

EXPERIENCES DE MECANIQUE



SUR LES TABLES A COUSSIN D'AIR

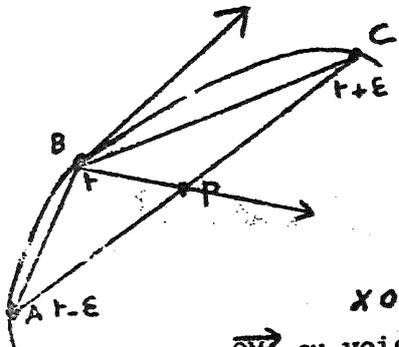
I. R. E. M.

Compte-rendu des travaux pratiques rédigés par les enseignants et les stagiaires à l'I.R.E.M. de Nice en 1973-1974.

16 JUIN 2011

Comment calculer une vitesse, une accélération

Les photos prises sur une table à air ne permettent pas de mesurer des vitesses instantanées et a fortiori des accélérations puisque ces grandeurs sont les dérivées 1^e et 2^e du vecteur position $\vec{OM}(t)$ du mobile.



Comment approcher au mieux ces grandeurs à l'aide d'accroissements finis lorsqu'on connaît les positions du mobile à 3 instants successifs $t - \epsilon$, t , $t + \epsilon$ (ϵ est la période de l'éclairage stroboscopique)?

A cette fin, utilisons un développement de Taylor à l'ordre 2

du vecteur \vec{OM} au voisinage de l'instant t :

$$\vec{OA} = \vec{OM}(t - \epsilon) = \vec{OM}(t) - \epsilon \vec{v}(t) + \frac{\epsilon^2}{2} \vec{\gamma}(t) + \dots$$

$$\vec{OC} = \vec{OM}(t + \epsilon) = \vec{OM}(t) + \epsilon \vec{v}(t) + \frac{\epsilon^2}{2} \vec{\gamma}(t) + \dots$$

Un calcul simple donne :
$$\vec{v}(t) = \frac{\vec{OC} - \vec{OA}}{2\epsilon} = \frac{\vec{AC}}{2\epsilon}$$

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{(\vec{OA} + \vec{OC} - 2\vec{OB})}{\epsilon^2} = 2 \frac{\vec{BP}}{\epsilon^2} \quad (\text{P est le milieu de AC}).$$

$\frac{\vec{AC}}{2\epsilon}$ et $2 \frac{\vec{BP}}{\epsilon^2}$ sont les vecteurs qui approchent le mieux la vitesse et l'accélération en B.

Remarque 1. Le résultat concernant la vitesse est intuitif : on voit sur un dessin que $\frac{\vec{AC}}{2\epsilon}$ représente mieux la vitesse (surtout sa direction) que les vecteurs $\frac{\vec{AB}}{\epsilon}$ et $\frac{\vec{BC}}{\epsilon}$.

En ce qui concerne l'accélération, on peut écrire $2 \frac{\vec{BP}}{\epsilon^2} = \left[\frac{\vec{BC}}{\epsilon} - \frac{\vec{AB}}{\epsilon} \right] \frac{1}{\epsilon}$. Si

on approxime la trajectoire par 2 segments AB et BC, $2 \frac{\vec{BP}}{\epsilon}$ représente donc le saut de vitesse en B. Ce saut est à diviser par ϵ si on veut avoir une accélération moyenne.

Remarque 2 : Il est bon de se rendre compte sur quelques cas particuliers de la validité des résultats. Un développement de Taylor n'est valable que si ϵ est petit. Nous allons préciser cette notion "petit".

1 - mouvement uniformément accéléré : (la trajectoire est une parabole)

$$\vec{OM}(t) = \vec{OM}(0) + \vec{v}(0)t + \frac{1}{2} \vec{\gamma} t^2$$

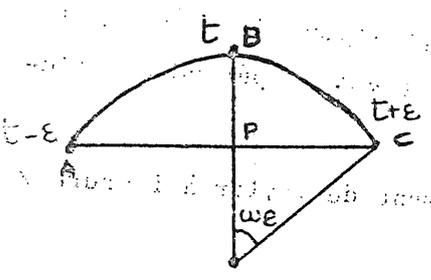
Les résultats obtenus pour \vec{v} et $\vec{\gamma}$ sont exactes car le développement de Taylor de $\vec{OM}(t)$ s'arrête à l'ordre 2.

En effet : $\vec{OM}(t + \epsilon) = \vec{OM}(0) + \vec{v}(0)(t + \epsilon) + \frac{1}{2}\vec{\gamma}(t + \epsilon)^2$

$$= \vec{OM}(0) + \vec{v}(0)t + \frac{1}{2}\vec{\gamma}t^2 + \epsilon(\vec{v}(0) + \vec{\gamma}t) + \frac{1}{2}\epsilon^2\vec{\gamma}$$

$$= \vec{OM}(t) + \epsilon\vec{v}(t) + \frac{1}{2}\epsilon^2\vec{\gamma}$$

2 - mouvement circulaire uniforme. (vitesse angulaire ω)



Les directions de \vec{v} et $\vec{\gamma}$ sont bien celles de \vec{AC} et \vec{BP} .
 Voyons maintenant les modules :

$$\frac{AC}{2\epsilon} = R \frac{\sin \omega \epsilon}{\epsilon} \# v = R \omega$$

$$2 \frac{BP}{\epsilon^2} = \frac{2R}{\epsilon^2} (1 - \cos \omega \epsilon) \# \gamma = \omega^2 R$$

Les erreurs commises s'obtiennent à l'aide d'un développement limité du sinus et du cosinus : $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots ; \text{ on obtient :}$$

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{1}{6} (\omega \epsilon)^2 \quad \frac{\Delta \gamma}{\gamma} = \frac{1}{12} (\omega \epsilon)^2$$

ou encore, utilisant la relation $\omega = 2\pi/T$:

$$\frac{\Delta v}{v} = 7 \left(\frac{\epsilon}{T}\right)^2 \quad \frac{\Delta \gamma}{\gamma} = 3 \left(\frac{\epsilon}{T}\right)^2$$

Si on veut que l'erreur commise soit inférieure à 5%, il faut $\frac{\epsilon}{T} \leq \frac{1}{12}$:

la fréquence stroboscopique doit être 12 fois supérieure à celle du mouvement, ou encore : le nombre de positions éclairées N sur un cercle complet doit être au moins égal à 12 .

L'estimation qui vient d'être faite est qualitativement applicable à tout mouvement périodique.

Quelles unités employer ?

Chaque fois qu'une expérience consiste à vérifier une égalité entre 2 grandeurs, le choix des unités de longueur ou de temps est inessentiel. L'unité naturelle de temps est donc la période ϵ du stroboscope et l'unité naturelle de longueur ρ le cm (ou le mm) de la photo.

Ceci suppose qu'on ne compare que des photos prises avec le même grandissement et un éclairage stroboscopique de même fréquence. Si au contraire le grandissement ou la fréquence sont changées, on tient compte de ce changement comme d'un changement de sensibilité sur un appareil. Il faut de même tenir compte du grandissement et de la fréquence stroboscopique si l'égalité vérifiée sur la photo sert à déterminer une grandeur (par exemple g en $m/\sqrt{2}$).

Remarque : Si ε est l'unité de temps, le développement de Taylor précédent a été effectué pour un accroissement de la variable égal à 1. Mais on a vu que ce qu'il importe de comparer, c'est ε à un temps caractéristique du mouvement étudié (sa période si le mouvement est périodique).

Un raisonnement du type " $\varepsilon = \frac{1}{50} \Delta$ est un nombre petit"

(par rapport à quoi ?) est faux.

0

"sur les Traces de NEWTON"

Dans les manipulations 1 à 5, nous étudierons le mouvement de palets sur une table à air : palets entrant en collision, palets soumis à des forces classiques (ressort, pesanteur). L'observation des photos prises avec un éclairage stroboscopique permettra de vérifier des lois de conservation (quantité de mouvement, moment cinétique, énergie) ou de déterminer la loi de force.

La démarche suivie dans la "manip" 0 est opposée : partant d'une loi de force donnée et de conditions initiales connues (position, vitesse), nous allons déterminer la trajectoire à l'aide d'une construction géométrique approchée. Effectuons pour cela un

Retour sur la Formule de NEWTON

$$\vec{F} = m \vec{\gamma} = \frac{d}{dt} \vec{P}$$

La formule de NEWTON définit la force à laquelle est soumis un corps de masse m constante comme étant la dérivée par rapport au temps de sa quantité de mouvement. Une question se pose : la fonction vectorielle $\vec{p}(t)$ est-elle dérivable ? (penser au cas où le corps subit un choc brutal). Cette question est sans réponse : il n'existe pas de procédé physique permettant de prouver qu'une grandeur possède une dérivée. Ce qui est important, c'est de voir si le concept introduit (ici : $\frac{d}{dt} \vec{p}(t)$) se révèle utile.

Et d'abord, comment mesurer (de façon approchée bien sur) cette grandeur ? Soient A, B, C les positions du centre de masse d'un palet se déplaçant sur une table à air, aux instants $t - \epsilon$, t , $t + \epsilon$ (ϵ : période de l'éclairage stroboscopique).

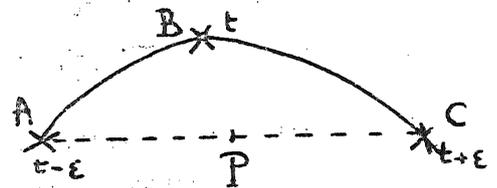
Si ϵ est assez petit (nous préciserons plus tard

"petit par rapport à quoi ?"), la vitesse en B

vaut : $\frac{\vec{AC}}{2\epsilon}$ et l'accélération : $2 \frac{\vec{BP}}{\epsilon^2}$, le point P

étant le milieu du segment AC. La force à laquelle

est soumis le palet à l'instant t est donc déterminée de façon approchée par le vecteur $2 m \frac{\vec{BP}}{\epsilon^2}$.



L'intérêt de la notion de force est, qu'expérimentalement, elle se révèle n'être fonction que de l'instant considéré, de la position du mobile et de sa vitesse. Dans bien des cas d'intérêt pratique, la force ne dépend que de 0, 1 ou 2 de ces 3 paramètres.

Il résulte de cette observation que la formule de NEWTON $m \vec{\gamma} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$ devient une équation vectorielle qui permet de prévoir toutes les trajectoires dès lors que les conditions initiales (\vec{r}_0, \vec{v}_0) et la fonction vectorielle $F(\vec{r}, \vec{v}, t)$ sont connues.

Du moins nos connaissances mathématiques nous permettent-elles d'affirmer, sous certaines conditions, qu'une solution existe et est unique. Les cas où un calcul.

analytique est possible ($\vec{F} = \vec{a} e^{kt}$, $F = -k\vec{r}$, $F = \lambda \frac{\vec{r}}{r^3}$ ) sont rares. Les autres cas (la quasi totalité des mouvements à étudier) nécessitent l'emploi de méthodes numériques. C'est la transcription géométrique d'une telle méthode que nous allons utiliser.

Lorsqu'un corps subit un choc brutal, sa vitesse varie très vite. On peut bien sûr affirmer que le corps a été soumis à l'action d'une force très grande pendant un temps très court; mais ce qui nous intéresse de l'effet de cette force, c'est la variation brutale de la quantité de mouvement du corps $\Delta \vec{p}$ que nous appellerons impulsion fournie au corps. (l'étude expérimentale de telles impulsions est l'objet de la manip n°1).

Approximation d'un mouvement continu par une suite d'impulsions

Revenons à l'étude d'un mobile soumis à la force $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$. Dans un intervalle de temps petit Δt suivant l'instant t , la quantité de mouvement a varié de

$\Delta \vec{p} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) \Delta t$. Cette variation est la somme des impulsions reçues par le mobile dans l'intervalle de temps Δt . Ces impulsions ont été fournies continûment au mobile.

Une approximation du mouvement du mobile consiste à appliquer ces impulsions à des instants séparés par des intervalles de temps réguliers : ... $t - \epsilon$, t , $t + \epsilon$, $t + 2\epsilon$...

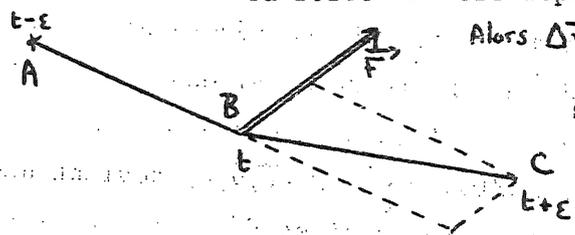
Entre ces instants, le mobile se déplace en ligne droite à vitesse uniforme. S'il arrive à l'instant t au point \vec{r} , avec la vitesse \vec{v} , on lui communique à cet instant l'impulsion $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) \epsilon$. Sa vitesse varie de $\Delta \vec{v} = \frac{\epsilon}{m} \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$ et devient donc $\vec{v} + \frac{\epsilon}{m} \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$ pour l'intervalle de temps $[t, t + \epsilon]$ suivant, le chemin parcouru pendant cet intervalle de temps est : $[\vec{v} + \frac{\epsilon}{m} \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)] \epsilon = \epsilon \vec{v}$.

Arrivé à l'instant $t + \epsilon$ au point $\vec{r}' = \vec{r} + \epsilon [\vec{v} + \frac{\epsilon}{m} \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)]$, le mobile reçoit une nouvelle impulsion $\frac{\epsilon}{m} \vec{F}(\vec{r}', \vec{v}', t + \epsilon)$ etc.

On approxime ainsi la trajectoire par une suite de segments de droite parcourus à vitesse constante. L'approximation est d'autant meilleure que ϵ est petit (par rapport à quoi ?).

Construction de la Trajectoire

exemple 1 : Dans l'intervalle de temps $[t - \epsilon, t]$, le mobile est allé de A en B. En B, la force \vec{F} est représentée sur la figure. Prenons $\epsilon = 10^{-1} s$, $m = 2 \cdot 10^{-2} kg$.

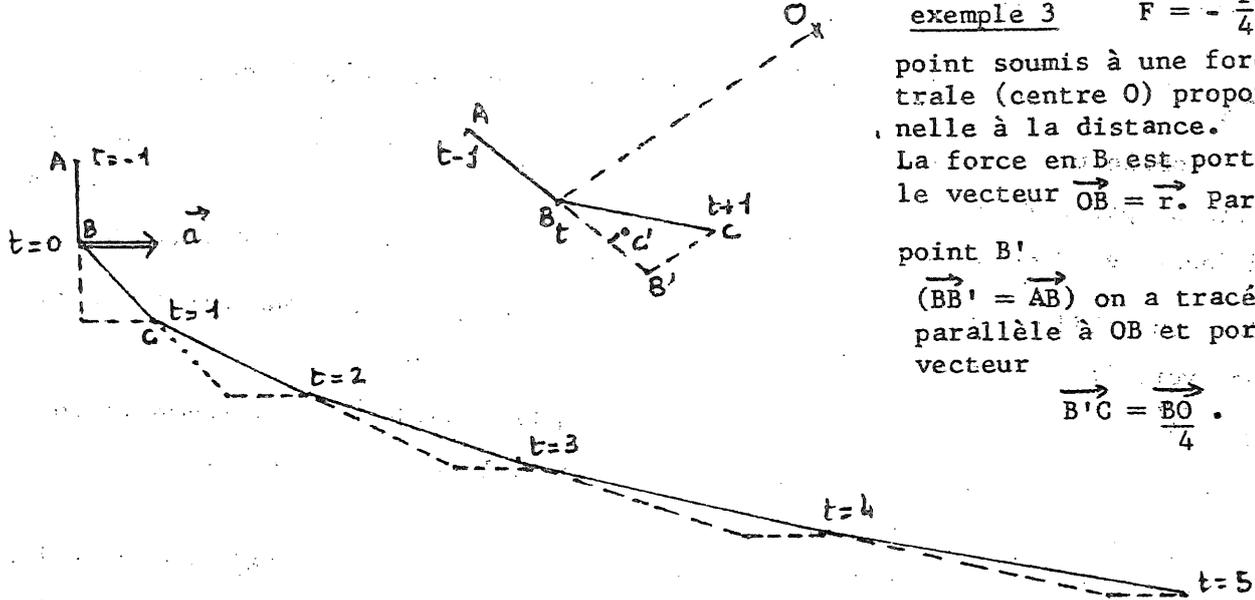


Alors $\Delta \vec{v} = 5 \vec{F}$. Le chemin parcouru dans l'intervalle de temps suivant $[t, t + \epsilon]$ est : $\vec{BC} = (\vec{v} + \Delta \vec{v}) \epsilon = \epsilon \vec{v} + \epsilon \Delta \vec{v} = \vec{AB} + \frac{\vec{F}}{2}$

Par la suite nous prendrons toujours comme unité de temps : ϵ , comme unité de masse la masse m du mobile. (la force est supposée alors exprimée dans ces unités). Les formules précédentes deviennent : $\Delta \vec{v} = \vec{F}$ $\vec{BC} = \vec{AB} + \vec{F}$

exemple 2 : $\vec{F} = \vec{a}$ (vecteur constant) $a = 1$ $v_0 = 1$

rappelez vous que la trajectoire exacte est une parabole.



exemple 3

$$F = -\frac{r}{4}$$

point soumis à une force centrale (centre O) proportionnelle à la distance.

La force en B est portée par le vecteur $\vec{OB} = \vec{r}$. Par le

point B'

($\vec{BB'} = \vec{AB}$) on a tracé une parallèle à OB et porté le vecteur

$$\vec{B'C} = \frac{\vec{BO}}{4}$$

Changement de l'intervalle de temps séparant 2 impulsions

Si l'intervalle de temps séparant 2 impulsions est $\frac{\epsilon}{2}$ au lieu de ϵ , c'est-à-dire si les impulsions sont communiquées deux fois plus souvent, alors chaque impulsion doit être réduite de moitié. A l'instant t elle vaudra donc $\frac{1}{2} \in \frac{F}{m}$. Si le chemin parcouru a été $\frac{\epsilon}{2} \vec{v}$ dans l'intervalle de temps $[t - \frac{\epsilon}{2}, t]$, il sera $(\vec{v} + \frac{1}{2} \in \frac{F}{m}) \frac{\epsilon}{2}$ dans l'intervalle de temps suivant, soit : $\vec{v} \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{4} \in \frac{\epsilon^2}{m} F$. Tout se passe, pour la construction géométrique comme si la force avait été divisée par 4.

Ainsi, dans l'exemple 3, et en gardant les mêmes conditions initiales (mobile en A et B aux instants $t-1$ et t), on obtient la position du mobile à l'instant $t + \frac{1}{2}$ en prolongeant AB d'une longueur égale à $\frac{AB}{2}$ et en portant par le nouveau point parallèlement à OB un vecteur égal à $\frac{\vec{BO}}{4 \times 4}$ (nouveau point : C').

Cette réduction de l'intervalle séparant deux impulsions consécutives se fait lorsqu'on se trouve dans une région où les forces sont grandes (mouvement fortement accéléré) ou varient vite avec la position. L'augmentation de cet intervalle se fait lorsque les forces sont trop faibles pour permettre la construction géométrique (par exemple si $B'C = 1,5mm$).

Nature de l'approximation faite

En théorie, plus ϵ est petit, meilleure est l'approximation. Mais la nécessité de faire une construction géométrique, donc des segments AB de l'ordre du centimètre, et des segments B'C de l'ordre d'une fraction de centimètre, impose une limite inférieure à ϵ . Comment situer la trajectoire réelle par rapport à celle construite ? prenons deux exemples :

ex 1 : $\vec{F} = -\frac{1}{4} \vec{r}$. La concavité de la trajectoire est située du côté du centre de forces.

Si le mobile passe effectivement en A avec la vitesse $\vec{v}_0 = \vec{AB}$, la trajectoire réelle ne passera pas par B, mais sera plus rapprochée de O. L'impulsion qui a été donnée en B et qui valait $\frac{\vec{BO}}{4}$ est donc plus grande que la force qui s'applique au mobile sur sa trajectoire réelle ; la trajectoire construite est ramenée vers la trajectoire réelle : il y a compensation.

ex 2 : $F = -\frac{1}{r^3}$. La concavité est celle de l'exemple précédent, mais comme la force décroît avec la distance au centre de forces, la trajectoire construite va s'écarter de plus en plus de la trajectoire réelle.

L'écart que nous venons de décrire entre trajectoire construite et trajectoire réelle tient à ce qu'on approxime des dérivées par des accroissements finis. L'erreur ainsi faite est de nature théorique. Il existe une autre source d'erreur qui réside dans la construction géométrique elle-même : tracés de parallèles, reports de longueurs. Il est possible d'évaluer dans certains cas l'erreur ainsi commise :

ex 1 : $F = f(r) \vec{r}$ (force centrale). On peut vérifier dans ce cas que la construction que nous avons exposée respecte la loi des aires (aire OAB = aire OBC). Tout écart à cette loi vient donc d'une imprécision de construction.

ex 2 : 2 corps formant un système isolé : les forces auxquelles ils sont soumis sont opposées. Dans la méthode ci-dessus exposée, les impulsions communiquées aux deux corps sont opposées : le centre de masse doit se déplacer en ligne droite, à vitesse constante.

Matériel utilisé

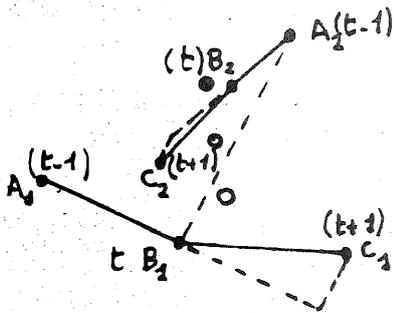
un crayon bien taillé, une règle à calcul. (manip conforme à une politique d'austérité!)

Mouvements pouvant être étudiés

Ces mouvements doivent être plans. (Mais remarquer qu'on peut démontrer que tous les mouvements à force centrale sont plans : en effet l'impulsion communiquée en B est portée par \vec{OB} , par suite le vecteur \vec{BC} se trouve dans le plan OAB ; ce résultat vrai $\forall \epsilon > 0$ doit le rester pour $\epsilon \rightarrow 0$).

- $\vec{F} = \vec{a}$ vecteur constant, comparer à la trajectoire théorique, regarder l'influence d'un frottement $-k\vec{v}$.
- $\vec{F} = -k\vec{r}$ calcul de la période, vérifier qu'elle ne dépend pas des conditions initiales. Influence d'un frottement. Cas d'un mouvement à une dimension.
- $\vec{F} = -\frac{k\vec{r}}{r^3}$ Calcul de la période, de l'apogée, du périhélie, loi de Kepler, pour des orbites fermées. Vérifier que si la vitesse initiale est grande le mobile va à l'infini.
- $F = \frac{k\vec{r}}{r^3}$ diffusion de Rutherford, distance d'approche de l'origine de force suivant la vitesse initiale et le paramètre d'impact.
- système de 2 corps liés par un ressort. Si les masses sont égales, les $\vec{\Delta V}$ sont opposés ; si $m_2 = 2m_1$ alors $\Delta V_2 = -\frac{1}{2} \Delta V_1$.

Sur la figure jointe $m_1 = 1$ $m_2 = 2$ $\vec{F}_1 = \frac{\vec{B}_1 \vec{B}_2}{4}$ $F_2 = \frac{\vec{B}_2 \vec{B}_1}{4}$.



les ronds O représentent les positions du centre de masse.

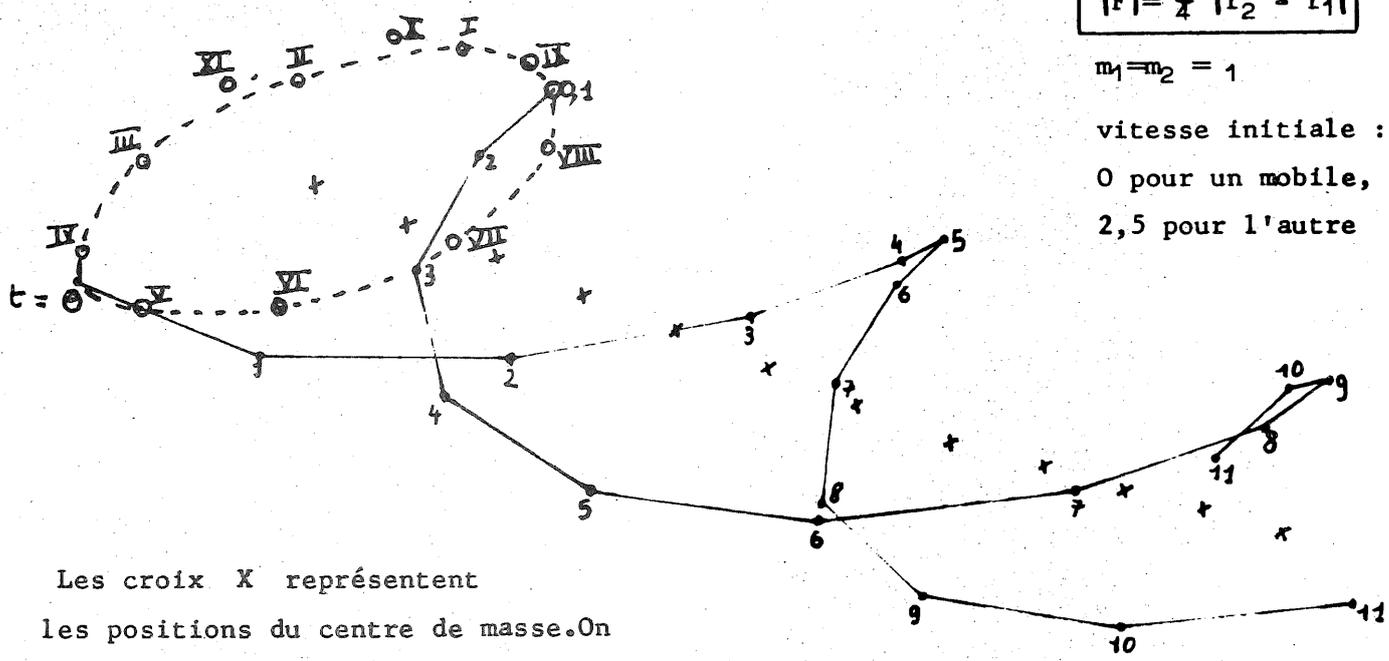
Suivant les conditions initiales, le centre de masse est fixe, (auquel cas les trajectoires sont deux ellipses homothétiques) ou se déplace en ligne droite (auquel cas les trajectoires paraissent enchevêtrées). On peut dans ce dernier cas faire sur le dessin un changement de repère afin de montrer que le mouvement des deux corps est plus simple dans le repère de leur centre de masse.

4 exemples d'étude possible sont présentés sur les feuilles suivantes. On aura intérêt à choisir dans la manip des formats plus grands.

Force de rappel
 $|\vec{F}| = \frac{1}{4} |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$

$m_1 = m_2 = 1$

vitesse initiale :
 0 pour un mobile,
 2,5 pour l'autre



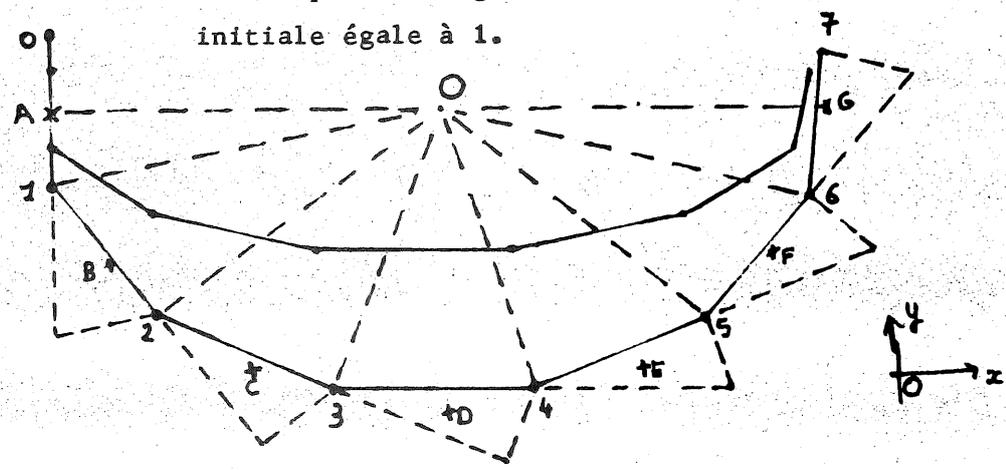
Les croix X représentent les positions du centre de masse. On vérifie assez bien que $V_{cm} = 1.25$.

L'ellipse en haut à gauche de la figure a été construite à partir de la trajectoire du mobile initialement au repos en effectuant sur le point n ($n = 0, 1 \dots, 11$) une translation égale à $-n \vec{V}_{cm}$. Cette trajectoire représente le mouvement de ce mobile dans le repère du centre de masse. Les instants ont été écrits en chiffres romains et correspondent à ceux écrits en chiffres arabes. Il est facile de vérifier que dans ce repère, l'autre mobile décrit la même ellipse en occupant aux mêmes instants des positions symétriques.

$F = -\frac{F}{4}$
 $m = 1$

La construction est faite pour un mobile de vitesse initiale $V = 2$. On vérifie que la demi période vaut (environ) $\frac{T}{2} = \frac{2\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} = 6.28$.

On a représenté également une trajectoire correspondant à une vitesse initiale égale à 1.



à cette deuxième trajectoire correspond visiblement la même demi période.
 aire du triangle 0 o1 : 5 (erreurs de construction géométrique
 " " " 0 67 : 4.5 (de l'ordre de 10% sur une demi période
 la trajectoire exacte correspondant à une vitesse égale à 2 en A est :

$x = -5 \cos \frac{1}{2} (t - 1/2)$. Elle passe en A B C D E F G.
 $y = -.4 \sin \frac{1}{2} (t - 1/2)$

$$\vec{F} = \vec{a} - k \vec{v}$$

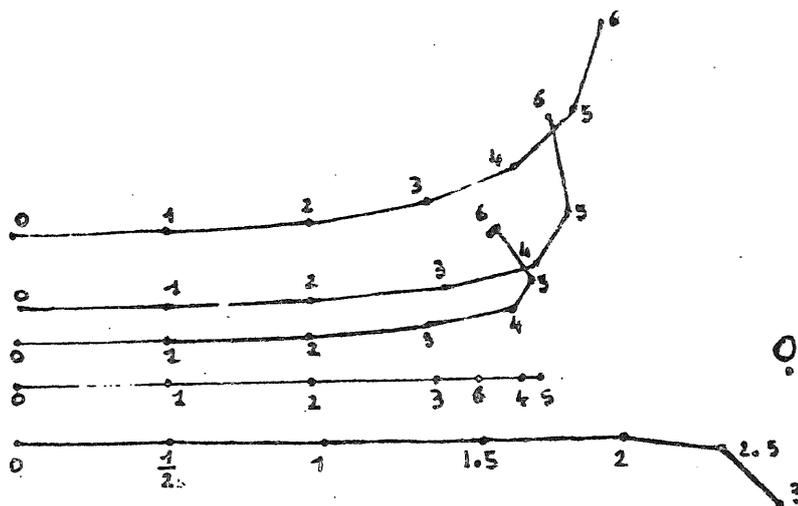
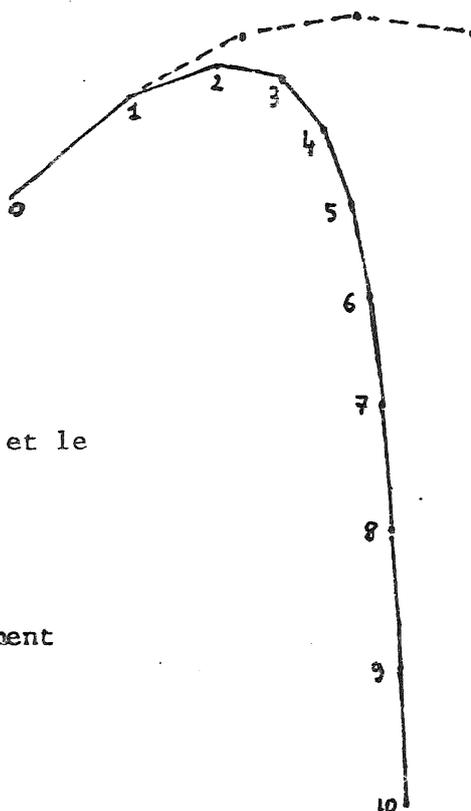
$$a = 0.5$$

$$k = 1/4$$

La trajectoire réelle a une asymptote et le mobile acquiert une vitesse limite

$$\vec{v}_{\text{lim}} = \frac{\vec{a}}{k} \text{ . ici } v_{\text{lim}} = 2$$

On a représenté en pointillé le mouvement sans force de frottement (parabole).



Diffusion de Rutherford

$$: F = 10 \frac{\vec{F}}{r^3}$$

Les trajectoires du dessus ont la même vitesse initiale, mais des paramètres d'impact différents.

La trajectoire inférieure correspond à une vitesse initiale double (cf les instants placés sur la trajectoire).

1

Collision de corps de forme géométrique simple
(rectangle, triangle, carré)

I - Objet de la manipulation

Nous vous proposons d'étudier 3 choses :

- Mesure de vitesse dans le cas d'un mobile animé d'un mouvement uniforme
- La conservation de la quantité de mouvement lors du choc quelconque de deux mobiles
- Le mouvement du centre de masse d'un ensemble de deux mobiles en mouvement

II - Technique utilisée

a) déterminer le centre de masse de chacun des mobiles

Nous le déterminons géométriquement, les mobiles étant de forme géométrique simple (rectangle, triangle, carré)

Matérialiser ces centres de masse par des pastilles blanches.

b) prises de vues sur la table à coussin d'air

- Rechercher la position de la lampe du stroboscope donnant un éclairage uniforme de la table.
- Régler le cadrage de l'appareil à l'aide des vis de calage de façon à voir toute la table dans le viseur.
- Utiliser la fréquence 10 Hz du stroboscope qui donne un nombre convenable de points sur la photo - Ne pas faire fonctionner le stroboscope plus de 10 secondes d'affilée
- Sans déclencher l'appareil photo faire des essais en lançant le ou les mobiles, pour voir si le nombre de points vus est correct
- Prendre la photo (1 personne pour lancer les mobiles, 1 personne déclenchera le stroboscope, 1 personne déclenche et arrête la prise de la photo); opérer en comptant à intervalle d'1 s 1, 2 = Déclenchement du stroboscope, 3 = lancement des mobiles et déclenchement de la photo. Arrêter la prise de la photo avant rebondissement sur les bords.

III - Mesure de la vitesse d'un mobile.

a - propriétés théoriques - Pour tout solide animé d'un mouvement libre de translation-rotation, il existe un point noté G se déplaçant en ligne droite à vitesse constante.

- Mesure de la vitesse : $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, Δx = longueur du segment de trajectoire parcouru pendant l'intervalle de temps Δt

b - manipulation : Lancer un mobile prendre la photo

Piquer les positions successives du centre de masse du mobile sur papier millimétré, à l'aide d'une aiguille - Opérer ensuite avec un crayon bien taillé - le résultat est reproduit ci-contre

A. B. C. D. E. F. G.

Mesures - l'intervalle ξ entre deux éclairs du stroboscope est choisi comme unité de temps.

Les distances sont en mm

- choix de $\Delta t = \xi$

AB = 5

CD = 4,5

EF = 5,2

GH = 5,1

} valeur moyenne 5 mm

} incertitude 0,5 mm

} incertitude relative 11%

- choix de $\Delta t = 3\xi$

AD = 14,7

BE = 15,1

CF = 15

DG = 15,5

} valeur moyenne 15,1

} incertitude 0,5 mm

→
d'où pour
la vitesse

valeur moyenne 5,03 mm

incertitude 0,17 mm

incertitude relative 3,5%

C - Précision avec laquelle la vitesse peut-être mesurée

C'est une question importante; en effet toutes les vérifications de lois sur la table à air dépendent de mesures de vitesse : longueur et direction. Quelle est l'origine des erreurs de mesures ?

1) Les piquages des positions successives du centre de masse du mobile. L'erreur est au moins $1/4$ mm sur un piquage, ce qui peut entraîner une erreur de 0,5 mm sur un intervalle AB.

*) Si l'on utilise des photos polaroid de dimension 9cm x 7cm, la distance parcourue par un mobile entre deux éclairs du stroboscope est typiquement de 4 mm. On s'attend à une imprécision dans la mesure des vitesses de $0,5/4 = 15\%$ ce qui est considérable.

L'agrandissement de la photopolaroid à l'épidiascope après piquage ne supprime pas cette erreur, mais elle rend plus aisée les mesures ultérieures, il faut d'abord agrandir les photos puis ensuite procéder au piquage. L'utilisation de films polaroid avec négatif serait peut-être la meilleure solution, un agrandisseur sommaire suffisant à l'agrandissement.

Si le mobile se déplace en ligne droite sur plusieurs intervalles de temps, une façon de réduire l'erreur due au piquage est, pour déterminer $v = \Delta x / \Delta t$ de choisir un intervalle $\Delta t = 2$ à 5 fois l'intervalle de temps entre deux éclairs successifs du stroboscope ; les distances Δx mesurées vont en effet de 8 à 20mm et la précision est améliorée d'un facteur 2 à 5 (voir les chiffres de l'exemple ci-dessus)

β) Une autre manière de procéder est de faire une photo de la collision avec un appareil 24 x 36, de mettre le négatif dans l'agrandisseur et de marquer les positions des centres de masse des solides 1 et 2 avec un stylo à bille soit sur une feuille blanche soit sur un stencil duplicateur à alcool. Les intervalles ΔX sont alors de l'ordre de 1,5 cm et l'erreur due au "piquage" est de 3%.

L'inconvénient de cette méthode est le délai entre la prise de photo et son exploitation. Il est rare qu'en lançant les solides on ait pensé à toutes les conditions nécessaires pour réaliser une photo intéressante : vitesse de lancement des solides, direction relative des vitesses, point d'impact... L'intérêt du polaroid est que l'on peut rapidement dépouiller la photo et recommencer une autre en tenant compte de l'expérience acquise : il est plus formateur de rater deux photos avant d'en faire une bonne que de lire, avant de faire une photo, deux pages de conseils sur la façon de faire une bonne photo !

2) Les inhomogénéités du coussin d'air.

Le coussin d'air est constitué en forçant l'air à passer à travers des centaines de trous percés dans la table, espacés de 13 mm. Les objets de poids $0,8 \text{ g/cm}^2$ flottent environ 0,1 mm au dessus de la table à condition que leur surface soit au moins 12 mm^2

les causes possibles des inhomogénéités sont :

- la non-identité des trous percés
- des trous bouchés par la poussière
- la non-planéité de la table

Selon le constructeur EALING, la planéité de la table est d'importance capitale, la planéité de la table est assurée à 0,3 mm sur l'ensemble de la table et il annonce qu'un creux de 0,1 mm dans la table suffit à accélérer les palets de façon notable. On peut espérer repérer les inhomogénéités permanentes de ce type en quadrillant systématiquement la table inclinée : en étudiant le mouvement d'un palet lâché initialement sans vitesse ; entre deux éclairs du stroboscope la distance parcourue doit s'accroître d'une quantité constante si le coussin d'air est homogène. Que le coussin d'air ne soit pas uniforme est évident : un objet posé sans vitesse sur la table acquiert lentement une certaine vitesse. Pour tenter de réduire l'erreur due à cette non uniformité, il faut lancer les objets assez fort et régler le stroboscope en conséquence.

Remarquons qu'une cause possible d'erreur est que, lors d'un choc, le mobile bascule légèrement et touche la table, introduisant ainsi du frottement. Pour éviter ceci, il est intéressant de prendre les objets en plastic léger et de sur-face de l'ordre de 100 mm^2 de façon que le coussin d'air soit plus haut.

IV - Choc de deux mobiles.

1 - Propriétés théoriques

a) Lois de conservation de la quantité de mouvement totale

La quantité de mouvement totale d'un système isolé est constante - Le système des deux solides qui entrent en collision est un système isolé, si l'on peut négliger les frottements sur le coussin d'air.

Si l'on appelle \vec{v}_1 et \vec{v}_2 les vitesses des centres de masse des deux corps avant la collision, \vec{w}_1 et \vec{w}_2 leurs vitesses après la collision, la loi s'écrit

$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = cte = m_1 \vec{w}_1 + m_2 \vec{w}_2$ (1)

ou $m_1 (\vec{v}_1 - \vec{w}_1) = - m_2 (\vec{v}_2 - \vec{w}_2)$ (2)

donc 1) les vecteurs $\vec{v}_1 - \vec{w}_1$ et $\vec{v}_2 - \vec{w}_2$ doivent être parallèles et de direction opposées

2) Le rapport des longueurs de ces vecteurs donne le rapport des masses

Si l'on utilise trois objets 1,2,3, on peut réaliser les collisions 1 ↔ 2, 2 ↔ 3 et 1 ↔ 3 qui donnent respectivement m_1/m_2 , m_2/m_3 , m_1/m_3 et l'on doit avoir

$\frac{m_1}{m_2} \times \frac{m_2}{m_3} = \frac{m_1}{m_3}$ - La précision avec laquelle cette relation est vérifiée donne un

ordre de grandeur de la précision obtenue sur le rapport des masses

b) Mouvement du centre de masse du système formé par les deux corps

Soient G_1 et G_2 les centres de masse des corps 1 et 2, et O une origine quelconque .

Puisque $\vec{v}_1 = \frac{d\vec{OG}_1}{dt}$ et $\vec{v}_2 = \frac{d\vec{OG}_2}{dt}$, la relation(1) s'écrit aussi:

$\frac{d\vec{OG}_{12}}{dt} \Big|_{\text{avant le choc}} = \frac{d\vec{OG}_{12}}{dt} \Big|_{\text{après le choc}}$ avec $\vec{OG}_{12} = \frac{m_1 \vec{OG}_1 + m_2 \vec{OG}_2}{m_1 + m_2}$ le point G_{12}

s'appelle le centre de masse des corps 1 et 2 - la propriété s'énonce : "le centre de masse d'un système isolé constitué de deux corps effectuant un choc se déplace sur une droite à vitesse uniforme" (cette droite est la même avant et après le choc)

c) La collision n'est pas élastique en ce sens que la somme ^{des} énergies cinétiques initiales de translation des deux corps n'est pas égale à la somme des énergies cinétiques finales de translation :

$$\frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^2 \neq \frac{1}{2} m_1 \vec{w}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{w}_2^2$$

En effet une partie de l'énergie initiale a été transformée en énergie cinétique de rotation des solides 1 et 2 au tour de leurs centres de masse respectifs comme cela est très visible sur les photos.

2 - Manipulation

a) Vérification de la relation (2) et détermination du rapport des masses voir les constructions , pages 31 à 35 du bulletin C.R.D.P. n° 7-8

b) Mouvement de G_{12} . (Voir la photo page 39 du même bulletin)

Si l'on connaît au même instant les positions G_1 et G_2 des centres de masse des corps 1 et 2, on peut déterminer G_{12} puisque le rapport m_1/m_2 vient d'être déterminé : la difficulté est d'associer correctement sur la photo les positions des corps 1 et 2 qui correspondent au même instant : positions 1 à l'instant t_1 , 2 à l'instant $t_1 + \xi \dots$; les centres de masse des couples (1 - 1), (2 - 2), (3 - 3) ... doivent être sur une droite, à intervalles réguliers et ceci ne se produit que si les couples ont été correctement formés. Par exemple si l'on décale d'une unité les numéros du solide gauche de la photo et que l'on construise les centres de masse des couples (1 - 1), (2 - 2) ..., on trouvera pour mouvement du centre de masse deux demi-droites non alignées (propriété géométrique facile à démontrer)

Pour trouver par tâtonnement l'association correcte des positions, il faut examiner l'endroit où le choc se produit : l'association des positions à cet endroit n'offre en général qu'une possibilité. En remontant avant et après le choc, on en déduit les autres associations.

c) Pour vérifier avec précision la relation (2), il faut que les variations de vitesse soient les plus grandes possibles, donc réaliser un choc frontal. Dans un tel choc par contre, le centre de masse ne se déplace pas beaucoup. Pour bien observer le mouvement de G_{12} , il faut réaliser un choc pour lequel G_{12} parcourt une grande distance.

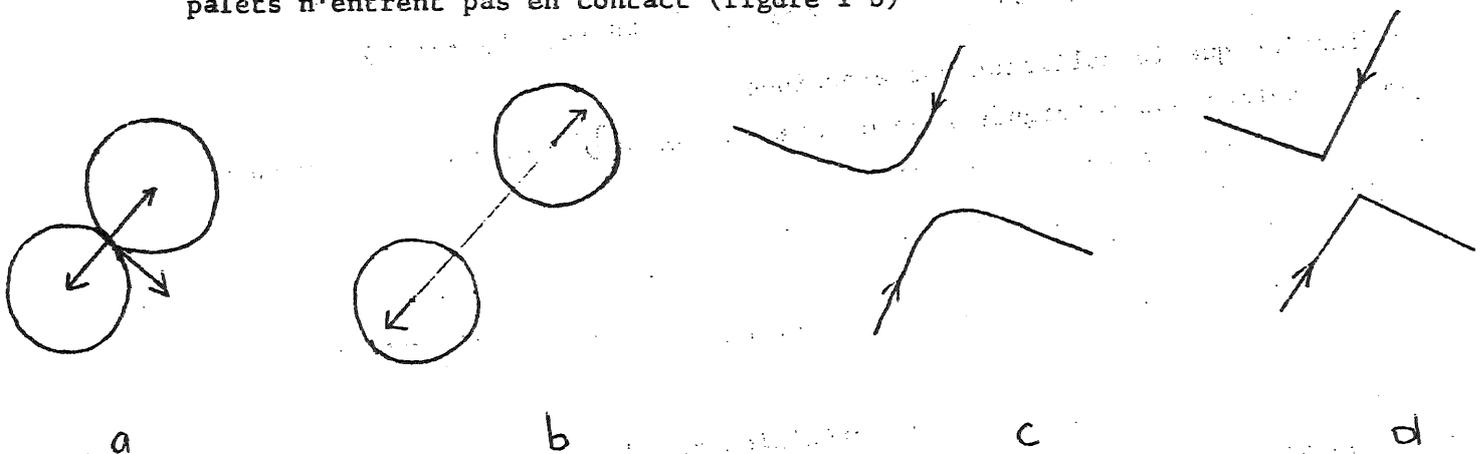
2

Collision de 2 palets magnétiques

I - Illustration de la conservation de la quantité de mouvement totale

Voir la manip n° 1 - Ici les palets interagissent par une action à distance ce qui entraîne deux aspects nouveaux par rapport à la manip n° 1 :

1) les palets n'entrent jamais en contact (s'ils ne sont pas lancés avec trop de force !) la collision est alors élastique en ce sens que, lors de la collision, de l'énergie de translation d'un palet n'est pas transformée en énergie de rotation sur lui-même ; cette transformation nécessite en effet l'existence d'une composante tangentielle de la force (figure 1 a) qui n'existe pas si les palets n'entrent pas en contact (figure 1 b)



2) la modification de la vitesse des palets est progressive et non pas brutale comme elle le serait dans le cas d'un choc. En effet les palets interagissent par une force qui peut se décrire par une énergie potentielle d'interaction du système des deux palets (voir le § IV). Au cours du mouvement des deux palets, l'énergie totale du système formé par les deux palets est constante :

$$\frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^2 (t) + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^2 (t) + \mathcal{U} \left(\left| \vec{r}_1 (t) - \vec{r}_2 (t) \right| \right) = E = \text{Constante} \quad (1)$$

En pratique, avec les palets magnétiques actuellement à notre disposition $\mathcal{U}(r)$ décroît très rapidement avec r ; il est pratiquement nul quand les centres de masse des palets sont séparés par une distance d'une fois et demie leur diamètre. Dans ce cas, la trajectoire de chaque palet est une courbe dont la direction varie très rapidement (figure 1c) et sur la photo les points éclairés sont sur deux segments de droite, c'est-à-dire la photo ressemble à un choc de deux palets qui auraient une taille un peu plus grande que le palet réel (figure 1d)

Appelons donc \vec{v}_1 et \vec{v}_2 la vitesse des palets 1 et 2 avant la collision, (instants $t_1, t_2, t_3 \dots$) et \vec{w}_1 et \vec{w}_2 la vitesse après la collision (instants $t_7, t_8, t_9 \dots$) (Voir la photo page 49 du bulletin C.R.D.P.)

a) détermination du rapport des masses

De la conservation de la quantité de mouvement totale du système on tire

$$m_1 (\vec{w}_1 - \vec{v}_1) = - m_2 (\vec{w}_2 - \vec{v}_2)$$

On vérifie que $\vec{w}_1 - \vec{v}_1$ et $\vec{w}_2 - \vec{v}_2$ sont parallèles et de direction opposée, et on trouve $m_1 = m_2$.

b) mouvement du centre de masse

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{V}_{cm} = m_1 \vec{w}_1 + m_2 \vec{w}_2$$

le centre de masse se déplace en ligne droite à vitesse constante. Cette propriété a été utilisée ici pour associer correctement sur la photo les positions des palets 1 et 2 qui correspondent aux mêmes instants ($t_1, t_2 \dots t_9$)

c) vérification que la collision est élastique

Lorsque les palets sont éloignés l'un de l'autre, on a $\mathcal{U}(r) = 0$ et la conservation de l'énergie totale du système s'écrit

$$\frac{1}{2} m (\vec{v}_1^2 + \vec{v}_2^2) = \frac{1}{2} m (\vec{w}_1^2 + \vec{w}_2^2)$$

relation que l'on vérifie en mesurant les longueurs de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}_1, \vec{w}_2$

on s'attend dans la vérification, à une précision moindre que la précision avec laquelle les vitesses sont mesurées (voir manip n°1) ; en effet

$$\frac{\Delta (v_1^2 + v_2^2)}{v_1^2 + v_2^2} \sim 2 \frac{\Delta v_1}{v_1} \quad \text{si } v_1 \text{ et } v_2 \text{ sont à peu près égales.}$$

II - Passage dans un repère galiléen où l'un des palets est initialement au repos

Si l'appareil photo se déplaçait à la vitesse \vec{v}_2 par rapport à la table de mécanique, les vitesses des palets photographiées par l'appareil seraient :

$$\begin{aligned} \vec{v}'_1 &= \vec{v}_1 - \vec{v}_2 & \text{et} & & \vec{w}'_1 &= \vec{w}_1 - \vec{v}_2 \\ \vec{v}'_2 &= 0 & & & \vec{w}'_2 &= \vec{w}_2 - \vec{v}_2 \end{aligned}$$

Dans ce repère, le palet 2 est initialement au repos.

a) vérification que la collision est élastique

Dans ce repère, les lois de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement s'écrivent :

$$\vec{v}'_1 = \vec{w}'_1 + \vec{w}'_2 \quad \text{et} \quad v'^2_1 = w'^2_1 + w'^2_2$$

$\rightarrow, \rightarrow, \rightarrow,$

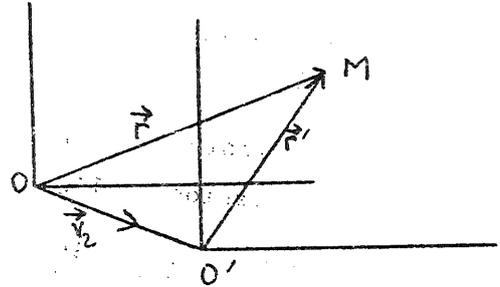
Il suffit donc de construire \vec{v}_1, \vec{w}_1 et \vec{w}_2 et de vérifier qu'ils forment un triangle rectangle (figure 2 - a 3 pages plus loin)

b) dessin de la collision dans ce repère

on fait l'hypothèse supplémentaire que le repère du laboratoire et le repère se déplaçant à la vitesse \vec{v}_2 coïncident à l'instant t_3 .

Cela suppose donc que l'on a identifié au préalable les palets qui se correspondent (voir la partie Ib de la manip)

Si la position du palet 1 est \vec{r}_1 dans le laboratoire et \vec{r}'_1 dans le nouveau repère,



on a :

$$\vec{r}'_1(t_3) = \vec{r}_1(t_3) \quad \vec{r}'_2(t_3) = \vec{r}_2(t_3)$$

$$\vec{r}'_1(t_4) = \vec{r}_1(t_4) - \vec{v}_2 \Delta t, \quad \vec{r}'_2(t_4) = \vec{r}_2(t_4) - \vec{v}_2 \Delta t$$

$$\vec{r}'_1(t_5) = \vec{r}_1(t_5) - 2\vec{v}_2 \Delta t$$

$$\vec{r}'_1(t_2) = \vec{r}_1(t_2) + \vec{v}_2 \Delta t \quad \text{avec} \quad \Delta t = t_4 - t_3 = \frac{t_5 - t_3}{2} = -(t_2 - t_3) = \varepsilon$$

La construction des trajectoires des palets s'en déduit immédiatement (figure 2 - a) on constate bien que l'angle entre les directions finales des palets 1 et 2 est droit .

III - Passage dans le repère du centre de masse du système

Ce repère se déplace par rapport au laboratoire à la vitesse

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} = \frac{\vec{w}_1 + \vec{w}_2}{2}$$

Dans ce repère on a $\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_{cm} = -\vec{v}'_2$: à chaque instant les vitesses des 2 palets sont égales et opposées

a) dessin de la collision dans ce repère (Voir page 49 bis du bulletin G.R.D.P.)

1ère méthode :

Si l'on suppose que le repère du centre de masse et du laboratoire coïncident à l'instant t_2 , on a comme précédemment $\vec{r}'_1(t_2) = \vec{r}_1(t_2)$ et $\vec{r}'_2(t_2) = \vec{r}_2(t_2)$

$$\vec{r}'_1(t_3) = \vec{r}_1(t_3) - \vec{v}_{cm} \Delta t \quad \text{et} \quad \vec{r}'_2(t_3) = \vec{r}_2(t_3) - \vec{v}_{cm} \Delta t \quad \text{etc...}$$

D'où la construction des trajectoires ; on vérifie qu'à chaque instant les vitesses des 2 palets sont égales et opposées.

2ème méthode : le centre de masse est au milieu du segment de droite

joignant à l'instant t les palets 1 et 2. Si l'on porte à partir d'un point fixe les vecteurs $\frac{\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)}{2}$ et $-\left(\frac{\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)}{2}\right)$ pour tous

les instants t_1, t_2, \dots , on obtient les trajectoires dans le repère du centre de masse. La direction de ces vecteurs peut-être lue directement sur la figure 1. La première méthode est plus précise, car tous les segments à reporter sont parallèles à une même direction, celle de \vec{v}_{cm} .

b) la collision est élastique

La conservation de l'énergie s'écrit

$$\vec{v}_1''^2 + \vec{v}_2''^2 = \vec{w}_1''^2 + \vec{w}_2''^2 \quad \text{et puisque } \vec{v}_1'' = -\vec{v}_2''$$

on en déduit que $|\vec{v}_1''| = |\vec{w}_1''|$; les palets ont même vitesse lorsqu'ils s'approchent et s'éloignent, ce que l'on vérifie sur la trajectoire construite.

c) on peut en déduire le mouvement d'un palet de masse $\frac{m}{2}$ qui entrerait en collision avec un palet tenu fixe

$$\text{Remarquons que } \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{r}_1''(t) - \vec{r}_2''(t)) = \frac{1}{2} (\vec{v}_1''(t) - \vec{v}_2''(t)) = \vec{v}_1''(t) = -\vec{v}_2''(t)$$

$$\text{Posons } \vec{r}(t) = \vec{r}_1''(t) - \vec{r}_2''(t) = \vec{r}_1''(t) - \vec{r}_2''(t)$$

L'énergie totale du système des deux palets dans le repère du centre de masse peut s'écrire à partir d'une expression semblable à l'expression (1) :

$$E_{cm} = \frac{1}{2} m \left(\frac{1}{2} \frac{d\vec{r}_1''}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{1}{2} \frac{d\vec{r}_2''}{dt} \right)^2 + \mathcal{V}(r) = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{2} \right) \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 + \mathcal{V}(r)$$

Ceci est l'énergie totale d'une particule de masse $\frac{m}{2}$, repérée par rapport

à un point O par la coordonnée \vec{r} et soumise à une force passant par O décrite par l'énergie potentielle $\mathcal{V}(r)$

Donc si l'on porte à partir d'une origine O, la quantité $\vec{r}_1''(t) - \vec{r}_2''(t)$

pour tous les instants t_1, t_2, \dots , on obtient le mouvement d'un palet de masse

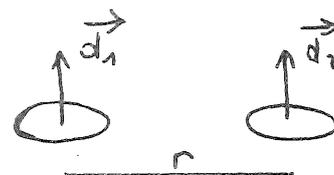
$\frac{m}{2}$ entrant en collision avec un palet tenu fixe au point O, si ces deux pa-

lets interagissent à la distance r avec la même force que les deux palets de masse m que nous avons considérés. On rencontrera dans la manip n°4

le même phénomène : mouvement autour du centre de masse = mouvement d'une particule de masse "réduite" soumise à une force passant par un point fixe.

IV - Nature de la force entre les palets magnétiques

La direction de magnétisation des palets est leur axe de symétrie, perpendiculaire à la surface de la table. La force entre les deux palets est ré-



pulsive, dirigée suivant la direction qui joint les centres de masse des deux palets. Lorsque les palets sont éloignés l'un de l'autre, ils peuvent être considérés comme ponctuels, et la force exercée par l'un sur l'autre est $\frac{3 d_1 d_2}{r^4}$; autrement dit l'énergie potentielle du système des deux palets à la distance r est $d_1 d_2 / r^3$

Lorsque les palets sont rapprochés, il faut faire la somme des forces exercées par chaque élément d'un palet sur chaque élément de l'autre. La résultante des forces est par symétrie le long de la droite qui joint les centres de masse, mais elle n'est pas égale à la force qui s'exercerait si chaque palet était concentré en son centre de masse (cette propriété est vraie pour une force en $\frac{1}{r^2}$ mais pas pour une force en $\frac{1}{r^4}$). On peut construire expérimentalement l'énergie potentielle en fonction de r ceci fait l'objet d'une autre manip. Remarquons seulement qu'il est facile d'observer* que la distance minimum d'approche des deux palets dépend de la vitesse relative des deux palets et soulignons que ceci s'explique à partir de la notion d'énergie potentielle.



* expérimentalement

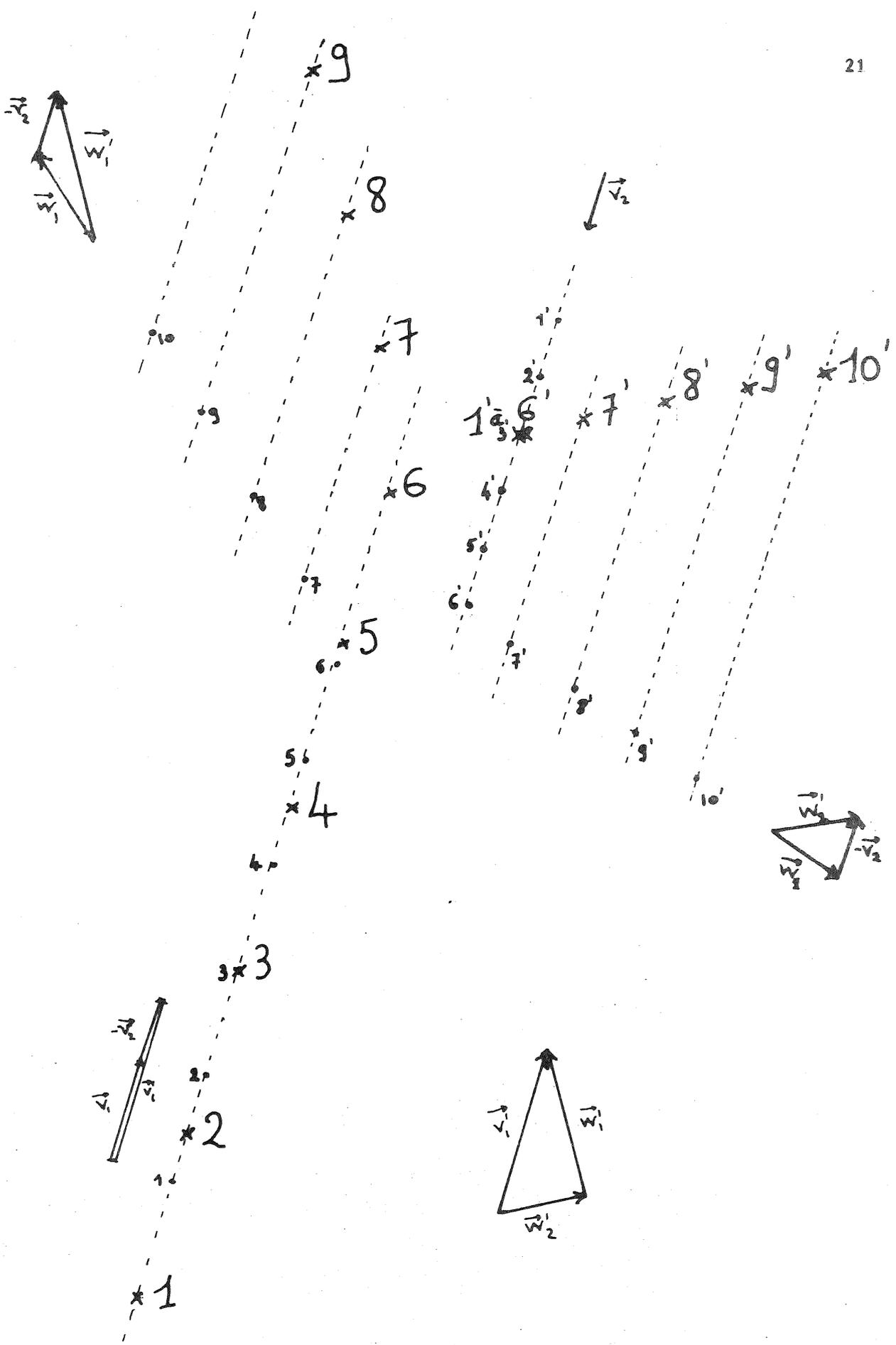


Figure 2-a

o 1 repère quelconque
 x 1 repère où le palet 2 est
 initialement au repos

3

Mouvement d'un palet attaché par un ressort à un point fixe :
Oscillateur harmonique à 2 dimensions .

I. - Etude Théorique du mouvement

Un oscillateur harmonique à 2 dimensions est un point matériel se déplaçant dans un plan sous l'action de la force $\vec{F} = -k \vec{r}$.

Nature de la Trajectoire

L'équation du mouvement est $m \ddot{\vec{r}} + k \vec{r} = 0$. Sa solution générale est :
 $\vec{r} = \vec{A} \cos \omega t + \vec{B} \sin \omega t$. la trajectoire est une ellipse.

Le mouvement est un mouvement périodique de pulsation $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ indépendante des dimensions de l'ellipse. \vec{A} est le vecteur position à l'instant $t = 0$, $\omega \vec{B}$ la vitesse à l'instant $t = 0$.

Conservation de l'énergie totale E

La quantité $E = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + \frac{1}{2} k \vec{r}^2$ reste constante le long du mouvement ;

en effet $\dot{E} = m \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} + k \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = \vec{v} \cdot (m \dot{\vec{v}} + k \vec{r}) = 0$.

E est la somme de l'énergie cinétique $\frac{1}{2} m \vec{v}^2$ et de l'énergie potentielle $\frac{1}{2} k \vec{r}^2$

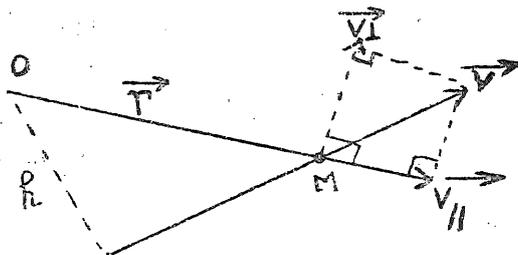
On peut écrire $\frac{2E}{m} = (\vec{v}^2 + \omega^2 \vec{r}^2)$.

Conservation du moment cinétique $\vec{\sigma}$

La quantité $\vec{\sigma} = \vec{r} \wedge m \vec{v}$ reste constante le long du mouvement.

En effet : $\dot{\vec{\sigma}} = \vec{v} \wedge m \vec{v} + \vec{r} \wedge (-k \vec{r}) = 0$.

différentes expressions de σ : $\frac{\sigma}{m} = k r = r v_{\perp} = C$

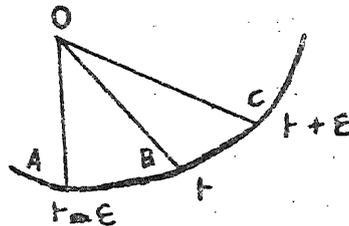
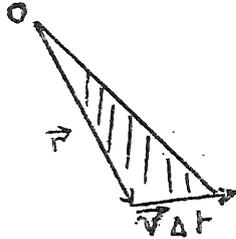


Une autre forme de la loi de conservation de $\vec{\sigma}$ est la loi des aires :

$\frac{1}{2} (\vec{r} \wedge \vec{v}) \Delta t$ est l'aire balayée par le rayon vecteur dans l'intervalle de temps Δt .

Comme $\vec{r} \wedge \vec{v}$ est une constante, les aires balayées pendant des intervalles de temps égaux (par exemple ϵ) sont égales.

Si ϵ est petit l'aire balayée est proche de l'aire d'un triangle.



(aire OAB = aire OBC)

Potentiel centrifuge

Pourquoi le palet ne tombe-t-il pas sur le centre de forces ?

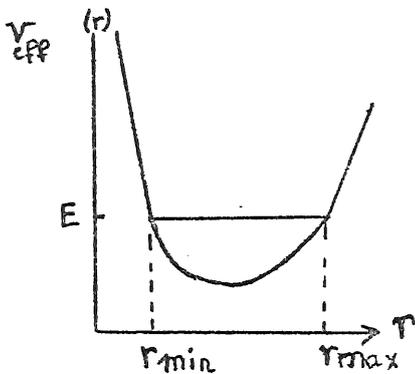
Intéressons nous à la quantité $r = |\vec{r}|$. En décomposant le vecteur vitesse parallèlement et perpendiculairement à \vec{r} , on écrit, l'énergie sous la forme :

$$E = \frac{1}{2} m (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2) + \frac{1}{2} k r^2 \text{ . Mais } v_{\perp} = \frac{c}{r} \text{ (conservation du moment cinétique),}$$

$$v_{\parallel} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{r} = \frac{1}{2r} \frac{d}{dt} r^2 = \frac{dr}{dt} \text{ (sans flèche sur r!) .}$$

$$\text{Donc } E = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{c^2}{r^2} + \omega^2 r^2 \right) = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + V_{\text{effectif}}(r) \text{ .}$$

Cette dernière expression est l'énergie cinétique d'un corps se déplaçant à 1 dimension dans le potentiel $V_{\text{effectif}}(r) = \frac{mc^2}{2r^2} + \frac{1}{2} k r^2$. On ne peut donc avoir $r = 0$



Car alors $V_{\text{eff}} = \infty$. Les maxima et minima de r sont donnés par $\dot{r} = 0$

c.a.d. $V_{\text{eff}}(r) = E$ ou

$$\omega^2 r^4 - \frac{2E}{m} r^2 + c^2 = 0 \text{ . Ils vérifient :}$$

$$r_{\text{min}}^2 + r_{\text{max}}^2 = \frac{2E}{m\omega^2}$$

(somme et produit des racines d'une équation du 2^e degré)

$$r_{\text{min}} r_{\text{max}} = \frac{c}{\omega} \text{ .}$$

Pour rendre plus classique la dernière expression de l'énergie, dérivons la par rapport au temps :

$$\dot{E} = 0 = m \dot{r} \left(\dot{r}^2 - \frac{c^2}{r^2} + \omega^2 r \right) \text{ . Mais } c = r v_{\perp} \text{ } \omega^2 = \frac{k}{m} \text{ .}$$

D'où $m \dot{r}^2 = -kr + m \frac{v_{\perp}^2}{r}$. Le mouvement a une dimension est celui d'un corps soumis à la force de rappel $-kr$ et à la "force centrifuge" $m \frac{v_{\perp}^2}{r}$.

II - Manipulation

Un palet est lié au centre de la table par un petit ressort. Le palet une fois lancé décrit sensiblement une ellipse ; mais comme il perd par frottements (au niveau du ressort) de l'énergie, cette ellipse est plus petite à chaque révolution et la trajectoire est en fait hélicoïdale (on observe aussi une rotation de l'axe de l'ellipse).

Prendre soin de lancer le palet de façon à avoir une trajectoire des dimensions de la table et d'excentricité marquée. (Avec une trajectoire quasi-circulaire, les résultats de la manip deviennent triviaux).

Eclairer le palet et prendre la photo pendant un intervalle de temps qui soit au moins et à peine plus égal à la période du mouvement. Agrandir la photo et la piquer en ne gardant que les positions éclairées qui appartiennent à une même période.

1° - mesure de la pulsation ω

Si N est le nombre de positions éclairées la période T vérifie :

$$(N-1) \epsilon \ll T \ll N \epsilon \quad . \quad \text{D'où} \quad \frac{\Delta T}{T} \sim \frac{1}{N} .$$

Plus précisément on peut écrire $T = (N-1 + \alpha) \epsilon$ ($0 < \alpha < 1$) ; α est obtenu comme rapport de l'aire que le rayon vecteur doit balayer pour terminer l'ellipse à l'aire qu'il balayer pendant l'intervalle de temps ϵ . (cf vérification de la loi des aires).

Sur la figure 3a , on trouve $N = 20$, $\alpha = 0,2 \pm 0,1$ d'où $T = 19,2 \pm 0,1$

On en déduit $\omega = 0,327$ et $\omega^2 = 0,107 \pm 0,001$

2° - étude de l'accélération.

Mesurer l'accélération du palet aux divers instants. Si la construction géométrique donne un vecteur si petit que la précision est mauvaise, on améliore cette précision en utilisant des intervalles de temps 2ϵ . L'erreur théorique devient par contre

$$\frac{\Delta \gamma}{\gamma} = 3 \left(\frac{2\epsilon}{T} \right)^2 . \quad (\text{Voir figure 3b})$$

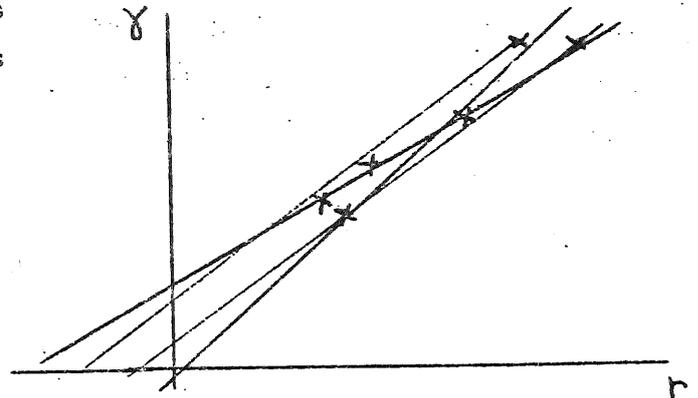
On vérifie bien que l'accélération est dirigée vers le centre de forces. On peut porter γ en fonction de r (voir tableau n°1 et figure 3c) et on constate que les points expérimentaux se groupent autour d'une droite.

Les valeurs des paramètres de la droite compatibles avec les points expérimentaux sont déterminées en traçant les droites extrêmes qui ne s'écartent pas trop des points expérimentaux (voir figure ci-contre)

On trouve sur la figure 3c

$$\gamma(r) = b (r - r_0) \text{ avec}$$

$$b = 0,1 \pm 0,01 \text{ et } r_0 = 0,1 \pm 0,4$$



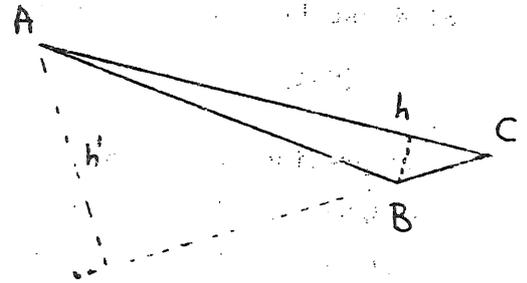
On peut approcher raisonnablement le mouvement par $\gamma(r) = br$, relation pour laquelle un calcul théorique exact est possible. Nous utiliserons dans le calcul de l'énergie (au 4^e) le choix $r_0 = 0$

3° - loi des aires

Le tableau n°2 donne l'aire des triangles.

Lorsque le triangle est allongé l'aire se calcule par $\frac{1}{2} h \times AB$, car $\frac{1}{2} h' \times BC$

est très imprécis.



4° - conservation de l'énergie

Le long de la trajectoire la quantité $v^2 + \omega^2 r^2$ est constante et égale à $\frac{2E}{m}$; ω a été obtenu avec précision en 1^e). On pourrait calculer l'énergie du point 15 par exemple, en déterminant sa vitesse à l'aide des positions des points 14 et 16. On peut aussi s'intéresser à l'énergie des points à mi-distance entre deux positions éclairées, c'est ce qui a été fait dans le tableau III et la figure 3b. V est la longueur du segment joignant deux positions éclairées consécutives, r la distance du centre de force au milieu de ce segment.

On peut aussi porter la courbe v^2 fonction de r^2 . Cette courbe (une portion de droite) permet de déterminer la pulsation ω , mais avec une précision inférieure à celle de II 1°. (Voir figure 3d)

On trouve de cette manière graphique $\frac{2E}{m} = 14 \pm 0,8$ $\omega^2 = 0,11 \pm 0,02$

à comparer à la valeur $\omega^2 = 0,107 \pm 0,001$ obtenue en 1^e

5° - la mesure de r_{\min} et r_{\max} (Tableau 4) donne une autre détermination :

- de $\frac{2E}{m} = r_{\min}^2 + r_{\max}^2$ à comparer au tableau 3

- du moment cinétique $\frac{\sigma}{m} = C = r_{\min} r_{\max} \omega$

on trouve ici $\left\{ \begin{array}{l} C = 42 \times 0,327 = 13,7 \\ C = 39 \times 0,327 = 12,8 \end{array} \right.$ à comparer au tableau 2

r_{\min}	r_{\max}	$r_{\min} \cdot r_{\max}$	$r_{\min}^2 + r_{\max}^2$
3.85	10.95	42	13.5
3.65	10.6	39	12.5

Tableau 4

	2r	r
r ₃	0.8	3.8
r ₄	1	5
r ₅	1.35	7.25
r ₆	1.8	9.3
r ₇	2.2	10.6
r ₈	2.2	10.9
r ₉	2.1	10.2
r ₁₀	1.85	8.65
r ₁₁	1.3	6.4
r ₁₂	0.8	4.2
r ₁₃	0.75	3.75
r ₁₄	1.1	5.5
r ₁₅	1.6	7.8
r ₁₆	2	9.5
r ₁₇	2.2	10.5
r ₁₈	2.15	10.4
r ₁₉	1.85	9.35
r ₂₀	1.55	7.6

Tableau 1

Triangle	aire x 2 = C
0.12	5.1 x 2.6 = 13.3
0.2.3	5.1 x 2.65 = 13.5
0.3.4	5.1 x 2.65 = 13.5
0.4.5	5.1 x 2.65 = 13.5
0.5.6	9.3 x 1.45 = 13.5
0.6.7	9.3 x 1.35 = 12.6
0.7.8	10.9 x 1.2 = 13.1
0.8.9	10.9 x 1.2 = 13.1
0.9.10	8.6 x 1.5 = 12.9
0.10.11	8.6 x 1.5 = 12.9
0.11.12	6.4 x 1.95 = 12.5
0.12.13	4.2 x 2.95 = 12.4
0.13.14	5.5 x 2.25 = 12.4
0.14.15	7.75 x 1.55 = 12
0.15.16	7.75 x 1.55 = 12
0.16.17	9.55 x 1.25 = 11.9
0.17.18	9.55 x 1.35 = 12.9
0.18.19	9.35 x 1.25 = 11.7
0.19.20	7.6 x 1.65 = 12.5
0.20.21	7.6 x 1.65 = 12.5
0.21.22	5.35 x 2.35 = 12.6

↑
Tableau 2

segment	V	r	$V^2 + \omega^2 r^2 = \frac{2E}{m}$
1.2	3.15	6.2	13.8
2.3	3.55	4.2	14.5
3.4	3.5	4.1	14.0
4.5	3.15	6	13.8
5.6	2.65	8.3	14.4
6.7	1.8	10	13.9
7.8	1.25	10.9	
8.9	1.3	10.7	
9.10	2.1	9.4	13.8
10.11	2.8	7.5	13.8
11.12	3.25	5.2	13.5
12.13	3.45	3.6	13.3
13.14	3.3	4.4	13
14.15	2.9	6.6	13
15.16	2.3	8.7	13.4
16.17	1.55	10.1	13.3
17.18	1.2	10.6	13.4
18.19	1.6	9.9	13.1
19.20	2.3	8.5	13
20.21	3.05	6.5	13.8
21.22	3.35	4.3	13.2

Tableau 3

Figure 3. a

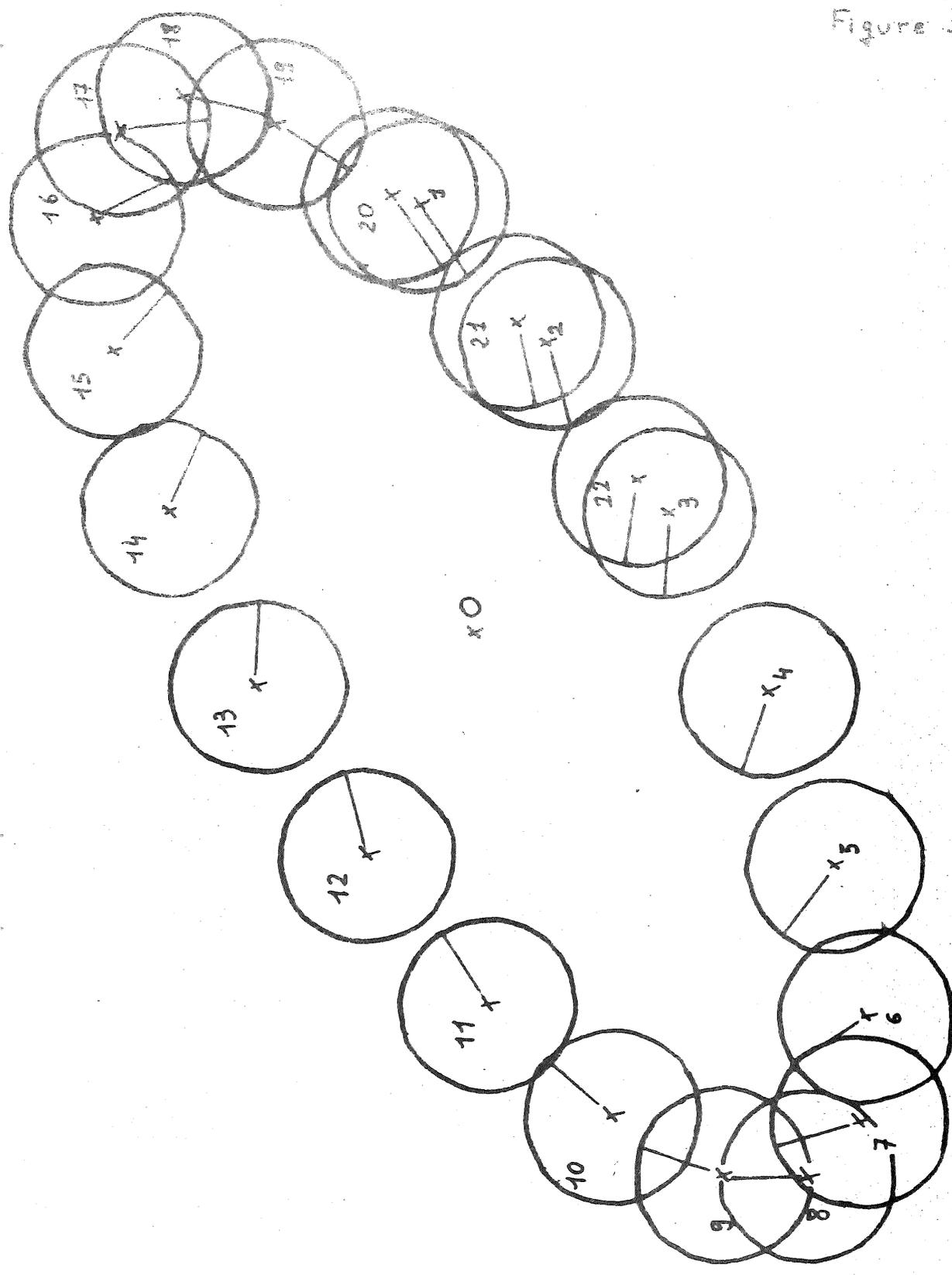
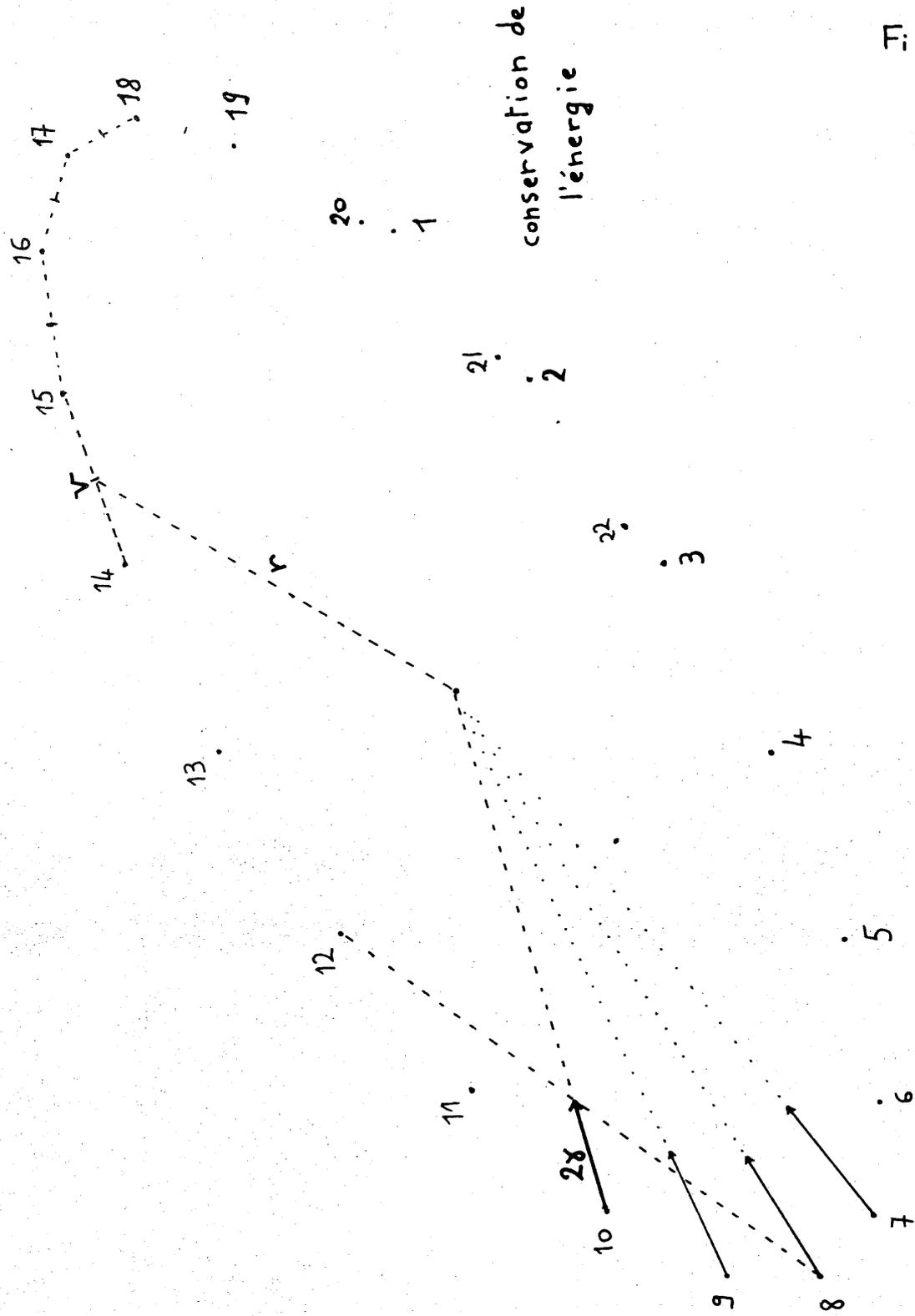
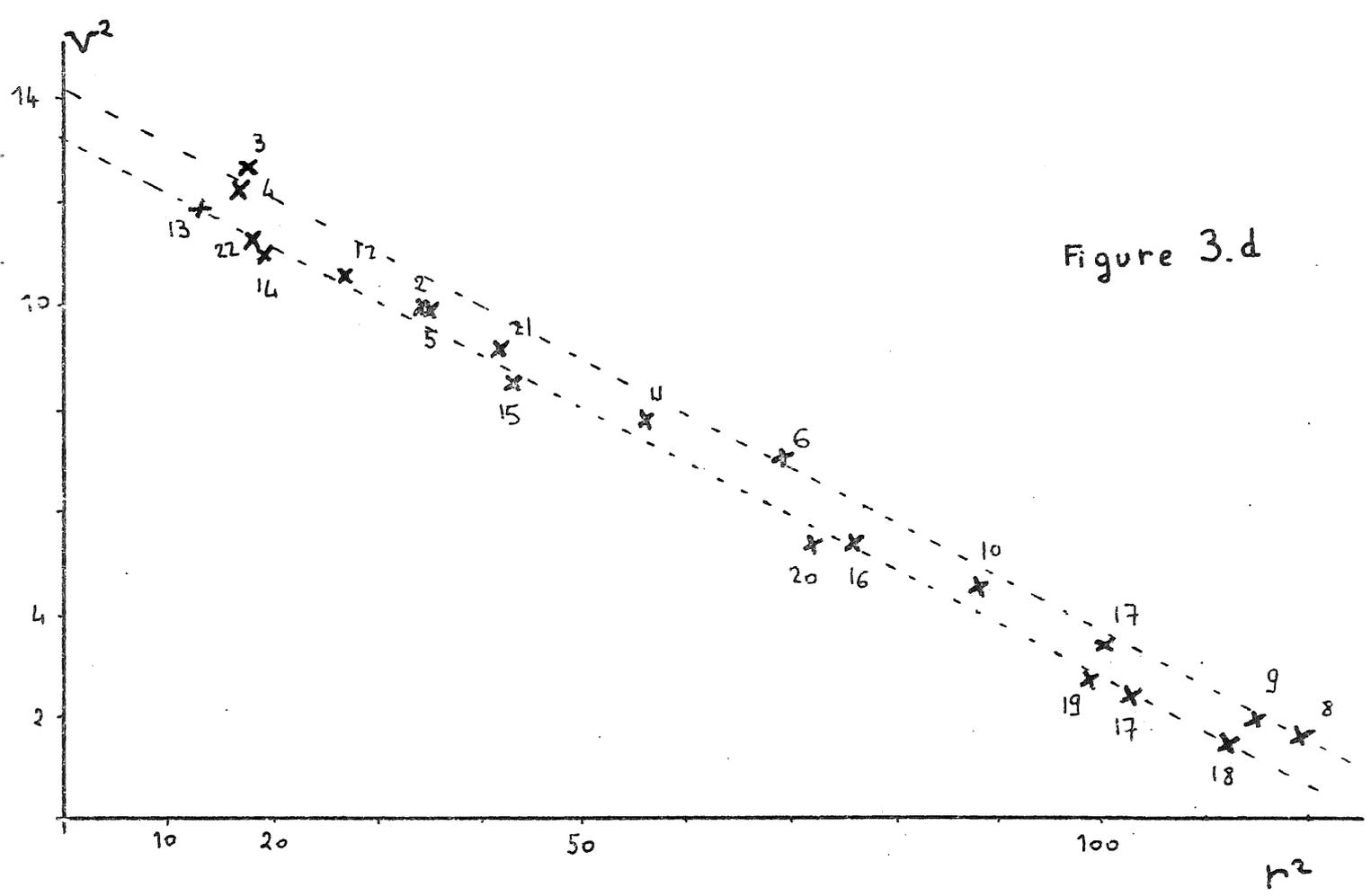
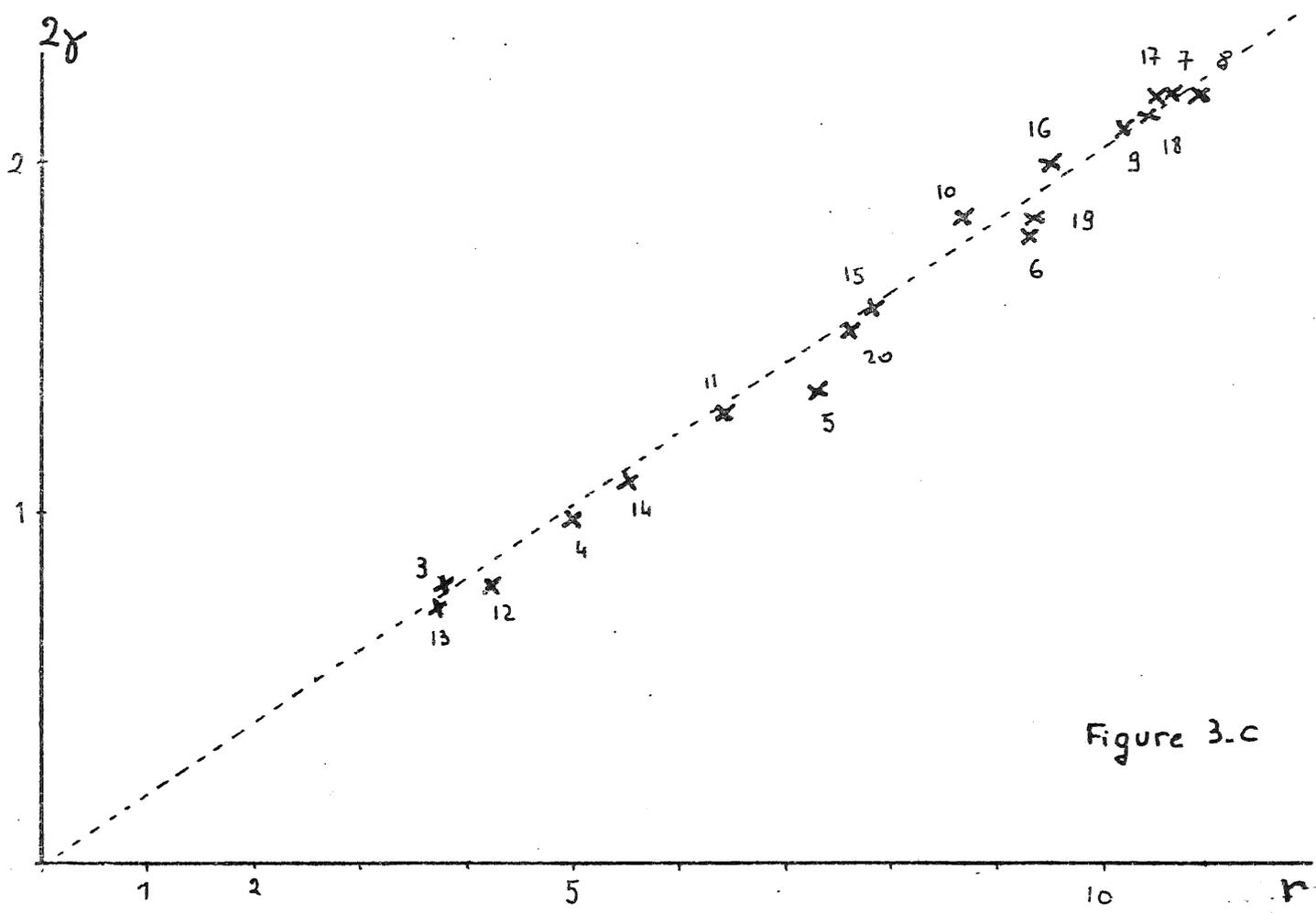


Figure 3.6





Mouvement d'un système déformable

I - Matériel et expérience

- 2 palets de plastique reliés par un ressort à spires jointives
- conditions initiales : on écarte les 2 palets pour que le ressort prenne environ 5 fois sa longueur initiale ℓ_0 - les 2 palets doivent présenter des signes distinctifs sur leur face pour que l'analyse soit plus commode. On lance 1 palet une fraction de seconde avant de lâcher l'autre afin d'imprimer au système à la fois un mouvement de translation d'ensemble et un mouvement de rotation
- prise de vue : elle doit être très brève sinon la photo est difficile à interpréter.

II - But de la manipulation

- 1 - Mouvement du centre de masse de l'ensemble
- 2 - Accélération du centre de masse de chaque palet
- 3 - Conservation de l'énergie totale de l'ensemble
- 4 - Passage dans le repère du centre de masse

III - Le mouvement du centre de masse de l'ensemble

Le système formé par l'ensemble des 2 palets et du ressort est isolé donc la quantité de mouvement totale du système est constante au cours du mouvement, et par suite le centre de masse du système a un mouvement rectiligne uniforme.

Si la masse du ressort est négligeable devant celle des palets, le centre de masse G de l'ensemble est défini par

$$\vec{OG} = \frac{m_1 \vec{OG}_1 + m_2 \vec{OG}_2}{m_1 + m_2}, \quad G_1 \text{ et } G_2 \text{ étant les centres de masse de chaque palet}$$

à l'instant t, et O un point fixe quelconque. On en déduit

$$d \frac{\vec{OG}}{dt} = \frac{m_1 \vec{V}_1(t) + m_2 \vec{V}_2(t)}{m_1 + m_2} = \text{Cte}$$

Pour chaque position éclairée, on construira le centre de masse G, milieu du segment joignant les centres des 2 palets ($m_1 = m_2$) dans chaque position.

Résultat pour ces points G : ils sont alignés (mouvement rectiligne), ils sont équidistants (mouvement uniforme) - Voir la figure 4-a

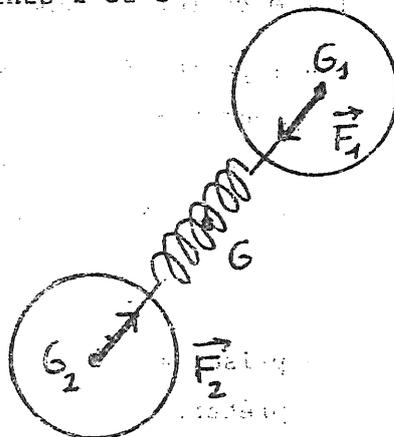
On constate qu'à la position 1, l'un des palets n'était pas encore lâché ; on n'utilisera jamais dans les constructions suivantes les points 1 et 1'.

IV - Période du mouvement autour de centre de masse.

Un palet de masse m et de quantité de mouvement variable $m \vec{V}(t)$ est dit soumis à la force

$$\vec{F}(t) = m \frac{d\vec{V}}{dt}$$

Ici, l'origine de la force qui s'exerce sur chaque palet est la tension du ressort qui est en principe proportionnelle à l'allongement du ressort



$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = k(\ell(t) - \ell_0)$, avec $\ell(t) = G_1 G_2 =$ longueur du ressort à l'instant, t , ℓ_0 longueur $G_1 G_2$ lorsque le ressort n'est pas tendu. Par la suite

(c.f. § V) nous verrons qu'on peut écrire $|\vec{F}_1| = k \ell(t)$ comme dans la manip n°3.

La manip n°3 nous a montré que la détermination la plus précise de la grandeur k/m est donnée par la période du mouvement du système. Dans le mouvement du solide déformable autour de son centre de masse G , tout se passe comme si le palet 1 était attiré vers G par une force $\vec{F}_1 = -2k \vec{GG}_1$ la période du palet est donc telle que

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

Mesure de T : Si N est le nombre de points éclairés lorsque le système effectue une rotation de π autour de son centre de masse, $T = 2\epsilon(N - 1 + \alpha)$ où α est la fraction d'aire qui reste à balayer pour finir le demi-tour, ϵ la période du stroboscope ; on choisit dans toute la manip l'unité de temps telle que $\epsilon = 1$

Dans le mouvement autour de G , l'aire balayée entre deux instants du stroboscope par le vecteur \vec{GG}_1 est $\frac{1}{2} \frac{\ell(t)}{2} \frac{\ell(t+\epsilon)}{2} \sin \Delta\theta$ où $\Delta\theta$ est l'angle entre

$\vec{GG}_1(t)$ et $\vec{GG}_1(t+\epsilon)$ (Voir le § VI-C de cette manip)

On trouve $N = 6$ et $\alpha = 0,52 \pm 0,02$

d'où $T = 11,14 \pm 0,04$ et $\frac{2k}{m} = 0,32 \pm 0,004$

soit $\frac{k}{m} = 0,16 \pm 0,002$

V - Accélération du centre de masse de chaque palet

Pour le palet 1 on a $m \frac{d\vec{v}_1}{dt}(t) = \vec{F}_1(t)$, où $\vec{F}_1(t)$ est porté par le vecteur

$$\vec{G}_1 \vec{G}_2(t) \text{ et } |\vec{F}_1| \neq k \ell(t) \quad \text{avec} \quad \ell(t) = |\vec{G}_1 \vec{G}_2| .$$

on a une propriété semblable pour le palet 2 .

Pour chaque position éclairée de chaque palet, on construit l'accélération γ (Voir figure 4b et manip n°3)

Problèmes de précision

Les positions éclairées indiquées sur les figures de cette manip ont été obtenues à partir d'un agrandissement après piquage de la photo polaroid, contrairement aux figures de la manip n°3 obtenues à partir d'un agrandissement d'un contretypé de la photo polaroid.

L'incertitude lors d'un piquage sur la photo est au moins 1/4 mm et plus vraisemblablement 0,5 mm, vue la nécessité d'estimer la position du centre du palet qui n'était pas marqué avec précision. Ceci entraîne une incertitude de 0,5 à 1 mm sur toute mesure de longueur.

Si pour construire l'accélération du palet à l'instant t , on utilise les positions éclairées à $t-\epsilon$, t , $t+\epsilon$, on mesure une longueur correspondant à $\gamma/2$ qui est typiquement de l'ordre de 2,5 mm sur la photo polaroid. Donc l'erreur relative due au piquage est entre 20% et 40% ! Si l'on utilise les positions éclairées à $t-2\epsilon$, t , $t+2\epsilon$, on mesure une longueur correspondant à 2γ , typiquement de l'ordre de 1 cm et l'erreur relative due au piquage est maintenant entre 5% et 10%. Cependant le choix d'un intervalle de temps 2ϵ entraîne une erreur théorique sur la valeur de γ (Voir l'introduction)

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma} = 3 \frac{(2\epsilon)^2}{T^2} ; \text{ puisque } T \approx 11 \epsilon, \frac{\Delta\gamma}{\gamma} = 10\%$$

bien préférable à l'erreur de 20% à 40% due au piquage, dans la mesure de $\gamma/2$. Les figures de cette manip correspondent à un grandissement de 3 de la photo polaroid. L'incertitude due au piquage de la photo initiale entraîne donc une incertitude de 1,5 mm à 3 mm sur toute mesure de longueur.

On mesure donc pour chaque position éclairée du palet la longueur 2γ (on a choisi $\epsilon = 1$) - Voir tableau n°1 et figure 4b -

On constate qu'à l'instant t , les accélérations des palets 1 et 2 peuvent différer de 10%, ce qui correspond bien à la précision estimée. Si l'on porte sur un graphique 2γ en fonction de ℓ (voir figure 4c), on constate que les points se groupent autour d'une droite $2\gamma = b(\ell - \ell_0)$ avec $b = 0,28 \pm 0,1$ et $\ell_0 = 0 \pm 2,5A$ (voir la manip 3 pour la mesure de l'incertitude sur les paramètres)

On en déduit la détermination $\frac{k}{m} = 0,14 \pm 0,05$

La précision est sensiblement moindre que dans la manip n° 3 et il serait intéressant de faire disparaître les incertitudes dues à la méthode d'agrandissement avant de comparer la précision des résultats des manip 3 et 4 - On se fixe dans la suite $\ell_0 = 0$

Remarque : Il peut paraître injustifié, intuitivement de mesurer l'accélération en $8'$ en prenant un intervalle $2 \in$ (positions $6'$ et $10'$), car il y a une forte courbure de la trajectoire. Ceci n'est pas vrai car l'accélération est la même mesurée dans le repère lié à la table et dans le repère du centre de masse. (Repère dans lequel la trajectoire du palet est une ellipse semblable à celle étudiée dans la manip n°3). L'erreur théorique est donc toujours bien $3 \left(\frac{2\epsilon}{T} \right)^2$.

VI - Conservation de l'énergie totale du système déformable

Si l'on néglige la masse du ressort, l'énergie cinétique du système est

$\frac{1}{2} m \vec{v}_1^2(t) + \frac{1}{2} m \vec{v}_2^2(t)$. L'énergie potentielle du système est l'énergie potentielle du ressort $\frac{1}{2} k \ell^2(t)$.

La loi conservation de l'énergie totale d'un système isolé dit que la quantité

$\vec{v}_1^2(t) + \vec{v}_2^2(t) + \frac{k}{m} \ell^2(t) = \frac{2E}{m}$ est constante au cours du mouvement.

On peut mesurer la vitesse d'un palet à l'instant t en se servant des positions éclairées $t + \epsilon$ et $t - \epsilon$, ce qui conduit au tableau 2. On peut également mesurer la distance entre deux positions éclairées t et $t + \epsilon$ et attribuer cette vitesse au point à mi-distance entre ces positions et mesurer la distance entre ce point et le point correspondant pour l'autre palet. Ceci conduit au tableau 3.

Si l'on porte $\vec{v}_1^2 + \vec{v}_2^2$ en fonction de ℓ^2 on constate que les points sont dans une bande (assez large: imprécision du piquage) (voir figure 4d) décrite par

$v_1^2 + v_2^2 = -d\ell^2 + c$ avec $d = 0,16 \pm 0,03 = k/m$ et $c = \frac{2E}{m} = 27 \pm 2$

VII - Passage dans le repère du centre de masse

* but: nous étudierons le mouvement dans le repère du centre de masse et nous montrerons que le mouvement autour du centre de masse est la même que pour un palet de masse $\frac{m}{2}$ attaché au ressort dont l'autre extrémité serait fixe.

A) Construction du mouvement dans le repère du centre de masse

- méthode: voir manip n° 2 - On a choisi de faire coïncider les deux repères à l'instant 0.* Résultat: on constate que les trajectoires de G_1 et G_2 sont sur une même ellipse dont le centre est G (voir figure 4-e)

B) Théorie: Montrons pourquoi le mouvement est le même que celui d'un palet de masse $m/2$ attaché à un ressort dont l'autre extrémité est tenue fixe. (Mouvement étudié dans la manip n° 3)

Appelons $\vec{\rho} = \vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)$ le vecteur $\overrightarrow{G_2 G_1}$ à l'instant t . On a

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)$$

Dans le repère du centre de masse, les vitesses des palets sont

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{v}_{cm} \quad \text{et} \quad \vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{v}_{cm} \quad \text{et} \quad \text{puisque} \quad \vec{v}_{cm} = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}$$

$$\text{On a} \quad \vec{v}_2' = -\vec{v}_1' \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{\rho}}{dt} = 2\vec{v}_1'$$

L'énergie cinétique du système des 2 palets dans le repère du centre de masse

$$\text{est} \quad \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2'^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{\rho}}{dt} \right)^2 \quad (m = m_1 = m_2)$$

L'énergie totale du système des 2 palets dans le repère du centre de masse s'écrit

$$E_{cm} = \frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{\rho}}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} k \vec{\rho}^2$$

Ceci est l'énergie totale d'une particule de masse $\frac{m}{2}$, repérée par rapport à un point O par la coordonnée $\vec{\rho}$ et soumise à une force passant par O décrite par l'énergie potentielle $\frac{1}{2} k \vec{\rho}^2$.

Donc si l'on porte à partir d'une origine O la quantité $\vec{\rho} = \overrightarrow{G_2 G_1}$ pour tous les instants t_1, t_2, \dots On obtient le mouvement d'un palet de masse $\frac{m}{2}$ attaché à un ressort de constante de rappel k dont l'autre extrémité est tenue fixe.

On a vu dans la manip n° 3 que la pulsation du mouvement de ce palet est

$$\omega^2 = \frac{k}{(m/2)} = \frac{2k}{m}$$

La trajectoire de ce palet serait une ellipse de centre ce point fixe et de dimensions doubles de l'ellipse de la figure 4-e

C) Conservation du moment cinétique total du système par rapport à G

Le moment cinétique total d'un système isolé est constant au cours du mouvement

Le moment cinétique du système par rapport à G est

$$\vec{\sigma}_G = m \overrightarrow{GG_1} \wedge \vec{v}_1(t) + m \overrightarrow{GG_2} \wedge \vec{v}_2(t) = \frac{m}{2} \overrightarrow{G_2 G_1} \wedge (\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t))$$

Puisque $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_1' - \vec{v}_2' (= 2\vec{v}_1')$, $\vec{\sigma}_G$ est une quantité indépendante du repère choisi pour mesurer les vitesses.

Remarquons que, dans le repère du centre de masse, on a (cf figure ci jointe)

$$\overrightarrow{GG_1} \wedge \vec{v}_1' = \overrightarrow{GG_1}(t_1) \wedge \overrightarrow{G_1(t_1)G_1(t_2)} \text{ qui}$$

est l'aire du triangle $G G_1(t_1) G_1(t_2) \times 2$

qui est aussi $\frac{\rho(t_1)}{2} \frac{\rho(t_2)}{2} \sin \Delta \theta$. Donc

$$\frac{\sigma_G}{m} \text{ est l'aire balayée par le vecteur } \overrightarrow{G_1 G_2}$$

dans sa rotation autour de G.

On peut vérifier la conservation de $\frac{\sigma_G}{m}$ directement à partir de la figure 4 - a puisque les grandeurs $\rho(t)$ et $\Delta \theta$ sont invariantes dans un changement de repère (voir tableau n° 4). On élimine ainsi les erreurs faites dans la construction faite en VI A.

L'aire est sensiblement constante à une précision de 7%.

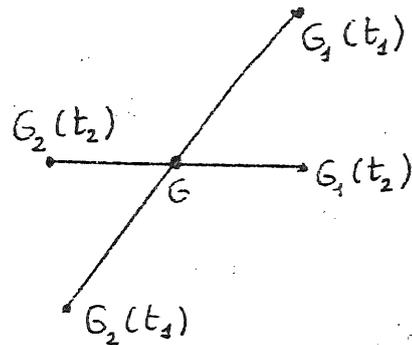
$$\text{On en déduit } \frac{\sigma_G}{m} = 15,5 \pm 1$$

D) Energie totale du système dans le repère du centre de masse

$$E_{cm} = \frac{1}{2} m \vec{v}_1'^2 + \frac{1}{2} m \vec{v}_2'^2 + \frac{1}{2} k \rho^2$$

Lorsqu'on se trouve aux points de l'ellipse de la figure 4-e correspondant à l'écart maximum ou minimum entre G_1 et G_2 (ρ_{min} et ρ_{max}), les vitesses

\vec{v}_1' et \vec{v}_2' sont perpendiculaires à la direction $G_1 G_2$.



On a alors $\sigma_G = m G_2 G_1 V_1'$ - Posons $x = G_1 G_2$ pour ces positions -

Des relations $\sigma_G = m x V_1'$ et $E_{cm} = m V_1'^2 + \frac{1}{2} k x^2$, on peut éliminer

$$V_1' : \frac{E_{cm}}{m} = \left(\frac{\sigma_G}{m}\right)^2 \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \frac{k}{m} x^2$$

Les deux racines x_1^2 et x_2^2 de cette relation fournissent les valeurs de ρ_{\min}^2 et ρ_{\max}^2

$$\text{On a } \rho_{\min}^2 + \rho_{\max}^2 = \frac{E_{cm}}{m} \lambda \frac{2m}{k} \text{ et } \rho_{\min}^2 \rho_{\max}^2 = \left(\frac{\sigma_G}{m}\right)^2 \frac{2m}{k}$$

$$\text{ou encore } \rho_{\min}^2 + \rho_{\max}^2 = \frac{E_{cm}}{m} \frac{4}{\omega^2} \text{ et } \rho_{\min} \rho_{\max} = \frac{\sigma_G}{m} \frac{2}{\omega}$$

ou $\omega = \frac{2k}{m}$ est la pulsation du solide déformable

La mesure sur la figure 4-e donne

$$\rho_{\min} = 5 \quad \rho_{\max} = 10,8 \quad - \quad \text{D'après le § IV } \omega^2 = 0,32$$

Soit $\omega = 0,58$

On en déduit $\frac{\sigma_G}{m} = 15,5$ à comparer à la valeur obtenue § C

et $\frac{E_{cm}}{m} = 11$ - Pour comparer à la valeur de $\frac{E}{m}$ obtenue précédemment

il faut remarquer $\frac{2E}{m} = V_1^2 + V_2^2 + \frac{k}{m} \rho^2$ et $\frac{2E_{cm}}{m} = V_1'^2 + V_2'^2 + \frac{k}{m} \rho^2$

$$\text{Or } V_1^2 + V_2^2 = \frac{1}{2} (\vec{V}_1 + \vec{V}_2)^2 + \frac{1}{2} (\vec{V}_1 - \vec{V}_2)^2$$

$$\text{et } \frac{\vec{V}_1 + \vec{V}_2}{2} = \vec{V}_{cm}, \quad \vec{V}_1 - \vec{V}_2 = \vec{V}_1' - \vec{V}_2' = 2 \vec{V}_1'$$

$$\text{On en déduit donc } \frac{2E}{m} = 2 \vec{V}_{cm}^2 + \frac{2E_{cm}}{m}$$

\vec{V}_{cm} a été mesuré sur la figure 4-a, $\vec{V}_{cm} = 1,6 \pm 0,1$ cm

D'où $2 \vec{V}_{cm}^2 + \frac{2E_{cm}}{m} = 5 + 22 = 27$ à comparer à la valeur

$$\frac{E}{m} = 27 \pm 2 \text{ obtenue au § V}$$

L'unité est le cm

Tableau 1

Position	$2x$	Position	$2x$	l
4	3,25	4'	3,25	10,7
5	2,15	5'	2,4	8
6	1,45	6'	1,55	5,2
7	2	7'	1,9	6,9
8	2,4	8'	2,9	9,5

Position	$2v_1$	$2v_2$	$((2v_1)^2 + (2v_2)^2)/4$	l^2
3	2,25	6,35	12	106
4	4,9	4,25	10,5	107
5	7,7	3,55	17,9	64
6	8,95	4,15	24,3	27,2
7	8,55	2,4	19,7	47,5
8	6,75	1,1	11,6	90,2
9	4,45	3,7	8,45	118,5

Tableau 2

Position	v_1	v_2	$v_1^2 + v_2^2$	l	l^2
2-3	0,7	3,75	14,6	9,4	92
3-4	1,6	2,6	9,3	10,65	106
4-5	3,3	1,9	14,8	9,2	84,5
5-6	4,4	1,85	22,8	6,05	36,5
6-7	4,55	1,65	23,4	5,35	28,6
7-8	4	0,85	16,7	8,2	67
8-9	2,8	1,05	8,85	10,4	104
9-10	2	2,4	9,75	9,9	98

Tableau 3

Position	ρ	Position	$\Delta\theta$ en°	$\rho(t)\rho(t+\epsilon)\sin\Delta\theta$
2	8,6	2-3	21,5	33,5
3	10,6	3-4	16	31,3
4	10,7	4-5	21	30,7
5	8	5-6	48	31
6	5,2	6-7	59	30,9
7	6,9	7-8	27	29,7
8	9,5	8-9	16	28,6
9	10,9	9-10	17,5	29,5
10	9			

Tableau 4

l'unité est le cm

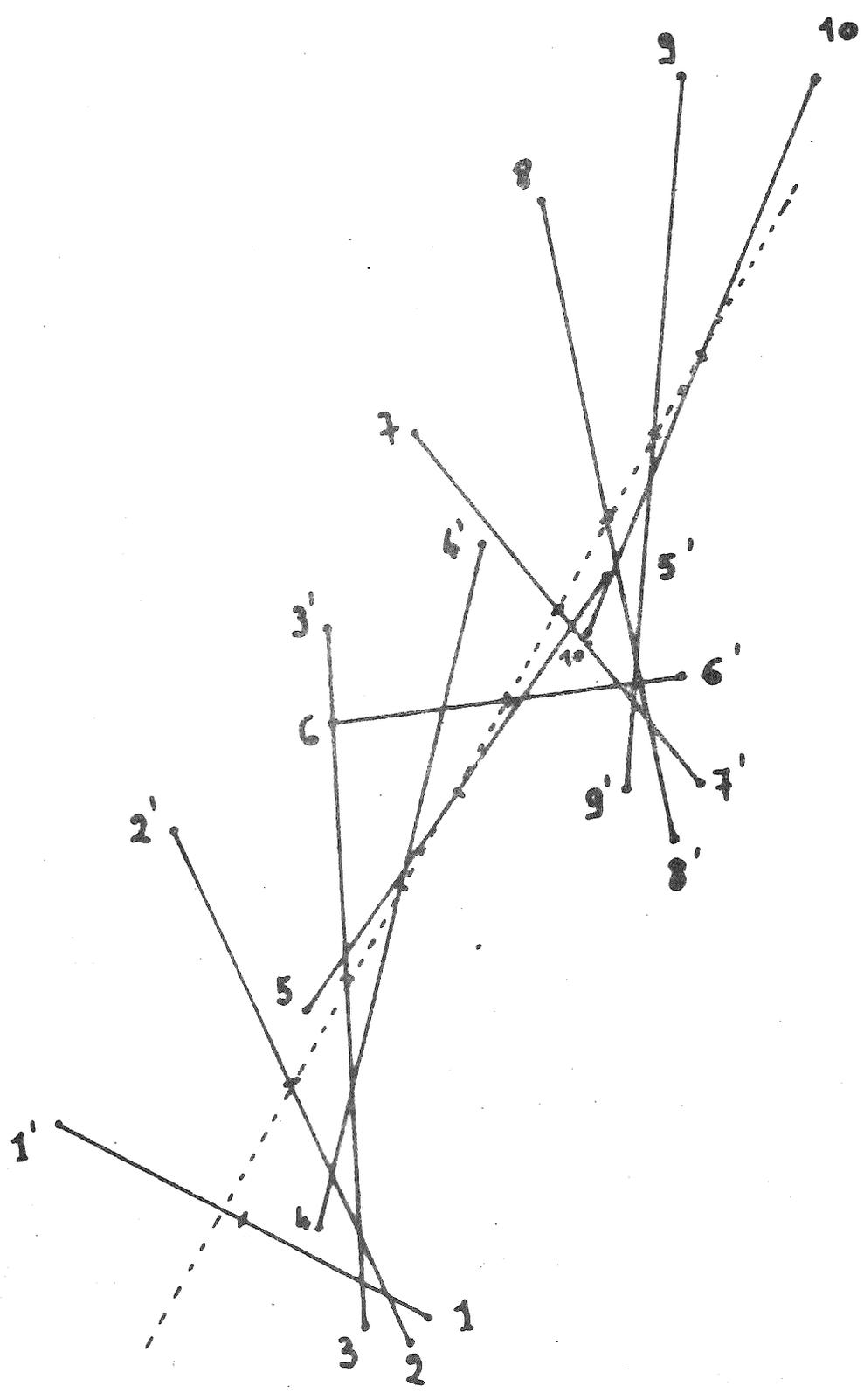


Figure 4-e

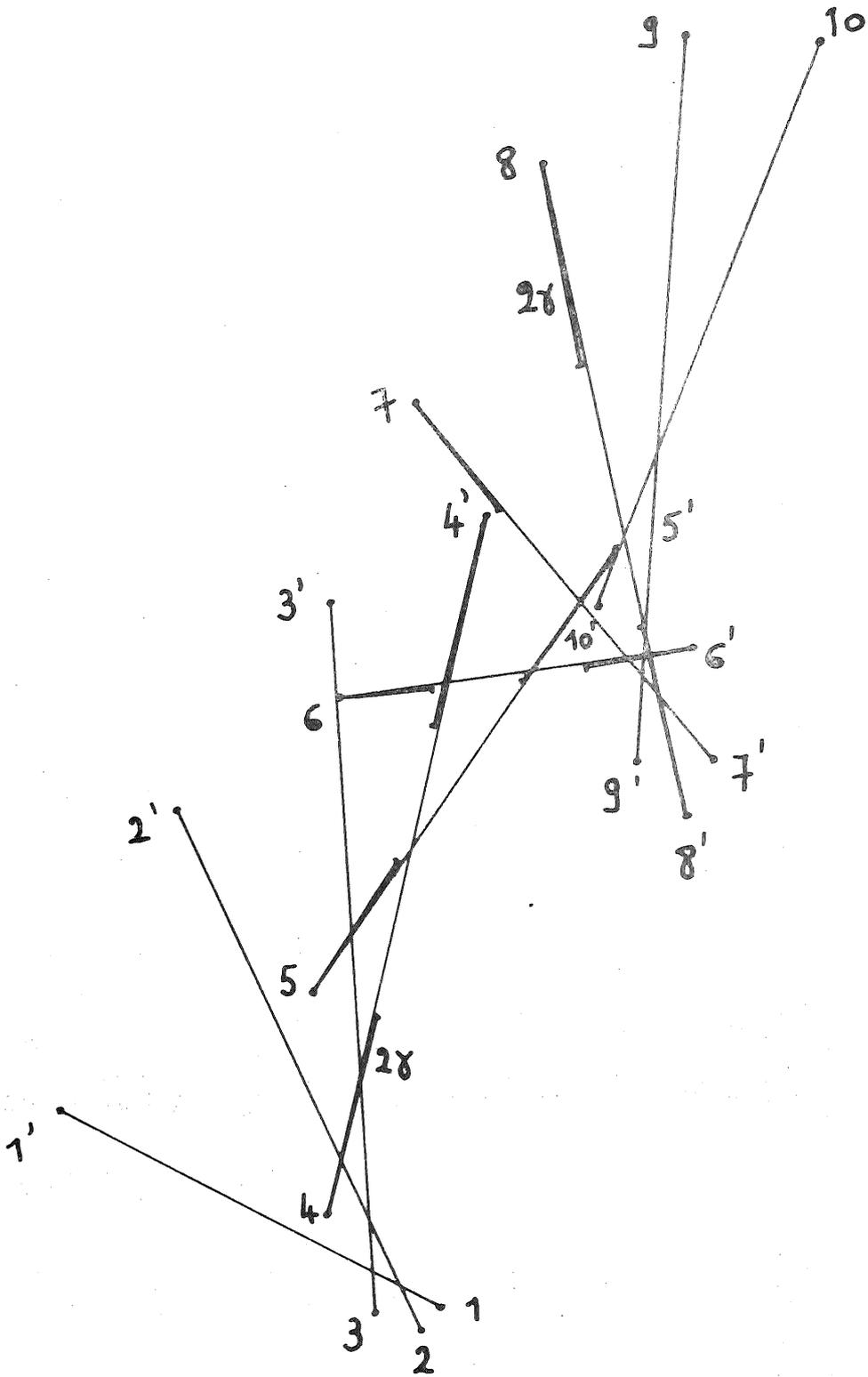


Figure 4-b

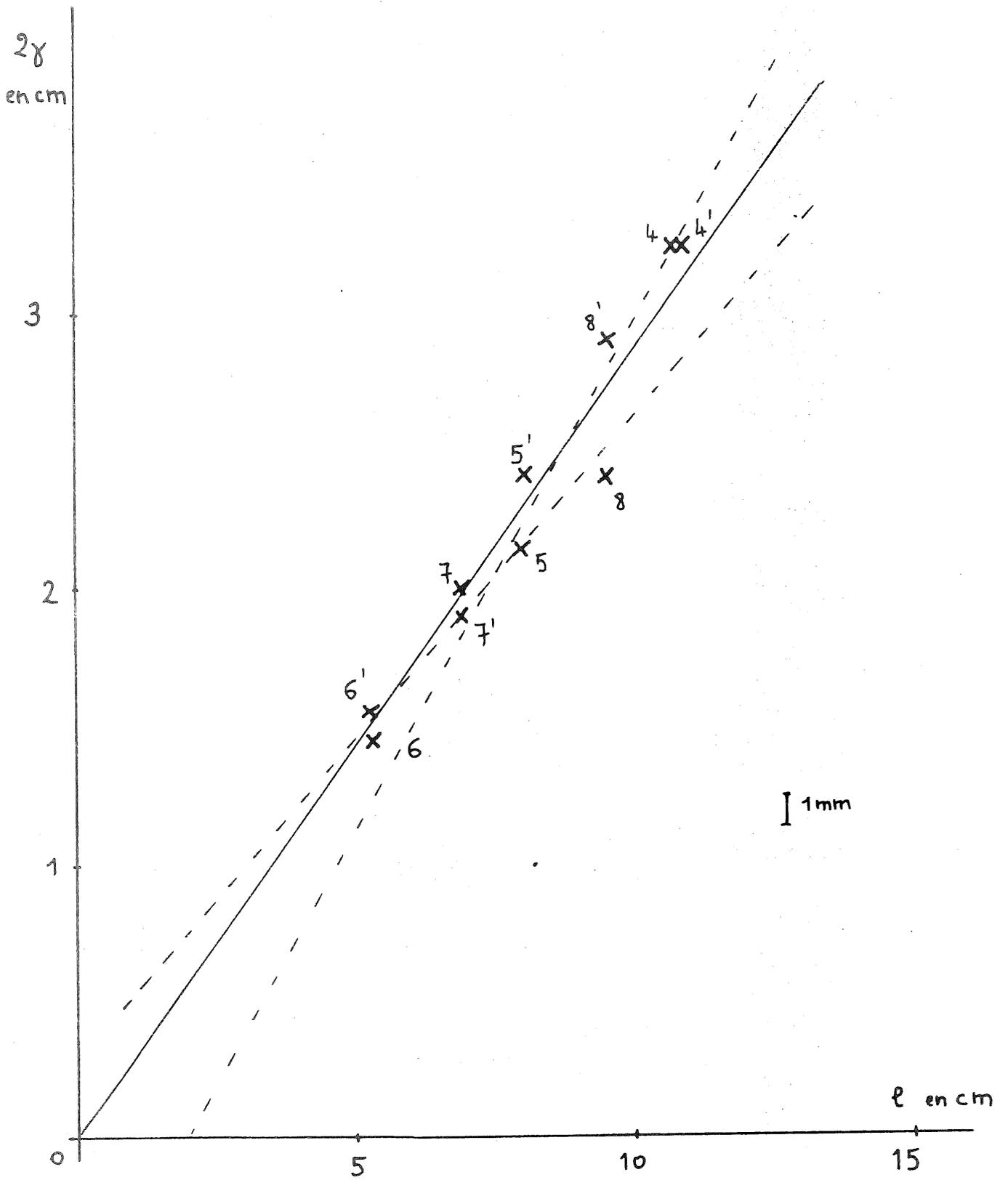
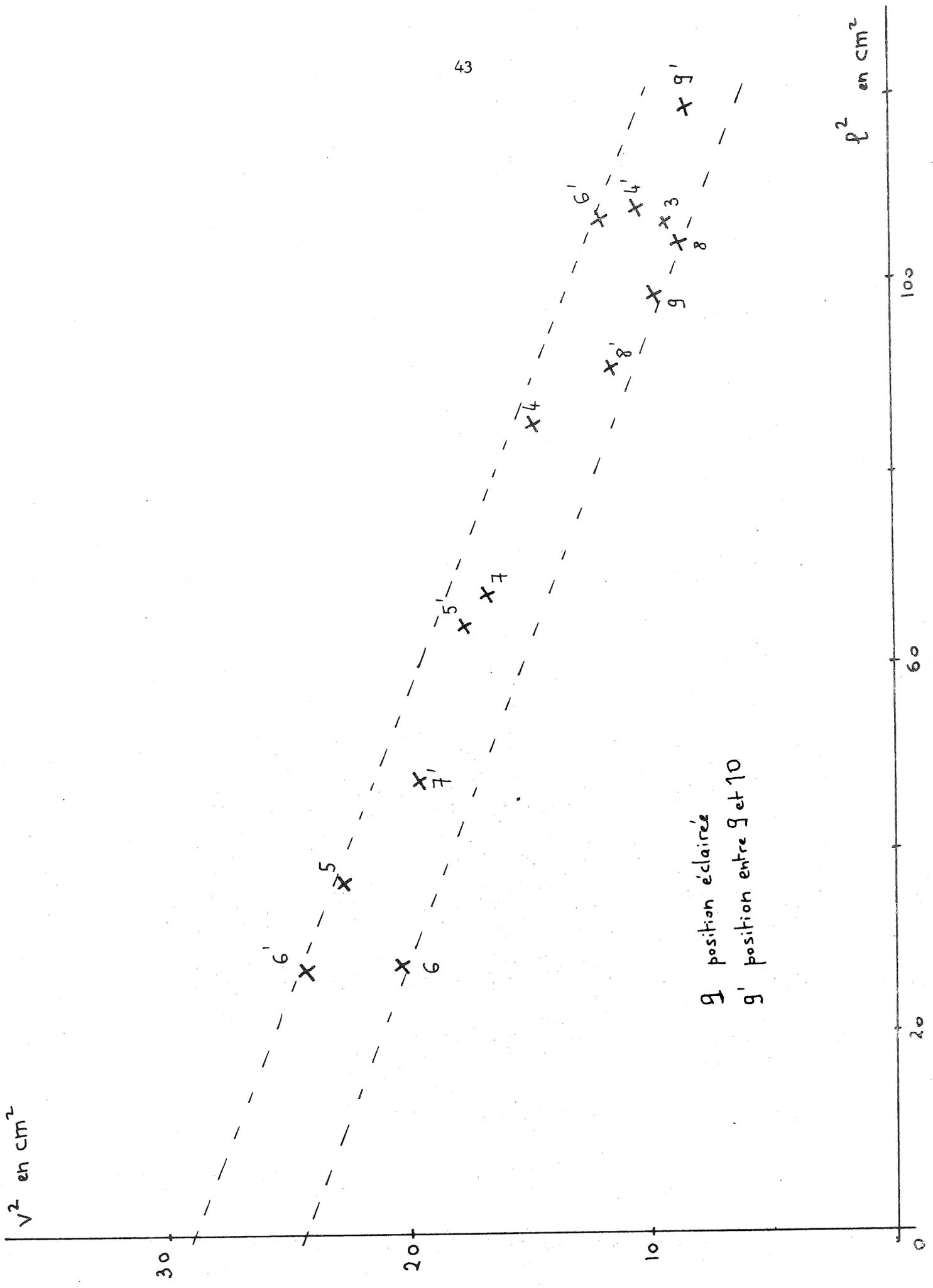
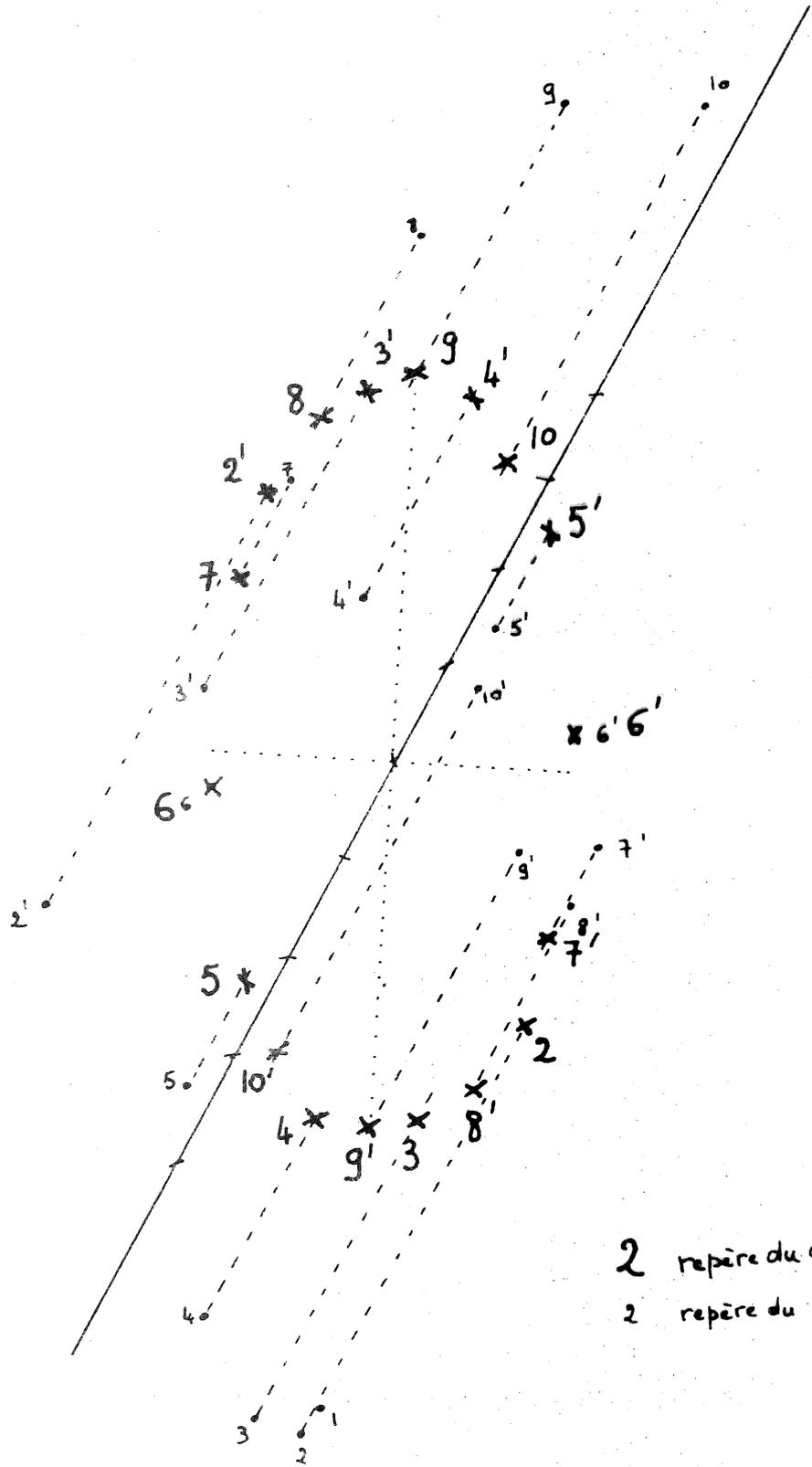


Figure 4 c



9 position éclairée
9' position entre 9 et 10



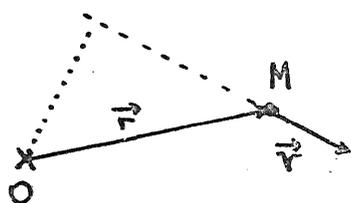
2 repère du c.m
2 repère du lab

Figure 4-e

Conservation du moment cinétique total d'un système de deux solides S_1 et S_2 lors de la collision des deux solides

I - Propriétés théoriques

1) moment cinétique \vec{h} d'un point matériel par rapport à un point O

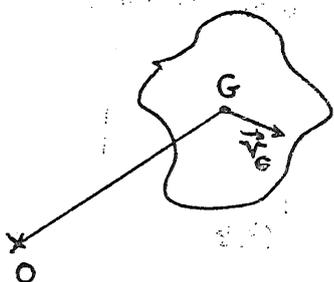


$$\vec{h} = m \vec{r} \wedge \vec{v} \quad \left| m \vec{r} \wedge \vec{v} \right| = m v h$$

Sur la figure le moment est perpendiculaire à la feuille et pointe vers le dessous de la feuille.

Si le point matériel a un mouvement libre, c'est-à-dire de translation uniforme suivant la droite portant \vec{v} , le moment du point M par rapport à O est constant au cours du mouvement

2) moment cinétique d'un solide S plan, par rapport à un point O.



$$\vec{I}_{S/O} = m \vec{OG} \wedge \vec{v}_G + J \vec{\Omega}$$

m masse du solide

\vec{v}_G vitesse du centre de masse G du solide

J moment d'inertie par rapport à G du solide

$\vec{\Omega}$ vitesse de rotation du solide autour de G (autour de

l'axe perpendiculaire au plan du solide passant par G).

Cette relation se démontre de la façon suivante : si le corps M est constitué de N masses ponctuelles, nous avons

$$\vec{h}_O = \sum_1^N \vec{OM}_i \wedge m_i \vec{v}_i = \vec{OG} \wedge \left(\sum_1^N m_i \vec{v}_i \right) + \sum_1^N \vec{GM}_i \wedge m_i \vec{v}_i$$

$\sum_1^N m_i \vec{v}_i = m \vec{v}_G$, le premier terme est le moment cinétique de G par rapport à O.

Si $\vec{\Omega}$ décrit la rotation du solide autour de G, on a $\vec{v}_i = \vec{\Omega} \wedge \vec{GM}_i$

$$\text{et } \sum_1^N \vec{GM}_i \wedge m_i \vec{v}_i = \left(\sum_1^N m_i GM_i^2 \right) \vec{\Omega} = J \vec{\Omega}$$

Si le solide a un mouvement libre, on a au cours du mouvement, conservation séparément des deux quantités

$m \vec{OG} \wedge \vec{v}_G$ moment cinétique de translation du solide par rapport au point O

(voir 1) ci-dessus

$J \vec{\Omega}$ moment cinétique de rotation par rapport au point G (= le solide tourne à vitesse constante)

remarque importante : pour un solide à 3 dimensions, il est facile de voir à partir de la démonstration ci-dessus que le moment cinétique par rapport à G ne peut pas s'écrire $J \vec{\Omega}$ sauf s'il s'agit de la rotation d'un solide autour de son axe de symétrie.

3) conservation, lors de la collision de deux solides, du moment cinétique total par rapport à un point O fixe.

$$\vec{I}_{S_1/O} + \vec{I}_{S_2/O} = \vec{I}'_{S_1/O} + \vec{I}'_{S_2/O}$$

Rappelons que d'autre part $m_1 \vec{v}_{G_1} + m_2 \vec{v}_{G_2} = m_1 \vec{v}'_{G_1} + m_2 \vec{v}'_{G_2}$ (ou encore

le centre de masse G_T du système des deux corps se déplace à vitesse constante)

II - Dispositif expérimental

- Table à coussin d'air, éclairée à intervalles de temps successifs égaux ϵ
- Deux solides plans S_1 : palet de masse m , S_2 figure de forme ci-contre et de masse M , initialement au repos.

Manipulation

- on lance S_1 ; il est intéressant d'avoir sur la photo plusieurs positions de S_1 avant le choc \Rightarrow

$|\vec{v}_1|$ est alors connu avec une meilleure précision

- après le choc, S_1 prend une vitesse \vec{v}_2 (on néglige la rotation de S_1 sur lui-même, on pourra vérifier que c'est une approximation raisonnable) *

S_2 est tel que son centre de masse acquiert une vitesse

\vec{V}_G et S_2 a une rotation de vitesse angulaire $\vec{\Omega}$

Il faut éviter que S_1 heurte le solide S_2 près de son centre de masse G car la rotation Ω est alors faible et difficile à mesurer.

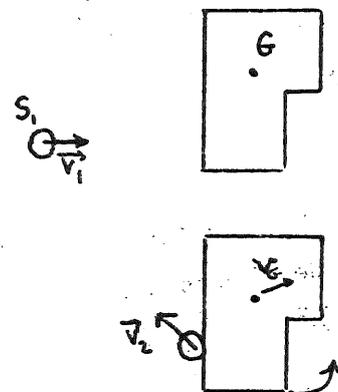
III - Principe de la manipulation

1) Déterminer le rapport des masses

D'après la conservation de la quantité de mouvement totale du système (S_1, S_2)

$$m \vec{v}_1 = m \vec{v}_2 + M \vec{V}_G \quad \text{ou} \quad m (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = M \vec{V}_G$$

Vérifier le parallélisme des deux vecteurs $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ et \vec{V}_G , mesurer leur longueur et en déduire m/M .



* Appelons j et J les moments d'inertie de S_1 et S_2 et ω , Ω , leurs vitesses angulaires ; si le rapport j/J est par exemple de l'ordre de $\frac{1}{50}$, on peut négliger $j \omega$ par rapport à $J \Omega$ tant que $\omega \leq 5 \Omega$ tout en ne faisant pas d'erreur supérieure à 10%.

2) Déterminer la quantité $\frac{J}{M} \Omega$

La conservation du moment cinétique totale du système ($S_1 S_2$) par rapport à un point O fixe s'écrit

$$\vec{I}_{S_1/O} = m \vec{r}_1 \wedge \vec{v}_1 \quad \vec{I}_{S_2/O} = 0 \text{ car } S_2 \text{ est immobile}$$

$$\vec{I}'_{S_1/O} = m \vec{r}_2 \wedge \vec{v}_2 \quad \vec{I}'_{S_2/O} = M \vec{r}_G \wedge \vec{v}_G + J \vec{\Omega}$$

$$\vec{I}_{S_1/O} = \vec{I}'_{S_1/O} + \vec{I}'_{S_2/O} \quad (\text{A})$$

Choisissons comme origine O fixe successivement deux points particuliers

a) point O = position de G_2 avant le choc

Alors après le choc, G se déplace sur une ligne droite passant par O

et $\vec{r}_G \parallel \vec{v}_G$ - la relation (A) s'écrit : $m \vec{r}_1 \wedge \vec{v}_1 = m \vec{r}_2 \wedge \vec{v}_2 + J \vec{\Omega}$

$$\frac{m}{M} (\vec{r}_1 \wedge \vec{v}_1 - \vec{r}_2 \wedge \vec{v}_2) = \frac{J}{M} \vec{\Omega}$$

On détermine $| \vec{r}_1 \wedge \vec{v}_1 - \vec{r}_2 \wedge \vec{v}_2 | = | v_1 h_1 \pm v_2 h_2 |$ (signe \pm suivant les sens respectifs des vecteurs $\vec{r}_1 \wedge \vec{v}_1$ et $\vec{r}_2 \wedge \vec{v}_2$) (voir figure 5.b)

on remplace $\frac{m}{M}$ par la valeur trouvée en 1) ; on en déduit $\frac{J}{M} \Omega$

b) point O = point P = point de concours des droites portant \vec{v}_1 et \vec{v}_2

point intéressant car $\vec{r}_1 \wedge \vec{v}_1 = 0 = \vec{r}_2 \wedge \vec{v}_2$

la relation (A) s'écrit $M \vec{r}_G \wedge \vec{v}_G + J \vec{\Omega} = 0$ ou $\frac{J}{M} \vec{\Omega} = - \vec{r}_G \wedge \vec{v}_G$

on détermine $| \vec{r}_G \wedge \vec{v}_G | = h v_G$ (voir figure 5.b)

c) conclusion : l'étude d'une seule photo permet de déterminer de deux manières différentes la quantité $\frac{J}{M} \Omega$

3) Déterminer $\frac{J}{M}$

On mesure Ω en repérant sur la photo les positions successives d'un des cotés de la figure S_2 et en mesurant l'angle de rotation de ce coté pendant le temps

unité e . Cette mesure d'angle comporte une incertitude relativement élevée si Ω est petit, la mesure n'est valable que si l'on peut mesurer la photo

4 ou 5 Ω

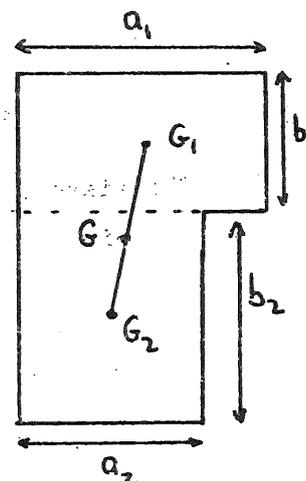
On en déduit à partir des valeurs trouvées en 2) la quantité $\frac{J}{M}$ (carré d'une longueur dans les unités utilisées sur la figure).

Remarquons qu'il n'y a aucune difficulté théorique à calculer le moment d'inertie en mesurant sur la photo les dimensions de S_2 ;

- Si l'on découpe le solide en deux rectangles de centres de masse G_1 et G_2 et de masse m_1 et m_2 .

$$\frac{J}{M} = \frac{1}{m_1+m_2} \left[\frac{a_1^2 + b_1^2}{12} m_1 + \frac{a_2^2 + b_2^2}{12} m_2 + m_1 GG_1^2 + m_2 GG_2^2 \right]$$

$$\text{avec } \frac{m_1}{m_2} = \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2}$$



c'est-à-dire :

$$\frac{J}{M} = \frac{a_1^2 + b_1^2}{12} \frac{1}{1+m_2/m_1} + \frac{a_2^2 + b_2^2}{12} \frac{1}{1+m_1/m_2} + \frac{(b_1+b_2)^2 + (a_1-a_2)^2}{4} \frac{1}{(1+m_1/m_2)(1+m_2/m_1)}$$

IV - Etude de la photo

a) Il faut d'abord s'assurer du parallélisme de $\vec{V}_1 - \vec{V}_2$ et de \vec{V}_G . En effet si ces deux vecteurs ne sont pas parallèles, cela dit que la quantité de mouvement totale n'est pas constante au cours du choc, ce qui signifie que le système (palet-plaque) n'était pas isolé au cours du choc ; il est probable que, dans ce cas, la plaque a basculé au cours du choc et a touché la table, introduisant une force supplémentaire. (Parmi les photos prises, 2 photos sur 3 durent être éliminées pour cette raison.)

L'unité de longueur est le Cm

b) Détermination de m/M (voir figure 5-b)

$$\frac{m}{M} = \frac{3V_G}{3|\vec{V}_1 - \vec{V}_2|} = \frac{2,4}{12,9} = 0,186$$

c) Détermination de $(J/M) \Omega$ (voir figure 5-b)

C1) - sur la figure, les vecteurs $\vec{r}_1 \wedge \vec{V}_1$ et $\vec{r}_2 \wedge \vec{V}_2$ sont de sens opposé.

$$3V_1 = 10,92 ; 3V_2 = 2,2 ; h_1 = 4,65 ; h_2 = 6,5$$

$$\text{d'où } \frac{m}{M} (3V_1 h_1 + 3V_2 h_2) = 12,05 = 3 \frac{J}{M} \Omega$$

$$\text{C2) } 3V_G = 2,4 ; h = 5,1 ; 3V_G h = 12,25 = 3 \frac{J}{M} \Omega$$

Comme dans la manip n°3, la figure a été obtenue à partir d'une photo polaroid agrandie après piquage. L'incertitude sur toute mesure de longueur sur la figure est donc entre 1,5 mm et 3 mm, d'où l'intérêt de mesurer des longueurs les plus grandes possibles. Cette incertitude entraîne une incertitude relative sur $\frac{J}{M}$:

$$\frac{\Delta (3 \Omega J/M)}{3 \Omega J/M} \sim \frac{\Delta (3VG)}{3VG} + \frac{\Delta h}{h} = \frac{0,3}{2,4} + \frac{0,3}{5,1} = 0,18$$

donc entre 10% et 20%

d) valeur de J/M

Sur la figure $3 \Omega = 39^\circ = 0,66$ radian

d'où 1) $\frac{J}{M} = 17,7$ et 2) $\frac{J}{M} = 18,0$

e) valeur géométrique de J/M

La figure (5-a) donne :

$$a_1 = 6,4 ; a_2 = 3,9 ; b_1 = 8,6 ; b_2 = 6,25$$

$$\text{on trouve } \frac{J}{M} = 6,6 + 1,4 + 12,1 = 20,1$$

On peut calculer que l'incertitude sur la mesure des longueurs due au piquage entraîne une incertitude sur cette valeur $\Delta (J/M) \sim 2$

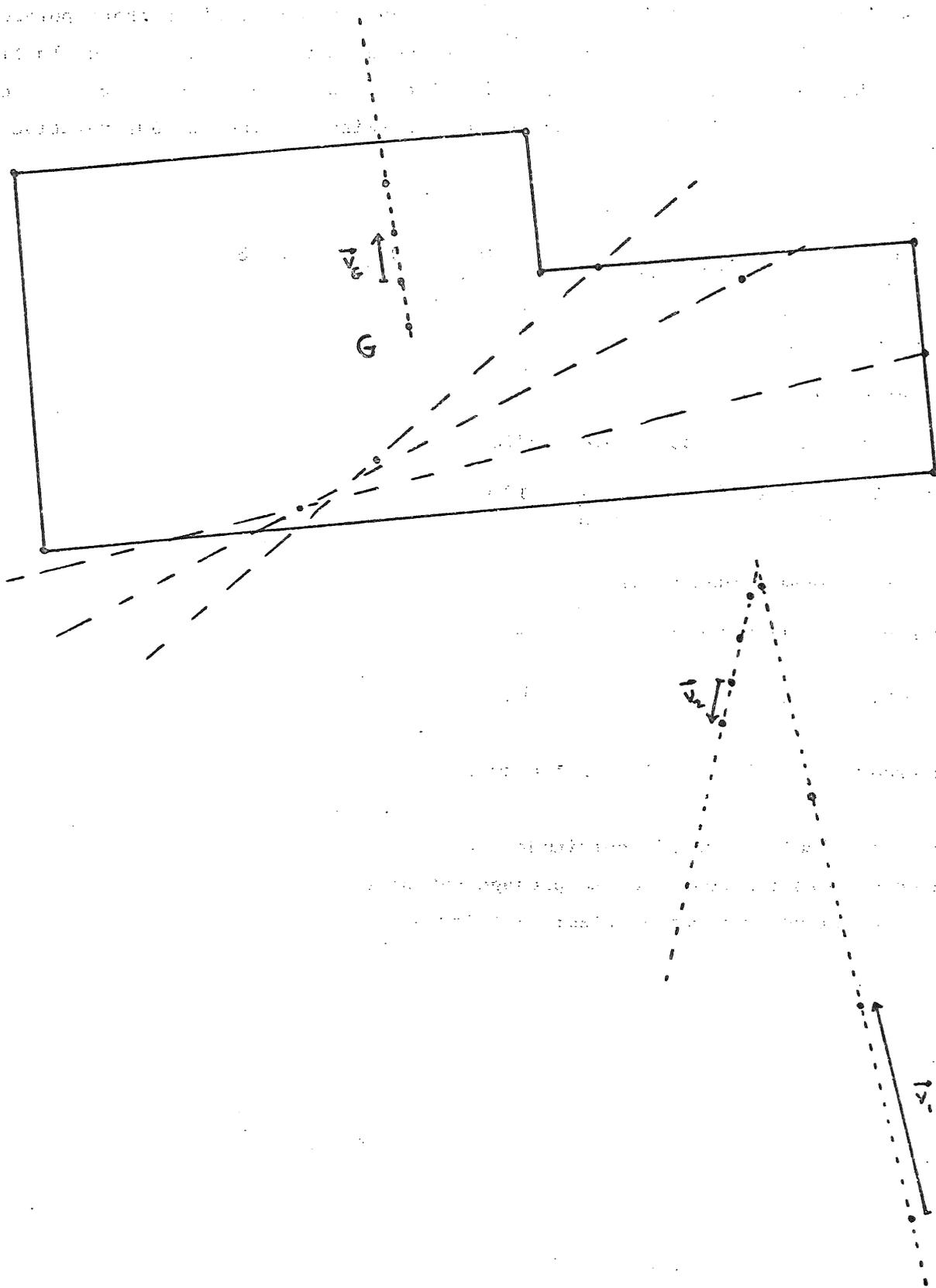


Figure 5-a

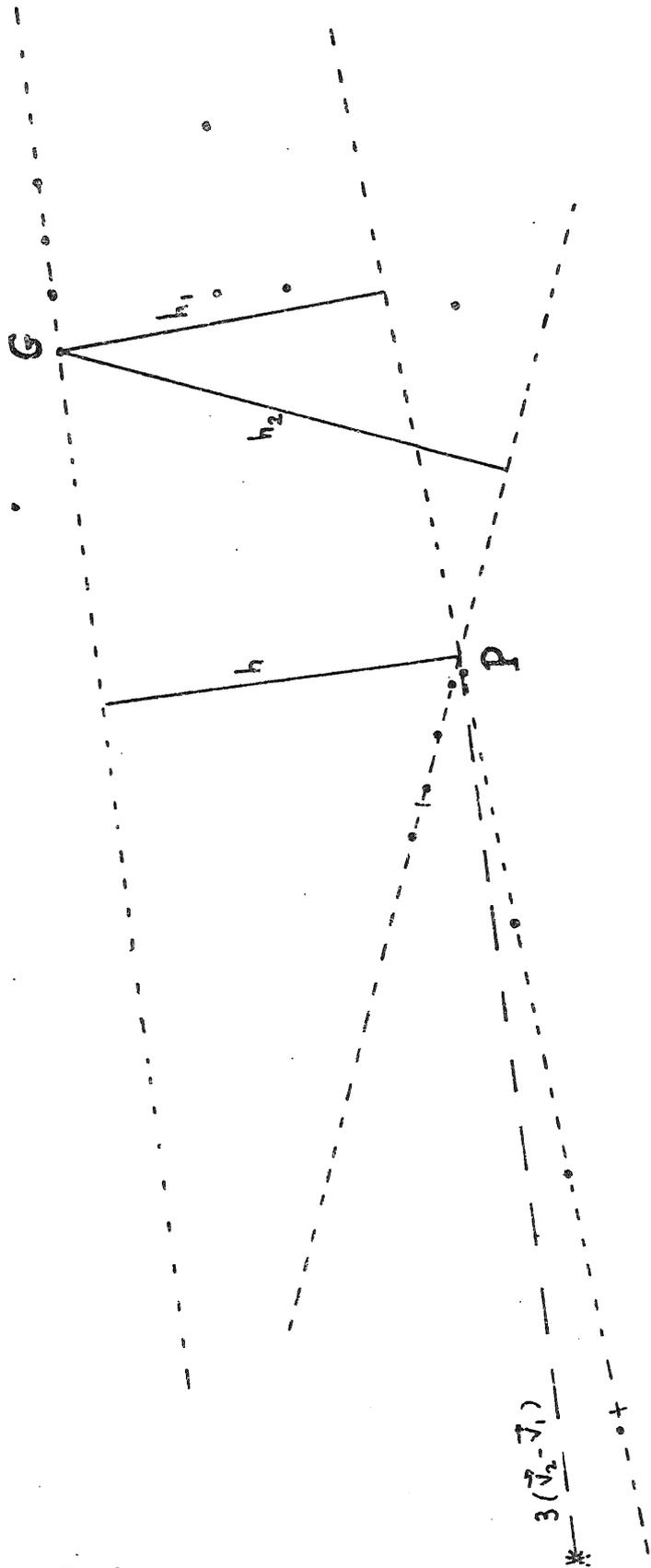


Figure 5-b