UNIVERSITÉ DE NANTES

Faculté des Sciences et des Techniques
Département de Mathématiques

IREM des Pays de la Loire
Centre de Nantes

Recueil d'exercices de DEUG A1

Module M2 (Mathématiques)
(MIAS)

Année 97/98

Imprimeur et Distributeur : ASSO

2, rue de la Houssinière-BP 92208-44322 NANTES CEDEX 3

RAPPELS ENSEMBLISTES

1 Symboles de base:

a) Le symbole $\emptyset$ désigne "l'ensemble vide", c'est-à-dire l'ensemble ne contenant aucun élément.
b) Le symbole $\in$ se lit "appartient à" : $a \in A$ signifie que l'élément a appartient à l'ensemble A.
c) Le symbole $\notin$ se lit "n'appartient pas à" : $a \notin A$ signifie que l'élément a n'appartient pas à l'ensemble A.

2 Inclusion, non-inclusion:

a) Le symbole $\subset$ se lit "est inclus dans" : $A \subset B$ signifie que tout élément de A appartient aussi à B.

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (\forall a \in A, a \in B)$$

a) Le symbole $\not\subset$ se lit "n'est pas inclus dans" : $A \not\subset B$ signifie qu'il existe un élément de A qui n'appartient pas à B.

$$(A \not\subset B) \Leftrightarrow (\exists a \in A, a \notin B)$$

3 Propriétés de l'inclusion:

a) $\emptyset$ est inclus dans tout ensemble A: $\emptyset \subset A$
b) Tout ensemble A est inclus dans lui-même: $A \subset A$
c) $(A \subset B \text{ et } B \subset A) \Leftrightarrow A = B$
d) $(A \subset B \text{ et } B \subset C) \Rightarrow A \subset C$

4 Parties complémentaires:

Soit $A \subset E$ (on dit alors que A est un sous-ensemble de E, ou une partie de E). On appelle "complément" ou "complémentaire de A dans E" l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.

Ce complément se désigne par $\complement_E A$ ou bien, s'il n'y a pas d'ambiguïté possible, par $\overline{A}$ (qu'il ne faut pas confondre avec l'adhérence topologique, qui sera vue plus tard)

5 Intersection, réunion, différence:

Soit E un ensemble, et A, B et C trois parties de E.

a) On appelle " **intersection** de A et de B " et on note $A \cap B$ l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à la fois à A et à B.

$$(x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B)$$
$$(C \subset (A \cap B)) \Leftrightarrow (C \subset A \text{ et } C \subset B)$$

On a: $A \cap B = B \cap A$, $(A \cap B) \subset A$ et $(A \cap B) \subset B$

b) On appelle " **réunion** de A et de B " et on note $A \cup B$ l'ensemble des éléments de E qui appartiennent A **ou** à B.

$$(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B)$$

$$(x \in A \cup B) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \text{ et } x \notin B \\ \text{ou} \\ x \notin A \text{ et } x \in B \\ \text{ou} \\ x \in A \text{ et } x \in B \end{cases}$$

$$((A \cup B) \subset C) \Leftrightarrow (A \subset C \text{ et } B \subset C)$$

On a: $A \cup B = B \cup A$, $A \subset (A \cup B)$ et $B \subset (A \cup B)$
et, bien sûr, $(A \cap B) \subset (A \cup B)$

c) On appelle " **différence** " et on note $A - B$ l'ensemble des élements de E qui appartiennent à A et qui n'appartiennent pas à B.

$$(x \in A - B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin B)$$
$$A - B = A \cap \overline{B}$$

6 Propriétés opératoires:

Pour toutes les parties A, B, C de l'ensemble E, on aura:

a) $\overline{\overline{A}} = A$; $\overline{E} = \emptyset$; $A \cap \overline{A} = \emptyset$; $A \cup \overline{A} = E$

b) Lois de De Morgan: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

c) $A \cap A = A$; $A \cup A = A$; $A - A = \emptyset$
d) $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cup \emptyset = A$; $A - \emptyset = A$;
e) $A \cap E = A$; $A \cup E = E$; $A - E = \emptyset$
f) **Commutativité:** $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$
mais, bien sûr, $A - B = A \cap \overline{B} \neq B - A = B \cap \overline{A}$
g) **Associativité:** $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
h) **Distributivité:** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

7 Applications:

Soit E et F deux ensembles: $\boxed{f \text{ application de } E \text{ dans } F}$

signifie $\boxed{\text{à tout } x \in E,\ f \text{ associe une seule image par } f}$

8 Ensemble des applications:

Soit E et F deux ensembles. L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathcal{F}(E,F)$ ou encore F^E.
Si $card(E) = p$ et $card(F) = n$,
alors $card(F^E) = n^p = card(F)^{card(E)}$

9 Application identique:

Soit E et un ensemble. On appelle "application identique" ou encore "identité de E " et on note Id_E (ou Id si il n'y a aucun risque d'ambiguïté) l'application de E dans E définie par:

$$\forall x \in E \quad Id_E(x) = x$$

10 Image directe, image réciproque:

Soit $f: E \to F$ une application.
a) pour toute partie A de E, on appelle **image directe** de A la partie $f(A)$ de F définie par

$$f(A) = \{y \in F ; \exists x \in A : y = f(x)\}$$

b) pour toute partie B de F, on appelle **image réciproque** de B la partie $f^{-1}(B)$ de E définie par

$$f^{-1}(B) = \{x \in E ; f(x) \in B\}$$

11 Composée de deux applications:

Soit E, F et G trois ensembles, f et g deux applications:

$$f: E \to F \quad \text{et} \quad g: F \to G$$

On appelle **composée** et on note $g \circ f$ l'application h de E dans G définie par:

$$\boxed{\forall x \in E \quad h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))}$$

Propriété essentielle: **Associativité de la composition:**
Si f, g, h sont trois applications:

$$f: E \to F \ ; \ g: F \to G \ ; \ h: G \to H$$

alors: $\boxed{(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)}$ notée $h \circ g \circ f$

Attention: si $E = F = G$, alors $g \circ f$ et $f \circ g$ sont définies toutes deux, mais ces sont en général deux applications différentes.

12 Application injective ou injection:

Soit $f: E \to F$ une application.
Les 5 assertions suivantes sont équivalentes:
a) f est **injective**;
b) tout $y \in F$ a **au plus** un antécédent (c'est-à-dire 1 ou 0)
c) Pour tout $y \in F$, l'équation, d'inconnue x, $y = f(x)$ a **au plus** une solution
d) $\forall x \in E \quad \forall x' \in E \qquad x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$
e) $\forall x \in E \quad \forall x' \in E \qquad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

13 Application surjective ou surjection:

Soit $f: E \to F$ une application.
Les 5 assertions suivantes sont équivalentes:
a) f est **surjective**;
b) tout $y \in F$ a **au moins** un antécédent;
c) Pour tout $y \in F$, l'équation, d'inconnue x,
$y = f(x)$ a **au moins** une solution;
d) $\forall y \in F \quad \exists x \in E : y = f(x)$
e) $f(E) = F$

14 Application bijective ou bijection:

Soit $f: E \to F$ une application.
Les 6 assertions suivantes sont équivalentes:
a) f est **bijective**;
b) f est injective **et** surjective;
c) tout $y \in F$ a **exactement** un antécédent;
d) Pour tout $y \in F$, l'équation, d'inconnue x,
$y = f(x)$ a **exactement** une solution;
e) $\forall y \in F \quad \exists! x \in E : y = f(x)$
f) Il existe une application $g: F \to E$ telle que

$$g \circ f = Id_E \quad \text{et} \quad f \circ g = Id_F$$

Algèbre 1 : Ensembles et Applications

1

a. Soit E un ensemble , et soit A et B des parties de E .
Montrer que les propositions ci-dessous sont équivalentes , en prouvant précisément :
$(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$.

$(a)\ A \subset B \qquad (b)\ A \cap B = A \qquad (c)\ A \cup B = B \qquad (d)\ \overline{B} \subset \overline{A}$.

b. Soit E un ensemble , et A, B, C des parties de E .Montrer :

(1) $(A - B) - C = A \cap \overline{(B \cup C)} = A - (B \cup C)$.
(2) $A - (B - C) = A \cap (\overline{B} \cup C)$.
(3) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$.
(4) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$.

c. Soit E un ensemble , A et B des parties de E ; on appelle différence symétrique de A et de B et on note $A \Delta B$ l'ensemble $(A - B) \cup (B - A)$(faire un dessin) . Montrer que :

(1) $A \Delta A = \emptyset$; (2)$A \Delta B = B \Delta A$; (3)$A = B \Leftrightarrow A \Delta B = \emptyset$;
(4) $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

2

Soit E un ensemble , et A une partie de E . On appelle **fonction caractéristique de** A l'application $f : E \to \{0, 1\}$ telle que : $\forall x \in A\ \ f(x) = 1$ et $\forall x \notin A\ \ f(x) = 0$.
Soit , de même , g la fonction caractéristique de B .
Déterminer , en fonction de f et de g , les fonctions caractéristiques des ensembles suivants :

$\overline{A}$; $A \cap B$; $A \cup B$; $A - B$; $A \Delta B$; $\overline{A} \Delta \overline{B}$; $(A \cup B) - (A \cap B)$.

3

Soit les applications f et g définies par :
$f : N \to N$ et $\forall x \in N\ \ f(x) = x + 1$
$g : N \to N$ et $\forall x \in N\ \ g(x) = 0$ si $x = 0$ et $g(x) = x - 1$ si $x \geq 1$.

a. **Etudier l'injectivité , la surjectivité, la bijectivité éventuelles de f et de g .**
b. **Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$ .Quelle remarque faites-vous ?**
c. **Déterminer la composée $f \circ f \circ \ldots \circ f$ (n fois) .On note cette composée f^n .**
Déterminer de même g^n , puis $f^m \circ g^n$ puis $g^n \circ f^m$.

4

Etudier l'injectivité , la surjectivité , la bijectivité éventuelles des applications f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 définies ci-dessous :

$f_1 : N \to N$ et $\forall n \in N\ \ f_1(n) = n^3$
$f_2 : R \to R$ et $\forall x \in R\ \ f_2(x) = x^3$
$f_3 : C \to C$ et $\forall z \in C\ \ f_3(z) = z^3$
$f_4 : C \to R$ et $\forall z \in C\ \ f_4(z) = \mid z \mid^2 - 2\mathrm{Re}(z)$.
Décrire géométriquement les ensembles : $X = f_4^{-1}(\{3\})$ et $Y = f_4^{-1}(R^+)$
$f_5 : N \times N \to N^*$ et $\forall (n, p) \in N \times N\ \ f_5(n, p) = 2^n(2p + 1)$.

$\boxed{5}$ a. Soit E, F, G trois ensembles , et soit f et g deux applications : $f : E \to F$ et $g : F \to G$.
Montrer que :

(1) Si f et g sont injectives , alors $g \circ f$ est injective
(2) Si f et g sont surjectives , alors $g \circ f$ est surjective
(3) Si f et g sont bijectives , alors $g \circ f$ est bijective
(4) Si $g \circ f$ est injective , alors f est injective
(5) Si $g \circ f$ est surjective , alors g est surjective
(6) Si $g \circ f$ est bijective , alors f est injective et g est surjective
(7) Si $g \circ f$ est injective et f surjective , alors g est injective
(8) Si $g \circ f$ est surjective et g injective , alors f est surjective .

b. Soit E, F, G, H quatre ensembles , et soit f , g et h trois applications : $f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to H$.
Montrer que :
(9) Si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives , alors f, g et h sont bijectives .

$\boxed{6}$ Soit E et F deux ensembles et soit f une application : $E \to F$.

a. Si A et B sont des parties de E , montrer que :
(1) $A \subset B \ \Rightarrow\ f(A) \subset f(B)$
(2) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
(3) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
Donner un contre exemple prouvant que l'inclusion réciproque n'est pas toujours vérifiée .

b. Si A' et B' sont des parties de F , montrer que :
(1) $A' \subset B' \ \Rightarrow\ f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$
(2) $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$
(3) $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$.

c. Etablir que les propriétés suivantes sont équivalentes :
(1) f est injective
(2) Pour toutes les parties A et B de E , $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

d. Montrer que , pour toute partie A de E , $A \subset f^{-1}(f(A))$,
puis établir que les propriétés suivantes sont équivalentes :
(1) f est injective
(2) Pour toute partie A de E , $A = f^{-1}(f(A))$.

Algèbre 2 : Espaces Vectoriels

$\boxed{1}$ Dans chacun des cas suivants , dites , en justifiant votre réponse , si F_i est ou n'est pas un sous-espace vectoriel de E_i , les divers espaces vectoriels E_i étant munis des opérations usuelles .
Si votre réponse est *non* , précisez cependant s'il y a stabilité pour l'une des deux opérations .

a. $E_1 = R^3$; $F_1 = \{ (x,y,z) \in R^3 \,;\, 2x+3y-4z = o \}$
b. $E_2 = R^3$; $F_2 = \{ (x,y,z) \in R^3 \,;\, 2x+3y-4z = 1 \}$
c. $E_3 = R^3$; $F_3 = \{ (x,y,z) \in R^3 \,;\, x^2+y^2+z^2 \leq 1 \}$
d. $E_4 = R[X]$; $F_4 = \{ P \in R[X] \,;\, d^oP \leq 5 \}$
e. $E_5 = R[X]$; $F_5 = \{ P \in R[X] \,;\, d^oP = 5 \}$
f. $E_6 = F(R,R)$; $F_6 = \{ f \in F(R,R) \,;\, f(3) = 0\}$
g. $E_7 = F(R,R)$; $F_7 = \{ f \in F(R,R) \,;\, f$ dérivable sur$R$ et $f + f' = 0\}$

$\boxed{2}$ Soit E un espace vectoriel sur R ou C , et E et F deux sous espaces-vectoriels de E .

a. Donner un exemple prouvant que $F \cup G$ n'est pas toujours un sous-espace vectoriel de E .
b. Montrer : $F \cup G$ sous-espace vectoriel de E $\iff$ $F \subset G$ ou G $\subset F$.

$\boxed{3}$ Avec le moins de calculs possible , précisez si les familles de vecteurs suivantes sont libres ou liées .
Si la famille est liée , donnez une relation de liaison :

a. Dans R^3 $\{u,v,w\}$ avec $u = (1,7,2)$ $v = (-2,-14,-4)$ $w = (7,5,-3)$
b. Dans C^3 $\{u,v,w\}$ avec $u = (1,0,1)$ $v = (1,j,j^2)$ $w = (j,j^2,1)$
c. Dans $R_2[X]$ $\{u,v,w,t\}$ avec $u = 1$ $v = X$ $w = X^2$ $t = a+bX+cX^2$
d. Dans $R_3[X]$ $\{u,v,w,t\}$ avec $u = 1$ $v = 1+X$ $w = 1+X+X^2$ $t = 1+X+X^2+X^3$
e. Dans $F(R,R)$ $\{u,v,w\}$ avec $u = \sin(x)$ $v = \cos(x)$ $w = \cos(x+\frac{\pi}{3})$

$\boxed{4}$ Précisez la dépendance linéaire des familles de vecteurs suivantes , en donnant , dans chaque cas , une relation de dépendance s'il en existe une , ainsi qu'une sous-famille libre de cardinal maximal .

a. Dans R^2 $\{u,v,w\}$ avec $u = (3,2)$ $v = (4,-1)$ $w = (5,-2)$
b. Dans R^4 $\{u,v,w\}$ avec $u = (2,-1,5,7)$ $v = (3,1,5,-2)$ $w = (1,1,1,-4)$
c. Dans R^4 $\{u,v,w,t\}$ avec $u = (2,0,4,2)$ $v = (1,2,-2,-3)$ $w = (3,1,3,4)$ $t = (2,4,9,5)$
d. Dans $R_3[X]$ $\{P,Q,R,S\}$ avec $P = 3+3X+X^2+X^3$ $Q = 1-X-X^2+X^3$
R = -1-X+X^2+X^3 $S = 3-3X+X^2-X^3$

$\boxed{5}$ Dans l'espace vectoriel $F(R,R)$, étudiez la liberté des familles suivantes :

a. $\{f,g,h\}$ avec $\forall x \in R$ $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \sin(x)$, $h(x) = \cos(2x)$
b. $\{f,g,h\}$ avec $\forall x \in R$ $f(x) = x$, $g(x) = \exp(x)$, $h(x) = \exp(2x)$
c. $\{f,g,h,k\}$ avec $\forall x \in R$ $f(x) = x$, $g(x) = \ln(1+x^2)$, $h(x) = x^3$, $k(x) = \exp(x)$

$\boxed{6}$ Etudiez la liberté des familles de vecteurs suivantes de R^3 ou de R^4 en discutant suivant les paramètres.
Quand la famille est liée , donnez une sous-famille maximale libre :

a. $\{ (1,b+c,bc) \,,\, (1,c+a,ca) \,,\, (1,a+b,ab) \}$
b. $\{ (1,a,1,b) \,,\, (a,1,b,1) \,,\, (1,b,1,a) \,,\, (b,1,a,1) \}$

$\boxed{7}$

a. On donne dans R^3 les vecteurs : $u_1 = (2,3,1)$, $u_2 = (1,-1,-2)$, $v_1 = (3,7,0)$, $v_2 = (5,0,-7)$.
Montrer que les deux sous-espaces vectoriels engendrés par u_1 et u_2 d'une part , et par v_1 et v_2 d'autre part , sont identiques .

b. Déterminer $F_1 \cap F_2$, où $F_1 = \text{Vect}(u_1, u_2)$ et $F_2 = \text{Vect}(v_1, v_2)$ avec
$u_1 = (4,2,-5), u_2 = (-1,3,1), v_1 = (3,-4,2), v_2 = (5,-2,2)$.

c. Soit a un réel . Montrer , à l'aide de la formule de Taylor que
$R_n[X] = \text{Vect}(1, X-a, (X-a)^2, (X-a)^3, \ldots, (X-a)^n)$

d. Soient $P_1, P_2, \ldots, P_n$ n polynômes de $R[X]$.
Montrer qu'on ne peut avoir $\text{Vect}(P_1, P_2, \ldots, P_n) = R[X]$.

$\boxed{8}$

a. Soit P un polynôme de $R[X]$ de degré n .
Montrer que $P, P', P^{(2)}, \ldots, P^{(n)}$ sont linéairement indépendants .

b. Démontrer que la famille de polynômes $(1, X, X(X+1), X(X+1)(X+2), \ldots, X(X+1)(X+2)\ldots(X+n))$ forme une base de $R_{n+1}[X]$.

$\boxed{9}$

a. Déterminer si les familles de vecteurs suivantes forment ou non des bases de R^3 :

$F_1 = \{ (1,1,1), (1,2,3) \}$
$F_2 = \{ (1,1,1), (1,2,3), (2,-1,1) \}$
$F_3 = \{ (1,1,1), (1,2,3), (1,1,a) \}$ où a est un paramètre réel .
$F_4 = \{ (1,1,1), (1,a,a^2), (1,b,b^2) \}$ où a et b sont deux paramètres réels .

b. Même question dans R^4 :

$F_1 = \{ (1,2,1,2), (-2,-3,0,-5), (4,9,6,7), (1,-1,-5,5) \}$
$F_2 = \{ (1,1,3,4), (-2,0,0,0), (2,4,1,1), (3,5,7,2) \}$
$F_3 = \{ (1,a,1,b), (a,1,b,1), (1,c,1,d), (c,1,d,1) \}$ où a, b, c et d sont des paramètres réels .

c. Même question dans $R_4X]$:

$F_1 = \{1+X, 1+X^2, 1+X^3, 1+X^4\}$
$F_2 = \{1+X, 1+2X+X^2+2X^3+X^4, X^2+X^3+X^4, X^2+X^3+2X^4, 1+2X+2X^2+X^3+X^4\}$

$\boxed{10}$

a. a_1, a_2, a_3 étant trois nombres réels distincts deux à deux , montrer que les polynômes φ_1, φ_2 et φ_3 forment une base de l'espace vectoriel $R_2[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2 :

$$\varphi_1(X) = \frac{(X-a_2)(X-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)} \ , \ \varphi_2(X) = \frac{(X-a_3)(X-a_1)}{(a_2-a_3)(a_2-a_1)} \ , \ \varphi_3(X) = \frac{(X-a_1)(X-a_2)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}$$

Décomposer tout polynôme P de $R_2[X]$ dans cette base , puis les polynômes $1, X, X^2$.

b. Etant donné n nombres réels deux à deux distincts $a_1, a_2, \ldots, a_n$, on note : $\pi_k(x) = \prod_{p \neq k}(x - a_p)$ et
$$\varphi_k(x) = \frac{\pi_k(x)}{\pi_k(a_k)} = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{k-1})(x-a_{k+1})\ldots(x-a_n)}{(a_k-a_1)(a_k-a_2)\ldots(a_k-a_{k-1})(a_k-a_{k+1})\ldots(a_k-a_n)}$$
Vérifier que , k étant fixé , φ_k est un polynôme de degré $n-1$,
et que $\varphi_k(a_p)$ vaut 1 si $p = k$, et 0 si $p \neq k$.

α)Montrer que la famille $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ est libre dans $R_{n-1}[X]$.

β)Montrer que pour tout polynôme P de $R_{n-1}[X]$, on a la relation : $P = \sum_{k=1}^{n} P(a_k)\varphi_k$.

γ)Etant donné n nombres $b_1, b_2, \ldots, b_n$, montrer qu'il existe un unique polynôme P de $R_{n-1}[X]$ tel que pour tout k compris entre 1 et n on ait : $P(a_k) = b_k$.

11 Soit U le sous-espace de R^4 formé par les vecteurs (a,b,c,d) qui vérifient $b - 2c + d = 0$,
et soit V le sous-espace de R^4 formé par ceux qui vérifient $a = d$ et $b = 2c$.
Trouver une base et la dimension de U , puis compléter cette base de U pour obtenir une base de R^4 .
Même question pour V , puis pour $U \cap V$.

12 Soient P et Q les sous-espaces vectoriels de R^3 définis par :
$P = \{(x,y,z) \in R^3 \ / \ x + y + z = 0\}$
$Q = \text{Vect}(v_1 = (2,-1,0), v_2 = (-2,2,-1), v_3 = (4,-1,-1))$

1)Déterminer une base et la dimension de chacun des espaces P et Q .
2)Soit $v = (x,y,z)$ un vecteur de R^3 .
Trouver une condition nécessaire et suffisante sur x, y, z pour que v appartienne à Q .
3)Déterminer une base et la dimension de $P \cap Q$ puis de $P + Q$.

13

a. Soit E et F les sous-espaces de R^4 engendrés respectivement par :
$(2,2,1,0), (1,4,2,-1), (2,1,-1,0), (2,-5,4,2)$ et par :
$(2,1,4,5), (1,2,3,4)$.

Déterminer les dimensions de $E, F, E+F, E \cap F$ en donnant une base de chacun d'eux .

b. Même question avec :
$(1,2,0,1), (2,1,3,1), (1,-4,6,-1)$ et :
$(1,2,1,0), (-1,1,1,1), (2,-1,0,1), (2,2,2,2)$.

c. Même question avec :
$(1,1,0,-1), (1,2,3,0), (2,3,3,-1)$ et :
$(1,2,2,-2), (2,3,2,-3), (1,3,4,-3)$.

14 Dans cet exercice , il s'agit , pour chacun des cas ci-dessous ,de prouver que B est une base de l'espace vectoriel E , puis de calculer les coordonnées du vecteur u dans la base B .

a. $E = R^3$; $B = \{(0,1,1), (1,0,1), (1,1,0)\}$; $u = (a,b,c)$.

b. $E = C^3$; $B = \{(1,-1,i), (-1,i,1), (i,1,-1)\}$; $u = (1+i, 1-i, i)$.

c. $E = R_3[X]$; $B = \{1 + X + X^2 + X^3, X + X^2 + X^3, X^2 + X^3, X^3\}$; $u = a + bX + cX^2 + dX^3$.

d. $E = M_{(2,2)}(R)$, espace des matrices $(2,2)$ à coefficients réels .

$$\mathrm{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \; ; \; u = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} .$$

$\boxed{15}$

a. Soit U, V, W les sous-espaces vectoriels de R^3 suivants :

$$U = \{(x,y,z) \;/\; 2x + y + 4z = 0\} \; ; \; V = \{(x,y,z) \;/\; 3x = 5z\} \; ; \; W = \{(x,y,z) \;/\; x = y = 0\} .$$

Déterminer une base de chacun de ces trois sous-espaces .
Déterminer les trois sommes $U + V, U + W, V + W$ en précisant à chaque fois si la somme est directe .

b. Dans l'espace vectoriel $F(R,R)$ des applications de R dans R , soit U, V, W les sous-espaces vectoriels suivants :

$U = \mathrm{Vect}(1, \cos 2x, \cos 4x)$; $V = \mathrm{Vect}(1, \cos^2 x)$; $W = \mathrm{Vect}(\cos^4 x)$.
Montrer que : $U = V \oplus W$.

c. Dans l'espace vectoriel $F(R,R)$ des applications de R dans R , soit U l'ensemble des applications paires et soit V l'ensemble des applications impaires .
Montrer que U et V sont des sous-espaces vectoriels de $F(R,R)$ et que : $F(R,R) = U \oplus V$.

$\boxed{16}$ Soit $R_5[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels , de degré inférieur ou égal à 5 .
1)Montrer que l'ensemble F des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2 est un sous-espace vectoriel de $R_5[X]$.
Donner la dimension et une base de F .
2)Montrer que l'ensemble G des polynômes de $R_5[X]$ divisibles par $X(X-1)^2$ est un sous-espace vectoriel de $R_5[X]$.
Donner la dimension et une base de G .
3)Montrer que : $R_5[X] = F \oplus G$.
4)Soit P un polynôme de $R_5[X]$.
Indiquer comment on peut utiliser la division euclidienne de P par $X(X-1)^2$ pour trouver la décomposition unique de P sous la forme $P = P_1 + P_2$ avec $P_1 \in F$ et $P_2 \in G$.
5)Application numérique : $P(X) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5$.

$\boxed{17}$ Soit a et b deux réels ($b \neq 0$) , et E l'ensemble des suites réelles (u_n) qui vérifient la relation de récurrence :
$\forall n \in N \quad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$.

1)Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles .
2)Montrer que , si $v = (v_n)$ et $w = (w_n)$ sont deux suites de E telles que $v_0 = w_0$ et $v_1 = w_1$, alors $v = w$, c'est-à-dire : $\forall n \in N, v_n = w_n$.
3)Posons $s = (s_n)$ =unique suite de E telle que $s_0 = 1$ et $s_1 = 0$
$t = (t_n)$ =unique suite de E définie par $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$.
Montrer que (s,t) est une base de E.

Dans la suite de l'exercice , on suppose que $a^2 + 4b \geq 0$ et que r est une racine du polynôme $X^2 - aX - b$

4)Supposons $a^2 + 4b > 0$; montrer que la suite (r^n) appartient à E .
Déterminer une nouvelle base de E , puis la forme générale des éléments de E .
5)Supposons $a^2 + 4b = 0$; montrer que les deux suites (r^n) et (nr^n) appartiennent à E .
Déterminer alors la forme générale des éléments de E .
6)Application : déterminer le terme général de la suite (F_n) de FIBONACCI définie par :
$F_0 = F_1 = 1$, et $\forall n \in N \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Algèbre 3 : Applications Linéaires

1 Montrer que l'application f de R^3 dans R^2 qui , à (x_1, x_2, x_3) associe (y_1, y_2) défini par
$$\begin{cases} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{cases}$$
où les a_{ij} sont des réels , est une application linéaire de R^3 dans R^2 .

2 Dans cet exercice , il s'agit de préciser , avec preuve à l'appui dans chaque cas , si l'application f de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F est linéaire ou non .

a. $E = R$; $F = R$; $f(x) = (x+1)^2 - (x-1)^2$
b. $E = R$; $F = R$; $f(x) = x^2$
a. $E = R^2$; $F = R$; $f(x,y) = ax + by + c$; a, b et c réels

3 Dans cet exercice , il s'agit de déterminer à chaque fois , le noyau et l'image de l'application linéaire f de E dans F , en donnant une base de chacun de ces sous-espaces .
Dans chaque cas , précisez si f est injective , surjective , bijective .
Quand f est bijective , donner sa bijection linéaire réciproque .

a. $E = R^2$; $F = R^3$; $f((x,y)) = (x-y, x, x+y)$
b. $E = R^3$; $F = R^3$; $f((x,y,z)) = (y+z, z+x, x+y)$
c. $E = R^2$; $F = R^2$; $f((x,y)) = (2x+3y, 3x+10y)$
d. $E = R^4$; $F = R^2$; $f((x,y,z,t)) = (3x-4y+2z-5t, 3x-z+2t)$

4

a. Trouver une application linéaire f de R^4 dans R^3 telle que Ker(f) =Vect $((1,2,3,4),(0,1,1,1))$

b. Trouver une application linéaire f de R^5 dans R^3 telle que Im(f) =Vect $((-1,1,0),(1,0,1))$

5 Soit S et T les deux applications linéaires de R^2 dans R^2 définies par :
$S((x,y)) = (2x-5y, -3x+4y)$ et $T((x,y)) = (-8y, 7x+y)$.

Déterminer par des formules analogues les applications linéaires suivantes :
$S+T$; $S \circ T$; $T \circ S$; S^2 ; T^2 ; $P(S)$ où P est le polynôme $P(X) = X^2 - 4X - 1$.

6 On rappelle que $R_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

a. Soit f l'application de $R_3[X]$ dans R définie par $\forall P \in R_3[X]$ f(P)=P(2)
Montrer que f est linéaire ; déterminer son image et son noyau .

b. Soit a et b deux réels distincts et f l'application de $R_4[X]$ dans $R_4[X]$ définie par
$\forall P \in R_4[X]$ f(P)=XP(a)+P(b).
Montrer que f est un endomorphisme de $R_4[X]$; déterminer son noyau et en donner une base ; déterminer son image et en donner une base .

c. Soit f l'application de $R_2[X]$ dans $R_2[X]$ définie par
$f(a+bX+cX^2) = (3a+b-c) + (2a+2b-c)X + (4a+2b-c)X^2$.

α)Montrer que f est linéaire .
β)Déterminer une base et la dimension de Ker$f$ et Imf .
γ)Montrer que l'ensemble $F = \{P \in R_2[X] \ / \ f(P) = P\}$ est un sous-espace vectoriel de $R_2[X]$ dont on déterminera une base .
δ)Soit G le sous-espace vectoriel de $R_2[X]$ engendrépar le polynôme $1+X+2X^2$. Montrer que $R_2[X]$ est la somme directe de F et G .

d. Soit n un entier supérieur ou égal à 2 , et soit f l'application de $R_n[X]$ dans $R_n[X]$ définie par :
$\forall P \in R_n[X] \quad f(P) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$
Montrer que f est linéaire , déterminer Ker(f) , Im(f) , rg(f) .
Soit Q un polynôme de Im(f) ; montrer qu'il existe un unique polynôme P de $R_n[X]$ tel que
$f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$

$\boxed{7}$

a. Montrer que si f est une application linéaire non nulle de R^4 dans R , son noyau est de dimension 3 .
b. Soit H le sous-espace vectoriel de R^4 engendré par $u_1 = (0,-1,1,1), u_2 = (0,-3,-1,5)$ et
$u_3 = (4,-1,-3,3)$.
α)Vérifier que H est de dimension 3 .
β)Montrer qu'une application linéaire non nulle f de R^4 dans R admet H pour noyau si et seulement si elle vérifie $f(u_1) = 0, f(u_2) = 0$ et $f(u_3) = 0$.
γ)Déterminer toutes les applications linéaires f de R^4 dans R admettant H pour noyau .

$\boxed{8}$

a. Soit E un espace vectoriel sur R , soit f et g deux endomorphismes injectifs de E .
La somme $f+g$ est-elle un endomorphisme injectif ?
La composée $f \circ g$ est-elle un endomorphisme injectif ?

b. Soit E un espace vectoriel sur R , soit f et g deux endomorphismes surjectifs de E .
La somme $f+g$ est-elle un endomorphisme surjectif ?
La composée $f \circ g$ est-elle un endomorphisme surjectif ?

c. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur R , soit f et g deux endomorphismes de E tels que $g \circ f$ soit injectif .
Montrer que f et g sont des automorphismes de E , c'est-à-dire des bijections linéaires de E sur E .

$\boxed{9}$

a. Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel R^3 .
On suppose que $f^4 = 0$, montrer que $f^3 = 0$.

b. Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel R^3 .
On suppose que $f^3 + af^2 + f = 0$, montrer que $R^3 =$Ker(f)$\oplus$Im(f) .

c. Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel E sur R de dimension quelconque .
On suppose que $f^2 = -f$, f est-il injectif ? bijectif ?
Montrer que $E =$Ker(f)$\oplus$Im(f) .

$\boxed{10}$ Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur R et soit f un endomorphisme de E .
On suppose qu'il existe un vecteur non nul u de E tel que la famille $(f(u), f^2(u), f^3(u), \ldots, f^n(u))$ soit une base de E .

a. Montrer que la famille $(u, f(u), f^2(u), \ldots, f^{n-1}(u))$ est aussi une base de E .

b. Montrer que f est bijectif .

c. Montrer qu'il existe n scalaires $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ tels que :
$f^n(u) = a_0 u + a_1 f(u) + a_2 f^2(u) + \ldots + a_{n-1} f^{n-1}(u)$

d. En déduire que : $f^n = a_0 I + a_1 f + a_2 f^2 + \ldots + a_{n-1} f^{n-1}$

$\boxed{11}$

a. Soit E un espace vectoriel sur R de dimension n et soit f et g deux endomorphismes de E .
Montrer que $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.

b. Dans cette question , on suppose de plus que f et g possèdent les deux propriétés suivantes :
$g \circ f = 0$ et $(f+g)$ est bijectif .
Posons $F = \mathrm{Im}(f)$ et $G = \mathrm{Im}(g)$.
Montrer que $F + G = E$.
En déduire que $rg(f) + rg(g) \geq n$, puis montrer que $rg(f) + rg(g) = n$.
En déduire que $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Im}(g) = E$, puis prouver enfin que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(g) = E$.

$\boxed{12}$ PROJECTIONS

Soit E un espace vectoriel sur R et soit F_1 et F_2 deux sous-espaces supplémentaires de E , c'est-à-dire tels que $F_1 \oplus F_2 = E$.

On rappelle que les trois propositions suivantes sont équivalentes :
*$F_1 \oplus F_2 = E$
*$F_1 + F_2 = E$ et $F_1 \cap F_2 = \{0\}$
*Pour tout vecteur u de E , il existe un **unique couple** (u_1, u_2) de vecteurs vérifiant:

$$u_1 \in F_1 \ , \ u_2 \in F_2 \ , \ u_1 + u_2 = u$$

On notera $u_1 = p_1(u) =$ "projection de u sur F_1 parallèlement à F_2"
$u_2 = p_2(u) =$ "projection de u sur F_2 parallèlement à F_1"

a. Montrer que p_1 et p_2 sont des endomorphismes de E .

b. Montrer que : $\mathrm{Ker}(p_1) = F_2$ et $\mathrm{Im}(p_1) = F_1$
(par raison de symétrie , on a bien sûr aussi $\mathrm{Ker}(p_2) = F_1$ et $\mathrm{Im}(p_2) = F_2$)

c. Montrer que : $v \in F_1 \iff p_1(v) = v$

d. Montrer que : $p_1 \circ p_1 = p_1$.

$\boxed{13}$ PROJECTEURS

Plus généralement , un endomorphisme p de E est appelé un **projecteur** si et seulement si $p \circ p = p$.

a. Montrer que : p projecteur de $E \iff (Id - p)$ projecteur de E

b. Si p est un projecteur , montrer que :
*$\mathrm{Im}(Id - p) = \mathrm{Ker}(p)$
*$\mathrm{Ker}(Id - p) = \mathrm{Im}(p)$
*$E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$
*p est la projection vectorielle de E sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

c. Soit p un projecteur et u un endomorphisme de E .
Montrer l'équivalence des propositions suivantes :
*$p \circ u = u \circ p$
*$\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par u .

d. Soit p et q deux projecteurs de E .
Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $(p + q)$ soit aussi un projecteur .

Algèbre 4 : Matrices et Applications linéaires

$\boxed{1}$

Soit les applications linéaires $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définies par :
$f(x,y,z) = (x+2y+3z, y+2z)$ et $g(x,y) = (x-y, x-2y, x-3y)$.

1) Donner, dans les bases canoniques $B = (b_1,b_2)$ de $\mathbb{R}^2$ et $C = (c_1,c_2,c_3)$ de $\mathbb{R}^3$, les matrices de f et de g.

2) a) Calculer les matrices de g o f et de f o g dans les bases précédentes.

b) En déduire l'expression de $(g \circ f)(x,y,z)$ et de $(f \circ g)(x,y)$.

3) Calculer le rang de f, g, f o g et de g o f .

4) a) Parmi les applications linéaires précédentes, préciser celles qui sont injectives, surjectives, bijectives, en justifiant le résultat.

b) Pour chaque application linéaire précédente, calculer le noyau et l'image.

c) Lorsque l'une de ces applications est bijective, calculer son application inverse et la matrice de celle-ci dans les bases canoniques.

$\boxed{2}$

Soit l' application linéaire $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1,e_2,e_3) de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $u(x,y,z)$, où $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

2) a) Calculer Ker u et Im u .

b) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

3) Soit $a = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Calculer $b \in \operatorname{Ker} u$ et $c \in \operatorname{Im} u$ tels que l'on ait $a = b + c$.

4) On considére l' application linéaire $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $p(a) = c$, b et c étant les uniques éléments trouvés en 3).
Montrer que $u = \alpha p$, α étant un réel que l'on déterminera.

5) a) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u^n = \alpha^n p$.

b) Retrouver ce résultat en calculant directement la matrice A^n par récurrence.

$\boxed{3}$

Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (2x+5y-z, 2y+3z, 2z)$.

1) Trouver la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2) En remarquant que $A = 2I + B$, calculer A^n , $n \in \mathbb{N}^*$.

3) En déduire l' expression de $f^n(x,y,z)$, où $f^n = f \circ \cdots \circ f$ n fois.

4

Soit la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1) Calculer le rang de A . En déduire que A est inversible.
2) Calculer A^{-1} ,
   a) en considérant que A est une matrice de changement de base;
   b) en considérant que A est la matrice d'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ et en calculant f^{-1} .
   c) Retrouver le résultat à l'aide des transformations de Gauss-Jordan sur la matrice augmentée $A \mid I$.
3) Calculer A^n , $n \in \mathbb{N}^*$.

5

Soient les applications linéaires $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définies par :
$f(x,y,z,t) = (3x-y+2z, 2y-t, x+z+2t)$ et $g(u,v,w) = (3u+v, u+v+w, u-v, u+2v)$.
1) Trouver les matrices A de f et B de g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^4$.
2) Calculer le rang de f, g , g o f , et f o g (On pourra varier les méthodes) .

6

Calculer selon les valeurs du paramètre réel a, le rang de la matrice réelle :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ a & -1 & -1 & a \end{pmatrix}.$$

7

Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y)$.
1) Donner les matrices de f dans les bases suivantes de $\mathbb{R}^3$:
   a) $B1 = (e_1,e_2,e_3)$ canonique ·
   b) $B2 = (b_1,b_2,b_3)$, où $b_1 = e_3$, $b_2 = e_1$, $b_3 = e_2$.
   c) $B3 = (c_1,c_2,c_3)$, où $c_1 = e_1$, $c_2 = e_1 + e_2$, $c_3 = e_1 + e_2 + e_3$,
   par un calcul direct, puis en utilisant les matrices de changement de base.
2) La matrice $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ représente-t-elle f ? Si oui dans quelle(s) base(s)?

8

Soit $E = \mathbb{R}^3[x]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 3.
On définit $f : E \to E$ par $f(P) = (1-x^2)P'' - 2xP'$.
1) Montrer que f est linéaire.
2) Donner la matrice de f dans la base canonique $(1, x, x^2, x^3)$ de E .

3) Calculer le rang de f.
4) Donner une base de Ker f et de Im f .

$\boxed{9}$

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles carrées d'ordre 2, rapporté à sa base canonique $B = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$, où $E_{ij} = (\delta_{kl})_{k,l}$, δ_{kl} étant défini par
$\delta_{kl} = \begin{cases} 1 \text{ si } (k,l) = (i,j) \\ 0 \text{ si } (k,l) \neq (i,j) \end{cases}$ (symbole de Kronecker).
Soit enfin une matrice donnée A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1) a) Montrer que l' application $f_A : E \rightarrow E$, définie par $f_A(M) = AM$, est linéaire.
   b) Donner sa matrice dans la base B.
   c) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour que f_A soit un isomorphisme. Lorsque f_A est un isomorphisme, calculer $(f_A)^{-1}(M)$ en fonction de A .
2) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .Vérifier que f_A est un isomorphisme et calculer $(f_A)^{-1}(M)$, ainsi que la matrice de $(f_A)^{-1}$ dans la base B de E.

$\boxed{10}$

Soit l' application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x,y,z,t) = (x-y+z+t,\ x+2z-t,\ x+y+3z-3t) .$$

1) Donner la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^4$.
2) Calculer le rang de f.
3) Déterminer Ker f et Im f .

$\boxed{11}$

Soit l' endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ par la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1)a) Montrer que $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$, où $e'_1 = e_1$, $e'_2 = e_1 + e_2$, $e'_3 = e_1 + e_2 + e_3$, est une base de $\mathbb{R}^3$.
   b) Calculer la matrice A' de f dans la base B'.
2)a) Calculer, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, les cœficients de A'^n .
   b) En déduire l' expression de A^n .
3) On considère les suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies par $x_0 = y_0 = z_0 = 1$, et pour tout $n\in\mathbb{N}$ $x_{n+1} = 2x_n$, $y_{n+1} = x_n + 3y_n - z_n$, et $z_{n+1} = x_n + y_n + z_n$.
   Calculer x_n, y_n, et z_n en fonction de n .

1 Dans cet exercice, il est **interdit** d'utiliser la règle de Sarrus. Calculez les déterminants suivants:

$$A=\begin{vmatrix}1&0&2\\3&4&5\\5&6&7\end{vmatrix}\quad B=\begin{vmatrix}1&a&a'\\1&b&b'\\1&c&c'\end{vmatrix}\quad C=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}\quad D=\begin{vmatrix}0&b&c\\a&0&c\\a&b&0\end{vmatrix}\quad E=\begin{vmatrix}1&b&c\\a+1&0&c\\a+1&b&0\end{vmatrix}$$

$$F=\begin{vmatrix}\frac{1}{3}(1+i)&\frac{1}{3}(1-2i)&\frac{1}{3}(1+i)\\\frac{1}{3}(1-2i)&\frac{1}{3}(1+i)&\frac{1}{3}(1+i)\\\frac{1}{3}(1+i)&\frac{1}{3}(1+i)&\frac{1}{3}(1-2i)\end{vmatrix}\quad G=\begin{vmatrix}1&j&j^2\\2j+3&4j^2-5&-2j^7+1\\-5j^{11}&7j-4&8j^{17}\end{vmatrix}\quad H=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\b+c&c+a&a+b\end{vmatrix}$$

$$I=\begin{vmatrix}1&\cos(a)&\cos(2a)\\\cos(a)&\cos(2a)&\cos(3a)\\\cos(2a)&\cos(3a)&\cos(4a)\end{vmatrix}\quad J=\begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{vmatrix}\quad K=\begin{vmatrix}a&a^2&a^3\\b&b^2&b^3\\c&c^2&c^3\end{vmatrix}\quad L=\begin{vmatrix}a^5&a^7&a^9\\b^5&b^7&b^9\\c^5&c^7&c^9\end{vmatrix}$$

2 a. Dans cette question, il s'agit de montrer, de deux façons, que $\Delta=\begin{vmatrix}a_1+b_1&a_2+b_2&a_3+b_3\\b_1+c_1&b_2+c_2&b_3+c_3\\c_1+a_1&c_2+a_2&c_3+a_3\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$

Première méthode: Sur Δ, effectuons les opérations élémentaires suivantes:
remplaçons L_3 par $(L_1+L_2+L_3)$; factorisons par 2; remplaçons L'_3 par $(L'_3-L'_1)$;
remplaçons L''_1 par $(L''_1-L''_3)$; remplaçons L'''_2 par $(L'''_2-L'''_1)$. Conclusion ?

Deuxième méthode: Posons $M=\begin{pmatrix}a_1+b_1&a_2+b_2&a_3+b_3\\b_1+c_1&b_2+c_2&b_3+c_3\\c_1+a_1&c_2+a_2&c_3+a_3\end{pmatrix}$ et $N=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}$. Remarquer qu'il existe une $(3,3)$ matrice A telle que $M=AN$. Conclusion ?

b. Montrer que: $\begin{vmatrix}na_1+b_1&na_2+b_2&na_3+b_3\\nb_1+c_1&nb_2+c_2&nb_3+c_3\\nc_1+a_1&nc_2+a_2&nc_3+a_3\end{vmatrix}=(n+1)(n^2-n+1)\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$

c. Calculer $\begin{vmatrix}a+2b-4c&a^2+2b^2-4c^2&a^3+2b^3-4c^3\\-4a+b+2c&-4a^2+b^2+2c^2&-4a^3+b^3+2c^3\\2a-4b+c&2a^2-4b^2+c^2&2a^3-4b^3+c^3\end{vmatrix}$

3 a. **Montrer que les déterminants suivants sont nuls:**

$$A=\begin{vmatrix}1&15&14&4\\12&6&7&9\\8&10&11&5\\13&3&2&16\end{vmatrix};B=\begin{vmatrix}a^2&(a+1)^2&(a+2)^2&(a+3)^2\\b^2&(b+1)^2&(b+2)^2&(b+3)^2\\c^2&(c+1)^2&(c+2)^2&(c+3)^2\\d^2&(d+1)^2&(d+2)^2&(d+3)^2\end{vmatrix};C=\begin{vmatrix}a&r&s&t\\b&r&s&t\\c&u&v&w\\d&u&v&w\end{vmatrix};D=\begin{vmatrix}1&a&a^2&b+c+d\\1&b&b^2&c+d+a\\1&c&c^2&d+a+b\\1&d&d^2&a+b+c\end{vmatrix}$$

b. **Calculer les déterminants suivants:**

$$E=\begin{vmatrix}-3&1&1&1\\1&-3&1&1\\1&1&-3&1\\1&1&1&-3\end{vmatrix};F=\begin{vmatrix}a&1&1&1\\1&a&1&1\\1&1&a&1\\1&1&1&a\end{vmatrix};G=\begin{vmatrix}a&1&1&\dots&1&1\\1&a&1&\dots&1&1\\1&1&a&\dots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&1&1&\dots&a&1\\1&1&1&\dots&1&a\end{vmatrix};H=\begin{vmatrix}a+b&a&a&\dots&a&a\\a&a+b&a&\dots&a&a\\a&a&a+b&\dots&a&a\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\a&a&a&\dots&a+b&a\\a&a&a&\dots&a&a+b\end{vmatrix}$$

c. Multiplier les colonnes de $K=\begin{vmatrix}bc&a^2&a^2\\b^2&ca&b^2\\c^2&c^2&ab\end{vmatrix}$ respectivement par a, b, c puis montrer que $K=\begin{vmatrix}bc&ab&ca\\ab&ca&bc\\ca&bc&ab\end{vmatrix}$

d. De même, montrer que $\begin{vmatrix}a^2&a&1&bcd\\b^2&b&1&acd\\c^2&c&1&abd\\d^2&d&1&abc\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a^3&a^2&a&1\\b^3&b^2&b&1\\c^3&c^2&c&1\\d^3&d^2&d&1\end{vmatrix}=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$

4

a. Calculer les déterminants suivants: $A = \begin{vmatrix} 3&5&7&2\\ 2&4&1&1\\ 2&0&0&0\\ 1&1&3&4 \end{vmatrix}$; $B = \begin{vmatrix} 1&1&1&6\\ 2&4&1&6\\ 2&1&2&9\\ 2&4&2&7 \end{vmatrix}$; $C = \begin{vmatrix} 1&2&3&4\\ 2&1&4&3\\ 2&3&4&5\\ 3&4&5&7 \end{vmatrix}$

$$D = \begin{vmatrix} 1&2&1&2&1\\ 0&0&1&1&1\\ 1&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&2\\ 1&2&2&1&1 \end{vmatrix} \;;\; E = \begin{vmatrix} 1&-2&3&-2&-2\\ 2&-1&1&3&2\\ 1&1&2&1&1\\ -1&4&3&2&5\\ 3&-2&2&2&-2 \end{vmatrix}$$

b. Calculer les déterminants suivants, en donnant impérativement la réponse sous forme factorisée:

$$F = \begin{vmatrix} 1&a&b&ab\\ 1&c&b&cb\\ 1&a&d&ad\\ 1&c&d&cd \end{vmatrix} ; G = \begin{vmatrix} 1&a&b&ac\\ 1&b&c&bd\\ 1&c&d&ac\\ 1&d&a&bd \end{vmatrix} ; H = \begin{vmatrix} a&b&a&c\\ b&a&c&a\\ a&c&a&b\\ c&a&b&a \end{vmatrix} ; I = \begin{vmatrix} a&c&c&b\\ c&a&b&c\\ c&b&a&c\\ b&c&c&a \end{vmatrix} ; J = \begin{vmatrix} a&b&c&d\\ b&a&d&c\\ c&d&a&b\\ d&c&b&a \end{vmatrix} ;$$

$$K = \begin{vmatrix} c+a&b&a&b\\ b&c+a&b&a\\ a&b&c+a&b\\ b&a&b&c+a \end{vmatrix} ; L = \begin{vmatrix} 0&d^2&d^2&d^2\\ d^2&0&a^2&b^2\\ d^2&a^2&0&c^2\\ d^2&b^2&c^2&0 \end{vmatrix} ; M = \begin{vmatrix} 1&0&a&a^2\\ 0&1&b&b^2\\ 1&0&c&c^2\\ 0&1&d&d^2 \end{vmatrix} ; N = \begin{vmatrix} 1&1&1&1\\ 1&1&\cos(a)&\cos(b)\\ 1&\cos(a)&1&\cos(c)\\ 1&\cos(b)&\cos(c)&1 \end{vmatrix}$$

c. Calculer les déterminants suivants, en donnant impérativement la réponse sous forme factorisée:

$$P = \begin{vmatrix} 1&1&1\\ a&b&c\\ a^2&b^2&c^2 \end{vmatrix} ; Q = \begin{vmatrix} 1&1&1\\ a&b&c\\ a^3&b^3&c^3 \end{vmatrix} ; R = \begin{vmatrix} 1&1&1\\ a&b&c\\ a^4&b^4&c^4 \end{vmatrix} ; S = \begin{vmatrix} 1&1&1\\ a^2&b^2&c^2\\ a^3&b^3&c^3 \end{vmatrix} ; T = \begin{vmatrix} a+b&b+c&c+a\\ a^2+b^2&b^2+c^2&c^2+a^2\\ a^3+b^3&b^3+c^3&c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

$$U = \begin{vmatrix} 2b&b-c-a&2b\\ a-b-c&2a&2a\\ 2c&2c&c-a-b \end{vmatrix} ; V = \begin{vmatrix} b+c&bc-1&(b^2+1)(c^2+1)\\ c+a&ca-1&(c^2+1)(a^2+1)\\ a+b&ab-1&(a^2+1)(b^2+1) \end{vmatrix} ; W = \begin{vmatrix} (b+c)^2&b^2&c^2\\ a^2&(c+a)^2&c^2\\ a^2&b^2&(a+b)^2 \end{vmatrix}$$

$$X = \begin{vmatrix} -2a&a+b&a+c\\ b+a&-2b&b+c\\ c+a&c+b&-2c \end{vmatrix} ; Y = \begin{vmatrix} a&b&c\\ c&a&b\\ b&c&a \end{vmatrix}$$

5

a. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} x&b&c&d\\ -b&x&-d&c\\ -c&d&x&-b\\ -d&c&b&x \end{pmatrix}$ où x,b,c,d sont des réels, et le polynôme $P(x) = \begin{vmatrix} x&b&c&d\\ -b&x&-d&c\\ -c&d&x&-b\\ -d&c&b&x \end{vmatrix}$

Calculer le produit $A.{}^tA$, et en déduire $P^2(x)$, puis $P(x)$.

b. Considérons le polynôme $Q(x) = \begin{vmatrix} x&a&b&c\\ -a&x&d&e\\ -b&-d&x&f\\ -c&-e&-f&x \end{vmatrix}$. Montrer que Q est un polynôme pair, puis déterminez ses coefficients

6

Calculer les déterminants d'ordre n suivants:

a. $$A_n = \begin{vmatrix} 0&1&1&\dots&1&1\\ 1&0&1&\dots&1&1\\ 1&1&0&\dots&1&1\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ 1&1&1&\dots&0&1\\ 1&1&1&\dots&1&0 \end{vmatrix} ; B_n = \begin{vmatrix} 0&1&1&\dots&1&1\\ 1&0&1&\dots&1&1\\ 1&1&0&\dots&1&1\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ 1&1&1&\dots&0&1\\ 1&1&1&\dots&1&1 \end{vmatrix}$$

b. $$C_n = \begin{vmatrix} 1&1&1&\dots&1&1\\ -1&0&1&\dots&1&1\\ -1&-1&0&\dots&1&1\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ -1&-1&-1&\dots&0&1\\ -1&-1&-1&\dots&-1&0 \end{vmatrix} ; D_n = \begin{vmatrix} 0&1&1&\dots&1&1\\ -1&0&1&\dots&1&1\\ -1&-1&0&\dots&1&1\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ -1&-1&-1&\dots&0&1\\ -1&-1&-1&\dots&-1&0 \end{vmatrix}$$

c. $$E_n = \begin{vmatrix} 1&1&1&\dots&1&1\\ 1&1&0&\dots&0&0\\ 1&0&1&\dots&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ 1&0&0&\dots&1&0\\ 1&0&0&\dots&0&1 \end{vmatrix} ; F_n = \begin{vmatrix} 0&0&0&\dots&0&a_1\\ 0&0&0&\dots&a_2&0\\ 0&0&0&\dots&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ 0&a_{n-1}&0&\dots&0&0\\ a_n&0&0&\dots&0&1 \end{vmatrix} ; G_n = \begin{vmatrix} 1&n&n&\dots&n&n\\ n&2&n&\dots&n&n\\ n&n&3&\dots&n&n\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ n&n&n&\dots&n-1&n\\ n&n&n&\dots&n&n \end{vmatrix} ;$$

$$H_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \dots & -n+1 & 0 \end{vmatrix} \; ; \; I_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \dots & 3 & 2 \\ 2 & 1 & n & \dots & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & \dots & 5 & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix} \; ; \; M_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

d. (Calculez les déterminants suivants de deux façons au moins (à l'aide de la multilinéarité en particulier)):

$$R_n = \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & x+2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 3 & 3 & x+3 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1 & n-1 & \dots & x+n-1 & n-1 \\ n & n & n & \dots & n & x+n \end{vmatrix} \; ; \; S_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$$

7

a. Calculer le déterminant suivant, d'ordre $(n+1)$:
$$\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$$

b. Considérons le déterminant suivant, d'ordre n : $D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$

Etablir une relation de récurrence entre D_n, D_{n-1} et D_{n-2} (pour $n > 2$); endéduire une relation de récurrence pour $(D_n - D_{n-1})$ et calculer D_n.

8

a. Soit a,b,c trois complexes, soit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et soit M et J les deux matrices suivantes:

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \; ; \; J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$$

Montrer qu'il existe une matrice diagonale D telle que: $M.J = J.D$
En déduire la décomposition de $dct(A)$ en produit de facteurs.

b. De manière analogue, factorisez le déterminant $M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$

Analyse 1 : Nombres réels

R , Sup , Inf

1 Montrer que $\sqrt{2}$ est un irrationnel .

2 Montrer que , si a est rationnel non nul et b irrationnel , alors $(a+b),(a-b),ab,\frac{a}{b},\frac{b}{a}$ sont irrationnels.

3 a)Montrer que tout rationnel est limite d'une suite strictement croissante de rationnels .
b)Montrer que tout rationnel est limite d'une suite strictement croissante d'irrationnels .
c)Montrer que tout irrationnel est limite d'une suite strictement croissante d'irrationnels .
d)Montrer que tout irrationnel est limite d'une suite croissante de rationnels .
(pour ce dernier cas , on peut considérer la suite des approximations décimales $u_n = 10^{-n}E(10^n x)$, où x est l'irrationnel considéré et $E(a)$ désigne la partie entière du réel a) .

4 Pour chacune des parties de R suivantes , déterminer (lorsqu'il ou elle existe) la borne supérieure, la borne inférieure , le plus grand élément , le plus petit élément .
$A = \{(-1)^n(1-\frac{1}{n}); n \in N^*\}$; $B = \{2^{n(-1)^n}; n \in N\}$; $C = \{\frac{1}{2^n} - \frac{1}{n}; n \in N^*\}$.

5 a)Montrer que Q est dense dans R , c'est-à-dire que tout intervalle ouvert $]a,b[$ (où a et b sont deux réels tels que $a<b$) contient au moins un rationnel .
b)Montrer que l'ensemble des irrationnels $R-Q$ est dense dans R .

6 Démontrer que , pour tous réels a et b , $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ et étudier le cas d'égalité .
Déterminer (s'il ou elle existe) la borne supérieure , la borne inférieure , le plus grand élément, le plus petit élément de l'ensemble
$E = \{x \in R; \exists\, a \in R^+ \text{ et } \exists\, b \in R^+ \text{ tels que : } a^2+b^2 = 6 \text{ et } ab = x\}$.

7 Soient A et B deux parties de R non vides et majorées .
On note $A+B = \{x \in R; \exists\, a \in A \text{ et } \exists\, b \in B \text{ tels que } x = a+b\}$.
Montrer que $A+B$ admet une borne supérieure dans R et que $Sup(A+B) = Sup(A) + Sup(B)$.

8 Montrer que l'ensemble $A = \{x \in Q; x^2 < 2\}$ n'a pas de borne supérieure dans Q .

9 On rappelle que , si $E(x)$ désigne la partie entière du réel x , $E(x)$ est le plus grand des entiers relatifs inférieurs ou égaux à x .
Montrer que :
a) $\forall x \in R$, $\forall y \in R$, $x \leq y \Longrightarrow E(x) \leq E(y)$
b) $\forall x \in R$, $\forall a \in Z$, $E(x+a) = E(x) + a$
c) $\forall x \in R$, $0 \leq E(2x) - 2E(x) \leq 1$

10 Soient n réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ quelconques et n réels $b_1, b_2, \ldots, b_n$ strictement positifs .

Montrer que : $\inf(a_k)_{1\leq k\leq n} \leq \dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i} \leq \sup(a_k)_{1\leq k\leq n}$,

puis montrer : $\inf(\frac{a_k}{b_k})_{1\leq k\leq n} \leq \dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i} \leq \sup(\frac{a_k}{b_k})_{1\leq k\leq n}$

Suites de Cauchy :

11 a) Soit (u_n) une suite réelle telle que l'on ait : $\forall n \in N, | u_{n+1} - u_n | \leq \dfrac{1}{2^n}$
Montrer que (u_n) converge .

b) Soit(u_n) la suite réelle de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\dfrac{1}{2^k + k}$

Montrer qu'elle converge (utiliser a) .

c) Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$ est convergente, car de Cauchy .

12 Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $| u_n - v_n |$ tende vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
Montrer que si l'une des deux suites est de Cauchy , alors l'autre l'est aussi .

13 On pose : $H_0 = 0$ et $\forall n \geq 1 \qquad H_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

1)Montrer que la suite (H_n) est strictement croissante et que $\forall n \geq 1 \quad H_{2n} - H_n \geq \dfrac{1}{2}$.
2)Montrer que la suite (H_n) n'est pas de Cauchy .
3)Montrer que la suite (H_n) tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Suites adjacentes :

14 Soit p un entier fixé , $p > 1$; on pose :
$u_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k^p}, v_n = u_n + \dfrac{1}{n^{p-1}}$.
Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes .

15 Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}, v_n = u_n + \dfrac{1}{n!}$ et $w_n = u_n + \dfrac{1}{n.n!}$
a)Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes .
Nous admettrons que leur limite commune est e et nous allons démontrer que e est irrationnel .
b)Montrer que $\forall n \geq 1$, $u_n < e < v_n$.
c)Montrer que $\forall n \geq 1$, $n!u_n$ est un entier .
d)En raisonnant par l'absurde et en supposant donc que $e = \dfrac{p}{q}$ où p et q sont des entiers strictement positifs , montrer que l'on aboutit à une contradiction . Conclure .
e)Montrer que les suites (u_n) et (w_n) sont aussi adjacentes , et que :
$\forall n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n < e - u_n < w_n - u_n$.
En déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de $n(n!)(e - u_n)$.

Suites extraites :

16 Soit (u_n) une suite réelle et l un élément de R .
a)Montrer que (u_n) converge vers $l \iff (u_{2n})$ et (u_{2n+1}) convergent vers l
b)On suppose que les trois suites extraites $(u_{2n}),(u_{2n+1})$ et (u_{3n}) convergent .
Montrer que la suite (u_n) converge .

17 a)Soit (u_n) une suite réelle telle que $\forall n \geq 1 , \forall m \geq 1 , 0 \leq u_{m+n} \leq \dfrac{m+n}{mn}$
Etudier la convergence de (u_{2n}) et celle de (u_{2n+1}) puis conclure en utilisant l'exercice 16 .
b)Soit (u_n) la suite réelle telle que $u_0 \in R$ et $\forall n \geq 0 , \; u_{n+1} = (u_n)^2 + (-1)^n n$.
Etudier la convergence de (u_{2n}) et celle de (u_{2n+1}) puis conclure .

18 Moyenne de Césaro

Soit (u_n) une suite réelle et (v_n) la suite définie par :

$$\forall n \geq 1 \qquad v_n = \frac{1}{n}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$$

a)Montrer que si (u_n) converge vers 0 , alors (v_n) converge aussi vers 0 .

b)En déduire que , plus généralement , la convergence de (u_n) vers l entraine la convergence de (v_n) vers l .

19 Soit I un intervalle fermé non vide de R et f une application monotone de I dans I .

Soit (u_n) la suite définie par récurrence par :

$u_0 \in I$ et $\forall n \in N, u_{n+1} = f(u_n)$.

Etudier la monotonie de (u_n) en distinguant f croissante et f décroissante .

20 Etudier les suites définies par :

a)$u_0 \geq 0$ et $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} = (u_n)^2 + \dfrac{3}{16}$.

b)$u_0 = 1$ et $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2 + u_n}$.

21 Considérons les suites

$u_n = \cos(n\alpha + \phi)$ et $v_n = \sin(n\alpha + \phi)$ où α et ϕ sont deux constantes réelles .

Montrer que (u_n) et (v_n) convergent $\Longleftrightarrow \alpha = 0(\text{mod}.2\pi)$

(On pourra considérer $u_{n+1} + u_{n-1}$ et $v_{n+1} + v_{n-1}$, ainsi que $u_n^2 + v_n^2$) .

Analyse 2 : Fonctions numériques d'une variable réelle . Limites et continuité .

Limites

1 Etudier les limites à droite et à gauche en 0 des fonctions f et g définies pour $x \neq 0$ par :

$$f(x) = \frac{x}{|\, x \,|} \qquad , \qquad g(x) = \frac{1}{x + 2 \,|\, x \,|}$$

2 On rappelle la propriété suivante où a et b peuvent désigner $+\infty$ ou $-\infty$:
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \iff$ pour toute suite (x_n) de limite a , la suite $(f(x_n))$ a pour limite b .
a)Soit $f(x) = x^\alpha \sin x$.
Trouver deux suites (x_n) et (y_n) qui tendent vers $+\infty$ et telles que : $f(x_n) = x_n^\alpha, f(y_n) = -y_n^\alpha, \forall n \in N$.
En déduire que , pour $\alpha \geq 0, f(x)$ ne peut avoir de limite quand x tend vers $+\infty$.
b)Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ pour $\alpha < 0$.

3 Les fonctions suivantes ont-elles une limite quand x tend vers 0 ?

$$f(x) = \cos \frac{1}{x} \qquad , \qquad g(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

4 Soit f une fonction strictement croissante sur un intervalle ouvert I de R , x_0 un point de I et
$E = \{f(x) \text{ pour } x \in I, x < x_0\}$
Montrer que E admet une borne supérieure dans R et que f admet cette borne supérieure pour limite à gauche en x_0 .
Montrer que f admet également une limite à droite finie en x_0 .

5 On considère la suite (f_n) de fonctions réelles définies sur $[0,1]$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = nx & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ f_n(x) = 2 - nx & \text{si} \quad \dfrac{1}{n} < x < \dfrac{2}{n} \\ f_n(x) = 0 & \text{si} \quad x \geq \dfrac{2}{n} \end{cases}$$

Pour tout x de $[0,1]$, trouver $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$.

6 Soit (f_n) la suite de fonctions réelles définies sur R_+ par :

$$f_n(x) = \frac{(n+1)(x + x^2)}{(n+1)x + 1}$$

Pour tout x de R_+ , trouver $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$.

Continuité

7 a)Représenter graphiquement et étudier la continuité de la fonction $f(x) = x - E(x)$ où $E(x)$ désigne la partie entière du réel x .
b)Pour quelles valeurs du réel a la fonction $g(x) = (x - E(x))(x - E(x) - a)$ est-elle continue ?
Quel est alors son graphe ?

8 a)Etudier la continuité de la fonction f définie par : $f(x) = 1$ si $x \in Q$ et $f(x) = -1$ si $x \notin Q$.
Etudier la continuité de la fonction $|\, f \,|$.
b)Etudier la continuité de la fonction g définie par : $g(x) = x$ si $x \in Q$ et $g(x) = -x$ si $x \notin Q$.
Que dire de $|\, g \,|$?

9 Considérons la fonction f de R dans R définie par : $f(0) = 0, f(x) = \dfrac{1}{x}$ si $x \in Q^*$ et $f(x) = x$ si $x \notin Q$.
Montrer que f réalise une bijection de R dans R et que f n'est continue qu'en 1 .

10 Soient f et g deux fonctions continues de R dans R vérifiant $f(x) = g(x)$ pour tout x de Q .
Montrer que $f = g$, c'est-à-dire que $f(x) = g(x)$ pour tout x de R .

11 Soit (f) une fonction réelle définie et monotone sur $[0, 1]$.
Démontrer que :
f est continue à droite en 0 $\Longleftrightarrow \lim(f(\dfrac{1}{n})) = f(0)$.

12 a)Soit f une fonction continue sur un intervalle I de R .
Montrer que $| f |$ est continue sur I .
b)Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de R .
Exprimer la fonction $\mathrm{Sup}(f, g)$ en fonction de $(f + g)$ et $| f - g |$.
En déduire que la fonction $\mathrm{Sup}(f, g)$ est continue sur I .

13 Soit $f : [a, b[\longrightarrow R$ continue telle que : $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$.
Montrer que , $\forall A > f(a)$, on peut trouver $c \in [a, b[$ tel que $f(c) = A$.

14 Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow R$ continue telle que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.
Montrer que , pour tout réel A strictement compris entre $f(a)$ et 1, on peut trouver $c > a$ tel que $f(c) = A$.

15 Soit f une fonction réelle définie et strictement croissante sur $[a, b]$, et telle que : $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$.
a)Montrer que f est une surjection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$.
b)Soit x_0 un point de $[a, b[$.
Montrer que $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \mathrm{Inf}\{f(y) \ / \ x_0 < y < b\}$ puis que f est continue à droite en x_0 .
c)Soit x_0 un point de $]a, b]$ .Montrer que f est continue à gauche en x_0 .
d)En déduire que f est continue sur $[a, b]$.

16 Soit k un réel de l'intervalle $]0; 1[$ et f une application de R dans R qui vérifie :
$\forall x \in R \ , \ \forall y \in R \quad | f(x) - f(y) | \leq k \, | x - y |$
a)Montrer que f est continue sur R .
b)Soit (u_n) la suite définie par récurrence par :
$u_0 \in R$ et $\forall n \in N, u_{n+1} = f(u_n)$
Montrer que : $\forall n \in N, | u_{n+1} - u_n | \leq k^n \, | u_1 - u_0 |$.
En déduire que la suite (u_n) est de Cauchy et converge vers un réel que l'on va noter l .
Montrer que $f(l) = l$ et que l est l'unique point fixe de f .
c)Montrer que ces résultats s'appliquent si f est dérivable sur R et si f' vérifie :
$\exists k \in]0, 1[$ tel que $\forall x \in R \ , \ | f'(x) | \leq \ k$.

17 Soit f une fonction réelle définie et continue sur R , telle que pour tout couple (x, y) de nombres réels , on ait : $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
1.Montrer que : $\forall x \in R \ , \ \forall n \in N \ , \ f(nx) = nf(x)$.
2.Montrer que : $\forall x \in R \ , \ \forall n \in Z \ , \ f(nx) = nf(x)$.
3.Montrer que : $\forall r \in Q \ , \ f(r) = rf(1)$.
4.En déduire que $f(x) = xf(1)$ pour tout nombre réel x .

18 Soit $f : R \longrightarrow R$ une fonction vérifiant :
$\forall (x, y) \in R^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$ et $f(xy) = f(x)f(y)$.
1.Montrer que $\forall r \in Q \ , \ f(r) = rf(1)$. (Voir exercice précédent)
2.Montrer que $f(1) = 1$ ou $f(1) = 0$.
3.Montrer que f est croissante .
4.En déduire que $f = 0$ ou $f = Id$.

19 Soit $f : R \longrightarrow R$ une fonction continue vérifiant :

$\forall (x,y) \in R^2, f(x) \neq 0$ et $f(x+y) = f(x)f(y)$.

1.Calculer $f(0)$.

2.Montrer que $f(1) > 0$ et calculer $f(n)$, $\forall n \in Z$ en fonction de $f(1)$.

3.Calculer $f(\alpha)$, $\forall \alpha \in Q$ en fonction de $f(1)$.

4.Calculer $f(x)$, $\forall x \in R$ en fonction de $f(1)$.

Analyse 3 : Primitives , intégrales . Intégrales impropres

1 Soient a, b, c, d quatre réels tels que $a < b < c < d$ et soit $f : [a, d] \longrightarrow R$ continue sur $[a, d]$. Montrer que

$$\Big(\int_a^b f(x)dx\Big)\Big(\int_c^d f(x)dx\Big) + \Big(\int_a^c f(x)dx\Big)\Big(\int_d^b f(x)dx\Big) + \Big(\int_a^d f(x)dx\Big)\Big(\int_b^c f(x)dx\Big) = 0$$

2 a)Soit h une fonction continue et positive sur $[a, b]$ et telle que $\displaystyle\int_a^b h(t)dt = 0$.
Montrer que $h = 0$.
b)Soit $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ une fonction continue telle que $f \neq 0$ et $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 f^2(t)dt$.
Montrer que $f = 1$, c'est-à-dire : $\forall t \in [0, 1], f(t) = 1$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

3 Soient f et g deux applications continues :$[a, b] \longrightarrow R$, a et b étant deux réels tels que $a < b$.
Montrer que $\forall \lambda \in R, \displaystyle\int_a^b (f(t) + \lambda g(t))^2 dt \geq 0$.
En déduire que :$\displaystyle\Big(\int_a^b (f(t)g(t)dt\Big)^2 \leq \Big(\int_a^b f^2(t)dt\Big)\Big(\int_a^b g^2(t)dt\Big)$.
et que $\displaystyle\Big(\int_a^b (f(t)g(t)dt\Big)^2 = \Big(\int_a^b f^2(t)dt\Big)\Big(\int_a^b g^2(t)dt\Big) \Longleftrightarrow \exists \lambda \in R$ tel que $f + \lambda g = 0$.

4 Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f et g deux fonctions continues : $[a, b] \longrightarrow]0, +\infty[$.
Montrer que $\displaystyle(b - a)^2 \leq \Big(\int_a^b f(x)dx\Big)\Big(\int_a^b \frac{dx}{f(x)}\Big)$.
Pour quelles fonctions y a-t-il égalité ?

5 Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans R telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$.
Montrer qu'il existe un réel x_0 de $[0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.
(Penser à utiliser le théorème de Rolle) .

Changements de variables

6 1)Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos(\frac{\pi}{4} - x))dx$.
2)En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x)dx$.

7 Soit a un réel de $]0, +\infty[$ et f une fonction continue de $[0, a]$ dans R telle que :
$\forall x \in [0, a], f(x) \neq -1$ et $f(x)f(a - x) = 1$.
Montrer que $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{1 + f(x)}dx = \frac{a}{2}$.

8 a) Montrer que $\forall x > 0, \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctan x$.
b) En déduire , à l'aide d'un changement de variable , le calcul de $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 (1 + \frac{1}{x^2})\arctan x dx$.

9 Soit I_n l'intégrale $\displaystyle\int_0^n \frac{dx}{\sqrt{n^3+x^3}}$.
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0.$

10 Pour $n \in N$et $p \in N$, on pose $I_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^p dx$.
1)Calculer $I_{n,0}$.
Etablir une relation de récurrence entre $I_{n,p}$ et $I_{n+1,p-1}$ et en déduire $I_{n,p}$.
2)En déduire une expression simple de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}(-1)^k C_p^k \frac{1}{n+k+1}$.

11 **Intégrales de Wallis**

Pour $n \geq 0$, soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.
1)Pour $n \geq 2$, montrer que $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.
2)En déduire I_{2p} et I_{2p+1} , pour $p \in N$.
3)Montrer que , pour $n \geq 0$, $I_n \geq I_{n+1} > 0$ et que , pour $p \geq 1 : 1 \leq \dfrac{I_{2p}}{I_{2p+1}} \leq \dfrac{I_{2p-1}}{I_{2p+1}}$.
4)En déduire la convergence et la limite de la suite : $u_n = \left(\dfrac{1.3.5.\cdots.(2n-1)}{2.4.6.\cdots(2n)}\right)^2 .n$.
5)Montrer que $\forall p \geq 0$, $I_{2p+1}^2 \leq \dfrac{\pi}{2(2p+1)}$.
6)En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

12 Soit a et b deux réels tels que $a < b$, et f une application de $[a,b]$ dans R , dérivable sur $[a,b]$ et telle que la fonction dérivée f' soit continue sur $[a,b]$.
Pour $n \in N$, on pose $I_n = \displaystyle\int_a^b f(x)\sin(nx)dx$ et $J_n = \displaystyle\int_a^b f(x)\cos(nx)dx$.
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$.

Formule de la moyenne

13 Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f et g deux fonctions continues : $[a,b] \longrightarrow R$.
On suppose que la fonction g garde un signe constant sur $[a,b]$.
A l'aide de la fonction $F(x) = f(x)\displaystyle\int_a^b g(t)dt$, montrer qu'il existe un réel c de $[a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt$$

14 Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.
Montrer par un changement de variable que $f(x) = \displaystyle\int_{\ln x}^{2\ln x} \frac{e^v}{v} dv$.
En déduire , à l'aide de la formule de la moyenne , $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Sommes de Riemann

15 Calculer la limite de chacune des suites suivantes :

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad , \quad b_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^p}{n^{p+1}} \quad (p>0)$$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n\alpha + k\beta} \quad (\alpha > 0, \beta > 0), \quad d_n = \frac{1}{n}\Big[(n+1)(n+2)\cdots(n+n)\Big]^{\frac{1}{n}} .$$

16 Montrer que :$\forall x \in [0,1]$, $0 \leq x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$, puis calculer les limites des deux suites suivantes :

$$a_n = n \sum_{k=1}^{k=n} \sin \frac{1}{(n+k)^2} \quad , \quad b_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \sin^2(\frac{1}{\sqrt{k}}) .$$

Fonctions définies par une intégrale

17 Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables et calculer leurs fonctions dérivées :

$$a(x) = \int_x^{5x} \sqrt{1+t^4}dt \quad , \quad b(x) = \int_{3x^2}^{x^4+x^3} e^{-t^2} dt .$$

18 Déterminer le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de la fonction :

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{1+t+t^2}$$

19 Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1+\cos t}{\sqrt{t^4-t^2+4}}dt$.

a)Déterminer le domaine de définition de f et étudier sa parité .
(on ne cherchera pas à calculer explicitement $f(x)$)
b)Etudier la dérivabilité de f et déterminer f' .
c)Montrer qu'il existe un réel c de l'intervalle $]0,1[$ tel que $f'(c) = 0$.
d)Montrer que $\forall x > \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0 \leq | f(x) | \leq \dfrac{2x}{\sqrt{x^4-x^2+4}}$.
En déduire la limite de f en $+\infty$.

Intégrales impropres

20 Etudier l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$.

21 Pour quelles valeurs des réels positifs α et β l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta}$ a-t-elle un sens ?
On pourra supposer $\alpha \geq \beta$.

22 Pour quelles valeurs du réel α l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+\sqrt{x^2+1})^\alpha}$ a-t-elle un sens ?
Calculer alors sa valeur .(Poser $x =$sh t)

23 L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x}$ a-t-elle un sens ?

24 Pour quelles valeurs de α l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}dx$ est-elle convergente ?

25 Montrer que $f(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}dx$ est définie pour $\alpha > -1$.
Calculer $f(0), f(1), f(2)$; trouver une relation de récurrence entre $f(n)$ et $f(n-1)$, $(n \geq 1)$, et en déduire la valeur de $f(n)$.

26 Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+(x-\frac{1}{x})^2}$.
Démontrer l'existence de I .
Que devient I par le changement de variable $x = \dfrac{1}{t}$?
En déduire un calcul simple de I .

$\boxed{27}$ Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{x^2+t^2} dt$.
Quel est le domaine de définition de f ?
Calculer $f(1)$ à l'aide du changement de variable $t = \frac{1}{u}$, et en déduire la valeur de $f(x)$.

$\boxed{28}$ Calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Soit f la fonction de $[0, +\infty[$ dans R définie par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+u^2)}}{1+u^2} du$$

1)Montrer que , pour tout réel $h \neq 0$, on a :

$$\frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) = \int_0^1 e^{-x(1+u^2)} . \frac{(e^{-h(1+u^2)} - 1)}{h(1+u^2)} du$$

2)Montrer , à l'aide de la formule de Taylor , qu'il existe un réel $A > 0$ tel que :

$$\forall y \in [-2, +2] \qquad \left| \frac{e^y - 1}{y} - 1 \right| \leq A \mid y \mid$$

3)En déduire que f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que

$$\forall x \geq 0 \qquad f'(x) = - \int_0^1 e^{-x(1+u^2)} du$$

4)On pose $g(x) = f(x^2)$ et $G(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.
Montrer que g et G sont dérivables sur $[0, +\infty[$ et que

$$\forall x \geq 0 \qquad g'(x) + (G(x)^2)' = 0$$

En déduire que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Analyse 4 :Séries numériques

1 Etudier la nature des séries de terme général :

1.$u_n = \dfrac{n^2}{2^n + n}$

2.$u_n = \dfrac{(n!)^\alpha}{n^n}$, $n \in N^*$, $\alpha \in R$

3.$u_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^4+1}}{n\sqrt{n-1}}$, $n > 1$

4.$u_n = \dfrac{2+\cos n}{n^p}$, $p \in N$

5.$u_n = \dfrac{2^n}{n^2}\sin^{2n}\alpha$ avec $0 < \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$

6.$u_n = \arctan\dfrac{1}{n^2}$

2 Montrer que la série de terme général $u_n = 2^{\frac{1}{2n-1}} - 2^{\frac{1}{2n+1}}$ est convergente et calculer sa somme $(n \geq 1)$.

3 Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2+n}$ est convergente et calculer sa somme $(n \geq 1)$.

4 Montrer que la série de terme général $u_n = \ln\dfrac{n^2+2n+1}{n^2+2n}$ est convergente et calculer sa somme $(n \geq 1)$

5 Etudier la convergence des séries de terme général :

.$u_n = \dfrac{2.4.6\cdots 2n}{n^n}$

.$v_n = \dfrac{1+n^2}{n!}$

.$w_n = \dfrac{a^n}{n^2+1}$, $a \in R_+$.

6 Montrer que , quelquesoit le réel $A > 0$, il existe un entier n_0 tel que $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > A$.
Donner une telle valeur de n_0 pour $A = 10$.

ANNEXES

Sujets d'examen

et

de contrôle continu

Années 1995-1996-1997

Université de NANTES
Faculté des Sciences et des Techniques

Année universitaire 1994-1995
Département de Mathématiques

Examen M2 - $1^{\text{ière}}$ session - 9/5/1995 - Durée : 2 h

(Documents interdits - Calculatrice interdite)

Exercice 1

R désigne l'ensemble des nombres réels.

1) Déterminer une primitive sur **R** de la fonction $(cos x)^3$.

2) Soit $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ intervalle ouvert de **R**.

Déterminer une primitive sur I de la fonction tgx.

3) Déterminer toutes le solutions sur I de l'équation différentielle

$$y' - ytgx = (cosx)^2 \qquad (E)$$

(On justifiera les calculs avec soin).

4) Montrer qu'il existe une solution unique de (E) qui prenne la valeur 1 lorsque $x = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 2

Soit f une fonction deux fois continûment dérivable sur $]a, b[(a < b)$ à valeurs réelles et soit $m = \dfrac{a+b}{2}$. On définit φ sur $]a, b[$ par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(m)}{x-m} & \text{si} \quad x \neq m \\ f'(m) & \text{si} \quad x = m \end{cases}$$

a) Montrer que φ est continue sur $]a, b[$

b) Montrer que φ est une fois continûment dérivable sur $]a, b[$ et calculer explicitement $\varphi'(x)$ pour tout $x \in]a, b[$. On pourra utiliser :

$$f(m) = f(x) + (m-x)f'(x) + \frac{(x-m)^2}{2} f''(\theta), \theta \text{ compris entre } m \text{ et } x.$$

c) Soit $0 < h < b - m$. Montrer que l'on a

$$\int_{m-h}^{m+h} f(x)dx = h[f(m) + \frac{f(m+h) + f(m-h)}{2}] - \frac{1}{2} \int_{m-h}^{m+h} \varphi'(x)(x-m)^2 dx.$$

(On pourra montrer que $f(x) = f(m) + (x-m)\varphi(x), x \in]a, b[$)

23

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbf{R}$, et $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.

1) Soit $u : E \rightarrow E$ l'application linéaire dont la matrice dans la base $\mathcal{E}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer A^2, A^3.

b) Soit $b_1 = e_1 - e_2 + e_3$, $b_2 = e_1 - e_3$ et $b_3 = e_2 + e_3$.

Montrer que $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de E.

c) Calculer la matrice B de u dans la base $\mathcal{B}$ de E.

2) Soit $v : E \rightarrow E$ vérifiant $v^3 = 0$ et $v^2 \neq 0 (v^2 = v \circ v, v^3 = v^2 \circ v)$.

Soit $a_3 \in E$ tel que $v^2(a_3) \neq 0$. On pose $a_2 = v(a_3)$ et $a_1 = v(a_2)$.

a) Montrer que $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ est une famille libre de E.

b) En déduire que $\mathcal{A}$ est une base de E.

c) Calculer la matrice C de v dans la base $\mathcal{A}$.

Exercice 4

1) Soit $E = \mathbf{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2.

a) Montrer que l'application $d : E \rightarrow E$, définie par $d(P) = P'$ où P' est le polynôme dérivé de P, est linéaire.

b) Déterminer Ker d et Im d, en précisant leur dimension.

c) L'application d est-elle injective ? Surjective ? Justifier les réponses.

2) On considère maintenant l'application linéaire $f : E \rightarrow E$ définie par : $f(P) = 2P + P' - 2X^2P''$.

a) Déterminer la matrice A de f dans la base $(1, X, X^2)$ de E.

b) Montrer que f est inversible et déterminer f^{-1}

c) Soit le polynôme $S = 1 + X + X^2$.

Déterminer le polynôme P de E tel que $f(P) = S$.

Université de NANTES
Faculté des Sciences et des Techniques

Année universitaire 1994-1995
Département de Mathématiques

DEUG MIAS 94-95

Examen M2 - $2^{\text{ième}}$ session - 14/6/1995 - Durée : 2 h

(Documents interdits - Calculatrices interdites)

Exercice 1

Soit $E = \mathbf{R}_5[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 5.

1) Montrer que l'ensemble F des polynômes de E divisibles par $X(X^2-1)$ est un sous-espace vectoriel de E, dont on déterminera une base et la dimension.

2) Soit l'application linéaire : $g : E \to E$ définie par $g(P) = P'''$, où P''' désigne le polynôme dérivé d'ordre 3 de P.

Déterminer $G = Ker g$. Donner une base et la dimension de G.

3) Montrer que $E = F \oplus G$.

4) Soit $P = P_1 + P_2$, où $P_1 \in F$ et $P_2 \in G$, un polynôme de E, et soit Q et R respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de P par $X(X^2-1)$.

a) Exprimer P_1 et P_2 en fonction de Q et R.

b) Soit $P = X^5 - 1$. Déterminer la décomposition $P = P_1 + P_2$, où $P_1 \in F$ et $P_2 \in G$.

Exercice 2

Soit $E = \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices à 2 lignes et 3 colonnes, à coefficients dans $\mathbf{R}$. On définit :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & a \\ c & c & 0 \end{pmatrix} / a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} e & 0 & d \\ d & e & f \end{pmatrix} / d, e, f \in \mathbf{R} \right\}$$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} u & v & 0 \\ 0 & w & v \end{pmatrix} / u, v, w \in \mathbf{R} \right\}$$

1) Montrer que F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de E dont on déterminera une base et la dimension.

a) Déterminer $F \cap G$ et $F \cap H$.

b) A-t-on $E = F \oplus G$?

c) A-t-on $E = F \oplus H$?

Justifier les réponses.

Exercice 3

On considère la fraction rationnelle

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 1}{x(x-1)^2}$$

1) Montrer que $f(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, ou vers $-\infty$.

2) Déterminer la décomposition en éléments simples de la fractionnelle $f(x)$.

3) En déduire les primitives de $f(x)$ en précisant leurs intervalles de définitions.

Exercice 4

On considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x dx \quad , n \text{ entier } \geq 0$$

a) Montrer que $I_n > I_{n+1} > 0$ pour tout $n \geq 0$

b) Montrer que

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n \text{ pour tout } n \geq 0$$

c) Montrer que :

$$I_{2n+1}^2 < \frac{\pi}{2(2n+1)}$$

d) En déduire que :

$$\lim_{n \to \infty} I_n = 0$$

Université de NANTES
Faculté des Sciences et des Techniques

Année universitaire 1995-1996
Département de Mathématiques

DEUG A1-MIAS

Module 2 - Mathématiques

Contrôle Continu du samedi 16 mars 1996

Algèbre (9 h - 10 h 30)

Documents et calculatrices interdits.

Question de cours

Soient $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire et $(e_1, ..., e_n)$ une base de E. Montrer : f est injective si et seulement si $(f(e_1), ..., f(e_n))$ est libre.

Problème

Soit $E = \mathbf{R}_4[X]$ l'espace vectoriel (de dimension 5) des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 4. On pose :

$$F = \{P \in \mathbf{R}_4[X] / \forall x \in \mathbf{R}, P(-x) = P(x)\}$$

$$G = \{P \in \mathbf{R}_4[X] / \forall x \in \mathbf{R}, P(-x) = -P(x)\}$$

1) Montrer :

a) F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

b) $E = F \oplus G$.

2) Montrer :

a) $Vect(1, X^2, X^4) \subset F$ et $Vect(X, X^3) \subset G$

b) $Vect(1, X^2, X^4) = F$ et $Vect(X, X^3) = G$

(indication : on pourra considérer la dimension de E, F et de G).

3) Soit $\varphi : E \longrightarrow \mathbf{R}^2$ défini par $\varphi(P) = (P(0), P'(0))$ où P' désigne le polynôme dérivé de P.

a) Montrer que φ est linéaire.

b) Déterminer $Ker\varphi$ et $Im\varphi$

c) φ est elle injective ? surjective ? (justifier la réponse).

4) On pose $H = Ker\varphi$. A-t-on :

a) $E = F \oplus H$, *b)* $E = \mathbf{R}_1[X] \oplus H$, *c)* $E = G \oplus H$?

où $\mathbf{R}_1[X] = \{a + bX / a, b$ réels $\}$. Justifier les réponses.

Université de NANTES
Faculté des Sciences et des Techniques

Année universitaire 1996-1997
Département de Mathématiques

DEUG A1-MIAS

Module M2 - Mathématiques

Contrôle Continu du samedi 29 mars 1997

Analyse (11 h - 12 h 30)

Documents et calculettes interdits.

Question de cours

Soit $f :]a,b[\to \mathbf{R}$ croissante et minorée.
Montrer que f admet une limite à droite en a.

Problème

On considère la fonction définie sur $[0,1]$ par : $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$.

1) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leq f(x) \leq 1$ et que f est continue sur $[0,1]$.

2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ n'admet que 0 et 1 comme solutions dans l'intervalle $[0,1]$ (on pourra factoriser le polynome $t^3 + t - 2$).

3) Soit la suite (x_n) définie par $x_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \geq 0, x_{n+1} = f(x_n)$.

a) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $\quad 0 \leq x_n \leq 1$.

b) Montrer que (x_n) est une suite croissante et déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

4) *a*) Montrer que $f([\frac{1}{2}, 1]) \subset [\frac{1}{2}, 1]$.

On admettra que f est contractante sur $[\frac{1}{2}, 1]$ avec

$$|f(s) - f(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}|s-t| \quad \text{pour tout} \quad s,t \in [\frac{1}{2}, 1]$$

b) Montrer que pour tout $n \geq 0$:

$$\frac{1}{2} \leq x_n \leq 1.$$

En déduire :

$$|x_n - 1| \leq \frac{1}{2(\sqrt{2})^n}$$

5) a) Pour tout $n \geq 0$, on pose :

$$u_n = ln(\frac{2}{1+x_n})$$

En admettant l'inégalité :

$$ln(1+t) \leq t \text{ pour } t > -1,$$

montrer que pour tout $n \geq 0$:

$$0 \leq u_n \leq \frac{1-x_n}{1+x_n}$$

b) Etablir que pour tout $n \geq 0, \frac{1-x_n}{1+x_n} \leq \frac{1}{2(\sqrt{2})^n}$. En déduire que $\lim_{n \to \infty} S_n$ existe, où pour tout $n \geq 0$,

$$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$$

Université de NANTES
Département de Mathématiques

Année universitaire 1995-1996

DEUG A - Option MIAS
Module M2 1 ère Session 1996
Durée : 3 heures
Documents et calculatrice interdits.
ANALYSE

Question de cours.
Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$,à valeurs dans $\mathbf{R}$. On suppose que $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a,b]$.
Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

(On ne traite que le cas $\int_a^b g(x)dx > 0$)

Exercice 1

Soit la fraction rationnelle réelle $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4 - x^2 + 1}$

a) Montrer que $f(x)$ est définie pour tout x réel et que f est paire sur $\mathbf{R}$.

b) Décomposer f en éléments simples dans $\mathbf{R}$ et vérifier que cette décomposition est de la forme

$$f(x) = g(x) + g(-x) \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}$$

avec g une fraction rationnelle réelle.

c) Montrer qu'il existe, sur $\mathbf{R}$, une unique primitive de f impaire et que cette primitive est égale à

$$F(x) = \int_{-x}^{x} g(t)dt \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}$$

d) Déterminer explicitement F.

Exercice 2

a) Résoudre, dans l'intervalle $]0,1[$, les équations différentielles homogènes :

$$x(1-x^2)y' + (2x^2-1)y = 0$$

b) Ecrire les modifications adaptées pour les résoudre dans $]1,\infty[$, dans $]-1,0[$ et dans $]-\infty,-1[$.

ALGEBRE

Question de cours

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K. Montrer que A est inversible si et seulement si dét $A \neq 0$.

Exercice 1

Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbf{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

1) Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Calculer $f(x, y, z)$ en fonction de x, y et z.
2) Calculer les valeurs propres λ_1, λ_2, et λ_3 de A, où $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$.
3) Pour chaque valeur propre λ_i trouvée, calculer le sous-espace propre E_i associé à la valeur propre λ_i.
4) Montrer que la matrice A est diagonalisable.
Déterminer les matrices D diagonale et P inversible telle que $D = P^{-1}AP$.
5) Déterminer $Kerf$ et Imf.
Pour chacun d'eux, préciser une base et la dimension.

Exercice 2

Soit l'application $f : \mathbf{R}_3[X] \to \mathbf{R}_3[X]$ définie par
$f(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (a + c)x^3 + (b + d)x^2 + (a + b)x + (c + d)$
où $\mathbf{R}_3[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 3.
1) Montrer que f est linéaire et déterminer sa matrice dans la base canonique $\mathcal{E} = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbf{R}_3[X]$
2) Soit $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ où $P_0 = 1$ et $P_i = (1 + X)^i, 1 \leq i \leq 3$.
a) Montrer Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbf{R}_3[X]$.
b) Soit $P = 1 + 2X + 3X^2 + 4X^3 \in \mathbf{R}_3[X]$.
Calculer, les composantes de P dans la base $\mathcal{B}$.
c) Calculer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Université de NANTES
Faculté des Sciences et des Techniques

Année universitaire 1995-1996
Département de Mathématiques

DEUG A-MIAS

Module 2 - Mathématiques

Examen du 17 Juin 1996- Durée : 3 heures

Documents et calculatrices interdits.

ALGEBRE

Question de cours

Soit $f : E \rightarrow E$ une application linéaire, E étant un espace vectoriel de dimension finie, et soient $E_1, ..., E_r$ les sous-espaces propres de f. Démontrer la propriété:

f est diagonalisable si et seulement si : $dimE_1 + ... + dimE_r = dimE$.

Problème

Soit $E = \mathbf{R}_4[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 4, et soit P un polynôme de E. On appelle respectivement $q(P)$ et $r(P)$ le quotient et le reste de la division euclidienne de P par le polynôme $X^3 - 1$. On a donc $P = (X^3 - 1)q(P) + r(P)$, où deg $r(P) < 3$. On définit ainsi deux applications $q : E \rightarrow E$ et $r : E \rightarrow E$.

1) Montrer que les applications q et r sont linéaires.

2) Calculer : a)$Ker(q)$, b) $Im(q)$, c)$Ker(r)$, d) $Im(r)$.

3) Les applications q et r sont-elles :

a) injectives ? b) surjectives ? c) bijectives ?

Justifier les réponses.

4) Calculer dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3, X^4)$ de E la matrice :

a) A de l'application linéaire q.

b) B de l'application linéaire r.

5) Les matrices A et B sont-elles inversibles ? Pourquoi ?

ANALYSE

Question de cours

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$. Montrer que f admet une limite l à droite de a, si et seulement si pour toute suite (x_n) convergente vers a, avec $a < x_n < b$, la suite $(f(x_n))$ est convergente et de limite l.

Exercice I

On considère les polynômes :

$$P(x) = x^3 + 1 \text{ et } Q(x) = x^2 + 2x - 3$$

1) Déterminer les polynômes $E(x)$ et $R(x)$ tels que :
$P(x) = E(x)Q(x) + R(x)$ avec degré de $R <$ degré de Q.

2) On considère la fraction rationnelle $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$.
Déterminer le développement de $f(x)$ en éléments simples.

3) Déterminer les primitives de la fonction $f(x)$.
Sur quels intervalles de $\mathbf{R}$, une primitive est-elle continue ?

4) Calculer l'intégrale $I = \int_{-2}^{0} f(x)dx$.
En prenant $ln3 \simeq 1,1$ à $0,01$ près par excès, quelle est la précision du résultat numérique obtenu ?

Exercice II

On considère l'équation différentielle du second ordre (E_1) :

$$x^4 y" + 2x^2(1+x)y' + y = 0$$

1) Vérifier que la fonction $e^{1/x}$ est une solution de (E_1) sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$, ainsi que sur l'intervalle ouvert $]-\infty, 0[$.

2) On cherche les solutions de (E_1) sur l'intervalle $]0, +\infty[$, sous la forme $y(x) = \lambda(x)e^{1/x}$ où $\lambda(x)$ est une fonction deux fois continûment dérivable sur un intervalle ouvert I contenu dans $]0, +\infty[$. Montrer que la fonction $z(x)$ égale à la dérivée première $\lambda'(x)$ de la fonction $\lambda(x)$, vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre (E_2) que l'on explicitera.

3) Déterminer toutes les solutions de cette équation différentielle (E_2) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

4) En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E_1) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

5) Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_1) sur l'intervalle $]-\infty, 0[$.

6) Est-il possible qu'il existe une solution de l'équation différentielle (E_1) sur $\mathbf{R}$ tout entier ?

Université de NANTES
Faculté des Sciences et des Techniques

Année universitaire 1995-1996
Département de Mathématiques

DEUG A1-MIAS

Module 2 - Mathématiques

Contrôle Continu du samedi 16 mars 1996

Algèbre (9 h - 10 h 30)

Documents et calculatrices interdits.

Question de cours

Soient $f : E \to F$ une application linéaire et $(e_1, ..., e_n)$ une base de E. Montrer : f est injective si et seulement si $(f(e_1), ..., f(e_n))$ est libre.

Problème

Soit $E = \mathbf{R}_4[X]$ l'espace vectoriel (de dimension 5) des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 4. On pose :

$$F = \{P \in \mathbf{R}_4[X] / \forall x \in \mathbf{R}, P(-x) = P(x)\}$$

$$G = \{P \in \mathbf{R}_4[X] / \forall x \in \mathbf{R}, P(-x) = -P(x)\}$$

1) Montrer :

a) F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

b) $E = F \oplus G$.

2) Montrer :

a) $Vect(1, X^2, X^4) \subset F$ et $Vect(X, X^3) \subset G$

b) $Vect(1, X^2, X^4) = F$ et $Vect(X, X^3) = G$

(indication : on pourra considérer la dimension de E, F et de G).

3) Soit $\varphi : E \to \mathbf{R}^2$ défini par $\varphi(P) = (P(0), P'(0))$ où P' désigne le polynôme dérivé de P.

a) Montrer que φ est linéaire.

b) Déterminer $Ker\varphi$ et $Im\varphi$

c) φ est elle injective ? surjective ? (justifier la réponse).

4) On pose $H = Ker\varphi$. A-t-on :

a) $E = F \oplus H$, b) $E = \mathbf{R}_1[X] \oplus H$, c) $E = G \oplus H$?

où $\mathbf{R}_1[X] = \{a + bX / a, b$ réels $\}$. Justifier les réponses.

Université de NANTES
Faculté des Sciences et des Techniques

Année universitaire 1996-1997
Département de Mathématiques

DEUG A1-MIAS

Module M2 - Mathématiques

Contrôle Continu du samedi 29 mars 1997

Analyse (11 h - 12 h 30)

Documents et calculettes interdits.

Question de cours

Soit $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ croissante et minorée.
Montrer que f admet une limite à droite en a.

Problème

On considère la fonction définie sur $[0,1]$ par : $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$.

1) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leq f(x) \leq 1$ et que f est continue sur $[0,1]$.

2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ n'admet que 0 et 1 comme solutions dans l'intervalle $[0,1]$ (on pourra factoriser le polynome $t^3 + t - 2$).

3) Soit la suite (x_n) définie par $x_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \geq 0, x_{n+1} = f(x_n)$.

   a) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $0 \leq x_n \leq 1$.

   b) Montrer que (x_n) est une suite croissante et déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

4) *a*) Montrer que $f([\frac{1}{2}, 1]) \subset [\frac{1}{2}, 1]$.

On admettra que f est contractante sur $[\frac{1}{2}, 1]$ avec

$$|f(s) - f(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}|s-t| \quad \text{pour tout} \quad s, t \in [\frac{1}{2}, 1]$$

b) Montrer que pour tout $n \geq 0$:

$$\frac{1}{2} \leq x_n \leq 1.$$

En déduire :

$$|x_n - 1| \leq \frac{1}{2(\sqrt{2})^n}$$

5) a) Pour tout $n \geq 0$, on pose :

$$u_n = ln(\frac{2}{1+x_n})$$

En admettant l'inégalité :

$$ln(1+t) \leq t \text{ pour } t > -1,$$

montrer que pour tout $n \geq 0$:

$$0 \leq u_n \leq \frac{1-x_n}{1+x_n}$$

b) Etablir que pour tout $n \geq 0$, $\frac{1-x_n}{1+x_n} \leq \frac{1}{2(\sqrt{2})^n}$. En déduire que $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ existe, où pour tout $n \geq 0$,

$$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$$

Université de NANTES
Département de Mathématiques

Année universitaire 1996-1997

DEUG A1- Module M2
1 ère session
Examen du mercredi 7 Mai 1997
Durée : 3 heures
Sans documents ni calculatrice.

Analyse

Question de cours Soit f continue sur $[a,b], g$ continûment dérivable sur $[\alpha, \beta]$, à valeurs dans $\mathbf{R}$, telle que $g([\alpha,\beta]) \subset [a,b]$.
Montrer que

$$\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(s)ds$$

Exercice I

Soit α un nombre réel fixé.
Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la suite

$$u_n = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{n^\alpha}}}\, dx$$

1- Dans le cas $\alpha > 0$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ (on pourra encadrer la fonction à intégrer).
2- Calculer la dérivée de la fonction

$$\mathrm{Log}\,(x+\sqrt{1+x^2})$$

En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$.
N.B. La notation Log désigne le logarithme néperien.

Tournez la page S.V.P.

43

Exercice II

1. a) Soit n un entier ≥ 1. pour tout nombre réel $x \neq k\pi, k$ entier ≥ 0 ou < 0, on pose

$$f_n(x) = \frac{\sin\, nx}{\sin\, x}$$

Montrer que f_n admet un prolongement en une fonction continue sur $\mathbf{R}$.

b) On considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^{2\pi} \frac{\sin\, nt}{\sin\, t} dt.$$

En simplifiant la différence $f_{n+2}(t) - f_n(t)$ montrer que $I_{n+2} = I_n$ pour tout entier $n \geq 1$.

c) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$

$$I_{2n} = 0 \text{ et } I_{2n+1} = 2\pi$$

2) a) Quel est le plus grand intervalle ouvert $]0, A[$ sur lequel la fonction $\dfrac{1}{\sin\sqrt{x}}$ soit continue ?

b) Montrer que la fonction $g_n(x) = \dfrac{\cos\, nx}{\sin\sqrt{x}}$ est continue sur l'intervalle $]0, 2\pi]$

c) On considère pour tout a fixé $0 < a < 2\pi$, l'intégrale

$$K_n(a) = \int_a^{2\pi} g_n(t)dt$$

Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin\sqrt{t}}\, dt$ est convergente et que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{2\pi} g_n(t)\, dt$ est absolument convergente.

d) Pour a fixé, $0 < a < 2\pi$, en intégrant par parties, montrer que $K_n(a)$ tend vers zéro lorsque n tend vers $+\infty$.

e) En décomposant l'intégrale généralisée

$$\int_0^{2\pi} g_n(t)dt = \int_0^a g_n(t)dt + \int_a^{2\pi} g_n(t)dt$$

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} g_n(t)dt = 0$.

Algèbre

Question de cours. Soient E un espace vectoriel de dimension n sur K, $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E, $f : E \to E$ une application linéaire et $M(f)$ la matrice de f dans la base $\mathcal{E}$.
Montrer que $M(f)$ est inversible si et seulement si f est bijective.

Exercice 1.
Soit $E = \mathbf{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2.
On pose $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de E.
Soit $f : E \to E$ définie par $f(P) = (1 - X^2)P'' - XP' + 3P$.
1) Montrer que f est linéaire.
2) Calculer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.
3) Calculer $\operatorname{Ker} f$.
4) En déduire que f est bijective et calculer A^{-1}.
Soit maintenant $g : E \to E$ définie par $g(P) = (1-X^2)P'' - XP' + P$. On admettra que g est linéaire.
5) Calculer $\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} g$: on donnera une base et la dimension de ces sous-espaces.

Exercice 2.
Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbf{R}^3$ est

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & -10 & -3 \end{pmatrix}$$

1) Calculer $f(x, y, z)$ en fonction de x, y et z.
2) On pose $e'_1 = (1, 1, -2)$, $e'_2 = (1, 1, -3)$, $e'_3 = (0, -1, 2)$.
Montrer que $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
3) Calculer les matrices P et P^{-1} où P est la matrice de (e'_1, e'_2, e'_3) dans la base $\mathcal{E}$.
4) Calculer la matrice B' de f dans la base $\mathcal{E}'$.