, etc., jusqu'à ce que *r* ait répondu à toutes les questions du jeu.

Si l'on compare ce jeu avec la logique des questions ici développée, il faut constater ses possibilités mais aussi certaines limitations. D'un côté le jeu peut contenir des questions individuelles, fonctionnelles et de vérité. D'un autre côté, dans le jeu, le nombre des réponses est fini, tandis que dans la logique des questions le nombre des réponses est ou bien zéro, pour la question vide, ou bien infini ($\aleph_0$), pour les autres questions. Afin que le jeu soit "jouable", il faut se limiter à un modèle avec peu d'individus d'un système pas trop compliqué. Afin que le jeu soit intéressant, il faut que les prémisses impliquent des négations de réponses pour les diverses questions et aussi que certaines réponses d'une question impliquent des négations de réponses d'autres questions. Dans un jeu intéressant, on ne peut pas éviter qu'il y ait des prémisses qui se contredisent et pour ce cas il faut ajouter la règle :

En démontrant que la réponse contredit l'information, *q* ne peut pas utiliser des cartes qui se contredisent entre elles ou qui contredisent une carte utilisée dans une démonstration antérieure du jeu.

CHAPITRE 4

TYPES SPECIAUX DE QUESTIONS

a. Classification des questions.

On a vu que, dans une classification faite du point de vue de la logique, il y a trois types fondamentaux de questions : les individuelles, les fonctionnelles et les questions de vérité. Cette classification est exclusive si l'on prend comme point de départ les expressions de questions en langue formelle par rapport à un système donné. Elle n'est pas exclusive si l'on prend comme point de départ des expressions de questions en langue naturelle, parce que selon la symbolisation qu'on choisit on peut obtenir différents types de questions (voir section 2.c).

Ici on ne prétend pas que la classification soit exhaustive, quoiqu'elle couvre une grande partie des questions qui intéressent les sciences ou la vie quotidienne. Les types qu'on verra dans ce chapitre sont presque tous des cas spéciaux des trois catégories (les questions de section b sont fonctionnelles, celles de d de vérité, celles de e des trois catégories, celles de f individuelles et fonctionnelles et celles de g fonctionnelles) ; seulement les questions sélectives de section c constituent un cas à part, elles sont des intersections de questions.

Quand on traduit des phrases de la langue naturelle en langue symbolique, il faut fréquemment expliciter certaines choses à partir du contexte. C'est exactement la même situation avec les expressions de questions en langue naturelle (exemples : Déjà ? Jamais ? etc.). Comme dans toutes les traductions il n'y a pas toujours de recettes simples et universelles, mais on peut acquérir une certaine routine sans difficulté. Avec ce qu'on a vu dans les chapitres précédents et ce qu'on verra maintenant, il sera possible de formuler les expressions de questions en langue symbolique dans la plupart des cas.

b. Questions avec deux ou plus noyaux d'interrogation.

Considérons des questions comme [Qui a photographié quoi hier ?] , [Qui viendra avec qui et quand ?], etc., c'est-à-dire des questions avec plusieurs noyaux d'interrogation comme

$[Hx?y?]$, $[H'x?y?z?]$, etc.

Toutes ces questions peuvent être réduites à des questions avec un seul noyau d'interrogation, en utilisant les couples (ordonnés), triples (ordonnés), etc. selon la méthode de Wiener et Kuratowski. On a par définition :

$$\langle x,y\rangle =_{df} \{\{x\},\{x,y\}\}$$

$$\langle x,y,z\rangle =_{df} \{\{x\},\{x,y\},\{x,y,z\}\}$$

etc.

La définition indique que les couples triples, etc. sont des classes de classes, c'est-à-dire des classes de deuxième ordre. On peut traiter en logique les fonctions propositionnelles binaires comme classes de couples, les ternaires comme classes de triples etc. ; mais ce traitement exige qu'on fasse une distinction. Prenons, par exemple, une fonction H qui soit binaire de premier ordre (on a des distinctions et un traitement tout à fait analogues pour les ternaires, etc. et pour les fonctions d'ordre supérieur) : si l'on considère H par rapport aux individus, H est binaire de premier ordre (on écrira, par exemple, "Hab"), cependant, si l'on considère H par rapport aux couples (qui sont des classes de deuxième ordre), alors H est unaire de troisième ordre (on écrira alors "$H\langle a,b\rangle$"). Ainsi chaque fonction binaire de premier ordre est aussi une fonction unaire de troisième ordre. Cette identification est un point très important dans la méthode de Wiener et Kuratowski ; elle permet, dans le système fonctionnel supérieur, de réduire toutes les fonctions propositionnelles à des fonctions propositionnelles unaires.

Au lieu de "$[Hx?y?]$" on a maintenant "$[H\langle x,y\rangle?]$" ou plutôt "$[M_H\langle x,y\rangle?]$" (pour exprimer clairement qu'on ne travaille plus avec une fonction de premier ordre). On veut connaître une classe de deuxième ordre L qui soit un couple d'individus ($(Ex,y)L = \langle x,y\rangle$) et qui satisfasse M_H , c'est-à-dire :

$$[(Ex,y)(L? = \langle x,y\rangle \wedge M_H L?]$$

"Quel est un couple qui satisfait M_H?" ou "Quelle est une classe de deuxième ordre qui est couple et qui satisfait M_H?". Avec l'opérateur λ on obtient :

$$[\lambda L'((Ex,y)(L' = \langle x,y\rangle \wedge M_H L'))L?]$$

ou aussi :

$$[\lambda L'((Ex,y)(L' = \langle x,y\rangle \wedge Hxy))L?]$$

La dernière expression de question peut se traduire par "Quelle est une classe de deuxième ordre qui est couple et dont le premier membre est en relation H avec le deuxième ?" ou dans un exemple concret "Quelle est une classe de deuxième ordre qui est couple et dont le premier membre a photographié hier le deuxième membre ?".

D'une façon tout à fait analogue, on a maintenant : "$[(Ex,y,z)(L? = \langle x,y,z\rangle \wedge M_{H'} L?)]$" à la place de "$[H'x?y?z?]$", et on procède de la même manière pour les expressions de questions avec plus de trois noyaux d'interrogation ou d'un ordre supérieur de ces noyaux. Au lieu de "Qui viendra avec qui et quand ?" on aura plus explicitement "Quelle est une classe de deuxième ordre qui est triple et dont le premier membre viendra avec le deuxième membre à un moment qui est le troisième membre ?".

Il y a des réponses simples de la question $[(Ex,y)(L? = \langle x,y\rangle \wedge M_H L?)]$ qui sont de la forme "$(Ex,y)(\langle a,b\rangle = \langle x,y\rangle \wedge M_H\langle a,b\rangle)$". Par logique, elles sont équivalentes à "$M_H\langle a,b\rangle$", c'est-à-dire à "Hab". Les généralisations des négations des réponses simples sont de la forme "$(L)\sim(Ex,y)(L = \langle x,y\rangle \wedge M_H L)$", et dans le système supérieur on a les équivalences

$$\begin{aligned}(L)\sim(Ex,y)(L = \langle x,y\rangle \wedge M_H L) &\equiv (L)(x,y)(L = \langle x,y\rangle \supset \sim M_H L)\\ &\equiv (x,y)\ \sim M_H\langle x,y\rangle\\ &\equiv (x,y)\ \sim Hxy\end{aligned}$$

On voit ainsi qu'entre les réponses suffisantes il y a toutes celles qu'on attend normalement (naturellement il y a aussi d'autres d'ordre supérieur).

c. Questions sélectives.

Des questions comme [Aimez-vous Brahms ou Chopin ?], [Eugénie a-t-elle rendu visite à Paul ou à Jean ?], quoiqu'étroitement liées aux questions de vérité, constituent un cas spécial. Elles seront appelées ici "questions sélectives" et traitées comme intersections (malgré le "ou") de questions de vérité. On a ainsi $[\delta?A]_N \cap [g?B]_N$, c'est-à-dire [Aimez-vous Brahms ?] $\cap$ [Aimez-vous Chopin ?] ou [Eugénie a-t-elle rendu visite à Paul ?] $\cap$ [Eugénie a-t-elle rendu visite à Jean ?]. Les deux questions composantes peuvent avoir aussi des prémisses, sans qu'on exige que les classes des prémisses pour les deux soient les mêmes.

La classe des expressions qui sont des réponses suffisantes aussi bien de $[\delta?A]_N$ que de $[g?B]_N$, contient des éléments comme "$A \wedge B$", "$A \wedge \sim B$", "$\sim A \wedge B$", "$\sim A \wedge \sim B$" (s'ils ne sont pas des négations de théorèmes de N).

Si nous avions de plus $\sim A \equiv B$, comme dans la question [Paul vient-il ou ne vient-il pas ?], on obtient selon M2, M1 et substitution de symboles liés :

$$\begin{aligned} [\delta?A]_N \cap [g?\sim A]_N &= [\delta?A]_N \cap [g?A]_N \\ &= [\delta?A]_N \end{aligned}$$

Par rapport à la question [Eugénie s'est-elle mariée avec Paul ou avec Jean ?] il faut voir si le système affirme "$\sim A \equiv B$" (ou si les prémisses l'affirment, supposant, pour ne pas compliquer les choses, que la classe des prémisses pour les deux questions composantes soit la même). Dans le cas affirmatif (si par exemple, le système établit une monogamie de fait et qu'Eugénie s'est mariée avec un des deux) on a $[\delta?A]_N$ et une réponse comme "Eugénie s'est mariée avec Paul" est suffisante. Dans le cas contraire, il s'agit d'une question sélective qui n'est pas réductible à une simple question de vérité ; "Eugénie s'est mariée avec Paul" ou "Eugénie ne s'est pas mariée avec Paul" ne lui répondent pas.

d. Questions conditionnelles.

Les questions conditionnelles constituent un type spécial de questions de vérité, dans lesquelles on questionne une implication entière, plus précisément dans lesquelles on veut connaître la fonction de vérité applicable à une valeur de vérité qui est symbolisée par une implication. Cela veut dire qu'on a

$[\delta?(A \supset B)]$. Du point de vue formel, ces questions n'ont rien de particulier ; on leur applique le traitement des autres questions de vérité . Ainsi on a les réponses simples "$A \supset B$" et "$\sim(A \supset B)$" et le reste du développement est sans problème.

La difficulté se trouve ailleurs, dans la langue naturelle, qui pour les expressions de questions utilise quelquefois des formulations qui ne correspondent ni au traitement formel, ni aux réponses qu'on attend. Prenons par exemple les expressions (a) "S'il fait beau, les touristes viennent-ils ?" et (b) "Si Jeanne est malade, travaille-t-elle ?". Les réponses simples de (a) sont, formulées librement, (c'est-à-dire qu'au lieu de "$\sim(A \supset B)$" on utilisera la formulation équivalente "$A \wedge \sim B$") :

S'il fait beau les touristes viennent.
Il fait beau et néanmoins les touristes ne viennent pas.

Il n'y a pas de problème, on peut traduire (a) par "$[\delta?(A \supset B)]$" . Pour (b) c'est différent. Si l'on procédait de la même façon, on aurait les réponses simples :

Si Jeanne est malade, elle travaille
Jeanne est malade et néanmoins elle ne travaille pas

tandis que les réponses qu'on attend seraient :

Si Jeanne est malade, elle ne travaille pas
Jeanne est malade et néanmoins elle travaille

qui ne correspondent pas à l'expression formelle "$[\delta?(A \supset B)]$" mais à "$[\delta?(A \supset \sim B)]$" . Ainsi en traduisant les expressions des questions conditionnelles en langue formelle, il faut faire attention et voir si l'on a "$[\delta?(A \supset B)]$" ou plutôt "$[\delta?(A \supset \sim B)]$", qui correspondait littéralement à "Est-ce que si Jeanne est malade, elle ne travaille pas ?". Cette distinction est très importante, parce qu'en général on n'a pas :

$$[\delta?(A \supset B)] = [\delta?(A \supset \sim B)]$$

Par rapport à certaines expressions de questions comme "Si le ministre arrive aujourd'hui, le député restera-t-il ?" on peut avoir des doutes, s'il faut les traduire par "$[\delta?(A \supset B)]$" ou bien par "$[\delta?(A \supset \sim B)]$" . Avec "$[\delta?(A \supset B)]$" on a les réponses simples :

Si le ministre arrive aujourd'hui, le député restera
Le ministre arrive aujourd'hui et néanmoins le député ne restera pas

ce qui correspond au cas où le député serait en principe intéressé à voir le ministre. Avec "[$\int$?(A $\supset$ $\sim$B)]" on a les réponses simples :

Si le ministre arrive aujourd'hui, le député ne restera pas
Le ministre arrive aujourd'hui et néanmoins le député restera

ce qui correspond au cas où le député faisait en principe tout pour éviter le ministre.

Si la formulation en langue naturelle est tout à fait ambiguë et si le contexte n'indique pas comment résoudre le doute, on peut préférer répondre aux deux questions. Cela signifie que l'on considère l'expression de question sélective "[$\int$?(A $\supset$B)] $\wedge$ [$\int$?(A $\supset$ $\sim$B)]", qui correspondrait à "Si le ministre arrive aujourd'hui le député restera-t-il ou ne restera-il pas ?" ; la question a des éléments comme "A $\wedge$ B", "A $\wedge$ $\sim$(A $\wedge$ B)", etc.

Il ne faut pas confondre les questions conditionnelles avec des questions comme [Si *a* gagne, qu'achètera-t-il ?] ([*Ha* $\supset$ *H'ax?*]), qui sont simplement des questions individuelles (ou fonctionnelles). Avec l'opérateur λ on les réduit facilement à la forme standard.

Il ne faut pas non plus les confondre avec les questions de la prochaine section, qui sont de la forme :

Puisqu'il fait beau, les touristes viennent-ils

ou seulement la partie :

Les touristes viennent-ils ?

est question.

e. Questions qui ajoutent des prémisses.

Les questions de la forme :

Puisqu'Eugénie a gagné, qui paiera ?
Puisqu'Eugénie a gagné, fera-t-elle le voyage ?

demandent quelque chose et augmentent en même temps les prémisses , en ajoutant une explicitement : dans les deux exemples c'est

"Eugénie a gagné". En symbolisant la fonction payer par "H", en abrégeant "Eugénie fera le voyage" par "A" et "Eugénie a gagné" par "B", et en supposant que les deux questions soient construites par rapport au système N et à la classe des prémisses primitives S, on a :

$$[Hx?]_N S \cup \{"B"\}$$

$$[\delta ?A]_N S \cup \{"B"\}$$

Au lieu de la classe S des prémisses primitives on a maintenant la classe S $\cup$ {"B"}, qui contient en plus la prémisse "B".

On voit sans difficulté que $[P]_N S \cup \{"B"\}$ (par exemple [Qui paiera ?]$_N$S$\cup$ {"Eugénie a gagné"}) est plus concret que $[P]_N S$ ([Qui paiera ?]$_N$S).

En relation avec l'adjonction de prémisses on peut formuler quelques définitions qui éclairent certains aspects du dialogue questions-réponses.

Si l'on présente la question [Qui a inventé cet appareil ?] quelqu'un peut répondre "Charles n'a pas inventé cet appareil". Cette réponse n'est pas suffisante, mais utile parce qu'elle permet d'éliminer certaines des réponses suffisantes, comme par exemple "Charles a inventé cet appareil".

On peut préciser toute cette situation de la façon suivante : Supposons que "C" soit une réponse suffisante de la question $[P]_N S$ et que "B" soit une expression bien formée (non négation d'une conclusion à partir de S) qui implique (selon les conclusions à partir de S) "$\sim$C". Alors "B" sera appelé "réponse productive" par rapport à $[P]_N S$. Une réponse productive peut être en même temps réponse suffisante de la même question (par exemple "Ha" de $[Hx?]_N S$ ou "A" de $[f?A]_N S$), mais elle ne l'est pas nécessairement. Les réponses productives qui ne sont pas des réponses suffisantes de la question respective seront appelées "réponses utiles". Finalement on appellera "relation d'élimination" [8] la relation entre "B" et "C".

[8] Dans [15] "réponse productive" et "réponse utile" ont été définies par rapport aux réponses parfaites et non par rapport aux suffisantes. Au lieu du terme "dépendance" ("Abhängigkeit") de [16] on utilise ici "élimination" de façon à ce que :
"C" dépende de "B"
corresponde à :
"$\sim$B" élimine "C".

En ajoutant une réponse utile "B" à la classe des prémisses S, on obtient une question plus concrète qui ne contient plus "C" (de plus, il y a naturellement d'autres changements) ; "B" (qui implique "$\sim$C") a éliminé "C". Tandis que les autres réponses productives (qui éventuellement conduisent à des résultats similaires) répondent à la question, les réponses utiles ne lui répondent pas mais permettent de la cerner clairement. C'est là que réside l'utilité des réponses utiles.

f. Questions avec des exigences numériques.

Les questions avec des exigences numériques (et aussi celles avec des exigences de totalité de la prochaine section) ont été traitées largement en [2] , [1] et [3]. Dans les travaux de Belnap et Aqvist ces exigences constituent les critères fondamentaux pour classer les questions [9] et pour considérer ensuite chaque classe de façon séparée. Ici, au contraire, on montrera qu'elles s'adaptent organiquement au schéma général du texte, sans qu'on ait besoin d'un traitement spécial.

Considérons l'expression symbolique "Ha". On peut la traduire par "a satisfait H" ou aussi par "a est un individu qui satisfait H", "a est au moins un individu qui satisfait H", "a est exactement un individu qui satisfait H", "a est un exemple de ce qui satisfait H", etc.

Un procédé tout à fait analogue peut être appliqué à "[Hx?]", et on peut traduire cette expression symbolique par "Qui satisfait H ?", "Quel est un individu qui satisfait H ?", "Quel est au moins un individu qui satisfait H ?", "Quel est exactement un individu qui satisfait H ?", "Quel est un exemple de ce qui satsifait H ?", etc. Dans tous ces cas, les exigences numériques sont seulement apparentes et ne modifient pas la question primitive. On voit cela clairement si l'on considère les réponses correspondantes, qui dans tous ces cas sont les mêmes. Prenons, par exemple, la

[9] Par exemple Belnap [2], en s'appuyant sur ce qu'il appelle "exigences de sélection" et "exigences de prétention maximale de complétude", présente comme classes importantes : les questions d'alternative unique, les questions de liste complète et les questions non-exclusives.

formulation "Quel est exactement un individu qui satisfait H ?". Elle admet comme réponse parfaite (non négation d'un théorème) "$Ha \wedge Hb$" même avec $\vdash a \neq b$, c'est-à-dire, elle admet qu'on réponde "a est exactement un individu qui satisfait H et b est exactement un individu qui satisfait H". Naturellement on n'a pas la même situation avec des formulations comme "Quel est l'unique individu qui satisfait H ?". Dans ce cas, comme on le verra, il ne s'agit plus de la question $[Hx?]$.

En laissant de côté les exigences numériques apparentes, supposons que nous voulons dire que la fonction H de la question a au moins un élément :

Quel individu satisfait H, en ayant H au moins un élément ? ce qui, en forme symbolique, donne :

$$[Hx? \wedge (Ey)Hy]$$

et avec l'opérateur λ :

$$[\lambda z(Hz \wedge (Ey)Hy)x?]$$

Cette question est identique à $[Hx?]$. On démontre ce résultat sans difficulté en établissant que les réponses parfaites d'une de ces questions sont suffisantes pour l'autre et vice-versa (les généralisations des négations des réponses simples de $[Hx? \wedge (Ey)Hy]$, qui sont de la forme "$(x)\sim(Hx \wedge (Ey)Hy)$", sont équivalentes à "$(x)\sim Hx$").

Afin de voir un autre type de questions, supposons qu'on veuille dire que la fonction H de la question ait exactement un élément :

Quel individu satisfait H, en ayant H exactement un élément ?

ou :

Quel est l'unique individu qui satisfait H ?

(mais non, comme on l'a vu, "Quel est exactement un individu ...?"). En forme symbolique on a :

$$[Hx? \wedge (E_1y)Hy]$$

ou avec l'opérateur λ, en abrégeant "$\lambda z(Hz \wedge (E_1y)Hy)$" par "$H_u$" :

$$[H_u x?]$$

Entre les questions $[H_u x?]$ et $[Hx?]$ on n'a ni la relation = ni $\subsetneq$, parce que "Ha" par exemple, n'implique ni "$H_u a$" ni aucune autre réponse parfaite de $[H_u x?]$ et inversement "$(x)\sim H_u x$" n'implique ni "$(x)\sim Hx$" ni aucune autre réponse parfaite de $[Hx?]$.

La question $[H_u x?]_N$ n'a pas "$H_u a \wedge H_u b$" comme réponse suffisante si l'on a $\vdash_N a \neq b$, parce que "$H_u a \wedge H_u b$", c'est-à-dire "$Ha \wedge Hb \wedge (E_1 y)Hy$" est la négation d'un théorème de N .

On arrive à un autre type de questions semblables à celles traitées dans la section 4.b, si l'on veut connaître <u>deux</u> individus (différents) qui satisfont H (unaire). On a alors :

$$[Hx? \wedge Hy? \wedge x? \neq y?]$$

ce qui revient à une question avec deux noyaux d'interrogation, quoique H soit unaire. On voit cela clairement si l'on utilise l'opérateur λ :

$$[\lambda K((Ex,y)(K = \langle x,y\rangle \wedge Hx \wedge Hy \wedge x \neq y))L?]$$

On peut traduire "$[Hx? \wedge Hy? \wedge x? \neq y?]$" par "Quels sont deux individus (différents) qui satisfont H ?", "Quels sont exactement deux individus (différents) d'individus qui satisfont H ?", etc.

Dans tous ces cas on peut avoir des réponses parfaites comme "$Ha \wedge Hb \wedge a \neq b \wedge Hc \wedge Hd \wedge c \neq d$", même si a,b,c et d sont tous différents les uns des autres.

Naturellement on peut inclure dans ces dernières expressions de questions des exigences additionnelles, par exemple qu'il y ait au moins deux individus qui satisfont H, ou exactement deux (dans ce dernier cas, on peut dire "Quels sont les uniques deux individus qui satisfont H ?"). Le même traitement est en principe applicable aux questions par rapport à trois ou plusieurs individus.

Jusqu'à présent, les exigences qu'il y ait au moins n individus qui satisfont H ou exactement n individus, ont été formulés dans l'expression de question même. Cependant, on peut présenter ces exigences aussi en forme de prémisses qu'on ajoute à la classe de prémisses de la question. Un exemple serait :

$$[Hx?]_{N} S \cup \{"(Ey)Hy"\}$$

qui correspondrait à :

Puisque la fonction H a au moins un élément, quel est l'individu qui la satisfait ?
Il y a une large intersection entre $[Hx?]_N S \cup \{"(Ey)Hy"\}$ et $[Hx?]_N S$, mais aucune des deux questions n'est sous-question de l'autre, parce que "$(x){\sim}Hx$" appartient à la deuxième sans appartenir à la première, et "$(Ey)Hy$" appartient à la première sans appartenir à la deuxième.

Il y a d'autres exigences numériques possibles. Ainsi on peut exiger qu'il y ait au maximum n individus. En principe toutes ces questions ne présentent pas de difficulté. Cependant le traitement ici présenté s'applique seulement aux cas où les exigences sont formulées dans l'expression de questions ou dans une de ses prémisses et non dans des conditions qu'on peut imposer de l'extérieur aux réponses, en indiquant quel type de réponse on voudrait bien obtenir (voir section 2.d).

g. Questions avec des exigences de totalité.

Dans cette section on verra des questions de la forme : Quels sont tous les individus qui satisfont H ?

Dans ce cas on ne veut pas connaître les individus individuellement, mais leur totalité, c'est-à-dire une classe d'individus. En d'autres termes, on demande :

Quelle est une classe qui coïncide avec H?

en forme symbolique :

$[F? = H]$

et avec l'opérateur λ :

$[\lambda G(G = H)F?]$

Une question de ce type n'a pas exclusivement des réponses suffisantes triviales comme "$H = H$" , mais aussi d'autres, comme éventuellement "$H' \cup H'' = H$", "$\{a_1, \ldots , a_n\} = H$", "$(Ha_1 \wedge \ldots \wedge Ha_n) \wedge (x)(Hx \supset (x = a_1 \vee \ldots \vee x = a_n))$" ("$a_1$, etc. satisfont H et aucun autre individu ne le fait"), etc.

CHAPITRE 5

SUITES de QUESTIONS

a. Suites liées de questions.

Fréquemment les questions ne se présentent pas d'une façon isolée mais en suites ; on le voit aussi bien chez les petits enfants que dans la bureaucratie. Du point de vue de la logique pas toutes les suites de questions ont le même intérêt ; on peut espérer de trouver plus de résultats s'il y a une connexion de type logique entre les questions qui constituent la suite respective. Pour commencer on analysera ici les suites appelées "suites liées de questions", comme par exemple :

Dupond connaît-il le Pacifique ?
Si Dupond ne le connaît pas, qui ici le connaît ?
Si personne ici ne le connaît, où peut-on en être informé ?

Il s'agit d'une suite dont chaque question, à l'exception de la première, fait référence à une réponse possible de la question précédente. On définit plus précisément "suite liée de questions" comme suite de questions qui satisfait les conditions :

(a) La première question a la classe S de prémisses, qui peut être vide.

(b) La k + 1-ième question ($k > o$) a pour classe de prémisses celle de la k-ième question et en plus "A_k", qui est une réponse suffisante de la k-ième question [10].

Ainsi nous avons :

$[P]_N S$

$[Q]_N S \cup \{"A_1"\}$

$[R]_N S \cup \{"A_1", "A_2"\}$

...

---

[10] Le traitement présenté dans ce chapitre est souvent différent de celui de [16].

avec les classes de prémisses : S, $S \cup \{"A_1"\}$, $S \cup \{"A_1" , "A_2"\}$, etc. de façon à ce que :

$"A_1" \in [P]_N S$

$"A_2" \in [Q]_N S \cup \{"A_1"\}$

...

L'exemple du Pacifique serait, partiellement symbolisé :

[Dupond connaît-il le Pacifique ?]$_N$S

[Qui ici connaît le Pacifique]? $_N$S$\cup$ {"Dupond ne le connaît pas"}

[Où peut-on être informé sur le Pacifique ?]$_N$S$\cup$ {"Dupond ne le connaît pas", "Personne ici ne le connaît"}

Comme par rapport aux questions mêmes, il faut faire la distinction entre les suites de questions et les expressions de suites, une distinction, dont on verra l'importance dans les prochaines sections.

b. Suites inférentielles de questions.

Supposons qu'on ait modifié la suite originale de la section 5.a en remplaçant la troisième question soit par :

Si le Pacifique est égal à lui-même, où peut-on en être informé ? (i)

soit par :

Si Dutour le connaît, où peut-on en être informé ? (ii)

Les deux nouvelles suites qu'on obtient avec les modifications (i) ou (ii) sont aussi des suites liées de questions, mais elles ont une apparence un peu bizarre. Les raisons de cette apparence sont que, dans (i), "A_2" ("Le Pacifique est égal à lui-même") est une conclusion à partir des prémisses de la deuxième question (c'est même un théorème) et, dans (ii), "A_2" ("Dutour connaît le Pacifique") ne correspond pas à ce qu'on pourrait appeler "approche par exclusion", une caractéristique des suites qui nous intéressent. Ce qu'on veut avoir au lieu de (ii) est que la prémisse additionnelle de la troisième question soit incompatible [11] avec les autres réponses suffisantes de la deuxième question (en laissant de côté les conclusions et les réponses qui impliquent "A_2"). Par exemple "Le capitaine ici connaît le Pacifique" est parfaitement compatible avec "Dutour connaît le Pacifique" (ainsi dans la suite avec (ii) on n'a pas l'incompatibilité souhaitée), tandis que "Le capitaine ici..." est incompatible avec "Personne ici ne connaît le Pacifique" (dans la suite originale on a l'incompatibilité). Après quelques définitions et explications on verra les raisons d'exiger l'incompatibilité vers la fin de cette section.

Certaines suites liées de questions, qui n'ont pas de membres comme (i) et (ii), seront appelées "suites inférentielles de questions" ; il s'agit de suites liées qui satisfont en plus les conditions :

(c) Les "A_k" qu'on ajoute n'appartiennent pas à $C_N(S \cup \{$"A_1", ..., "A_{k-1}"$\})$ (elles ne sont pas des conclusions à partir des prémisses de la k-ième question).

(d) Toutes les réponses suffisantes de la k-ième question qui ne sont ni des conclusions (à partir des prémisses de la question) ni n'impliquent "A_k", sont incompatibles avec "A_k" .

L'exemple original est une suite inférentielle, tandis que la suite avec (i) ne l'est pas grâce à (c) et la suite avec (ii) ne l'est pas grâce à (d).

Supposons que nous ayons une suite inférentielle de questions avec n membres. Nous appelons "réponses de k-ième degré" ($1 \leq k \leq n$) les réponses suffisantes de la k-ième question de la suite, à l'exception des réponses qui impliquent "A_k". Pour la n-ième question (la dernière) il n'y a pas d'exception, parce qu'il n'y a pas un "A_n" qu'on ajoute à quelque chose.

Soit "D" une réponse de k-ième degré de la suite. Du fait que la k-ième question a, entre autres, les prémisses

---

[11] "A" incompatible "B" veut dire qu'on a "$\sim(A \wedge B)$" (comme conclusion).

"A_1", ..., "A_{k-1}", on démontre :

$$D \equiv (A_1 \wedge \ldots \wedge A_{k-1} \wedge D)$$

L'expression "$A_1 \wedge \ldots \wedge A_{k-1} \wedge D$", qui est aussi une réponse de k-ième degré, sera appelée "forme conjonctive de D".

A partir du point (d) de la définition de "suite inférentielle" et à partir de la définition de "réponse de k-ième degré", on démontre qu'une réponse de k-ième degré est incompatible avec une réponse de i-ième degré ($i < k$) de la même suite, à moins qu'il ne s'agisse d'une conclusion (à partir des prémisses de la i-ième question).

Au lieu d'utiliser le terme "réponse de k-ième degré de la suite" on peut aussi utiliser "réponse suffisante à la suite entière", c'est-à-dire qu'on considère ici que les réponses de k-ième degré répondent à la suite entièrement et non seulement à une des questions qui la constituent.

Si l'on observe l'acte de répondre à une suite inférentielle globalement, on constate que pas toutes les réponses suffisantes de la première question semblent acceptables comme réponses à la suite entière. Seulement avec une réponse de premier degré le dialogue questions-réponses est considéré comme terminé. Ainsi dans l'exemple original du Pacifique, on peut répondre :

Dupond connaît le Pacifique

et le dialogue se termine, on a répondu à la suite entière. Si au contraire on répond :

Dupond ne connaît pas le Pacifique

il faut répondre aussi à la deuxième question. Si l'on répond à la deuxième question par une réponse de deuxième degré comme :

Le capitaine ici connaît le Pacifique

on a de nouveau répondu à la suite entière et cela en deux étapes, commençant par "A_1" ("Dupond ne connaît pas le Pacifique") et après par une réponse de deuxième degré ("Le capitaine ici connaît le Pacifique"). Si, au contraire, la réponse suffisante à la deuxième question n'est pas de deuxième degré comme :

Personne ici ne connaît le Pacifique

alors on doit répondre à la troisième question, etc.

Les réponses suffisantes à la suite entière sont ou bien de forme conjonctive comme : "D" (premier degré), "$A_1 \wedge D'$ "(deuxième degré), "$A_1 \wedge A_2 \wedge D''$ "(troisième degré), etc., ou bien équivalente à une de ces formes. En laissant de côté les conclusions, le fait de répondre avec une réponse de k-ième degré signifie qu'on nie les réponses de degré inférieur et affirme à leur place "A_1" , "A_2" , ..., "A_{k-1}" .

Pour tenir compte de cette façon de répondre à certaines suites de questions, on a formulé l'exigence de l'incompatibilité, qui correspond à l'exclusion : ou bien on répond par une réponse de k-ième degré et le processus est terminé, ou bien le processus continue. Sans incompatibilité, on pourrait répondre par une réponse de k-ième degré et le processus continuerait (ou plutôt recommencerait) quand même.

Dans les formulations libres en français courant on trouve fréquemment certaines modifications par rapport aux traductions plus précises. Ainsi quelquefois apparaît l' "ou" intercalé entre les membres d'une suite comme dans :

> Dupond connaît-il le Pacifique ? Ou, s'il ne le connaît pas, qui ici le connaît ? Ou, ...

Occasionnellement on ne mentionne pas les prémisses "A_k" , on les considère sous-entendus :

> Dupond connaît-il le Pacifique ? Ou, qui ici le connaît ? Ou, ...

Dans tous les cas il ne s'agit pas de "questions disjonctives", questions sélectives ou quelque chose de semblable. L'aspect caractéristique des suites est l'ordre, qu'on voit clairement dans la non-commutativité de cet "ou", tandis que par rapport aux disjonctions et aux questions sélectives on a la commutativité.

On a ajouté "A_k" comme prémisse à celles de la k + 1-ième question, comme si l'expression de cette question était de la forme "puisque ..." et non de la forme "si ...". Cependant si l'on répond à la *k*-ième question par une réponse suffisante qui implique "A_k" , alors le "si ..." se transforme en "puisque ...". Supposons, par exemple, qu'on réponde à la première question par "A_1" ("Dupond ne connaît pas le Pacifique"), alors la deuxième question sera reformulée comme :

Puisque Dupond ne connaît pas le Pacifique, qui ici le connaît

c. Suites post-liées et post-inférentielles de questions.

Si l'on remplace le point (b) des définitions de "suite liée" et "suite inférentielle" par :

(b') La $k+1$-ième question ($k > 0$) a pour classe de prémisses celle de la *k*-ième question et en plus "A_k", qui est impliquée (selon $C_N(S \cup \{$"A_1", ..., "A_{k-1}"$\})$) par une réponse suffisante (supposons "B_k") de la *k*-ième question

on arrive aux "suites post-liées" et "post-inférentielles".

Etant donné que "A_k" est impliqué par lui-même, (b) est un cas spécial de (b'), c'est-à-dire, les suites post-liées et post-inférentielles incluent les suites liées et inférentielles respectivement. Pour (b') l'expression ajoutée aux prémisses n'est plus nécessairement une réponse suffisante de la question antérieure, maintenant il suffit qu'elle soit impliquée par une telle réponse.

Afin d'avoir un exemple, remplaçons dans la suite originale de la section a la troisième question par :

Si quelqu'un connaît le Pacifique, peut-on en parler tranquillement ?

c'est-à-dire :

[Peut-on parler tranquillement du Pacifique ici ?]$_N S \cup \{$"Dupond ne le connaît pas", "Quelqu'un ici le connait"$\}$

On voit que la nouvelle prémisse "A_2" n'est plus une réponse suffisante de la deuxième question, mais elle est impliquée par toutes les réponses directes et beaucoup d'autres réponses de cette question.

Toutes les autres conditions sont maintenues, y compris celle de l'incompatibilité, de façon à ce que la nouvelle suite soit post-inférentielle.

En principe il n'y a pas de changement par rapport aux définitions et explications des sectons antérieures (par exemple la définition de "réponse de k-ième degré" est la même). Seulement la façon typique de répondre aux suites ne correspond plus en général à la forme normale "$A_1 \wedge \ldots \wedge A_{k-1} \wedge D$". Au lieu de répondre à la i-ième question par "A_i" (par exemple "Quelqu'un ici connaît le Pacifique") on répond par "B_i" ("Jeanne ici connaît le Pacifique") ; mais parmi les conclusions respectives on a "$B_i \supset A_i$" .

d. Schémas de suites et cas spéciaux

Considérons la suite :

$[H_u x?]_N S$

$[\delta ? H'a]_N S \cup \{"H_u a"\}$

$[H''ay?]_N S \cup \{"H_u a", "H'a"\}$

qui commence par [Quel est l'unique individu qui satisfait H ?]. En supposant que les prémisses ajoutés ne soient pas des conclusions par rapport aux questions précédentes, on voit bien qu'il s'agit d'une suite inférentielle, les quatre conditions sont satisfaites. Des réponses suffisantes à la suite entière seraient, par exemple :

$(x) \sim H_u x$ (premier degré)

$H_u a \wedge \sim H'a$ (deuxième degré)

$H_u a \wedge H'a \wedge H''ad$ (troisième degré).

Revenons à la suite ou plutôt à l'expression qui la symbolise et qui s'étend sur trois lignes. Si, dans cette expression de suite, on met "b" à la place de "a" dans toutes les occurences, on obtient une nouvelle expression de suite, qui symbolise une suite éventuellement différente de l'originale. Une substitution analogue peut se faire avec "c", etc. Avec un nombre infini de symboles individuels, on peut obtenir, ainsi, un nombre infini d'expressions de suites qui dénotent éventuellement un nombre infini de suites.

La classe de toutes ces suites a un intérêt logique, et, pour nous reférer à une suite quelconque de la classe, nous utilisons des expressions spéciales, appelées ici "schémas de suites". Au lieu des symboles de constantes, "a", "b", etc., qu'on change d'une expression de suite à l'autre, un schéma contient comme symboles de variables[12] les lettres "α", "β", etc. (l'utilisation de "x", "y", etc. produirait des confusions).

Ainsi un schéma correspondant à la classe des suites mentionnée serait :

$$[H_u x?]$$

$$[\delta ? H'\alpha]_N S \cup \{"H_u\alpha"\}$$

$$[H''\alpha y?]_N S \cup \{"H_u\alpha", "H'\alpha"\}$$

En écrivant "a" ou "b", etc. au lieu de "α", le schéma se transforme en une expression de suite, qui dénote une suite déterminée. On fera la substitution à partir de la réponse suffisante donnée à la première question, si cette réponse permet de déduire une réponse directe déterminée (dans le cas contraire il s'agit d'une réponse de premier degré et le processus se termine avant qu'on ait fait la substitution).

Deux exemples concrets illustreront les aspects caractéristiques du schéma de suites indiqué. Dans le premier, qui est proche de certaines techniques de programmation, nous supposons que les individus sont des nombres naturels et que "H'" est traduit par "être nombre pair" :

Quel nombre naturel satisfait H_u ?
Si un nombre naturel déterminé satisfait H_u, est-il pair ?
S'il est pair, avec quel nombre naturel est-il en relation H'

Le deuxième exemple, assez différent, serait :

A quelle date avez-vous rendu votre dernière visite ?
Si vous l'avez rendue à une date déterminée, cette date se situe-t-elle avant Samedi 15 ?
Si elle se situe avant Samedi 15, qui vous a reçu à cette date ?

---

[12] Selon ce qui a été indiqué en note 1, on utilise ici "symbole de variable" au lieu du terme "variable" plus fréquemment utilisé.

Pour les deux exemples il y a naturellement des formulations plus aisées, par exemple "Si oui, avec quel nombre ... ?" , ou on pourrait supprimer chaque fois la deuxième expression de question entièrement ; mais avec cette dernière modification on s'éloignerait beaucoup du traitement formel.

En ce qui concerne les schémas de suites en général, on procède exactement de la même façon que dans le cas mentionné. Le traitement indiqué, quoiqu'applicable aussi à d'autres suites, est spécialement intéressant par rapport aux suites inférentielles (c'est le cas analysé) et post-inférentielles.

Un autre point qu'il faut mentionner est qu'il y a non seulement des suites inférentielles (post-inférentielles) *simples*, comme celles qu'on a vues jusqu'à présent, mais aussi des suites *multiples*[13]. Par exemple une suite double commencerait de cette façon :

Dupond connaît-il le Pacifique ?
S'il le connaît, quand était-il là-bas la dernière fois ?
S'il ne le connait pas, qui ici le connaît ?
...

Dans l'intérêt d'une meilleure clarté il semble préférable de présenter les suites multiples en forme d'arbres, ce qu'on peut faire toujours sans difficulté. Le traitement de ces arbres est analogue à celui des suites simples.

e. Les questionnaires.

Les questionnaires représentent des suites spéciales de questions. Normalement ces suites ne sont même pas liées, comme dans :

...
Lieu de naissance ?
Nom du père ?
...

Cependant une partie d'un questionnaire peut représenter une suite post-inférentielle ou inférentielle :

---

[13] Un traitement différent d'abres de questions par certains graphes, appelés "questionnaires", peut être trouvé dans [11a] .

...

Numéro de contrôle ?

Si vous n'avez pas de numéro de contrôle, quand avez-vous déposé la demande ?

Si vous n'avez pas déposé de demande,...

...

Si l'on prend le "vous" comme abréviation du nom d'une personne déterminée, cette partie ne constitue pas un schéma, elle symbolise une suite déterminée ; dans le cas contraire on aurait le schéma (avec "α" au lieu de "vous" et en traduisant "être le numéro de contrôle de" par "H" et "déposer la demande à la date de" par "H'") :

$[Hx?\alpha]_N S$

$[H'\alpha y?]_N S \cup \{"(x){\sim}Hx\alpha"\}$

...

En général, et même avec le "vous" comme symbole de constante, on peut avoir des parties d'un questionnaire qui sont des schémas, par exemple :

...

Numéro de contrôle ?

Si le numéro est supérieur à 10 000, ...

...

Il s'agit ici d'un autre exemple du schéma de la section d (pour le traitement formel il faudrait intercaler "Si un numéro déterminé est votre numéro de contrôle, est-il supérieur à 10 000 ?").

Naturellement les questionnaires imposent à celui qui les remplit implicitement ou explicitement un grand nombre de conditions. Par exemple on veut avoir des réponses vraies qui ne soient pas des théorèmes et qui n'exigent pas des déductions compliquées pour déterminer s'ils sont suffisants. Mais tout cela ne change rien au fait que le traitement formel est en principe applicable aux questionnaires.

f. Les questions qu'on pose aux ordinateurs.

Il y a des appareils spéciaux dont la fonction est de répondre à certains types de questions. Les multiples exemples vont de la montre ([Quelle heure est-il ?]) et du thermomètre ([Quelle est la température ici ?]) jusqu'au calculateur de poche et à l'ordinateur. Dans la plupart des cas, un regard ou une manipulation simple expriment la question, tandis qu'une réponse (quelquefois une réponse vraie[14]) est indiquée par l'appareil. Normalement ces appareils en marche, s'ils ne sont pas trop compliqués, présentent des réponses directes.

Pour les calculateurs de poche et plus encore pour les ordinateurs, la situation n'est pas aussi simple. A la différence d'une montre ou d'un thermomètre, ils répondent à une vaste gamme de questions, spécialement à des questions d'unicité comme $[H_u x?]$ (section 4.f), de totalité comme $[F? = H]$ (section 4.g) et de vérité. Les réponses données sont fréquemment vraies par rapport aux modèles respectifs, si l'on considère explicitement les limites du calculateur ou ordinateur, par exemple si "H_u" signifie "être l'unique individu qui satisfait ... dans les limites du calculateur (ordinateur)" (déjà les opérations arithmétiques élémentaires sont soumises à des restrictions par rapport aux nombres représentés par certaines suites de chiffres). Pour les questions d'unicité, on obtient ou bien des réponses directes ou bien la généralisation des négations des réponses simples (par exemple un clignotement peut indiquer que, dans les limites du calculateur, la fonction n'a pas de valeur). Les réponses directes aux questions de totalité correspondent à la forme "$\{...\} = H$", en supposant que la question ait été présentée par rapport à une classe H finie ([Quelle est la classe des 100 premiers individus qui ...?]) ; dans le cas infini, on peut dire que l'ordinateur qui produit indéfiniment des éléments de H ne donne pas une véritable réponse. Pour les questions de vérité, les réponses (directes) peuventêtre quelque chose comme "0" ou "1" ou explicitement "A" ou "NO-A".

Dans tous ces cas, les expressions de questions ont naturellement une formulation spécifique qui est différente de

---

[14]Dans beaucoup d'appareils de mesure et de contrôle les réponses suffisantes sont approximatives ("Il est approximativement 7h10"), et les questions sont les classes de ces réponses, de façon à ce qu'on ait [Quelle heure est-il approximativement ?].

la formulation logique et varie d'un calculateur ou d'une langue de programmation à l'autre ; par exemple [3 + 4 = x ?] peut être pour un calculateur de poche "3 + 4 =" et dans une langue de programmation (d'une façon simplifiée) quelque chose comme :

```
K = 3 + 4
PRINT K
```

Afin de revenir aux suites de questions, on pensera sans doute aux ordinateurs et à leurs programmes. Naturellement il n'y a pas une correspondance immédiate entre un ordre d'un programme et une question d'une suite, mais plusieurs ordres pris ensemble peuvent correspondre à une question. Cependant ce qui est réellement intéressant et qui correspond dans la programmation aux schémas de suites inférentielles (ou plutôt d'arbres inférentiels) de questions sont les boucles, une des caractéristiques fondamentales des ordinateurs.

Les boucles sont introduites par un ordre de type "IF". Pour voir un cas concret, supposons que l'ordre soit présenté de la façon suivante :

IF (X) i,j,k

"X" abrège une expression individuelle, éventuellement assez complexe, qui symbolise un nombre réel. Généralement "X" contient des symboles de variables, mais on peut aussi traiter des cas où "X" contient seulement des symboles de constantes. Les lettres "i", "j" et "k" symbolisent des nombres naturels ; elles sont utilisées pour numeroter les ordres du calcul. Dans le contexte présent on suppose que ces ordres correspondent à des questions. Afin de nous approcher un peu plus de la symbolisation des suites de questions, nous écrirons "$[P_i]_N S_i$" au lieu de "i" et de façon analogue pour "j" et "k". On a alors :

IF (X) $[P_i]_N S_i, [P_j]_N S_j, [P_k]_N S_k$

L'ordre "IF", indiqué dans la langue de programmation, signifie : Si $X < 0$, il faut passer à l'ordre numéro i, c'est-à-dire répondre à la question $[P_i]_N S_i$, si $X = 0$, il faut passer à l'ordre j et si $X > 0$, il faut passer à l'ordre k.

Un schéma de suite (multiple) qui correspond à la boucle introduite par l'ordre "IF", procède par deux étapes pour couvrir les trois possibilités ; on demande premièrement $[X < 0?]$ et dans le cas d'une réponse négative on demande $[X = 0?]$. Ainsi on a:

$$[X < 0?]_N S$$

$$[P_i]_N S \cup \{"X < 0"\}$$

$$[X = 0?]_N S \cup \{"\sim X < 0"\}$$

$$[P_j]_N S \cup \{"\sim X < 0", "X = 0"\}$$

$$[P_k]_N S \cup \{"\sim X < 0", "\sim X = 0"\}$$

C'est-à-dire, à partir de la première question, on a avec la réponse "oui" la deuxième question et avec "non" la trosième, à partir de la troisième question, on a avec "oui" la quatrième et avec "non" la cinquième question.

Tout cela montre qu'il y a une connexion assez étroite entre programmes et schémas de suites de questions.

Chapitre 6

L'EFFECTIVITE DES QUESTIONS

a. Effectivité et énumérabilité effective.

Dans cette section quelques termes et résultats dont on aura besoin dans les sections suivantes, seront mentionnés informellement ; on trouve leurs définitions et démonstrations formelles dans la plupart des textes de logique mathématique ou de métamathématique (voir par exemple [11], [20] et aussi [6]).

Selon une technique qui est due à Gödel, on assigne des nombres naturels aux expressions bien formées d'un système, de telle façon qu'il y ait une bijection (une correspondance biunivoque) entre la classe des expressions bien formées d'une part et une sous-classe des nombres naturels de l'autre. Les nombres de la sous-classe sont appelés "nombres de Gödel" des expressions respectives.

Une classe de nombres naturels est appelée "récursive" s'il y a un procédé mécanique qui en principe permet de déterminer dans tous les cas et dans un nombre fini de pas si un nombre naturel donné appartient ou n'appartient pas à la classe. Une classe de nombres naturels est appelée "récursivement énumerable" s'il y a un procédé mécanique en principe applicable à tous les nombres naturels et opérant dans un nombre fini de pas qui produit ("enumère") exactement les éléments de la classe (ni plus ni moins). On peut démontrer que chaque classe récursive est récursivement énumérable, sans qu'on ait nécessairement le résultat inverse.

Une classe d'expressions bien formées est appelée "effective" ("effectivement énumérable") si la classe des nombres de Gödel correspondante est récursive (récursivement énumérable). Pour établir dans la pratique si une classe est effective (effectivement énumérable) on peut avoir recours aux nombres de Gödel, mais on peut aussi procéder directement, c'est-à-dire chercher un procédé mécanique qui permette de déterminer ... si une expression bien formée donnée appartient ... (un procédé mécanique ... qui produit exactement les expressions de la classe).

Une classe finie d'expressions bien formées est toujours effective et c'est aussi le cas pour la classe de toutes les expressions bien formées par rapport à un système quelconque. Si l'on travaille avec un nombre infini d'axiomes ou prémisses on les choisit de telle façon que leur classe soit effective (c'est-à-dire qu'on ne parle pas de "système" ou "classe de conclusions" si la classe des axiomes ou prémisses n'était pas effective). On peut démontrer que la classe des théorèmes formée à partir d'une classe effective d'axiomes (et par des règles axiomatiques qui ont aussi un certain type d'effectivité) est au moins effectivement énumérable, et on a le même résultat pour la classe des conclusions (par rapport au système) à partir d'une classe effective de prémisses. Un système ou une classe de conclusions peut même être effective ; un système effectif s'appelle aussi "décidable".

On peut démontrer (i) qu'une classe d'expression bien formées effective est aussi effectivement énumérable et sa classe complémentaire (par rapport à la classe des expressions bien formées) est également effective (et effectivement énumérable) et (ii) si une classe est effectivement énumérable sans être effective, son complément n'est même pas effectivement énumerable. Les deux points signifient : (i) Si un système est effectif non seulement la classe des négations des théorèmes est effective (ce sont les théorèmes avec "$\sim$" devant) mais aussi la classe des non-théorèmes (qu'il ne faut pas confondre avec la classe des négations des théorèmes) et la classe des expressions bien formées qui ne sont pas des négations de théorèmes. D'autre part, selon (ii), si un système est effectivement énumérable sans être effectif, la classe des négations des théorèmes est aussi effectivement énumérable, mais la classe des non-théorèmes et la classe des expressions bien formées qui ne sont pas des négations de théorèmes ne sont même pas effectivement énumérables.

Afin de résumer ces résultats en quelques lignes, nous écrirons "Ef" pour "être effectif", "En" pour "être effectivement énumérable sans être effectif", "neg N" pour "la classe des négations des théorèmes de N" et " - " pour le complément par rapport à la classe des expressions bien formées respective. On a :

Si $Eƒ$ (N), alors Ef(neg N), $Eƒ$(-N) et Ef(-neg N)

Si En(N), alors En(neg N), mais -N et -neg N ne sont même pas effectivement énumérables.

En ce qui concerne la logique des questions, tous ces termes et résultats sont d'importance, parce que les questions sont des classes d'expressions qui peuvent avoir (ou ne pas avoir) les propriétés mentionnées. Ainsi, pour les questions, l'effectivité signifie que, donnée une expression bien formée, nous pouvons toujours déterminer mécaniquement et dans un nombre fini de pas si cette expression est ou n'est pas une réponse suffisante de la question. Si l'on a seulement énumérabilité effective, il y a au moins un procédé mécanique qui permet toujours de déterminer dans un nombre fini de pas si une justification supposée pour inclure une expression bien formée dans la question et réellement une justification ou pas. Sans effectivité ni énumérabilité effective il n'y a pas un procédé mécanique pour établir une détermination des deux types pour tous les cas.

b. Questions par rapport aux systèmes décidables.

Si le système N par rapport auquel on analyse les questions est décidable, on a les théorèmes suivants :

M8 : La classe des réponses parfaites des questions individuelles, fonctionnelles et de vérité est effective.

Dém. : La classe des réponses simples, de leurs conjonctions et des généralisations des négations des réponses simples est effective. La classe -neg N est également effective, et on a les même résultats pour l'intersection des deux classes effectives.

M9 : Les questions de vérité par rapport à N sont effectives.

Dém. : Toutes les réponses parfaites de [ƒ?A] sont équivalentes ou bien à "A" ou bien à "∿A". Si l'une des deux est théorème (dans un système décidable cela peut se déterminer effectivement) la classe des réponses suffisantes est identique à la classe des théorèmes. Si aucun des deux n'est théorème et si "B" est l'expression bien formée (ni théorème ni négation d'un théorème) dont on veut savoir si elle est réponse suffisante, on se tient aux implications "$B \supset A$" et "$B \supset \sim A$". Si et seulement si l'un des deux est un théorème de N, "B" est une réponse suffisante de la question de vérité.

Pour les questions individuelles et fonctionnelles j'ai trouvé seulement un résultat plus faible (ici uniquement les indications pour les questions individuelles seront données, celles pour les questions fonctionnelles sont tout à fait analogues, mais d'un ordre plus haut). Soit N' un système décidable du même type que N mais dont les axiomes contiennent seulement un nombre fini de symboles de constantes individuelles, en considérant, dans ce cas, toutes les définitions de symboles de constantes individuelles comme des axiomes additionnels. Le théorème suivant est démontré pour les systèmes N' et non pour les systèmes N en général :

M10 : Les questions individuelles (fonctionnelles) par rapport à N' sont effectives.

Dém. : Soit "a_1" ,..., "a_n" la liste finie des symboles de constantes individuelles qui apparaissent dans les axiomes de N', soit "b" un des autres symboles de constantes individuelles du système (s'il y en a) et soit $[Hx?]_{N'}$ la question analysée. Première étape : Appelons "expressions de base" les expressions "Ha_1" ,..., "Ha_n", "Hb", "$(x)\sim Hx$", et biffons celles d'entre elles qui sont des négations de théorèmes. Si toutes sont biffées, il s'agit d'une question vide, sans réponses suffisantes. Deuxième étape : si et seulemnt s'il y a un théorème entre les expressions de base, on a $N' \subseteq [Hx?]_{N'}$. Toutes les expressions de base qui sont des théorèmes seront biffées. Troisième étape : Soit "B" l'expression bien formée (ni théorème, ni négation de théorème) dont on veut savoir si elle est réponse suffisante. (a) Si au moins une des implications "$B \supset Ha_1$" ,...,"$B \supset Ha_n$"$B \supset Hb$","$B \supset (x)\sim Hx$", formées avec des expressions de base non biffées, est théorème, "B" est une réponse suffisante. (b) Supposons que "B(x)" soit une expression bien formée qui contienne au moins une fois "x" libre, que "$B(x) \supset Hx$" soit un théorème de N' (sans que "Hx" le soit) et que "B" se distingue de "B(x)" pour contenir au lieu de

"x" un symbole de constante individuelle différente de "a_1",...,"a_n", alors "B" est une réponse suffisante. En fait, par rapport à (b) on procède dans un ordre différent, en formant, à partir de "B" les diverses "B(x)" (il y en a un nombre fini) et on vérifie chaque fois si "B(x) $\supset$ Hx" est théorème. Si ni (a) ni (b), "B" n'est pas une réponse suffisante de $[Hx?]_{N'}$.

Explication : Une fois traité le cas des théorèmes, on voit que les réponses directes et leurs conjonctons sont inclues grâce aux points (a) et (b) et les généralisations des négations des réponses simples grâce au point (a).

Quoiqu'on n'ait pas démontré l'effectivité des questions individuelles et fonctionnelles par rapport à tous les systèmes décidables, on peut démontrer au moins quelles sont effectivement énumérables par rapport à tous ces systèmes :

M11 : Les questions individuelles (fonctionnelles) par rapport à N sont effectivement énumérables.

Dém. : Pour énumérer (produire une par une) les réponses suffisantes de $[Hx?]_N$ on énumère les théorèmes de N (possible grâce à la énumérabilité effective de N) et on biffe tous, à l'exception de ceux qui sont de la forme "A $\supset$ B" et appartiennent ou bien à la classe I ou bien à la classe II. Dans les implications de la classe I :

(a) "B" est une réponse parfaite (détermination effective selon M8) qui est théorème (détermination effective grâce à la décidabilité) et

(b) "A" est théorème.

Dans les implications de la classe II :

(a) "B" est une réponse parfaite qui n'est pas théorème (décidabilité) et

(b) "A" n'est pas la négation d'un théorème (décidabilité).

Les expressions "A" dans les théorèmes non biffés sont les réponses suffisantes de la question; elles ont été produites une par une. Cette production tout à fait mécanique pourraît être laissée à une machine relativement primitive. On voit aussi que si quelqu'un présente une justification supposée (une démonstration supposée d'une implication qu'on suppose non biffée), on peut déterminer de façon effective si la démonstration est correcte, s'il s'agit d'une implication et si "A" et "B" satisfont les conditions indiquées ; ainsi on peut déterminer si la justification supposée est ou n'est pas en réalité une justification.

Des résultats analogues aux indiqués peuvent être démontrés par rapport aux classes de conclusions, si ces classes sont effectives.

c. Questions par rapport aux systèmes indécidables.

La situation change complètement si l'on a un système indécidable (une classe non effective de conclusions), parce que maintenant il n'y a plus un procédé effectif pour exclure les négations des théorèmes, pour inclure éventuellement les théorèmes et pour déterminer lesquelles des implications sont des théorèmes. Les questions ne sont même plus effectivement énumérables, parce que la classe des expressions qui ne sont pas des négations de théorèmes (-neg N) ne l'est plus ; la non-énumérabilité effective peut se présenter déjà pour la classe des réponses directes.

Il semble peut être excessif d'exiger l'effectivité pour les questions, mais l'énumérabilité effective est une condition très souhaitable ; car, comme il a été indiqué, énumérabilité effective signifie que si quelqu'un présente une réponse supposée suffisante à la question, on peut exiger qu'il justifie sa présentation et on peut vérifier si cette justification est réellement une justification ou pas. Cela correspond assez bien à l'attitude quotidienne vis à vis des questions et réponses ; on n'exige pas l'effectivité[15].

[15]Belnap [2] réclame l'effectivité pour la classe de ce qu'il appelle "réponses directes" (un terme utilisé par lui dans un sens bien différent d'ici). Naturellement l'effectivité de cette classe est souhaitable, mais il est difficile de voir comment on peut démontrer l'effectivité dans ce cas.

Mais s'il n'y a même pas l'énumérabilité effective, il pourrait toujours arriver qu'une réponse déjà acceptée d'une question apparaît plus tard comme la négation d'un théorème et devrait être exclue. Cependant il ne faut pas voir cette situation d'une façon trop négative, parce que pour les réponses présentées normalement (dans les applications concrètes) on peut déterminer sans difficulté si ils sont ou ne sont pas des négations de théorèmes. De plus on s'est déjà habitué à l'idée que la classe des phrases vraies, par rapport à beaucoup de systèmes, n'est ni effective ni effectivement énumérable ; peut-être on adoptera la même attitude vis-à-vis des questions.

C O N C L U S I O N

Il reste encore beaucoup de points intéressants de la logique des questions qui n'ont pas été traités dans ce texte. Ainsi par rapport à une question [δ?A] on pourrait formuler une "paraquestion" [Savez-vous si A ?]. Tandis que "Je ne sais pas (si A)" n'est pas une réponse suffisante de la question originale, elle serait une réponse suffisante de la deuxième question. Pour traiter les paraquestions on a besoin de systèmes un peu plus compliqués, qu'on pourrait appeler "parasystèmes" par rapport aux systèmes originaux (les parasystèmes seraient du même niveau de langage que les systèmes originaux, mais plus riches en possibilités d'expression). Quelques systèmes de ce type, formés pour les phrases avec "savoiré, "croire", etc., (mais sans relation avec les questions) ont été traités dans [19] et [22].

En ce qui concerne les "questions indirectes", on voit que le traitement de certaines est lié aux paraquestions ; dans d'autres cas il peut s'agir, par exemple, d'une *formulation rhétorique* d'une question, comme "Dites-mois qui est...", ou d'une *référence* à une question, comme "Par rapport à votre question de combien faut-il payer pour le voyage, je voudrais bien constater...".

Pour la logique des questions il n'est pas nécessaire de chercher en premier lieu des complications, on peut encore approfondir les problèmes simples (non seulement logiques, mais aussi philosophiques, linguistiques etc.) ; de toute façon il reste beaucoup à faire dans le traitement formel des questions et son évaluation.

B.I.B.L.I.O.G.R.A.P.H.I.E

Il y a une bibliographie très détaillée sur la logique des questions dans [3].

[1] AQVIST, L., A New Approach to the Logical Theory of Interrogatives, Uppsala, 1965.

[2] BELNAP, N. D., An Analysis of Questions, Systems Development Corporation, Santa Monica, 1963.

[3] BELNAP, N. D. et STEEL, T.B., The logic of Questions and Answers, New Haven, 1976.

[4] BUNGE, M., Scientific Research I, Springer, New York, 1967.

[5] CARNAP, R., Symbolische Logik, Springer, Vienne, 1954.

[5a] CHANG, C. et LEE, R. C., Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving, Academic Press, Londres, 1973.

[6] DAVIS, M., Computability and Unsolvability, Mc Graw-Hill, 1958.

[7] HARRAH, D., A Logic of Questions and Answers, Philosophy of Science, Bruges, 1961, vol. 28, n°1, pp. 40-46.

[7a] HIZ, H., Questions, Dordrecht, 1978.

[8] JANTA-POLCZYNSKI, M., The Dialectics of Questions and Answers, MBLE, Bruxelles, 1974.

[9] JESPERSEN, O., Philosophy of Grammar, Allen and Unwin, Londres, 1924.

[10] KUBINSKI, T., An Outline of the Logical Theory of Questions, Berlin, 1980.

[11] MENDELSON, E., Introduction to Mathematical Logic, Van Nostrand Princeton, 1965.

[11a] PICARD, C., Théorie des questionnaires, Gauthier-Villars, Paris, 1965.

[12] ROBINSON, W.P., et RACKSTRAW, S.J., A Question of Answers, vol. I, Routledge and Kegan Paul, Londres, 1972.

[13] STAHL, G., La lógica de las preguntas, Anales de la Universidad de Chile, Santiago de Chile, 1956, n°102, pp. 71-75.

[14] " Le problème de l'existence dans la logique symbolique, Revue Philos. de France, Paris, 1960, n°1, pp. 97-104 .

[15] " Preguntas y premisas, Revista de Filosofía, Santiago de Chile, 1961, vol. VIII, n°1, pp.3-9.

[16] " Fragenfolgen, dans le livre collectif de Käsbauer, M. et V. Kutschera, F. Logik und Logikkalkül, Verlag Karl Alber, Fribourg-Munich, 1962, pp. 149-157.

[17] " Un développement de la logique des questions, Revue Philos. de France, Paris 1963, n°3, pp. 293-301.

[18] " The Effectivity of Questions, Noûs, Detroit, vol. III, n°2, 1969, pp. 211-218.

[19] " Intensional Universes, Philosophy and Phenom. Research, Philadelphie, 1969, vol. XXX, n°2, pp. 252-257 .

[20] " Elementos de metamatemática, Editorial Universitaria, Santiago de Chile, 1973.

[21] " Preguntas con exigencias numéricas y de totalidad, Cuadernos de Filosofía, Buenos Aires , 1974, n°21, pp. 95-100.

[22] " Logical Treatment of the Relations of Knowing and Believing, Philosophy and Phenom. Research, Philadelphie, 1979, vol. XXXIX, pp. 511-529 .

[23] STAHL, G., Qui court ? jeu expérimental de questions et réponses, IREM, Université Paris VII, Paris, 1980, n°20, pp. 1-10 (et 72 cartes).

[24] " Analyse et applicatons des suites de questions, Logique et Analyse, Louvain, 1982, pp. 167-179.

[25] " Schemas de questions, Logique et Analyse, Louvain, 1984, pp. 93-96 .