

Centre Viète - Université de Nantes

Thèse de doctorat présentée par Anne Boyé



L'Apollonius Gallus et le problème des trois cercles, comme défense et illustration de la géométrie synthétique.

Tome II

CENTRE VIETE - UNIVERSITE DE NANTES

THESE DE DOCTORAT

SPECIALITE : Histoire des mathématiques

PRESENTEE PAR : Anne Rabu-Boyé

SOUS LA DIRECTION DE : Monsieur le professeur Jean Dhombres

**L'APOLLONIUS GALLUS ET LE PROBLEME DES
TROIS CERCLES, COMME DEFENSE ET
ILLUSTRATION DE LA GEOMETRIE SYNTHETIQUE.**

TOME II

ARTICULO 100

El Poder Judicial de la Federación se compone de la Suprema Corte de Justicia de la Nación, de los Tribunales Colegiados de Circuito, de los Juzgados Federales y de los Juzgados de Distrito.

El Poder Judicial de la Federación tiene a su cargo la interpretación y aplicación de la Constitución y de las leyes de la Federación, y la resolución de los conflictos de competencia entre los Poderes de la Federación.

Nous proposons dans ce volume les textes latins de l'Apollonius Gallus de Viète et ceux de Euler sur le problème des trois cercles, ainsi que les traductions que nous en avons faites. Nous y ajoutons certains autres textes qui nous semblent faire référence sur ce problème et qui ne sont pas facilement accessibles. Ainsi que nous l'avons mentionné, ceci peut constituer un outil pour des travaux ultérieurs.

Table des matières pour le tome II

Epître en grec de l'Apollonius Gallus, de l'édition originale (1636)	3
Traduction française.....	5
Apollonius Gallus, texte latin. (Viète, Opera mathematica, Abrabim Elzeviriorum, Leyde, 1646, réimp. G. Olms Verlag, Hildesheim, 1970.).....	7
Traduction française.....	22
Herigone : La géométrie des attouchements d'Apollonius Pergaeus, restituée par François Viète, Paris, 1634.....	50
Newton : Philosophiae naturalis principia mathematica, livre I, lemme XVI, traduction de Mme du Chastelet, Paris, 1759.....	62
Newton : Arithmetica universalis, problème XLVII traduction française de N. Beaudeau, 1802.	64
Marquis de l'Hospital : Traité analytique des sections coniques, livre X, Paris, 1707	68
Euler : Solutio facilis problematis quo quaeritur circulus qui datos tres circulos tangat, Leonardi Euleri Opera omnia, vol. XXVI, Andreas Speiser ed. Lausanne, 1953.....	77
Traduction française	84
Lawson : The two books of Apollonius Pergaeus concerning tangencies, as they have been restored by Franciscus Vieta and Marinus Ghetaldus, 2° ed. John Nourse, 1771.....	91
Articles divers des Annales de mathématiques pures et appliquées, (Journal de Gergonne) :	117
Gergonne : Recherche du cercle qui en touche trois autres sur une sphère. tome IV n° XII 1° juin 1814, (p. 349 à 359).....	118
Gergonne : Recherche du cercle qui en touche trois autres sur un plan. tome VII n° X 1° avril 1817, (p. 289 à 303).....	129
Poncelet : Réflexion sur l'usage de l'analyse algébrique dans la géométrie ; suivie de la résolution de quelques problèmes dépendant de la géométrie de la règle, (p. 141 à 155).....	144
Suivi de :	

Gergonne : Réflexion sur l'article précédent (p. 156 à 161)	
tome VIII n° IV 1° novembre 1817.....	159
Poncelet : Construction géométrique d'un cercle qui en touche trois autres donnés sur un plan ou sur une sphère, d'un cône droit qui en touche trois autres de même sommet, et d'une sphère qui en touche quatre autres dans l'espace.	
tome XI n° X 1° avril 1821, (p. 317 à 322).....	165
Un abonné : Sur la construction du cercle tangent à trois cercles donnés.	
tome XIII n° I 10 août 1822, (p. 193 à 200).....	171
Gaultier de Tours : Mémoire sur les moyens généraux de construire graphiquement un cercle déterminé par trois conditions, et une sphère déterminée par quatre conditions, XVI° cahier du journal de l'École polytechnique	180
Desboves : Questions de géométrie élémentaire, § XVI, 2° ed. , Delagrave, 1875.....	240
Catalan : Théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire, 3° éd., Dalmont, 1879....	243
Rouché et de Comberousse : Traité de géométrie, scolie 263, 8° ed., 1912.....	250

Apollonius Gallus
Epitre grecque de l'édition originale
(1600)



Τῷ Λαμπροτάτῳ καὶ λογιωτάτῳ βουλευτῇ Φραγκίσκῳ Ουιέττῃ, ἐυφράτειν.



Ο Λ Λ Ω Ν ἔκχεα θαυμάζειν σου ἔπις μοι, ἄνερ λαμπρότατε, καὶ γὰρ τοῖς νομικοῖς, καὶ δημοσίοις πράγμασι τὰ πολλὰ ἐνδιαιτώμενος, ἀλλ' ὁμῶς πρὸς πάντα παιδείαν διξίως καὶ εὐφυῶς ἔχεις ὡς ταυτῆς ἀγαθῶσι. καὶ μάλιστα τῆς ἀγχινοίας, πῇ μὲν εἰς ἐπιφάνειαν εὐτοχούσης, παντὸς ἐπιστολιμαίου χαρακτῆρος πολλὰ τῇ εἰς εἰρήνην καὶ πόλεμον μυθικῶς ἐμπειρίχοντος. πῇ δὲ εἰς ἄκρον πάσης μαθηματικῆς γνώσεως καὶ ζητήσεως ἐληλακυίας. ὡς δὴλον καὶ τοῖς ὑπὸ σου πάσαις ἐξελεχθεῖσι συγγραμμασι. ἐν οἷς γὰρ δὴ, οἱ τὰ τῇ μαθημάτων φιλοπόνως ἐξηκριβωκότες ἐπιδόξοι παιδείας ψῆφον ἀπονέμουσι. καὶ μάλιστα τοῖς ἐναγχοσι. οἷς τὰ παρ' ἄλλων ἐπιδόξιος καὶ φιλοπυμίας χάριτι προτεγνέτα γεωμετρικὰ προβλήματα, ἐρμηνείας καὶ λύσεως ἔτυχεν ὧς σου. καὶ γὰρ ἐν τούτοις ἐφάνης καὶ Λυκόφρονα

----- δυσφάτους ἀνιγμάτων

Οἷμας τυλίσων, ἥ ὧρ εὐμαθῆς ῥίβος

Οἷρῃ κελευτῇ, τὰν σκόθω ποδηγετῇ.

ὅγε καὶ ἰδεῖν οὐ πρὸ πολλοῦ σιωέβη μοι, ἀνελίθῃντι τὴν πρὸ ἀνιγμάτων προβλήματος καὶ σκοτεαστοῦ ὑπὸ τοῦ προβάλματος γνομῶν κρίσιν. ἐν ταυτῇ γὰρ, εὐγνωμονῶν, λύσιν ἔλαβον οὐκ ἐξόμνυμαι. οὐ μὲν ἀλλὰ ὅτι γὰρ πρὸ τῆς λύσεως ἐπαμφωτερίζει κυδός, καὶ τοῦτο ἄλλω πρὸς πρῶτα χρώνῃσι, οὐκ ὁρῶς ἐμοίγε δοκεῖ. τὰ γὰρ ὑπὸ σου ὡς ἐν βραχὺ καὶ ἐν ἐν ἡτῶν τελείως προδιδάχθῃτα, πολυπλασιάσας καὶ ἐπέκεινα προαγών, εὐρεσιλογίας μόνον ἐλέγχεται, οὐ μὲν γεωμετρικῆς ἐπιτοίας ἐπαμειβῆσθαι ἄξιον. ἅπαν γὰρ εὐρόντος ἔργον, καὶ ταῦτα ῥίς καὶ τεβάρικς ἀμπολεῖν, ἀπείρα τελείη καὶ πίδαροι. ὥς ταυτῇ ἀμαρτεῖν δόξαί, ὑμᾶς πρὸς λύσεως σύγκρισιν ἀσπίρως ὡς ἀλλῶν, ἀλλὰ τοῦτο μὲν ἀπὸ πλειόνων ἐπεξεληθεῖν οὐχ ἡμέτερον. τούτου μὲν τοι ὧς σου τυχεῖν φιλοπυμίας, εἴ σοι ἐξέτι μὴ ὑπὸ τῇ πολιτικῶν φροντίδων ἀνακοπήμῳ καὶ ἄλλων ὡς πολλάκις συμβαίνει ἐκ προσητάξεως βασιλικῆς πολιτευμάτων, εἴ τί σοι ἐσπουδάσῃ εἰς ἐπαρόρῳσι τῇ ἄλλοις ἐν γεωμετρίας ἀμούσως δόξαντων, φιλομαθέσι κοινωτέων. ὡς ἄλλόν πιναι σε φαίνεσθαι Ἀπολλόνιον καὶ ἡμᾶς ἀναβοῶντα, τοῖς Μίχαν παλαμοῖς ὀνομαζέμεντα. καὶ ἀπὸ σε τὸ κελπκὸν ὄνομα ὑπὸ μηδένος τῇ ἄλλων ὅτι τῇ μαθημάτων γνώσεως ὑπερβάλλεσθαι. ἔρρωσο.

Traduction française

Au très illustre et très savant conseiller François Viète, salut.

Nombreuses sont les raisons qui me poussent à t'admirer, très illustre ami, car, bien que tu consacres la plupart de ton temps à tes charges judiciaires et politiques, tu excelles et brilles dans toutes les branches du savoir, au point que l'on s'étonne de cette maîtrise et plus particulièrement de cette sagacité d'esprit, qui t'a fait voir clair, quand des missives, de façon mystérieuse, dissimulaient sous chaque lettre bien des secrets concernant la guerre et la paix, mais qui t'a conduit aussi au faite de toute la réflexion et de tout le savoir mathématiques. Cela était manifeste dans les traités que tu as publiés autrefois, car il est probable que ceux qui y ont approfondi avec rigueur et passion les notions mathématiques, te décernent la palme du savoir, et ça l'est plus encore dans les traités récents, où tu as donné l'explication et la solution de problèmes de géométrie proposés par d'autres par gloriole et pour se faire valoir. En vérité, tu y es apparu selon le mot de Lycophron :

*".....démêlant les voies confuses des énigmes,
tandis que devant toi s'ouvre un chemin évident et tout droit,
devant toi, qui guides nos pas dans l'obscurité."*

Or, il y a peu, voici ce qu'il m'est arrivé de découvrir en lisant les analyses développées à propos d'un problème opaque et énigmatique par celui qui le propose. Plein d'onction, il ne récuse pas formellement ta solution. Mais il reste partagé sur son mérite, mérite qu'en plus il attribue à quelqu'un d'autre : malhonnêtement à mon avis. Forçant les choses et les poussant trop loin, il taxe d'arguties ce que tu as proposé de façon concise, mais néanmoins parfaite, lui qui vraiment ne mérite pas qu'on le loue pour son intelligence de la géométrie. Car tout travail de recherche où l'on retourne le problème trois, quatre fois, est, selon Pindare, marque d'impuissance. Il me semble donc avoir là fait fausse route en vous proposant peu à propos d'élaborer cette solution. Et nous délivrer de cette difficulté aux détours trop nombreux n'est pas de ma compétence. J'ambitionne en vérité de l'obtenir de toi, si tu peux ne pas être accaparé, comme cela t'arrive souvent sur l'ordre du roi, par les soucis de l'état et autres problèmes politiques et si tu as envie de t'associer à des passionnés pour redresser ce qui dans la géométrie a paru boiteux à d'autres. Et ce, afin que tu apparaisses comme un autre Apollonius, celui que les anciens appelaient le Grand, revivant parmi nous, , et que grâce à toi le nom français ne soit surpassé par aucun autre dans l'intelligence des mathématiques. Salut.

Apollonius Gallus

de François Viète

Texte latin
1646

Opera mathematica, in unum volumen congesta ac recognita, opera atque studio Francisci a schooten, Leydensis, Mathesos Professoris. Lugduni Batcorium, ex officina Bonaventure & Abrabim Elzevirirum ; reproduction Georg Olms Verlag, Hildesheim, New york, 1970.



FRANCISCI VIETÆ
APOLLONIVS GALLVS.

Seu,

EXSUSCITATA APOLLONII PERGÆI
ΠΕΡΙ' ΕΠΑΦΩΝ ΓΕΟΜΕΤΡΙΑ.

Ad V. C.

ADRIANUM ROMANUM Belgam.

PROBLEMA Apollonii de describendo circulo, quem tres dati contingant (clarissime Adriane) Geometrica ratione construendum proposui φιλομαθῆσι, non Mechanica. Dum itaque circulum per hyperbolas tangis, rem acu non tangis. Neque enim hyperbolæ describuntur in Geometricis καὶ ἐπισημονικῇ λόγῳ. Duplicavit cubum per parabolas Menechmus, per conchoidas Nicomedes, an igitur duplicatus est Geometricè cubus? Quadravit circulum per voluntam inordinatam Dinostratus, per ordinatam Archimedes, an igitur Geometricè quadratus est circulus? Id vero nemo pronuntiabit Geometra. Reclamarer Euclides, & tota Euclideanorum schola. Ergo clarissime Adriane, ac si placet Apolloni Belga, quoniam Problema quod proposui planum est, tu vero ceu solidum explicasti, neque ideo occursum hyperbolarum, quem ad factionem tuam adsumis, firmasti, neque etiamnum potes firmare, quoniam revera si asymptoti fuerint parallelæ, erit irritus labor, & alioqui conicas sectiones in plano describere semper veriti sunt antiqui, missas fac lineas mixtas, & jam ab Apollonio ad ripas Oceani Aquitanici exsuscitato ultro accipe πηκνὴν ἐπισημονικῶν χειρουργίαν.

Apollonii Pergæi Problemata πρὸς ἑπτάων ad decem contraxit Pappus Alexandrinus, qua ideo singula persequar eo, qui convenientior videbitur, ordine.

PROBLEMA I.

Datis tribus punctis per eadem circulum describere: oportet autem data puncta non existere tria in eadem linea recta.

R 1 1

Sint

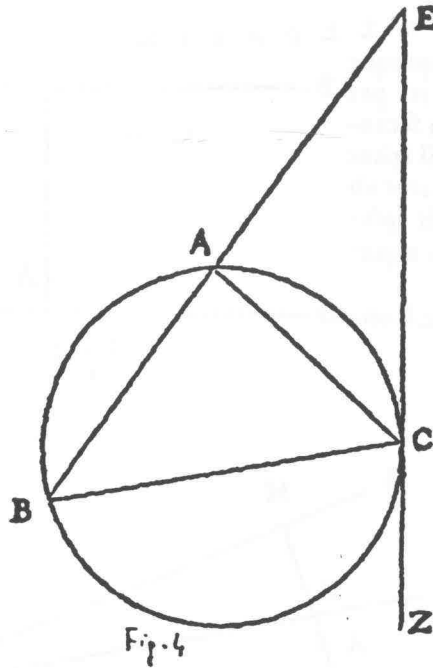


Fig. 4

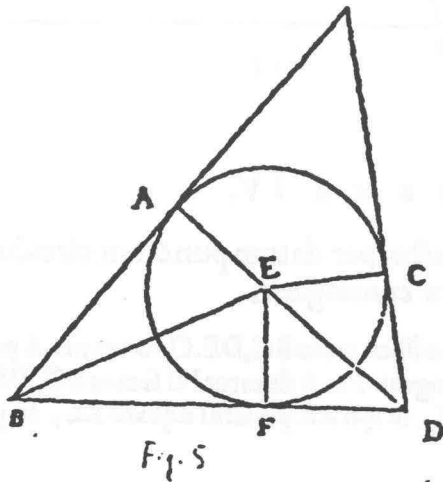
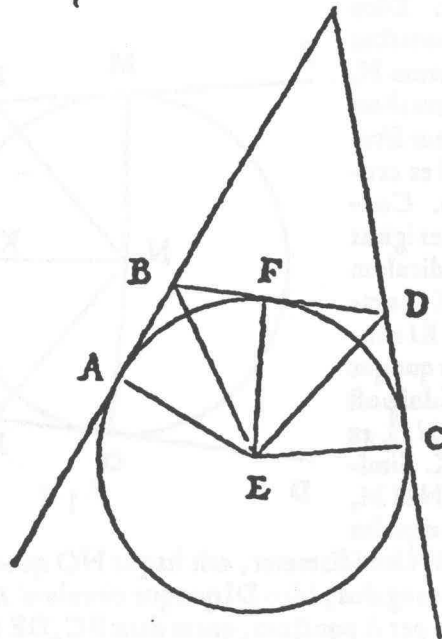


Fig. 5



Quod si non fuerit AB ipsi CZ
parallela, conveniant ambæ in E, se-
ceretur autem EZ in C, ita ut quod sit
sub EB, EA æquale sit quadrato
ipsius EC, & per puncta A, B, C de-
scribatur circulus. Igitur tangetur
à recta ECZ per expostum Lem-
ma. Ergo quocunque casu describi-
tur per puncta A, B circulus ABC
quem recta CZ in ipso C pun-
cto contingit. Quod erat facien-
dum.

PROBLEMA III

Datis tribus lineis rectis,
describere circulum quem ha-
rum unaquæque contingat O-
portet autem datas lineas re-
ctas non esse parallelas.

Sint datæ tres lineæ rectæ AB,
CD, BD, atque harum BD neutri
reliquarum sit parallela ex cautione
adjuncta Problemati, itaque reliquas
secet in ipsis B, D punctis. Oportet
describere circulum, quem rectæ AB,
CD, BD contingant. Secentur bi-
sariam anguli ABD, CDB à rectis
concurrentibus in E, itaque sint
BE, DE, & cadant in AB, CD, BD
perpendiculares EA, EC, EF. Erunt
igitur eæ æquales. Triangulum e-
nim rectangulum EAB simile est
triangulo rectangulo EFB ex con-
structione, utriusque vero commu-
nis est hypotenusa BE. Quare alti-
tudo EA altitudini EF erit æqualis.
Sic ostendetur EF æqualis ipsi EC.
Centro igitur E intervallo EA seu
EF vel EC describatur circulus
AFC. Descriptus est igitur circulus
AFC quem rectæ AB, CD, BD
tangunt in punctis A, C, F. Quod
erat faciendum.

Lemma.

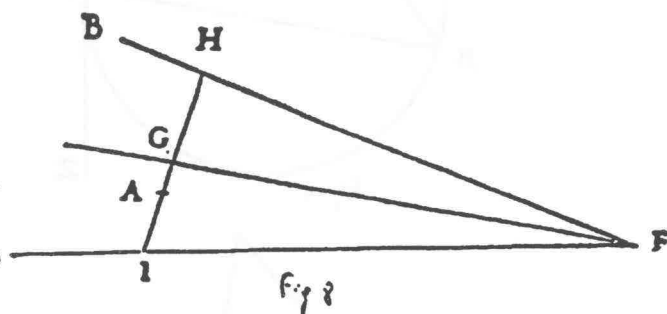
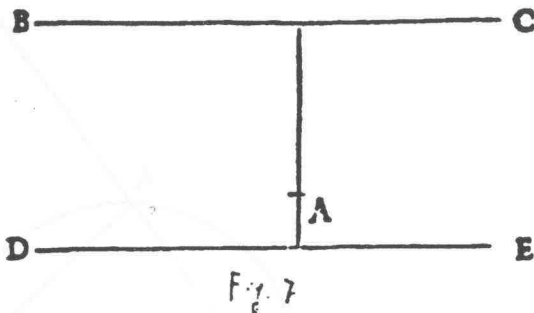
Per datum punctum ducere
lineam rectam secantem duas da-
tas ad angulos æquales.

Rr 3

Sic

Sic datum A punctum, datæ quoque
duæ lineæ rectæ BC, DE. Oportet per
A punctum ducere lineam rectam secan-
tem BC, DE ad angulos æquales. Si igitur
fuerint parallelæ BC, DE demittatur ab
A puncto perpendicularis utriusvis ipsa-
rum, utriusvis secabitur ad angulos æqua-
les, nempe rectos.

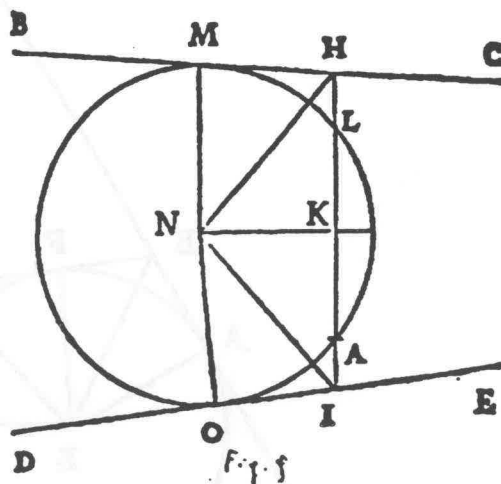
Si non sint parallelz, conve
niant igitur in F puncto,
& secetur angulus DFB
bisariam à recta, quam
AG secet in G, ad angu-
los rectos, rectas vero BF,
DF in H, I. Triangula
igitur HGF, IGF lateri-
bus & angulis sunt æqua-
lia, sique adeo anguli qui
ad H, I, æquales. Dato
igitur A puncto per ipsum
ducta est linea HI secans D
datas BF, DF in H, I ad
angulos æquales. Quod
faciendum erat.



PROBLEMA IV.

Datis duabus lineis rectis, & puncto, per datum punctum circum-
describere, quem datæ duæ lineæ rectæ contingant.

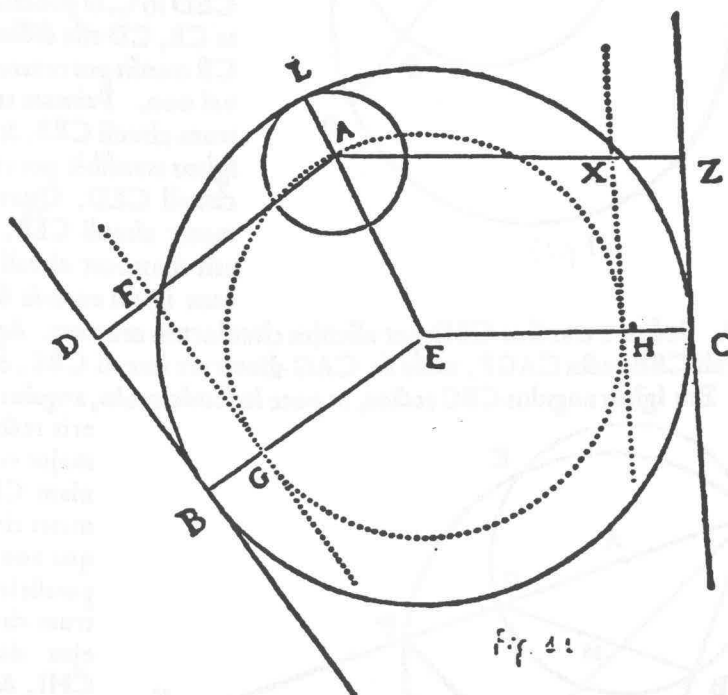
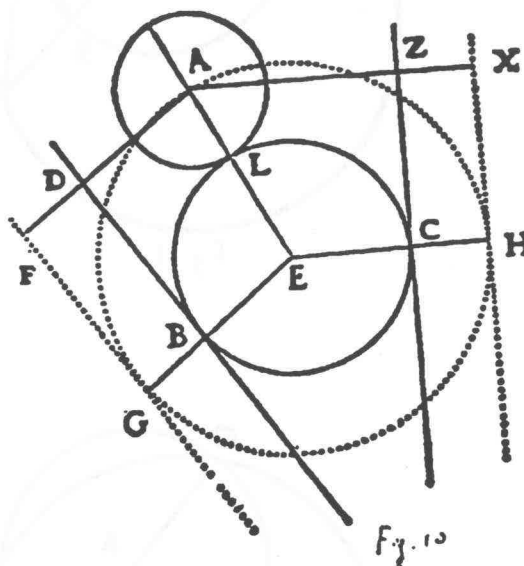
Sit datum A punctum, datæ quoque duæ lineæ rectæ BC, DE. Oportet per A punctum circulum describere, quem BC, DE contingant. Per A ducatur HI secans BC, DE ad angulos æquales, eaque secetur bifariam in K, & ipsi AK ponatur æqualis KL, & per A, L puncta describatur circulus, quem altera datarum BC, vel DE contingat. Dico eundem à reliqua contingi. Contactus enim à BC, sit M, & circuli centrum N, à quo ducatur NO, secans DE normaliter in O, & agatur NK. Quoniam igitur secatur AL bifariam in K ab ea quæ est ex centro, ideo angulus NKI est rectus. Connectantur autem NH, NI. Æquales igitur sunt NH, NI, quoniam perpendicularum triangulis rectangulis NKH, NKI commune NK. Sed & basis HK basi KI constructa est æqualis. Ergo æquales quoque anguli NHM, NIO, cum sint residui post ablationem æqualium NHL, NIL ex æqualibus constructis MHK, OIK. Similia sunt itaq; triangula rectangula NHM, NIO. ac etiam æqualia cum sint æquales ipsorum hypotenuse. Est autem MN semidiameter, erit itaque NO quoque semidiameter, quam cum secet DI ad rectos angulos, ideo DI quoque circulum ALM continget. Ergo descriptus est circulus AOM per A punctum, quem datæ BC, DE in M, O contingunt. Quod erat faciendum.



P R O B L E M A V.

Dato circulo, & duabus lineis describere circulum quem datus circulus; & datæ duæ lineæ rectæ contingant.

Sit datus circulus, cujus A centrum, datæ quoque rectæ lineæ ZC, DB. Oportet describere circulum, quem circulus, cujus A centrum, & rectæ lineæ ZC, DB contingant. Cadant in ZC, DB perpendiculares AZ, AD, quæ secantur ad easdem partes in punctis X, F posita unaquaque rectarum ZX, DF æqualibus semidiametro circuli, cujus A centrum, & per X, F agantur XH, FG ipsi ZC, DB parallelæ, & per ipsum A signum describatur circulus positivus AGH, quem actæ XH, FG contingant, & sit illius circuli centrum E. Et manifestum est fore E centrum circuli, quem datus circulus, cujus A centrum, &



datæ rectæ CZ, DB contingant, ob æqualia æqualibus addita, vel adempta undecunque intervalla. Itaque cadat ad angulos rectos EC. Erit ea semidiameter circuli quæ sit.

L E M M A I.

Si duo circuli se mutuo secant, à puncto autem sectionis ducatur per centrum unius circulorum linea recta, ea non transibit per alterius circuli centrum.

Duo

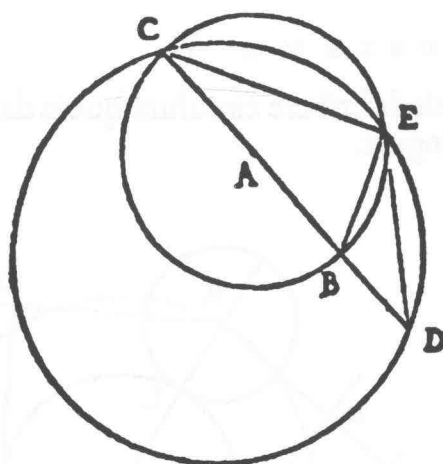


Fig. 12

Duo circuli CEB, CED se se mutuo secant, sectio igitur erit in duobus punctis. Sint illa C, E. & sit A centrum circuli CEB, & agatur diameter ipsius CAB secans circulum CED in D. Dico rectam CABD non transire per centrum circuli CED. Inquantur enim EC, EB, ED. angulus igitur CEB est rectus; utpote in semicirculo. Quare CED non erit rectus, sed recto major vel minor per angulum BED. Non est igitur CABD diameter circuli CED, atque ideo non transit per ejus centrum. Quod erat ostendendum.

Lemma II.

Si duo circuli se se mutuo secant, à puncto autem sectionis ducatur linea recta utrumque circulum secans, erunt dissimilia circulorum illorum segmenta.

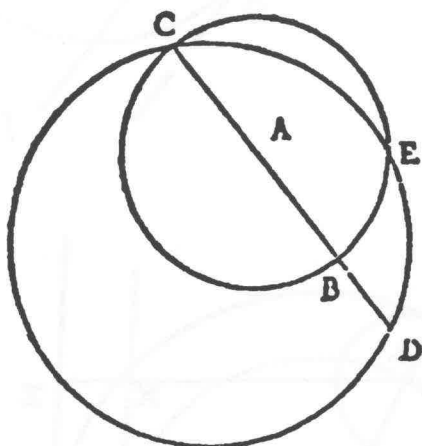


Fig. 13

Duo circuli CEB, CED se se mutuo secant in punctis C, E. Agatur vero linea recta CBD; secans circulum CEB in C, B; circulum vero CED in C, D punctis. Dico segmenta CB, CD esse dissimilia. Aut enim CB transit per centrum circuli CEB, vel non. Primum transeat per centrum circuli CEB, & sit illud A, non igitur transibit per centrum alterius circuli CED. Quare CB erit diameter circuli CEB, CD vero non erit diameter circuli CED. Non erunt igitur eo casu similia segmenta

CB, CD. Sed non transeat CBD per alicujus circulorum centrum. Agatur per A centrum circuli CBE recta CAGF, unde sit CAG diameter circuli CBE, & connectantur BG, DF. Erit igitur angulus CBG rectus, utpote in semicirculo, angulus vero CDF non

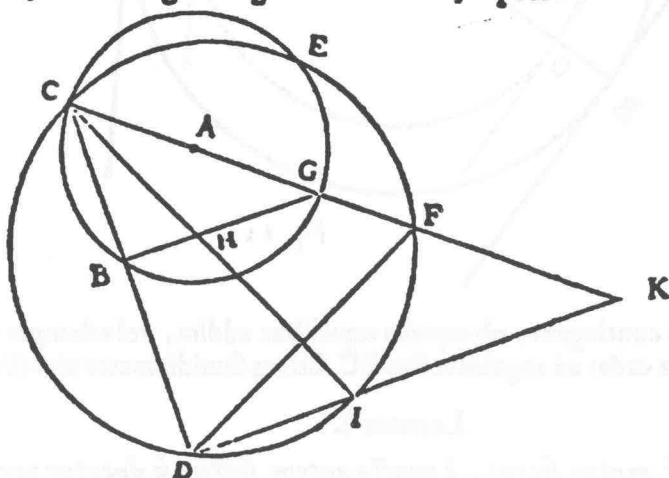


Fig. 14

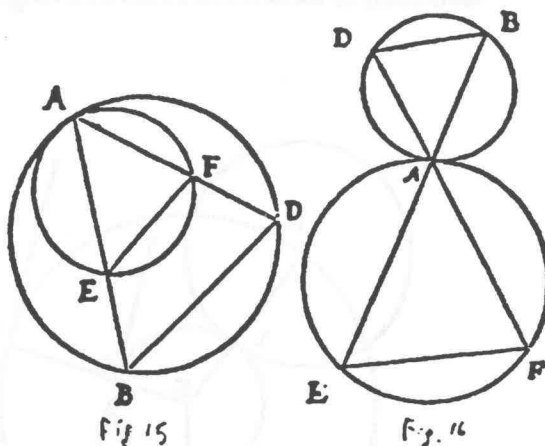
erit rectus, sed recto major vel minor, quoniam CF non erit diameter circuli CED. Itaque non erunt GB, DF parallelæ. Sit H centrum circuli CED, & ejus diameter agatur CHI, & juncta DI intercipiat CG in K. Erit igitur angulus CDI rectus, & ideo parallelæ erunt BG, DK. Unde erit CB ad CD, sicut CG ad CK, erunt autem CI, CK inæquales. Quare non

non erit CB ad CD, sicut CG ad CI, & ideo eo quoque casu dissimilia erunt segmenta CB, CD. Quod erat ostendendum.

Lemma III.

Si per crura trianguli agatur recta basi parallela, itaque duo construuntur sub eodem vertice similia triangula, qui circa triangulum unum describetur circulus tangetur in vertice communi à circulo qui circa triangulum alterum describetur.

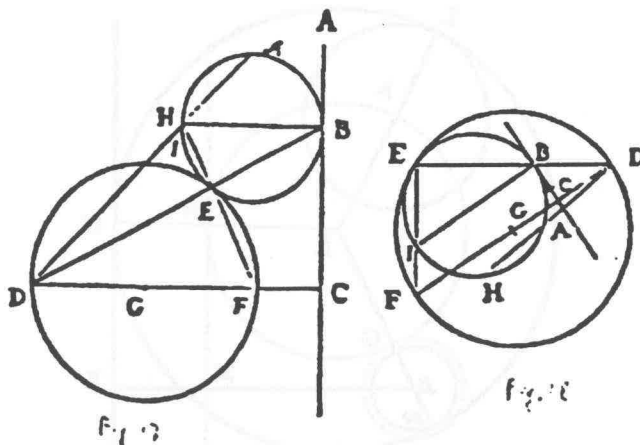
Sit triangulum ABD, ipsius autem crura AB, AD secet recta EF ipsi BD parallela, itaque duo constituuntur similia triangula ABD, AEF sub eodem A vertice. Ajo circulum circa triangulum ABD descriptum à circulo circa triangulum AEF descripto tangi in ipso A puncto. Describatur enim circa triangulum ABD circulus primus, & circa triangulum AEF circulus secundus. Illi igitur circuli sese mutuo secabunt in A vel sese tangent, sed non sese mutuo secant. Essent enim AE, AB segmenta dissimilia eorum, quorum sunt subtenses, circulorum. Sed sunt similia. Similia enim sunt triangula ABD, AEF. Itaque est ut AB ad AE, ita semidiameter circuli triangulum ABD circumscribentis ad semidiameter circuli triangulum AEF circumscribentis. Cum igitur non sese mutuo secant circuli ABD, AEF, sese contingunt in A. Quare circulus ABD à circulo AEF tangetur in A puncto. Quod erat ostendendum.



PROBLEMA VI.

Datis puncto, linea recta, & circulo, per datum punctum describere circulum, quem data linea recta & datus circulus contingant.

Sit datum A punctum, data quoque linea recta BC, ac datus denique circulus DEF. Oportet per A punctum circulum describere, quem recta linea BC, ac circulus DEF contingant. Ex G centro circuli DEF demittatur in BC perpendicularis DC, secans ex diametro circulum DEF in punctis D, F, & connectatur DA, quae ita secetur in H, ut quod sit sub DA, DH æquale sit ei quod sit sub DC, DF, & per puncta AH describatur circulus, quem recta contingat in B, & agatur DB secans circulum DEF in E, & connectatur FE. Rectus est igitur angulus DEF. Itaque in quadrilatero BEFC anguli oppositi duobus rectis sunt æ-



quales, rectus enim quoque est angulus BCF. Quare quod sit sub DB, DE æquale est ei quod sit sub DF, DC, id est ex constructione æquale ei quod sit sub DA, DH. Sunt igitur puncta AHEB in circulo. Sed E est in circulo DEF. Quare circulus DEF secat vel tangit

tangit in E circulum AHEB. Agatur autem BI diameter circuli. Quoniam is circulus tangitur à recta BC in B, erit angulus CBI rectus, atque adeo erunt IB, DC parallelæ, & cum jungetur IE fiet angulus IEB rectus, sicut est angulus DEF. Quare IE, EF coincidunt in eandem lineam rectam. Itaque duo similia triângula sunt DEF, BEI sub eodem vertice, & ideo circuli ea triângula circumscribentes sese mutuo contingunt in E, non etiam se-
cabunt. Igitur per A punctum descriptus est circulus BAE, quem recta BC in B, circulus vero DEF in E contingunt. Quod erat faciendum.

P R O B L E M A VII.

Datis duobus circulis, & linea recta, describere tertium circulum, quem duo dati, & data linea recta contingant.

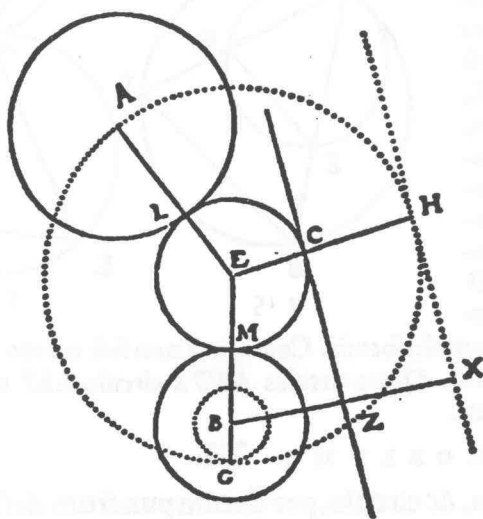


Fig. 19

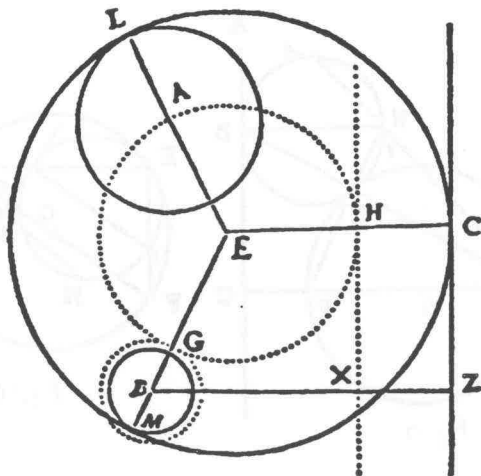


Fig. 20

Sint dati duo circuli, primus cujus A centrum, secundus cujus B, & data quoque linea recta CZ. Oportet describere tertium circulum quem circuli, quorum A, B centra, & recta CZ contingant. Cadat in rectam CZ perpendicularis BZ, & secetur in X, ut sit ZX æqualis semidiametro AL ad primū circulum pertinenti, & ipsi CZ agatur parallela HX, & centro B, intervallo BG, æquali adgregato vel differentie semidiametrorum primi & secundi circuli describatur circulus positivus, denique per A punctum describatur circulus AGH, quem positivus contingat in G, & linea recta HX in H. & sit ejus E centrum. & manifestum est idem E signum fore centrum circuli quem dati circuli, quorum A, B centra & data linea recta CZ contingant, ob æqualia ab æqualibus dempta undiquaque, vel addita undiquaque intervalla. Itaque demittatur in CZ datam perpendicularis EC, ea erit semidiameter circuli LMC, quem circuli, quorum A, B centra in punctis L, M & recta CZ in C contingant, habita ea, quam decebit, & opus exigit partium ratione. Itaque factum erit quod oportuit

Propter.

Sic autem habebitur ea quam decebit, opusve exigit, partium ratio.

I.

Ut tertium circulum duo dati cōtingant extra. Primus circulus, cujus A centrum erit major datorum

rum, Secundus, cujus B, minor, & erit BG differentia semidiametrorum primi & secundi, acta vero BX excedat datam CZ, cui est perpendicularis.

II.

Ve tertium circulum duo dati contingant intus. Rursus circulus, cujus A centrum erit major datorum, Secundus, cujus B, minor, & erit BG differentia semidiametrorum primi & secundi, acta vero BX deficiet à data CZ, cui est perpendicularis.

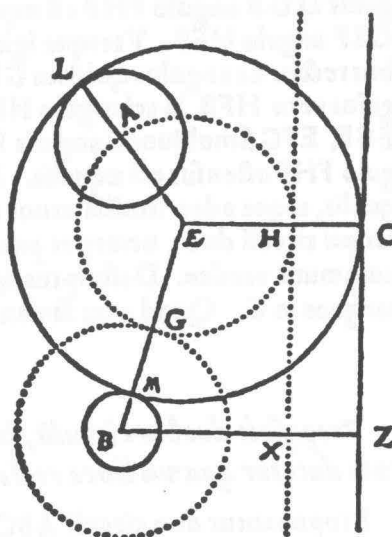


Fig. 22

III.

Fig. 22
 Ut tertium primus contingat intus
 alter extra, erit BG adgregatum se-
 midiametrorum primi & secundi, & acta BX deficiet à data CZ, cui est perpendicularis.

PROBLEMA VIII

Datis duobus punctis, & circulo, per data duo puncta circulum describere, qui datum contingat.

Sint data duo puncta B, D, ac praeterea circulus EFG, cujus A centrum. Oportet per

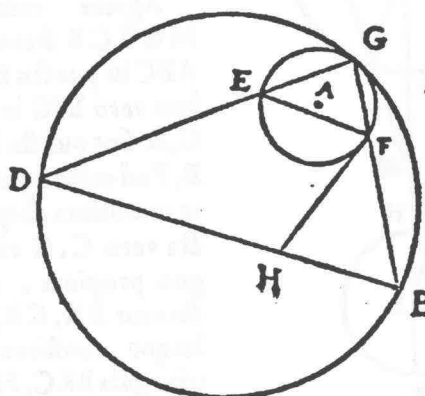


Fig. 3:

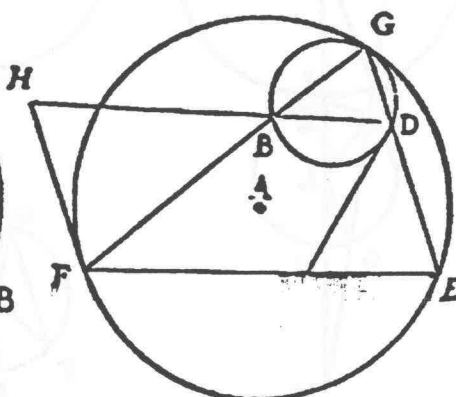
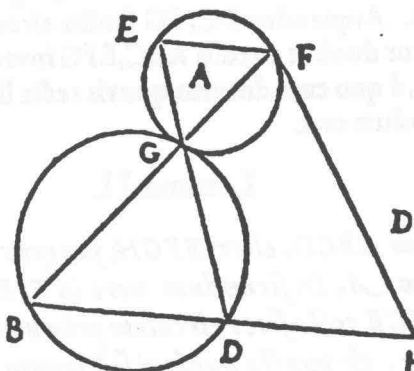
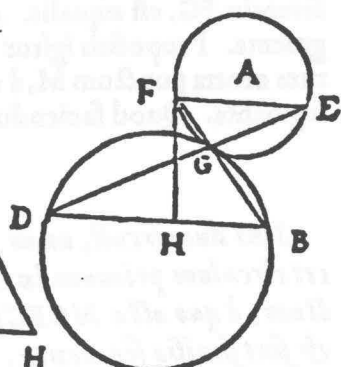


Fig. 33

puncta B, D circumulum describere, qui circumulum GEF contingat. Secetur ita BD in H, ut quod sit sub BD, BH æquale sit differentiz quadratorum AB, AF, & circumulum EGF tan-
gat recta HF, & conne-
ctatur BF secans circuli-
culum EFG tum in F tum
in G, & connectatur
quoq; DG, secans eun-
dem circumulum in E, &
per puncta GBD descri-
batur circumulum. Quo-
niam rectangulum sub
BD, BH constructum
est æquale differentiz
quadratorum AB, AF,



i i .



562

cui

cui etiam æquale est id quod fit sub BG, BF, ideo puncta D, G, F, H sunt in circulo, & angulus DGB angulo FHB est æqualis, ac angulus GDB id est connectendo EF angulus GEF angulo HFB. Vterque igitur, sive angulus GEF, sive angulus HFB dematur à duobus rectis. Et angulus quidem GEF in triangulo GEF, relinquet angulos EGF, EFG; angulus vero HFB in triangulo HFB, relinquet angulos FHB, FBH. Erunt igitur anguli EGF, EFG simul juncti angulis FHB, FBH simul junctis æquales. Sed angulus EGF angulo FHB ostensus est æqualis. Itaque angulus reliquus EFG angulo reliquo FBH erit æqualis, atque adeo similia erunt triangula GDB, GEF, sub eodem G vertice. Unde descripti circuli duo, unus per puncta GEF, alter per puncta GDB, sese contingunt in G communi vertice. Descriptus igitur est per D, B puncta circulus DBG, circulum GEF tangens in G. Quod erat faciendum.

Lemma I.

Propositis duobus circulis, invenire punctum in jungente ipsorum centra, à quo cum ducetur quavis linea recta ipsos circulos secans, similia erunt segmenta.

Proponantur duo circuli ABC, EFG, & sit primum centrum K, secundi L, & jungatur KL. Oportet in KL invenire punctum à quo cum ducetur quavis linea recta circulos

ABC, EFG secans, similia erunt segmenta. Secetur KL, vel producat in M, ut sit KM ad LM, sicut AK ad EL. Dico cum à puncto M ducetur linea recta circulos ABC, EFG secans, similia fore ipsorum segmenta.

Agatur enim quavis MGF CB secans circulum ABC in punctis B, C, circulum vero EFG in punctis F, G, & sint puncta sectionum B, F ad easdem partes, ut pote remotiora ab ipso M, puncta vero C, G eidem M signo propiora, & connectantur BK, CK, FL, LG. Itaque constituuntur duo triangula BKC, FLG. Quoniam igitur est KM ad LM ex constructione, sicut KB ad FL, erunt BK, FL paralle-

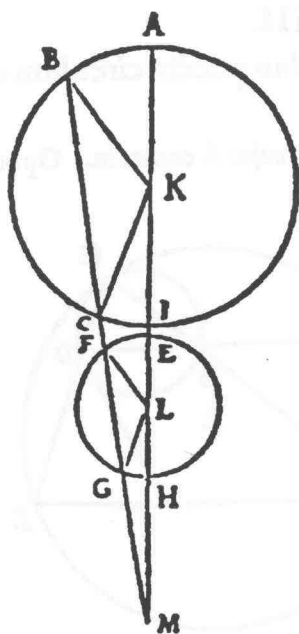


Fig. 16

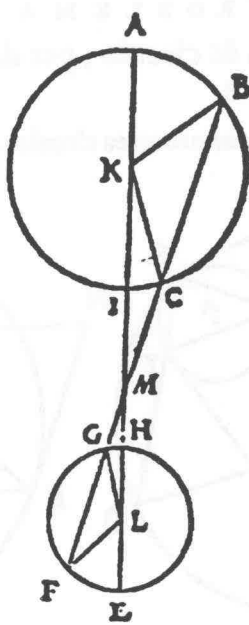


Fig. 17

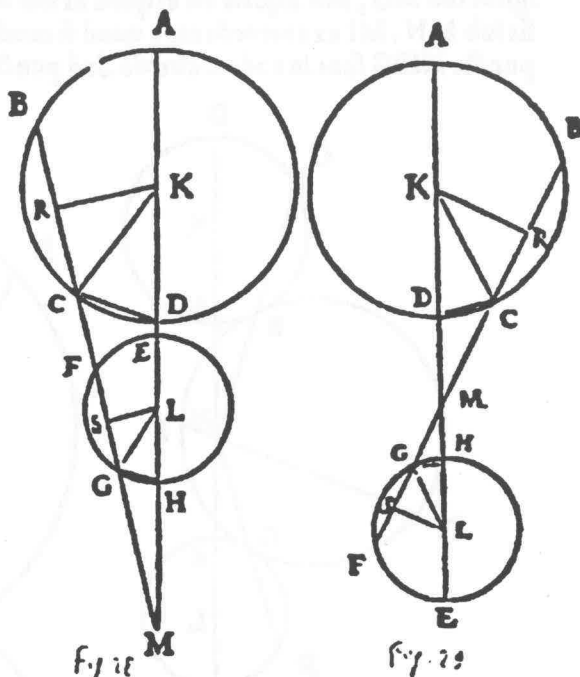
la, & angulus KBC angulo LFG æqualis. Æque, quoniam KM ad LM ex constructione est, sicut KC ad LG, erunt KC, LG parallelae, & angulus KCB angulo LGF æqualis. Quare & angulus reliquus BKC, id est circumferentia BC, angulo reliquo FLG, id est circumferentia FG, est æqualis. Atque adeo BC, FG similia circolorum, ad quos pertinent, segmenta. Propositis igitur duobus circulis ABC, EFG inventum est in KL jungente ipsorum centra punctum M, à quo cum ducetur quavis recta linea ipsos secans, similia erunt segmenta. Quod faciendum erat.

Lemma II.

Sint duo circuli, unus ABCD, alter EFGH; jungens autem eorum centra KL secet circulum primum in A, D; secundum vero in E, H; & in ea sumatur M punctum, à quo acta MGFCB recta secet circulum primum in B, C, secundum in F, G, & sint similia segmenta, & puncta quidem sectionum A, B sint remotiora ipsis C, D, &

D, & puncta F, E ipsius C, H. Ajo id quod fit sub MG, MB aequari id quod fit sub MH, MA.

Cadant enim ex centrīs K, L in subtenfas BC, FG perpendicularē KR, LS, & connectantur semidiametri KC, LG. Quoniam BC, FG proponuntur similia suorum circulorum segmenta, RC vero & SG sunt semisses subtenfarum BC, FG, ideo similia sunt triangula KRC, LSG, & parallelz KC, LG; atque adeo anguli CKD, GLH similes, ac denique subtenfz eorum amplitudini CD, GH parallelz. Quare est ut MD ad MC, ita MH ad MG. Sed MD ad MC est, ut MB ad MA. Et ideo quod fit sub MB, MG ei quod fit sub MA, MH est æquale.



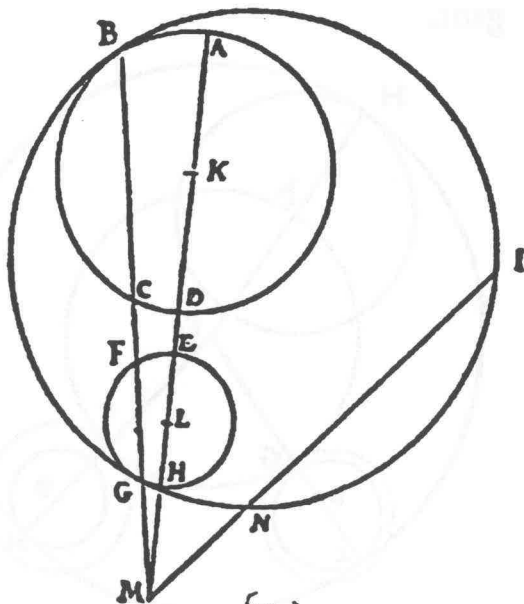
Isdem positis, Ajo eadem ratione id quod fit sub ME, MD, aequari ei quod fit sub MF, MC.

Quoniam enim EFGH est in circulo, ideo est MH ad MG, sicut MF ad ME. Sed MH ad MG est, sicut MD ad MC. Ergo est MF ad ME, sicut MD ad MC, & ideo quod fit sub ME, MD ei quod fit sub MF, MC est æquale.

PROBLEMA IX.

Datis duobus circulis, & puncto, per datum punctum circulum describere quem duo dati circuli contingant.

Sint dati duo circuli, unus ABCD, alter EFGH, & præterea datum I punctum. Oportet per I punctum circulum describere quem circuli ABCD, EFGH contingant. Circulorum ABCD, EFGH jungantur centra K, L, & in KL inveniatur ex antecedente, quod primo loco præmissum est, Lemmate, M punctum, à quo, cum ducentur rectz linez secantes circulos ABCD, EFGH, similia sint segmenta. Ipsa vero KL secet ex diametro circulum ABCD in signis A, D, circulum vero EFGH in signis E, H, & ita secetur MI in N, ut quod fit sub MI, MN æquale sit ei quod fit sub MH, MA, & per I, N puncta describatur circulus qui à circulo ABCD tangatur. Idem jam docuit Problema octavum. Et sit contactus in B, & con-



Sf 3

neqta-

ne datur BM secans circulum ABCD in B, C, circulum vero EFGH in F, G. Quod fit igitur sub MG, MB æquale est ei quod fit sub MH, MA, id est ex constructione ei quod fit sub MN, MI ex antecedente, quod secundo loco præmissum est, Lemmate. Quare puncta NIBG sunt in eodem circulo. Sed punctum G est quoque in circulo EFGH. Qua-

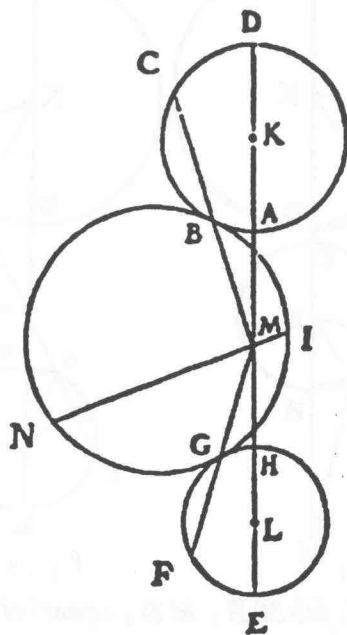


Fig. 31

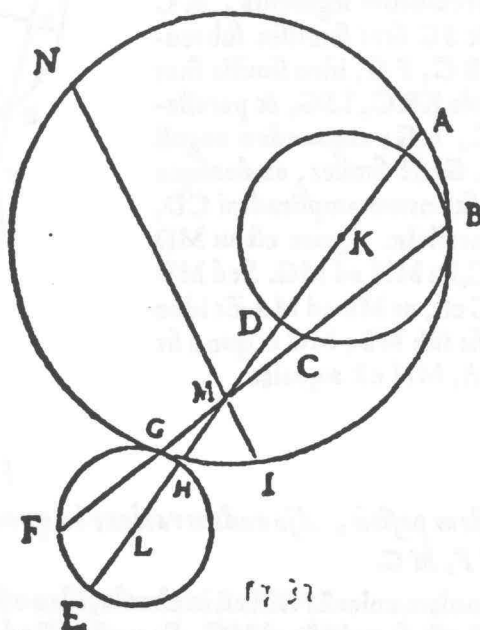


Fig. 32

re circuli EFGH, IBGN sese mutuo secant, vel contingunt in G. At vero sese contingunt circuli BNI, BCD in B ex constructione. Unde segmentum BG simile est segmento BC. Segmentum autem FG simile est segmento BC. Itaque segmentum FG erit simile segmento BG. Quare circuli EFG, IBG sese contingunt in G, non etiam sese mutuo secabunt. Descriptus est igitur per I punctum circulus IBG, quem circuli ABD, EGH contingunt in B, G. Quod erat faciendum.

PROBLEMA X.

Datis tribus circulis, describere quartum circulum quem illi contingant.

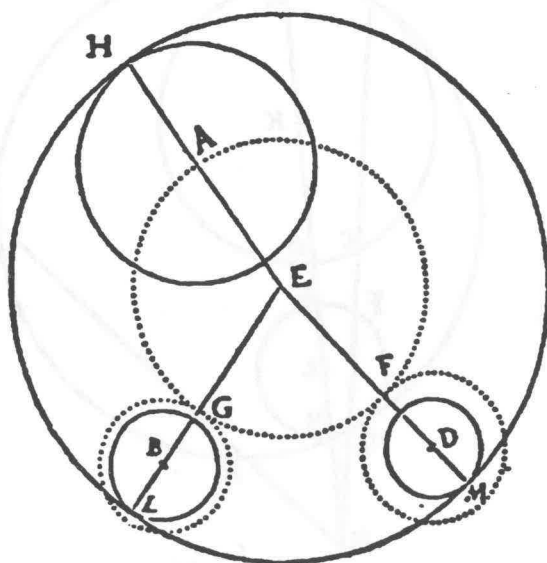


Fig. 33

Sint dati tres circuli quorum primi centrum A, secundi B, tertii D. Oportet describere circulum quartum quem illi contingant. Centro D intervallo DF differentia vel aggregato semidiametrorum primi & tertii, describatur circulus positivus unus. Et centro B, intervallo BG, differentia vel aggregato semidiametrorum circuli primi & secundi, describatur positivus alter. Denique per A punctum describatur circulus AGF quem positivi contingant in punctis G, F, & sit circuli illius centrum E. Et manifestum est ipsum E signum fore quoque centrum circuli, quem dati contingant, ob æqualia æqualibus dempta undique,

quaque, vel undiquaque addita intervallo. Itaque ducatur ab eo puncto Erecta per centrum alicujus datorum ad ipsius dati circumferentiam habita ea quam decebit opus-ve exigit, partium in positionibus ratione, & intervallo EH describatur circulus HLM. factum erit quod oportuit.

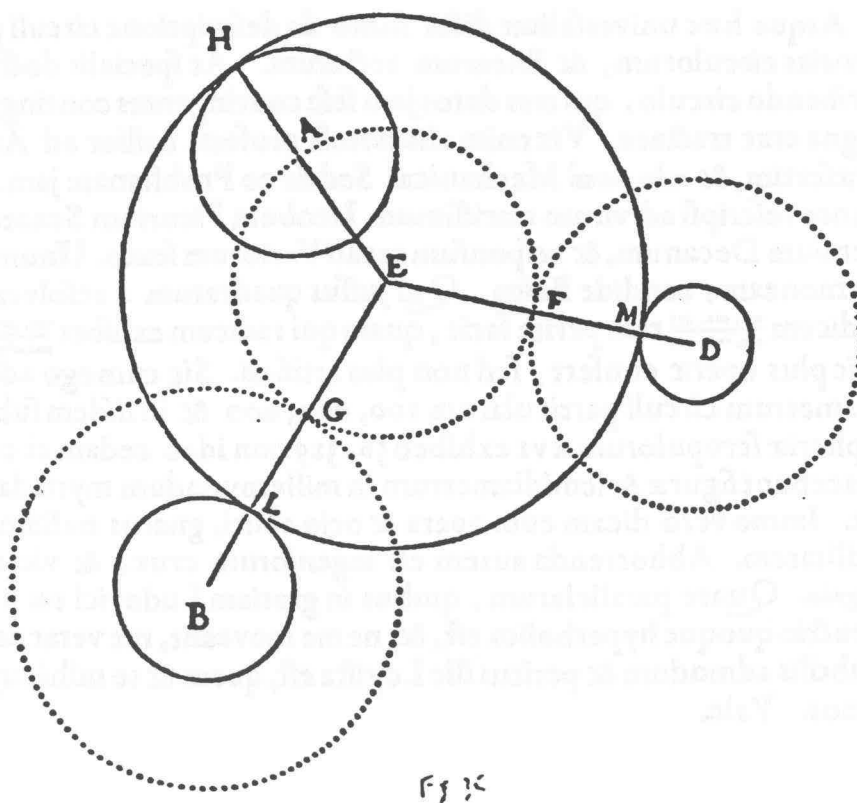
Sic autem habebitur ea, quam decebit opus-ve exigit partium ratio.

I.

Vt quartus à datis tangatur intrus. Sit A centrum maximi datorum, B medii, D minimi, DF differentia qua semidiameter maximi superat semidiametrum minimi, BG differentia qua semidiameter maximi superat semidiametrum medii, & per A punctum describatur circulus quem posititii extra contingant.

II.

Vt quartus à datis tangatur extra. Sit rursus A centrum maximi, B medii, D minimi, DF differentia qua semidiameter maximi superat semidiametrum minimi, BG differen-



tia qua semidiameter maximi superat semidiametrum medii, & per A punctum describatur circulus quem posititii intrus contingant.

III. Vt

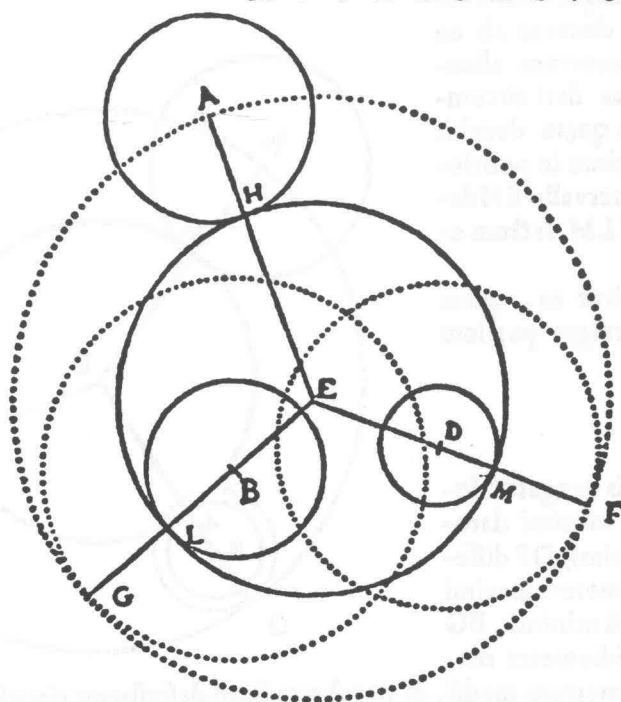


Fig. 36

III.

Vt quartus à primo tangatur intus, & à secundo & tertio extra. Sit DF adgregatum semidiametrorum primi & tertii, BG adgregatum semidiametrorum primi & secundi. Et per A punctum describatur circulus quem posititii extra contingant.

IV.

Vt quartus à primo tangatur extra, & à secundo & tertio intus. Sit rursus DF adgregatum se-

midiametrorum primi & tertii. BG adgregatum semidiametrorum primi & secundi, & per A punctum describatur circulus, quem posititii intus contingant.

Atque hæc universaliter dicta sunt de descriptione circuli per contingencias circularum, & linearum rectarum. At specialis doctrina de describendo circulo, qui tres datos jam sese contingentes contingat, speciali digna erat tractatu. Vix enim alia potest proferri utilior ad Astronomica præsertim, & *αἰνυμένη* Mechanica. Sed de eo Problemate jam ante plures annos rescripsi ad virum clarissimum Iacobum Fleurium Senatorum Parisiensium Decanum, & responsum retuli Variorum sexto. Unum est de quo te moneam, candide Belga. Qui iussus quadrarum 2. resolvere, exhibet radicem $\frac{101.431.316.317.309.101}{100,000,000,000,000,000}$ tam perite facit, quam qui radicem exhibet $\frac{101.431.316.317.309.101}{100,000,000,000,000,000}$. Hic plus operæ confert, sed non plus artificii. Sic cum ego adsumo semidiametrum circuli particularum 100,000,000 & in iisdem subtenfam peripheriæ scrupulorum XVI exhibeo 58,329 non ideo cedam ei cui vastiores placebunt figuræ & semidiametrum in mille myriadam myriadas protraxerit. Immo vero dicam cum opera & ocio abuti, gnarus nullam inde nasci utilitatem. Abhorrenda autem est ingeniorum crux, & vitanda *ματαιότης*. Quare parallelarum, quibus in gratiam Ludovici tui uteris, constructio quoque hyperbolica est, & ne me moveant, me vetat candor tuus. Subtilis admodum & peritus ille Logista est, quem & te mihi cupio amicissimos. Vale.

APOLLONIUS GALLUS**Traduction française**

L'APOLLONIUS français de François VIETE

ou

la résurrection de la géométrie sur les contacts

d'APOLLONIUS de PERGA

dédié à l'éminent belge ADRIEN ROMAIN

Eminent Adrien, j'ai proposé aux amateurs de mathématiques de traiter par une méthode géométrique et non par une méthode mécanique ce problème d'Apollonius du tracé d'un cercle que touchent trois cercles donnés. Tant qu'on touche le cercle par des hyperboles, on n'aborde pas le problème avec doigté. En effet on ne peut pas tracer une hyperbole par la géométrie *κατ'ἐπιστημονικὸν λόγον*¹ (au sens savant du terme). Ménechme a doublé le cube par la parabole, Nicomède par la conchoïde, pour autant le cube a-t-il été doublé géométriquement ? Dinostrate a quarré le cercle grâce à sa spirale irrégulière et Archimède grâce à sa spirale régulière, pour autant le cercle a-t-il été quarré géométriquement ? Personne n'appellera cela de la géométrie. Euclide et toute son école protesteraient. Ainsi, éminent Adrien, et, si tu me le permets, Apollonius belge, comme le problème que j'ai proposé est plan et que tu l'as résolu comme solide, pour cette raison, tu n'as pas assuré l'intersection des hyperboles dont tu as fait l'hypothèse pour les besoins de la cause et même maintenant tu ne peux pas le faire, puisque, si en fait les asymptotes sont parallèles, tes efforts seront vains. Par ailleurs les anciens ont toujours redouté de décrire les sections coniques dans le plan. Abandonne donc les lignes mixtes et apprend volontiers maintenant d'un Apollonius ressuscité aux bords de l'Océan aquitain *τεχνικὴν καὶ ἐπιστημονικὴν χειρουργίαν*² (une technique ingénieuse et savante)

¹en grec dans le texte de Viète

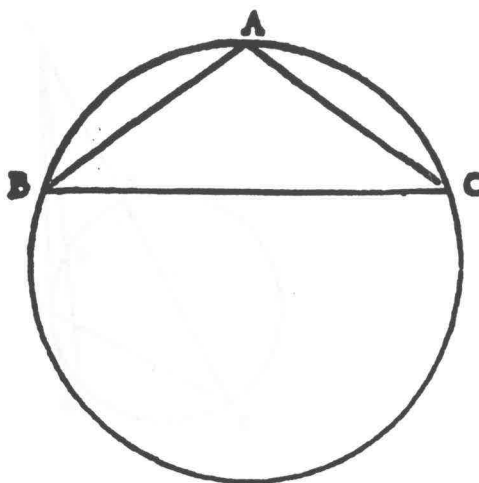
²voir remarque précédente

*Pappus a ramené les problèmes sur les contacts d'Apollonius de Perga à dix :
je les résoudrai donc un à un selon l'ordre qui paraîtra le plus opportun.*

PROBLEME 1

Décrire un cercle qui passe par trois points donnés; il faut par ailleurs que ces points ne soient pas tous les trois sur une même droite.

Figure 1



Soit trois points A,B,C donnés. Il faut tracer un cercle passant par les points A, B, C.

Joignons les points A,B,C. Comme en vertu de la réserve introduite dans le problème, ils ne sont pas alignés, ces droites formeront un triangle dont les sommets seront les points A,B,C. Aussi, circonscrivons un cercle au triangle ABC, chose que les Eléments³ enseignent. Donc par les points A, B, C a été tracé un cercle ABC. Ce qu'il fallait faire.

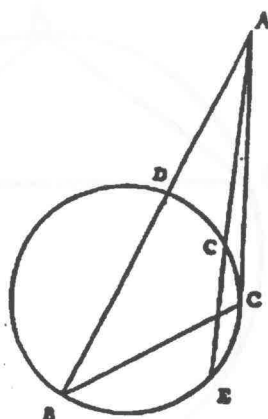
LEMME pour la suite.

Soit un triangle ABC dont le côté AB est coupé en D de manière que le rectangle [construit] sur AB et AD soit équivalent au carré [construit] sur AC.

³Les éléments d'Euclide

Décrivons le cercle passant par les points B,D,C. Je dis que la droite AC est tangente au cercle.

Figure 2



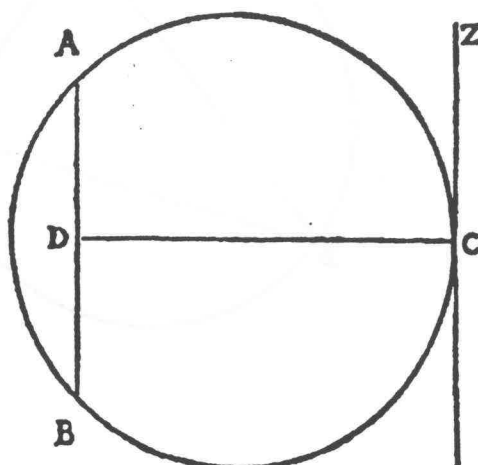
En effet, si cela peut se faire, que le cercle ne soit pas touché par la droite AC. Donc elle le coupera. Leur intersection sera formée de deux points. Soit E l'un des points. [Le rectangle construit]⁴ sur AB et AD sera égal au [rectangle construit] sur AE et AC. Or, ceci est absurde, puisque le premier de ces rectangles est par construction égal au carré [construit] sur AC lequel ne peut être égal au [rectangle construit] sur AE et AC. Or, AE et AC sont inégaux. La droite AC ne sera donc pas sécante au cercle BDC : elle lui sera tangente. Ce qu'il fallait démontrer.

⁴ Viète écrit en fait : « quod sub AD, AB » ; pour une meilleure compréhension, nous avons ajouté dans tous les cas : « le rectangle construit sur ». Ritter, dans sa traduction de 1868 a traduit : « ce qui est fait sous AD, AB. »

PROBLEME 2

Etant donné deux points et une ligne droite, décrire par ces deux points un cercle auquel soit tangente la droite donnée.

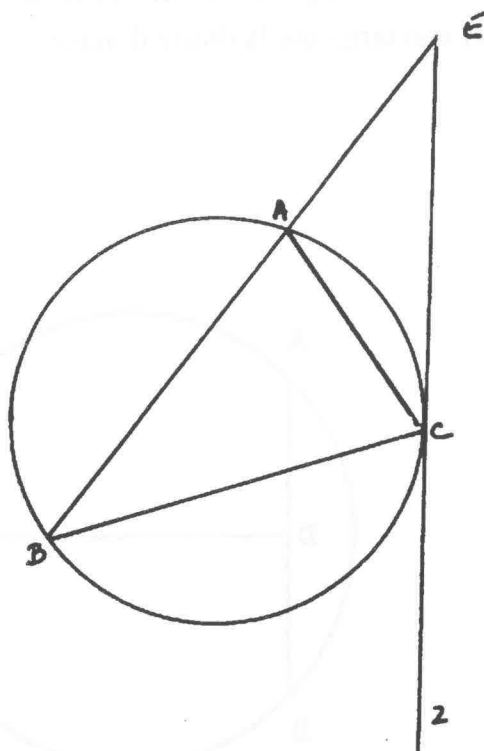
Figure 3



Soit A et B les deux points donnés et CZ la ligne droite aussi donnée. Il faut tracer par les points A et B un cercle auquel soit tangente la droite CZ.

Joignons A et B. Si la droite AB est parallèle à CZ, AB sera coupé en deux parties égales perpendiculairement au point D par une droite qui coupe CZ en C. D'autre part, comme est décrit un cercle par les points A, B, C, puisque CZ est parallèle à AB, la droite CZ aussi sera coupée en C par DC selon un angle droit. Aussi la droite CZ est tangente au cercle ABC au point C.

Figure 4

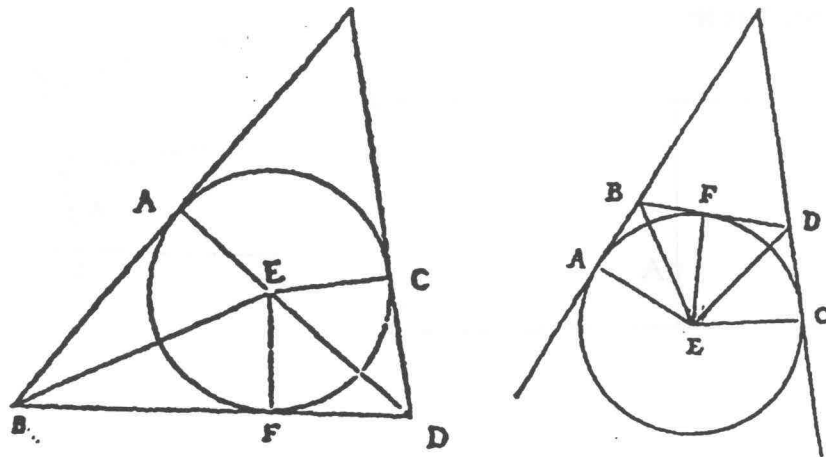


Si AB n'est pas parallèle à CZ , ces deux droites se rencontreront en E . D'autre part EZ sera coupé en C de manière que le rectangle [construit] sur EB et EA soit égal au carré [construit] sur EC . Traçons un cercle par les points A, B, C . La droite ECZ lui sera tangente en vertu du lemme précédent. Donc, dans tous les cas, par les points A et B on fait passer un cercle ABC auquel la droite CZ est tangente au point C . Ce qu'il fallait trouver.

PROBLEME 3

Etant donné trois droites, tracer un cercle auquel chacune soit tangente. Il faut par ailleurs que les droites données ne soient pas parallèles.

Figures 5 et 6



Soit trois droites données AB, CD, BD . D'autre part BD n'est parallèle à aucune des deux autres en vertu de la réserve énoncée dans le problème. Par conséquent, elle les rencontrera aux points B et D . Il faut tracer un cercle auquel les trois droites AB, CD et BD soient tangentes.

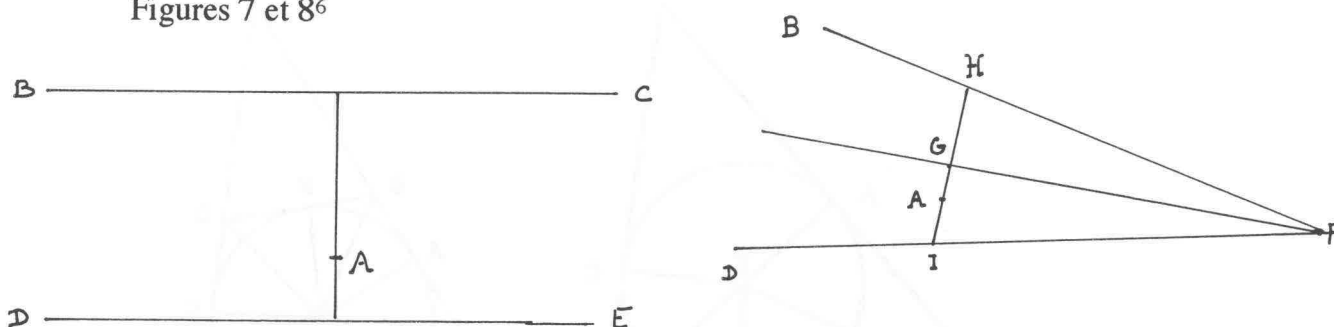
Coupons les deux angles ABD et CDB en deux parties égales par des droites concourant en E ; soient donc BE et DE . Abaissons sur AB, CD et BD les perpendiculaires EA, EC et EF . Celles-ci seront donc égales. En effet les triangles rectangles EAB et EFB sont semblables par construction et ils ont EB pour hypoténuse commune. Donc la hauteur EA sera égale à la hauteur EF . On démontrera de la même manière que EF est égale à EC . Décrivons donc à partir de

E comme centre et avec EA ou EF ou EC pour rayon⁵ le cercle AFC. Nous aurons donc décrit un cercle AFC auquel sont tangentes les trois droites AB, BD et DC aux points A, F et C. Ce qu'il fallait faire.

LEMME

Par un point donné tracer une droite qui coupe deux droites données sous des angles égaux.

Figures 7 et 8⁶



Soit A un point donné, BC et DE deux droites données. Il faut mener par le point A une droite qui coupe BC et DE sous des angles égaux.

Par conséquent, si les droites BC et DE sont parallèles, on mènera par le point A, à l'une des deux droites indifféremment, une perpendiculaire qui coupera celle-ci selon des angles égaux, c'est à dire droits.

Si elles ne sont pas parallèles, elles se rencontreront. Soit donc F leur point de rencontre. Partageons l'angle BFD en deux parties égales par une droite coupée perpendiculairement⁷ en G par AG, et qui coupe BF et DF en H et I. Les triangles HGF et IGF sont donc égaux par leurs côtés et par leurs angles et ainsi les angles en H et en I sont égaux. Donc par le point A donné on a tracé une ligne

⁵ Nous avons traduit ici « intervallo » par rayon ; plus loin, « semi diameter » aussi, dans le but de rendre le texte lisible facilement. le texte latin étant accessible au lecteur qui le désire.

⁶ La figure 8 présentée dans l'ouvrage qui m'a servi de référence était inexacte. Je la rétablis ici.

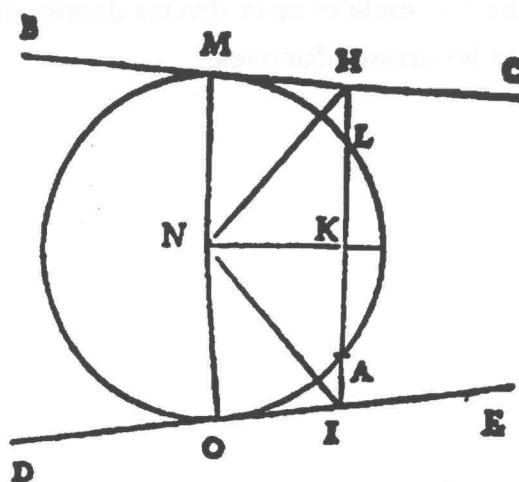
⁷ Dans le même souci que précédemment, nous avons traduit « ad rectos angulos » par « perpendiculairement ».

droite HI coupant les droites données BF et DF en H et en I selon des angles égaux. Ce qu'il fallait faire.

PROBLEME 4

Etant donné deux droites et un point, faire passer par le point donné un cercle auquel soit tangentes deux droites données.

Figure 9

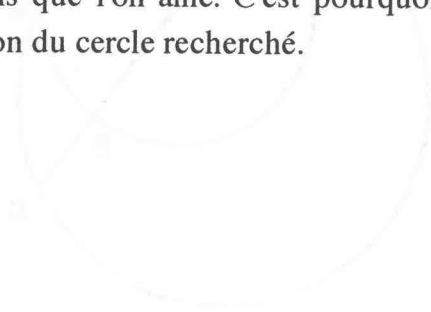


Soit un point A donné et deux droites données BC et DE. Il faut faire passer par le point A un cercle auquel seront tangentes les deux droites BC et DE. Par le point A menons la droite HI coupant les deux droites BC et DE sous des angles égaux. Partageons cette droite en deux parties égales par K et sur AK construisons KL qui lui sera égal. Par les points A et L, décrivons un cercle auquel est tangente l'une quelconque des deux droites BC ou DE. Je dis que l'autre droite sera aussi tangente au même cercle.

Supposons donc que M soit le point de contact de BC [au cercle] et soit N son centre. Abaissons une perpendiculaire NO en O sur DE et traçons NK. Comme AL a été coupé en deux parties égales en K par la droite qui part du centre du cercle, l'angle NKI est donc droit. Joignons NH et NI : NH et NI sont égales, puisque la perpendiculaire NK est la hauteur commune aux deux triangles rectangles. Mais par construction la base KI est égale à la base KH. Les angles NHM et NIO sont donc aussi égaux, puisqu'ils s'obtiennent en enlevant les angles égaux NHL et

Soit un cercle donné dont le centre est A et deux droites données ZC et DB. Il faut tracer un cercle auquel sont tangents le cercle de centre A et les droites ZC et DB.

Abaïssons sur ZC et DB les perpendiculaires AZ et AD qui seront partagées selon des segments identiques par les points X et F, étant posé que chacune des droites ZX et DF est égale au rayon du cercle de centre A. Puis, par X et F, traçons XH et FG parallèles à ZC et DB et par le point⁸ A faisons passer un cercle auxiliaire AGH, auquel sont tangentes les droites XH et FG. Soit E le centre de ce cercle. Il est évident que E sera aussi le centre d'un cercle auquel sont tangents le cercle de centre A et les droites données CZ et DB, puisque des grandeurs égales sont ou ajoutées ou retranchées à des grandeurs égales, dans quelque sens que l'on aille. C'est pourquoi EC est une perpendiculaire. Il sera donc le rayon du cercle recherché.

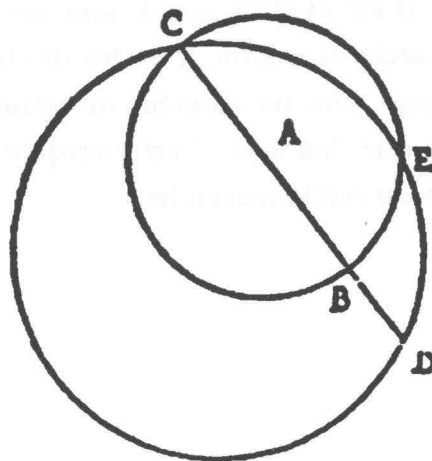


⁸ Viète utilise le mot « signum ».

LEMME 1

Si deux cercles sont mutuellement sécants et que nous menons à partir d'un de leurs points d'intersection une droite passant par le centre d'un des cercles, cette ligne ne passera pas par le centre du second cercle.

Figure 12



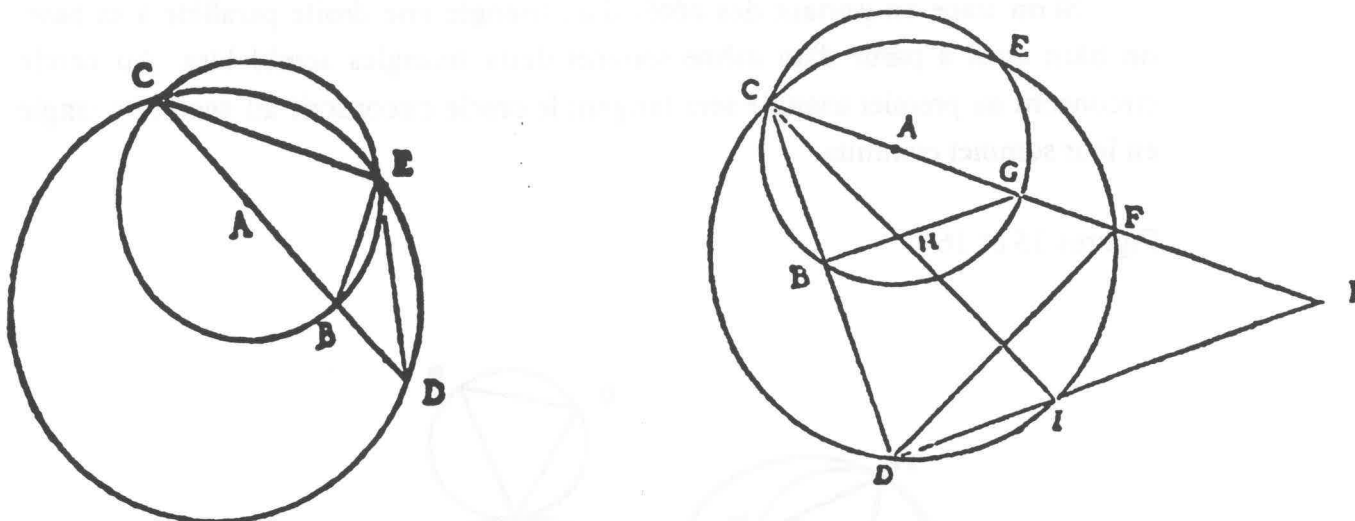
Deux cercles CEB et CED sont mutuellement sécants; leur intersection se fera donc en deux points. Soit C et E ces deux points et A le centre du cercle CEB. Traçons son diamètre CAB qui coupe le cercle CED en D. Je dis que la droite CABD ne passe pas par le centre du cercle CED.

Joignons en effet EC, EB, ED, l'angle CEB sera donc droit comme il est logique dans un demi-cercle. Aussi CED ne sera pas droit mais plus grand ou plus petit qu'un droit à cause de l'angle BED. CABD n'est donc pas le diamètre du cercle CED et ainsi ne passe pas par son centre. Ce qu'il fallait montrer.

LEMME 2

Si deux cercles sont sécants et que d'un de leurs points d'intersection nous traçons une droite coupant les deux cercles, les segments de ces cercles seront dissemblables.

Figures 13 et 14



Deux cercles CEB et CED se coupent aux points C et E. Menons la droite CBD qui coupe le cercle CEB en C et B et le cercle CED en C et D. Je dis que les segments [circulaires] CB et CD sont dissemblables.

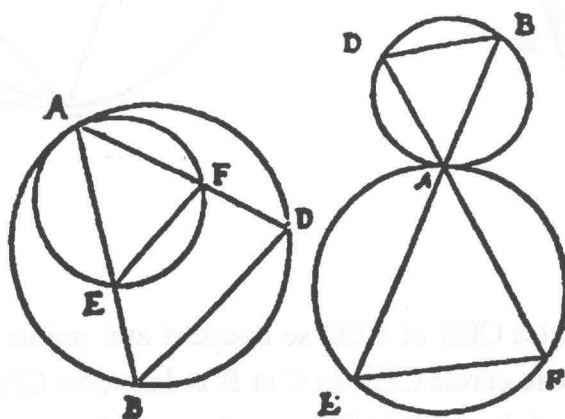
En effet ou CB passe par le centre du cercle CEB ou non. D'abord, si elle passe par le centre du cercle CEB (soit A ce centre), elle ne passera pas par le centre du second cercle CED. CB sera ainsi le diamètre du cercle CEB mais CD ne sera pas le diamètre du cercle CED. Dans ce cas les segments de cercle CB et CD ne seront pas semblables. Mais si CBD ne passe pas par le centre de l'un de ces cercles, traçons par A, centre du cercle CBE, la droite CAGF, CAG étant le diamètre du cercle CBE, et joignons BG et DF. L'angle CBG sera donc droit, comme il est logique dans un demi-cercle, et l'angle CDF ne sera pas droit, mais plus grand ou plus petit qu'un droit puisque CF ne sera pas un diamètre du cercle CED. Aussi GB et DF ne seront pas parallèles. Soit H le centre du cercle CED. Traçons son diamètre CHI et joignons DI qui coupera CG en K. L'angle CDI sera

donc droit et donc BG et DK seront parallèles. Aussi CB sera-t-il à CD comme CG à CK. Or CI et CK sont inégaux. C'est pourquoi CB ne sera pas à CD comme CG à CI. Et dans ce cas aussi les segments CB et CD seront donc dissemblables. Ce qu'il fallait montrer.

LEMME 3

Si on trace en partant des côtés d'un triangle une droite parallèle à sa base, on bâtit ainsi à partir d'un même sommet deux triangles semblables. Au cercle circonscrit au premier triangle sera tangent le cercle circonscrit au second triangle en leur sommet commun.

Figures 15 et 16



Soit un triangle ABD. Qu'une droite EF parallèle à BD coupe les côtés de ce triangle AB et AD. Ainsi sont construits⁹ deux triangles semblables ABD et AEF, ayant un même sommet A. Je dis qu'au cercle circonscrit au triangle ABD est tangent le cercle circonscrit au triangle AEF au point A.

Traçons en effet autour du triangle ABD un premier cercle et autour du triangle AEF un second cercle. Donc ou ces cercles seront sécants en A ou ils seront tangents en A; mais ils ne se coupent pas. En effet les segments [circulaires]

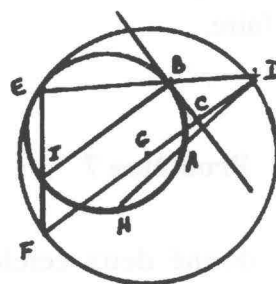
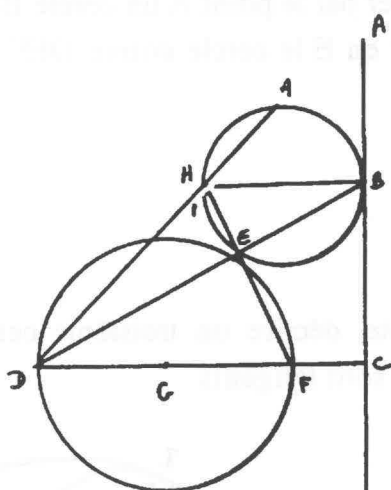
⁹ Viète utilise le verbe « constituere » ; les deux triangles sont donc ainsi « constitués ».

sous-tendus par AE et AB seraient dissemblables. Mais ils sont semblables, car les triangles ABD et AEF sont semblables. C'est pourquoi le rayon du cercle circonscrit au triangle ABD est au rayon du cercle circonscrit au triangle AEF comme AB est à AE. Donc, puisque les cercles ABD et AEF ne se coupent pas, c'est qu'ils seront tangents en A. C'est pourquoi au cercle ABD est tangent le cercle AEF au point A. Ce qu'il fallait montrer.

Problème 6

Etant donné un point, une droite et un cercle, faire passer par ce point un cercle auquel soient tangents cette droite et ce cercle.

Figures 17 et 18



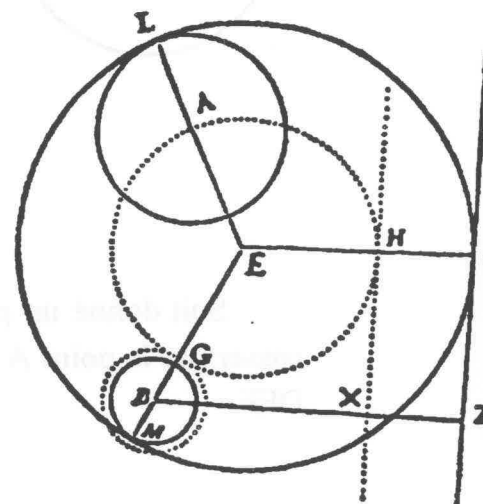
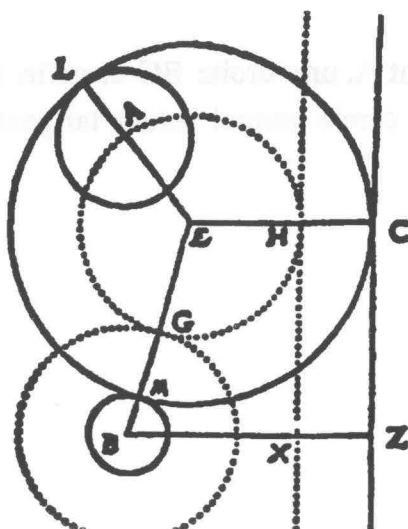
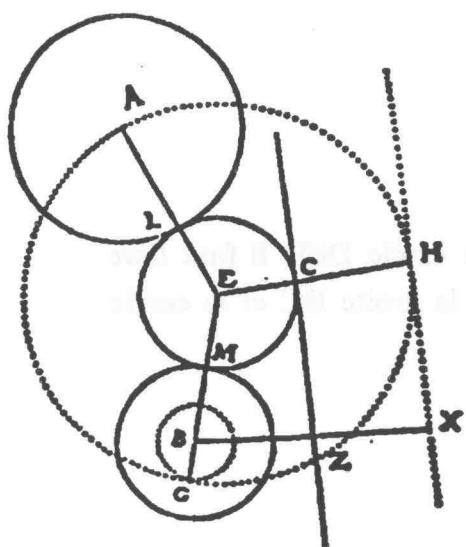
Soit donné un point A, une droite BC et enfin un cercle DEF. Il faut faire passer par le point A un cercle auquel soient tangents la droite BC et le cercle DEF.

A partir du centre G du cercle DEF , abaissons sur BC la perpendiculaire DC coupant diamétralement ce cercle en D et en F et joignons DA , qui est coupée en H de manière que le rectangle [construit] sur DA et DH soit égal au [rectangle] [construit] sur DC et DF . Par les points A et H traçons un cercle auquel la droite est tangente en B , et menons DB qui coupe en E le cercle DEF . Joignons EF . L'angle DEF sera droit et ainsi dans le quadrilatère $BEFC$, les angles opposés sont égaux à deux droits, car l'angle BCF est droit lui aussi. Par conséquent le rectangle [construit] sur DB et DE est égal au rectangle [construit] sur DF et DC , c'est à dire égal par construction au [rectangle] [construit] sur DA et DH . Donc les points A, H, E, B sont sur un cercle. Et E est sur le cercle DEF . Le cercle DEF est donc sécant ou tangent au cercle $AHEB$ au point E . Traçons BI diamètre de ce cercle. Puisque la droite BC est tangente à ce cercle en B , l'angle CBI sera droit et par conséquent BI et DC seront parallèles. Et en joignant EI , l'angle IEB sera droit ainsi que l'angle DEF . Aussi FE et EI ne forment qu'une seule et même droite. DEF et BEI sont donc des triangles semblables ayant même sommet et par conséquent les cercles circonscrits à ces triangles seront tangents et non sécants l'un à l'autre au point E . Nous avons donc fait passer par le point A un cercle BAE auquel sont tangents en B la droite donnée BC et en E le cercle donné DEF . Ce qu'il fallait faire.

Problème 7

Etant donné deux cercles et une ligne droite, décrire un troisième cercle auquel les deux cercles donnés et la droite donnée sont tangents.

Figures 19, 20, et 21



Soient donnés deux cercles, le premier ayant A pour centre et le second B pour centre et soit donnée une droite quelconque CZ. Il faut décrire un troisième cercle auquel soient tangents les deux cercles de centre A et B et la droite CZ.

Abaissons sur CZ la perpendiculaire BZ coupée par le point X tel que ZX soit égal au rayon AL du premier des cercles donnés; et menons HX parallèle à CZ; et traçons un cercle auxiliaire de centre B, de rayon BG, égal à la différence ou à la somme des rayons du premier et du second cercle; enfin traçons par le point A le cercle AGH auquel est tangent le cercle auxiliaire en G et la droite HX en H. Soit E son centre. Il est évident que ce centre E sera aussi celui du cercle auquel sont tangents les cercles donnés dont les centres sont A et B et la droite donnée CZ, parce que des grandeurs égales sont ajoutées ou retranchées à des grandeurs égales de toutes parts. C'est pourquoi abaissons sur la droite donnée CZ la perpendiculaire EC. Elle sera le rayon du cercle LMC auquel sont tangents les deux cercles de centre A et B aux points L et M et la droite CZ en C, en tenant compte des différents cas de figure. Ainsi aurons nous fait ce qu'il fallait.

Voici comment nous tiendrons compte des cas possibles que le travail révélera.

I. Pour que les deux cercles donnés touchent le troisième cercle extérieurement :

Le premier cercle de centre A sera le plus grand des cercles donnés et celui de centre B le plus petit: BG sera la différence de leurs rayons. Si l'on trace BX, elle dépassera la droite CZ, à laquelle elle est perpendiculaire.

II. Pour que les deux cercles donnés touchent le troisième cercle intérieurement :

Le cercle de centre A sera de nouveau le plus grand, celui de centre B le plus petit et BG sera la différence des rayons des deux cercles. Si l'on trace BX, elle manquera à la droite donnée CZ, à laquelle elle est perpendiculaire.

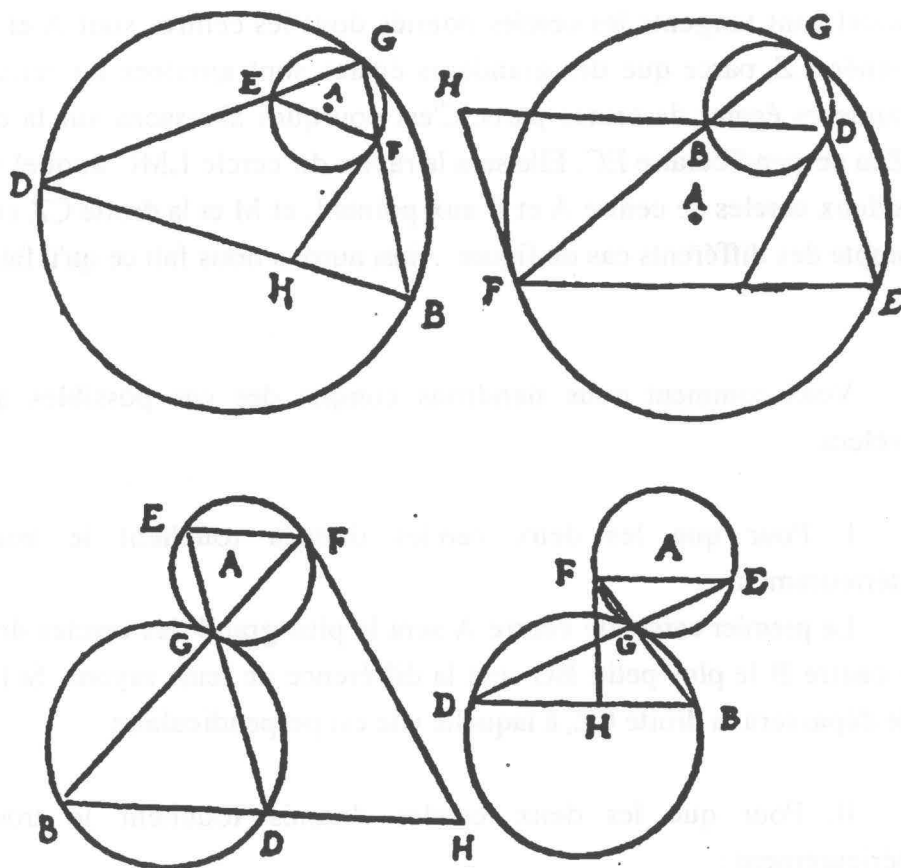
III. Pour que le premier cercle touche le troisième cercle intérieurement et que le second le touche extérieurement:

BG sera la somme des rayons des deux cercles et si l'on trace BX, elle manquera à la droite donnée CZ, à laquelle elle est perpendiculaire.

Problème 8

Etant donné deux points et un cercle, décrire un cercle passant par les deux points donnés, qui soit tangent au cercle donné.

Figures 22, 23, 24, 25



Soit deux points donnés B et D ainsi qu'un cercle EFG de centre A. Il faut par les points B et D décrire un cercle tangent au cercle EFG.

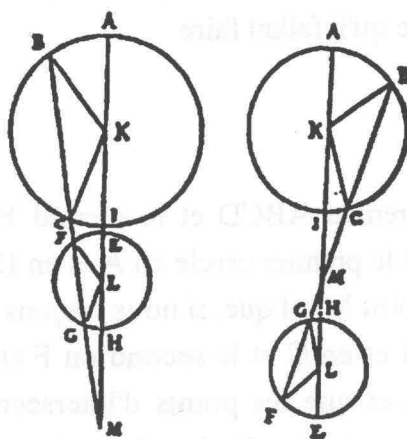
Menons ainsi la droite BD passant par H de manière que le rectangle [construit] sur BD et BH soit égal à la différence des carrés de AB et AF. Traçons

la droite HF, tangente au cercle EGF ; traçons¹⁰ BF qui coupe le cercle EFG en F et en G. Traçons¹¹ aussi DG qui coupe le cercle donné en E et décrivons un cercle par les points B,D,G. Comme le rectangle [construit] sur BD et BH est par construction égal à la différence des carrés de AB et AF, qui est elle-même égale au rectangle [construit] sur BG et BF, les points D,G,F,H sont donc sur un cercle et l'angle DGB est égal à l'angle FHB. Et donc l'angle GDB et, si nous joignons EF, l'angle GEF sont égaux à l'angle HFB. Retirons donc à deux droits soit l'angle GEF, soit l'angle HFB. Dans le triangle GEF l'angle GEF laissera les angles EGF et EFG ; dans le triangle HFB l'angle HFB laissera les angles FHB et FBH. La somme des angles EGF et EFG sera donc égale à la somme des angles FHB et FBH. Quant à l'angle EGF et à l'angle FHB, nous avons vu qu'ils sont égaux. L'angle restant EFG et l'angle restant FBH sont aussi égaux et ainsi les triangles GDB, GEF qui ont un même sommet G, seront semblables. Ainsi les deux cercles décrits, l'un passant par les points G, E, F, l'autre passant par les points GDB, seront tangents en G, leur sommet commun. Nous avons donc tracé par les points D et B un cercle DBG, tangent au cercle GEF en G. Ce qu'il fallait faire.

Lemme 1

Etant donné deux cercles, trouver sur la droite joignant leurs centres un point tel que les segments obtenus, en traçant une droite quelconque passant par ce point et coupant ces cercles, seront semblables.

Figures 26 et 27



¹⁰ « connectatur BF » a ici été traduit par « traçons BF » pour une meilleure fluidité du texte français.

¹¹ Voir note précédente.

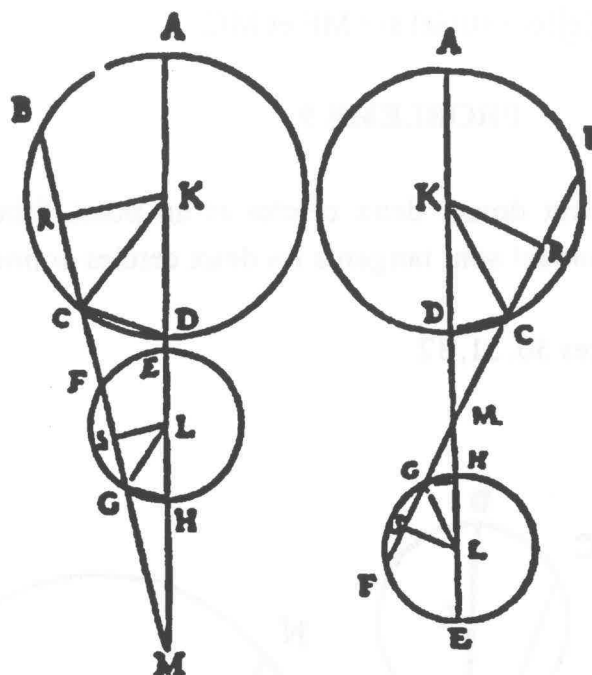
Nous nous donnons deux cercles ABC et EFG. Soit K le centre du premier et L le centre du second. Joignons K et L. Il faut trouver sur KL un point tel que les segments, obtenus en traçant une droite quelconque coupant les deux cercles ABC et EFG, seront semblables. Prenons sur KL ou sur son prolongement un point M tel que KM soit à LM comme AK est à EL. Je dis que, si par le point M on mène une droite coupant les deux cercles ABC et EFG, leurs segments seront semblables.

En effet menons par le point M une sécante quelconque MGFCB coupant le cercle ABC aux points B et C et le cercle EFG aux points F et G. Que pour chaque cercle les points d'intersection les plus éloignés de M soient respectivement B et F et les points d'intersection les plus proches de M soient respectivement C et G. Joignons BK, CK, FL, LG, ce qui crée deux triangles BKC et FLG. Donc, puisque, par construction, KM est à LM comme KB à FL, BK et FL seront parallèles et l'angle KBC sera égal à l'angle LFG. De même, puisque, par construction, KM est à LM comme KC à LG, KC et LG seront parallèles et l'angle KCB sera égal à l'angle LGF. Donc l'angle restant BKC, c'est à dire l'arc de cercle BC, est égal à l'angle restant FLG, c'est à dire l'arc de cercle FG. Et ainsi les segments sous-tendus par BC et FG sont semblables. Donc pour les deux cercles proposés ABC et EFG, on a trouvé sur la droite KL joignant leurs centres le point M à partir duquel, lorsqu'on trace une droite quelconque les coupant, nous aurons des segments semblables. Ce qu'il fallait faire.

Lemme 2

Soit deux cercles, le premier ABCD et le second EFGH. Que la droite KL joignant leurs centres coupe le premier cercle en A et en D et le second en E et en H. Prenons sur celle-ci un point M tel que, si nous traçons une droite MGFCB, elle coupe le premier cercle en B et en C et le second en F et en G, que les segments de cercle soient semblables et que les points d'intersection A et B soient plus éloignés que C et D et les points F et E plus éloignés que G et H. Je dis que le rectangle [construit] sur MG et MB est égal à celui [construit] sur MH et MA.

Figures 28 et 29



Des centres K et L, abaissons sur les cordes¹² BC et FG les perpendiculaires KR et LS et menons les rayons KC et LG. Comme BC et FG sont des segments semblables des deux cercles et que RC et SG sont les moitiés de ces cordes, il en résulte que les triangles rectangles KRC et LSG sont semblables et que par conséquent KC et LG sont parallèles. Les angles CKD et GLH seront aussi semblables et enfin les cordes CD et GH interceptées par ces angles seront parallèles. Aussi MD est à MC comme MH est à MG, mais MD est à MC comme MB est à MA. Par conséquent, le[rectangle][construit] sur MG et MB est égal au rectangle [construit] sur MA et MH.

Si on part des mêmes bases, je dis que pour les mêmes raisons le[rectangle][construit] sur ME et sur MD est égal à celui [construit] sur MF et MC.

En effet, puisque EFGH sont sur un cercle, MH est à MG comme MF est à ME. Mais MH est à MG comme MD est à MC. Donc MF est à ME comme MD est

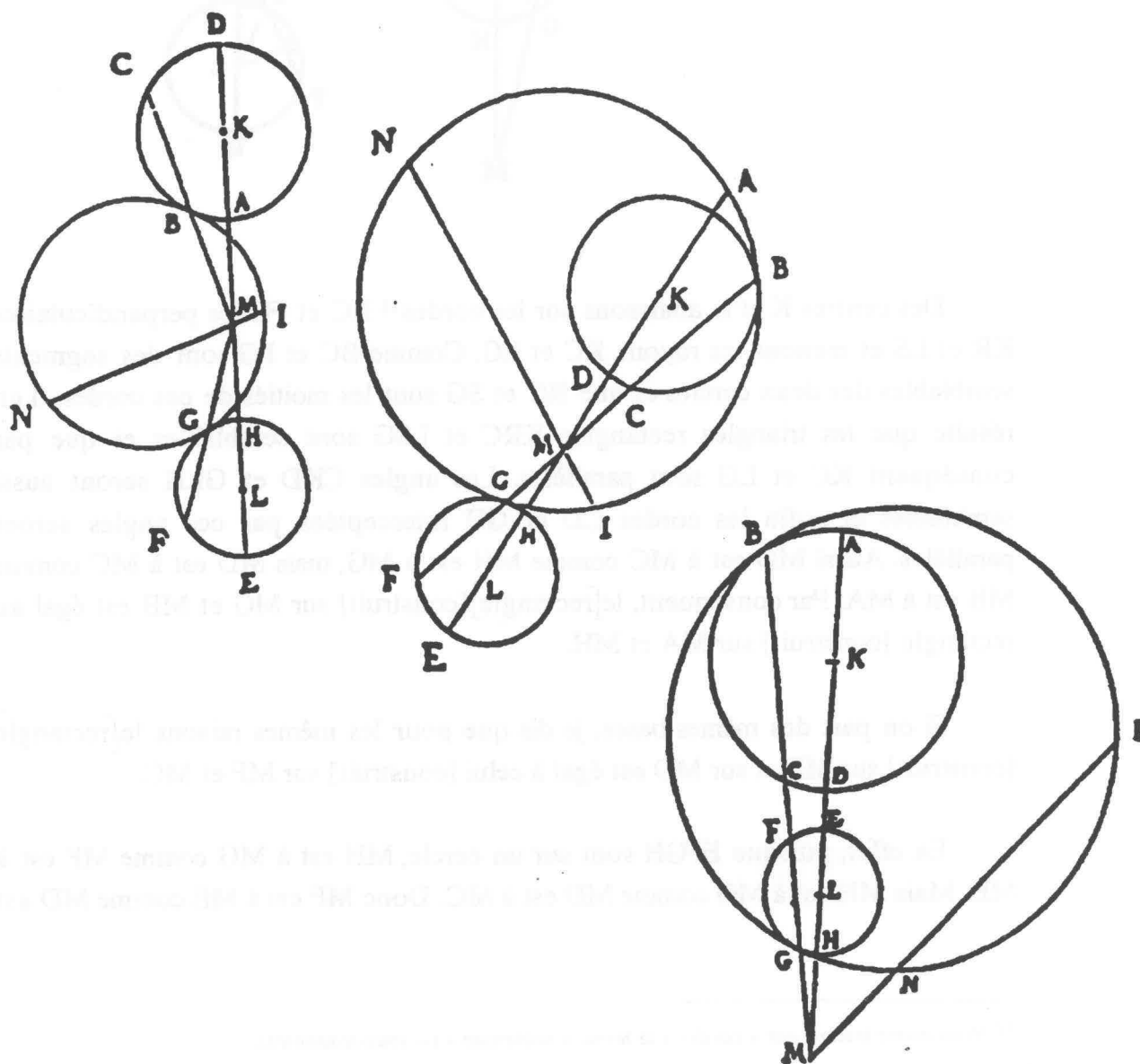
¹² Nous avons traduit par « cordes » le terme « subtensas » (= sous-tendantes).

à MC et par conséquent le rectangle [construit] sur ME et MD est égal au [rectangle][construit] sur MF et MC.

PROBLEME 9

Etant donné deux cercles et un point, faire passer par le point donné un cercle auquel sont tangents les deux cercles donnés.

Figures 30, 31, 32



Soient les deux cercles donnés, le premier ABCD, le second EFGH et en plus le point I donné : il faut par le point I faire passer un cercle auquel soient tangents les deux cercles ABCD et EFGH. Joignons les centres K et L des cercles ABCD et EFGH et trouvons sur KL, en vertu du premier des deux lemmes précédents, un point M tel que en traçant des droites coupant les cercles ABCD et EFGH, leurs segments soient semblables. La droite KL coupe diamétralement les cercles ABCD et EFGH aux points A et D et aux points E et H. De même coupons MI en N de telle sorte que le rectangle [construit] sur MI et MN soit égal au rectangle [construit] sur MH et MA. Et par les points I et N, traçons un cercle auquel soit tangent le cercle ABCD comme il a été enseigné au problème 8. Soit B le point de contact. Traçons BM coupant le cercle ABCD en B et en C et le cercle EFGH en F et G. Le rectangle [construit] sur MG et MB est égal au rectangle [construit] sur MH et MA, c'est à dire par construction à celui sur MN et MI, en vertu du second des deux lemmes précédents. Par conséquent les quatre points NIBG sont sur un même cercle. Mais le point G est aussi sur le cercle EFGH. C'est pourquoi les cercles EFGH et IBGN sont sécants ou bien tangents en G. Quant aux cercles BIN et BCD, ils sont par construction tangents en B. Par conséquent les segments de cercle BC et BG sont semblables. Mais les segments de cercle BC et FG sont semblables. Par conséquent les segments de cercle FG et BG seront semblables. Donc les cercles BIG et EFG ne se coupent pas, mais sont tangents l'un à l'autre au point G. Il a donc été décrit par le point I un cercle IBG tangent aux cercles ABD et EGH aux points B et G. Ce qu'il fallait faire.

PROBLEME 10

Etant donné trois cercles, décrire un quatrième cercle qui les touche tous les trois.

Figure 33

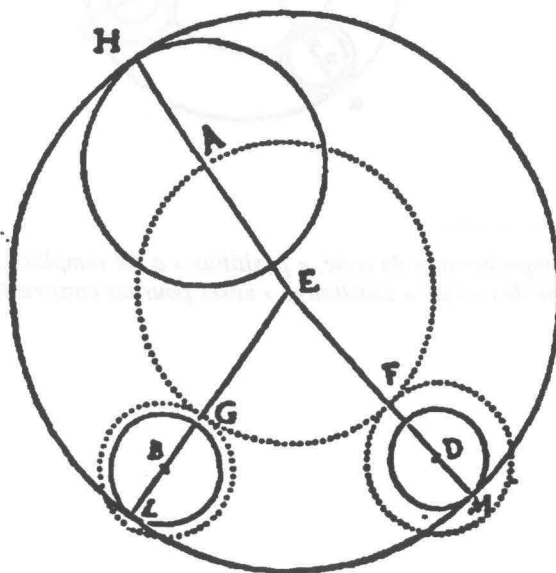
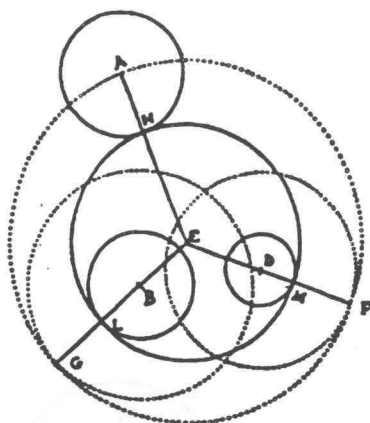


Figure 36



IV. Pour le quatrième cercle soit touché extérieurement par le cercle un et intérieurement par les cercles deux et trois.(fig 36)

DF sera la somme des rayons des cercles un et trois et BG la somme des rayons des cercles un et deux. Et traçons par le point A un cercle que les cercles auxiliaires touchent intérieurement.

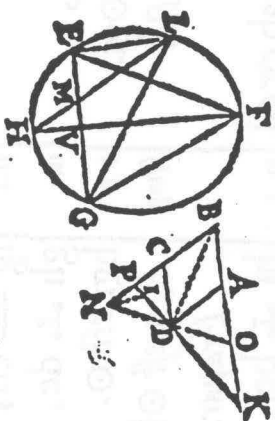
Ces démarches valent pour absolument tous les cas de tracé d'un cercle en contact avec des cercles et des lignes droites. Quant à la méthode particulière au tracé d'un cercle en contact avec trois cercles déjà en contact entre eux, elle méritait un traitement particulier. Car il est difficile de proposer méthode plus utile particulièrement en matière d'astronomie et de mécanique des

αὐτοματα (machines). Mais il y a déjà plusieurs années que j'ai fourni une réponse à propos de ce problème au très éminent Jacques Fleury, doyen du Sénat de Paris et que j'ai reproduit ma réponse dans le livre six de mes Oeuvres variées. Voici donc le seul point sur lequel je veux te mettre en garde, Belge naïf. Celui auquel il est demandé d'extraire la racine carrée de 2 et qui donne comme racine $141.421.354 / 100.000.000$ agit aussi habilement que celui qui donne comme racine $141.421.354.237.509.505 / 100.000.000.000.000.000$. Le dernier fournit plus de travail, mais ne montre pas plus d'intelligence. Ainsi, si je prends un rayon de cercle de 100.000.000 de petites parties et que je trouve pour la corde sous-tendant un arc de 16 scrupules, une valeur de 58,329 de ces petites parties, je ne le céderai en rien à celui que satisferont des figures plus vastes et qui aura choisi un rayon de 1000 myriades de myriades. Bien mieux, je dirai qu'il abuse de son temps et de sa peine, sachant que cela n'a aucun intérêt. Il faut fuir ce qui met les intelligences à la torture et il faut éviter la *ματαιοτεχνία* (le travail qui n'a pas de sens). Par conséquent la construction de parallèles que tu emploies sur la foi de ton Louis¹⁴ est aussi hyperbolique (exagérée) et ta candeur m'interdit qu'elles m'émeuvent. Ton Louis est un calculateur particulièrement subtil et expérimenté et je désire que vous soyez, lui et toi, mes amis. Salut.

¹⁴ Ludolphus Van Ceulen

**Apollonii Pergaei
Tactionum geometria
à Francisco Vieta restitua,
La géométrie des attouchements d'Apollonius Pergaeus, restituée par
François Viète.**

Herigone, Paris, 1634.



7.1.1	$\angle mlg \ 2/2 < dbk,$	7.1.1	$\angle ufg \ 2/2 < dbo,$
4.4.1	$\angle mgl \ 2/2 < dkb,$	const.	fuē bdo <i>int</i> $\perp$;
const.	$\angle clg \ 2/2 < pbk,$	11.1	<i>Δ</i> <i>fug</i> <i>equi</i> Δ g. Δ bd
const.	$pk \ 2/2 \ eg.$	4.6	$gu \ \pi u f \ 2/2 \ o d \ \pi d b. a$
1.16.1		hyp.	$eg \ 3/2 \ no,$
seped.	$eg \ n \ est \ 2/3 \ no.$	7.2.b	$ug \ 3/2 \ do,$
	<i>Req.</i> π <i>demonstr.</i>	1. concl.	$uf \ 3/2 \ db,$
	$uf \ est \ 3/2 \ db,$	16.1	$nd \ 2/2 \ do,$
	$pk \ est \ 3/2 \ no.$	19.1	$dk \ 3/2 \ do, u \ dn.$
	<i>T</i> <i>repar.</i>	const.	$\angle dni \ 2/2 < k,$
1. p. 1.	$fg \ \epsilon \ fc \ int \ —,$	4.6	$kd \ \pi \ do \ 2/2 \ nd \ \pi di,$
19.1	$\angle dni \ 2/2 < k.$	25.5	$ik \ 3/2 \ no,$
	<i>Demonstr.</i>	1. concl.	$pk \ 3/2 \ no.$
const.	$\angle cfg \ 2/2 < nbo,$	1. a. c	



APOLLONII PERGAEI TACTIONVM GEOMETRIA, à Franciſco Vieta reſtituta.

LA GEOMETRIE DES ATTOV-
chements d'Apollonius Pergens, reſſinéc
par François Viète.

PROBL. I.

P E R data duo puncta circulum magnitudine datum
deſcribere.

P A R deux points donnez deſcrire un cercle de grandeur
donné.

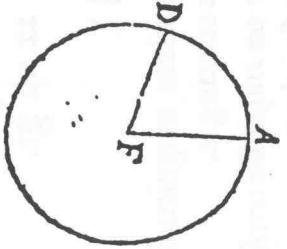
Hypo. B —

$a \ \epsilon \ d \ int \ \circ; D;$

$b \ est \ — D.$

Req. $\epsilon \ st \ \circ \ fad \ \epsilon \ fa \ 2/2 \ b.$

Conſtr.



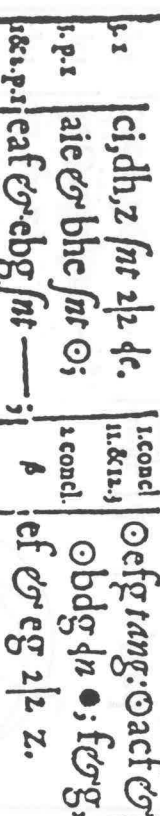
11.1 $a, f, d, b \ int \ 2/2 \ de.$ *Demonstr.*

1. p. 1 $fad \ est \ \circ.$ $b \ est \ — D.$

hyp. *Req.* $\epsilon \ st \ \circ \ ad.$ $fa \ 2/2 \ b,$

Mmm ij

Mmm iii



Demonstr.

$\downarrow$ n 1.2.3.4. *est figur.*
 22 $\tilde{n}$ *est* 2|3 cd,
 $\downarrow$ n 6. *figur.*
 22 $\tilde{n}$ *est* 3|2 cd.

PROBL. IV.

Dato puncto, & recta linea, circulum magnitudine datam describere, qui per datum punctum transiens datam etiam contingat.

LA GEOMET. DES ATTOUCHEMENTS. 919

Y n point estant donné, Et une ligne droite, descrite avec
un cerce donné, qui passant par le point donné touche la ligne
donnée.

Гипотеза.

अ. ए. ड.

bc est — D. pos.

$$z_{eff} = D \cdot 2^{1/2} g f,$$

Req. of tag.

Constr.

ad est lbc,

$$|dc_{2/2}z,$$
$$|_{\mu,1} |_{cf} = bc$$

J.P. 1 af 2/2 Z

3. P. 1 | pag. est 0

Req. est of ag.

Prepar.

fig. = ed.

५

22 n est 2/3 ad.

PROBL. V.

Dato puncto & circulo, alterum circulum magnitudi-
ne datum describere, qui per datum punctum transiens
circulum datum contingat.

Esant donné un point & un cercle, deſcrire un autre cercle donné par le point donné qui touche le cercle donné.

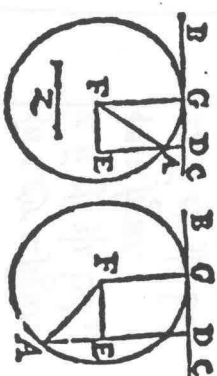
Hypoth.

a est. D.

bcc est @ D

2 est — D

Мини



Demonstrations

«Б.34.1/fg 2/2 cd, II z₂

conf. at 2/2 Z,

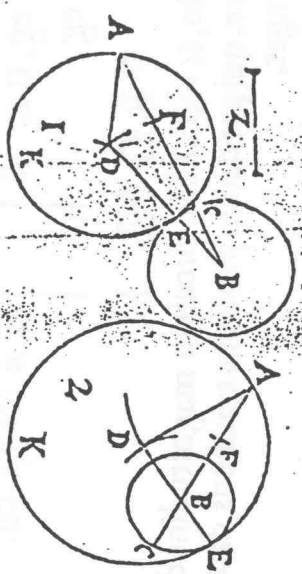
1.2.1 | fa 2/2 f8

$$|_{\text{conf.}} \langle \text{cdg est } -1, \dots \rangle$$

1.6.1. $\langle f_{\text{gd}} \rangle$

concl. | c.16.3 | @tag rang:bc dn g.

Determinat.



Req. est $\odot dac$.

Constr.

1. 2. 1. abc est — ,

3. 1. cf $2/2$ z ,

3. P. 1. bfd est $\odot$,

3. P. 1. ad $2/2$ z ,

2. P. 1. da $\&$ db sunt — ,

3. P. 1. dac est $\odot$.

3. P. 1. $Req.$ est $\odot dac$.

Demonstr.

constr. bd $2/2$ bf ,

1. 2. 1. ed $2/2$ cf , uz ,

constr. da $2/2$ z , ued ,

concl. $\odot dac$ tang: $\odot bec$.

Determinat.

2. 2. $\tilde{n}$ est $2/3$ ca .

PROBL. VI.

Datis positione recta linea & circulo, alterum circulum magnitudine darum describere, qui datam rectam lineam ac darum circulum contingat.

Esse mi donnez de position une ligne droite & un cercle, de-
scrire un autre cercle donné, qui touche la ligne droite don-
née & le cercle donné.

Hypoth.

bc est — D. posit.

z est — D. magd.

adh est $\odot D$. posit. α

Req. est $\odot ech$.

Constr.

1. 2. 1. ab $\perp$ bc ,

3. 1. $bg, df, \& z$ sunt $2/2$ de .

3. 1. $ge = bc$,

3. P. 1. afe est $\odot$.

1. 2. 1. ach est — ,

3. P. 1. ehc est $\odot$.

3. P. 1. $Req.$ est $\odot ech$.

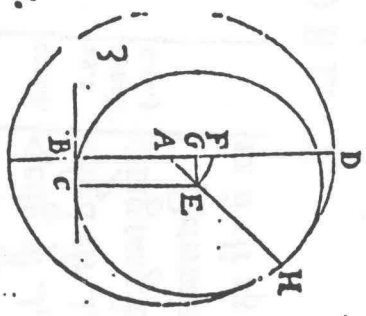
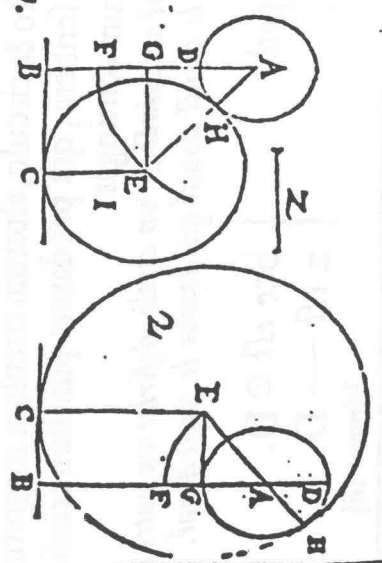
Præpar.

1. 2. 1. ec $\perp$ bc ,

Demonstr.

1. 2. 1. he $2/2$ df , uz .

3. 4. 1. ec $2/2$ gb , uz ,



1. 2. 1. ec $2/2$ eh ,

1. concl. $\odot ech$ tang: bc ,

2. concl. $\odot ech$ tang: $\odot adh$,

Determinat.

1. 2. 1. en 1. $\&$ 2. figur.

z $\tilde{n}$ est $3/2$ bd ,

1. 2. 3. figur.

$2. 2. \tilde{n}$ est $3/2$ bd .

1. 2. 3. figur. bc est extr. $\odot D$.

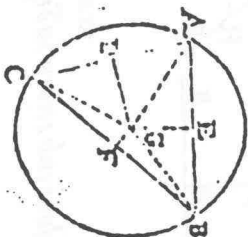
1. 2. 3. figur. bc est $\&$ en $\odot D$.

912 GEOMETRIA TACTIONVM.

PROBL. VII.

Datis tribus punctis per eadem circulum describere: oportet autem data tria puncta non existere in eadem linea recta.

Descrire un cercle par trois points donnez, mais il ne faut pas que tous trois soient en une ligne droite.



Hypoth.

a, b, c sunt $\odot$; D;

Req. est $\odot abc$.

Constr.

1. p. 1 ab, ac, bc sunt —,

5. 4 abc est $\odot p \odot a, b, c$,

5. 4 Req. est $\odot abc$.

Demonstr.

1. p. 1 abc est Δ .

1. p. 1 $\odot abc$ est describitur $p \odot a, b, c$.

PROBL. VIII.

Datis duobus punctis, & linea recta, per data puncta circulum describere, quem data linea recta contingat.

Essant donnez deux points & une ligne droite, descrire un cercle par les points donnez, qui touche la ligne droite donnee.

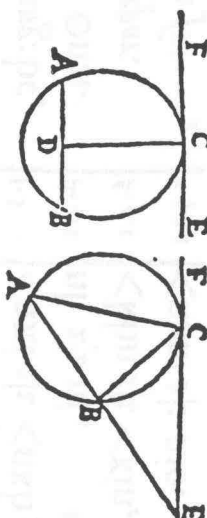
Hypoth.

a, b sunt $\odot$; D;

cf est — D. posit.

Req. est $\odot abc$.

LA GEOMET. DES ATTOUACHEMENTS. 913



Constr. 1. cas.

suppos. $ab = cf$,

10. 1 $ad \perp db$,

11. 1 $dc \perp ab$,

5. 4 abc est $\odot$,

5. 4 Req. est $\odot abc$.

Demonstr.

1. p. 1 $\odot abc$ tang. fc.

Constr. 2. cas.

suppos. $ab \nparallel cf = cf$,

2. 3. 4. d. 1 e est intersect.

14. 2 $\square ec \perp \square a. cb$.

5. 4 abc est $\odot$.

5. 4 Req. est $\odot abc$.

Demonstr.

1. p. 1 ec tang. $\odot abc$.

PROBL. IX.

Datis tribus lineis rectis, describere circulum quem harum vnaquaque contingat. Oportet autem datas lineas rectas non esse parallelas.

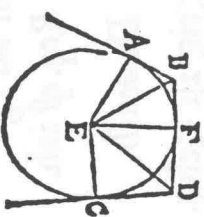
Essant donnees trois lignes droites, descrire un cercle qui soit touché par une chacune des trois lignes donnees. Mais il ne faut pas que les lignes droites donnees soient paralleles.

Hypoth.

ab, cd, bd sunt — D.

b, e, d sunt intersect.

Req. est $\odot eafc$.

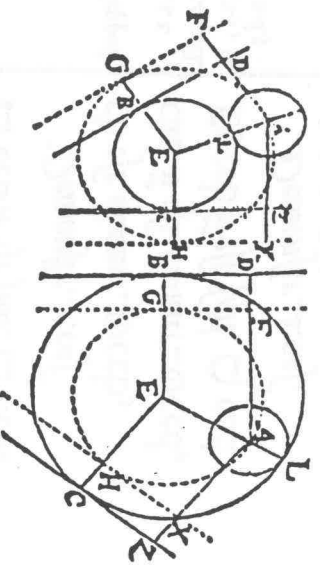


926 GEOMETRIA TACTIONVM.

Præc. 1 | *no 2* | *nm,*
concl. | *enall tang: bc et bc.*
c. 163

PROBL. XI.

Dato circulo, & duabus lineis, describere circum-
 quem datus circulus, & daretur linea recta contingat.
Essant donné un cercle, & deux lignes droites, décrire un
cercle qui touche le cercle donné, & les deux lignes droites
donnés.



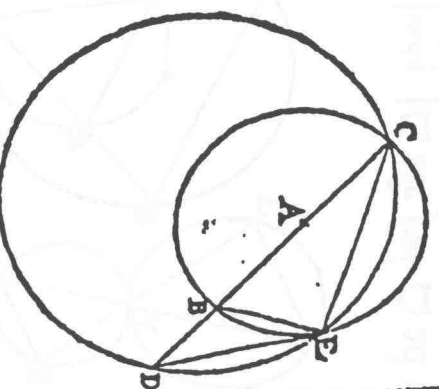
<i>Hypoth.</i>	<i>10. 1</i>	$\odot eagh \text{ tang: } fg, xh.$
$\odot al \text{ est } D.$	<i>1. P. 1</i>	$ea \text{ est } \text{---},$
$zc \text{ et } db \text{ sur } \text{---} D.$	<i>1. P. 1</i>	$elbc \text{ est } \odot.$
<i>Req. est</i> $\odot eblc.$	<i>symp.</i>	<i>Req. est</i> $\odot blc.$
<i>Constr.</i>	<i>Demonstr.</i>	
$ad \perp db,$	<i>18. 3. 1</i>	$eb, ec, el \text{ sur } 2 \perp \text{ de},$
$az \perp zc,$	<i>19. 1</i>	$\angle ebd \ 2 \perp \angle ecf,$
$al, df, zx \text{ sur } 2 \perp \text{ de},$	<i>19. 1</i>	$\angle ccz \ 2 \perp \angle ehx,$
$fg = db,$	<i>1. concl.</i>	$\odot blc \text{ tang: } db, zc,$
$xh = zc,$	<i>2. concl.</i>	$\odot blc \text{ tang: } \odot al.$
<i>9. 1</i>	<i>11. & 11. 3</i>	

LA GEOMET. DES ATTOVCHEMENTS. 927

LEMMA. I.

Si duo circuli se mutuò secant, à puncto autem sectio-
 nis ducatur per centrum vnius circulorum linea recta, ea
 non transibit per alterius circuli centrum.

Si deux cercles se touchent l'un l'autre la ligne droite menée
de la section par le centre de l'un des cercles ne passera pas par
le centre de l'autre cercle.

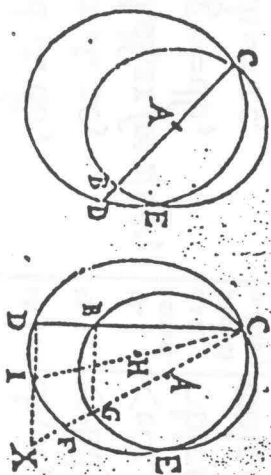


<i>Hypoth.</i>	<i>1. P. 1</i>	$ac \text{ et } cd \text{ sur } \odot i$
$ac \text{ et } c \text{ sur intersecti}$		$cad \text{ est } \text{---}.$
<i>Req. demonstr.</i>		$\text{centr.} \odot ced \text{ n'est pas } cd.$
<i>Præpar.</i>		
$1. P. 1$	$ce, eb, ed \text{ sur } \text{---}.$	$9. 2. 1$
<i>Demonstr.</i>		$1. 2. d$
$11. 1$	$\angle ccb \text{ est } \angle,$	$11. 3$
		$\angle ced \ 3 \perp \angle ccb,$
		$cd \text{ n'est pas } cd.$

LEMMA. II.

Si duo circuli se mutuò secant, à puncto autem sectio-
 nis ducatur linea recta vtriusque circuli secans, erunt
 dissimilia circulorum segmenta.

Si deux cercles se coupent l'un l'autre, & qu'une ligne
droite menée par la section coupe les deux cercles, elle les cou-
pera en segments dissimilables.



Hypoth.

$\text{ceb} \text{ et } \text{ced} \text{ sunt } \odot.$
 $\text{cd} \text{ est } —.$

Req. π. demonstr.

$\Delta \text{ceb} \tilde{\text{est}} \text{ sml. } \Delta \text{ced.}$

Demonstr. 1. cas.

$\text{cb} \text{ est diamet. } \odot \text{ceb,}$

$\text{cad} \tilde{\text{est}} \text{ diamet. } \odot \text{ced,}$

$\Delta \text{ceb} \tilde{\text{est}} \text{ sml. } \Delta \text{ced.}$

Demonstr. 2. cas.

suppos.

$\text{cbd} \tilde{\text{est}} \text{ diamet.}$

l. 111.

$\text{cg} \text{ est diamet. } \odot \text{abg,}$

l. 3

$\text{ci} \text{ est diamet. } \odot \text{hcdi,}$

l. 3, &

$\angle \text{cbg} \frac{1}{2} < \angle \text{cdi,}$

l. 21

$\angle \text{dcg} \frac{1}{2} < \angle \text{dci,}$

l. 21

$\angle \text{dic} \frac{1}{2} < \angle \text{bge,}$

l. 21

$\Delta \text{bec} \tilde{\text{est}} \text{ sml. } \Delta \text{dec.}$

LEMM.

LEMM. III.

Si per crura trianguli agatur recta basi parallela, ita ut duo constituantur sub eodem vertice similia trianguia, qui circa triangulum vnum describatur circulus tangens in vertice communi à circulo qui circa triangulum alterum describetur.

Si deux coëx d'un triangle sont conjoints par une ligne parallèle à la base, en sorte que sous une même sommet soient constitués deux triangles semblables, le cercle qui sera décrit à l'enrou de l'un des triangles sera touché au sommet commun par le cercle décrit à l'enrou de l'autre triangle.

Hypoth.

$\text{abd} \text{ est } \Delta,$

$\text{daf} \text{ et } \text{bac} \text{ sunt } —,$

$\text{ef} = \text{db, } \alpha$

$\text{adb} \text{ et } \text{acf} \text{ sunt } \odot;$

Req. π. demonstr.

$\odot \text{abd} \text{ tang. } \odot \text{acf}$

$\nless 2.$

Demonstr.

$\alpha, \beta, \gamma \mid \angle \text{abd} \frac{1}{2} < \angle \text{acf,}$

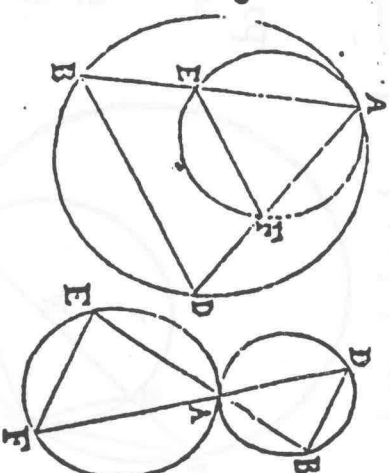
$\left. \begin{array}{l} \text{10. d. 3} \\ \text{concl.} \end{array} \right\} \Delta \text{afe sml. } \Delta \text{ad'}$

$\nless 2.$

PROBL. XII.

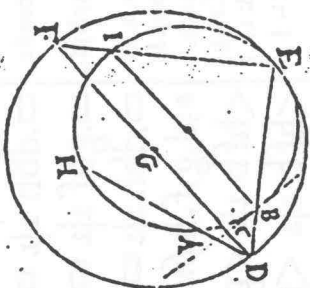
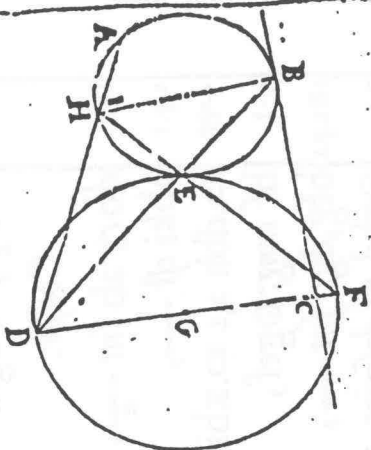
Datis puncto, linea recta, & circulo, per datum punctum describere circum, quem data linea recta & datus circulus contingant.

Nnn



930 GEOMETRIA TACTIONVM.

Essant donnez un point, une ligne droite, & un cercle, de-
scrire par le point donné un cercle, qui touche la ligne droite
donnée & le cercle donné.



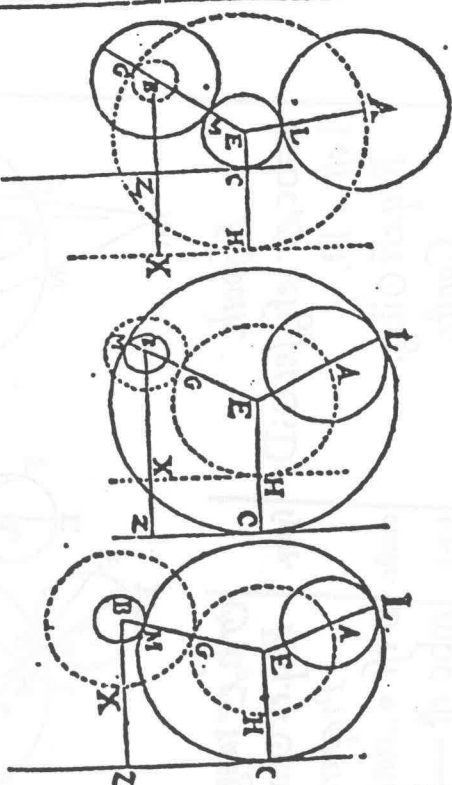
<i>Hypoth.</i>	<i>ci est —.</i>
$a \text{ est } \odot D.$	$\angle def \text{ est } \angle,$
$bc \text{ est } — D.$	$\angle bcf \text{ est } \angle,$
$gdef \text{ est } \odot D.$	$4 \angle, bcef \text{ est } \angle n \odot,$
<i>Req. est</i> $\odot abc.$	$\odot bdc \angle \angle \left\{ \begin{array}{l} \odot fd, \\ \cup \odot adh \end{array} \right.$
<i>Constr.</i>	$\odot ia, h, c, b \text{ sur } \angle n \odot,$
$dgf \angle bc,$	$\angle cbi \text{ est } \angle,$
$da \text{ est } —,$	$ib = dc,$
$\odot adh \angle \angle \odot fd,$	$\angle icb \text{ est } \angle,$
$\odot ahe \text{ est } \text{descript. } p.$	$\angle icb \angle \angle \angle def,$
$2, h \text{ tang. } — bc,$	$\angle fec \text{ est } —,$
<i>Req. est</i> $\odot ahe.$	$\odot abh \angle \angle \odot def \text{ sur } c$
<i>Præpar.</i>	
$dbc \text{ et } fec \text{ sur } —,$	
$bi \text{ est } \text{diamet.} \odot abc,$	

LA GEOMET. DES ATTOUACHEMENTS. 931

PROBL. XIII.

Datis duobus circulis, & lineâ rectâ, describere rectum
circulum, quem duo dati, & data linea recta contingant.

Essant donnez deux cercles, & une ligne droite, decrire un
troisième cercle, qui touche les deux cercles donnez, & la ligne
droite donnee.



<i>Hypoth.</i>	<i>bg est</i> $\odot,$
$al, bm \text{ sur } \odot D;$	$\odot agh \text{ est } \text{descript. } p.$
$c \text{ est } — D. \text{ possi.}$	$a \text{ tang. } \odot bg \text{ et } \angle x,$
<i>Req. est</i> $\odot emcl.$	$\angle ecm \text{ est } \odot,$
<i>Constr.</i>	<i>Req. est</i> $\odot emcl.$
$bz \angle cz,$	<i>Demonstr.</i>
$zx \angle \angle al,$	$\angle e, c, l, em \text{ sur } \angle \angle \angle.$
$hx = cz,$	$\angle emcl \text{ tang. } cz,$
$bg \angle \angle al \sim bm,$	$\angle emcl \text{ tang. } \odot al \text{ et } \odot bm.$
$\cup al \sim btm.$	

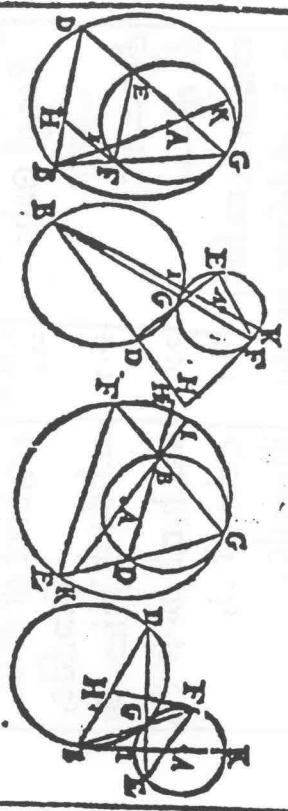
Nnn ij

932 GEOMETRIA TACTIONVM.

PROBL. XIV.

Datis duobus punctis & circulo, per data duo puncta circulum describere, qui datum contingat.

Essant donnez deux points & un cercle, decrire un cercle par les deux points donnez, qui touche le cercle donné.



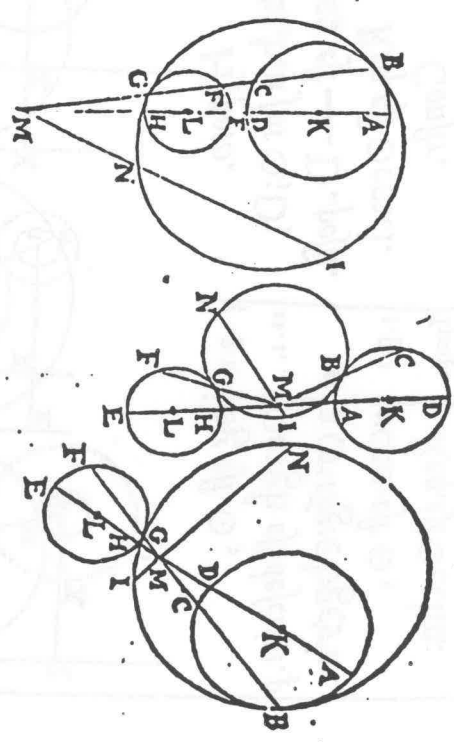
	<i>Hypoth.</i>		<i>Præpar.</i>
	b & d sm o; D;		
	aefg est o D.	1. p. 1	ef est —.
	<i>Req. est</i> obgd.		
	<i>Constr.</i>		<i>Demonstr.</i>
1. p. 1	db & ab sm —,	constr.	□. dbh 2/2 □. kbi,
1. p. 1	abki est —,	1. 2. 1	□. gbf 2/2 □. kbi,
4. app.	□. dbh 2/2 □. kbi,	1. 2. 1	□. dbh 2/2 □. gbf,
17. 3	hf tang: ogef,	1. 2. 1	& id, g, f, h sm qn o,
18. 1. p. 1	bfg, dgc sm —,	1. 2. 1	< hfb 2/2 < gdb,
7. c.	ogbd est descript. p	1. 2. 1	< hfb 2/2 < gcf,
	• ig, b, d,	1. 2. 1	< gcf 2/2 < gdb,
5. p. p.	<i>Req. est</i> ogdb.	1. 2. 1	Δ. gdb sm l. Δ. gcf,
		1. 2. 1	obdg tang: ocf.

LA GEOMET. DES ATTOVCHEMENTS. 933

PROBL. XV.

Datis duobus circulis & puncto, per datum punctum circulum describere, quem duo dati circuli contingant.

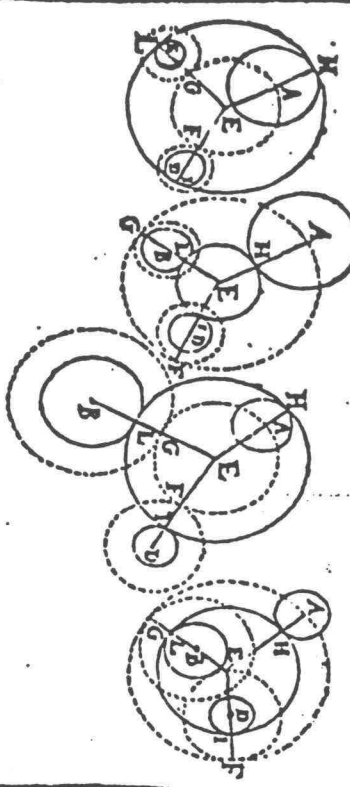
Essant donnez deux cercles & un point, decrire un cercle par le point donné, qui touche les deux cercles donnez.



	<i>Hypoth.</i>		<i>Præpar.</i>
	kabc, & lefg sm o; D;	5. p. p.	ef n, & tang: oabc
	i est o D.		<i>Req. est</i> oinb.
	<i>Req. est</i> oibg.		
	<i>Constr.</i>		<i>Demonstr.</i>
18. 1. p. 1	klam est —,	constr.	mbc est —.
11. app.	ka π le 2/2 km π lm,	1. p. 1	b & i o. contact.
1. p. 1	mi est —,	1. p. 1	mbc est —.
4. app.	□. imn 2/2 □. amb,	1. p. 1	□. bmg 2/2 □. amh,
14. t.	□. oinb est descript. p i	1. 2. 1	□. imn 2/2 □. amb,
		1. 2. 1	□. bmg 2/2 □. imn,
		1. 2. 1	Nnn iii

Datis tribus circulis, describere quartum circulum quem illi contingant.

des angles.



Si fuerint triangu^{la} rectangu^{la}, quorum primi angulus
S acutus, differat ab acuto secundiper acutum tertij, &
sit excessus penes primum, latera tertij recipiunt hanc si-
milicudinem.

Hypothenusa, sit similis rectangulo sub hypothenusis
primi & secundi.

Perpendiculum, simile rectangulo sub perpendiculo
primi & base secundi, minus rectangulo sub perpendicu-
lo secundi & base primi.

Bas^{is}, rectangulo sub basibus primi & secundi, plus re-
ctangulo sub perpendiculis eorundem.

Si l y a trois triangles rectangles, & que l'angle aigu du
S premier excede l'angle aigu du second par l'angle aigu du
troisieme, les costez du troisieme sont comme s'ensuit.

L'hypothenuse, est semblable au rectangle contenu sous les
hypothenuses du premier & second.

La perpendiculaire, est semblable au rectangle contenu sous
la perpendiculaire du premier & la base du second, moins le
rectangle sous la perpendiculaire du second & la base du
premier.

Nnn iiiij

Newton

Philosophiae naturalis principia mathematica
Traduction française de Mme du Chastelet,
Paris, 1759.

Lemme XVI

L E M M E X V I.

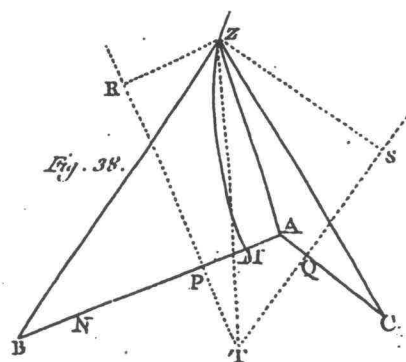
Trouver un point, duquel tirant des lignes droites à trois points donnés, les différences de ces trois droites soient nulles ou données.

Cas 1. Soient A, B, C , les points donnés, & Z , le quatrième point qu'il faut trouver; la différence des lignes AZ, BZ étant donnée, le point Z sera à une hiperbole qui aura pour foyers les points A & B , & pour axe principal la différence donnée. Fig. 38.
Soit MN cet axe, prenant $PM:MA::MN:AB$, élevant ensuite PR perpendiculaire sur AB , & abaissant ZR perpendiculaire sur PR ; on aura, par la nature de l'hyperbole, $ZR:AZ::MN:AB$. Par le même raisonnement on trouvera que le point Z sera à une autre hiperbole dont les foyers seront les points A & C , & l'axe principal la différence entre AZ & CZ , & on trouvera aussi la droite QS perpendiculaire sur AC , à laquelle QS , si on mène la perpendiculaire ZS d'un point quelconque Z de cette hiperbole, ZS sera à AZ comme la différence entre AZ & CZ est à AC . Cela posé, il est aisé de remarquer que les raisons de ZR & de ZS à AZ sont données, & que par conséquent celle que ZR & ZS ont entr'elles est donnée aussi. Donc, si les droites RP, SQ prolongées se rencontrent en T , & qu'on tire TZ & TA , la figure $TRZS$ sera donnée d'espece, & la droite TZ dans laquelle est placé le point cherché Z sera donnée de position. De plus, la droite TA sera donnée aussi ainsi que l'angle ATZ ; & parce que les raisons de AZ & de TZ à ZS sont données, celle de AZ & de TZ entr'elles sera donnée aussi, & par conséquent le triangle entier ATZ , dont le sommet est le point cherché Z , sera enfin donné. C. Q. F. T.

Cas 2. Si deux de ces trois lignes, comme AZ & BC , sont égales, tirez la droite TZ en sorte qu'elle partage la droite AB en deux parties égales, & cherchez ensuite le triangle ATZ comme ci-dessus.

Cas 3. Si ces trois lignes sont égales, le point Z sera placé dans le centre du cercle qui passe par les points A, B, C . C. Q. F. T.

Ce Problème se résoud aussi par le livre des Touchantes d'*Apollonius*, restitué par *Viet*.



Newton

Arithmetica Universalis
Traduction française de N. Beaudeau,
1802

Problème XLVII

PROBLÈME XLIV.

Décrire un cercle qui passe par un point donné, et touche deux droites données de position.

PROBLÈME XLV.

Décrire un cercle qui passe par deux points donnés, et touche un autre cercle donné de position.

PROBLÈME XLVI.

Décrire un cercle qui passe par un point donné, touche un cercle donné, et une droite donnée de position.

PROBLÈME XLVII.

Décrire un cercle qui passe par un point donné, et touche deux autres cercles donnés de grandeur et de position.

(Pl. VI, Fig. 4). Soient, le point donné A ; les deux cercles donnés de grandeur et de position TIV , RHS ; C et B leurs centres; AIH le cercle cherché; D son centre; et enfin I et H les points de contact des trois cercles. Unissez par des droites les points A, B ; A, C ; A, D ; et D, B . La droite AB prolongée coupera le cercle RHS , en R et en S , et la droite AC prolongée coupera le cercle TIV en T et en V . Du point D abaissez sur AB la perpendiculaire DE ; et du même point sur AC la perpendiculaire

DF , qui rencontrera en G la droite AB . Menez aussi du point C sur AB la perpendiculaire CK . Le triangle ADB donne $\overline{AD}^2 - \overline{DB}^2 + \overline{AB}^2 = 2AE \cdot AB$ (par la 13^e prop. du 2^e liv. des Éléments). Mais $DB = AD + BR$, par conséquent, $\overline{DB}^2 = \overline{AD}^2 + 2AD \times BR + \overline{BR}^2$. Substituez cette valeur de $\overline{DB}^2$ dans l'équation précédente, et vous aurez $\overline{AB}^2 - 2AD \cdot BR - \overline{BR}^2 = 2AE \cdot AB$. Mais $\overline{AB}^2 - \overline{BR}^2 = (AB + BR) \times (AB - BR) = AR \times AS$. Donc $AR \cdot AS - 2AD \cdot BR = 2AE \cdot AB$. Et.....

$$\frac{AR \cdot AS - 2AE \cdot AB}{BR} = 2AD.$$

Par un semblable raisonnement, on tirera du triangle ADC une seconde valeur de $2AD$, et on aura, $2AD = \frac{AT \cdot AV - 2AC \cdot AF}{TC}$.

Par conséquent, $\frac{AR \cdot AS - 2AB \cdot AE}{BR} = \frac{AT \cdot AV - 2AC \cdot AF}{TC}$; et

encore, $\frac{2AC \cdot AF}{TC} = \frac{AT \cdot AV}{TC} - \frac{AR \cdot AS}{BR} + \frac{2AB \cdot AE}{BR}$; et

enfin, $AF = \frac{CT}{2AC} \left(\frac{AT \cdot AV}{TC} - \frac{AR \cdot AS}{BR} + \frac{2AB \cdot AE}{BR} \right)$. Or

comme on a la proportion $AK : AC :: AF : AG$, on aura aussi,

$AG = \frac{CT}{2AK} \left(\frac{AT \cdot AV}{TC} - \frac{AR \cdot AS}{BR} + \frac{2AB \cdot AE}{BR} \right)$. Si on

retranche maintenant AG , ou sa valcur de AE , ou ce qui est la même chose, de $\frac{AE \cdot 2AK}{CT} \times \frac{CT}{2AK}$, le reste sera.....

$GE = \frac{CT}{2AK} \left(\frac{AE \cdot 2AK}{CT} + \frac{AR \cdot AS}{BR} - \frac{AT \cdot AV}{TC} - \frac{2AB \cdot AE}{BR} \right)$.

Et comme on a la proportion $CK : AK :: GE : DE$, on aura,

$DE = \frac{CT}{2CK} \left(\frac{AE \cdot 2AK}{CT} + \frac{AR \cdot AS}{BR} - \frac{AT \cdot AV}{TC} + \frac{2AB \cdot AE}{BR} \right)$.

Sur la droite AB prenez une partie AP que vous déterminerez par cette proportion, $BR : CT :: AB : AP$, d'où vous tirerez.....

$\frac{2AP \cdot AE}{CT} = \frac{2AB \cdot AE}{BR}$. Or, $\frac{2AP \cdot AE}{CT} = \frac{(2AK + 2KP) \cdot AE}{CT}$;

donc $\frac{2PK \cdot AE}{CT} = \frac{2AB \cdot AE}{BR} - \frac{2AK \cdot AE}{CT}$, ou bien.....

$-\frac{2PK \cdot AE}{CT} = \frac{2AK \cdot AE}{CT} - \frac{2AB \cdot AE}{BR}$. Le premier membre

de cette équation étant substitué à la place du second dans l'expression de la valeur de DE , on aura.....

$DE = \frac{CT}{2CK} \left(\frac{AR \cdot AS}{BR} - \frac{AT \cdot AV}{TC} - \frac{2PK \cdot AE}{CT} \right)$. Sur AB ,

et par le point A , élevez une perpendiculaire, dont la valeur soit,

$AQ = \frac{CT}{2CK} \left(\frac{AR \cdot AS}{BR} - \frac{AT \cdot AV}{TC} \right)$. Sur cette perpendiculaire

prenez $QO = \frac{PK \cdot AE}{CK}$, et vous aurez $AO = DE$. Unissez par

des droites, les points O, D ; D, Q ; et C, P ; et les triangles

DOQ, CKP seront semblables; car ils ont chacun un angle droit,

et les côtés autour de cet angle, proportionnels, puisqu'on a fait

$QO = \frac{PK \cdot AE}{CK}$, ce qui donne la proportion $CK : PK :: AE$

ou $DO : QO$. Donc les angles OQD, KPC sont égaux, par

conséquent, QD a une direction perpendiculaire à PC . Si on mène

donc à CP la parallèle AN , la rencontre de cette droite avec QD

au point N , y formera un angle droit ANQ , et les triangles AQN ,

PCK seront semblables. On aura donc $PC : CK :: AQ : AN$. Et

à cause de $AQ = \frac{CT}{2CK} \left(\frac{AR \cdot AS}{BR} - \frac{AT \cdot AV}{TC} \right)$, on aura...

$AN = \frac{CT}{2PC} \left(\frac{AR \cdot AS}{BR} - \frac{AT \cdot AV}{TC} \right)$. Prolongez AN jusqu'en

M , de manière que $AD = DM$, alors le cercle cherché passera

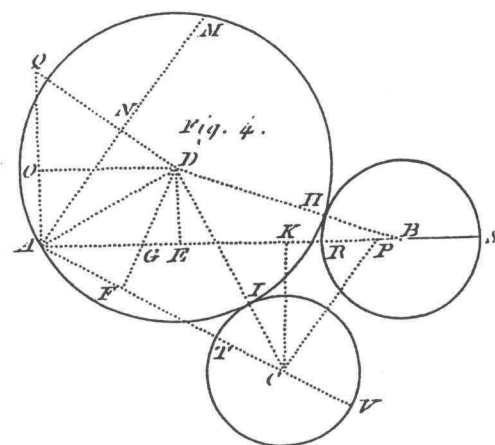
par le point M . Un point M du cercle étant trouvé de cette manière,

voici comment on parviendra, sans aucune analyse ultérieure, à la

résolution du problème. Prenez sur AB une ligne AP dont vous déterminerez la longueur par cette proportion, $BR : CT :: AB : AP$, tirez la droite CP , menez à CP la parallèle AM , et faites, $AM : \frac{AR \cdot AS}{BR} - \frac{AT \cdot AV}{TC} :: CT : PC$; et par le moyen du problème XLV, faites passer par les points A et M le cercle $AIHM$, de manière qu'il touche un des cercles HRS , TIV , et il les touchera tous les deux. C. Q. F. T.

Par ce même problème on pourrait décrire un cercle qui en touchât trois autres donnés de grandeur et de position. Soient A , B , C les rayons des trois cercles donnés, D , E , F leurs centres; des centres E et F , avec des rayons respectivement égaux à $B \pm A$, $C \pm A$ décrivez deux cercles, et un troisième qui passe par le point D . Soit G le rayon de ce troisième cercle, et H son centre. Du point H avec un rayon égal à $G \pm A$, décrivez un quatrième cercle, et il touchera les trois autres, comme on le demandait.

Plancha 6



**Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la résolution
des équations dans les problèmes tant déterminez qu'indéterminez.**

Ouvrage posthume de M. le Marquis de L'Hospital,

Paris, Boudot,

1707

Livre dixième. Des problèmes déterminez

P. 374 à 381.

Exemple IV

432 - Trois points A, B, C, étant donnés, en trouver un quatrième M, duquel ayant mené à ces points les droites MA, MB, MC, les différences de l'une d'elles aux deux autres soient données.

Cette question est susceptible de trois différents cas ; car ou les trois lignes MA, MB, MC, sont toutes égales entr'elles ; ou il y en a seulement deux qui soient égales entr'elles ; ou enfin toutes les trois sont inégales entr'elles.

Premier cas : Lorsque les trois lignes MA, MB, MC, sont égales entr'elles ; ou ce qui est la même chose lorsque les deux différences données sont nulles. Il est clair que le point cherché M sera le centre du cercle qui passe par les trois points donnés A, B, C.

Second cas : Lorsque deux des trois lignes MA, MB, MC, comme MA, MB, doivent être égales entr'elles ; ou (ce qui est la même chose) lorsqu'une des différences données est nulle.

Ayant tiré, du point C donné, la perpendiculaire CO sur la ligne AB qui joint les deux autres points donnés A, B ; du point M que l'on suppose être celui qu'on cherche, ayant mené les droites MP, MQ, parallèles à CO, OB ; il est clair que AP sera égale à PB, puisque AM doit être égale à MB. Nommant donc les données AP ou PB, a ; OP, b ; OC, c ; AM - MC, f ; et les inconnues AM, z ; PM, y ; les triangles rectangles APM, MQC, donnent ces deux égalités $zz = aa + yy$ et $zz - 2fz + ff = cc - 2cy + yy + bb$; d'où en retranchant par ordre chaque membre de la seconde de ceux de la première, il vient $2fz - ff = aa - cc + 2cy - bb$, qui se réduit à cette proposition $z \cdot y + \frac{aa - bb - cc + ff}{2c} :: c \cdot f$. De là on tire la construction suivante :

Soit menée par le point de milieu P de la ligne AB, la perpendiculaire PD = $\frac{aa - bb - cc + ff}{2c}$. Soit divisée l'hypothénuse¹⁵ AD prolongée du côté qu'il sera nécessaire, aux points E, F ; en sorte que AE . ED :: c . f, et AF . FD :: c . f. Du diamètre EF soit décrit un cercle ; il coupera la ligne PD au point cherché M.

¹⁵L'orthographe de l'édition consultée a été respectée dans la mesure du possible. Le mot "hypoténuse" est très souvent écrit avec un "h" dans les textes édités à cette époque.

Car ayant mené la droite MA, il est clair par la propriété du cercle EMF, que $AM(z) \cdot MD(y + \frac{aa - bb - cc + ff}{2c}) :: c \cdot f$; et par la propriété de la perpendiculaire PM, que $zz = aa + yy$. Or comme ces deux équations renferment les conditions du problème, il s'ensuit...

Si par l'autre point N, où la ligne DP rencontre la circonférence, on mène les droites NA, NB, NC ; les deux NA, NB, seront égales entr'elles ; et la différence de chacune de ces droites à la troisième NC sera égale à la donnée f ; de sorte que le point N satisfait aussi, mais avec cette différence que NC est la plus grande des trois droites NA, NB, NC au lieu que MC est la plus petite des trois MA, MB, MC.

On peut encore résoudre ce second cas sans aucun calcul. Je suppose comme auparavant que M soit le point cherché, et ayant tiré les droites MA, MB, MC, je décris du centre C, et du rayon $CD = MA - MC$, un cercle DEKF. Du point D où la ligne MC rencontre ce cercle, je mène aux deux points donnés A, B, les droites DA, DB qui rencontrent le cercle aux points E et F ; par où je tire les rayons EC, CF et la corde EF. Cela fait, puisque $MC + CD$ ou $MD = MA$, et que les lignes CD, CE, sont rayons d'un même cercle, les triangles DMA, DCE, seront isoselles¹⁶ ; et par conséquent semblables parce que l'angle en D est commun : c'est pourquoi les lignes CE, MA, seront parallèles. On trouvera de même que les lignes CF, MB, seront aussi parallèles ; ce qui donne $DA \cdot DE :: DM \cdot DC :: DB \cdot DF$.

Et de là on voit que toute la difficulté se réduit à trouver sur la circonférence du cercle DEKFH, le point D tel qu'ayant mené les droites DA, DB, qui rencontrent la circonférence aux points E, F ; la corde EF soit parallèle à la ligne AB. Or cela se peut faire ainsi.

Ayant décrit du point C un cercle qui ait pour rayon une ligne $CD = AM - MC$, et tiré AC qui rencontre ce cercle aux points K, H ; on prendra sur AB la partie AG quatrième proportionnelle à AB, AH, AK ; et on mènera du point G la tangente GE au cercle EDHFK. Ayant mené par le point touchant E la ligne AE qui rencontre le cercle au point D, on tirera DC, sur laquelle on prendra le point M tel que $DM \cdot DC :: DA \cdot DE$.

Je dis qu'il sera celui qu'on cherche.

Car par la propriété du cercle DEKFH le rectangle $HA \cdot AK = DA \cdot AE$; et par conséquent $BA \cdot AD :: AE \cdot AG$. C'est pourquoi les triangles DAB, GAE, qui ont l'angle en A commun, et les côtés autour de cet angle réciproquement

¹⁶Voir note précédente.

proportionnels, seront semblables. L'angle AEG sera donc égal à l'angle ABD ; mais cet angle AEG étant fait par la tangente EG et par la corde DE prolongée du côté de E, a pour mesure la moitié de l'arc DE. Il sera donc égal. (en tirant par le point F où la ligne DB rencontre la circonférence, la corde EF) à l'angle DFE ; et par conséquent les lignes FE, AB, seront parallèles entr'elles. Or par la construction, $DC \cdot DM :: DE \cdot DA :: DF \cdot DB$. Les triangles DMA, DMB, seront donc isoselles. Les lignes AM, MB, seront donc égales chacune à DM et par conséquent entr'elles ; et de plus AM ou DM surpassera MC de la grandeur donnée CD. Et c'est ce qui était proposé.

Troisième cas :

Lorsque les trois lignes MA, MB, MC sont inégales entr'elles. Du point donné C, je mène la perpendiculaire CO sur la ligne AB qui joint les deux autres points donnés ; et du point M, que je suppose être celui qu'on demande, les perpendiculaires MP, MQ, sur les lignes AB, CO. Je nomme les données AO, a ; OB, b ; CO, c ; AM - MD, d ; AM - MC, f ; et les inconnues OP, x ; PM, y ; AM, z : ce qui donne $AP = a + x$, $BP = b - x$, $CQ = c - y$, $BM = z - d$, $CM = z - f$. Par le moyen des triangles rectangles APM, BPM, CQM, je trouve les trois équations suivantes ; la première, $zz = aa + 2ax + xx + yy$; la deuxième, $zz - 2dz + dd = bb - 2bx + xx + yy$; la troisième, $zz - 2fz + ff = cc - 2cy + yy + xx$; et retranchant par ordre les membres des deux dernières de ceux de la première, je forme une quatrième, et une cinquième équation ; sçavoir la quatrième, $2dz - dd = aa - bb + 2ax + 2bx$, et la cinquième, $2fz - ff = aa - cc + 2ax + 2cy$. Je mets dans la première équation à la place de yy le quarré de la valeur de y trouvée par le moyen de la cinquième ; et ensuite à la place de x sa valeur trouvée par le moyen de la quatrième, et à la place de xx le quarré de cette valeur : ce qui donne enfin une égalité où il n'y a plus d'inconnues que la seule z qui ne monte qu'au quarré. C'est pourquoi on la pourra toujours résoudre en n'employant que des lignes droites et des cercles, comme on l'a enseigné dans les art. 380 ou 382. Or ayant la valeur de l'inconnue z, il est facile de trouver le point cherché M ; car il sera dans l'intersection de deux arcs de cercles, dont l'un aura pour centre le point A, et pour rayon la ligne AM(z) ; et l'autre pour centre le point B, et pour rayon la ligne BM(z - d).

On voit assez qu'en achevant le calcul, on serait arrivé à une égalité du second degré qui aurait renfermé dans ses termes des quantités très composées ; de sorte que pour les réduire sous des expressions simples, comme le demandent

les articles 380 et 382, on aurait besoin d'un grand nombre d'opérations ; ce qui rendrait la construction très longue. C'est pourquoi on se servira de celle-ci par le moyen de laquelle on revient au cas précédent.

Les deux droites AB, AC qui joignent les points donnés étant divisées par le milieu aux deux points D, F et ayant mené du point M que je suppose être celui que l'on cherche, les perpendiculaires MP, MQ, sur ces deux lignes ; on nommera les données AB, 2a ; BC, 2b ; AM - MB, 2c ; AM - MC, 2d ; et les inconnues DP, x ; FQ, y. Cela posé, si l'on nomme 2t la somme inconnue des deux droites AM, BM ; la plus grande AM sera t + c et la moindre BM sera t - c. Or les triangles rectangles APM, BPM, donnent

$$\overline{PM}^2 = \overline{AM}^2 - \overline{AP}^2 = \overline{BM}^2 - \overline{BP}^2$$

c'est-à-dire en termes analytiques

$$tt + 2ct + cc - aa - 2ax - xx = tt - 2ct + cc - aa + 2ax - xx,$$

$$\text{d'où l'on tire } t = \frac{ax}{c} ; \text{ et par conséquent } AM(t + c) = \frac{ax}{c} + c.$$

On trouvera de même par le moyen des deux triangles rectangles AQM, CQM, que $AM = \frac{by}{d} + d$; ce qui, en comparant les deux valeurs de AM, donne cette équation

$$\frac{ax}{c} + c = \frac{by}{d} + d, \text{ ou } \frac{ax}{c} = \frac{by}{d} + d - c = \frac{by}{d} + f, \text{ en faisant pour abréger } d - c = f.$$

D'où il est clair que le point cherché M doit être tel qu'ayant mené les perpendiculaires MP, MQ sur les deux droites AB, AC ; on ait cette équation :

$$\frac{ax}{c} = \frac{by}{d} + f, \text{ ou ce qui revient au même cette proportion } x \cdot y + \frac{df}{b} : : b \cdot \frac{ad}{c}.$$

Or cela suffit pour trouver la construction suivante.

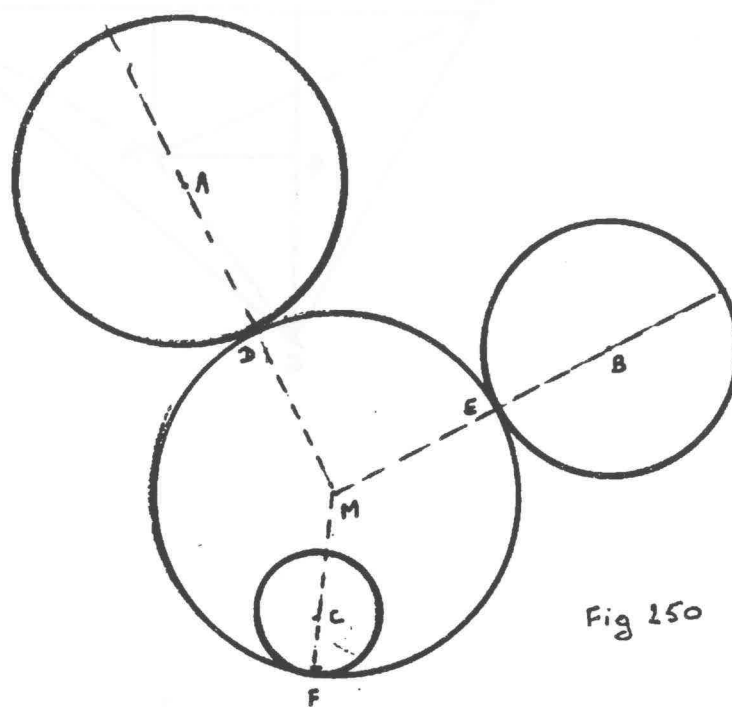
Ayant joint les points donnés par les deux droites AB, AC et divisé ces droites par le milieu aux points D, F ; on prendra sur AC du côté du point A la partie $FK = \frac{df}{b}$; et ayant tiré sur AB, AC, les perpendiculaires DO, KS, qui se rencontrent au point H, on mènera dans l'angle OHS la droite HM qui soit le lieu des points M, tels qu'ayant tiré de chacun d'eux les perpendiculaires MO, MR, sur les côtés HO, HS ; la droite MO soit toujours à la droite MR, en la raison donnée de b à $\frac{ad}{c}$. Ensuite l'on tirera AE perpendiculaire sur HM, et l'ayant prolongée en G en sorte que EG soit égale à AE, on trouvera par le second cas le point M, tel qu'ayant mené les droites MA, MG, MC ; les deux MA, MG, soient égales entr'elles, et la différence de MA à MC soit la donnée 2d. Je dis qu'il satisfera à la question.

Car par la propriété de la droite HM, on aura toujours MO ou DP(x) . MR ou QK($y + \frac{df}{b}$) : : $b \cdot \frac{df}{b}$, et par conséquent le point M se doit trouver dans cette ligne. Il sera donc également éloigné des points A, G ; mais de plus la différence de AM à MC doit être la donnée 2d. Donc etc...

Corollaire I

434 - De là on voit comment on peut décrire un cercle qui touche trois cercles donnés.

Car soient les points A, B, C, les centres des cercles donnés, et le point M celui du cercle qu'on cherche, lequel touche les cercles donnés aux points D, E, F, du côté que l'on voit dans la figure. Soient les rayons des cercles donnés AD = a, BE = b, CF = c ; et le rayon du cercle qu'on cherche MD ou ME ou MF = z. Cela posé, on aura AM = z + a, MB = z + b, MC = z - c ; et partant AM - MB = a - b, MB - MC = b + c, AM - MC = a + c. D'où il est évident que la question se réduit à trouver un point M, duquel ayant mené aux trois points A, B, C, les droites MA, MB, MC, leurs différences soient données.



Euler**Texte latin**

**Leonardi Euleri Opera omnia, vol XXVI, Andreas Speiser ed. Lausanne
1953.**

Commentationes geometricae, vol. I, p.270 à 275.

SOLUTIO FACILIS PROBLEMATIS QUO QUAERITUR CIRCULUS QUI DATOS TRES CIRCULOS TANGAT

Commentatio 648 indicis ENESTROEMIANI

Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 6 (1788), 1790, p. 95—101

Summarium ibidem p. 89

Conventui exhibita die 4. Novembris 1779

SUMMARIUM

Ce petit Mémoire, dont le titre indique suffisamment le sujet, n'est pas susceptible d'extrait: car il seroit impossible de se faire une idée de la solution que l'Auteur donne de ce Problème traité par beaucoup de Géomètres, sans le suivre presque pas à pas dans ses calculs.

1. Sint A, B, C (Fig. 1) centra trium circulorum datorum, pro quorum situ sit distantia $CA = a$, $CB = b$ et angulus $ACB = C$. Deinde sint α, β, γ radii horum trium circulorum, O centrum circuli omnes tres tangentis, cuius radius ponatur $= x$. Ductis igitur rectis OA, OB, OC , quae per puncta contactus transibunt, habebimus

$$OA = x + \alpha, \quad OB = x + \beta$$

$$\text{et } OC = x + \gamma.$$

Hic vero ante omnia probe notandum est contactus singulorum circulorum non solum intus, sed etiam extus evenire posse. Ita si circulus C

extus tangeretur, foret $OC = x - \gamma$; unde patet radios horum circulorum tam negative, quam affirmative accipi posse. Hinc evidens est octo solutiones

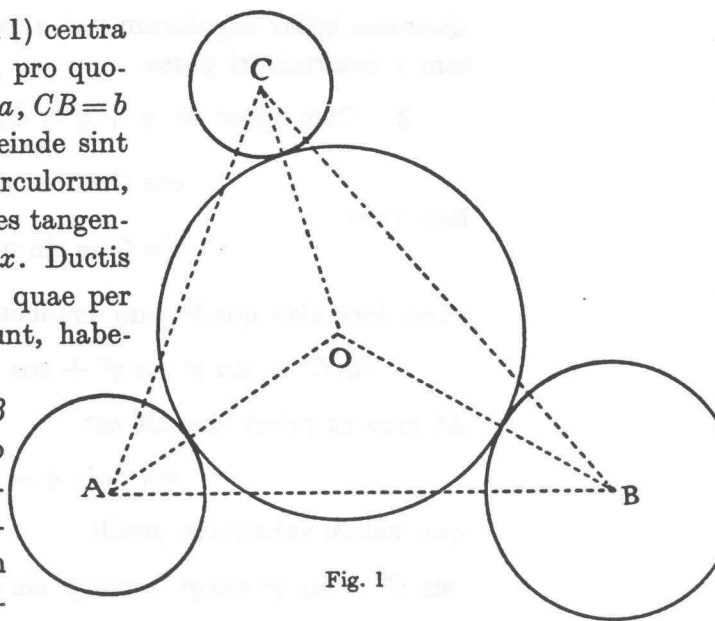


Fig. 1

locum habere posse, quae scilicet ex variatione signorum litterarum α, β, γ oriuntur. Interim tamen in solutione has litteras α, β, γ ut positivas spectabimus, calculo vero expedito nihil impedit, quominus earum uni vel alteri valor negativus tribuatur.

2. Statuamus autem brevitatis gratia $OC = x + \gamma = z$, ut sit $x = z - \gamma$, tum vero fiat $\alpha - \gamma = f$ et $\beta - \gamma = g$, ut prodeat $OA = z + f$ et $OB = z + g$. Quodsi iam vocentur anguli $OCA = p$ et $OCB = q$, ita ut sit $p + q = C$, ex triangulo OCA , cuius latera sunt $OC = z$, $OA = z + f$ et $AC = a$, colligitur:

$$\cos p = \frac{aa + zz - (z + f)^2}{2az} = \frac{aa - 2fz - ff}{2az}.$$

Simili modo ex triangulo OCB , cuius latera sunt $OC = z$, $OB = z + g$ et $CB = b$, colligitur:

$$\cos q = \frac{bb + zz - (z + g)^2}{2bz} = \frac{bb - 2gz - gg}{2bz}.$$

Quoniam igitur angulorum p et q summa datur $= C$, evidens est hinc incognitam z determinari posse.

3. Cum igitur sit $p + q = C$, erit

$$\cos C = \cos p \cos q - \sin p \sin q,$$

tum vero

$$\sin C = \sin p \cos q + \cos p \sin q,$$

cuius formulae quadratum praebet:

$$\sin^2 C = \sin^2 p \cos^2 q + \cos^2 p \sin^2 q + 2 \sin p \cos q \cos p \sin q.$$

At vero ex priori formula est

$$\sin p \sin q = \cos p \cos q - \cos C,$$

quo valore substituto prodit

$$\sin^2 C = \sin^2 p \cos^2 q + \cos^2 p \sin^2 q + 2 \cos p^2 \cos q^2 - 2 \cos p \cos q \cos C,$$

hinc iam, cum sit

$$\sin^2 p = 1 - \cos^2 p \quad \text{et} \quad \sin^2 q = 1 - \cos^2 q,$$

haec aequatio induet istam formam:

$$\sin^2 C = \cos^2 p + \cos^2 q - 2 \cos p \cos q \cos C.$$

4. Quo iam hanc aequationem facilius resolvamus, statuamus brevitatibus gratia $aa - ff = 2F$ et $bb - gg = 2G$, ut sit

$$\cos p = \frac{F - fz}{az} \quad \text{et} \quad \cos q = \frac{G - gz}{bz},$$

quibus valoribus substitutis nostra aequatio erit

$$\sin C^2 = \frac{(F - fz)^2}{aazz} + \frac{(G - gz)^2}{bbzz} - 2 \frac{(F - fz)(G - gz) \cos C}{abzz},$$

quae aequatio in ordinem redacta evadet:

$$\begin{aligned} aabbzz \sin C^2 = & bbF^2 - 2bbFfz + bbffzz + aaG^2 - 2aaGgz \\ & + aaggzz - 2abFG \cos C + 2abGfz \cos C - 2abfgzz \cos C \\ & + 2abFgz \cos C. \end{aligned}$$

Aequatio igitur inventa sub hac forma repraesentari potest:

$$Lzz - 2Mz + N = 0,$$

existente

$$L = bbff + aagg - aabb \sin C^2 - 2abfg \cos C,$$

$$M = bbFf + aaGg - ab \cos C (Gf + Fg),$$

$$N = bbF^2 + aaG^2 - 2abFG \cos C.$$

Quoniam igitur valores litterarum L , M , N sunt cogniti, ex resolutione huius aequationis quadraticae colligitur fore

$$z = \frac{M \pm \sqrt{M^2 - LN}}{L}.$$

Unde patet binas solutiones prodire, atque adeo ambas reales, simodo fuerit $M^2 > LN$; consequenter ob illas octo signorum variationes, quae supra sunt commemoratae, omnino sedecim diversae videntur dari solutiones, id quod eo magis notari meretur, quod omnes istae solutiones tantum ex aequatione quadratica deducuntur. Praeterea vero imprimis hoc observandum est dari etiam casus, quibus solutio prorsus fit impossibilis, id quod evenit, quando fuerit $LN > M^2$.

5. Hoc igitur modo solutio nostri problematis ad calculum non nimis complexum est deducta, unde, quicumque valores pro quantitativis cognitis fuerint assumpti, per calculum numericum valor ipsius z facile assignabitur.

6. Quanquam autem applicatio ad quosvis casus propositos nulla laborat difficultate, tamen, quando aequatio quadratica radicem negativam in-

volvit, ita ut littera z negativum obtineat valorem, non tam facile perspicitur, quomodo tales casus sint repraesentandi. Omnis autem difficultas evanescet, si ostenderimus valores negativos pro z inventos proprie non ad ipsum casum propositum pertinere, sed ad eum casum, quo radiis circulorum α, β, γ contraria signa tribuuntur; unde fit, ut, etiamsi quaelibet aequatio quadratica duas complectatur radices, tamen omnino non plures quam octo solutiones locum habere queant.

7. Quod quo clarius perspiciatur, ante omnia observasse iuvabit, cum sit $\alpha - \gamma = f$ et $\beta - \gamma = g$, mutatis signis litterarum α, β, γ etiam f et g contraria signa recipere; nihilo vero minus litterae derivatae $F = \frac{aa - ff}{2}$ et $G = \frac{bb - gg}{2}$ nullam patiuntur mutationem. Hinc cum sit

$$L = bbff + aagg - aabb \sin C^2 - abfg \cos C,$$

evidens est mutatis litterarum f et g signis, litteram L eandem manere; at quia est

$$M = bbFf + aaGg - ab \cos C (Gf + Fg),$$

mutatis litterarum f et g signis etiam signum litterae M immutatur; denique vero ob

$$N = bbF^2 + aaG^2 - 2abFG \cos C$$

etiam littera N idem signum conservabit. Quamobrem mutatis signis radiorum α, β, γ solutio perducet ad hanc aequationem:

$$Lzz + 2Mz + N = 0,$$

quae eadem aequatio prodit, si z negative capiatur. Ex quo sequitur, quoties valor ipsius z prodit negativus, tum eum respondere casui, quo radiis α, β, γ contraria signa tribuuntur; ita ut bini casus α, β, γ et $-\alpha, -\beta, -\gamma$ ad eandem aequationem quadraticam perducant, cuius radix positiva priori casui convenit, negativa vero posteriori, quae autem tum ut positiva est spectanda. Hinc igitur manifestum est tantum quatuor diversas aequationes quadraticas prodire posse, quarum quaelibet binos casus complectatur, uti hoc schema declarat:

I.	II.	III.	IV.
$\alpha + \beta + \gamma$	$\alpha + \beta - \gamma$	$\alpha - \beta + \gamma$	$-\alpha + \beta + \gamma$
$-\alpha - \beta - \gamma$	$-\alpha - \beta + \gamma$	$-\alpha + \beta - \gamma$	$+\alpha - \beta - \gamma$

Hoc observato applicatio ad quaevis exempla nulli amplius difficultati erit obnoxia.

8. Verum quia hoc problema est geometricum, non tam calculus numericus, quam constructio geometrica desiderari solet, quae utique nimis prodiret operosa, si eam ex aequatione quadratica $Lzz - 2Mz + N = 0$ derivare vellemus; quamobrem hic plurimum iuvabit talem constructionem ex ipsis calculi principiis derivasse.

CONSTRUCTIO PROBLEMATIS PROPOSITI

9. Ponatur angulus datus $ACB = 2\zeta$ ac statuatur

$$\text{angulus } ACO = p = \zeta + \varphi \text{ et } BCO = q = \zeta - \varphi,$$

calculusque ita instruamus, ut angulus φ fiat nostra incognita. Habebimus ergo

$$\cos(\zeta + \varphi) = \frac{F}{az} - \frac{f}{a}$$

et

$$\cos(\zeta - \varphi) = \frac{G}{bz} - \frac{g}{b},$$

hinc eliminando z erit

$$\frac{G}{b} \cos(\zeta + \varphi) - \frac{F}{a} \cos(\zeta - \varphi) = \frac{Fg - Gf}{ab}$$

sive

$$aG \cos(\zeta + \varphi) - bF \cos(\zeta - \varphi) = Fg - Gf,$$

quae aequatio porro evoluta dat

$$\left. \begin{aligned} aG \cos \zeta \cos \varphi - aG \sin \zeta \sin \varphi \\ - bF \cos \zeta \cos \varphi - bF \sin \zeta \sin \varphi \end{aligned} \right\} = Fg - Gf$$

sive

$$Gf - Fg = (bF - aG) \cos \zeta \cos \varphi + (aG + bF) \sin \zeta \sin \varphi.$$

Ponatur hic brevitatis gratia $Gf - Fg = L$, $bF - aG = M$ et $aG + bF = N$, habebimus hanc aequationem:

$$L = M \cos \zeta \cos \varphi + N \sin \zeta \sin \varphi,$$

cuius constructio sequenti modo erui poterit. Introducatur angulus θ , ut sit

$$\text{tang } \theta = \frac{M \cos \zeta}{N \sin \zeta},$$

ut adeo iste angulus θ sit cognitus; hinc ergo fiet

$$\sin \theta = \frac{M \cos \zeta}{\sqrt{M^2 \cos^2 \zeta + N^2 \sin^2 \zeta}}$$

et

$$\cos \theta = \frac{N \sin \zeta}{\sqrt{M^2 \cos^2 \zeta + N^2 \sin^2 \zeta}}.$$

Cum igitur sit

$$N \sin \zeta = \cos \theta \sqrt{M^2 \cos^2 \zeta + N^2 \sin^2 \zeta}$$

et

$$M \cos \zeta = \sin \theta \sqrt{M^2 \cos^2 \zeta + N^2 \sin^2 \zeta},$$

his substitutis erit

$$\frac{L}{\sqrt{M^2 \cos^2 \zeta + N^2 \sin^2 \zeta}} = \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi = \sin (\theta + \varphi).$$

Quodsi iam ille angulus, cuius sinus est

$$\frac{L}{\sqrt{M^2 \cos^2 \zeta + N^2 \sin^2 \zeta}},$$

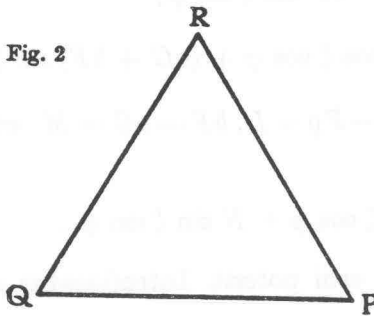
ponatur $= \lambda$, habebitur ista aequatio: $\sin \lambda = \sin (\theta + \varphi)$, unde, quia etiam est $\sin \lambda = \sin (180^\circ - \lambda)$, habebimus duplicem aequationem: altera dat $\theta + \varphi = \lambda$ ideoque $\varphi = \lambda - \theta$, altera vero aequatio dat $\varphi = 180^\circ - \lambda - \theta$. Si autem loco L , M et N valores assumpti restituantur, prodibit

$$\tan \theta = \frac{(bF - aG) \cos \zeta}{(aG + bF) \sin \zeta},$$

unde angulus θ facile colligitur. Porro vero erit

$$\sqrt{M^2 \cos^2 \zeta + N^2 \sin^2 \zeta} = \sqrt{bbF^2 + aaG^2 - 2abFG \cos 2\zeta},$$

Fig. 2



quae formula radicalis ergo facile construitur (Fig. 2) per triangulum PQR , cuius angulus $PQR = 2\zeta$ et latera $PQ = bF$ et $PR = aG$; tum enim erit tertium latus

$$QR = \sqrt{bbF^2 + aaG^2 - 2abFG \cos 2\zeta}.$$

Denique erit $\sin \lambda = \frac{Gf - Fg}{QR}$, ex quo etiam angulus λ facile construitur, unde determinatio anguli φ ideoque rectae CO innotescit, nec non ipsa quantitas

$$CO = z = \frac{F}{f + a \cos (\zeta + \varphi)}.$$

Traduction française

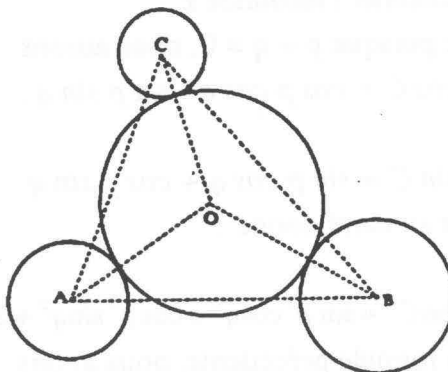
**SOLUTION D'UN PROBLEME FACILE OU EST DEMANDE UN CERCLE
QUI SOIT TANGENT A TROIS CERCLES DONNES.**

Nouveaux actes de l'académie des sciences de Saint-Petersbourg, 6, 1788-1790.
Exposé dans la réunion du 4 novembre 1779.

RESUME

Ce petit mémoire, dont le titre indique suffisamment le sujet, n'est pas susceptible d'extrait : car il serait impossible de se faire une idée de la solution que l'Auteur donne de ce Problème traité par beaucoup de Géomètres, sans le suivre presque pas à pas dans ses calculs.¹⁷

1. Soient A, B, C (fig.1) les centres des trois cercles donnés ; soit la distance entre l'emplacement de ces centres $CA = a$, $CB = b$, et l'angle $ACB = C$. Soient ensuite α , β , γ , les rayons de ces trois cercles, O le centre du cercle tangent aux trois autres, dont le rayon est posé $= x$.



¹⁷Le résumé est en français dans le texte original.

Les trois droites OA, OB, OC qui franchiront les contacts par des points, étant tracées, nous aurons

$OA = x + \alpha$, $OB = x + \beta$, et $OC = x + \gamma$. Or ici, il faut noter avant toute chose avec rigueur que le contact entre chaque cercle peut se trouver non seulement dedans, mais aussi à l'extérieur. Ainsi si le cercle C était touché à l'extérieur, nous aurions $OC = x - \gamma$; il est donc clair que les rayons de ces cercles peuvent être considérés tant positivement que négativement. Il est par là évident que huit solutions peuvent exister, qui dépendent naturellement de la variation de signe des lettres α , β , γ . Cependant dans la solution nous considérerons ces trois lettres comme positives, mais pour un calcul complet rien n'empêche d'attribuer à l'une ou l'autre de ces lettres une valeur négative.

2. Appelons par souci de brièveté $OC = x + \gamma = z$, pour avoir $x = z - \gamma$. Soit alors $\alpha - \gamma = f$ et $\beta - \gamma = g$, si bien que $OA = z + f$ et $OB = z + g$. Si l'on appelle les angles $OCA = p$ et $OCB = q$, de façon à avoir $p + q = C$, en partant du triangle OCA, dont les côtés sont $OC = z$, $OA = z + f$ et $AC = a$, on obtient :

$$\cos p = \frac{aa + zz - (z + f)^2}{2az} = \frac{aa - 2fz - ff}{2az}.$$

De la même façon à partir du triangle OCB, de côtés $OC = z$, $OB = z + g$ et $CB = b$, on obtient :

$$\cos q = \frac{bb + zz - (z + g)^2}{2bz} = \frac{bb - 2gz - gg}{2bz}.$$

Puisque la somme des angles p et q est donnée $= C$, il est évident que l'on peut à partir de là déterminer l'inconnue z .

3. Donc puisque $p + q = C$, nous aurons

$$\cos C = \cos p \cos q - \sin p \sin q,$$

et d'autre part

$$\sin C = \sin p \cos q + \cos p \sin q$$

dont la formule au carré donne :

$$\sin^2 C = \sin^2 p \cos^2 q + \cos^2 p \sin^2 q + 2 \sin p \cos q \cos p \sin q.$$

Mais d'après la formule précédente, nous avons

$$\sin p \sin q = \cos p \cos q - \cos C,$$

qui donne en substituant cette valeur

$$\sin^2 C = \sin^2 p \cos^2 q + \cos^2 p \sin^2 q + 2 \cos p \cos q - 2 \cos p \cos q \cos C,$$

et par là, puisque nous avons

$$\sin^2 p = 1 - \cos^2 p \quad \text{et} \quad \sin^2 q = 1 - \cos^2 q,$$

notre équation prendra cette forme :

$$\sin C^2 = \cos p^2 + \cos q^2 - 2 \cos p \cos q \cos C.$$

4. Pour résoudre plus facilement cette équation, posons par souci de brièveté, $aa - ff = 2F$ et $bb - gg = 2G$, de façon à avoir

$$\cos p = \frac{F - fz}{az} \quad \text{et} \quad \cos q = \frac{G - gz}{bz},$$

en substituant ces valeurs notre équation sera :

$$\sin C^2 = \frac{(F - fz)^2}{aazz} + \frac{(G - gz)^2}{bbzz} - 2 \frac{(F - fz)(G - gz) \cos C}{abzz},$$

laquelle équation rédigée dans l'ordre deviendra :

$$\begin{aligned} aabbzz \sin C^2 &= bbF^2 - 2bbFfz + bbffzz + aaG^2 - 2aaGgz \\ &\quad + aaggzz - 2abFG \cos C + 2abGfz \cos C - 2abfgzz \cos C \\ &\quad + 2abFgz \cos C. \end{aligned}$$

L'équation ainsi trouvée peut être représentée sous la forme :

$$Lzz - 2Mz + N = 0,$$

où

$$L = bbff + aagg - aabb \sin C^2 - 2abfg \cos C$$

$$M = bbFf + aaGg - ab \cos C (Gf + Fg)$$

$$N = bbF^2 + aaG^2 - 2abFG \cos C.$$

Donc, puisque les valeurs des lettres L, M, N, sont connues, on aura par la résolution de cette équation quadratique

$$z = \frac{M \pm \sqrt{(M^2 - LN)}}{L}.$$

Il est donc évident que les solutions vont par deux, et que les deux sont réelles, pour peu que $M^2 > LN$; par conséquent avec les huit variations de signes qui ont été évoquées plus haut, il paraît exister seize solutions au total, ce qui mérite d'autant plus d'être noté que toutes ces solutions découlent seulement d'une équation quadratique. Or il faut remarquer d'emblée qu'il existe des cas où il n'y a pas de solution possible du tout, ce qui arrive quand $LN > M^2$.

5. De cette manière la solution a été ramenée à un calcul pas trop complexe, dans lequel, quelles que soient les valeurs prises pour les quantités connues, la valeur de z sera facilement connue par le calcul numérique.

6. Si l'application fonctionne sans peine dans n'importe quel cas proposé, cependant quand l'équation quadratique inclut une racine négative, si bien que la lettre z prend une valeur négative, il n'est pas si facile de voir comment de tels cas peuvent se présenter. Mais la difficulté s'évanouira une fois que nous aurons montré que les valeurs négatives trouvées pour z ne sont pas proprement liées au

cas proposé, mais au cas où sont attribués des signes contraires aux rayons des cercles α, β, γ ; il s'ensuit que, même si une équation quadratique quelconque englobe deux racines, les solutions ne peuvent pas être plus nombreuses que huit.

7. Pour y voir plus clair, il sera utile de remarquer, avant toute chose, que, quand $\alpha - \gamma = f$ et $\beta - \gamma = g$, même si les signes des lettres α, β, γ , changent, f et g prennent aussi des signes contraires ; mais les lettres dérivées $F = \frac{aa - ff}{2}$ et

$G = \frac{bb - gg}{2}$ ne subissent aucun changement. Et donc puisque nous avons

$$L = bbff + aagg - aabb \sin C^2 - abfg \cos C,$$

il est évident que, si les signes des lettres f et g changent, la lettre L demeure la même ; mais parce que nous avons

$$M = bbFf + aaGg - ab \cos C (Gf + Fg),$$

si les signes des lettres f et g changent, le signe de la lettre M change ; enfin comme

$$N = bbF^2 + aaG^2 - 2abFG \cos C$$

la lettre N conservera le même signe. Pour cette raison, même si l'on change les signes des rayons α, β, γ , la solution aboutira à l'équation :

$$Lz + 2Mz + N = 0,$$

qui donne la même équation si z est pris négativement. d'où il s'ensuit que, chaque fois que la valeur de z est négative, elle répond alors au cas où les rayons α, β, γ , reçoivent des signes contraires ; en sorte que les deux cas α, β, γ , et $-\alpha, -\beta, -\gamma$, aboutissent à la même équation quadratique, dont la racine positive convient au premier cas, et la négative au second, qui doit être considéré alors comme positif. Il est donc alors manifeste que l'on peut seulement avoir quatre équations quadratiques différentes, possédant chacune deux couples de cas, comme le montre ce schéma :

I	II	III	IV
$\alpha + \beta + \gamma$	$\alpha + \beta - \gamma$	$\alpha - \beta + \gamma$	$-\alpha + \beta + \gamma$
$-\alpha - \beta - \gamma$	$-\alpha - \beta + \gamma$	$-\alpha + \beta - \gamma$	$+\alpha - \beta - \gamma$

Une fois ceci observé, l'application à n'importe quel exemple ne rencontrera plus aucune difficulté.

8. Mais parce que ce problème est géométrique, ce n'est pas tant le calcul numérique, que la construction géométrique qui ordinairement donne des soucis, elle qui s'avérerait en tout cas trop fastidieuse, si nous voulons la dériver de

l'équation quadratique $Lz^2 - 2Mz + N = 0$; c'est pourquoi sur ce point il nous sera très bénéfique de dériver une telle construction des principes même du calcul.

CONSTRUCTION DU PROBLÈME PROPOSÉ

9. Partons d'un angle donné $ACB = 2\zeta$ et construisons les angles $ACO = p = \zeta + \varphi$ et $BCO = q = \zeta - \varphi$ et ordonnons notre calcul de façon à ce que l'angle φ soit notre inconnue. Nous aurons donc,

$$\cos(\zeta + \varphi) = \frac{F}{az} - \frac{f}{a}$$

et

$$\cos(\zeta - \varphi) = \frac{G}{bz} - \frac{g}{b},$$

puis en éliminant z , nous aurons

$$\frac{G}{b} \cos(\zeta + \varphi) - \frac{F}{a} \cos(\zeta - \varphi) = \frac{Fg - Gf}{ab}$$

ou

$$aG \cos(\zeta + \varphi) - bF \cos(\zeta - \varphi) = Fg - Gf,$$

équation qui une fois développée donne

$$aG \cos \zeta \cos \varphi - aG \sin \zeta \sin \varphi - bF \cos \zeta \cos \varphi + bF \sin \zeta \sin \varphi = Fg - Gf$$

soit

$$Gf - Fg = (bF - aG) \cos \zeta \cos \varphi + (aG + bF) \sin \zeta \sin \varphi.$$

Par souci de brièveté, posons $Gf - Fg = L$, $bF - aG = M$ et $aG + bF = N$; nous aurons donc l'équation :

$$L = M \cos \zeta \cos \varphi + N \sin \zeta \sin \varphi,$$

dont la construction pourra s'effectuer de la façon suivante. Que soit introduit l'angle θ , tel que :

$$\tan \theta = \frac{M \cos \zeta}{N \sin \zeta},$$

d'où l'angle θ sera connu ; nous aurons donc ensuite

$$\sin \theta = \frac{M \cos \zeta}{\sqrt{(M^2 \cos^2 \zeta + N^2 \sin^2 \zeta)}}$$

et

$$\cos \theta = \frac{N \sin \zeta}{\sqrt{(M^2 \cos^2 \zeta + N^2 \sin^2 \zeta)}},$$

donc puisque

$$N \sin \zeta = \cos \theta \sqrt{(M^2 \cos^2 \zeta + N^2 \sin^2 \zeta)}$$

et

$$M \cos \zeta = \sin \theta \sqrt{(M^2 \cos^2 \zeta + N^2 \sin^2 \zeta)}$$

nous aurons après substitution

$$\frac{L}{\sqrt{(M^2 \cos^2 \zeta + N^2 \sin^2 \zeta)}} = \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi = \sin(\theta + \varphi).$$

Si cet angle, dont le sinus est

$$\frac{L}{\sqrt{(M^2 \cos^2 \zeta + N^2 \sin^2 \zeta)}}$$

est posé $= \lambda$, nous aurons l'équation : $\sin \lambda = \sin(\theta + \varphi)$, et puisque $\sin \lambda = \sin(180^\circ - \lambda)$, nous aurons une équation double : l'une donne $\theta + \varphi = \lambda$ et par conséquent $\varphi = \lambda - \theta$, la seconde équation donne $\varphi = 180^\circ - \lambda - \theta$. Si nous restituons au lieu de L, M, N les valeurs obtenues, nous aurons

$$\tan \theta = \frac{(bF - aG) \cos \zeta}{(aG + bF) \sin \zeta},$$

d'où l'on déduit aisément l'angle θ . Ensuite nous aurons

$$\sqrt{(M^2 \cos^2 \zeta + N^2 \sin^2 \zeta)} = \sqrt{(bbF^2 + aaG^2 - 2abFG \cos 2\zeta)},$$

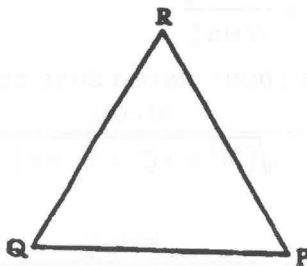
Cette formule en radicaux est donc facilement construite (fig.2) avec le triangle PQR, dont l'angle PQR $= 2\zeta$ et les côtés PQ $= bF$ et PR $= aG$; nous aurons alors le troisième côté

$$QR = \sqrt{(bbF^2 + aaG^2 - 2abFG \cos 2\zeta)}.$$

Enfin nous aurons $\sin \lambda = \frac{Gf - Fg}{QR}$, à partir de quoi l'angle λ se construit

facilement, ensuite on connaît la détermination de l'angle φ et donc de la droite CO, ainsi que la quantité

$$CO = z = \frac{F}{f + a \cos(\zeta + \varphi)}$$



**The two books of Apollonius Pergaeus,
concerning
tangencies, as they have been restored by
Franciscus Vieta and Marinus Ghetaldus.**

with

a Supplement

by John Lawson, B.D. Rector of Swancombe in Kent.

The second edition.

**London, printed by G. Bigg, successor to D. Leach and Fold by B. White, in
Fleet street.**

**L. Davis, in Holborne, J. Nourse, in the Strand, and T. Payne, near the
Mewsgate**

MDCCLXXI.

T H E
T W O B O O K S
Bib. Hist. Acad. OF Ang. Latini
APOLLONIUS PERGÆUS,
CONCERNING
T A N G E N C I E S,

As they have been Restored by
FRANCISCUS VIETA and MARINUS GHETALDUS.

WITH A
S U P P L E M E N T.

by JOHN LAWSON, B. D. Rector of Swanscombe in Kent.

THE SECOND EDITION.

TO WHICH IS NOW ADDED,
A SECOND SUPPLEMENT,
B E I N G
Mons. FERMAT'S Treatise on Spherical Tangencies.

L O N D O N :

printed by G BIGG. Successor to D. LEACH.



PREFACE.

Of the twelve Analytical Treatises recited by Pappus in his Preface to the 7th Book of his Mathematical Collections, we have very little of the Originals remaining, viz. only Euclids Data, and part of Apollonius's Conics. The loss of the rest is very much to be lamented by all Lovers of the Mathematics. "Valde quidem dolendum est quod reliqui tractatus Veterum Analytici a Pappo memorati, aut perierint, aut nondum lucem conspexerint. Nam minime dubito quin eorum nonnulli, Arabicè saltem versi, alicubi terrarum lateant, pulvere magis quam tenebris suis involuti." Dr. HALLEY's Preface to his Apollonius De Sectione rationis et spatii.

Some ingenious men have attempted, from the account of them given by Pappus, to restore some of these lost Treatises. Snellius has endeavoured to give us the Books De Sectione Rationis, De Sectione Spatii and De Sectione Determinata. Fermat and Schooten have laboured in the Treatise De Locis Planis; and Marinus Ghetaldus in that De Inclinationibus. But those who have succeeded best, and done the most this way, are two incomparable mathematicians of our own Country, Dr. Halley and Dr. Simpson, to whom the World is very much obliged for their Geometrical Labours. The first of these, from an Arabic MS in the Bodleian Library, has restored the books De Sectione Rationis; and from his own Sagacity supplied those De Sectione Spatii and the other has with equal pains and ingenuity completed those De Locis Planis.

As to the Treatise De Tactionibus, which I now give the English Reader, it has been restored by Vieta under the Title of Apollonius Gallus, and his

Deficiencies supplied by Marinus Ghetaldus. I have endeavoured to do Justice to my Authors by all possible Care both in the Text and in the Figures; and have added a few Propositions of my own, by way of Supplement,. in which I have proposed Ghetaldus's Problems over again without a Determination, and have found the Locus of the center of the circle required, which I have not seen done before in any Author.

PROBLEMS CONCERNING T A N G E N C I E S

PROBLEM I.

THROUGH two given points A and B to describe a circle whose radius shall be equal to a given line Z.

LIMITATION. $2Z$ must not be less than the distance of the points A and B.

CONSTRUCTION. With the centers A and B and distance Z, describe two arcs cutting or touching one another in the point E, (which they will necessary do by the Limitation) and E will be the center of the circle required.

PROBLEM II .

HAVING two right lines AB CD given in position, it is required to draw a circle, whose Radius shall be equal to the given line Z, which shall also touch both the given lines.

CASE 1st. Suppose AB and CD to be parallel.

LIMITATION. $2Z$ must be equal to the distance of the parallels, and the construction is evident.

CASE 2d. Suppose AB and CD to be inclined to each other, let them be produced till they meet in E, and let the angle BED be bisected by EH, and through E draw EF perpendicular to ED, and equal to the given line Z; through F draw FG parallel to EH, meeting ED in G, and through G draw GH parallel to EF. I say that the circle described with H center, and HG radius, touches the two given lines : it touches CD, because EF.GI is a Parallelogram, and hence the angle FEG is equal to EGH, but FEG is a right one by Construction. Let now HI be drawn from H perpendicular to AB: then the two triangles EHI and EHG having two angles in one HEI and EIH respectively equal to two angles in the other HEG and EGH, and also the side EH common, by Euc. I 26. HI will be equal to HG, and therefore the circle will touch also the other line AB : and HG or HI equals the given line Z, because EF was made equal to Z and HG and EF are opposite lines of a parallelogram.

PROBLEM III

HAVING two circles given whose centers are A and B, it is required to draw another, whose Radius shall be equal to a given line Z, which shall also touch the two given ones.

THIS Problem has various Cases according to the various position of the given circles, and the various manner of describing the circle required : but there are six principal ones, and to the conditions of these all the rest are subject.

CASE 1ft. Let the circle to be described be required to be touched *outwardly* by the given circles.

LIMITATION. Then it is necessary that $2Z$, or the given Diameter, should not be less than the segment of the line joining the centers of two given circles which is intercepted between their *convex* circumferences, viz. not less than CD in the Figure belonging to Case 1st.

CASE 2nd. Let the circle to be described be required to be touched *inwardly* by the given circles.

LIMITATION. Then it's Diameter must not be given less than the right line, which drawn through the centers of the given circles, is contained between their *concave* circumferences ; viz not less than CD.

CASE 3d. Let the circle to be described be required to be touched *outwardly* by one of the given circles, and *inward* by the other.

LIMITATION. - Then it's Diameter must not be given less than the segment of the right line, joining the centers of the given circles, which is intercepted between the *convex* circumference of one and the *concave* circumference of the other , viz. not less than CD.

CASE 4th. - Let one of the given circles include the other, and let it be required that the circle to be described be touched *outwardly* by them both.

LIMITATION. Then it's Diameter must not be given greater than the greater segment of the right line, joining the centers of the given circles, which is intercepted between the *concave* circumference of one and the *convex* circumference of the other: nor less than the lesser segment; viz. not greater than CD, nor less than MN.

CASE 5th. Let one of the given circles include the other, and let be required that the circle to be described be touched *outwardly* by one of the given circles, and *inwardly* by the other.

LIMITATION. Then it's Diameter must not be given greater than the greater segment of the right line, joining the centers of the given circles, which is intercepted between the two *concave* circumferences of the said circles, nor less than the lesser segment; viz. not greater than CD, nor less than MN.

CASE 6th. Let the two given circles cut each other, and let it be required that the circle to be described, and to

be touched by them both, shall also be included in each of them.

LIMITATION. Then it's Diameter must not be given greater than the segment of the right line, joining the centers of the given circles, intercepted by their *concave* circumferences, which lies in the space common to both the given circles; viz. not greater than CD.

THERE may be also three other Cases of this Problem, when the given circles cut each other; but because they are similar to the 1st, 2d, and 4th Cases already proposed, and subject to just the same Limitations; except that which is similar to the 1st, which is subject to no Limitation at all, they are here omitted; as are likewise those Cases where the given circles touch each other; because they are the same as the preceding, and solved in the same manner.

THE GENERAL SOLUTION.

Join the given centers A and B, and where the Case requires, let AB be produced to meet the given circumferences in C and D: and let CI and DH be taken equal to the given line Z: and let two circles be described; one with center A and distance AI, and the other with center B and distance BH: and these two circles will necessarily cut or touch each other by the Limitations given. Let the point of concourse be E: from E draw the right line EAF cutting the circle whose center is A in F; as also EBG cutting the circle whose center is B in G: then with center E and distance EF describe a circle FK, this will be the circle required: because AF and AC are equal as also AI and AE; therefore FE and CI are also equal: but CI was made equal to Z, therefore FE is equal to Z. Again, because BD and BG are equal, as also BH and BE, therefore DH and EG are also equal; but DH was made equal to Z, therefore EG is equal to Z. Hence it appears that the circle FK, passing through F will also pass thro' G, and likewise that it will also touch the given circles in F

and G, because EAF and EBG are right lines passing through the centers.

PROBLEM IV.

HAVING a given point A, and a given right line BC, it is required to draw a circle, whose Radius shall be equal to a given line Z, which shall pass through the given point, and also touch the given line.

LIMITATION. 2Z must not be given less than the perpendicular let fall from the *given* point A upon the given line BC.

FROM the point A let AD be drawn perpendicular to BC, and in this perpendicular take DE equal to the given line Z: and through E draw EF parallel to BC, and from A upon this line EF let off AF equal to Z, which may be done, for by the limitation Z is not less than AE: then with center F and distance FA describe a circle, and I say it will touch the line BC: for through F drawing FG parallel to AD, FGDE will be a Parallelogram, and FG will be equal to DE, that is to Z, and at right angles to BC.

PROBLEM V

HAVING given point A, and also a given circle whose center is B, it is required to draw a circle whose Radius shall be equal to a given line Z, which shall pass through the given point, and also touch the given circle.

THIS Problem has three Cases, each of which is subject to a Limitation.

CASE 1st. Let the circle to be described be required to be touched *outwardly* by the given circle.

LIMITATION. Then the Diameter must not be given less than the segment of the right line, joining the given point and the center of the given circle, which is intercepted between the given point and the *convex* circumference ; viz. nor less than AC.

CASE 2d. Let the circle to be described be required. to be touched by the given circle.

LIMITATION. Then the Diameter must not be given less than the right line which, drawn from the given point through the center of the given circle, is contained between the given point and the *concave* circumference, viz. not less than AC.

CASE 3d. Let the given point lie in the given circle.

LIMITATION. Then a diameter of the given circle being drawn through the given point, it is divided into two segments by the said point, and the Diameter of the circle required must not be given greater than the greater of them, nor less than the lesser, viz. not greater than AC, nor less than AG.

THE GENERAL SOLUTION.

LET A and B be joined, and in the line AB take CF equal to Z, and then with center A and distance Z, let an arc be drawn, and with center B, and distance BF let another be drawn which by the Limitations will necessarily either touch or cut the former ; let the point of their concourse ; then with D center and DA distance let a circle be drawn, and I say it will touch the given circle whose center is B : for B being drawn meeting the circumference of the circle whose center is B in E, BC is equal to BE, and hence CF equals ED, and they are both equal to the given line Z.

PROBLEM VI

HAVING a right line given BC, and also a circle whose center is A, it is required to draw another circle, whose Radius will be equal to a given right line z; and which shall touch both the given line and also the given circle.

THIS Problem has also three cases, each of which is subject to a Limitation.

CASE 1st. Let the circle to be described be required to be touched *outwardly* by the given circle.

LIMITATION. Then the Diameter of the circle required must not be given less than the segment of a line drawn from the center of the given circle, perpendicular to the given line, which is intercepted between the said line and the *convex* circumference, viz. not less than BD.

CASE 2nd. Let the circle to be described be required to be touched *inwardly* by the given circle.

LIMITATION. Then the given line must not be in the given circle, neither must the Diameter of the circle required be given less than that portion of the perpendicular, drawn from the center of the given circle to the given line, which is intercepted between the said line and the *concave* circumference, viz. not less than BD.

CASE 3d. Let the circle to be described be required to be both touched and included in the given circle.

LIMITATION. Then the given right line must be in the given circle, and when a Diameter of this given circle is drawn cutting the given line at right angles, the Diameter of the circle required must not be given greater than the greater segment ; viz. not greater than BD.

THE GENERAL SOLUTION.

FROM A draw AB perpendicular to BC, cutting the given circumference in D; and in this perpendicular let BG and DF be taken each equal to the given line Z ; and through G draw GE parallel to BC , and with center A and distance AF let an arc be struck, which by the Limitations will necessarily either touch or cut GE ; let the point of concourse be E, let AE be joined, and, if necessary, be produced to meet the given circumference in H ; then with E center and EH distance describe a circle, and I say it will be the required circle: it is evident it will touch the given circle : and because AD and AH are equal, as also

AF and AE, therefore DF (which was made equal to Z) will be equal to HE : let now EC be drawn perpendicular to BC, then GBCE will be a Parallelogram, and EC will be equal to GB, which was also made equal to Z : hence the circle will also touch the given line BC, because the angle ECB is a right one.

PROBLEM VII.

HAVING two points A and B given in position, and likewise a right line EF given in position, it is required to find the center of a circle, which shall pass through the given points and touch the given line.

CASE 1st. When the points A and B are joined, suppose AB to be parallel to EF : then bisecting AB in D, and through D drawing DC perpendicular to it, DC will also be perpendicular to EF: draw a circle therefore which will pass through the three points A, B, and C, (by Euc. IV, 5) and it will be the circle required : (by a Corollary from Euc. III. 1. and another from Euc. III. 16.)

CASE 2nd. Suppose AB not parallel to EF, but being produced meets it in E : then from EF take the line EC such, that its square may be equal to the rectangle BEA and through the points A, B, C, describe a circle, and it will be the circle required by Euc. III. 37.

THIS is Vieta's Solution. But Mr. Thomas Simpson having constructed this, and some of the following both in the Collection of Problems at the end of his Algebra, and also among those at the end of his Elements of Geometry, I shall add one of his Constructions.

LET A and B be the points given, and CD the given line: drawing AB and bisecting it in E, through E let EF be drawn perpendicular to AB and meeting CD in F: and from any point H in EF draw MG perpendicular to CD, and having drawn BF, to the same apply HI = HG, and parallel

thereto draw BK meeting EF in K: then with center K and radius BK let a circle be described, and the thing is done : join KA, and draw KL perpendicular to CD, then because of the parallel lines, $HG: HI:: KL: KB$; whence as HG and HI are equal, KL and KB are likewise equal. But it is evident from the Construction that

$KA = KB$; therefore $KB = KL = KA$.

BECAUSE two equal lines HI and Hi may be applied from H to BF each equal to HG, the Problem will therefore admit of two Solutions, as the Figure shows: except in the case when one of the given points, A for instance, is given in the line CD, for then the Problem becomes more simple, and admits but of one construction, as the center of the circle required must be in the line EF continued, as also in the perpendicular raised from A to CD, and therefore in their common intersection: and this is the limit of possibility ; for should the line CD pass between the given points, the Problem is impossible.

N.B. THO' Vieta does not take notice that this problem is capable of two answers, yet this is as evident from his construction, as from Mr. Simpson's, for EC (the mean proportional between EB and EA) may be set off upon the given line EF either way from the given point E .

LEMMA I.

A point A being given between the two right lines BC and DE, it is required through the point A to draw a line cutting the two given ones at equal angles.

IF the given lines be parallel, then a perpendicular to them through the point A is the line required. But if not, then let them be produced to meet in the point F : and let FG be drawn bisecting the Angle BFD, and through A draw a perpendicular to FG, and it will be the line required by Euc. I. 26.

PROBLEM VIII.

HAVING a point A given, and also two right lines BC and DE, to draw a circle which shall pass through the given point, and touch both the given right lines.

BY the preceding Lemma draw a line IAH through the point A, which shall make equal angles with the two given lines BC and DE: bisect IH in K; and taking $KL = KA$, by means of the preceeding Problem draw a circle which shall pass through the points A and L, and likewise touch one of the given lines, BC for instance, in the point M. I say this circle will also touch the other given line DE: for from the center N letting fall the perpendicular NO, and joining NI, NH, NM; in the triangles NKH, NKI, NK being common, and $HK = KI$, and the Angles at K right ones Euc. 1.4. $NH = NI$ likewise angle $NHK = \text{angle } NIK$, from hence it follows, that the angle $NHM = \text{angle } NIO$; and the angles at M and O, being both right, and NH being proved equal to NI, NM will be equal to NO by. Euc. 1.26.

Mr. Simpson constructs the Problem thus.

LET BD and BC be the given lines meeting in B, and A the given point, join AB, and draw BN bisecting the given angle DBC: and from any point E in BN upon BC let fall the perpendicular EF, and to BA apply $EG = EF$, parallel to which draw AH meeting BN in H: then from center H with Interval AH let a circle be described, and the thing is done. Upon BC and BD let fall the perpendicular HI, HK, which are manifestly equal, because by construction: the angle $HBI = HBK$; moreover as $EF: EG:: HI: HA$: but EF and EG. are equal, therefore also HI and HA.

PROBLEM IX.

HAVING a circle whose center is A given in magnitude and position, and also two right lines BD et ZC given in position, to draw a circle which shall touch all three.

FROM A draw two perpendiculars to the right lines DB, ZC ; viz. ADF and AZX ; and in these perpendiculars take DF, ZX, on either side of D and Z, equal to the Radius of the given circle : and through F and X, draw lines parallel to DB, ZC; viz. FG, XH ; and then by the preceding Problem draw a circle which shall pass through the given center A and touch the two lines FG, XH ; and E the center of this circle will also be the center of the circle required, as appears by subtracting equals from equals in Figure 1: and by. adding equals to equals in Figure 2.

LEMMA II .

IF the two circles CEB and CED cut one another C, then I say a line drawn from the point of section CBD cutting both circles, will cut off dissimilar segments from those circles.

1st. Suppose CB to be the Diameter of one of them: then draw to the other point of section E the line CE, and joining EB, ED, the angle CEB will be a right one, and the angle CED either greater or less than a right one, and consequently CD cannot be a Diameter of the other.

2dly. Suppose CBD not to pass through the center of either : then through C draw a Diameter CAG, and continue it to meet the other circle in F, and join BG, DF: then the angle CBG is a right one and the angle CDF is either greater or less than a right one : and therefore the lines BG and DF are not parallel : let H be the center of the other circle and let a Diameter CHI be drawn : draw DI and continue it meet to meet CG in K: then DIK will be parallel to BG : hence $CB:CD::CG:CK$. But CI and CK are inequal (being both applied from the same point in a right angle) and therefore it cannot be as $CB:CD::CG:CI$: and hence it appears that the Segments CB and CD are dissimilar.

LEMMA III.

IF through the legs of any triangle EDF (see Figure to Problem 10.) a line BI be drawn parallel to the base DF, so that there be constituted two similar triangles about the

same vertex, and a circle be circumscribed about each of these triangles; these circles will touch one another in the common vertex E.

IT is plain that they will either touch or cut each other in the point E: if they cut each other, then by the preceding Lemma the Segments BE and DE will be dissimilar; but they are similar and they must therefore touch each other.

PROBLEM X

Having a point A, and also a right line BC given in position; together with a circle whose center is G given both in magnitude and position; to describe a circle which shall pass through the given point, and likewise touch both the given line and the given circle.

THE given right line may either 1st cut touch, or be entirely without the given circle, and the given point be without the same or in the circumference; or 2dly, it may cut the given circle; and the given point be within the same, or in the circumference.

CASE 1st. Suppose the given line BC to cut, touch, or fall entirely without the given circle; and the given point A to be without the same, or in the circumference: through G the center of the given circle draw DGFC perpendicular to BC, and joining DA, take DH a 4th proportional to DA, DC, DF, so that $DA \times DH = DC \times DF$: then through the points A and H draw a circle touching the line CB by Problem VII, and I say it will also touch the given circle.

Draw DB cutting the given circle in E, and join FE. Now because the triangles DEF, DCB are similar, $DF:DE::DB:DC$, and therefore $DC \times DF = DB \times DE$. But $DC \times DF = DA \times DH$ by Construction. Hence $DB \times DE = DA \times DH$, and therefore the points B, E, H, A, will be also in a circle: but the point E is also in the given circle, therefore these circles either touch or cut one another in that point. Let now BI be drawn from the point of contact B perpendicular to the

touching line BC to meet the circumference again in I, and it will be a Diameter: and let EI be joined: then because the angles FED and BEI are vertical and each of them right ones, FEI will be a continued straight line: and it appears that the two circles will touch each other by the preceding Lemmas.

CASE 2nd. Suppose the given line BC to cut the given circle, and the given point to be within the same, or in the circumference ; the Construction and Demonstration are exactly the same as before, except that the angles FED and BEI are not vertical but coincident, and so EI is coincident with EF.

N.B. In either of these cases if the point A coincide with E or be given in the circumference, draw DEB, and erect BI perpendicular to CB to meet FE in I, then upon BI as diameter describe a circle, and the thing will manifestly be done.

PROBLEM XI .

HAVING two circles given in magnitude and position, whose centers are A and B, as likewise a right line CZ, to draw a circle which shall touch all three.

FROM the center of the lesser circle B let BZ be drawn perpendicular to CZ, and in BZ (or in BZ continued as the case requires) let be taken ZX=AL the Radius of the other circle ; and through X let XH be drawn parallel to CZ, and with center B and radius BG, equal to the difference (or sum as the case requires) of the Radii of the two given circles, let a circle be described ; and lastly let another circle be described, touching this last, and also the line XH and passing through the point A by problem X, and I say that E, the center of this circle, will also be the center of the circle required ; as will appear by taking equals from equals, or adding equals to equals, as the assigned Case and Data shall require.

The Cases are four, though Vieta makes but three.

CASE 1st. If it be required that the circle should touch both the others *externally* then BG must be taken equal

to the *difference* of the Semidiameters of the two given circles, and ZX must be taken in BZ *produced*.

CASE 2nd. If it be required that the circle shall touch and include both the given ones ; then BG must be taken equal to the *difference*, as in Casè 1st, but ZX must be taken in BZ *itself*

CASE 3d. If it be required that the circle should touch *and include* the greater of the given circles, and touch *externally* whose center is B; then BG must be taken equal to the *sum* of the Radii of the given circles, and ZX must be taken in BZ *itself*

CASE 4th. If it be required that the circle should touch the greater of the given circles *externally*, and touch and *include* the lesser ; then BG must be taken equal to the *sum* of the Radii, and ZX must be taken in BZ *produced*.

PROBLEM XII.

HAVING two points given B and D, and likewise a circle whose center is A to describe another circle which shall pass through the given points and touch the given circle. LET DB be joined, as also AB, and let AB be produced to cut the given circle in the points I and K, then let BH be taken a 4th proportional to DB, BK, BI, so that $BD \times BH = BI \times BK$: from H let a Tangent HF be drawn to the given circle; and BF be joined and cut the circle again in G: and let DG be drawn cutting the given circle again in E, and lastly through the points D, B, G, let a circle be drawn, I say it will touch the given circle in G.

FOR joining EF ; because the rectangle DBH = the Rectangle KBI, i. e. the Rectangle GBF, therefore the four points D, H, F, G, are in a circle; and hence the angle HFB = the angle GDB (for in the two first figures one is the external angle of a quadrilateral figure, and the other is the internal and opposite, and in the two last figures these angles are in the same segment.) But the angle HFB = the angle GEF by Eu. III. 32. hence $GEF = GDB$: therefore the

triangles GEF and GDB are similar and under the same vertex, and therefore by Lemma 3. the circles described about them will touch each other in the common vertex G.

'There are other Construction of this Problem in Hugo de Omerique, Simpson, and the Mathematician. See also Monthly Review for Oct. 1764, where the Reviewer is pleased to speak favourably of the 1st Edition of this work, but wishes that some modern solutions of these Problems had been inserted, which, he says, are more concise and elegant than any which are to be met with in the works of the Antients. The Editor acknowledges that the construction there given is more simple than Vieta's; but Vieta is not an Antient, and he knows of no others that exceed his.

LEMMA IV .

HAVING two circles ABCI and EFGH given, it is required to find a point M, in the line joining their centers ; or in that line continued, such, that any line drawn through the said point M, cutting both the circles, shall always cut off similar segments.

LET the line KL joining the centers be so cut or produced, that KM may be to LM in the given ratio of the Radii AK to EL [in the case of producing KL we must make it as AK-EL : EL :: KL: LM, for then by composition it will be AK:EL::KM:LM] and then I say that the point M will be the point required. For from it drawing any line MGFCB cutting the circle ABCI in B and C, and the circle EFGH in F and G ; and let B and F be the correspondent points most distant from M, and C and G the correspondent points that are nearer; and let be joined BK, CK, FL, GL, and thereby two triangles will be formed BKC, FLG. Now because by Construction $KM: LM :: KB: LF$, KB and LF will be parallel by Euc. VI. 7. and for the same reason KC and LG will be parallel ; and therefore the triangles BKC and FLG will be equiangled, and hence the segment BC will be similar to the segment FG.

LEMMA V.

THE point M being found as in the preceding Lemma, I say that it is a property of the said point, that $MG \times MB = MH \times MA$: as also that $MF \times MC = ME \times MI$.

FOR joining CI and GH, it is evident that these lines will also be parallel. Hence $MI:MC :: MH:MG$, but $MI:MC :: MB:MA$, therefore $MH:MG :: MB:MA$, and $MG \times MB = MH \times MA$. Again $MH:MG :: MF:ME$, but $MH:MG :: MI:MC$, therefore $MF:ME :: MI:MC$ and $MF \times MC = ME \times MI$.

PROBLEM XIII.

HAVING two circles given in magnitude and position, whose centers are K and L, and also a point D ; to draw a circle which shall touch the two given ones, and also pass through the point D.

JOIN the given centers by drawing KL, and in KL or KL produced find the point M (by Lemma 4.) such, that all the lines drawn from it cutting the given circles shall cut off similar segments; and let KL cut the circumferences, one of them in the points A and I, and the other in the points E and H; and joining MD, make it as $MD:MA :: MH:MN$. Then through the points D and N draw a circle which shall also touch the given circle whose center is K, by Prob. XII and I say that this circle will also touch the other given circle whose center is L. For let B be the point of contact and BNI be drawn cutting the circle K in G, and the circle L in F and G ; then by Lemma 5. $MB \times MG = MA \times MH$: but $MA \times MH = MD \times MN$ by Construction ; therefore $MB \times MG = MD \times MN$, and the points B, G, N, D, are in a circle. But the point G is also in the circle L ; therefore these circles either touch or cut each other in the point G. Now the circles BND and BCI touch one another in B by construction, therefore the segment BC is similar to the segment BG ; and also by construction the segment BC is similar to the segment FG ; and therefore the segment FG is similar to the segment BG ; and hence the circles FGE and BGD touch one another in the point G.

THE Cases are three.

CASE 1st. If the circle be required to *touch and include* both the given ones, then M must be taken in KL *produced* ; and MN must be taken a fourth proportional to MD, MA, MH, A being the most *distant* point of intersection in the circle K, and H the *nearest* point of intersection in the circle L.

CASE 2d. If the circle be required to touch both the given ones *externally*, then also M must be taken in KL *produced* ; and MN taken a fourth proportional to MD, MA, MH, A being the *nearest* point of intersection in the circle K, and H the most *distant* in the circle L.

CASE 3d. If the circle be required to *touch and include* the circle K, and to touch L *externally* then M must be taken in KL *itself* and MN a fourth proportional to MD, MA, MH, A being the most *distant* point in K, and H the *nearest* in L.

PROBLEM XIV.

HAVING the circles given whose centers are A, B, and D; to draw a fourth which shall touch all three.

LET that whose center is A be called the 1st, that whose center is B the 2d, and that whose center is D the 3d. Then with center B, and radius equal to the *difference*, or *sum*, as the case requires, of the semidiameters of the 1st and 2nd circles, let an auxiliary circle be described; and likewise with D center, and radius equal to the *difference*, or *sum*, as the case requires, of the semidiameters of the 1st and 3d circles, let another auxiliary circle be described ; and lastly by the preceding Problem draw a circle which shall touch the two auxiliary ones, and likewise pass through the point A which is the center of the first circle. Let the center of this last described circle be E, and the same point E will likewise be the center of the circle required : as will appear by adding equals to equals, or taking equals from equals, as the case requires.

THE Cases are these.

CASE 1st. If it be required that the circle should touch and include all the other three ; then let A be the center of the greatest given circle, B of the next, and D of the last : and let BG = the *difference* of the semidiameters of the 1st and 2nd and DF

and DF = the *difference* of the semidiameters of the 1st and 3d, and through A describe a circle which shall touch two auxiliary ones *externally*.

CASE 2d. If it be required that the circle should touch all the other three *externally* , then the circles being the same as before in respect to their magnitude, let BG and DF be also the same as in the 1st Case, but through A describe a circle which shall *touch and include* the two auxiliary ones.

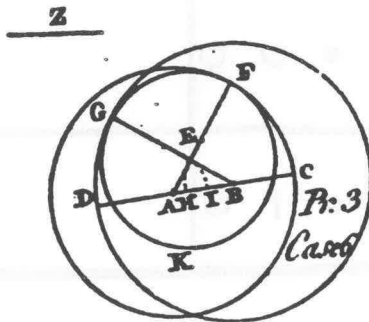
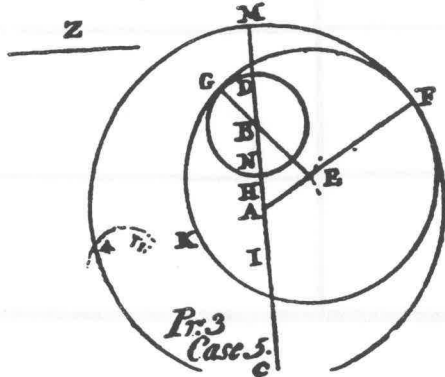
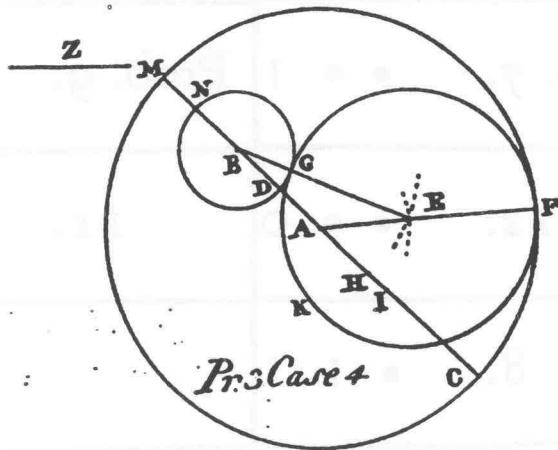
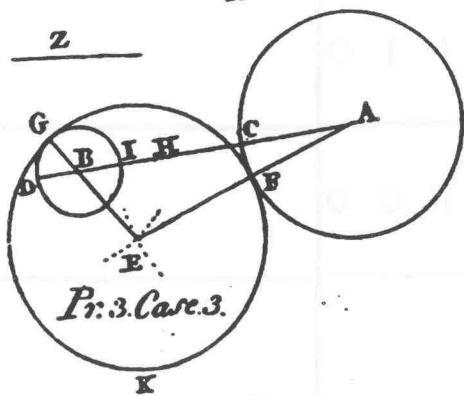
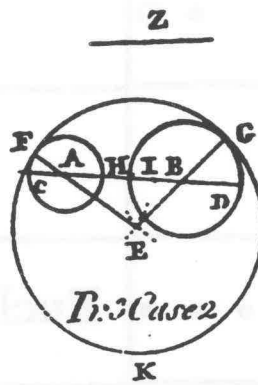
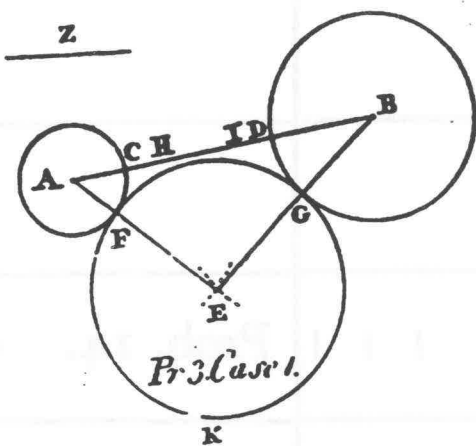
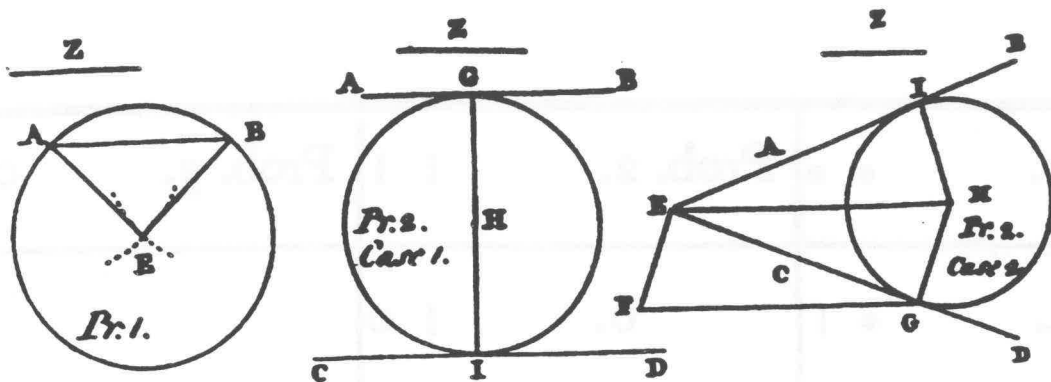
CASE 3d. If it be required that the circle should *touch and include* one of the given circles A, and touch the other two *externally* ; then let BG and DF = the *sum* of the semidiameters of the 1st and 2d, and *sum* of the semidiameters of the 1st and 3d respectively; and through A describe a circle which shall touch the two auxiliary ones *externally*.

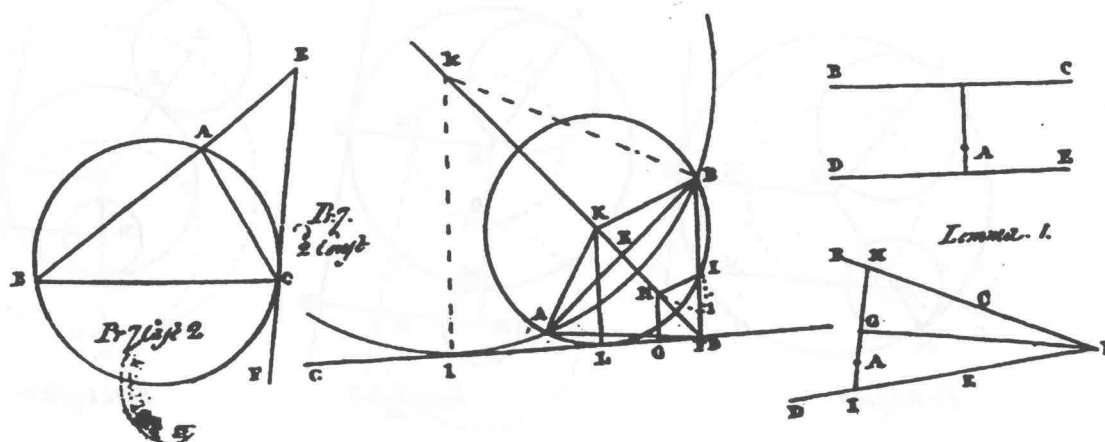
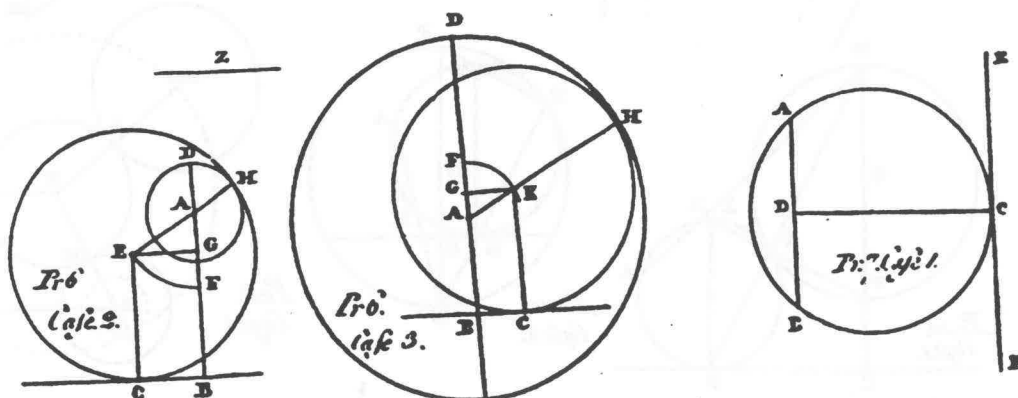
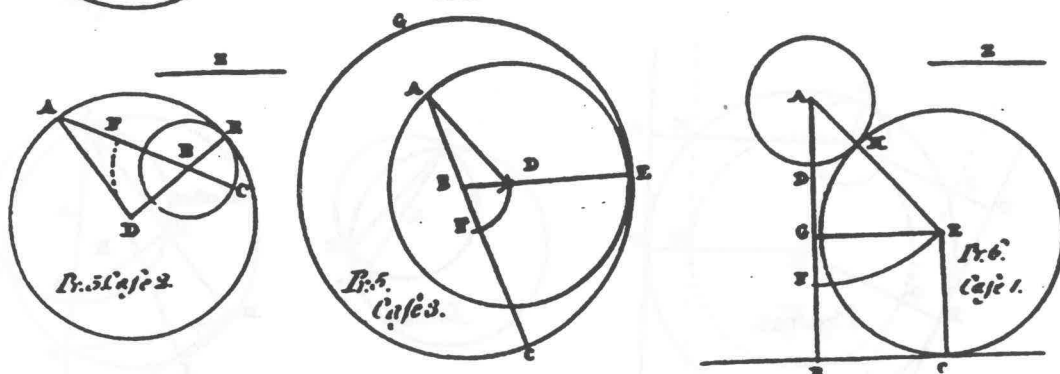
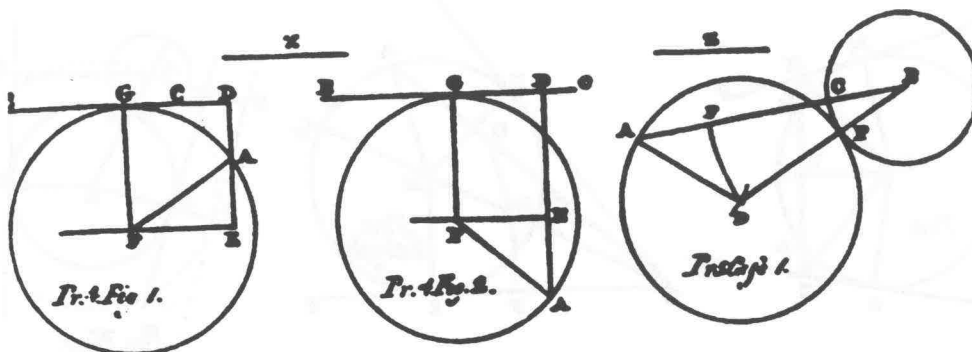
CASE 4th. If it be required that the circle should touch *externally* one of the given circles A, and should *touch and include* the other two; then let BG and DF = the *sums* as in Case 3d, but through A describe a circle which shall *touch and include* the two auxiliary ones.

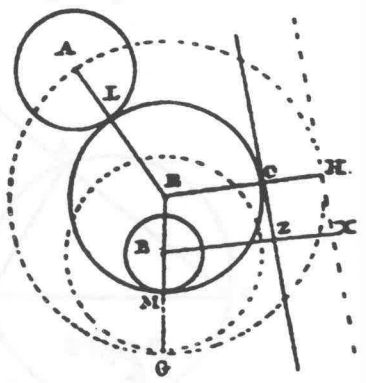
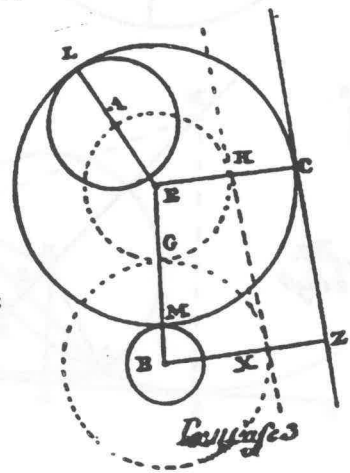
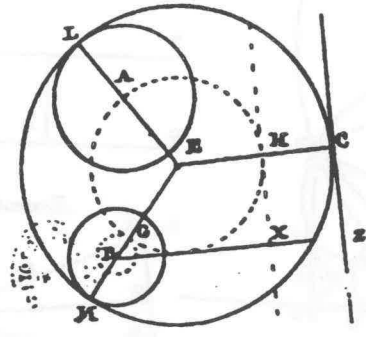
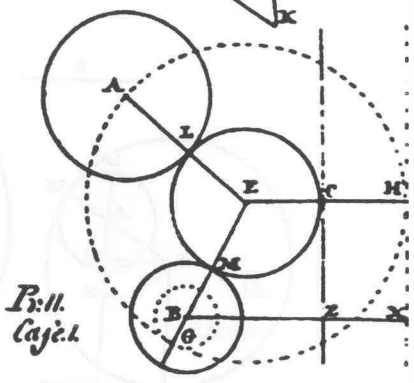
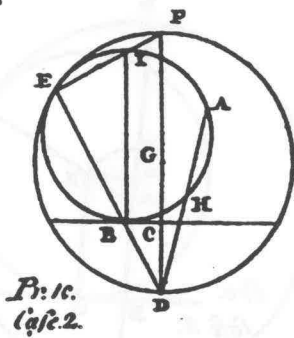
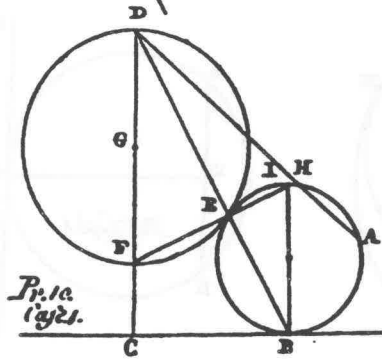
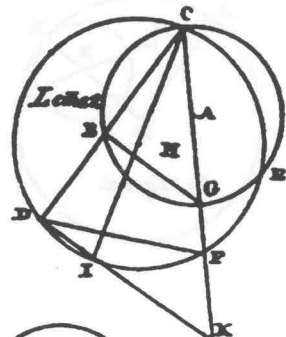
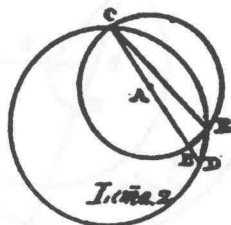
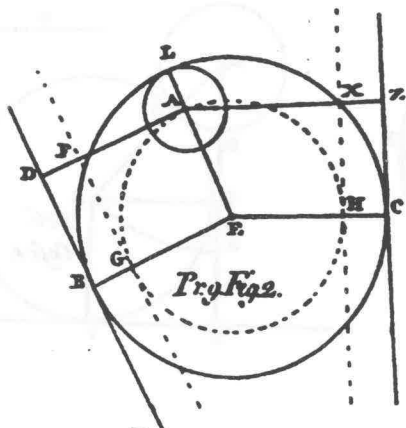
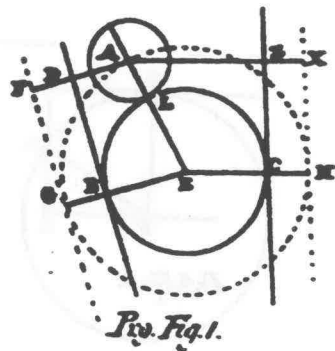
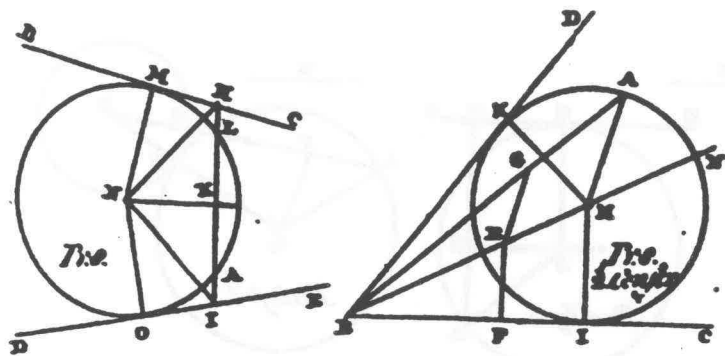
SYNOPSIS of the PROBLEMS.

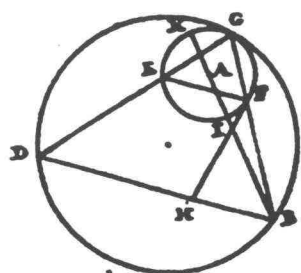
Prob. 1. • •	Prob. 2.	Prob. 3. ○ ○
4. •	6. ○	
5. • ○		
Euclid • • •	Euclid	Prob. 14. ○ ○ ○
Prob. 7. • •	Prob. 9. ○	
12. • • ○	11. ○ ○	
8. •		
13. • ○ ○		
10. • ○		

PROBLEM

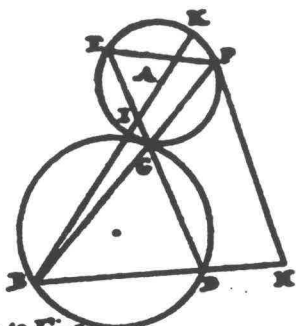




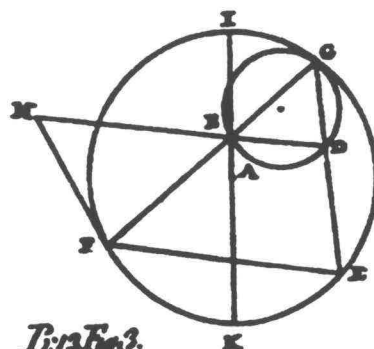




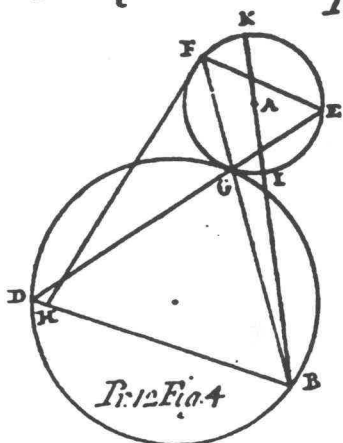
Pr.12 Fig. 1.



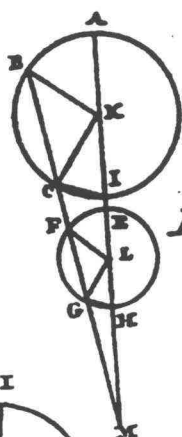
Pr.12 Fig. 2.



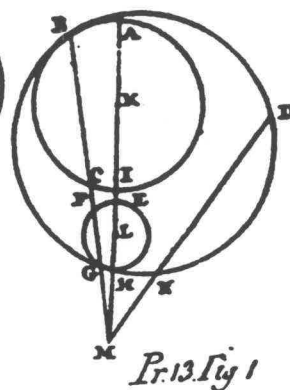
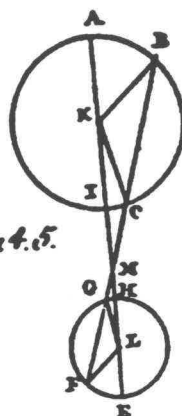
Pr.12 Fig. 3.



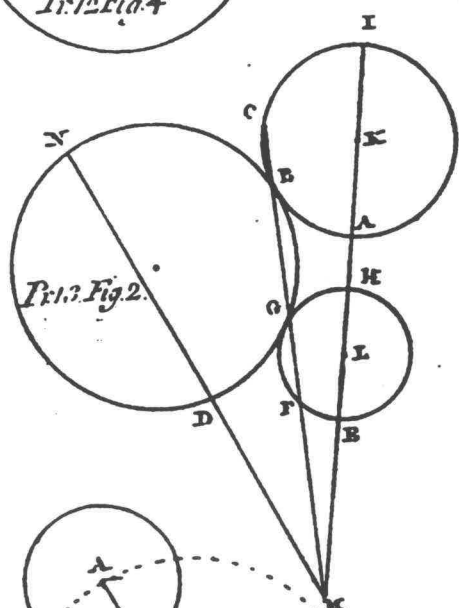
Pr.12 Fig. 4.



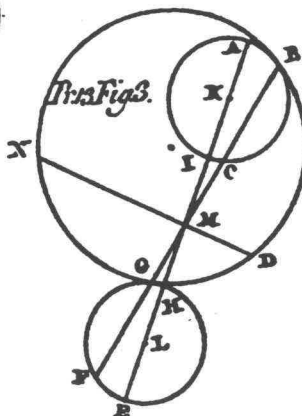
Lemma 4.5.



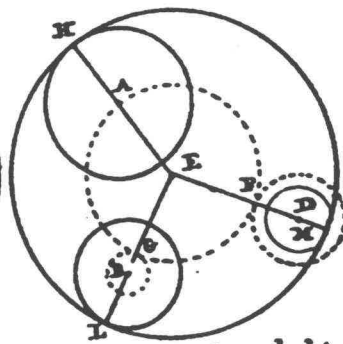
Pr.13 Fig. 1



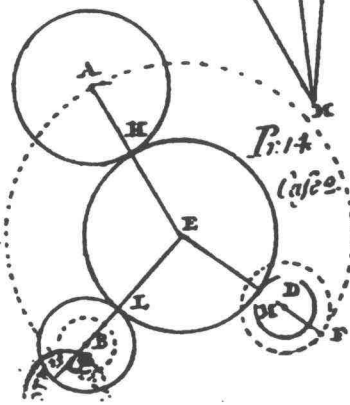
Pr.13 Fig. 2.



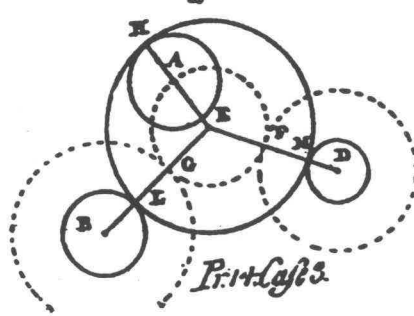
Pr.13 Fig. 3.



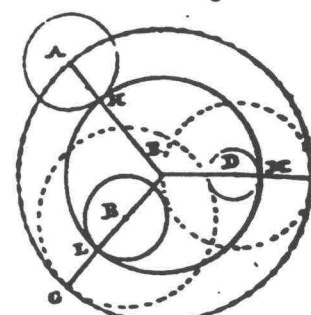
Pr.14 Case 1



Pr.14 Case 2.



Pr.14 Case 3.



Pr.14 Case 1

**Articles divers extraits des Annales de mathématiques pures et appliquées
(Journal de Gergonne.)**

Gergonne : Recherche du cercle qui en touche trois autres sur une sphère.
tome IV n° XII 1° juin 1814, p. 349 à 359.

Gergonne : Recherche du cercle qui en touche trois autres sur un plan.
tome VII n° X 1° avril 1817, p. 289 à 303.

Poncelet : Réflexion sur l'usage de l'analyse algébrique dans la géométrie ; suivie de la résolution de quelques problèmes dépendant de la géométrie de la règle.p. 141 à 155.

Suivi de :

Gergonne : Réflexion sur l'article précédent p. 156 à 161
tome VIII n° IV 1° novembre 1817

Poncelet : Construction géométrique d'un cercle qui en touche trois autres donnés sur un plan ou sur une sphère, d'un cône droit qui en touche trois autres de même sommet, et d'une sphère qui en touche quatre autres dans l'espace.
tome XI n° X 1° avril 1821, p. 317 à 322.

Un abonné : Sur la construction du cercle tangent à trois cercles donnés.
tome XIII n° I 10 aout 1822, p. 193 à 200.

GÉOMÉTRIE.

Recherche du cercle qui en touche trois autres sur une sphère ;

Par M. GERGONNE.

DANS un mémoire adressé il y a quelques temps à l'académie de Turin, j'ai déduit d'une analyse très-courte et très-simple les deux propositions suivantes :

1.^o Trois cercles C , C' , C'' étant donnés d'une manière quelconque sur un même plan, soient menées les tangentes extérieures communes à C et C' , à C et C'' ; ces tangentes détermineront sur C deux cordes de contact, se coupant en quelque point M ; elles détermineront aussi sur les cercles C' et C'' deux autres cordes de contact lesquelles, prolongées s'il est nécessaire, se couperont en un autre point N ; or, si l'on joint ces points M et N par une droite, les intersections P , Q de cette droite avec C seront les points où ce cercle sera touché par deux cercles touchant à la fois les trois cercles C , C' , C'' , et les touchant tous trois de la même manière; c'est-à-dire, les enveloppant tous trois, ou les touchant tous trois extérieurement.

2.^o Quatre sphères S , S' , S'' , S''' étant données d'une manière

Tom. IV, n.° XII, 1.^{er} juin 1814.

350

CONTACT DES CERCLES

quelconque dans l'espace, soient circonscrits extérieurement des cônes aux sphères S et S' , S et S'' , S et S''' ; ces cônes détermineront sur la sphère S trois lignes de contact dont les plans se couperont en un certain point M ; ces mêmes cônes détermineront aussi sur S' , S'' , S''' trois autres lignes de contact dont les plans, prolongés s'il est nécessaire, se couperont en un autre point N ; or, si l'on joint ces points M et N par une droite, les intersections P , Q de cette droite avec la sphère S seront les points où cette sphère sera touchée par deux sphères touchant à la fois les quatre sphères S , S' , S'' , S''' et les touchant toutes quatre de la même manière; c'est-à-dire, les enveloppant toutes quatre ou les touchant toutes quatre extérieurement.

Il est clair que ces propositions donnent la solution directe des problèmes où il s'agit de décrire un cercle qui touche trois cercles donnés, ou de décrire une sphère qui touche quatre sphères données, du moins lorsqu'on exige que les trois cercles ou les quatre sphères donnés soient touchés de la même manière par le cercle ou par la sphère cherchés; mais j'ai fait voir, dans le mémoire cité, qu'en faisant une combinaison convenable des angles et cônes circonscrits intérieurement avec les angles et cônes circonscrits extérieurement, on pouvait obtenir, par un semblable procédé, les huit cercles qui peuvent toucher à la fois trois cercles donnés et les seize sphères qui peuvent toucher à la fois quatre sphères données. J'ai cherché en outre ce que devenaient les cordes de contact et les plans de lignes de contact, lorsque les rayons de quelques-uns des cercles ou de quelques-unes des sphères donnés devenaient nuls ou infinis, et j'ai ainsi établi le moyen de ramener à des procédés uniformes, et faciles à retenir, tous les problèmes de Viète sur le contact des cercles, et ceux de Fermat sur le contact des sphères.

L'élégante simplicité de ces solutions, indiquées tout naturellement par l'analyse, m'avait fait désirer que celles qui sont relatives à trois cercles donnés sur un plan s'appliquassent également à trois

SUR LA SPHÈRE.

351

cercles donnés sur une sphère (*) ; l'analogie m'avait même fait soupçonner fortement qu'il devait en être ainsi. Le calcul m'a montré que j'étais dans l'erreur à cet égard ; mais en revanche, il m'a fourni, pour trois cercles donnés sur une sphère, des constructions qui peuvent facilement être transportées à trois cercles donnés sur un plan, et même à quatre sphères données dans l'espace, et qui ne sont pas plus compliquées que celles que je viens d'indiquer sommairement ; de manière que j'ai enfin obtenu pour les problèmes de l'une et de l'autre sorte cette parfaite uniformité à laquelle j'avais principalement aspiré.

Avant d'entrer dans le détail des modifications que j'ai fait subir à mes premières constructions, pour les rendre applicables à trois cercles donnés sur une sphère, je dois présenter d'abord quelques remarques propres à en faciliter l'intelligence.

On sait que rien n'est plus facile que d'obtenir l'équation de la corde commune à deux cercles dont les équations sont données : cette équation étant rationnelle, il s'ensuit que la droite à laquelle elle appartient est réelle, lors même que les deux points qui doivent en déterminer la situation sont imaginaires ; c'est-à-dire, que deux cercles tracés sur un même plan ont encore une corde commune, lors même qu'ils ne se coupent pas ; c'est cette corde que M. Gaultier de Tours a dénommée l'*Axe radical* des deux cercles (**).

On démontre aussi bien facilement, par l'analyse, et presque sans calcul, que, trois cercles étant tracés sur un même plan, soit qu'ils se coupent ou qu'ils ne se coupent pas, leurs axes radicaux ou cordes communes deux à deux concourent en un même point que M. Gaultier a nommé leur *Centre radical*. (***)

(*) M. Carnot, à la page 415 de sa *Géométrie de position*, a donné l'ébauche d'une solution analytique de ce problème. On peut aussi consulter la *Correspondance sur l'école polytechnique*, tome III.^e, n.^o 1, janvier 1814, pag. 10.

(**) Voyez le XVI.^e cahier du *Journal de l'école polytechnique*.

(***) Même ouvrage.

CONTACT DES CERCLES

Rien n'est plus aisé, comme on le voit, que de déterminer l'axe radical ou corde commune de deux cercles qui se coupent. Lorsqu'au contraire les deux cercles ne se coupent pas, la chose n'est guère plus difficile. Si en effet on décrit arbitrairement un troisième cercle qui coupe à la fois ces deux-là, il aura avec eux deux cordes communes, et il résulte de ce que nous venons de dire sur le centre radical, que le point de concours de ces deux cordes est un point de l'axe radical des deux cercles donnés; et, comme on sait d'ailleurs que cet axe doit être perpendiculaire à la droite qui joint les centres, il se trouvera entièrement déterminé. Au surplus, on trouvera peut-être plus commode, dans la pratique, de chercher un second point de cet axe, par un procédé pareil à celui qui aura fait trouver le premier.

Sachant ainsi trouver l'axe radical de deux cercles, lors même qu'ils ne se coupent pas, la recherche du centre radical de trois cercles, dans le cas même où ils ne se couperont pas, ne présentera plus aucune difficulté.

Tout ceci peut facilement être étendu à des sphères dans l'espace. Ainsi le plan du cercle commun à deux sphères, lequel plan existe encore lorsque ces sphères ne se coupent pas, est leur *Plan radical*.

On détermine une droite appartenant à ce plan, en construisant une sphère qui coupe à la fois les deux sphères données et prolongeant les plans des intersections jusqu'à ce qu'ils se coupent. Pour déterminer entièrement ce plan, on peut indifféremment, ou déterminer une nouvelle droite qui y soit située, ou conduire par l'un quelconque des points de la première un plan perpendiculaire à la droite qui joint les centres.

Si trois sphères coexistent dans l'espace, elles donneront, en les considérant deux à deux, trois plans radicaux, lesquels se couperont suivant une même droite qu'on appellera leur *Axe radical*, et dont la construction n'offrira point de difficulté, d'après ce qui vient d'être dit.

SUR LA SPHÈRE.

353

Si, enfin, quatre sphères coexistent dans l'espace, elles donneront, étant prises trois à trois, quatre axes radicaux, lesquels concourront en un même point qui sera le *Centre radical* de ces quatre sphères. Ce centre pourra donc être déterminé par ce qui précède.

Cela posé, soient 1.° C, C', C'' trois cercles donnés sur un plan; et soit O leur centre radical. Soient menées à ces cercles, pris deux à deux, des tangentes communes extérieures; ces tangentes détermineront sur chaque cercle deux cordes de contact se coupant en un point; soient, pour les trois cercles respectivement, P, P', P'' ces points d'intersection. Si alors on mène les droites OP, OP', OP'' , elles détermineront sur C, C', C'' respectivement les points où ils devront être touchés par deux cercles les touchant tous trois et les touchant-tous de la même manière.

2.° Soient S, S', S'', S''' quatre sphères données dans l'espace; et soit O leur centre radical. Soient menés à ces sphères, prises deux à deux, des cônes circonscrits extérieurs; ces cônes détermineront sur chaque sphère trois lignes de contact dont les plans se couperont en un point; soient, pour les quatre sphères respectivement P, P', P'', P''' ces points d'intersection. Si alors on mène les droites OP, OP', OP'', OP''' , elles détermineront sur S, S', S'', S''' respectivement les points où elles devront être touchées par deux sphères qui les toucheront toutes quatre, et les toucheront toutes de la même manière.

En faisant encore ici une convenable combinaison des angles et cônes circonscrits intérieurement avec les angles et cônes circonscrits extérieurement, on déduit de ces constructions, comme de celles qui ont été précédemment indiquées, la détermination des huit cercles qui peuvent toucher à la fois trois cercles donnés et celle des seize sphères qui peuvent toucher à la fois quatre sphères données. De plus, en faisant à ces constructions les modifications qui conviennent au cas où les rayons de quelques-uns des cercles ou de quelques-unes des sphères donnés deviennent nuls ou infinis, on ramène encore, comme dans le premier cas, à des procédés

CONTACT DES CERCLES

uniformes la solution de tous les problèmes de Viète sur le contact des cercles et de ceux de Fermat sur le contact des sphères.

Je ne prétends pas décider si ces procédés ont en eux-mêmes quelque avantage sur les premiers que j'inclinerais même à regarder comme plus simples ; mais c'est sous cette forme seulement que la construction qui fait trouver les cercles qui touchent à la fois trois cercles donnés sur un plan , donne aussi , sans aucune modification , les cercles qui touchent à la fois trois cercles donnés sur une sphère.

C'est à prouver cette assertion que je consacre principalement cet article. Le problème revient évidemment à celui-ci : *Trois cônes de même sommet étant donnés ; construire un quatrième cône , de même sommet qu'eux , qui les touche tous trois ?* et c'est sous ce point de vue que je vais l'envisager.

Soient C, C', C'' trois cônes donnés , de même sommet , dont les angles générateurs soient respectivement r, r', r'' . Soit pris leur sommet commun pour origine des coordonnées que nous supposons rectangulaires ; et supposons que l'axe du dernier soit l'axe des z . Représentons en outre par a, b, c, a', b', c' respectivement les cosinus des angles que forment les axes du premier et du second avec les axes des coordonnées ; ce qui , comme l'on sait , donnera lieu aux relations

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad (1)$$

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1. \quad (2)$$

Désignons ensuite par A, B, C les cosinus des angles que forme l'axe du cône cherché avec les axes des coordonnées , ce qui donnera pareillement

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1; \quad (3)$$

SUR LA SPHÈRE.

355

et soit R son angle générateur. Si l'on veut que ce cône touche extérieurement les trois cônes donnés, il faudra que l'angle que fera son axe avec l'axe de chacun d'eux soit égal à la somme de leurs angles générateurs; ce qui donnera

$$aA + bB + cC = \text{Cos.}(R + r), \quad (4)$$

$$a'A + b'B + c'C = \text{Cos.}(R + r'), \quad (5)$$

$$C = \text{Cos.}(R + r''). \quad (6)$$

Telles sont les équations qu'il faudrait combiner avec l'équation (3), pour obtenir l'angle générateur R du cône cherché, et les cosinus A, B, C des angles que forme son axe avec les axes des coordonnées; et l'on voit évidemment que le problème aurait deux solutions.

Il y a donc deux cônes cherchés dont chacun a une ligne de contact avec l'un quelconque des cônes donnés, avec C'' par exemple; et il est clair, d'après cela, que la recherche du plan qui contient ces deux droites doit être un problème du premier degré seulement.

Soient donc x, y, z les coordonnées de la ligne de contact de C' avec le cône cherché; nous connaissons déjà un lieu de cette ligne, et c'est le cône C'' lui-même, dont l'équation est

$$(x^2 + y^2) \text{Cos.}^2 r'' = z^2 \text{Sin.}^2 r''; \quad (7)$$

il n'est donc plus question que d'en chercher un second.

Or, cette ligne devant être dans un même plan avec les axes des deux cônes, il s'ensuit qu'on doit avoir

$$Ay = Bx; \quad (8)$$

et conséquemment, en éliminant A, B, C, R entre les cinq équations

356 CONTACT DES CERCLES

tions (3), (4), (5), (6), (8), l'équation résultante, en x , y , z sera celle du second lieu demandé.

Mais on sait qu'une ligne donnée par l'intersection de deux surfaces est aussi sur toute surface dont l'équation serait une combinaison des équations de ces deux-là ; d'où il suit que, dans l'élimination, nous pouvons nous aider de l'équation (7) pour simplifier nos résultats. Nous ne ferons ainsi que substituer au lieu cherché quelque autre lieu plus simple, coupant le cône C'' suivant la même droite.

A l'aide de cette attention, l'élimination devient très-facile. On tire des équations (3), (6), (8), en ayant égard à l'équation (7),

$$A = \frac{x \cos r'' \sin(R+r'')}{z \sin r''},$$

$$B = \frac{y \cos r'' \sin(R+r'')}{z \sin r''},$$

$$C = \frac{z \sin r'' \cos(R+r'')}{z \sin r''},$$

ces valeurs étant substituées dans les équations (4) et (5), elles deviendront

$$(ax+by) \cos r'' \sin(R+r'') + c z \sin r'' \cos(R+r'') = z \sin r'' \cos(R+r''),$$

$$(a'x+b'y) \cos r'' \sin(R+r'') + c' z \sin r'' \cos(R+r'') = z \sin r'' \cos(R+r'').$$

Mais on peut remarquer que

$$\cos(R+r) = \cos\{(R+r'')-(r''-r)\} = \cos(r''-r) \cos(R+r'') + \sin(r''-r) \sin(R+r''),$$

$$\cos(R+r') = \cos\{(R+r'')-(r''-r')\} = \cos(r''-r') \cos(R+r'') + \sin(r''-r') \sin(R+r'').$$

on aura donc, en substituant et divisant par $\cos(R+r'')$;

$$\{(ax+by) \cos r'' - z \sin r'' \sin(r''-r)\} \text{Tang}(R+r'') + z \sin r'' \{c - \cos(r''-r)\} = 0,$$

$$\{(a'x+b'y) \cos r'' - z \sin r'' \sin(r''-r')\} \text{Tang}(R+r'') + z \sin r'' \{c' - \cos(r''-r')\} = 0;$$

d'où

SUR LA SPHÈRE.

357

d'où l'on conclura, par l'élimination de $\text{Tang.}(R+r')$

$$\frac{(ax+by)\text{Cos.}r''-z\text{Sin.}r''\text{Sin.}(r''-r)}{c-\text{Cos.}(r''-r)} = \frac{(a'x+b'y)\text{Cos.}r''-z\text{Sin.}r''\text{Sin.}(r''-r')}{c'-\text{Cos.}(r''-r')}; \quad (9)$$

équation d'un plan dont l'intersection avec C'' doit déterminer sur ce cône la droite suivant laquelle il doit être touché par le cône cherché. Cette équation restant la même lorsqu'on y change simultanément les signes de r, r', r'' , il s'ensuit que, pour les huit combinaisons dont les signes de ces angles sont susceptibles, c'est-à-dire, pour les huit solutions du problème, cette équation ne prend que quatre formes distinctes, à chacune desquelles répondent conséquemment deux de ces solutions.

Pour construire le plan exprimé par l'équation (9), il est nécessaire et il suffit de connaître deux droites qui y soient contenues; c'est-à-dire, de trouver deux systèmes de deux équations en x, y, z qui jouissent de la propriété de rendre l'équation (9) identique. Et réciproquement deux manières distinctes quelconques de rendre l'équation (9) identique, sans établir entre x, y, z des relations qui excèdent le premier degré, conduiront à la connaissance de deux droites qui détermineront le plan cherché.

Entre les diverses manières de rendre cette équation identique; lesquelles sont en nombre infini, nous choisirons les deux suivantes : 1.^o nous poserons séparément les deux membres de l'équation (9) égaux à $\frac{z\text{Sin.}r''}{\text{Cos.}r''}$; 2.^o nous poserons les mêmes membres égaux à $-y\text{Cos.}r''$. Cela donnera, toutes réductions faites, les deux systèmes d'équations

$$\left. \begin{aligned} (ax+by)\text{Cos.}r'' &= z(c\text{Sin.}r''-\text{Sin.}r)\text{Sin.}r'' , \\ (a'x+b'y)\text{Cos.}r'' &= z(c'\text{Sin.}r''-\text{Sin.}r')\text{Sin.}r'' ; \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} (ax+by)\text{Cos.}r'' &= z(\text{Cos.}r-c'\text{Cos.}r') , \\ (a'x+b'y)\text{Cos.}r'' &= z(\text{Cos.}r'-c'\text{Cos.}r'') . \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Tom. IV.

48

358 CONTACT DES CERCLES

Ainsi, en construisant la droite exprimée par les équations (10), puis la droite exprimée par les équations (11), le plan conduit par ces deux droites sera celui qu'exprime l'équation (9).

Ce qu'il y a de mieux à faire, pour construire les droites (10) et (11), c'est de construire les plans dont ces droites sont les intersections. Or, avec un peu d'attention, on reconnaît les plans (10) pour ceux des lignes de contact du cône C'' avec les plans tangents communs extérieurs tant à ce cône et au cône C qu'au même cône et au cône C' , et on reconnaît les plans (11) pour ceux suivant lesquels les cônes C , C' coupent respectivement le cône C'' , ou, en d'autres termes, pour les plans radicaux tant à C et C'' qu'à C' et C'' (*) ; ce qui indique pour le cône cherché une construction

(*) Supposons, en effet, que l'équation du plan tangent commun aux cônes C et C'' soit

$$Dx + Ey + Fz = 0, \quad (12)$$

avec la condition

$$D^2 + E^2 + F^2 = 1; \quad (13)$$

si l'on veut que ce plan tangent soit extérieur, c'est-à-dire, si l'on veut que ce plan laisse les deux cônes d'un même côté, D , E , F seront déterminés par l'équation (13) jointe aux équations

$$aD + bE + cF = \sin.r, \quad (14)$$

$$F = \sin.r''; \quad (15)$$

et l'on voit que le problème est du second degré, de manière qu'il y a deux plans tangents.

Or, si l'on suppose que x , y , z désignent les coordonnées de l'une ou de l'autre ligne de contact avec C'' , les équations (12), (13), (14), (15) devant avoir lieu en même temps pour ces droites, le résultat de l'élimination de D , E , F entre elles sera l'équation d'une surface contenant ces mêmes droites.

Ce résultat est facile à obtenir. On tire des équations (12), (14), (15)

SUR LA SPHÈRE.

359

qui, appliquée ensuite à la recherche du cercle qui en touche trois autres sur une sphère, revient à celle qui a été enseignée plus haut.

Celle-ci se trouve même établie par ce qui précède, puisqu'un plan n'est autre chose qu'une sphère dont le rayon est infini.

$$A = \frac{(\sin r - c \sin r'') y + b z \sin r''}{ay - bx},$$

$$B = \frac{(\sin r - c \sin r'') x + az \sin r''}{ay - bx},$$

$$C = \sin r'';$$

valeurs qui substituées dans l'équation (13) donnent

$$\{(\sin r - c \sin r'') y + b z \sin r''\}^2 + \{(\sin r - c \sin r'') x + az \sin r''\}^2 = (ay - bx)^2 \cos^2 r'';$$

telle est donc l'équation d'une surface dont les intersections avec le cône C'' détermineront ses lignes de contact avec les deux plans qui touchent à la fois extérieurement les cônes C'' et C .

Or en développant cette équation, la multipliant par $\cos^2 r''$, et ayant égard à la relation (1), elle peut être mise sous cette forme

$$\begin{aligned} & \{(ax + by) \cos^2 r'' - z(c \sin r'' - \sin r) \sin r''\}^2 \\ &= \{(c - \sin r'' \sin r)^2 - \cos^2 r''\} \cos^2 r'' \{z^2 - (x^2 + y^2 + z^2) \cos^2 r''\}; \end{aligned}$$

or en la combinant avec celle de C'' qui est

$$z^2 = (x^2 + y^2 + z^2) \cos^2 r'';$$

elle se réduit simplement à

$$(ax + by) \cos^2 r'' = z(c \sin r'' - \sin r) \sin r'',$$

qui n'est, en effet, autre chose que la première des équations (16).

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Recherche du cercle qui en touche trois autres sur un plan ;

Par M. GERGONNE.



IL y a environ trois ans que l'académie de Turin voulut bien rendre public, par la voie de l'impression, un mémoire que je lui avais adressé, et où, dans le dessein de venger complètement la géométrie analitique du reproche qu'on ne lui fait que trop souvent de ne pouvoir rivaliser avec la géométrie pure ; pour la construction des problèmes, j'essayais de prouver que cette géométrie analitique, convenablement maniée, offrait les solutions les plus directes ; les plus élégantes et les plus simples de deux problèmes dès-long-temps célèbres, et qui passent pour difficiles : je veux parler du problème où il s'agit de *décrire un cercle qui touche trois cercles donnés* et de celui où il est question de *décrire une sphère qui touche quatre sphères données*.

J'écrivais pour des savans consommés, et je crus devoir être court ; il paraît que je le fus un peu trop ; plusieurs géomètres, qui eurent connaissance de mon mémoire, me firent le reproche, fondé sans doute ; que le fil qui m'avait guidé n'y était pas assez apparent, et que mes calculs semblaient plutôt propres à légitimer une construction trouvée par un heureux hasard, qu'à faire découvrir cette construction. Il paraît même que, par suite de mon excessif lachisme,

Tom. VII, n.º X, 1.ºº avril 1817.

beaucoup de géomètres n'ont pu suivre mes méthodes et en saisir l'esprit ; car on est revenu encore postérieurement sur ces deux problèmes , sur lesquels pourtant j'avais cru ne plus rien laisser à dire.

C'est ce qui me détermine aujourd'hui à reprendre le même sujet , dans la vue de le développer davantage , et de le mettre à la portée même des commençans. Je le fais d'autant plus volontiers que les méthodes que je mets en œuvre en cette rencontre me paraissent ouvrir un nouveau champ de spéculations et de recherches de nature à faire prendre à la géométrie analytique une face entièrement nouvelle. On verra , je pense , par ce qui va suivre , que tout , absolument tout , peut être motivé et justifié dans mes procédés ; et que , loin que mes calculs n'aient pour objet que de légitimer une construction graphique , découverte à l'avance , cette construction en est , au contraire , une conséquence toute naturelle , et , pour ainsi dire , absolument inévitable. On verra enfin que ces deux problèmes , sur lesquels tant d'illustres géomètres se sont tour à tour exercés , deviennent , par les méthodes que j'y applique , des problèmes de première facilité , qui peuvent aisément trouver place dans les traités même les plus élémentaires.

Au surplus , comme la marche des raisonnemens et des calculs est absolument la même pour ces deux problèmes , je ne m'occuperai uniquement ici que du premier : l'autre pourra offrir au lecteur un moyen de s'assurer s'il a bien saisi le procédé. Il pourra également s'exercer sur le problème où il s'agit de *trouver sur une sphère , un cercle qui en touche trois autres , donnés sur la même sphère* ; problème que j'ai traité par les mêmes méthodes , à la page 349 du IV^e volume de ce recueil.

Soient c , c' , c'' trois cercles donnés de grandeur et de situation sur un même plan , et proposons-nous de trouver un quatrième cercle C qui touche à la fois ces trois-là.

Il se présente assez naturellement de chercher le centre et le

A TROIS AUTRES.

291

rayon du cercle demandé. Mais, comme on sait faire passer une circonférence par trois points donnés, il se présente aussi assez naturellement de chercher trois points de la circonférence de ce cercle. Nous allons même voir bientôt que ce dernier moyen de solution mérite la préférence sur le premier.

Parmi les points de la circonférence du cercle cherché, il y en a trois qui se font particulièrement remarquer : ce sont ceux t , t' , t'' où cette circonférence doit être touchée par les trois cercles donnés ; voilà donc les points de cette circonférence que nous sommes naturellement invités à découvrir.

Notre problème se trouve donc ainsi ramené au suivant :

Trois cercles c , c' , c'' étant donnés de grandeur et de situation sur un plan ; déterminer en quels points t , t' , t'' ils doivent être touchés par un quatrième cercle C qui les touche tous trois.

Mais il n'est pas difficile de voir que, pourvu que l'on sache trouver le point de contact de C avec l'un quelconque des cercles donnés ; en répétant successivement le même procédé pour chacun de ces cercles, le problème se trouvera résolu.

Au moyen de cette remarque, notre problème se trouve ramené au suivant :

Trois cercles c , c' , c'' étant donnés de grandeur et de situation sur un même plan, déterminer en quel point l'un d'eux est touché par un quatrième cercle C qui les touche tous trois.

Il nous est facile de prononcer présentement sur le mérite des deux modes de solution que nous avons d'abord indiqués.

Pour parvenir à la résolution complète d'un problème, il y a inévitablement à exécuter un certain nombre d'opérations qui dépendent de la nature de ce problème et qu'on ne saurait, avec toute l'adresse possible, abréger et réduire indéfiniment. Or, dès qu'on a le centre et le rayon du cercle cherché, le problème est à peu près résolu ; donc, la recherche de ce centre et de ce rayon doit compter toute la somme de constructions que la résolution du problème, simplifiée autant qu'elle peut l'être, peut exiger.

CERCLE TANGENT

Au contraire, si nous avons les points de contact du cercle cherché avec les trois cercles donnés, le problème ne sera pas encore complètement résolu, et il nous restera encore à faire passer un cercle par trois points donnés; donc, il faudra moins faire pour parvenir jusques-là que pour arriver à la solution complète du problème; donc enfin, il doit être plus facile de trouver les points de contact du cercle cherché avec les trois cercles donnés, qu'il ne le serait de trouver le centre et le rayon de ce cercle.

A plus forte raison devra-t-il être plus facile de trouver un de ces points de contact que de les trouver tous trois, puisque, ce point trouvé, on n'aura encore exécuté que le tiers de la construction nécessaire pour les trouver tous trois; puis donc que, lorsqu'ils sont connus, le problème n'est pas encore complètement résolu, on peut présumer, avec beaucoup de vraisemblance, que la recherche de l'un d'eux ne comportera pas même le tiers de la complication totale du problème proposé (*).

Occupons-nous donc de la recherche du point z'' où le cercle C touche le cercle c'' .

Un point est déterminé, sur un plan, lorsqu'on connaît deux lignes, droites ou courbes, sur lesquelles il doit se trouver.

(*) On peut établir, en principe, qu'en général, il doit être d'autant plus facile de ramener un problème à un autre que la solution de celui-ci est plus difficile; pourvu cependant que le dernier soit, s'il est permis de s'exprimer ainsi, sur la route du premier. Ainsi, par exemple, il est beaucoup plus aisé d'aller de Dunkerque à Amiens que de Dunkerque à Collioure, parce que Amiens se trouve sur la route de Dunkerque à Collioure, et fort loin de cette dernière ville. Mais, quoique Berlin soit fort loin de Collioure, il est beaucoup plus court d'aller de Dunkerque à Collioure que de Dunkerque à Berlin; parce que Berlin est tout-à-fait hors de la route qui joint ces deux villes.

Si Viète et Newton sont parvenus très-simplement à ramener le problème qui nous occupe à celui où il s'agit de décrire un cercle qui, passant par un point donné, touche deux autres cercles donnés, c'est que ce dernier problème est presque aussi difficile à résoudre que le premier.

A TROIS AUTRES.

293

Or, pour le point z'' , nous connaissons déjà une telle ligne : c'est la circonférence c'' ; il n'est donc plus question que d'en trouver une autre.

Notre problème se trouve donc ainsi ramené au suivant :

Trois cercles c , c' , c'' étant donnés de grandeur et de situation sur un plan, trouver une ligne qui coupe c'' au point z'' où il est touché par un quatrième cercle C , qui touche à la fois les trois premiers.

Mais il est essentiel de remarquer que ce dernier problème est indéterminé, puisqu'un même point peut être déterminé d'une infinité de manières différentes par l'intersection de deux lignes. C'est de la même manière que, lorsqu'on a deux équations entre deux inconnues x et y , on peut remplacer ces deux équations d'une infinité de manières différentes, par le système de deux autres équations ayant lieu en même temps qu'elles, et donnant conséquemment les mêmes valeurs pour les deux inconnues (*).

Rapportons les données et les inconnues du problème à deux axes rectangulaires. Si nous n'aspirions qu'à la plus grande symétrie possible, nous supposerions ces axes absolument quelconques. Si, au contraire, nous n'aspirions qu'à la simplicité, nous pourrions placer l'origine au centre de l'un de nos cercles et faire passer l'un des axes par le centre de l'un des deux autres.

Mais pour concilier, autant qu'il est possible, la simplicité avec la symétrie, nous nous bornerons à placer le centre de l'un de nos

(*) Nous n'hésitons pas à regarder cette substitution d'équations les unes aux autres, sur laquelle les traités élémentaires sont loin d'insister aussi fortement qu'ils le devraient, comme un des plus puissans moyens de l'analyse et de la géométrie. C'est elle qui fait, en particulier, presque tout le mérite de la discussion des lignes et surfaces du second ordre, exposée à la page 61 du V.^e volume de ce recueil, ainsi que de la théorie de leurs pôles que l'on rencontre à la page 293 du tome III.^e

294

CERCLE TANGENT

cercles à l'origine, en donnant d'ailleurs aux axes une direction quelconque par rapport aux deux autres.

Quant au choix du cercle qui aura son centre à l'origine, il ne pourrait être douteux; et on sent que ce doit être c'' puisqu'il joue un rôle particulier, dans le problème auquel nous avons réduit le problème proposé.

Soient donc respectivement r, r', r'' les rayons des cercles c, c', c'' ; soient a, b les coordonnées du centre de c , et soient a', b' celles du centre de c' .

Soit R le rayon inconnu du cercle C , et soient A, B les coordonnées inconnues de son centre. Soient enfin x, y les coordonnées inconnues du point i'' où C touche c'' ; ce qui donnera une première équation:

$$x^2 + y^2 = r''^2. \quad (1)$$

Supposons, pour fixer les idées, que tous les contacts doivent être extérieurs; il faudra pour cela que la distance du centre de C au centre de chacun des cercles c, c', c'' soit égale à la somme de leurs rayons, ce qui donnera:

$$(A-a)^2 + (B-b)^2 = (R+r)^2; \quad (2)$$

$$(A-a')^2 + (B-b')^2 = (R+r')^2, \quad (3)$$

$$A^2 + B^2 = (R+r'')^2; \quad (4)$$

et telles sont les équations qui résoudraient le problème, si nous voulions prendre pour inconnues les coordonnées du centre et le rayon du cercle cherché.

Avant d'aller plus loin, nous observerons que, dans le cas où le cercle C devrait envelopper quelqu'un des cercles c, c', c'' , ou en être enveloppé, ce serait la différence des rayons, et non leur somme, qui devrait être égale à la distance des centres; il faudrait

A. TROIS AUTRES.

295

donc changer les signes de quelques-uns des rayons r, r', r'' , ou bien changer quelque part le signe de R . On peut observer, au surplus que chacun des binômes $R+r, R+r', R+r''$ se trouvant élevé au carré, l'un de ces changemens équivaut à l'autre ; et l'on voit qu'en variant, de toutes les manières possibles, les signes de r, r', r'' , le problème aura 8 solutions, comme il est d'ailleurs aisé de s'en convaincre, en remarquant que le cercle cherché peut envelopper tous les cercles donnés ou les toucher tous extérieurement ; qu'il peut, de trois manières, envelopper l'un d'eux et toucher les deux autres extérieurement ; et qu'il peut également, de trois manières, toucher l'un d'eux extérieurement et envelopper les deux autres. Nous conserverons néanmoins le signe positif aux trois rayons, en nous rappelant, dans le résultat final, qu'ils peuvent être indifféremment positifs et négatifs.

Lorsque la mise en équation d'un problème conduit immédiatement à plusieurs équations entre plusieurs inconnues ; la première chose qu'il faut faire est d'examiner si, en combinant ces équations entre elles, d'une manière convenable, on ne peut pas en déduire quelques autres plus simples ; car, c'est souvent là un moyen très-propre à simplifier la recherche dont on s'occupe.

En appliquant ces réflexions aux équations (2, 3, 4), on voit sur-le-champ qu'on simplifiera notablement les deux premières, en leur substituant leurs différences avec la troisième, lesquelles sont, en réduisant et transposant,

$$2aA + 2bB - 2(r'' - r)R = a^2 + b^2 + (r'' - r)(r'' + r) \quad (5)$$

$$2a'A + 2b'B - 2(r'' - r')R = a'^2 + b'^2 + (r'' - r')(r'' + r'). \quad (6)$$

On peut encore introduire, dans ces dernières équations, une simplification très-propre à faciliter l'élimination de R entre elles et l'équation (4) : c'est d'y introduire $R+r''$, qui entre seul dans celle-ci ; elles deviendront ainsi

$$2aA + 2bB - 2(r'' - r)(R + r'') = a^2 + b^2 - (r'' - r)^2, \quad (7)$$

$$2a'A + 2b'B - 2(r'' - r')(R + r') = a'^2 + b'^2 - (r'' - r')^2. \quad (8)$$

telles sont donc, avec l'équation (4), les équations les plus simples qu'on puisse employer pour parvenir aux coordonnées du centre et au rayon du cercle cherché.

Mais ce ne sont point ces coordonnées et ce rayon que nous nous sommes déterminés à prendre pour inconnues : ce sont les coordonnées x, y du point de contact i'' de C avec c'' , entre lesquelles nous avons déjà l'équation (1). Cherchons donc à lier ces nouvelles inconnues avec les inconnues des équations (4, 7, 8), afin de pouvoir éliminer ces dernières.

Or, le point i'' est en ligne droite avec l'origine et le centre C , d'où il suit qu'on doit avoir

$$\frac{y}{x} = \frac{B}{A} \quad \text{ou} \quad yA = xB. \quad (9)$$

Si présentement on élimine $A, B, R + r''$ entre les quatre équations (4, 7, 8, 9), l'équation en x et y qui en résultera sera celle d'une certaine ligne qui coupera le cercle donné c'' au point cherché i'' .

Si cette équation était trop compliquée ; on pourrait tenter de la simplifier à l'aide de l'équation (1) qui, pour le point cherché i'' , doit avoir lieu en même temps qu'elle, ce qui reviendrait à substituer à la ligne cherchée une autre ligne plus simple, coupant, comme elle, le cercle c'' au point i'' .

Mais rien n'empêche d'effectuer cette combinaison dans le courant même de l'élimination, afin d'en rendre le résultat le plus simple possible. On peut remarquer d'ailleurs que nous avons proprement cinq inconnues A, B, R, x, y , liées par les équations (1, 4,

A TROIS AUTRES.

297

7, 8, 9); et que conséquemment nous pouvons faire de ces équations, qui ont lieu en même temps, telle combinaison qu'il nous conviendra.

Des équations (4, 9) on tire

$$A = \frac{x(R+r'')}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad B = \frac{y(R+r'')}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

ou plus simplement, en ayant égard à l'équation (1);

$$A = \frac{x(R+r'')}{r''}, \quad B = \frac{y(R+r'')}{r''};$$

substituant ces valeurs dans les équations (7, 8), elles deviendront

$$2\{ax+by-r''(r''-r)\}(R+r'')=r''\{a^2+b^2-(r''-r)^2\};$$

$$2\{a'x+b'y-r''(r''-r')\}(R+r'')=r''\{a'^2+b'^2-(r''-r')^2\},$$

d'où l'on tire enfin, par l'élimination de $R+r''$;

$$\frac{ax+by-r''(r''-r)}{a^2+b^2-(r''-r)^2} = \frac{a'x+b'y-r''(r''-r')}{a'^2+b'^2-(r''-r')^2} \quad (10)$$

Telle est donc l'équation d'une ligne qui coupe le cercle c'' au point cherché i'' ; puis donc que cette équation est du premier degré seulement, la ligne dont il s'agit est une ligne droite.

Mais une ligne droite coupe un cercle en deux points; et il importe de savoir, avant d'aller plus loin, quels problèmes résoudront ces deux points. Pour cela rappelons-nous que nous avons écrit nos équations primitives dans l'hypothèse que tous les contacts étaient extérieurs, et que nous avons observé que l'on passerait de cette hypothèse aux autres par le simple changement des signes de r, r', r'' , ce qui peut avoir lieu de huit manières différentes.

CERCLE TANGENT

Mais il est aisé de voir, par la forme de l'équation (10), qu'elle ne change pas lorsqu'on y change à la fois les signes des trois rayons; d'où il résulte que les huit cas que présentent les variations de signes des trois rayons ne peuvent lui faire prendre que quatre formes différentes; et que, sous chaque forme, elle résout deux problèmes absolument opposés; elle résout donc, sous la forme qu'elle a ici, et le cas où le cercle cherché doit toucher extérieurement les trois cercles donnés, et le cas où il doit les envelopper tous.

On pourrait présentement, par la combinaison des équations (1, 10), parvenir aux valeurs des coordonnées x, y du point I'' ; ces valeurs seraient compliquées de radicaux, et on les construirait par les procédés connus. Mais, nous allons bientôt voir qu'il s'en faut que ce soit là le meilleur parti à prendre.

Lorsqu'un point est donné par deux équations entre ses coordonnées, au lieu de résoudre ces équations, il est souvent incomparablement plus commode de construire les lignes qu'elles expriment, et dont l'intersection doit déterminer le point cherché.

Nous pouvons donc réduire la recherche du point I'' à la construction des lignes représentées par les équations (1, 10); mais la première est toute construite: c'est la circonférence donnée c'' ; il ne s'agit donc que de construire l'autre.

Pour construire cette droite, on pourrait chercher les longueurs des segmens qu'elle détermine sur les axes, et construire ensuite ces deux segmens; mais ce n'est point encore là le meilleur parti à prendre (*).

(*) Ceux qui prétendent contester à la géométrie analytique l'avantage d'offrir des constructions simples et élégantes se fondent principalement sur ce que, quelque attention qu'on apporte à bien choisir les axes des coordonnées, ces axes sont, le plus souvent, des lignes tout-à-fait étrangères au problème qu'il s'agit de résoudre.

« Qu'il soit question, par exemple, disent-ils, de décrire un cercle qui touche

A TROIS AUTRES.

299

Pour construire une droite, il est nécessaire et il suffit de connaître deux points de sa direction; on sait d'ailleurs qu'on reconnaît qu'un point est sur une droite lorsque ses coordonnées rendent identique l'équation de cette droite.

Donc, si l'on trouve deux relations entre x et y en vertu desquelles l'équation d'une droite devienne identique, les valeurs de x et y déduites de ces relations seront les coordonnées d'un point de cette droite.

Or, on a deux manières bien simples de rendre identique l'équation (10); la première est de supposer ses deux membres nuls; la seconde est de les rendre égaux à l'unité.

On obtient ainsi les deux couples d'équations.

$$\begin{cases} ax + by = r''(r'' - r) & (11) \\ a'x + b'y = r''(r'' - r') & (12) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(x-a) + b(y-b) = r(r'' - r) & (13) \\ a'(x-a') + b'(y-b') = r'(r'' - r') & (14) \end{cases}$$

à la fois trois cercles donnés. Les données naturelles du problème sont les rayons des cercles donnés et les distances entre leurs centres pris deux à deux; ses inconnues naturelles sont le rayon du cercle cherché et les distances de son centre aux centres des cercles donnés.

Mais, aux distances entre les centres, la géométrie analytique substitue leurs coordonnées qui sont des données et des inconnues factices et arbitraires; et de là vient la complication des constructions qu'on en déduit.

Nous conviendrons volontiers de tout cela; mais voilà aussi pourquoi nous ne réputons bonnes les constructions déduites de la géométrie analytique, qu'autant qu'on est parvenu à les rendre tout-à-fait indépendantes de la situation des axes; voilà pourquoi nous nous efforçons de prouver, par des exemples, que la géométrie analytique, convenablement employée peut toujours en offrir de telles; et qu'alors elles sont bien supérieures, pour l'élégance et la simplicité, à celles de la géométrie pure, ou même de ce que M. Carnot appelle géométrie mixte.

300

CERCLE TANGENT

Donc les valeurs de x et y , déduites des équations (11, 12), sont les coordonnées d'un point de la droite (10); et il en est de même des valeurs de x et y déduites des équations (13, 14).

On pourrait donc chercher ces deux systèmes de valeurs et les construire; on aurait ainsi deux points de la droite (10), qui se trouverait par là complètement déterminée. Mais on peut faire mieux encore.

Pour déterminer le point, exprimé par les équations (11, 12), ce qu'il y a de mieux à faire est de construire les droites que ces deux équations représentent, et qui, par leur intersection, détermineront le point cherché. On en peut dire autant du point donné par les équations (13, 14), lequel ne sera autre que l'intersection des droites que ces deux équations représentent. Tout se réduit donc à savoir quelles sont les quatre droites que représentent les équations (11, 12, 13, 14).

Mais, comme il est d'ailleurs évident que les droites (12, 14) sont situées par rapport aux cercles c' , c'' , de la même manière que le sont les droites (11, 13), par rapport aux cercles c , c'' ; il nous suffira de nous occuper de ces dernières, que l'on reconnaît d'ailleurs pour des droites parallèles entre elles et perpendiculaires à la droite qui joint les centres des deux cercles.

Nous pouvons remarquer, en outre, que l'équation (11) devient l'équation (13); en y changeant respectivement x et y en $a-x$ et $b-y$, et en permutant entre eux les deux rayons r , r'' , d'où il est facile de conclure que la droite (13) est, par rapport au cercle c , ce qu'est la droite (11) par rapport au cercle c'' . Tout se réduit donc à savoir quelle est cette dernière droite.

On sait qu'en prenant sur le cercle c'' un point dont les coordonnées soient x' , y' , et soient conséquemment liées par la relation

$$x'^2 + y'^2 = r''^2, \quad (m)$$

l'équation de la tangente à ce cercle en ce point est

A TROIS AUTRES.

301

$$xx' + yy' = r''^2, \text{ ou } y = -\frac{x'}{y'}x + \frac{r''^2}{y'},$$

et cette tangente est indéterminée, puisque x' et y' ne sont liés que par l'équation (m). Si, pour la déterminer, on veut qu'elle touche aussi le cercle c , il faudra exprimer que la perpendiculaire abaissée sur elle du centre de ce cercle est égale à son rayon, ce qui donnera

$$\frac{b + \frac{x'}{y'}a - \frac{r''^2}{y'}}{\sqrt{1 + \frac{x'^2}{y'^2}}} = r, \text{ ou } \frac{ax' + by' - r''^2}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = r,$$

ou, en ayant égard à l'équation (m),

$$ax' + by' = r''(r'' - r) \quad (n)$$

C'est donc en combinant entre elles les équations (m, n) qu'on obtiendra les coordonnées du point où la tangente commune à c et c'' touche c'' ; et, puisque l'équation (m) est du second degré, il y aura deux pareilles tangentes, et conséquemment deux points de contact.

Mais, au lieu de résoudre les équations (m, n) il reviendra au même, et il sera plus commode, de construire les deux lignes qu'elle exprime, et dont les intersections donneront les points de contact demandés; puis donc que l'une (m) est le cercle c'' lui-même; l'autre (n) qui est du premier degré doit être celle d'une droite qui joint les points où il est touché par les tangentes communes à ce cercle et à c ; or, (n) est la même chose que (11); donc (11) est l'équation de la corde de contact avec c'' des tangentes communes à c et c'' ; donc (13) est l'équation de la corde de contact des mêmes tangentes avec c ; donc enfin (12) et (14) sont les cordes de contact avec c'' et c' des tangentes communes à ces deux cercles.

CERCLE TANGENT

Voici donc à quoi se réduit la construction du problème. Soient menées les tangentes communes extérieures à nos trois cercles pris deux à deux, et les cordes de contact de ces tangentes avec chaque cercle. Les deux cordes de contact sur c se couperont en M et leurs parallèles sur c' et c'' en N . Les deux cordes de contact sur c' couperont en M' et leurs parallèles sur c'' et c en N' . Les deux cordes de contact sur c'' se couperont en M'' et leurs parallèles sur c et c' en N'' .

Soient menées MN , $M'N'$, $M''N''$. MN coupera c en t et t' ; $M'N'$ coupera c' en t'' et t' ; et $M''N''$ coupera c'' en t''' et t'' . Faisant ensuite passer deux cercles, l'un par t , t' , t''' , l'autre par t , t'' , t''' , ces deux cercles rempliront les conditions du problème.

On peut remarquer, au surplus, que les centres de ces deux cercles seront faciles à déterminer; car ils se trouveront à l'intersection des droites menées des centres des cercles donnés soit aux trois points t , t' , t''' , soit aux trois points t , t'' , t''' .

On se convaincra facilement, d'après tout ce qui a été dit ci-dessus, que pour obtenir les six autres solutions dont le problème est susceptible, il ne s'agit que de substituer, tour-à-tour, à deux des couples de tangentes extérieures les couples de tangentes qui se croisent entre les deux cercles qu'elles touchent à la fois.

En vain objecterait-on que, lorsque deux des cercles donnés sont l'un dans l'autre, en tout ou en partie, ces constructions sont en défaut, puisqu'alors ils n'ont plus de tangentes intérieures communes et peuvent même n'en point avoir d'extérieures: on peut observer en effet qu'alors même les droites (11, 12, 13, 14.) ne cessent point pour cela d'être réelles, et peuvent toujours être construites. On peut même définir les droites (11, 13.), indépendamment de toute considération de tangentes, en disant que ce sont des cordes ayant pour pôle commun le centre de similitude de c et c'' .

On peut modifier un peu les constructions auxquelles nous venons de parvenir de la manière suivante.

A TROIS AUTRES.

303

Au lieu de supposer les deux membres de l'équation (10) égaux à l'unité, on peut les supposer égaux à deux ; ce qui donnera

$$\begin{cases} 2ax + 2by - a^2 - b^2 = r'^2 - r^2, & (15) \\ 2a'x + 2b'y - a'^2 - b'^2 = r''^2 - r^2. & (16) \end{cases}$$

équations qui pourront remplacer les équations (13, 14), et qu'on reconnaîtra aisément (*Annales*, tom. VI, pag. 329) pour celles des axes radicaux, tant des deux cercles c et c'' que des deux cercles c' et c'' ; le point qu'elles détermineront sera donc le centre radical des trois cercles ; et nous le représenterons par O .

On pourra donc remplacer, par la recherche de ce point O , celle des points N , N' , N'' ; de sorte qu'en menant simplement OM , OM' , OM'' , elles détermineront sur c , c' , c'' , les six points t , t' , t'' , t''' , t'''' .

Ceci prouve, au surplus, que les droites MN , $M'N'$, $M''N''$ concourent en un même point, qui est le centre radical des trois cercles.

Cette seconde construction n'est guère plus simple que la première ; mais elle a le précieux avantage sur elle de s'appliquer littéralement à la recherche d'un cercle qui en touche trois autres sur la surface de la sphère (*Voyez Annales*, tom. IV, pag. 349).

On déduira de tout ceci la construction des neuf autres problèmes de Viète, en supposant successivement les rayons des cercles nuls ou infinis.

On traitera exactement de la même manière, et par les mêmes principes, le problème où il sera question de décrire une sphère qui en touche quatre autres, situées d'une manière quelconque dans l'espace ; et on parviendra à des constructions tout-à-fait analogues.

Dans un prochain article nous donnerons un nouvel exemple, non moins remarquable, de l'utilité de la géométrie analytique dans la recherche de la construction des problèmes de géométrie.

DE L'ANALISE ALGÈBRIQUE DANS LA GÉOMÉTRIE. 141

PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.

*Réflexions sur l'usage de l'analyse algébrique dans
la géométrie ;*

*Suivies de la solution de quelques problèmes dépendant
de la géométrie de la règle ;*

Par M. PONCELET, capitaine du génie, ancien élève de
l'école polytechnique.

~~~~~  
*Au Rédacteur des Annales ;*

MONSIEUR ,

Vous ne trouverez pas indiscret, sans doute, la liberté que je prends de vous adresser quelques réclamations touchant la comparaison que vous établissez (*Annales*, tom. VII, pag. 289 et 325) entre les résultats de la *géométrie pure*, et ceux de la *géométrie analytique*. L'impartialité dont vous faites profession m'est un garant assuré que tout ce qui peut tendre à éclairer la partie philosophique des sciences exactes doit, indépendamment de vos opinions personnelles et de votre manière particulière d'envisager les choses, trouver un libre accès dans votre journal, principalement destiné, à ce qu'il paraît, à recueillir les discussions qui peuvent s'élever entre les géomètres sur l'estime relative que l'on doit accorder aux diverses méthodes propres à agrandir le domaine de la science.

Tom. VIII, n.° V, 1.<sup>er</sup> novembre 1817.

20

## 142 DE L'ANALISE ALGÈBRIQUE

J'admire , avec tous les amateurs de la belle analyse , la manière élégante avec laquelle vous savez la faire ployer , sans efforts , aux questions les plus difficiles de la géométrie ; et j'avoue que je ne trouve rien de plus ingénieux que la marche à la fois nouvelle , simple et rapide que vous proposez pour parvenir à leur solution graphique définitive. Je pense que les exemples que vous avez offerts sont bien propres à faire connaître toute la fécondité de l'analyse , et à la venger , en quelque sorte , des reproches qu'on ne se croit que trop souvent en droit de lui faire ; mais je ne saurais cependant admettre , sans restriction , ceux que vous adressez , à votre tour , aux résultats auxquels conduit l'usage exclusif des considérations géométriques.

Si je ne me suis pas trompé sur le sens des réflexions qui précèdent ou qui terminent les articles rappelés ci-dessus , l'analyse , ou plutôt la *méthode des coordonnées* , employée d'une manière convenable , aurait l'avantage de conduire , pour la solution des problèmes de géométrie , à des constructions bien supérieures , pour l'élégance et la simplicité , à celles que fournit la *géométrie pure*. En supposant que , par ce mot de géométrie pure , vous vouliez entendre seulement celle des anciens ; c'est-à-dire , celle qu'ont cultivé les Euclide , les Apollonius , les Viète , les Fermat , les Viviani , les Halley , etc. ; j'avouerais volontiers que , malgré l'estime qu'elle mérite , à plusieurs égards , je suis parfaitement d'accord avec vous. J'ajouterai même que je ne pense pas qu'avec le secours seul de cette géométrie on puisse jamais parvenir à quelque chose de bien général. Or , on ne saurait douter que la généralité des solutions ne soit , le plus souvent , la source de leur élégance et de leur simplicité :

Mais si , par géométrie pure , vous voulez entendre , en général , celle où l'on s'interdit simplement l'usage de la méthode des coordonnées , ou même de toute espèce de calcul quelconque qui permettrait de perdre momentanément de vue la figure dont on s'occupe ; si par là vous voulez désigner cette géométrie , cultivée par

## DANS LA GÉOMÉTRIE.

143

les modernes, dans laquelle, au moyen des notions d'infiniment grands et d'infiniment petits, on parvient à découvrir les relations qui existent entre les diverses parties d'une figure supposée variable; si vous voulez parler enfin de cette géométrie qui consiste à chercher, dans les propriétés de l'étendue à trois dimensions, la solution des problèmes de la géométrie plane, pour repasser ensuite de celle-ci à ce qui concerne la géométrie de l'espace; je déclare franchement que je ne saurais admettre avec vous, Monsieur, que cette géométrie ne puisse donner, à la fois, des solutions aussi simples et aussi élégantes que celles qu'on déduit du calcul. J'avoue même que j'incline fortement à penser que, traitée à son tour d'une manière convenable, et moins restreinte qu'on ne l'a fait jusqu'ici, elle peut fournir, par la voie d'intuition qui lui est propre, et pour certaines classes de problèmes, des solutions qui l'emportent de beaucoup sur celles qu'on déduit de la géométrie analytique, même dans l'état de perfection auquel elle est aujourd'hui parvenue.

Je ne répéterai pas, en faveur de la géométrie pure, ce qu'ont déjà dit les plus grands géomètres; j'essaierai seulement, dans ce qui va suivre, de donner des exemples particuliers, propres à confirmer et à justifier l'opinion que je me suis formée sur ce point. Il ne suffirait pas, en effet, dans cette matière, de rapporter des témoignages plus ou moins consacrés, ni même de simples raisonnemens, quelque solides qu'ils pussent d'ailleurs paraître; mais il faut, en quelque sorte, des preuves de faits, des preuves expérimentales, qui puissent entrer en parallèle, pour l'élégance des résultats, avec celles que vous avez vous-même offertes en faveur de la méthode des coordonnées.

Je ne prétends pas, au surplus, que la géométrie rationnelle ait toujours l'avantage sur l'analyse, ni qu'on doive constamment la préférer à cette dernière, dans les recherches purement géométriques. Je pense, au contraire, avec M. Dupin (*Développemens de géométrie*, 1.<sup>re</sup> partie, pag. 238), que chacune de ces deux sciences a des

## 144 DE L'ANALISE ALGÈBRIQUE

moyens qui lui sont propres , et qu'on ne pourrait , sans un grand préjudice pour l'avancement de la science , cultiver l'une ou l'autre d'une manière trop exclusive. J'ajouterai même qu'il me paraît qu'on ne saurait trop s'efforcer de les élever , pour ainsi dire , de front , à la même hauteur ; en employant les principes généraux de l'analyse à donner aux résultats de la géométrie toute l'extension qui leur manque d'ordinaire , et qui appartient essentiellement à ceux de la première ; et en se servant réciproquement , dans celle-ci , des considérations de la géométrie , soit pour simplifier l'état de la question , en la ramenant à des circonstances particulières plus facilement accessibles , soit pour faire le choix d'inconnues le plus convenable , soit enfin pour interpréter et pour développer les conséquences géométriques des résultats de ses calculs.

J'ai tout lieu de croire , Monsieur , que vous souscrirez volontiers à ces dernières réflexions , et que vous les trouverez tout-à-fait conformes à vos propres idées sur la géométrie pure et sur la géométrie analytique. Je crois du moins en avoir pour preuve un grand nombre d'articles que vous avez fournis à votre recueil périodique , et notamment le dernier des articles déjà cités , où vous faites usage de considérations géométriques préliminaires , pour simplifier la question , en remarquant qu'une construction qui peut s'effectuer avec la règle , pour l'une quelconque des sections coniques , est par là même indistinctement applicable à toutes les autres.

Après cette espèce d'explication qui m'a paru indispensable pour bien faire connaître mes idées et l'intention qui m'anime , je passe aux exemples que j'ai promis d'offrir , en faveur de la géométrie pure. Je me bornerai simplement à donner les constructions , sans entrer dans aucun détail sur les raisonnemens qui y ont conduit et qui peuvent servir à les justifier ; me réservant de faire connaître , dans une autre occasion , les principes théoriques sur lesquels ces constructions reposent ; principes dont le développement excéderait nécessairement les bornes d'une simple lettre.

Le premier des exemples qui suivent paraîtra d'autant plus con-

## DANS LA GÉOMÉTRIE. 145

venable que c'est précisément, Monsieur, le problème général dont vous avez traité le cas le plus simple à la page 325 de votre VII.<sup>e</sup> volume. Il convient, au surplus, de prévenir qu'il y a près de quatre ans que j'en ai découvert la solution que j'en vais donner. J'étais alors prisonnier en Russie; et, dès mon retour en France, je m'empressai de la communiquer à MM. Français et Servois, auteurs de plusieurs mémoires très-remarquables, insérés dans les *Annales*.

*PROBLÈME I. A une section conique donnée, et tracée sur un plan, inscrire un polygone de  $m$  sommets, dont les côtés, prolongés s'il le faut, passent respectivement par un même nombre de points donnés, placés arbitrairement sur le même plan; en ne faisant usage que de la règle seulement?*

*PROBLÈME II. A une section conique donnée, et tracée sur un plan, circonscrire un polygone de  $m$  côtés, dont les sommets s'appuient respectivement sur un même nombre de droites données, tracées arbitrairement sur ce plan, en ne faisant usage que de la règle seulement?*

Je réunis les énoncés de ces deux problèmes, parce que, bien qu'ils soient d'une nature différente, rien n'est plus facile, comme l'on sait, que de passer, au moyen de la théorie des pôles, de la solution de l'un quelconque à la solution de l'autre, sans employer autre chose, pour y parvenir, que le tracé de simples lignes droites. Aussi ne m'occuperai-je principalement, et presque exclusivement, dans ce qui va suivre, que de ce qui concerne, en particulier, le premier de ces deux problèmes; c'est-à-dire, celui où il s'agit d'inscrire à une section conique donnée un polygone dont les côtés passent respectivement par des points aussi donnés.

Ce problème, énoncé ainsi d'une manière générale, se compose essentiellement de deux parties distinctes; l'une appartenant à la *géométrie de situation*, et l'autre dépendant simplement de la *géométrie ordinaire*. Rien n'indique, en effet, dans l'énoncé, quel

est l'ordre ou la succession des côtés du polygone inconnu, relativement à la disposition des points donnés par lesquels ils doivent passer respectivement. Or, il est évident que chacun des arrangements possibles et différens de ces côtés donnera lieu à un problème particulier, tout-à-fait distinct des autres, dont la solution devra proprement appartenir à la géométrie ordinaire. La première question à résoudre; celle qui appartient tout-à-fait à la géométrie de situation, consiste donc à rechercher *quel est le nombre et l'espèce des polygones réellement différens, quant à la succession des côtés, qu'il est possible de former, en assujettissant ces mêmes côtés à passer par un nombre  $m$  de points donnés?*

Or, il est aisé de voir que le nombre de ces polygones est

$$\frac{1.2.3 \dots (m-1)}{2} = 3.4.5 \dots (m-1) ;$$

et, quant à la manière de les former, on appellera  $a, b, c, d, \dots k$  les points par où doivent passer les divers côtés du polygone, et l'on supposera que ces mêmes lettres appartiennent aussi aux côtés correspondans; puis on placera arbitrairement toutes ces lettres, celles  $a, b, c$ , par exemple, sur le périmètre d'un premier cercle; le nombre des divers arrangements de ces trois lettres ne saurait évidemment surpasser un, parce qu'on les peut lire indifféremment de droite à gauche ou de gauche à droite. Pour passer de ce premier cas à celui où il y aurait quatre lettres  $a, b, c, d$ , il faudrait intercaler la lettre  $d$  successivement entre deux des trois premières, ce qui ne donnera évidemment que trois arrangements possibles et réellement différens, qu'il faudra écrire séparément sur trois nouvelles circonférences, afin de ne point les confondre entre eux. On trouvera pareillement les arrangements qui correspondent à une cinquième lettre  $e$ , introduite parmi les autres, en l'intercalant, pour chacune des circonférences dont il vient d'être question, entre deux lettres consécutives des arrangements de quatre lettres qu'elles repré-



## DE LA RÈGLE.

147

sentent séparément ; on obtient ainsi quatre arrangemens possibles de cinq lettres , pour chacune de ces circonférences ; d'où il suit que le nombre total de ces divers arrangemens est  $3.4=12$ . Pour les distinguer les uns des autres , on pourra les écrire , à leur tour , sur autant de circonférences particulières. En continuant ainsi , de proche en proche , on parviendra enfin à obtenir tous les arrangemens possibles et différens qui correspondent aux  $m$  points donnés ; et l'on voit bien que leur nombre sera , en général  $3.4.5....(m-1)$ , ainsi que nous l'avions annoncé.

Rien n'est plus facile que de concevoir l'usage qu'on pourra faire de cet espèce de tableau artificiel. Supposons , par exemple , que l'on considère , en particulier , un arrangement  $adcb....f$  ; en se reportant à la figure du problème , cela signifiera qu'en faisant passer par  $a$  le premier côté du polygone à construire , le second devra passer par  $d$  , le troisième par  $c$  , le quatrième par  $b$  , et ainsi de suite , et enfin le dernier par  $f$ .

C'est donc ce polygone particulier , différent de tous les autres , quant à l'arrangement des côtés relatif aux points donnés , qu'il s'agira de construire , par la géométrie ordinaire , de telle sorte qu'il soit inscrit à la section conique donnée. Le problème général qui nous occupe , ainsi particularisé pourra donc s'énoncer de la manière suivante :

*Problème.* A une section conique donnée , et décrite sur un plan , inscrire un polygone de  $m$  sommets , dont les côtés , prolongés s'il le faut , passent respectivement , et dans un ordre assigné , par autant de points situés arbitrairement sur le plan dont il s'agit ; en ne faisant usage que de la règle seulement ?

Je donnerai de ce problème deux solutions , l'une et l'autre entièrement géométriques , et assez remarquables , ce me semble , par leur simplicité et leur généralité. Dans la première , je commencerai par examiner les cas particuliers du triangle et du quadrilatère ; et j'indiquerai ensuite les constructions à effectuer , pour ramener la solution du cas général à celle de ces derniers.

On peut remarquer, au surplus, que la question, dans tous les cas, se réduit évidemment à assigner l'un des sommets du polygone demandé, attendu que, ce sommet une fois déterminé, la solution s'achève, avec la règle seulement, de la manière la plus simple. Nous supposerons constamment, dans tout ce qui va suivre; que les points donnés, suivant l'ordre de succession qu'on aura choisi pour eux, sont  $p, p', p'', \dots, p^{(m)}$ ; et que le sommet cherché; que nous appellerons le dernier sommet, est celui de l'angle dont les côtés passent par les deux points extrêmes  $p$  et  $p^{(m)}$ .

Observons enfin qu'une corde d'une courbe, supposée double; et passant par deux points donnés sur son plan, peut être considérée comme un polygone de deux côtés, dont les côtés passent respectivement par ces deux points.

### *Première solution indirecte.*

1. *Pour deux points donnés  $p, p'$ . Joignez les deux points donnés par une droite, dont chacune des intersections avec la courbe pourra être prise pour le sommet cherché.*

2. *Pour trois points donnés  $p, p', p''$ . Inscrivez, à volonté, à la section conique, une portion de polygone de trois côtés, dont le premier  $ab$  passe par  $p$ , le second  $bc$  passe par  $p'$ , et le troisième  $cd$  par  $p''$ . Tracez la polaire de l'un quelconque des deux points extrêmes  $p, p''$ , de  $p''$  par exemple; et menez par les deux autres  $p, p'$ , une droite qui viendra couper cette polaire en  $q$ . Menez, par  $q$  et  $c$ , une sécante, coupant de nouveau la courbe en  $r$ . Menez enfin  $re$ , coupant la polaire en  $P'$ , et  $ra$  coupant l'autre droite en  $P$ . Alors menant  $PP'$ , chacune des intersections de cette droite avec la courbe pourra être prise pour le sommet cherché.*

3. *Pour quatre points donnés  $p, p', p'', p'''$ . Inscrivez, à volonté, à la section conique, une portion de polygone de quatre côtés, dont le premier côté  $ab$  passe par  $p$ , le second  $bc$  par  $p'$ , le troisième  $cd$  par  $p''$  et le quatrième  $de$  par  $p'''$ . Menez par les deux*

## DE LA RÈGLE.

149

deux premiers points  $p, p'$ , et par les deux derniers  $p'', p'''$ , deux droites indéfinies se coupant en  $q$ . Menez, par  $q$  et  $c$ , une sécante coupant de nouveau la courbe en  $r$ . Menez enfin  $ra, re$ , coupant respectivement les deux droites indéfinies en  $P, P'$ . Alors menant  $PP'$ , chacune des intersections de cette dernière droite avec la courbe pourra être prise pour le sommet cherché.

4. *Pour des points donnés, au nombre de plus de quatre.* Inscrivez, à volonté, à la section conique, une portion de polygone d'autant de côtés qu'il y a de points donnés, dont les côtés passent respectivement par ces points. Soient traités quatre côtés consécutifs quelconques de cette portion de polygone comme il a été dit de la portion de polygone elle-même, dans le cas précédent. On obtiendra ainsi deux points  $P, P'$ . En les substituant à ceux par lesquels passaient les quatre côtés consécutifs, on se trouvera avoir en tout deux points de moins qu'auparavant. En continuant ainsi de diminuer de deux unités le nombre des points donnés, tant qu'ils se trouveront au nombre de plus de trois, on arrivera enfin à n'avoir plus que deux ou trois points, que l'on traitera comme il a été dit au premier ou au second cas.

*Deuxième solution directe.*

*Le nombre des points donnés étant quelconque.* Inscrivez, à volonté et successivement, à la section conique trois portions de polygones d'autant de côtés qu'il y a de points donnés, dont les côtés passent respectivement par ces points. Soient  $a, a', a''$  les premières extrémités de ces portions de polygones, et  $k, k', k''$  les dernières, respectivement. Soient considérés ces six points comme les sommets d'un hexagone inscrit à la section conique, ayant pour sommets opposés  $a$  et  $k, a'$  et  $k', a''$  et  $k''$ ; les trois points de concours de ses côtés opposés seront, comme l'on sait, sur une même droite; et cette droite coupera la section conique en deux points dont chacun pourra être pris pour le sommet cherché.

Quelque incontestable que soit la supériorité de cette seconde solution, sous le rapport de la généralité et de la symétrie ; nous croyons cependant devoir observer que, lorsque les points donnés sont peu nombreux, l'autre semble lui être préférable, sous le rapport de la simplicité, attendu qu'elle exige le tracé d'un moindre nombre de lignes.

Toutes ces constructions ayant une partie arbitraire, on peut profiter de ce qu'elles présentent d'indéterminé pour les rendre plus simples. On peut, par exemple, faire passer l'un des côtés extrêmes de la portion de polygone par les deux premiers ou les deux derniers des points donnés. Ce côté comptera alors pour deux, et l'extrémité de la portion de polygone pourra être indistinctement supposée à l'une ou à l'autre de ses extrémités. En appliquant cette remarque au cas du triangle, dans la première solution, on aura deux manières de déterminer le point  $P'$  sur la polaire de  $p''$ . On pourra donc se dispenser de construire cette polaire, et la recherche du sommet inconnu se réduira ainsi au tracé de neuf lignes droites seulement.

On voit, par ce qui précède, que, pour un ordre de succession quelconque des points donnés, le problème peut avoir deux solutions au plus. Puis donc que nous avons trouvé d'ailleurs que ces différens ordres étaient au nombre de  $3.4.5.....(m-1)$  ; Il s'ensuit que le nombre des solutions sera au plus  $1.2.3.....(m-1)$ .

Quoique nous ayons annoncé que nous n'insisterions pas sur le second des deux problèmes généraux que nous nous sommes proposé, à raison de l'extrême facilité avec laquelle il se ramène au premier ; nous ne pouvons cependant nous refuser au plaisir de faire connoître une construction directe de ce problème tout-à-fait remarquable par sa parfaite analogie avec celle que nous avons donnée en dernier lieu pour l'autre : la voici.

Circonscrivez successivement et à volonté à la section conique trois portions de polygones d'autant de sommets qu'il y a de droites données, et dont les sommets soient respectivement sur ces droites.

## DE LA RÈGLE.

151

Soient  $a, a', a''$  les premiers côtés de ces portions de polygones et  $k, k', k''$  les derniers respectivement. Soient considérées ces six droites comme les côtés d'un hexagone circonscrit à la courbe, ayant pour ses côtés opposés  $a$  et  $k, a'$  et  $k', a''$  et  $k''$ ; les trois diagonales joignant les sommets opposés de cet hexagone se couperont, comme l'on sait, en un même point; et la polaire de ce point déterminera, par son intersection avec la courbe, deux points, dont chacun pourra être pris pour le point de contact de la courbe avec le polygone cherché.

Parmi le grand nombre des cas particuliers que peuvent offrir nos deux problèmes, relativement à la situation des points ou des droites donnés, il en est deux qui sont trop remarquables, soit par les circonstances qu'ils présentent, soit par la simplicité de la solution qui leur est relative, pour que nous puissions nous permettre de les passer sous silence : ce sont celui où les points donnés sont en ligne droite, et celui où les droites données concourent en un même point. Proposons-nous donc ces deux problèmes :

**PROBLÈME I.** *A une section conique donnée, inscrire un polygone de tant de sommets qu'on voudra, dont les côtés passent par un même nombre de points donnés, situés sur une même ligne droite, en ne faisant usage que de la règle seulement ?*

**PROBLÈME II.** *A une section conique donnée, circonscrire un polygone de tant de côtés qu'on voudra, dont les sommets s'appuyent sur un même nombre de droites données, concourant en un même point, en ne faisant usage que de la règle seulement ?*

*Solution du premier problème.* Inscrivez, à volonté, à la courbe, une portion de polygone, dont les côtés passent respectivement par les points donnés. Le nombre de ces points pourra être pair ou impair.

Le nombre des points donnés étant pair, si le polygone ne se referme pas de lui-même, le problème ne pourra être résolu ; et si, au contraire, il se referme de lui-même, tout autre se refermera

également, et conséquemment le problème sera susceptible d'un nombre indéfini de solutions.

Le nombre des points donnés étant impair, la corde qui joindra les deux extrémités de la portion de polygone ira couper la droite unique qui contient les points donnés en un point dont la polaire, par son intersection avec la courbe, déterminera deux points dont chacun pourra être pris pour le dernier sommet du polygone demandé.

*Solution du second problème.* Circonscrivez, à volonté, à la courbe, une portion de polygone dont les sommets s'appuient respectivement sur les droites données. Le nombre de ces droites pourra être pair ou impair.

Le nombre des droites données étant pair, si les deux côtés extrêmes de la portion de polygone ne se confondent pas en un seul, le problème ne pourra être résolu; et si, au contraire, ils coïncident de manière à former un polygone fermé, ce polygone, et tous les autres qu'on pourra construire sous les mêmes conditions que celui-là, résoudront le problème, qui aura ainsi une infinité de solutions.

Le nombre des droites données étant impair, la droite qui joindra le point de concours des côtés extrêmes de la portion de polygone avec le point de concours des droites données, coupera la section conique en deux points dont chacun pourra être pris pour le point de contact de cette courbe avec le dernier côté du polygone cherché.

Toutes les constructions précédemment indiquées sont principalement déduites de deux théorèmes généraux, dont nous nous bornerons, pour le présent, à faire connaître l'énoncé.

**THÉOREME 1.** *Un polygone quelconque étant inscrit à une section conique; si l'on vient à le faire varier de toutes les manières possibles, de manière cependant qu'il ne cesse pas d'être inscrit à la courbe, et que tous ses côtés, excepté un seul, passent constamment par des pôles fixes; le côté libre sera, dans son mou-*

## DE LA REGLE.

153

vement, perpétuellement tangent à une autre section conique, touchant la première en deux points.

Dans le cas particulier où tous les pôles fixes seront situés sur une même ligne droite, et en nombre impair, le côté libre tournera constamment autour d'un point fixe situé sur cette droite.

**THÉORÈME II.** Un polygone quelconque étant circonscrit à une section conique; si l'on vient à le faire varier de toutes les manières possibles, de manière cependant qu'il ne cesse pas d'être circonscrit à la courbe, et que tous ses sommets, excepté un seul, s'appuient constamment sur des droites fixes; le sommet libre décrira, dans son mouvement, une autre section conique, touchant la première en deux points.

Dans le cas particulier où toutes les directrices, concourant en un même point, sont en nombre impair, le sommet libre décrit une ligne droite qui concourt aussi en ce point.

Je passe à l'autre exemple que j'ai promis, au commencement de cette lettre, en faveur de la géométrie pure.

**PROBLÈME.** Une section conique étant tracée sur un plan; et deux points étant donnés arbitrairement sur ce plan, le premier sur le périmètre de la courbe et l'autre quelconque; déterminer tant de points qu'on voudra d'une autre section conique qui, passant par les deux points donnés, ait, au premier de ces points, un contact du troisième ordre avec la première, en ne faisant usage que de la règle seulement?

*Solution.* Soit P le point donné sur le périmètre de la courbe; et soit A l'autre point quelconque.

Soit menée en P, à la section conique donnée; une tangente indéfinie. Soit menée la sécante PA, coupant de nouveau la courbe en Q. Par un autre point quelconque R de cette courbe, et par le point Q, soit menée une sécante, rencontrant en S la tangente en P. Menant enfin PR et SA, ces deux droites concourront en un point M, qui appartiendra à la courbe cherchée. En variant

154

## GÉOMÉTRIE

donc la position du point R sur la courbe donnée ; on obtiendra tant de points M qu'on voudra de la courbe cherchée.

Si le point A était infiniment éloigné , auquel cas l'osculatrice demandée devrait être une parabole ou une hyperbole ; la même construction subsisterait encore ; mais alors elle ne pourrait plus s'exécuter avec la règle seulement.

Si, à la place du point A, on se donnait une tangente à l'osculatrice demandée ; la construction, un peu différente dans sa première partie, ne perdrait rien d'ailleurs de sa simplicité. Il ne serait pas difficile, au surplus, de déduire de la précédente construction toute la théorie des osculations des sections coniques entre elles ; mais ce n'est point ici le lieu.

Je crois, Monsieur, ces exemples suffisans pour l'objet que j'avais en vue. Mais, pour fixer encore l'attention d'une manière plus particulière ; je crois devoir observer que les problèmes que je viens de résoudre ne sont peut-être pas les plus difficiles de ceux que je suis parvenu à traiter par la géométrie pure, et sans le secours du calcul. Entre les divers exemples que j'en pourrais citer, je me bornerai aux deux suivans qui, à raison de l'intérêt qu'ils présentent, semblent se recommander d'une manière plus spéciale.

*PROBLÈME. Deux sections coniques étant tracées sur un même plan ; construire un polygone de tant de côtés qu'on voudra qui soit, à la fois, inscrit à l'une d'elles et circonscrit à l'autre, en ne faisant usage que de la règle seulement ?*

*PROBLÈME. En un point donné d'une courbe géométrique quelconque tracée sur un plan, mener une tangente à cette courbe, en ne faisant usage que de la règle seulement ?*

J'ai peine à me persuader que la géométrie analytique puisse parvenir à des constructions générales, à la fois plus symétriques



## DE LA RÈGLE.

155

et plus simples que celles qui précèdent, à raison du grand nombre des données qui doivent simultanément concourir à la détermination des inconnues. Toutefois, Monsieur, après les exemples que vous avez offerts aux articles déjà cités des *Annales*, il est peut-être prudent de ne rien préjuger sur ce point. C'est la faute que j'avais moi-même commise avant de connaître vos solutions ; et cela prouve de nouveau qu'on ne doit jamais se hâter d'imputer à l'analyse des imperfections qui souvent sont uniquement le fait de ceux qui ne savent point en faire un usage convenable.

Agréez, etc.

Metz, le 18 d'octobre 1817.

---

*Réflexions sur l'article précédent ;*

Par M. GERGONNE.

---

IL y a environ dix-huit mois que , dans une séance publique d'une académie de Province , un homme d'un mérite très-distingué entreprit de consacrer un discours à l'apologie de l'*exagération*. Il observait , entre autres choses , que , dans un grand nombre de circonstances , il importe beaucoup moins de frapper juste que de frapper fort ; et il comparait très-ingénieusement l'exagérateur à l'homme qui , voulant redresser un bâton courbé en un sens , pense , avec raison , ne pouvoir parvenir à son but qu'en courbant ce bâton en sens inverse.

Si donc , dans les articles rappelés ci-dessus par M. Poncelet ; j'avais dit formellement qu'il fallait abandonner tout-à-fait la géométrie pure pour s'occuper exclusivement de la géométrie analytique , seule capable de fournir , dans les problèmes qui concernent l'étendue , des solutions à la fois élégantes et simples ; tout ce qu'on pourrait équitablement en conclure , c'est que j'aurais bien mis à profit la doctrine de l'estimable académicien dont il vient d'être question.

J'entendais , en effet , répéter sans cesse , comme une chose tout-à-fait hors de doute , que , malgré les avantages qu'offrait la géométrie analytique , sous le point de vue de la généralité et de l'uniformité des procédés ; elle ne pouvait donner , pour la solution des problèmes , des constructions comparables , pour l'élégance et la simplicité ;

## DANS LA GÉOMÉTRIE:

157

simplicité, à celles dont les géomètres de l'antiquité, et ceux d'entre les modernes qui ont marché sur leurs traces, nous ont laissé de si beaux exemples; et cependant je voyais plusieurs de ces problèmes céder sans efforts aux procédés du calcul; je voyais ces procédés conduire à des constructions incomparablement plus simples et plus élégantes que tout ce qu'on avait connu jusqu'alors. La géométrie analytique m'avait conduit, en particulier, pour la recherche du cercle qui en touche trois autres sur un plan et pour celle de la sphère qui en touche quatre autres dans l'espace, à des constructions qui, indépendamment d'une merveilleuse simplicité, avaient à la fois l'avantage de fournir une solution directe de ces problèmes, et de contenir implicitement celle de tous les autres problèmes plus simples qui en forment communément le cortège; tandis que depuis Viète et Fermat, Descartes et Newton jusqu'à ces derniers temps, où ces mêmes problèmes ont été attaqués de tant de manières diverses, tous les efforts des géomètres n'avaient pu aboutir, en dernière analyse, qu'à les ramener, peu à peu, à une suite d'autres problèmes de plus en plus simples, mais dont la construction successive ne pouvait que rendre celle du problème principal longue et laborieuse, et conséquemment peu sûre dans la pratique. J'avais déduit enfin des mêmes procédés la construction du cercle tangent à trois autres sur une sphère; problème que jusqu'alors personne encore n'avait osé aborder; et l'on conviendra que, dans de telles circonstances, j'aurais été un peu excusable de ne savoir pas me défendre de quelque enthousiasme pour des méthodes qui me paraissaient si fécondes; et j'étais d'autant plus entraîné à les recommander fortement à l'attention des géomètres que j'avais cru m'apercevoir que les constructions que j'en avais déduites n'avaient pas produit toute la sensation que j'attendais; et que même on était encore revenu postérieurement sur les problèmes que ces constructions concernent; problèmes sur lesquels j'avais cru ne plus rien laisser à dire.

La vérité est pourtant que je ne crois pas, dans tout ce que j'ai

*Tom. VIII.*

22

écrit et publié sur ce sujet, avoir dépassé les bornes prescrites par la froide raison, et avoir rien avancé que je doive aujourd'hui rétracter.

Ce fut vers 1810, en lisant les *Éléments d'analyse géométrique et d'analyse algébrique* de M. LHUILIER, que je conçus la première idée du nouveau tour qu'on pouvait faire prendre à la géométrie analytique. Je publiai, par forme d'exemple, les solutions de quelques problèmes, traités suivant le système que je m'étais formé à ce sujet (*Mémoires de l'académie du Gard*, pour 1810); et j'annonçai dès-lors qu'il était possible de construire tous les problèmes de l'*Apollonius Gallus* de VIÈTE, sans résoudre aucune équation du second degré.

Environ quatre ans après j'adressai à l'académie de Turin un mémoire contenant la solution analytique complète des problèmes de Viète et de Fermat, relatifs à la détermination du cercle et de la sphère, au moyen de trois ou de quatre conditions. Je donnai ensuite, dans le présent recueil (tom. IV), la construction du cercle qui en touche trois autres sur une sphère; et enfin dans le tome VII.<sup>e</sup>, indépendamment du problème que j'avais déjà traité dans le volume cité de l'académie du Gard, je donnai quelques développemens à la première partie de mon mémoire à celle de Turin.

Dans toutes ces diverses circonstances, je crois avoir constamment professé la même doctrine; et je n'ai découvert postérieurement aucun fait qui lui soit contraire. J'ai dit, et je répète encore aujourd'hui, qu'on n'a pas su tirer jusqu'ici de la géométrie analytique tout le parti qu'elle semble susceptible d'offrir; qu'on la calomnie lorsqu'on la regarde comme peu propre à fournir, pour les problèmes de géométrie, des constructions simples et élégantes; que la faute paraît en être presque uniquement à la manière dont on l'a employée; et qu'en la maniant avec plus d'adresse, on peut en déduire des constructions qui, si elles ne sont pas supérieures à celles de l'ancienne géométrie, paraissent du moins ne devoir leur rien

## DANS LA GÉOMÉTRIE.

159

céder en simplicité et en élégance. J'appuyai ces assertions par quelques exemples ; et je demanderai encore présentement aux géomètres, je demanderai à M. Poncelet lui-même, s'il connaît, en particulier, pour les problèmes de Viète, et de Fermat quelques constructions plus directes, plus générales, plus élégantes et plus simples que celles auxquelles on est directement conduit par la géométrie analytique, employée de la manière que je conçois.

Que je ne sois pas en état d'amener au même degré de simplicité tous les problèmes relatifs à l'étendue ; c'est là une chose dont je conviendrais sans peine ; tout ce dont je désire qu'on veuille bien me savoir quelque gré, et me tenir quelque compte, c'est d'avoir ouvert aux spéculations de la géométrie une voie qui me paraît tout-à-fait nouvelle, et de n'avoir rien négligé pour déterminer de plus habiles que moi à s'y engager. Il n'est point surprenant, au surplus, qu'en entrant seul dans une route que personne n'a encore frayée, on chemine un peu lentement ; la géométrie analytique est d'ailleurs une invention très-récente ; et la manière dont je propose de l'appliquer date pour ainsi dire d'hier ; peut-être lorsqu'on aura manié les formules de cette géométrie pendant autant de temps qu'il y en a que l'on contemple des cercles et des triangles ; peut-être alors, dis-je, y sera-t-on devenu un peu plus adroit.

Si présentement on me demande mon opinion sur la *géométrie pure*, je demanderai à mon tour de faire une distinction. S'agit-il de la géométrie d'Archimède, d'Euclide, d'Apollonius, et de tous ceux d'entre les modernes qui, comme Viviani, Halley, Viète et Fermat, ont marché sur leurs traces ? J'avouerai franchement, quelque opinion que l'on puisse en prendre de moi, que je n'en suis pas enthousiaste. Que si, au contraire, on veut parler de cette géométrie qui, née, pour ainsi dire, des méditations de l'illustre Monge, a fait de si immenses progrès entre les mains de ses nombreux disciples, on me trouvera toujours disposé à lui rendre le plus éclatant hommage, et à reconnaître qu'elle nous a fait découvrir en

vingt années plus de propriétés de l'étendue qu'on n'en avait pu découvrir dans les vingt siècles qui les avaient précédées.

Loin donc que je croie que l'on doive négliger la géométrie pure pour l'analyse ; Je pense , au contraire , avec M. Poncelet qu'on ne saurait trop s'appliquer à les cultiver l'une et l'autre avec un soin égal ; mais je pense aussi que , s'il peut être souvent utile de s'aider dans l'analyse des considérations que la géométrie peut fournir , et *vice versa* ; on n'en doit pas moins apporter tous ses soins à tirer de chacune de ces deux branches d'une même science tout le parti que , sans le secours de l'autre , elle peut être susceptible d'offrir. Je voudrais même , pour cette raison , que , dans la géométrie , on pût toujours éluder l'usage même des propositions , parce qu'elles ne sont au fond que des calculs déguisés.

Quant à ce que M. Carnot a appelé *méthodes mixtes* , dont il nous a offert lui-même tant de beaux exemples , je pense que ces méthodes peuvent souvent être employées avec avantage dans la démonstration de certains théorèmes ; et que c'est à elles , en particulier , qu'on doit avoir recours , lorsqu'on veut résoudre , par le calcul , des problèmes de géométrie ; mais j'inclinerais à les regarder comme les moins propres de toutes à faire trouver des constructions simples et élégantes.

Au surplus , la nature des problèmes semble devoir influencer d'une manière notable sur le choix des méthodes. Il arrive souvent , en effet , que telle méthode qui triomphe sans efforts de certains problèmes , échoue , au contraire , contre d'autres qui cèdent à leur tour facilement à des méthodes différentes ; et l'art de pressentir à l'avance , dans chaque cas particulier , de laquelle d'entre elles on peut se promettre le plus de succès , n'est point la partie la moins importante ni la moins difficile de la science du géomètre. On doit remarquer , au surplus , qu'il est certains problèmes qui semblent se montrer également rebelles à toutes les méthodes ; et tels sont , par exemple , celui de l'inscription de trois cercles au triangle et de quatre sphères au tétraèdre.

## DANS LA GÉOMÉTRIE. 161

Pour en venir présentement à l'objet particulier de la lettre de M. Poncelet, je m'empresse de reconnaître la supériorité de ses méthodes et de déclarer que, sans oser affirmer que la géométrie analytique ne puisse parvenir jusques-là, il me paraît au moins très-douteux qu'elle puisse y atteindre d'une manière facile. On ne peut donc que faire des vœux pour que l'auteur, après avoir aussi vivement piqué la curiosité des lecteurs, veuille bien enfin la satisfaire complètement, en faisant connaître les théories sur lesquelles reposent ses ingénieuses et élégantes constructions. On doit désirer, en outre, que M. Poncelet ne borne point là ses recherches; et qu'il pousse aussi avant qu'elles en seront susceptibles des spéculations desquelles il a déjà obtenu un succès aussi remarquable.

De mon côté, je ne négligerai aucune des occasions que mes courts loisirs pourront m'offrir, pour multiplier les exemples du genre d'application de l'analyse à la géométrie que je cherche à faire prévaloir; et j'ose croire que la diversité de nos méthodes ne fera jamais naître d'autre rivalité entre nous que celle du zèle pour l'avancement de la science.

---

---

## GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

*Construction géométrique d'un cercle qui en touche trois autres donnés sur un plan ou sur une sphère, d'un cône droit qui en touche trois autres de même sommet, et d'une sphère qui en touche quatre autres dans l'espace;*

Par M. PONCELET, capitaine au corps royal du génie, ancien élève de l'école polytechnique. (\*)

J'APPELLE points homologues *directs* ou *inverses*, relativement à deux cercles tracés sur un même plan, et à l'un quelconque de leurs centres de similitude, deux points de leurs circonférences qui, étant situés à la fois sur une droite passant par le centre de similitude dont il s'agit, appartiennent à deux arcs dont la courbure est dirigée dans le *même sens* ou en *sens contraire*, par rapport à ce centre de similitude. D'où il suit que les rayons menés

---

(\*) Les constructions dont il va être question sont celles qui ont été annoncées à la page 82 de ce volume. Nous avons pensé qu'elles pourraient offrir un rapprochement curieux avec celles de M. Durrande, insérées également dans le présent volume; et, à notre prière, l'auteur a bien voulu nous les communiquer.

J. D. G.

Tom. XI, n.° X, 1.°<sup>re</sup> avril 1821.

42



### 318 CONTACT DES CERCLES.

à deux points homologues sont ou ne sont pas parallèles, suivant que ces points sont directement ou inversement homologues.

En conséquence de ces définitions, deux arcs, deux cordes, deux tangentes, etc., appartenant respectivement à deux cercles, seront *directement* ou *inversement* homologues, suivant que leurs extrémités ou points de contacts seront des points de l'une ou de l'autre espèce.

On voit, d'après cela, que, pour un point, un arc, une corde, une tangente, etc., donné sur l'un des cercles, il ne correspond jamais sur l'autre qu'un seul point, un seul arc, une seule corde, une seule tangente, etc., duquel on puisse dire qu'il est son homologue de l'une ou de l'autre espèce, du moins relativement au même centre de similitude.

Il est facile de voir, au surplus, que les cordes et tangentes homologues sont ou ne sont pas parallèles, suivant qu'elles sont directement ou inversement homologues; ou, en d'autres termes, que les cordes et tangentes *directement* homologues concourent sur la corde à l'infini commune aux deux cercles, tandis qu'au contraire, les cordes et tangentes *inversement* homologues concourent sur la corde à distance finie commune à ces deux mêmes cercles, c'est-à-dire, sur leur *axe radical*; ce qui présente un moyen fort simple de construire cet axe par de simples intersections de lignes droites.

Toutes ces définitions et toutes ces remarques peuvent être facilement étendues, avec les modifications convenables, à deux cercles tracés sur une sphère, à deux cônes droits de même sommet, à deux cylindres droits dont les axes sont parallèles et enfin à deux sphères. On peut même les étendre à deux courbes planes ou à double courbure et à deux surfaces courbes, soumises ou non à la loi de continuité, pourvu qu'elles aient un centre de similitude.

Les choses ainsi entendues, voici comment on construira un cercle qui en touche trois autres, donnés sur un même plan.

Soient  $C$ ,  $C'$ ,  $C''$  les trois cercles donnés, et soit d'abord

## DES SPHÈRES ET DES CONES. 319

déterminé celui des quatre axes de similitude de ces trois cercles qui répond à l'espèce de contact qu'on se propose d'obtenir ; cet axe contiendra trois des six centres de similitude, les seuls dont il sera question dans ce qui va suivre.

Soit pris arbitrairement un point  $M$  sur la circonférence de  $C$  (\*) ; soit  $M'$  le point inversement homologue à  $M$  sur  $C'$  ; soit  $M''$  le point inversement homologue à  $M'$  sur  $C''$  ; et soit enfin  $N$  le point inversement homologue à  $M''$  sur  $C$ .

S'il arrive que  $M$  et  $N$  se confondent,  $M$ ,  $M'$ ,  $M''$  seront les points de contact du cercle cherché avec les trois cercles donnés ; de telle sorte que, par le simple tracé de trois droites, on aura réduit le problème à faire passer un cercle par trois points donnés.

Si les points  $M$ ,  $N$  ne se confondent pas, en les joignant par une droite, cette droite ira couper l'axe de similitude en un point  $P$  qui sera invariablement le même, quel que soit le point de départ  $M$  ; et la polaire de ce point  $P$ , par rapport au cercle  $C$ , coupera ce même cercle à ses points de contact avec les deux cercles cherchés.

On pourrait, par un semblable procédé, déterminer les points de contact de ces deux mêmes cercles avec les cercles  $C'$ ,  $C''$  ; mais il est clair que, si l'on détermine sur ces derniers les cordes respectivement homologues à celle qu'on aura déterminée sur  $C$ , elles joueront, par rapport à eux, le même rôle que celle-ci par rapport à  $C$ , et de plus concourront avec elle en un point qui, comme on le sait déjà, et comme il résulte d'ailleurs de ce qui précède, sera le *centre radical* des trois cercles donnés, ou le point d'intersection unique de leurs trois cordes communes deux à deux.

La même opération, répétée pour chacun des quatre axes de

---

(\*) Pour plus d'exactitude pratique, il convient de choisir pour  $C$  le plus grand des trois cercles donnés.

## 320 CONTACT DES CERCLES

similitude, donnerait les cordes et les points de contact qui appartiennent aux huit circonférences tangentes aux proposés ; mais , si l'on remarque que la polaire du centre radical , par rapport à l'un quelconque des cercles proposés , rencontre les quatre axes de similitude en des points qui sont précisément les pôles des quatre cordes de contact qui appartiennent à ce cercle , il sera beaucoup plus simple , une fois qu'on aura obtenu , par la construction qui précède , le centre radical et les premières cordes de contact , de s'en servir pour déterminer simultanément les systèmes des trois autres. Ces diverses constructions n'exigent d'ailleurs que l'emploi d'une simple règle , quand on aura la connaissance préalable des centres de similitude , ou seulement celle des centres des cercles donnés.

Si , au lieu de s'arrêter , dans la construction ci-dessus , au quatrième point  $N$  , trouvé sur  $C$  , on continuait , de la même manière , à chercher son homologue inverse  $N'$  sur  $C'$  , puis l'homologue inverse  $N''$  de celui-ci sur  $C''$  , puis enfin l'homologue inverse de ce dernier sur  $C$  ; ce dernier point serait , dans tous les cas , le point  $M$  de départ lui-même ; les six droites tracées d'après les conditions qui précèdent , et qui se trouveraient dirigées deux à deux vers les trois centres de similitude que l'on considère , formeraient donc naturellement un hexagone fermé , dont les sommets opposés appartiendraient deux à deux à un même cercle , et dont les trois diagonales varieraient de position en même temps que le point de départ ou premier sommet , en pivotant respectivement autour de points fixes , placés sur l'axe de similitude correspondant ; ce qui offre le moyen de construire simultanément et d'une manière symétrique les trois cordes , et par suite les six points de contact appartenant aux deux cercles tangens relatifs à cet axe de similitude. Il est en outre bien digne de remarque que les six sommets de l'un quelconque des hexagones ainsi construits sont , à la fois , sur une même circonférence de cercle ayant l'axe de similitude correspondant pour corde commune avec les deux cercles tangens au proposé qui appartiennent à cet axe.

## DES SPHÈRES ET DES CONES. 321

Les constructions qui précèdent ont l'avantage d'être fort simples, puisqu'elles n'exigent que le tracé de lignes droites et qu'elles dispensent de construire les cordes communes ou les axes radicaux qui appartiennent aux trois cercles proposés, combinés deux à deux. On peut même éviter l'emploi direct des axes de similitude au moyen du procédé qui suit :

Ayant choisi, à volonté, trois centres de similitude, situés en ligne droite, et appartenant aux trois cercles donnés combinés deux à deux; prenez sur l'un d'eux  $C$  une corde quelconque; cherchez son homologue inverse par rapport à  $C'$ , puis l'homologue inverse de celle-ci par rapport à  $C''$ , et ainsi de suite, en procédant constamment dans le même ordre. Après la sixième opération, vous retomberez évidemment sur la première corde. Vous n'aurez donc, en tout, que seize lignes droites à tracer, y compris les deux cordes de chaque cercle, lesquelles se rencontreront en un point qui appartiendra à la corde de contact cherchée relative à ce cercle. Cela posé, tracez les deux nouvelles cordes qui réunissent deux à deux celles des extrémités des premières qui ne proviennent pas de la même combinaison, et qui sont par conséquent indépendantes entre elles; ces deux cordes, ainsi obtenues dans chaque cercle, se rencontreront en un second point, appartenant à la corde de contact cherchée, laquelle sera ainsi parfaitement déterminée, pour chacun des cercles proposés.

Les constructions et propositions qui précèdent subsistent, d'une manière analogue, pour trois et quatre sphères, données à volonté dans l'espace, pour trois cônes qui ont un même sommet, et enfin pour trois cercles quelconques tracés sur une même sphère. On s'en convaincra d'une manière tout-à-fait simple, dans ce dernier cas, en considérant l'un des quatre systèmes de trois surfaces coniques qui renferment deux à deux les cercles proposés, et examinant ce qui se passe dans le plan d'une section quelconque renfermant la droite ou axe qui joint les trois sommets correspondans; car, en supposant ensuite que ce plan se meuve autour de l'axe dont

### 322 CONTACT DES CERCLES DES SPHÈRES ET DES CONES.

il s'agit, jusqu'à devenir tangent à la fois aux trois surfaces coniques, il coupera évidemment, dans cette double position, la sphère donnée suivant un cercle tangent à la fois aux trois proposés; ce qui peut servir, en même temps, à justifier ce qui a été dit ci-dessus relativement au cas particulier où les trois cercles donnés sont tracés sur un même plan.

On peut remarquer que les propositions relatives au système de trois cercles tracés sur un plan, sont tout-à-fait analogues à celles que j'ai énoncées dans le tom. VIII.<sup>e</sup> des *Annales* ( pag. 141 ), relativement aux polygones inscrits à une conique, dont les côtés sont assujettis à pivoter autour de points fixes situés en ligne droite; et, en effet, il devient très-facile de passer des unes aux autres, en invoquant le principe de la continuité. C'est un rapprochement que je n'ai pas manqué de faire, dans le mémoire dont M. Cauchy a rendu compte à l'institut.

---

CERCLE TANGENT A TROIS AUTRES. 193

---

## GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

*Sur la construction du cercle tangent à trois cercles,  
donnés ;*

Par un ABONNÉ.

~~~~~  
Au Rédacteur des *Annales* ;

MONSIEUR,

EN examinant avec attention l'ingénieuse théorie par laquelle M. le professeur Durrande, au commencement du XI.^e volume des *Annales*, est parvenu à démontrer géométriquement l'élégante construction que vous avez déduite de l'analyse algébrique, à la page 302 du VII.^e volume du même recueil, pour la détermination du cercle qui touche à la fois trois cercles donnés, il m'a paru que cette théorie était susceptible de simplification assez notables ; qu'elle pourrait être rendue indépendante de tout calcul, et même de la considération des proportions ; et qu'elle devenait ainsi, en quelque sorte, le résultat d'une pure intuition. J'ai l'honneur de vous transmettre le résultat de mes réflexions sur ce sujet, dont vous ferez l'usage que vous jugerez convenable.

J'admets uniquement les principes connus sur les *pôles* et *polaires* et sur les *axes radicaux*, principes que l'on peut démontrer soit à la manière de Monge, soit comme l'a fait M. Durrande, soit de toute autre manière ; et je les rappelle en ces termes :

1. Les sommets de tous les angles circonscrits à un même cercle,

194

CERCLE TANGENT

de telle sorte que leurs cordes de contact concourent toutes en un même point, sont tous situés sur une même droite qu'on appelle la *polaire* de ce point, et qui est perpendiculaire à la droite qui le joint au centre.

2. Réciproquement, les cordes de contact de tous les angles circonscrits à un même cercle, de telle sorte que leurs sommets soient tous sur une même ligne droite, concourent toutes en un même point, qu'on appelle le *pôle* de cette droite, et qui se trouve situé sur la perpendiculaire qui lui est menée par le centre.

3. D'où il suit que deux polaires d'un même cercle se coupent au pôle de la droite qui joint leurs pôles, et que réciproquement la droite qui joint deux pôles d'un même cercle a pour pôle l'intersection de leurs polaires.

4. Le lieu de tous les points du plan de deux cercles desquels on peut leur mener des tangentes de même longueur est une droite perpendiculaire à celle qui joint leurs centres, et qu'on appelle *l'axe radical des deux cercles*.

5. Cela posé, soient deux figures semblables quelconques, tracées sur un même plan, et soit un point pris arbitrairement sur l'une d'elles; si l'on demande son homologue sur l'autre et que les deux figures soient divisibles en m parties égales et superposables, par des droites partant de deux points homologues, le problème aura évidemment m solutions.

6. En particulier, si les figures données sont des polygones réguliers de m côtés, et que le point donné sur l'un d'eux soit autre que son centre, son homologue sur l'autre pourra être pris de am manières différentes.

7. Des choses analogues auraient lieu, si une droite indéfinie étant tracée arbitrairement par rapport à l'un des polygones, on demandait son homologue par rapport à l'autre.

8. Il suit de là que, deux cercles étant tracés sur un même plan, et un point ou une droite étant donné par rapport à l'un d'eux, ce point ou cette droite pourra avoir une infinité d'homologues par rapport à l'autre. Il suffira en effet que les distances des centres

A TROIS AUTRES.

195

à ces deux points ou à ces deux droites soient proportionnelles aux rayons ; ce qui assujettira simplement le point cherché à être sur une certaine circonférence, ou la droite cherchée à lui être tangente.

9. Il n'en sera plus de même si l'on détermine, dans les deux cercles donnés, des diamètres que l'on regarde comme homologues, en fixant celles des deux extrémités de ces diamètres que l'on répute homologues, ainsi que les demi-cercles homologues. Il est évident qu'alors le problème d'assigner, pour l'un des cercles, un point ou une droite qui soit l'homologue d'un point ou d'une droite donnés par rapport à l'autre n'admettra plus qu'une solution unique.

10. Soient deux cercles tracés sur un même plan ; on peut toujours, sur la droite qui joint leurs centres, assigner deux points et deux points seulement, l'un entre les centres et l'autre au-delà du centre du plus petit dont les distances à ces deux centres soient proportionnelles aux rayons des deux cercles. Ces points seront les seuls *points homologues communs* que puissent avoir les deux cercles ; encore faudra-t-il, pour qu'ils puissent être réputés tels, que l'on considère les diamètres situés sur la droite indéfinie qui joint les centres comme deux diamètres homologues. Ce sont ces deux mêmes points que M. Durrande a désignés, d'après Monge, sous les dénominations de *centres de similitude interne* et *externe*. Leur choix détermine les extrémités des deux diamètres qui doivent être réputées homologues ; ces extrémités devant être constamment les plus voisines ou les plus distantes du centre de similitude que l'on choisit comme point homologue commun.

11. Il suit de ces considérations que le point de contact de deux cercles qui se touchent est un centre de similitude qui sera interne ou externe, suivant que les deux cercles se toucheront extérieurement ou seront l'un dans l'autre. On doit aussi remarquer que, lorsque deux cercles sont égaux, leur centre de similitude externe est infiniment éloigné. Quant à leur centre de similitude interne, il est évidemment au milieu de la droite qui joint leurs centres.

196

CERCLE TANGENT

12. Deux figures semblables quelconques étant données, et des droites homologues étant tracées dans ces deux figures, si, par des points homologues de ces deux droites, on mène deux nouvelles droites formant, du même côté et dans le même sens, des angles égaux avec les premières, il est connu que ces nouvelles droites seront aussi des droites homologues. Or il est évident que toute droite menée par l'un des deux centres de similitude de deux cercles est dans le même cas par rapport à ces deux cercles; donc elle en est une ligne homologue commune; elle les coupera donc en segmens semblables si elle les coupe; elle sera tangente à l'un si elle l'est à l'autre; et, si elle ne rencontre pas celui-ci, elle ne rencontrera pas l'autre non plus.

13. Réciproquement, toute droite homologue commune à deux cercles doit passer par l'un de leurs centres de similitude, puisque la droite qui joint les centres est aussi une droite homologue commune qui doit être coupée par la première en un point homologue commun.

14. Il suit de là que si, considérant comme diamètres homologues de deux cercles ceux qui se trouvent sur la droite qui joint leurs centres, on détermine des points homologues quelconques dans ces deux cercles; la droite qui joindra ces deux points passera par l'un des centres de similitude.

15. Donc, en particulier (11), lorsque deux cercles se touchent, toute droite menée par leur point de contact est une ligne homologue commune; et réciproquement, toute ligne homologue commune doit passer par le point de contact. Il doit donc en être de même de toute droite qui passera par des points homologues de ces deux cercles.

16. Soient trois cercles C, C', C'' , et soient

I, E les centres de similitude interne et externe de C et C'' ,

I', E' ceux de C' et C'' et C ,

I'', E'' ceux de C et C' .

Les droites $I'I''$ et $E'E''$ seront donc l'une et l'autre (12) lignes homologues

A TROIS AUTRES.

197

homologues communes à C'' et C et lignes homologues communes à C et C' ; elles seront donc homologues communes à C' et C'' , et conséquemment elles devront (13) passer par I ou E ; mais, comme il est d'ailleurs évident qu'elles ne pourront ni l'une ni l'autre passer entre les centres de C' et C'' , ce sera par E qu'elles passeront toutes deux. Ainsi les centres de similitude externes de trois cercles, pris deux à deux, sont tous trois situés sur une même ligne droite; et chacun d'eux est en ligne droite avec deux des centres de similitude internes; de manière que ces six points sont aux intersections de quatre droites. Ce sont ces droites que M. Durrande a nommées *axes de similitude* des trois cercles; ce sont des lignes homologues communes à ces trois cercles.

17. Donc, en particulier (11), lorsqu'un cercle en touche deux autres, les deux points de contact sont en ligne droite avec l'un des centres de similitude de ces deux derniers; savoir, le centre de similitude externe ou le centre de similitude interne, suivant que les deux contacts sont de même nature ou de nature différente. Cette droite est donc (11) un axe de similitude des deux cercles.

18. En considérant l'un ou l'autre centre de similitude de deux cercles comme un pôle commun à ces deux cercles, il aura (1) une polaire sur chaque cercle. Les deux polaires relatives à chaque centre sont ce que M. Durrande a appelé *polaires de similitude externes* et *polaires de similitude internes*. Ce sont évidemment des lignes homologues des deux cercles, qui conséquemment, lorsqu'elles les coupent, les partagent en segmens semblables. Le pôle des deux dernières est compris entre elles, tandis que celui des deux premières est hors de l'intervalle qui les sépare.

19. Soit C'' (fig. 4 et 5) l'un des centres de similitude de deux cercles; par lequel soit menée une sécante homologue commune, comprenant dans ces cercles les cordes homologues AB , $A'B'$, dont les pôles soient P , P' ; ces deux pôles seront des points homologues des deux cercles, par lesquels menant les perpendiculaires PQ , $P'Q'$ à la droite qui joint les centres, ces perpendiculaires

Tom. XIII.

28

198

CERCLE TANGENT

seront (3, 18) les polaires de similitude relatives au centre C'' ; et il est de plus évident que les triangles isocèles homologues APB , $A'P'B'$ seront semblables; mais, en prolongeant PB et $P'A'$ jusqu'à leur rencontre en R'' , et PA et $P'B'$ jusqu'à leur rencontre en S'' , le triangle $BR''A'$ sera semblable à chacun de ces deux-là, et il en sera de même du triangle $B'S''A$; ils seront donc isocèles comme eux; de manière que les deux tangentes $R''B$ et $R''A'$ seront de même longueur, ainsi que les deux tangentes $S'B'$ et $S''A$. Donc, si l'on mène $R''S''$, cette droite sera (4) l'axe radical des deux cercles, et comme telle parallèle aux polaires de similitude.

20. Il suit évidemment de là que, si l'on fait tourner la sécante commune autour du point fixe C'' , les points P , P' et R'' , S'' , dans leur mouvement, ne sortiront pas des trois parallèles PQ , $P'Q'$ et $R''S''$, dont la situation est tout-à-fait indépendante de la direction de cette sécante.

21. Mais, si la sécante devenait tangente, le milieu de l'intervalle entre les points de contact serait (4) un point de l'axe radical: donc cette tangente commune a ses parties interceptées de part et d'autre entre l'axe radical et les deux polaires égales entre elles; d'où il suit que cet axe radical est également distant de l'une et de l'autre.

22. Il résulte de tout ce qui précède que l'axe radical de deux cercles est placé, par rapport à tout cercle qui les touche l'un et l'autre, de la même manière que le sont, par rapport à ces deux-ci, leurs polaires de similitude de même dénomination; savoir, leurs polaires de similitude externes ou leurs polaires de similitude internes, suivant que les deux contacts seront de même espèce ou d'espèces différentes.

Soient en effet deux cercles touchés par un troisième en A et B' ou bien en A' et B (fig. 6 et 7); la sécante AB' ou $A'B$ sera donc (17) un axe de similitude des trois cercles. En achevant donc les figures, comme nous l'avons fait (fig. 4 et 5), les points P , P' , R'' ou S'' , pôles respectifs de cette droite par rapport à ces

A TROIS AUTRES.

199

trois cercles, en seront donc des points homologues; d'où il résulte que les droites PQ , $P'Q'$ et $R''S''$, qui, passant par ces points, font des angles égaux avec la ligne homologue commune, sont elles-mêmes des lignes homologues.

23. Toutes ces choses ainsi entendues, supposons qu'on demande un cercle qui touche à la fois trois cercles donnés; comme le cercle cherché pourra toucher de deux manières chacun des cercles donnés, il y aura généralement huit solutions possibles, et il faudra d'abord s'entendre sur celle qu'on aura dessein d'obtenir.

Quelle que puisse être cette solution; comme l'on sait faire passer un cercle par trois points donnés, la question se réduira à déterminer le point de contact du cercle cherché avec chacun des trois cercles donnés, ou plutôt avec l'un d'eux, attendu que la méthode qu'on aura suivie pour la recherche de celui-là pourra être également appliquée à chacun des autres.

Soient donc c , c' , c'' les trois cercles donnés, C le cercle cherché; et proposons-nous de trouver son point de contact avec c ; tout se réduira (15) à trouver deux points p , P qui soient homologues par rapport à ces deux cercles; puisqu'en joignant ces points par une droite, cette droite devra couper c au point de contact cherché.

Or, comme les intersections des lignes homologues sont des points homologues, la recherche des points p , P se réduit à trouver deux droites relatives à c et leurs homologues dans C , ce qui est facile, d'après ce qui précède.

Soit en effet r' la polaire de similitude de c , comparé à c' ; polaire externe ou interne, suivant que c et c' devront être touchés par C de la même manière ou d'une manière différente; et soit R' l'axe radical de ces deux cercles. Soit pareillement r'' la polaire de similitude de c , comparé à c'' , polaire externe ou interne, suivant que c et c'' devront être touchés par C de la même manière ou d'une manière différente; et soit R'' l'axe radical de ces deux cercles.

200 CERCLE TANGENT A TROIS AUTRES.

Il vient d'être démontré (22) que r' et R' étaient des lignes homologues de c et C , et qu'il en était de même de r'' et R'' . En prenant donc pour p l'intersection de r' et r'' , il faudra prendre pour P l'intersection de R' et R'' ; et alors en joignant pP son intersection avec c sera le point de contact demandé.

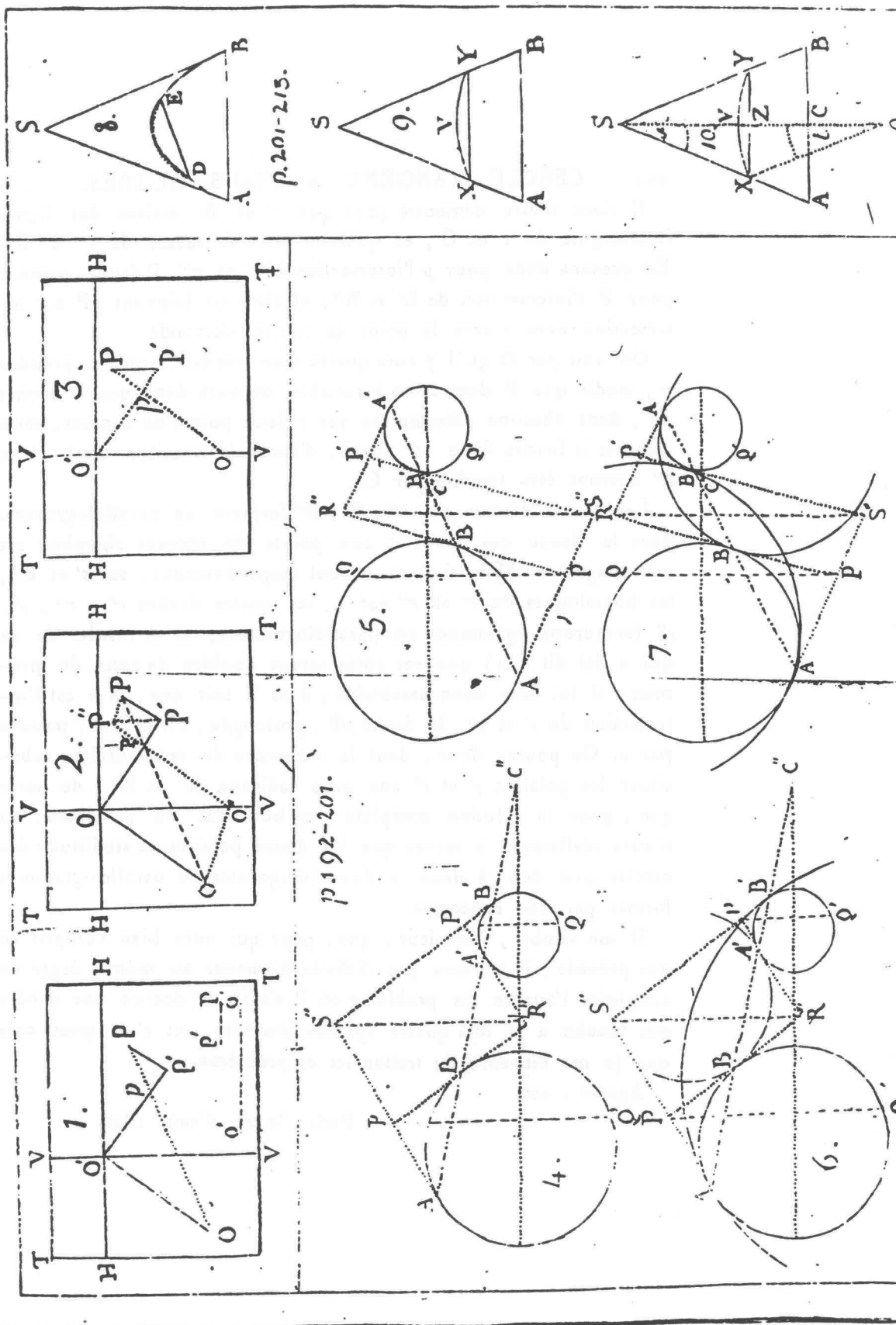
On voit par là qu'il y aura quatre manières différentes de prendre p , tandis que P demeurera invariable; on aura donc quatre droites pP , dont chacune déterminera sur c deux points de contact, entre lesquels il faudra faire un choix, d'après la manière dont c' et c'' devront être touchés par C .

Les quatre droites r' , r'' , R' , R'' forment un parallélogramme dont la droite qui coupe c aux points de contact cherchés est une diagonale. Mais si r' et r'' sont respectivement, sur c' et c'' , les homologues de r' et r'' sur c , les quatre droites r' , r'' , r' , r'' formeront également un parallélogramme; et il résulte de ce qui a été dit (21) que ses côtés seront doubles de ceux du premier; il lui sera donc semblable; d'où il suit que, si π est l'intersection de r' et r'' , la droite pP , prolongée, s'il le faut, passera par π . On pourra donc, dans la recherche de cette droite, substituer les polaires r' et r'' aux axes radicaux R' et R'' ; de sorte que, pour la solution complète des huit cas du problème, on n'aura réellement à mener que les douze polaires de similitude des cercles pris deux à deux, et douze diagonales de parallélogrammes formés par leur rencontre.

Il me semble, Monsieur, que, pour qui aura bien compris ce qui précède, il ne sera pas difficile d'amener au même degré de simplicité l'analyse du problème où il s'agit de décrire une sphère qui touche à la fois quatre sphères données; et c'est pour cela que je me dispense de traiter ici ce problème.

Agrérez, etc.

Paris, le 10 d'août 1822.



Texte de Gaultier de Tours

XVI^e cahier du journal de l'École polytechnique.

Mémoire sur les moyens généraux de construire graphiquement un cercle déterminé par trois conditions, et une sphère déterminée par quatre conditions.

Lu à la première classe de l'institut, le 15 juin 1812.

pages 124 à 150 et 182 à 214.

M É M O I R E

SUR les Moyens généraux de construire graphiquement un Cercle déterminé par trois conditions, et une Sphère déterminée par quatre conditions;

Lu à la première Classe de l'Institut, le 15 Juin 1812,

PAR L. GAULTIER de Tours, ancien Élève de l'École polytechnique, Licencié-ès-Sciences, et Professeur de Géométrie descriptive au Conservatoire des Arts et Métiers.

DISCOURS PRÉLIMINAIRE.

Si l'on considère les travaux mathématiques des géomètres modernes les plus distingués, on verra que toutes les branches de cette science ont fait dans ces derniers temps les progrès les plus rapides, comme les plus satisfaisants.

L'analyse cependant paraît avoir plus particulièrement fixé leur attention, à cause de l'influence que pouvaient avoir la généralité et la fécondité de ses conceptions sur toutes les autres branches des mathématiques. Aussi, avons-nous vu naître de cet heureux perfectionnement de l'analyse, ces ouvrages immortels qui font à-la-fois la gloire de leurs auteurs, et signalent une époque si mémorable dans les fastes de la science.

Cependant, lorsqu'on envisage les mathématiques dans leurs applications les plus usuelles, on voit que l'utilité en devient d'autant plus générale que les moyens qu'on y indique sont fondés sur des prin-

cipes plus simples et plus élémentaires. Cette vérité même a été sentie par les plus grands maîtres, qui n'ont pas dédaigné de s'occuper des élémens, et y ont apporté cette rigueur et cette clarté qui en constitue le mérite essentiel.

Mais, de tous les ouvrages mathématiques dirigés vers l'application, la géométrie descriptive occupe sans doute le premier rang, et la généralité de ses considérations a fait voir que la géométrie était susceptible d'être envisagée sous un point de vue plus étendu qu'elle ne l'avait été jusqu'alors.

C'est à la nouvelle perfection des ouvrages élémentaires que l'on doit journellement un grand nombre d'applications utiles, mais qui n'étant presque jamais de nature à être consignées dans des recueils réservés seulement à des traités scientifiques, n'ont pu être généralement connues. On a vu néanmoins paraître successivement plusieurs mémoires intéressans où MM. *Dupuis, Lancret, Poinot, Dupin, Cauchy, Français, Brianchon*, &c. anciens élèves de l'École polytechnique, ont exposé une foule de considérations neuves et piquantes, sur des questions purement géométriques.

Il en reste cependant un grand nombre qui n'ont point encore été suffisamment approfondies, et qui néanmoins sont susceptibles d'être résolues et discutées, d'une manière générale, à l'aide des principes les plus élémentaires de la géométrie.

Parmi ces questions, celles où l'on se propose de déterminer un cercle par trois conditions, ou une sphère par quatre conditions, méritent d'être distinguées par la généralité de leur énoncé et le grand nombre de cas qu'elles peuvent présenter.

Une circonstance particulière m'ayant porté à l'examen de ces problèmes, les recherches, que je fus obligé de faire, me conduisirent insensiblement à les considérer sous le point de vue le plus étendu, et à combiner, de toutes les manières possibles, les données qu'ils peuvent présenter; je m'aperçus alors de toute l'importance que pouvait avoir leur solution générale, qui donnait à-la-fois celles de cent sept problèmes différens.

Plusieurs géomètres célèbres se sont occupés de quelques-unes de ces recherches, tant par l'analyse que par la géométrie; ainsi l'on voit dans l'Arithmétique universelle de *Newton*, les solutions analytiques de plusieurs de ces questions, entre autres celle de ce problème : *Trouver un cercle qui en touche trois autres*; et dans les Annales de l'Académie de Pétersbourg, 1788, deux mémoires; l'un de *L. Euler*, et l'autre de *N. Fusse*, qui donnent aussi des solutions analytiques de cette question, &c. (*).

D'un autre côté, l'on trouve dans les œuvres de *Fermat*, imprimées à Toulouse en 1679, un traité intitulé *de Contactibus sphericis*, dans lequel il a résolu géométriquement quinze problèmes sur les sphères qui remplissent quatre conditions : mais il n'a donné qu'une seule solution de chacun d'eux.

M. Monge a envisagé plusieurs de ces questions sous un aspect plus général, et les a développées dans ses cours, à l'origine de l'École polytechnique. Plusieurs géomètres distingués, qui étaient alors élèves de cette École, ont traité quelques-uns de ces problèmes, dont les solutions ont été réunies dans le n.º 2 du tome I.^{er} de la *Correspondance sur l'École impériale polytechnique*. C'est le travail le plus étendu qui ait été fait à ce sujet (**): il réunit de très-belles considérations géométriques, à l'aide desquelles on prouve que les sphères qui en touchent trois autres ont leurs centres sur une section conique, en même temps que la suite de leurs points de contact forme un cercle sur chacune des sphères données; et comme ce raisonnement est seulement applicable à celles qui ont la même combinaison entre leurs contacts, il en résulte quatre sections coniques pour le lieu des centres des sphères tangentes, et quatre cercles de contact sur chacune des sphères données.

(*) On ne connaissait point de solution analytique satisfaisante du problème de la sphère tangente à quatre autres, avant celle que *M. Poisson* vient de publier dans le *Bulletin* de la Société philomatique, n.º 60. Septembre 1812.

(**) On trouve aussi dans le même ouvrage plusieurs de ces questions dont les solutions méritent d'être connues.

Ces géomètres se sont bornés à constater l'existence de ces courbes, ce qui suffisait, en effet, pour arriver aux conclusions suivantes qu'ils en ont déduites.

1.° Chacun des quatre cercles de contacts tracés sur l'une des sphères données, ayant deux de ses points dans le plan des trois centres de ces sphères, il en résulte huit points dont chacun est le contact d'un cercle qui touche en même temps les trois grands cercles déterminés par le plan des trois centres des sphères données ;

2.° Quatre sphères étant données, on peut les combiner trois à trois de quatre manières différentes ; et si, pour deux de ces combinaisons, l'on construisait sur l'une des sphères données les huit cercles de contact qui en résulteraient, les quatre cercles d'un système seraient coupés par ceux de l'autre, en des points qui feraient à-la-fois partie de l'un et de l'autre système. Ces intersections donnant trente-deux points, il était naturel de conclure que le problème avait trente-deux solutions.

L'esprit qui règne dans ces discussions ne permet pas de douter que si les savans qui s'en sont occupés, eussent construit les solutions de ces problèmes, ils se fussent aperçus que cette dernière conséquence était inexacte ; mais les considérations qu'ils ont mises en usage, quoique très-ingénieuses, rendaient les constructions graphiques trop difficiles pour qu'ils pussent se convaincre de cette erreur. C'est même, d'après mes observations (*), qu'elle a été relevée dans le *Supplément à la géométrie descriptive*, où l'on prouve que ce problème n'a réellement que seize solutions.

Tel est à-peu-près le point où l'on s'était arrêté, et celui d'où nous

(*) J'ai remarqué que les deux combinaisons ci-dessus, de trois des quatre sphères données, renferment deux sphères communes qui sont touchées de la même manière par les sphères dont les contacts forment deux des quatre cercles d'un système, tandis que l'une est touchée extérieurement et l'autre intérieurement par les sphères dont les contacts forment les deux autres cercles du même système ; en sorte qu'il ne correspond de solutions qu'aux intersections de ceux des cercles de l'un et l'autre système formés par des sphères qui ont même combinaison de contact avec les deux sphères communes. Si l'on n'avait égard qu'au nombre des solutions, on pourrait le déduire de la discussion analytique insérée dans la *Correspondance*, tome II, page 63.

sommes partis, lorsque nous avons entrepris de donner des moyens de solutions qui s'appliquassent avec la même facilité à tous les cas qui peuvent se présenter. Ces moyens, qui diffèrent entièrement de ceux qui ont été proposés jusqu'à ce jour, n'exigent, pour être saisis, que les principes les plus élémentaires de la géométrie plane et de la géométrie descriptive, puisque nous n'employons jamais dans nos constructions que la droite et le cercle; cependant notre méthode est tellement générale et indépendante des données particulières, qu'elle conduit immédiatement à toutes les solutions dont chaque problème est susceptible, et qu'elle indique en même temps celles qui deviennent imaginaires.

La marche que nous avons suivie nous a fourni l'occasion de développer un grand nombre de propositions nouvelles; mais nous ne nous sommes point bornés à de simples considérations géométriques, puisque nous donnons les moyens d'effectuer graphiquement toutes les solutions. Les figures jointes à ce mémoire en présentent plusieurs exemples de l'ordre le plus élevé, et d'après lesquels on peut juger combien il est facile d'obtenir les solutions des autres problèmes.

Nous terminerons en fixant l'attention sur la généralité de la méthode que nous présentons. En effet, les solutions que l'on peut en déduire étant indépendantes des valeurs particulières des données, peuvent recevoir une foule de modifications dont quelques-unes en font des problèmes nouveaux; ainsi la grandeur du rayon que nous faisons entrer parmi les données, étant arbitraire, détermine les positions de certains points, lorsqu'on la fait égale à zéro, et de certaines droites ou plans, lorsqu'on suppose cette valeur infinie.

Enfin, le point, la droite, le cercle, le plan, la sphère, étant les bases de la géométrie élémentaire et de la géométrie descriptive, nous avons pensé que des moyens généraux pour arriver directement à leurs déterminations pouvaient fixer un moment l'attention de la classe.

Nota. Les Planches de ce mémoire exigeant beaucoup de précision, j'en ai confié l'exécution à M. *Hoyau*, élève du Conservatoire, qui les avait dessinées pour le mémoire manuscrit, et qui les a construites immédiatement sur le cuivre.

NOTATIONS

NOTATIONS EMPLOYÉES DANS LE MÉMOIRE.

AVANT de lire le mémoire, il est convenable de prendre connaissance de quelques notations que nous avons généralement employées.

N'ayant point à nous occuper des surfaces des cercles et des solidités des sphères, nous observons que, par cercles et sphères, nous entendons les circonférences des uns et les surfaces des autres. Nous employons pour les désigner de grandes lettres, et pour indiquer leurs centres, les minuscules de ces mêmes lettres : ces minuscules sont placées sur les figures ; et comme sur aucune il n'existe ni cercles ni sphères concentriques, il ne peut y avoir d'équivoque.

Nous désignons le rayon d'un cercle ou d'une sphère par la lettre R , suivie de celle qui indique le cercle ou la sphère dont il s'agit ; ainsi RA , RB , RO , &c. remplacent ces mots : *Le rayon du cercle ou de la sphère que nous avons nommé A, ou B, ou O, &c.*, et nous n'employons jamais la lettre R à d'autres usages.

Un point est toujours désigné par une petite lettre, d'autant que nous avons souvent occasion de considérer un point comme un cercle ou une sphère réduits à leurs centres. Sous ce point de vue, le cercle ou la sphère a équivaut au point a .

Une droite ou un plan sont désignés par deux ou trois, &c. lettres placées sur les figures aux points par lesquels ils passent : mais, lorsque nous les considérons comme des cercles ou des sphères d'un rayon infini, nous les désignons par de grandes lettres que nous plaçons sur les directions de ces droites, ou sur les traces horizontales de ces plans qui sont alors verticaux, parce que les plans des figures ont toujours pu leur être perpendiculaires, sans nuire en rien à leurs généralités.

On trouvera dans le cours de l'ouvrage plusieurs expressions qui doivent être considérées comme l'abrégé de certaines phrases qu'il aurait fallu répéter trop fréquemment, ainsi que plusieurs notations particulières dépendantes de la théorie qui en fait le sujet ; mais elles seront succes-

sivement expliquées dans le développement de cette théorie : en sorte qu'il nous a semblé superflu d'en parler ici.

Pour ne pas trop multiplier les figures, nous en employons souvent une seule à démontrer plusieurs propositions ; et pour ne pas les compliquer, il nous arrive aussi de faire usage de certains cercles déjà décrits et déterminés ailleurs par des propriétés particulières. Mais, comme dans le texte on indique un cercle quelconque, il est facile de voir que tout autre peut lui être substitué.

Pour donner aux figures de plus grandes dimensions, sans augmenter la grandeur des planches, et éviter la confusion que produirait un trop grand nombre de cercles, nous n'avons tracé, 1.^o que les parties utiles de ceux sur lesquels il y a des constructions à faire, 2.^o que de petits arcs de ceux dont il suffit de connaître l'existence, 3.^o que le rayon en ligne pleine de chacun de ceux qu'on obtient pour résultat ; mais il faut supposer tous ces cercles entièrement décrits.

Enfin les cercles et les droites qui jouissent de propriétés particulières, sont constamment représentés par le même genre de tracé ; en sorte qu'il sera facile de les distinguer parmi ceux qui composent chaque figure.

CHAPITRE I.^{er} (*).

PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES des Cercles radicaux, des Sphères radicales et de leurs suites.

S. I.^{er}

NOTIONS PRÉLIMINAIRES sur les Cercles radicaux et les Sphères radicales.

[I.] LES notions préliminaires que nous allons exposer sont la base

(*) La théorie que nous développons dans ce I.^{er} chapitre, a nécessité l'emploi de quelques dénominations particulières qui servent à rappeler, plus brièvement que des périphrases, les propriétés nouvelles qui en sont l'objet ; mais nous avons réduit cette espèce de nomenclature,

GÉOMÉTRIE.

131

des discussions de ce mémoire, et se fondent sur les propriétés géométriques des sécantes et des cordes.

On sait, en effet, que si, par un point quelconque o (*fig. 1 et 2*) dans le plan d'un cercle primitif A , on mène à ce cercle des sécantes ou des cordes, leurs parties forment un produit constant; on aura donc

CERCLES RADICAUX.

$$og \times ok = og' \times ok' = om^2.$$

Si du point o , avec $\sqrt{og \times ok} = om$ comme rayon, l'on décrit un cercle O , nous dirons que ce cercle est radical du cercle A ou cercle O rad. A , et cette expression (*cercle radical A*) doit être considérée comme équivalente à cette phrase : *Cercle dont le rayon a pour valeur la racine carrée du produit constant formé par les parties des sécantes ou des cordes menées de son centre à la circonférence du cercle primitif A auquel il est comparé.*

Il résulte de ce qui précède, que d'un point donné o , on ne peut décrire qu'un seul cercle O rad. A ; mais qu'il y en a de deux espèces, selon que le point o est pris au-dehors ou au-dedans du cercle primitif A .

[2.] Lorsque le point o est pris au-dehors du cercle primitif A (*fig. 1*) $RO = om$ (*) est la tangente menée de ce point au cercle A ; l'angle oma est droit, am est tangente au cercle O , en sorte que le cercle A est aussi radical du cercle O : dans ce cas, les deux cercles A et O se coupent à angle droit en m et n , sont réciproquement radicaux l'un de l'autre, et primitifs l'un par rapport à l'autre. Ainsi, nous dirons que le cercle O est radical réciproque du cercle A ou O rad. réc. A , ce qui indiquera que le cercle A est aussi radical réciproque du cercle O ou A rad. réc. O .

Cercle radical réciproque.

qui paraissait d'abord un peu compliquée, aux seuls termes qui désignent les propriétés les plus fondamentales, et dont l'emploi fréquent aurait entraîné dans des longueurs inévitables.

On trouvera la plupart de ces expressions, qui d'ailleurs sont en petit nombre, énoncées et définies dans les premiers n.ºs de ce chapitre.

(*) Voyez la Notation, page 129.

Cercle radical
simple.

Lorsque le point o est au-dedans du cercle primitif A (*fig. 2*), $RO = om$ est la perpendiculaire sur ao , élevée au point o jusqu'à la circonférence de A . Les intersections m et n des deux cercles A et O , sont aux extrémités d'un diamètre du cercle O , ce diamètre mn est la plus petite corde que l'on puisse mener au cercle A par le point o .

Cercle primitif
simple.

Le cercle O est bien radical du cercle A , mais le cercle primitif A n'est pas radical du cercle O . Pour distinguer cette seconde espèce radicale de la première, nous dirons que le cercle O est radical simple du cercle A ou O rad. simp. A , et que le cercle A est primitif simple du cercle O ou A prim. simp. O (*).

Si l'on donnait le cercle O et le centre du cercle primitif A , ce dernier serait déterminé; car, en menant le diamètre mn perpendiculaire à ao , l'une des obliques $am = an$ serait le rayon du cercle A .

SPHÈRES RADICALES.

[3.] Examinons maintenant ce qui a lieu lorsque le cercle primitif A (*fig. 1 et 2*), tournant autour de la ligne ao , devient une sphère primitive A ; alors toute ligne menée par le point o sera sécante ou corde du grand cercle de la sphère A contenu dans le plan déterminé par oa et cette ligne, et le produit des parties sera constamment égal à

$$og \times ok.$$

Si, du point o avec $\sqrt{og \times ok}$, l'on décrit une sphère O , elle sera radicale de la sphère primitive A ou sph. O rad. A : tout point o de l'espace est donc le centre d'une sphère unique O rad. A .

Sph. rad. réc.

Lorsque le point o est au-dehors de la sphère primitive A (*fig. 1*), RO est la longueur de l'apothème d'un cône qui, ayant son sommet en o , envelopperait la sphère A , et aurait le petit cercle de contact mn pour base.

Ce cercle de contact mn est, 1.° l'intersection des deux sphères A

(*) Les expressions *radical simple* et *primitif simple* indiquent qu'il n'y a qu'un des deux cercles qui soit radical ou primitif de l'autre; si nous eussions connu un mot qui signifiât *non réciproque*, nous lui aurions donné la préférence.

GÉOMÉTRIE.

133

et O ; 2.° il est la base d'un autre cône qui, ayant son sommet en a , envelopperait la sphère O ; en sorte que, pour un même point de cette base, les génératrices des deux cônes sont perpendiculaires entre elles; et les deux sphères se coupent à angle droit; 3.° enfin, ce cercle mn contient les points de contact de tous les plans tangens menés à la sphère A par le centre o , ou à la sphère O par le centre a .

Nous dirons ici, comme par rapport aux cercles, que la sphère O est rad. réc. A , et la sphère A rad. réc. O .

Lorsque le point o est au-dedans de la sphère primitive A (*fig. 2*), l'intersection des deux sphères A et O est le grand cercle de la sphère O , dont le plan mn est perpendiculaire à ao , et en même temps le plus petit cercle d'intersection de la sphère A et d'un plan passant par le point o ; ainsi, lorsque les centres sont donnés, ces deux sphères sont déterminées l'une par l'autre.

Sph. rad. simp.
et sph. primit.
simp.

Nous dirons encore ici, comme pour les cercles, que la sphère O est rad. simp. A , et la sphère A prim. simp. O .

Il résulte de ce qui précède, que, quelle que soit la relation radicale des deux sphères A et O , elle est la même par rapport à leurs grands cercles déterminés par un plan quelconque, passant par la ligne des centres ao . Toute discussion sur les relations radicales de deux cercles s'applique donc également à deux sphères et réciproquement.

[4.] Jusqu'ici nous n'avons examiné les cercles et les sphères que dans le cas où leurs rayons sont des quantités finies; il nous reste donc à voir ce qui aurait lieu, si on supposait que ces rayons parvinssent à leurs limites.

LIMITES DES
CERCLES RADICAUX ET DES
SPHÈRES RADICALES.

Lorsque le point o est à la circonférence du cercle ou à la surface de la sphère prim. A , le cercle ou la sphère O sont réduits à leurs centres, et peuvent indifféremment être considérés comme radicaux réciproques ou rad. simp. A .

Cercles ou sphères rad. réduits à leurs centres.

Si la distance oa était infinie (*fig. 1*), les deux tangentes om et on deviendraient parallèles, les points de contact m et n seraient aux

Cercles ou sphères rad. d'un rayon infini.

extrémités d'un diamètre du cercle prim. A , et le cercle de contact mn deviendrait un grand cercle de la sphère prim. A . Le cercle ou la sphère O deviennent alors une droite ou un plan indéfini mn , qui peuvent être considérés comme rad. réc. ou comme prim. simp. du cercle ou de la sphère A .

Cercles ou sphères prim. réduits à leurs centres.

Lorsque le cercle ou la sphère prim. A sont réduits à leurs centres, quelle que soit la position du point o , elle ne peut être au-dedans du point a , qui n'a pas de dimension. Ainsi les tangentes et les sécantes se confondent avec la ligne oa ; en sorte qu'il en résulte un cercle ou une sphère O dont le rayon est oa , et qui ne peuvent être que rad. réc. du point a , ou cercle ou sphère O rad. réc. a .

Cercles ou sphères rad. d'une droite ou d'un plan.

Supposons maintenant que les rayons du cercle ou de la sphère prim. A deviennent infinis, il en résultera une droite ou un plan prim. A (*fig. 9*), qui devront contenir le centre de tout cercle ou sphère d'un rayon fini et rad. de cette droite ou de ce plan. En effet, si le point ω est pris au-dehors de A , les sécantes ou les cordes menées de ce point au cercle infini, ou à la sphère infinie A , auront une de leurs parties ωk égale à une quantité finie; tandis que la seconde partie ωg ou $\omega g'$ sera représentée par une quantité infinie: il en résultera donc que le produit de ces deux parties étant infini, le rayon du cercle ou de la sphère, qui en est la racine carrée sera lui-même infini, et les directions de la tangente, ou de la plus petite corde, seront parallèles à la ligne ou au plan A .

Mais, si l'on prend le point o sur la droite ou le plan A , la première partie de la sécante, ou de la corde, deviendra zéro, et la seconde sera infinie: on aura donc pour produit

$$0 \times \frac{1}{0} = \frac{0}{0},$$

caractère de l'indétermination. En effet, quel que soit le rayon du cercle ou de la sphère O , ils seront à-la-fois coupés diamétralement et à angle droit par la ligne ou le plan A , et pourront en être considérés comme

déterminées séparément pour chacun d'eux ; et comme on peut par-tout substituer A à B , les doubles relations du cercle V ne peuvent présenter que les six combinaisons suivantes :

Combinaisons
des relations rad.
d'un cercle V avec
deux autres.

1.° V (rad. réc. A -rad. réc. B), d'où

$$\overline{va^2} = \overline{RA^2} + \overline{RV^2} \text{ et } \overline{vb^2} = \overline{RB^2} + \overline{RV^2},$$

2.° V (rad. simp. A -rad. simp. B), d'où

$$\overline{va^2} = \overline{RA^2} - \overline{RV^2} \text{ et } \overline{vb^2} = \overline{RB^2} - \overline{RV^2},$$

3.° V (prim. simp. A -prim. simp. B), d'où

$$\overline{va^2} = -\overline{RA^2} + \overline{RV^2} \text{ et } \overline{vb^2} = -\overline{RB^2} + \overline{RV^2},$$

4.° V (rad. réc. A -prim. simp. B), d'où

$$\overline{va^2} = \overline{RA^2} + \overline{RV^2} \text{ et } \overline{vb^2} = -\overline{RB^2} + \overline{RV^2},$$

5.° V (rad. réc. A -rad. simp. B), d'où

$$\overline{va^2} = \overline{RA^2} + \overline{RV^2} \text{ et } \overline{vb^2} = \overline{RB^2} - \overline{RV^2},$$

6.° V (rad. simp. A -prim. simp. B), d'où

$$\overline{va^2} = \overline{RA^2} - \overline{RV^2} \text{ et } \overline{vb^2} = -\overline{RB^2} + \overline{RV^2}.$$

Pour déterminer le lieu du centre v par rapport à chacune des combinaisons ci-dessus, il faudra éliminer $\overline{RV^2}$ à l'aide des valeurs de $\overline{va^2}$ et $\overline{vb^2}$ qui résultent de chacune d'elles ; et, comme dans les quatre premiers, le signe de $\overline{RV^2}$ est le même dans les valeurs de $\overline{va^2}$ et $\overline{vb^2}$, l'élimination se fera par la soustraction $\overline{va^2} - \overline{vb^2}$; tandis que, dans les deux derniers, le signe de $\overline{RV^2}$ étant différent dans les valeurs $\overline{va^2}$ et $\overline{vb^2}$, il faudra faire l'addition $\overline{va^2} + \overline{vb^2}$ pour faire disparaître $\overline{RV^2}$. Dans tous les cas, il résultera de la soustraction ou de l'addition une valeur constante composée des deux termes $\overline{RA^2}$ et $\overline{RB^2}$ avec des signes dépendans de la combinaison employée.

Cela posé.

Soient a et b (fig. 3) les centres de deux cercles A et B , la distance connue $ab = m$, v une des positions du centre d'un cercle V , a l'origine des coordonnées $ah = x$ et $vh = y$; on aura $hb = m - x$.

Les

GÉOMÉTRIE.

137

Les deux triangles rectangles vah et vhb donneront

$$\overline{va^2} = y^2 + x^2 \quad \text{et} \quad \overline{vb^2} = y^2 + x^2 - 2mx + m^2;$$

d'où

$$\overline{va^2} - \overline{vb^2} = 2mx - m^2$$

et

$$\overline{va^2} + \overline{vb^2} = 2y^2 + 2x^2 - 2mx + m^2.$$

La première de ces deux équations est du premier degré par rapport à x , la variable y n'y entre plus; la valeur particulière $\overline{va^2} - \overline{vb^2}$, déduite de chacune des quatre premières combinaisons est constante, la valeur de x l'est donc aussi; d'où il résulte que, pour ces combinaisons, les cercles V ont leurs centres sur une perpendiculaire à ab , élevée au point h , déterminé par la valeur de x . Les deux premières seront discutées au numéro suivant; la troisième, n.° [19.], et la quatrième, n.° [20.]. Nous allons passer à l'examen des deux dernières qui donnent lieu à une équation du second degré.

Les cercles V ont leurs centres en ligne droite.

Si, dans la deuxième équation ci-dessus, on désigne par $2c^2$ la valeur constante $\overline{va^2} + \overline{vb^2}$, déduite de la cinquième ou de la sixième combinaison, on aura.

Les cercles V ont leurs centres sur la circonférence d'un cercle L .

$$2y^2 + 2x^2 - 2mx + m^2 = 2c^2,$$

d'où

$$x^2 - mx + \frac{m^2}{4} = c^2 - \frac{m^2}{4} - y^2;$$

et si on fait

$$c^2 - \frac{m^2}{4} = d^2,$$

on aura

$$\left(x - \frac{m}{2}\right)^2 = d^2 - y^2,$$

équation d'un cercle L , ayant pour centre le milieu de ab , et dont le rayon est représenté par d ; mais ce cercle L , lieu des centres v , ne peut exister que dans le cas où d^2 est positif: il faudra donc déterminer la valeur de d^2 , qui est

$$\frac{1}{2} \left(\overline{RA^2} + \overline{RB^2} - \frac{m^2}{2} \right)$$

pour la cinquième combinaison, et

$$\frac{1}{2} \left(\overline{RA^2} - \overline{RB^2} - \frac{m^2}{2} \right)$$

pour la sixième.

XVI.^e Cahier.

Nous observerons que, dans la cinquième combinaison, les deux rayons RA et RB entrent avec le même signe, en sorte qu'il ne reste aucun caractère qui indique auquel des deux cercles A, B , les cercles V sont rad. simp. ; mais ces cercles devant être rad. simp. de l'un et rad. réc. de l'autre, ont nécessairement leurs centres au-dedans du premier et au-dehors du second ; en sorte que le lieu des centres, L , est entièrement au-dedans du plus grand des deux cercles A et B , lorsque ceux-ci ne se coupent pas, et passent de l'un à l'autre par leurs points d'intersection, lorsqu'ils se coupent.

Discussion des limites.

Si le cercle B se réduit à son centre b , tout cercle passant par b est en même temps rad. réc. b et prim. simp. b ; en sorte que, dans ce cas, la cinquième et la sixième combinaison donneraient le même cercle L , qui, lorsqu'il existe, est entièrement au-dedans du cercle A .

Si le cercle A devenait une droite A , il n'existerait plus de cercles prim. simp. A [4.], tout cercle rad. A et d'un rayon fini aurait son centre sur la ligne A , et pourrait être à-la-fois considéré comme rad. réc. ou rad. simp. A . En effet, $\overline{AR}^2$ entrant dans la valeur de d^2 , le rayon de L devient infini ; c'est-à-dire, que ce cercle devient une droite qui ne peut être que la ligne A [4.].

Relations rad. des sphères.

Si les deux cercles A et B , tournant autour de ab , devenaient des sphères, et que dans ce mouvement elles entraînaient avec elles la perpendiculaire élevée au point h ou le cercle L , il en résulterait un plan ou une sphère ayant, avec les deux sphères A et B , la relation que nous venons d'examiner pour les cercles. En effet, si, par les deux centres a et b et le centre v de l'une quelconque de ces sphères, on fait passer un plan, on obtiendra trois grands cercles, et celui qui proviendra de la sphère V , aura, avec chacun des deux autres, les mêmes relations radicales que celles des sphères [3.]. Mais les rayons des grands cercles sont égaux à ceux des sphères, la distance ab ne change pas ; les centres v se trouveront donc toujours sur une perpendiculaire élevée au point h , ou sur un cercle égal et de même centre que L , quelle que soit la direction du plan mené par ab et le centre v . Ce dernier point se trouvera donc toujours sur le plan perpendiculaire à ab au point h , ou sur une sphère L de même centre et de même rayon que le cercle L ci-dessus.

Plan ou sphère. Lieux des centres des sphères V .

Limites.

La même chose aurait lieu, si la sphère B devenait un point b , et si la sphère A devenait un plan A , ce dernier contiendrait alors tous les centres v .

CERCLES RADICAUX COMMUNS DE MÊME ESPÈCE.

[6.] Nous avons vu que tout point o pris dans le plan d'un cercle A , peut être le centre d'un cercle rad. A , et que tout point o de l'espace peut devenir le centre d'une sphère O radicale de la sphère A . Détex-

GÉOMÉTRIE.

139

monons maintenant le lieu géométrique des centres des cercles ou des sphères qui doivent être radicaux de même espèce par rapport à deux autres cercles ou sphères donnés A et B .

Deux cercles A et B peuvent avoir des cercles radicaux communs et de même espèce; nous allons prouver que les centres de ces derniers sont sur une même droite perpendiculaire à la ligne des centres ab . Cercles radicaux communs à deux autres.

Soit o (fig. 4, 5 et 6) le centre d'un cercle O rad. commun de A et B ou rad. AB , on aura [5.], d'une part,

$$\overline{oa}^2 = \overline{RA}^2 \pm \overline{RO}^2 \quad \text{et} \quad \overline{ob}^2 = \overline{RB}^2 \pm \overline{RO}^2,$$

d'autre part, d'où

$$\overline{oa}^2 - \overline{ob}^2 = \overline{RA}^2 - \overline{RB}^2,$$

valeur qui est la même, quelle que soit l'espèce rad. commune, et qui est constante; puisque $\overline{RO}^2$ n'y entre plus.

Si du point o on abaisse oh perpendiculaire sur ab , les deux triangles rectangles oha et ohb , ayant oh commun, on aura

$$\overline{ah}^2 - \overline{bh}^2 = \overline{oa}^2 - \overline{ob}^2 = \overline{RA}^2 - \overline{RB}^2,$$

et comme

$$ah + bh = ab \quad \text{et} \quad ah - bh = ab',$$

on aura

$$ab : RA + RB :: RA - RB : ab', \quad (a)$$

proportion dans laquelle on connaît les moyens et l'un des extrêmes ab ou ab' , ce qui détermine l'autre extrême; et par conséquent, la position du point h au milieu de bb' .

Nous nommerons axe rad. AB la droite ho élevée au point déterminé h perpendiculairement à la ligne ab , et qui contient les centres de tous les cercles rad. communs à A et B . Axe radical.

Tout cercle O ayant son centre sur l'axe rad. AB ne pourra être rad.

140

GÉOMÉTRIE.

A , sans être en même temps rad. B : car on a

$$\overline{oa^2} = \overline{RA^2} \pm \overline{RO^2},$$

et par construction,

$$\overline{ah^2} - \overline{bh^2} = \overline{RA^2} - \overline{RB^2} = \overline{oa^2} - \overline{ob^2};$$

d'où l'on tire

$$\overline{ob^2} = \overline{RB^2} \pm \overline{RO^2}.$$

Le triangle okb est donc rectangle en k (*fig. 5 et 6*), ou en o (*fig. 4*).

Discussions des
limites.

Si le cercle B était réduit à son centre, on aurait

$$RB = 0,$$

d'où

$$\overline{ah^2} - \overline{bh^2} = \overline{RA^2};$$

ce qui montre que ah est toujours $> RA$.

L'axe rad. Ab est donc alors entièrement au-dehors de A , et tout cercle radical commun à un cercle et à un point est réciproque.

Si les deux cercles A et B étaient réduits à leurs centres, on aurait

$$\overline{ah^2} - \overline{bh^2} = 0 - 0 = 0,$$

et tout cercle radical commun à deux points a et b a son centre sur la perpendiculaire au milieu de ab .

Si le cercle A devenait une ligne droite A , nous avons vu [4.] qu'un cercle radical de cette droite ne peut être d'un rayon fini, sans avoir son centre sur cette ligne qui devient alors l'axe rad. AB . En effet, si des points o ou o' (*fig. 9*), sur la droite A , on décrit les cercles O ou O' rad. B , ils seront rad. AB , et le cercle B déterminera seul l'espèce rad. et la grandeur du rayon.

Si les deux cercles devenaient des lignes droites, leur intersection seule pourrait être le centre d'un cercle radical commun et d'un rayon fini; mais ce cercle serait indéterminé quant à la grandeur du rayon et

GÉOMÉTRIE.

141

à l'espèce radicale. Si les deux lignes étaient parallèles, elles n'auraient aucun cercle radical commun et d'un rayon fini.

[7.] Lorsque les deux cercles A et B se coupent en f et g (*fig. 4*), la droite fg est leur axe rad.; car tout point n hors de la ligne fg ne peut être le centre d'un cercle rad. simp. AB . En effet, si par ce point on menait une perpendiculaire à ab , on aurait évidemment

Axe rad. de deux cercles qui se coupent.

$$np \times nq > ns \times nr,$$

ce qui n'a pas lieu pour un point quelconque o pris sur fg . On peut conclure de là, que, lorsque deux cercles ont un cercle rad. simp. commun, ils se coupent, et la ligne qui joint leurs intersections passe par le centre de leur cercle rad. simp. commun.

Tout point o pris sur la corde fg peut donc être le centre d'un cercle O rad. simp. AB , tandis qu'un point quelconque o' du prolongement de cette corde, est le centre d'un cercle O' rad. réc. AB .

Lorsque les deux points f et g se confondent en h (*fig. 5*), les deux cercles A et B se touchent; leur axe radical est leur tangente commune au point de contact h , il est entièrement au-dehors de l'un et l'autre cercles, de manière que tous leurs cercles rad. communs sont réciproques et de plus tangents à la ligne ab au point h .

Axe rad. de deux cercles qui se touchent.

[8.] Lorsque les deux cercles A et B n'ont aucun point commun (*fig. 6*), ils sont extérieurs l'un à l'autre, comme A et B , ou le plus grand enveloppe le plus petit, comme A et B' ; alors ils ne peuvent avoir de communs que des cercles rad. réc., comme dans le cas où ils se touchent : leur axe rad. est donc entièrement au-dehors de A et B .

Axe rad. de deux cercles qui ne se coupent pas.

On pourrait déterminer cet axe au moyen de la proportion (a) n.º [6.]; mais il est plus simple de décrire d'un point arbitraire z un cercle Z qui coupe en même temps A et B , et de prolonger les deux cordes pr et st jusqu'à leur rencontre au point u qui appartiendra à l'axe rad. AB . En effet [7.], $\sqrt{(up \times ur)}$ est le rayon du cercle U rad. AZ , $\sqrt{(ut \times us)}$ est le rayon du même cercle U rad. BZ , ce qui montre

Construction graphique de l'axe rad.

que U est en même temps rad. de A et B ou rad. AB . Enfin, si du point u on abaisse la perpendiculaire uh , elle sera l'axe rad. AB .

Propriété remarquable des cercles.

Ce moyen graphique de déterminer l'axe rad. de deux cercles A et B donne la démonstration d'une propriété remarquable des cercles, et qui consiste en ce que, si on coupe en même temps les deux cercles A et B par un nombre indéfini de cercles quelconques Z' , Z'' , Z''' , &c., on obtiendra par chacun d'eux un point u' , u'' , u''' , &c., et tous ces points seront en ligne droite.

Sphères radicales communes à deux autres.

[9.] Si nous supposons maintenant que les deux cercles A et B (*fig. 4, 5 et 6*), ainsi que leur axe radical, fassent une révolution autour de ab , les deux cercles deviendront deux sphères A et B , et l'axe rad. engendrera un plan perpendiculaire à ab , que nous nommerons *plan radical*, parce qu'il contient tous les centres des sphères rad. AB : il passe par le point déterminé h [6.]; il est vertical, et a pour trace l'axe rad. des deux grands cercles horizontaux, et tout point o de ce plan est le centre d'une sphère O rad. AB .

Plan rad.

Lorsque les deux sphères se coupent (*fig. 4*), leur plan rad. est celui de leur petit cercle commun. Tout point o intérieur à ce cercle est le centre d'une sphère O rad. simp. AB , tandis qu'un point quelconque o' pris dans le plan au-dehors de ce cercle est le centre d'une sphère rad. réc. AB .

Lorsque les deux sphères se touchent (*fig. 5*), leur plan rad. est tangent à l'une et à l'autre au point de contact h ; toutes leurs sphères rad. communes sont réc. et passent par le point h .

Enfin, lorsque les deux sphères n'ont aucun point commun (*fig. 6*), leur plan rad. est en entier extérieur à l'une et à l'autre, et toute sphère rad. AB est réciproque, comme dans le cas précédent.

Propriétés remarquables des sphères.

Nous remarquerons ici que, si l'on coupait les deux sphères A et B par une sphère quelconque Z (*fig. 6*), les plans des cercles d'intersection se couperaient suivant une droite qui serait comprise dans le plan rad. AB , quelle que soit la position du centre z dans l'espace; ce qui démontre, par rapport aux sphères, une propriété parfaitement analogue à celle qui a été remarquée pour les cercles dans le numéro précédent.

GÉOMÉTRIE.

143

La détermination du plan rad. ne dépendant que du point h , les considérations sur les limites sont les mêmes que celles qui ont été discutées n.º [6.] par rapport aux cercles. Discussion des limites.

Si la sphère A devient un plan, la ligne ab est remplacée par la perpendiculaire abaissée du centre b sur le plan A , et celui-ci devient le plan rad. AB .

Enfin, si les deux sphères deviennent des plans, leur intersection seule serait le lieu des centres des sphères rad. communes et d'un rayon fini : mais pour chaque centre pris sur cette droite, l'espèce rad. et la grandeur du rayon seraient indéterminées ; et si les plans devenaient parallèles, ils n'auraient aucune sphère rad. commune d'un rayon fini.

[10.] Nous avons vu que tous les cercles radicaux communs à deux autres ont leur centre en ligne droite, et les sphères radicales communes à deux autres ont leur centre dans un plan. Nous allons maintenant examiner ce qui a lieu par rapport à trois cercles ou trois sphères, et enfin par rapport à quatre sphères. Cercle radical commun à trois autres.

Trois cercles A, B, C , dont les centres ne sont pas en ligne droite, ont toujours un seul cercle radical commun et de même espèce (*fig. 7 et 8*). Soient construits l'axe rad. AB et l'axe rad. AC , ces deux axes se coupent en un point o . Si de ce point on décrit le cercle rad. A , il sera rad. B ; puisque son centre est sur l'axe rad. AB [6.], et en même temps rad. AC , puisque son centre est sur l'axe rad. AC ; il sera donc rad. ABC , et l'axe rad. BC passera par le point o , que nous nommerons *centre radical* ABC , parce qu'il est le seul duquel on puisse décrire un cercle rad. commun aux trois cercles A, B et C . Centre radical des cercles.

Quant à l'espèce radicale du cercle O , comme elle est la même par rapport à chacun des cercles B et C , que par rapport au cercle A , il est évident qu'elle est la même pour les trois; en sorte que le point o est au-dehors de chacun des trois cercles A, B, C (*fig. 7*), ou au-dedans des trois (*fig. 8*).

On peut supposer qu'un, d'eux ou même les trois cercles A, B, C , Limites au minimum.

soient réduits à leurs centres a, b, c ; alors le cercle O passe par chacun de ces points; et, dans le dernier cas, la question est ramenée à faire passer un cercle par trois points.

Observation.

Comme nous n'admettons ici que les cercles radicaux de mêmes espèces, lorsqu'il entre un point parmi les données, les cercles radicaux communs ne peuvent être que réciproques [4.]. Mais, d'après les principes développés n.º [5.], il serait facile de construire les cercles qui auraient avec A, B et C des relations radicales déterminées séparément pour chacun de ces derniers, chacun de ces problèmes ne donnerait qu'une ou deux solutions; car les centres seraient déterminés par des intersections de droites ou de cercles.

Sphères radicales communes à trois autres.

Axe rad. des sphères.

Limites au minimum.

Propriété remarquable des sphères.

[11.] Lorsque les trois cercles A, B, C deviennent des sphères, les trois plans rad. (AB, AC, BC) se coupent suivant une verticale OO dont le pied est en o . Tout point de cette droite est le centre d'une sphère rad. ABC . Nous nommerons la droite OO , l'axe rad. des sphères A, B, C . Cet axe peut être situé, 1.º entièrement au-dehors des sphères (*fig. 7*), alors il ne contient que des centres de sphères rad. réc. ABC ; 2.º en partie au-dedans de ces mêmes sphères (*fig. 8*), alors la partie zz' , intérieure aux trois, ne contient que des centres de sphères rad. simp. ABC , et ses prolongemens, que des centres de sphères rad. réc. ABC .

Lorsqu'une, deux ou même les trois sphères données se réduisent à leurs centres a, b, c , toutes les sphères rad. ABC sont réciproques et passent par chacun de ces points; et dans la dernière hypothèse, la ligne OO devient l'axe polaire du cercle abc .

Si l'on coupait en même temps les trois sphères A, B, C par une sphère quelconque Z , les plans des trois petits cercles d'intersection formeraient une pyramide dont le sommet serait sur la droite OO , quelle que soit la position du centre z ; il en serait de même par rapport à toute autre sphère coupant Z', Z'', Z''' , &c. qui fourniraient une suite de pyramides dont tous les sommets seraient en ligne droite. Si l'on prenait le centre z dans le plan abc , les plans des trois petits cercles ci-dessus formeraient un prisme dont les arêtes seraient parallèles à la droite OO .

[12.]

GÉOMÉTRIE.

145

[12.] Quatre sphères A, B, C, E , dont les centres ne sont pas dans un même plan, ont toujours une seule sphère rad. commune et de même espèce. Soit pris pour plan horizontal celui des trois centres a, b, c (*fig. 7 et 8*), et le plan vertical parallèle à ae . Si on mène le plan rad. AE , il sera perpendiculaire au plan vertical, et coupera la verticale OO en un point o' . Si de ce point on décrit la sphère rad. A , elle sera rad. ABC , puisque son centre est sur OO : elle sera aussi rad. E , puisque son centre est dans le plan rad. AE . Elle sera donc rad. $ABCE$, et le point o' sera dans chacun des six plans rad.

Sphère rad. commune à quatre autres.

Centre rad. des sphères.

($AB, AC, AE, BC, BE, CE,$)

tout autre point serait au moins hors de trois de ces plans : donc, &c.

Nous nommerons le point o' *centre rad.* $ABCE$, et l'espèce rad. étant la même par rapport aux quatre sphères, ce point o' est au-dehors ou au-dedans des quatre.

Lorsque le point o' est au-dehors (*fig. 7*), on a

sph. O' rad. réc. $ABCE$;

tandis que, s'il était au-dedans (*fig. 8*), il serait sur zz' , et l'on aurait

sph. O' rad. simp. $ABCE$.

Si on suppose une, deux, trois ou même les quatre sphères réduites à leurs centres, la sphère O' passe par un, deux, trois ou quatre de ces points ; et, dans le dernier cas, la question est ramenée à faire passer une sphère par quatre points.

Limites au minimum.

[13.] Nous avons examiné successivement ce qui a lieu, lorsque les cercles ou les sphères deviennent des points ; mais si les cercles devenaient des lignes droites et les sphères des plans, il est facile de voir ce qui résulterait, et d'établir les principes suivans :

Discussion des limites au maximum des n.ºs [10], [11] et [12].

1.º Deux cercles et une droite ont pour centre rad. l'intersection de l'axe rad. des deux cercles avec la droite.

2.º Deux droites et un cercle ont pour centre rad. l'intersection des

XVI.º *Cahier.*

T

146

GÉOMÉTRIE.

deux droites ; le cercle seul détermine l'espèce rad. et la grandeur du rayon.

3.° Deux sphères et un plan ont pour axe rad. l'intersection du plan rad. des deux sphères avec le plan donné.

4.° Deux plans et une sphère ont pour axe rad. l'intersection des deux plans ; la sphère seule détermine l'espèce et la grandeur du rayon de chaque sphère rad.

5.° Trois plans n'ayant en général qu'un point commun, ce point peut seul être le centre des sphères rad. communes et d'un rayon fini ; mais l'espèce rad. et la grandeur du rayon sont indéterminées.

Si les trois plans étaient parallèles entre eux ou seulement à une même droite, ils n'auraient aucune sphère rad. commune et d'un rayon fini. Cependant si ces trois plans passaient par une même droite, tous les points de cette droite seraient les centres d'une suite de sphères d'un rayon fini et rad. communes aux trois plans ; mais l'espèce rad. et la grandeur de leurs rayons seraient indéterminées.

6.° Trois sphères et un plan ont pour centre rad. le point où l'axe rad. des trois sphères perce le plan donné.

7.° Deux sphères et deux plans ont pour centre rad. le point où l'intersection des deux plans donnés perce le plan rad. des deux sphères.

8.° Trois plans et une sphère ont pour centre rad. le point commun aux trois plans ; la sphère seule détermine l'espèce rad. et la valeur du rayon.

Si les trois plans passaient par la même droite, tous les points de cette droite seraient des centres de sphères rad. communes aux trois plans et à la sphère.

S. II.

SUITES RADICALES des Cercles.

[14.] Nous avons vu que trois cercles n'ont en général qu'un rad.

GÉOMÉTRIE.

147

commun ; mais, lorsque leurs centres sont placés en ligne droite, il peut arriver que les trois axes rad., provenant des combinaisons deux à deux de ces trois cercles, se confondent ; alors les trois cercles ont une suite indéfinie de radicaux communs : et comme une infinité de cercles peuvent se trouver dans les mêmes circonstances, on conçoit qu'il peut y en avoir une suite indéfinie qui aient aussi un nombre indéfini de cercles rad. communs de même espèce.

Nous allons donc, dans ce second paragraphe, comparer entre elles ces suites de cercles que nous nommerons *suites radicales*.

Soient $p, p', p'', \&c.$ (fig. 10), les centres d'une suite indéfinie de cercles P passant par deux points f et g , on sait que leurs centres sont en ligne droite. Cela posé. 1.° Si, d'un point quelconque m , pris sur le prolongement de fg avec $\sqrt{(mg \times mf)}$, on décrit un cercle M , il sera rad. réc. de tous les cercles P . 2.° Si, d'un point quelconque n , pris entre f et g avec $\sqrt{(nf \times ng)}$ pour rayon, on décrit un cercle N , il sera rad. simp. de tous les cercles P : la ligne fg prolongée indéfiniment est donc un axe rad. commun à tous les cercles P .

DESCRIPTION
D'UN SYSTÈME
DE CERCLES RA-
DICAUX.

Si l'on conçoit la suite indéfinie de cercles, tant M que N , tous les cercles P leur seront primitifs, avec cette différence que la relation réciproque existera entre eux et les cercles M , tandis qu'ils seront primitifs simples des cercles N .

Nous nommerons *système radical* l'ensemble de ces deux suites. La première comprenant tous les cercles P qui sont primitifs réciproques des cercles M [2.], et primitifs simples des cercles N , sera désignée par *suite primitive du système*, ou simplement par *suite des cercles P* ; la ligne des centres pp sera l'axe primitif du système, et nous la désignerons par *axe pp* (*).

Suite des cercles
 P , axe pp .

La seconde suite qui renferme tous les cercles, tant M que N , dont les premiers sont rad. réc. et les seconds rad. simp. de tous les cercles

(*) Les deux lettres qui désignent cet axe étant les mêmes que celles des centres des cercles qu'il contient, nous croyons que cette notation peut guider la mémoire.

Suite des cercles
 M et N .

Axe mn .

P , sera désignée par suite des cercles M et N ; et la ligne de leurs centres le sera par axe mn . Mais il ne faut pas perdre de vue que les cercles M et les cercles P sont rad. réc. les uns des autres, en sorte que l'axe primitif pp est un axe rad. commun à tous les cercles M , ce qui motive le nom générique de *suites radicales*.

Système radic.
par contact.

[15.] Si les deux points f et g se confondaient en h (fig. 5), les cercles de la première suite se toucheraient en h , ainsi que ceux de la seconde, les cercles N n'existeraient plus, les deux suites seraient entièrement semblables. Nous dirons de ce système particulier qu'il est rad. par contact.

Propriétés des
cercles M .

[16.] Les cercles M ne coupent pas l'axe primitif, et ne se coupent pas entre eux.

En effet, soit a (fig. 6) le centre d'un cercle M , et o celui d'un cercle P , les deux triangles rectangles aio et $ao h$ ont même hypoténuse ao ; mais

$$oi = og > oh;$$

donc

$$ah > ai,$$

et comme

$$ai = al;$$

on a

$$ah > al.$$

Il résulte de là, que les cercles M ne coupent pas l'axe prim. du système, et ne se coupent point entre eux, lorsqu'ils sont situés de côtés différens de cet axe.

Soit B' un second cercle M , le point h étant au-dehors de A et B' est le centre d'un cercle rad. réc. AB' , dont le rayon est hg , on aura donc

$$hg^2 = hl \times hm = hn \times kg;$$

mais

$$hm > hg,$$

GÉOMÉTRIE.

149

d'où

$$hn > hl.$$

Les deux extrémités n et g du diamètre de B' , suivant la ligne des centres ab' , sont au-dedans du cercle A , le cercle B' y est donc tout entier. Il n'en est pas ainsi des cercles N ; car ils peuvent couper l'axe prim. du système, se couper entre eux, et couper les cercles M .

[17.] Nous avons vu, n.ºs [14.] et [15.], que deux points donnés ou un point de contact sur une droite, déterminent un système de cercles rad.; mais, en général, ce système peut être déduit de deux conditions, comme nous allons le faire voir :

DÉTERMINATION
D'UN SYSTÈME
DE CERCLES
RAD.

1.º Deux cercles qui se coupent déterminent un système de cercles rad.; car leurs intersections sont les points f et g de la fig. 10. La même chose aurait lieu, si l'un des cercles devenait une ligne droite.

Par deux cercles
qui se coupent.

Limites.

2.º Deux cercles qui se touchent ont une tangente commune qui forme, avec la ligne de leurs centres, les deux axes d'un système de cercles rad. par contact.

Par deux cercles
qui se touchent.

3.º Deux cercles de la suite MN déterminent aussi un système de cercles rad.; mais comme il y en a de deux espèces, ils présentent trois combinaisons deux à deux, que nous allons examiner séparément.

[18.] Deux cercles M déterminent un système radical.

Par deux cercles

Soient A et B (fig. 6) deux cercles M , oh leur axe rad., le point déterminé h [6.] est au-dehors de A et B ; on aura donc

M .

$$\overline{ah}^2 > \overline{RA}^2.$$

Soit

$$\overline{ah}^2 = \overline{RA}^2 + d^2,$$

d est déterminé, puisque l'on connaît ah et RA . Soit o le centre d'un cercle O rad. réc. AB ; les deux triangles oha et oia ayant même hypoténuse oa , donneront

$$\overline{RA}^2 + \overline{RO}^2 = \overline{ah}^2 + \overline{oh}^2.$$

150

GÉOMÉTRIE.

Substituant la valeur de ah^2 , on aura

$$\overline{RO^2} = \overline{oh^2} + d^2;$$

et cela quel que soit O . Si on porte d de h en f et en g , tous les cercles rad. AB passeront par f et g , et formeront une suite primitive d'un système de cercles radicaux.

Limites.

Si l'un des cercles M était réduit à son centre, il serait un des points f ou g ; et s'il devenait une ligne droite, il se confondrait avec l'axe primitif du système, comme on le verra n.º [23.].

S. II.

Cercle tangent et Sphères tangentes à trois autres ; et Sphère tangente à quatre autres.

[55.] D'APRÈS ce que nous venons de voir, les cercles ou les sphères qui en touchent en même temps deux autres, sont indéterminés de grandeur et de position ; il nous reste donc à examiner, dans ce paragraphe, ce qui aurait lieu si l'on admettait une nouvelle condition ; il est évident qu'il en résulterait un certain nombre de cercles déterminés, et qu'il resterait encore, par rapport aux sphères, une indétermination de laquelle on pourrait déduire de nouvelles propriétés : indétermination qui ne pourrait disparaître qu'en introduisant une quatrième condition.

LES SIX POINTS
s OU d SONT
TROIS À TROIS
EN LIGNE
DROITE.

Soient a, b, c (fig. 21), les centres de trois cercles pour lesquels on a

$$RA : RB : RC :: m : n : p$$

sur chacune des trois lignes de centres ab, ac, bc , on aura un point s et un point d provenant du rapport des rayons des deux cercles [46.]. Il en résultera, 1.^o que les trois points s sont en ligne droite. 2.^o que chaque point s est en ligne droite avec les deux points d des autres lignes de centres. En effet :

GÉOMÉTRIE.

183

1.° Soient menées par $s(ab)$ (*), $s'(ac)$, la ligne ss' , et de chacun des centres a , b et c , les parallèles af , bg et ch , on aura

$$as : bs :: m : n :: af : bg$$

d'une part, et

$$cs' : as' :: p : m :: ch : af$$

d'autre part ; d'où

$$p : n :: ch : bg :: cs'' : bs'' ;$$

le point $s''(bc)$ est donc sur ss' : donc les trois points s , s' , s'' sont sur une même droite.

2.° Soient menées par $d(ab)$, et $d'(ac)$, la ligne dd' , et par chacun des centres a , b , c , les parallèles ai , bk et cl , on aura

$$ad : bd :: m : n :: ai : bk \quad \text{et} \quad cd' : ad' :: p : m :: cl : ai,$$

d'où

$$p : n :: cl : bk :: cs'' : bs'' ;$$

donc $s''(bc)$ est sur dd' .

On démontrerait de la même manière, que les trois points s' , d'' , d ou s , d' , d'' sont en ligne droite ; et comme il ne faut que deux points pour déterminer une ligne droite, on en conclura que, si, par deux points s ou d pris sur deux côtés différens du triangle abc , on mène une droite, elle rencontrera le troisième côté en un de ses points s ou d , déterminé par le choix des deux premiers.

Comme nous aurons très-souvent à rappeler ces lignes $ss's''$, $sd'd''$, &c. Lignes F . dans les n.°s suivans, nous les désignerons par la lettre F .

Nous remarquerons ici que des quatre droites F , il en passe deux par chacun des six points s et d .

Si le cercle C était réduit à son centre, il n'existerait que deux lignes F qui passeraient par le point c ; et si le cercle B était en même temps

Discussion des limites.

(*) Les deux lettres comprises entre les parenthèses, indiquent sur quelle ligne de centres est placé le point s ou d dont il s'agit.

réduit à son centre, il n'existerait qu'une ligne F qui serait la droite bc . Enfin, si les trois cercles étaient réduits à leurs centres, la question serait ramenée à faire passer un cercle par trois points.

Combinaisons
entre les trois
contacts.

[56.] Lorsqu'un cercle touche en même temps les trois cercles A , B , C , il y a trois combinaisons deux à deux entre les trois contacts.

Si l'on convient de désigner les cercles à double contact [46.]; savoir, les V par AsB et les X par AdB . Les lettres s ou d interposées, indiquant si les deux contacts sont semblables ou différents, rappelleront en même temps que la droite menée par les points de contact de chacun des cercles, passe par le point s ou d de la ligne des centres des deux cercles entre lesquels cette lettre se trouve placée. Ceux d'entre eux qui toucheront le cercle C , seront en même temps des AsC ou des AdC ; et si l'on compare chacun des trois contacts à celui qui a lieu avec le cercle A , on aura le tableau suivant :

$$A \left\{ \begin{array}{l} sB \left\{ \begin{array}{l} sC \dots\dots d'où \dots\dots A(sBsC), \\ dC \dots\dots\dots A(sBdC), \end{array} \right. \\ dB \left\{ \begin{array}{l} sC \dots\dots\dots A(dBsC), \\ dC \dots\dots\dots A(dBdC); \end{array} \right. \end{array} \right.$$

duquel on peut déduire la combinaison des contacts avec B et C , en plaçant entre ces lettres la lettre s , lorsqu'elles sont précédées de la même lettre, comme pour la première et la dernière combinaison du tableau, et la lettre d pour les deux autres.

Il y a donc en tout quatre combinaisons entre les trois contacts, et tout cercle qui touche en même temps A , B et C , satisfait nécessairement à l'une de ces quatre combinaisons.

Un cercle de
chaque combinai-
son fait partie
d'une suite rad.

Un cercle aux trois contacts désignés par $A(sBsC)$ a en même temps pour rad. les trois cercles S , S' , S'' ; et comme les centres de ces derniers sont en ligne droite, il en résulte qu'ils font partie d'une suite rad., que tout cercle $A(sBsC)$ fait partie de la suite opposée, et a par conséquent son centre sur une droite perpendiculaire à $ss's''$; mais le cercle O rad. ABC , fait partie de cette suite : car [48.],
lorsque

Le cercle O fait
partie de chacune
de ces suites.

GÉOMÉTRIE.

185

lorsque l'on a O rad. réc. ABC , les trois cercles S, S', S'' (ainsi que D, D', D''), lui sont rad. chacun de la même espèce qu'il l'est des cercles aux deux contacts correspondans ; donc il fait partie de la suite opposée à S, S', S'' . Mais, si l'on avait O rad. simp. ABC , il serait en même temps rad. simp. de chacun des cercles S, S', S'' (ainsi que D, D', D''). Dans ce cas, la suite opposée à S, S', S'' , dont le cercle O fait partie, contiendrait les cercles M et N du n.º [14.], et le cercle O ferait partie des cercles N .

Il faudra donc, dans tous les cas, déterminer le centre rad. o , comme n.º [10.], abaisser de ce point une perpendiculaire sur $ss's''$, et cette droite contiendra le centre de tout cercle aux trois contacts désignés par $A(sBsC)$; mais ce cercle ayant S et S' pour radicaux, ne pourra toucher A , sans toucher en même temps B et C [47.] : on obtiendra donc deux de ces cercles sur la suite dont ils font partie, comme les cercles P ou M du n.º [28.], tangens au cercle donné A .

Par les mêmes raisons que ci-dessus, on obtiendrait :

- 1.º Deux cercles aux trois contacts désignés par $A(sBdC)$, ayant en même temps pour rad. les trois cercles S, D', D'' , et leurs centres sur une perpendiculaire abaissée du point o sur $sd'd''$;
- 2.º Deux cercles désignés par $A(dBsC)$, ayant pour rad. communs les cercles D, S', D'' , et leurs centres sur la perpendiculaire abaissée du point o sur $ds'd''$;
- 3.º Enfin, deux cercles désignés par $A(dBdC)$, ayant pour rad. communs les cercles D, D', S' , et leurs centres sur la perpendiculaire abaissée du point o sur $dd's''$.

Il résulte de ce qui précède, que chacune des quatre lignes que nous avons désignées par F , correspond à une des combinaisons entre les trois contacts, et est l'axe d'une suite rad. dont l'opposée contient deux cercles aux trois contacts correspondans et le cercle O .

Lorsque les trois cercles donnés, sans changer de centre, augmentent proportionnellement de rayon, il peut arriver que deux de ces cercles se

touchent, se coupent, qu'ils se coupent tous les trois, que l'un d'eux en enveloppe un autre, que le plus grand enveloppe les deux autres, &c. Dans toutes ces hypothèses, les six points s ou d , et par conséquent les quatre lignes F , ne changent pas de position; mais le centre du cercle O rad. ABC varie ainsi que les quatre perpendiculaires abaissées de ce point sur les lignes F .

Discussion des limites.

Les cercles donnés deviennent des points.

Le cercle A devient une droite.

Lorsque le cercle C est réduit à son centre, les combinaisons AsC et AdC se confondent; car il n'existe point de distinction de contact avec un point; et si le cercle B était en même temps réduit à son centre, il n'y aurait plus de combinaisons.

[57.] Lorsque le cercle A devient une droite A (fig. 22), si l'on détermine sur bc les points s'' et d'' ; et si l'on mène les deux diamètres sd et $s'd'$ perpendiculaires à A , l'on aura les quatre droites

$$ss's'', sd'd'', s'dd'', s''dd',$$

qui sont les quatre lignes F , et la question devient entièrement analogue à celle du n.º précédent.

Les quatre lignes F se réduisent à deux, lorsque C devient un point, et enfin à une seule, lorsque B devient aussi un point.

Nous remarquerons que, comme il ne peut exister aucun rapport entre ces rayons de B et C , et celui de A qui est infini, si on suppose que les cercles B et C , sans changer de centres, augmentent proportionnellement de rayon, les points s'' et d'' ne changeront pas de position; mais les points s et d , ainsi que s' et d' , s'écarteront sans que les diamètres sd et $s'd'$ cessent d'être parallèles: alors les quatre lignes F changeront de direction, sans cesser de passer par l'un des points s'' ou d'' .

Les deux cercles A et B deviennent des droites.

[58.] Si les deux cercles A et B deviennent des droites A et B (fig. 20), tous les cercles tangens à ces deux droites ont leurs centres sur vv' ou sur xx' [51].

Tout cercle dont le centre est sur vv' ne pourra toucher C , sans tou-

G É O M É T R I E.

187

cher de la même manière le cercle $C' = C$ et placé symétriquement par rapport à vv' ; les deux droites ss' et dd' parallèles peuvent être considérées comme concourant à une distance infinie sur cc' ou sur xx' , et deviennent les deux lignes F correspondantes aux trois contacts désignés par $A(sB...sC)$ et $A(sB...dC)$.

Par la même raison, tout cercle tangent à C et dont le centre est sur xx' , touchera de la même manière le cercle $C'' = C$ et placé symétriquement par rapport à xx' ; les deux droites ss'' et dd'' seront les lignes F correspondantes aux trois contacts désignés par $A(dB...sC)$ et $A(dB...dC)$.

Si le cercle C devenait un point, il n'y aurait que deux lignes F ; mais on n'obtiendrait que deux cercles passant par les points c et c' compris dans celui des quatre angles qui contient le point c : car aucun cercle cherché ne peut passer par le point c'' , puisque les deux lignes A et B coupent cc'' .

[59]. Lorsque les trois cercles ABC deviennent des droites, il n'y a plus de lignes F ; mais, au sommet de chacun des angles du triangle formé par les trois droites, il existe deux lignes analogues à vv' et xx' de la fig. 20: ces six lignes se coupent trois à trois en quatre points, centres de quatre cercles tangens aux trois droites.

Les trois cercles A, B, C deviennent des droites.

Si deux des droites données étaient parallèles, il n'existerait que quatre des six lignes ci-dessus, et celles qui partiraient des deux angles internes du même côté, se couperaient aux centres de deux cercles tangens aux trois droites: enfin il n'existe aucun cercle tangent à trois droites parallèles, ainsi qu'à trois droites qui passent par un même point.

[60.] Proposons-nous maintenant d'appliquer aux sphères les principes précédens.

SPHÈRES TANGENTES À TROIS AUTRES.

Si l'on suppose que les trois cercles A, B, C des n.^{os} [55.] et [56.] deviennent des sphères, les six cercles S ou D le deviendront pareillement, et chacune d'elles sera rad. des sphères aux deux contacts correspondans [54.]; mais leurs centres ne changeant point de position, les

Les lignes F deviennent des axes principaux.

Les sphères de chaque combinaison font partie d'une suite au plan.

Les quatre plans principaux passent par l'axe radical ABC .

Limites.

quatre droites F seront chacune l'axe principal d'une suite de sphères rad. à laquelle est opposée un plan principal, contenant les centres de toutes les sphères qui satisfont à la combinaison correspondante entre les trois contacts. Le plan de la figure étant supposé horizontal, les quatre plans principaux ci-dessus sont verticaux, et ont pour traces horizontales les quatre perpendiculaires abaissées du point o sur chacune des lignes F ; en sorte qu'ils se coupent tous quatre suivant la verticale OO du n.° [11].

Si la sphère C se réduisait à son centre, il n'y aurait que deux suites au plan; si la sphère B se réduisait aussi à son centre, il n'y en aurait qu'une suite dont le plan principal serait perpendiculaire sur le milieu de bc ; enfin, si les trois sphères devenaient des points, les sphères cherchées auraient leurs centres sur l'axe polaire du cercle abc .

Nous remarquerons ici, que, pour la même combinaison entre les trois contacts, les droites qui réunissent deux à deux les trois points de contact de chacune des sphères tangentes viennent constamment percer le plan horizontal aux trois points s ou d de la ligne F correspondante; en sorte que cette droite est la trace horizontale commune à tout plan mené par les trois points de contact de chacune de ces sphères: mais il peut arriver que chacune des trois sphères A, B, C soit extérieure l'une à l'autre, et que les quatre droites F ne rencontrent pas leurs grands cercles horizontaux. Dans ce cas seulement, on peut mener aux trois sphères huit plans tangens communs, savoir, deux par chacune des quatre lignes F ; alors les sphères de chacune des quatre combinaisons peuvent croître indéfiniment jusqu'à devenir ces plans tangens: mais lorsqu'une des lignes F rencontre les grands cercles horizontaux, on ne peut plus mener de plans tangens par cette droite, et les sphères aux trois contacts correspondans ont des limites de grandeur. Cette circonstance se présentant souvent pour quelques-unes des lignes F , et toujours pour les quatre à-la-fois, quand l'une des sphères données en enveloppe une autre, il peut donc arriver qu'on ne puisse mener aucun plan

GÉOMÉTRIE.

189

tangent à trois sphères, quoiqu'elles aient des sphères tangentes communes.

Nous avons cru nécessaire de nous étendre sur cette observation, parce que les géomètres qui ont écrit sur ce sujet ont pris pour exemple le cas particulier où l'on peut mener huit plans tangens communs.

[61.] Si la droite A (fig. 22) devenait un plan vertical et les cercles B, C des sphères, les quatre lignes F seraient les mêmes que celles des cercles du n.º [57.], et la ligne OO serait l'intersection du plan rad. BC avec le plan A .

La sphère A devient un plan.

[62.] Si les deux droites A et B (fig. 20) devenaient des plans verticaux et le cercle C une sphère, les quatre lignes F seraient les mêmes que celles des cercles du n.º [58.], et l'intersection des deux plans A et B serait la ligne OO .

Les sphères A et B deviennent des plans.

[63.] L'analogie nous conduirait à supposer que les trois droites A, B, C du n.º [59.] deviennent des plans verticaux; mais ce ne serait qu'un cas particulier : car ces plans se couperaient suivant des droites parallèles. Dans ce cas, si l'on menait des verticales par chacun des centres des cercles horizontaux du n.º [59.], on aurait autant de droites dont tous les points seraient des centres de sphères tangentes aux trois plans.

Les trois sphères A, B, C deviennent des plans.

Il est facile de voir que ces droites sont les axes de cylindres droits dont les bases sont les cercles horizontaux, et dans lesquels les sphères sont inscrites.

Si, maintenant, nous supposons trois plans A, B, C dans le cas général, ils ont un seul point commun qui est le sommet de huit nappes de pyramides symétriques deux à deux comme opposées par le sommet; ils forment donc en tout quatre pyramides à double nappe. Les six plans qui partagent en deux parties égales chacun des douze angles formés par les trois plans, se coupent trois à trois suivant quatre droites dont chaque point est également distant des trois plans; chacune de ces droites

est l'axe d'une des pyramides, et contient les centres de toutes les sphères qui lui sont inscrites. Cet axe se projette sur chacun des trois plans suivant des droites qui sont les lieux des contacts des sphères inscrites, et toutes ces sphères sont enveloppées par un cône droit à double nappe, qui a même axe que la pyramide, et dont les trois droites de contact sont des élémens. Ce cône laisse entre lui et la pyramide trois espaces angulaires dont aucun point ne peut appartenir aux sphères inscrites.

Si l'on fait le même raisonnement sur chacune des trois autres pyramides et leurs axes, on trouvera en tout quatre cônes à doubles nappes qui limitent l'espace que peuvent occuper les sphères tangentes aux trois plans.

SPHÈRE TAN-
GENTE À QUATRE AUTRES.

[64.] Il ne nous reste plus maintenant qu'à examiner ce qui a lieu, lorsque l'on veut obtenir une sphère tangente à quatre autres ; ainsi,

Seize lignes F ,
dont quatre hori-
zontales.

Soient a, b, c (*fig. 21*) dans le plan horizontal, et e dans l'espace, les centres de quatre sphères A, B, C, E , dont les rayons sont dans des rapports donnés, les six arêtes du tétraèdre $ea bc$, fournissent chacune un point s et un point d ; il y a donc douze points, tant s que d , dont six dans le plan horizontal et six dans l'espace. Chacune des quatre faces du tétraèdre contient quatre lignes F , ce qui en fournit seize ; douze d'entre elles sont inclinées au plan horizontal, et sont quatre à quatre sur une des trois faces de ce tétraèdre qui contient le centre e , et deux des trois centres a, b, c ; elles passent deux à deux par chacun des points s et d de la ligne horizontale des centres des deux sphères combinées avec E [55.]. Ces douze lignes F inclinées viennent donc deux à deux percer le plan horizontal en chacun des six points s, s', s'', d, d', d'' de ce plan ; en sorte que chacune des quatre lignes F horizontales est rencontrée par six des douze lignes F inclinées, et ne l'est pas par les six autres. Nous allons démontrer que des six lignes F inclinées, qui rencontrent une même ligne F horizontale, trois sont dans un premier plan, et les trois autres dans un second plan mené par cette ligne F horizontale.

Les douze points
 s et d sont six à
six dans un même
plan FF qui con-
tient quatre lignes
 F .

GÉOMÉTRIE.

191

En effet, soit pris pour exemple la ligne F horizontale $ss's''$, si l'on convient de nommer σ et Δ les points s et d de (ae) [55.], on peut,

1.° Mener par la ligne $ss's''$ et le point σ un premier plan, il contiendra $s\sigma$ et $s'\sigma$ qui sont deux lignes F ; mais la première contient le point $s(be)$ et la seconde le point $s(ce)$, et ces deux points, en ligne droite avec $s''(bc)$, donnent la troisième ligne F . Ce plan a cela de remarquable, qu'il contient les six points s et les quatre lignes aux trois s dont une sur chaque face du tétraèdre;

2.° Mener, par la même ligne $ss's''$ et Δ , un second plan qui contiendra $s\Delta$ et $s'\Delta$, qui sont deux nouvelles lignes F inclinées; la première contient $d(be)$, la seconde $d(ce)$, et ces deux points en ligne droite avec $s''(bc)$, donnent la dernière ligne F inclinée. Ce second plan contient six points, tant s que d , dont un sur chaque arête, et quatre lignes F , dont une sur chaque face du tétraèdre $eabc$.

Si l'on appliquait les mêmes raisonnemens aux trois autres lignes F horizontales, on trouverait en tout huit plans, ayant deux à deux pour trace horizontale l'une des quatre lignes F horizontales; que chacun de ces huit plans contient six points s ou d , dont un sur chaque arête, et quatre lignes F , dont une sur chaque face du tétraèdre. Nous désignerons ces plans par FF , afin de rappeler qu'ils sont déterminés par des lignes F ; et comme il ne faut que trois points pour déterminer un plan, toutes les fois que l'on prendra trois points s ou d sur les trois arêtes d'un des angles solides du tétraèdre, le plan mené par ces trois points coupera les trois autres arêtes chacune en un de ses points s ou d , déterminé par le choix des trois premiers.

S'il n'existait que deux lignes F horizontales [55.], il n'y aurait que quatre plans FF ; s'il n'en existait qu'une, il n'y aurait que deux plans FF . Limites des p. = FF .

Si la sphère E était réduite à son centre, les deux points σ et Δ se confondraient avec le point e , et il ne passerait par chaque ligne F horizontale qu'un seul plan FF .

Combinaisons
entre les quatre
contacts.

[65.] Lorsqu'une sphère en touche quatre autres, il y a six combinaisons deux à deux entre les quatre contacts; mais, lorsque pour trois de ces combinaisons les quatre sphères sont employées, les trois autres sont déterminées.

Nous avons vu [60.] que toutes les sphères qui peuvent toucher en même temps trois sphères A, B, C , ont entre leurs trois contacts les mêmes combinaisons que celles des cercles du n.º [56.]; en sorte que chaque contact étant comparé à celui qui a lieu avec la sphère A , ces quatre combinaisons sont exprimées par la notation,

$$A(sB sC), A(sB dC), A(dB sC) \text{ et } A(dB dC);$$

si l'on conçoit qu'une quatrième sphère E soit touchée par une sphère de l'une de ces quatre combinaisons, les contacts avec A et E donneront des AsE et des AdE à combiner avec chacune des quatre combinaisons ci-dessus, ce qui fournit le tableau suivant;

$$A \left\{ \begin{array}{l} sB \left\{ \begin{array}{l} sC \left\{ \begin{array}{l} sE \dots, \text{d'où} \dots A(sB sC sE), \\ dE \dots\dots\dots A(sB sC dE), \end{array} \right. \\ dC \left\{ \begin{array}{l} sE \dots\dots\dots A(sB dC sE), \\ dE \dots\dots\dots A(sB dC dE), \end{array} \right. \\ \\ dB \left\{ \begin{array}{l} sC \left\{ \begin{array}{l} sE \dots\dots\dots A(dB sC sE), \\ dE \dots\dots\dots A(dB sC dE), \end{array} \right. \\ dC \left\{ \begin{array}{l} sE \dots\dots\dots A(dB dC sE), \\ dE \dots\dots\dots A(dB dC dE), \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

qui donne directement sur chacune des trois arêtes ab, ac, ae du tétraèdre le point s ou d de cette arête vers lequel concourt la droite des contacts avec les deux sphères dont cette arête contient les centres, et duquel on peut déduire la combinaison actuelle entre les contacts qui a lieu entre deux des trois sphères B, C, E , en mettant entre ces lettres la lettre s , lorsque dans la notation les lettres qui désignent ces sphères,

GÉOMÉTRIE.

193

sphères, sont précédées de la même lettre, et la lettre d , lorsqu'elles sont précédées de lettres différentes.

Il y a donc en tout huit combinaisons entre les quatre contacts, et toute sphère qui touche en même temps les quatre sphères A, B, C, E , satisfait nécessairement à l'une de ces huit combinaisons.

Les six indicateurs s ou d , déduits de chaque notation, sont précisément les mêmes points que nous avons reconnus être dans un même plan FF [66.]; mais chacun de ces six points est le centre d'une sphère rad. des sphères aux deux contacts correspondans : d'où l'on peut conclure que de toutes les sphères qui touchent en même temps les quatre sphères A, B, C, E , celle qui satisfait à une seule des huit combinaisons, a en même temps pour rad. les six sphères dont les centres, indiqués par la notation, sont dans un plan FF correspondant. Ces six sphères font donc partie de la suite au plan d'un système de sphères rad., et toute sphère aux quatre contacts correspondans fait partie de la suite à l'axe; et a, par conséquent, son centre sur une perpendiculaire à ce plan FF .

Une sphère
chaque combin.
son fait par
d'une suite à l'a:

Mais la sphère O' rad. $ABCE$, 1.^o lorsqu'elle est rad. réc. $ABCE$, a pour radicales chacune des douze sphères S ou D ; et l'espèce rad. de chacune d'elles, par rapport à O' , est la même que pour les sphères aux deux contacts correspondans : 2.^o lorsque la sphère O' est rad. simp. $ABCE$, elle est aussi rad. simp. des douze sphères S ou D ; et dans ce cas, chacune de ces douze sphères est rad. réc. des sphères aux deux contacts correspondans; donc, dans tous les cas, la sphère O' fait partie des huit suites à l'axe, et le point o' , centre de la sphère O' rad. $ABCE$, est sur les huit axes perpendiculaires à chacun des huit plans FF .

La sphère
fait partie de ch:
que suite à l'axe.

Il faudra donc déterminer o' , comme n.^o [12.], et abaisser de ce point des perpendiculaires sur chacun des huit plans FF ; chacune d'elles contiendra le centre de toute sphère qui, touchant en même

temps, les quatre sphères A, B, C, E , aura entre ses quatre contacts la combinaison indiquée par la notation correspondante.

Limites.

Il est évident que le nombre de perpendiculaires se réduit comme celui des plans FF , dans le cas où quelques-unes des sphères données se réduisent à leurs centres; et que, si les quatre sphères y étaient réduites, la question serait ramenée à faire passer une sphère par quatre points.

La sphère A devient un plan.

[66.] Si la sphère A devenait un plan, d'après ce qui a été dit n.º [57.] et [61.], on concevra que l'addition de la sphère E (*fig. 22*) (où elle est projetée verticalement sur un plan perpendiculaire au plan A), donnerait des résultats analogues à ceux que nous venons d'examiner, et que le point o' serait l'intersection de l'axe rad. BCE avec le plan A .

Les sphères A et B deviennent des plans.

[67.] Si les deux sphères A et B devenaient des plans verticaux (*fig. 20*), nous avons vu, n.º [62.], que la sphère C combinée avec ces deux plans, donnait quatre lignes F horizontales qui sont les mêmes que celles des cercles du n.º [58.]. Si l'on concevait une sphère E dans l'espace (*), et que l'on menât son diamètre perpendiculaire à A ; ses deux extrémités seraient les points σ et δ qui, conjointement avec les quatre lignes F horizontales du n.º [58.], détermineraient les huit plans FF .

Le point o' serait l'intersection du plan rad. CE avec la ligne commune aux deux plans A et B .

Les sphères A, B, C deviennent des plans.

[68.] Lorsque les trois sphères A, B, C deviennent des plans, nous avons vu [63.] qu'il pouvait en résulter quatre droites qui contiennent les centres de toutes les sphères tangentes à ces trois plans, et que chacune de ces droites est l'axe d'un cylindre ou d'un cône auquel ces sphères sont inscrites; il faudra donc déterminer successivement une sphère qui, étant inscrite dans l'un de ces cônes (car un cylindre est un

(*) Nous n'avons point tracé les projections de la sphère E ; mais elles ne différeraient en rien de celles de la *fig. 22*.

GÉOMÉTRIE.

195

cône dont le sommet est à une distance infinie), toucherait la sphère E ; et comme les quatre opérations à faire sont les mêmes, nous nous contenterons d'en indiquer une.

Il est évident qu'une sphère inscrite dans l'un des cônes et tangente à E , touche cette sphère en un point de son grand cercle déterminé par le plan passant par l'axe du cône, et que ce plan contient, 1.° l'axe du cône, 2.° le grand cercle de E , 3.° deux arêtes du cône.

Cela posé,

Soit, dans le plan ci-dessus (*fig. 20*), 1.° vv' l'axe du cône, 2.° C le grand cercle de E , 3.° les droites A et B les deux arêtes du cône, tout cercle qui, ayant son centre sur vv' , touchera A , B , C , sera le grand cercle d'une sphère inscrite dans le cône et tangente à la sphère E .

Le nombre de ces cercles ne peut être plus grand que quatre pour le même cône; mais il peut être moindre, selon la position relative de la sphère E et du cône: enfin il serait nul, si la sphère E n'avait aucun point au-dedans de ce cône.

En faisant la même construction par rapport à chacun des quatre cônes, on obtiendrait toutes les sphères cherchées qui pourraient être au nombre de seize.

A cause de la difficulté de choisir les données qui fournissent seize solutions, nous croyons devoir prévenir qu'on y parviendra toujours, en plaçant le sommet commun à tous les cônes au-dedans de la sphère E : on y parviendra encore, en plaçant la sphère E de manière à ce que chaque cône ait avec elle une courbe d'entrée et de sortie sur la même nappe, ou arrachement sur les deux nappes opposées.

Observations.

Si la sphère E était entièrement contenue dans un des quatre cônes, il n'y aurait aucune sphère inscrite dans les trois autres qui pût lui être tangente, et le problème n'aurait que quatre solutions.

Si la sphère E se réduisait à son centre, le problème n'aurait que

196

GÉOMÉTRIE.

deux solutions par rapport au cône dans l'intérieur duquel ce point serait situé.

Enfin, si la sphère E ou le point e étaient entièrement compris dans les espaces que les nappes de cônes laissent entre elles [63.], le problème n'aurait aucune solution.

Les quatre sphères A, B, C, E deviennent des plans.

[69.] Lorsque les quatre sphères A, B, C, E deviennent des plans, les douze plans qui partagent en deux parties égales chacun des angles formés par deux de ces quatre plans, se coupent six à six en huit points, centres de huit sphères tangentes aux quatre plans : mais si deux de ces plans étaient parallèles, il n'y aurait que quatre de ces sphères ; et si trois des plans étaient parallèles ou passaient par la même droite, il n'y en aurait aucune.

Considérations sur un rayon donné comme condition d'un problème.

[70.] On peut encore, dans les conditions qui servent à déterminer un cercle ou une sphère, admettre celle où le rayon serait donné, et il est évident qu'elle ne peut entrer qu'une seule fois dans chaque combinaison de trois ou quatre données ; alors tout cercle ou sphère cherchée a son centre situé en même temps sur une des deux circonférences ou sphères concentriques, à chacune de celles qu'elles doivent toucher, et dont les rayons ne peuvent être que la somme ou la différence du rayon donné avec celui de chacun des cercles ou de chacune des sphères données.

Si l'un des cercles donnés devenait une droite, ou si l'une des sphères devenait un plan, les cercles ou les sphères concentriques seraient remplacés par deux droites ou deux plans parallèles à la droite ou au plan donné, et à une distance égale au rayon donné.

Si l'un des cercles ou l'une des sphères donnés se réduisait à son centre, la somme et la différence des rayons seraient égales, et on n'aurait qu'un seul cercle ou une seule sphère décrit du point donné comme centre avec le rayon donné.

Enfin, lorsque l'on suppose que le rayon donné est zéro, la question

GÉOMÉTRIE.

197

se réduit à déterminer un point, 'et si on le suppose infini, elle est ramenée à déterminer certaine droite ou certain plan; mais on' ne peut plus admettre, parmi les autres conditions, celle de toucher une droite ou un plan donné.

[71.] Toutes les propriétés que nous avons développées dans ce paragraphe, nous ont conduit à déterminer seulement certaines suites rad. de l'une desquelles fait nécessairement partie, tout cercle ou sphère qui satisfait aux conditions de chaque question. Il ne nous reste donc plus, pour arriver aux solutions complètes de ces questions, qu'à découvrir sur chaque suite ceux des cercles ou des sphères qui touchent un des cercles ou une des sphères donnés. Or, toutes ces déterminations ont été faites dans le I.^{er} chapitre, aux n.^{os} [26.], [28.], [40.], [42.] et [43.], où l'on a en même temps eu égard aux cas d'impossibilité qu'elles pouvaient offrir : mais, comme les cercles ou les sphères qu'il s'agit ici de déterminer ont toujours des radicaux à la suite opposée, il est évident qu'ils ne peuvent faire partie des cercles ni des sphères *N* des numéros cités, qui n'ont que des cercles prim. simp. à la suite opposée.

Observations et conclusions sur ce qui précède.

Enfin, dans les n.^{os} [59.], [63.] et [69.], où il n'entre ni points, ni cercles, ni sphères, il n'a pu résulter, pour les solutions des cas qu'ils présentent, aucune propriété rad.; mais elles ont été remplacées par d'autres que nous avons suffisamment développées. Il en est de même du n.^o [70.], qui peut donner lieu à des questions indépendantes des propriétés radicales.

CHAPITRE III.

TABLEAUX de la plupart des Problèmes auxquels on peut appliquer les Principes développés dans les Chapitres précédens, et Discussion complète de trois des Problèmes les plus élevés de ces tableaux.

[72.] LA théorie que nous avons exposée dans les deux premiers

chapitres ayant principalement pour but d'arriver à la détermination d'un cercle qui satisfait à trois conditions, et d'une sphère qui en remplit quatre, nous avons réuni les conditions qui peuvent se présenter le plus souvent, et nous les avons combinées de toutes les manières possibles pour en former les tableaux suivans. Ils offrent aussi le nombre des solutions dont chaque problème résultant d'une combinaison est susceptible dans le cas le plus général.

Indication des conditions qui entrent dans l'énoncé des problèmes.

Nous conviendrons, avant tout, de désigner par une lettre particulière chacune des conditions que doit remplir le cercle ou la sphère cherchée, afin d'abrégier l'exposé des combinaisons que l'on peut faire de ces conditions.

Les lettres suivantes signifieront que le cercle ou la sphère cherchée, doit,

- 1.° *p*, Passer par un point donné;
- 2.° *l*, Toucher une droite donnée;
- 3.° *c*, Toucher un cercle donné;
- 4.° *r*, Avoir un rayon donné. Cette condition ne peut entrer qu'une fois dans chaque combinaison.
- 5.° *t*, Toucher une droite ou un cercle en un point donné. Cette condition équivaut à deux pour le cercle comme pour la sphère.
- 6.° *d*, Avoir son centre sur une droite donnée. Cette condition ne peut être employée que deux fois dans chaque combinaison. Nous ne l'emploierons jamais par rapport à la sphère, parce qu'elle équivaut à avoir son centre en même temps sur deux plans.
- 7.° *P*, Toucher un plan donné;
- 8.° *s*, Toucher une sphère donnée;
- 9.° *T*, Toucher un plan ou une sphère en un point donné, ce qui équivaut à trois conditions;
- 10.° *D*, Avoir son centre dans un plan donné. Cette condition ne peut être employée plus de trois fois dans chaque combinaison.

GÉOMÉTRIE.

199

Nous ne faisons point entrer comme condition d'avoir un centre donné, puisqu'elle équivaut, par rapport au cercle, à avoir son centre sur deux droites, et, par rapport à la sphère, à avoir son centre sur trois plans.

Tableaux qui offrent toutes les combinaisons admissibles entre les données précédentes.

CERCLES DÉTERMINÉS PAR TROIS CONDITIONS.					
N. ^{os}	COMBINAISONS.	SOLUTIONS.	N. ^{os}	COMBINAISONS.	SOLUTIONS.
1.	<i>tp</i>	I.	18.	<i>pcd</i>	2.
2.	<i>td</i>		19.	<i>lld</i>	
3.	<i>rdd</i>		20.	<i>cdd</i>	
4.	<i>ppp</i>		21.	<i>rpc</i>	4.
5.	<i>ppd</i>		22.	<i>rll</i>	
6.	<i>pdd</i>		23.	<i>rcd</i>	
7.	<i>tr</i>	2.	24.	<i>plc</i>	
8.	<i>tl</i>		25.	<i>pcc</i>	8.
9.	<i>tc</i>		26.	<i>lll</i>	
10.	<i>rpp</i>		27.	<i>lcd</i>	
11.	<i>rpl</i>		28.	<i>ccd</i>	
12.	<i>rp d</i>		29.	<i>rlc</i>	8.
13.	<i>rld</i>		30.	<i>rcc</i>	
14.	<i>ppl</i>		31.	<i>lle</i>	
15.	<i>ppc</i>		32.	<i>lcc</i>	
16.	<i>pll</i>		33.	<i>ccc</i>	
17.	<i>pld</i>				

SPHÈRES DÉTERMINÉES PAR QUATRE CONDITIONS.					
N. ^{os}	COMBINAISONS.	SOLUTIONS.	N. ^{os}	COMBINAISONS.	SOLUTIONS.
1.	<i>Tp</i>	1.	39.	<i>psDD</i>	2.
2.	<i>TD</i>		40.	<i>PPDD</i>	
3.	<i>tt</i>		41.	<i>sDDD</i>	
4.	<i>tpp</i>		42.	<i>trs</i>	4.
5.	<i>tpD</i>		43.	<i>tPs</i>	
6.	<i>tDD</i>		44.	<i>tss</i>	
7.	<i>rDDD</i>		45.	<i>rpps</i>	
8.	<i>pppp</i>		46.	<i>rpPs</i>	
9.	<i>pppD</i>		47.	<i>rpsD</i>	
10.	<i>ppDD</i>		48.	<i>rPPD</i>	
11.	<i>pDDD</i>		49.	<i>rsDD</i>	
12.	<i>PDDD</i>		50.	<i>ppPs</i>	
13.	<i>Tr</i>	2.	51.	<i>ppss</i>	
14.	<i>TP</i>		52.	<i>pPPs</i>	
15.	<i>Ts</i>		53.	<i>pPsD</i>	
16.	<i>trp</i>		54.	<i>pssD</i>	
17.	<i>trP</i>		55.	<i>PPPD</i>	
18.	<i>trD</i>		56.	<i>PsDD</i>	
19.	<i>tpP</i>		57.	<i>ssDD</i>	
20.	<i>tps</i>		58.	<i>rpss</i>	8.
21.	<i>tPP</i>		59.	<i>rPPP</i>	
22.	<i>tPD</i>		60.	<i>rPsD</i>	
23.	<i>tsD</i>		61.	<i>rssD</i>	
24.	<i>rppp</i>		62.	<i>pPss</i>	
25.	<i>rppP</i>		63.	<i>psss</i>	
26.	<i>rppD</i>		64.	<i>PPPP</i>	
27.	<i>rpPP</i>		65.	<i>PPsD</i>	
28.	<i>rpPD</i>		66.	<i>PssD</i>	
29.	<i>rpDD</i>		67.	<i>ssssD</i>	
30.	<i>rPDD</i>	16.	68.	<i>rPPs</i>	
31.	<i>pppP</i>		69.	<i>rPss</i>	
32.	<i>ppps</i>		70.	<i>rsss</i>	
33.	<i>ppPP</i>		71.	<i>PPPs</i>	
34.	<i>ppPD</i>		72.	<i>PPss</i>	
35.	<i>ppsD</i>		73.	<i>Psss</i>	
36.	<i>pPPP</i>		74.	<i>ssss</i>	
37.	<i>pPPD</i>				
38.	<i>pPDD</i>				

+ p p p a

Comme

GÉOMÉTRIE.

201

Comme nous avons résolu et discuté tous ces problèmes, nous avons pu mettre avec quelque certitude à côté de chacune des combinaisons dont ils résultent, le nombre des solutions qu'ils peuvent généralement recevoir; mais il ne faut pas perdre de vue que, pour des données prises au hasard, il arrive souvent que le nombre de solutions est moindre que celui qui est indiqué par les tableaux, et qu'il est même assez difficile, par rapport à quelques-uns de ces problèmes, de choisir les données qui permettent toutes ces solutions. Il faut donc, dans la discussion de chacun d'eux, indiquer le caractère auquel on reconnaît que certaines solutions s'anéantissent.

Nous ne donnerons que trois exemples de ces discussions, en choisissant, pour le cercle, les conditions d'en toucher trois autres, et pour la sphère, celles d'en toucher quatre autres. Ayant par-tout considéré le point, la droite et le plan comme des limites de cercle ou de sphère, on peut regarder la plupart des autres problèmes comme des cas particuliers de ceux-ci. Enfin nous donnerons pour dernier exemple la solution de ce problème : Trouver une sphère d'un rayon donné qui touche en même temps trois sphères aussi données.

Les deux derniers problèmes ayant pour conditions communes celle de toucher trois sphères données, nous ferons précéder leurs solutions d'une discussion relative à la nature de la courbe formée sur chacune des sphères données par la suite des points de contact d'une sphère variable qui touche constamment les trois sphères données, d'autant que l'on aura souvent besoin, pour les solutions des autres problèmes, de faire une discussion préliminaire de même nature.

PROBLÈME I.

[73.] Trouver un cercle qui touche en même temps trois cercles donnés A , B et C (*fig. 23, 24 et 25*).

SOLUTION:

Après avoir déterminé les quatre lignes F du n.^o [55.], puis le point.
XVI.^e Cahier.

cc

o , centre du cercle O rad. ABC n.° [10.], on abaissera du centre rad. les perpendiculaires of , og , oh et oi sur les quatre lignes F (*). Chacune de ces perpendiculaires contiendra le centre de tout cercle qui satisfait à la combinaison correspondante entre les contacts, et indiquée par les points s et d de la ligne F sur laquelle la perpendiculaire est abaissée [56.].

Cela posé, il peut arriver que le point o soit au-dehors des cercles A , B , C (fig. 23 et 25), ou au-dedans (fig. 24).

Dans le premier cas (fig. 23 et 25), on aura O rad. réc. ABC ; on mènera l'axe rad. AO , qui est la droite mk , passant par les points d'intersection des deux cercles A et O .

Cette droite coupera $ss's''$ en k , $sd'd''$ en l , $ds'd''$ en m et $dd's''$ en n , et chacun de ces points sera le centre d'un cercle rad. AO .

Le point k sur $ss's''$ (fig. 23 et 25) est le centre d'un cercle K [28.] rad. OA , ainsi que des cercles de la suite opposée dont tout cercle $A(sBsC)$ fait partie [56.]: donc, si du point k on mène les deux tangentes kp et kp' [28.], les deux points p et p' seront les contacts avec A de deux cercles $A(sBsC)$; car ces cercles toucheront le cercle A , et comme ils ont S et S' pour rad., ils ne pourront toucher A , sans toucher les deux cercles B et C [47.]: mais chacun d'eux a en même temps son centre sur of et sur l'un des rayons ap ou ap' ; donc v et v' sont les centres de deux cercles $A(sBsC)$, dont vp et $v'p'$ sont les rayons. Cette combinaison fournit donc deux solutions.

Nous remarquerons que le cercle O est rad. commun aux cercles A et K , en sorte que la droite pp' prolongée passe par le point o .

On prouverait de la même manière (fig. 25), 1.° que le point l et les deux tangentes lq et lq' déterminent les deux points q et q' contacts avec A de deux cercles $A(sBdC)$, dont les centres x et x' sont sur og ,

(*) Nous n'avons tracé sur les fig. 23 et 24, que la perpendiculaire of et les constructions relatives à la combinaison correspondante entre les contacts; mais on aura l'idée de l'ensemble des constructions, en jetant les yeux sur la fig. 25, où elles se trouvent réunies.

GÉOMÉTRIE.

203

et que la droite qq' passe par le point o ; 2.^o que le point m et les deux tangentes mr et mr' déterminent les deux points r et r' contacts avec A de deux cercles $A(dBsC)$, dont les centres y et y' sont sur oh ; 3.^o enfin les deux tangentes nt et nt' déterminent les deux points t et t' contacts avec A de deux cercles $A(dBdC)$, dont les centres z et z' sont sur oi . Ce problème a donc en tout huit solutions.

Les exemples que nous avons choisis admettent toutes les solutions; mais il peut arriver qu'un ou plusieurs des points k, l, m et n se trouvent au-dedans de A ; alors on ne peut plus mener par ces points de tangentes au cercle A [28.], il n'existe aucun cercle tangent pour les combinaisons correspondantes entre les contacts. Si les quatre points k, l, m et n se trouvaient au-dedans de A , aucun cercle ne pourrait satisfaire aux conditions du problème. Enfin, dans le cas particulier où l'un de ces points se trouverait à la circonférence de A , il y aurait deux solutions qui se confondraient.

Dans le second cas, où le point o est au-dedans des cercles A, B et C (fig. 24), on a

O rad. simp. $ABCSSS''DD'D''$ [48.];

et comme le cercle O appartient aux quatre suites, de l'une desquelles fait nécessairement partie tout cercle demandé, il en résulte que ce cercle O étant un cercle N , chacune d'elles contient les cercles M et N du n.^o [14.].

Il faudra donc construire l'axe primitif particulier de A considéré comme M , et O considéré comme N du n.^o [20.]; cet axe mk , entièrement au-dehors de A , coupera les lignes F aux points k, l, m et n , desquels on pourra toujours mener des tangentes au cercle A ; en sorte que, dans ce cas, le problème a toujours huit solutions.

Le cercle O étant rad. simp. des cercles A et K , la droite pp' passe encore par le point o , il en serait de même des trois autres lignes analogues à pp' .

Nous remarquerons que, dans le cas dont il s'agit, la construction de

l'axe mk est très-simple ; car il suffit de mener par un des points t ou t' d'intersection des deux cercles A et O la tangente th , dont le point de rencontre h avec la droite ao appartient à l'axe mk comme centre d'un cercle réc. A et prim. simp. O ; d'ailleurs, la direction de cet axe étant perpendiculaire à la droite ao , il se trouve déterminé par le seul point h .

Il est facile de voir que si l'on eût construit l'axe rad. ou l'axe prim. particulier des cercles B et O , on eût obtenu des points k' , l' , m' et n' , au moyen desquels on eût déterminé sur B les contacts des cercles ci-dessus, et que la même observation s'applique au cercle C .

On saisira de même facilement, que toute droite qui réunit les points de contact des deux cercles résultant de la même combinaison avec l'un quelconque des cercles donnés, est analogue à pp' , et passe par le point o . Ces lignes, au nombre de douze (dont quatre sur chacun des cercles donnés), réunies aux quatre droites de centres forment seize lignes importantes, qui passent par le centre radical des cercles donnés. Il en est de même, lorsque les cercles donnés deviennent des points ou des droites.

LEMME.

[74.] *Étant données trois sphères A , B et C , la courbe formée sur chacune d'elles par la suite des points de contact d'une sphère variable, est un cercle.*

DÉMONSTRATION.

Si l'on choisit pour plan horizontal celui des trois centres a , b , c , et si l'on suppose que les cercles A , B , C , S , S' , S'' , D , D' et D'' du n.º précédent, deviennent des sphères, les plans verticaux dont les traces sont of , og , oh et oi , deviendront chacun le plan principal d'une suite à laquelle appartiennent toutes les sphères aux trois contacts correspondans [60,], et ayant pour axe opposé celle des lignes F à laquelle il est perpendiculaire. Les cercles K , L , M et N deviennent des sphères dont

GÉOMÉTRIE.

205

chacune est rad. A , et de toutes les sphères de la suite au plan sur l'axe opposé de laquelle elle a son centre.

Lorsque les points k, l, m et n sont au-dehors de A , chacun d'eux est le centre d'une sphère rad. réc. A , dont l'intersection avec A est le lieu des contacts des sphères de la combinaison correspondante [43.], d'où il résultera sur la sphère A ,

1.° Un petit cercle vertical dont le diamètre est pp' (fig. 23, 24 et 25), sur lequel se trouveront tous les points de contact avec A des sphères $A(sBsC)$: le plan de ce petit cercle passe par la verticale OO . (Il en est de même des trois suivans.)

2.° (fig. 25). Un petit cercle vertical qq' , lieu des contacts des sphères $A(sBdC)$;

3.° Un petit cercle rr' , lieu des contacts des sphères $A(dBsC)$;

4.° Enfin un petit cercle tt' , lieu des contacts de la sphère A et des sphères $A(dBdC)$.

Lorsqu'un ou plusieurs des points k, l, m et n sont au-dedans de A , il n'existe aucune sphère de la combinaison correspondante entre les trois contacts.

PROBLÈME II.

[75.] Mener une sphère tangente à quatre sphères données A, B, C, E (fig. 23) (*).

SOLUTION.

Soient a, b et c dans le plan horizontal, et e dans l'espace les centres des sphères données, et soit pris pour plan vertical celui qui passe par

(*) Les dimensions des *planches* ne nous ont pas permis de conserver dans les *figures*, toutes les constructions que nous avons faites sur les *épreuves* jointes au *mémoire* manuscrit; d'ailleurs, nous avons cru suffisant, et même plus clair, d'indiquer des constructions fondées sur les premiers élémens de la géométrie descriptive. Nous nous sommes même bornés, dans ces indications, à la seule fig. 23; mais il sera facile d'appliquer les raisonnemens à tous les cas qui peuvent se présenter. La même observation s'étend au n.° [76.]

la ligne des centres ae . On déterminera d'abord le centre o' de la sphère O' rad. $ABCE$, comme n.º [12.], puis sur la droite ae les deux points σ et δ [64.]. Si nous admettons d'ailleurs toutes les constructions du n.º précédent, nous aurons quatre lignes F horizontales par chacune desquelles on mènera deux plans, l'un passant par σ et l'autre par δ ; puis, du point o' , on abaissera des perpendiculaires sur ces plans : chacune de ces huit perpendiculaires sera l'axe d'une suite de sphères radicales de laquelle fait partie toute sphère cherchée, lorsqu'elle satisfait à la combinaison entre les quatre contacts indiqués par les six points s ou d du plan sur lequel la perpendiculaire est abaissée.

Cela posé, les sphères $A(sBsC \dots sE)$, ainsi que $A(sBsC \dots dE)$, satisfaisant à la combinaison $A(sBsC)$, ne pourront toucher A qu'en des points du petit cercle pp' : il n'y aurait donc point de solution correspondante à ces deux combinaisons, si le cercle pp' n'existait pas ; c'est-à-dire, si le point k était au-dedans de la sphère A . Mais en le supposant au-dehors, on déterminerait chaque sphère tangente de l'une et l'autre des deux combinaisons ci-dessus par les constructions suivantes :

1.º La perpendiculaire que l'on abaisserait du point o' sur le plan $ss's''\sigma$ contenant le centre de chacune des premières ; si, par cette perpendiculaire et le centre a , on menait un plan, il contiendrait le point de contact de chaque sphère de cette combinaison avec la sphère A , et couperait le plan du cercle pp' suivant une droite, qui passerait par le point o' (puisque les deux plans qui déterminent cette droite, passent par ce point). Si cette droite coupait le cercle pp' , chacun des deux points d'intersection serait sur A le contact d'une sphère $A(sBsC) \dots sE$; et dans le cas où ces intersections n'auraient pas lieu, la position de la sphère E serait telle, qu'il n'existerait aucune sphère qui satisfît à cette combinaison entre les quatre contacts. Enfin, si cette droite touchait le cercle pp' , il y aurait deux solutions qui se confondraient.

Maintenant, si l'on menait par les deux points de contact des rayons

de la sphère A , ils couperaient la perpendiculaire abaissée du point o' sur le plan $ss's''\sigma$, chacune au centre d'une sphère $A(sBsC\dots sE)$.

2.^o La perpendiculaire que l'on abaisserait du point o' sur le plan $ss's''\dots\Delta$, contiendrait les centres des sphères $A(sBsC\dots dE)$; et si, par cette perpendiculaire et le centre a , on menait un plan, il couperait celui du cercle pp' suivant une droite passant par o' , et qui par ses intersections avec pp' (lorsqu'elles auraient lieu) déterminerait les contacts avec la sphère A de deux sphères $A(sBsC\dots dE)$.

Il peut donc y avoir quatre sphères qui satisfassent aux conditions du problème, et dont les contacts avec A soient situés sur le cercle pp' .

On concevra facilement que l'on obtiendrait de la même manière, sur chacun des cercles qq' , rr' , tt' (fig. 25), les contacts avec A de quatre nouvelles sphères; que chacune des huit combinaisons entre les quatre contacts peut fournir deux solutions, et que ce problème est susceptible d'en avoir seize; mais elles peuvent s'anéantir quatre à quatre par la détermination des points k , l , m et n , puis deux à deux, lorsqu'un des petits cercles de contact n'est pas coupé par l'une des droites, dont les intersections avec ce cercle déterminent les contacts.

Nous remarquerons que ce problème a constamment seize solutions, lorsque les sphères données ont une sphère rad. simp. commune, parce qu'alors les huit suites à l'axe de l'une quelconque desquelles toute sphère cherchée fait partie, ne contiennent que des sphères M et N [30.]; et que, dans ce cas, chacune d'elles fournit toujours deux sphères M tangentes [42.].

Il est facile de voir que l'on peut prendre pour plan horizontal celui qu'on veut parmi les quatre qui contiennent trois centres des sphères données, et établir les constructions sur celle des sphères données que l'on voudra. Quelque choix que l'on fasse, la position du centre rad. ne changera pas, et toute droite qui réunira les points de contact des deux sphères tangentes de la même combinaison, avec une des sphères

données, passera par le point o' . Ces lignes, au nombre de trente-deux (dont huit pour chacune des sphères données), réunies avec les huit lignes de centres, forment quarante droites qui passent toutes par le centre rad. des sphères données.

On voit par-là quelle est l'influence du centre rad. dans les questions relatives aux contacts, puisqu'on la retrouve encore lorsque les sphères données deviennent des plans ou des points.

PROBLÈME III.

[76.] Trouver une sphère d'un rayon donné qui touche en même temps trois sphères aussi données.

SOLUTION.

D'après ce qui a été dit n.º [74.], toute sphère tangente aux trois sphères A , B et C pour la combinaison $A(sBsC)$, par exemple, ne peut toucher la sphère A qu'en un point du petit cercle pp' , et doit avoir son centre dans le plan vertical, dont la trace est of (fig. 23).

Cela posé,

Si l'on conçoit le cône app' , dont le sommet est en a , et qui a pour base le cercle pp' ; si, sur l'une de ses arêtes horizontales pp , l'on porte, à partir du point p , les parties pq et pr égales aux rayons donnés, et si par les points q et r on mène les plans qq' et rr' parallèles au plan pp' , leurs intersections avec le cône app' donneront deux cercles qui contiendront tous les centres des sphères du rayon donné, et tangentes à la sphère A chacune en un point du cercle pp' . Mais, parmi ces dernières, il n'y a que celles dont les centres sont situés dans le plan of qui touchent en même temps les trois sphères données : or, chacun des deux cercles qq' et rr' peut être coupé par le plan of en deux points et donner deux solutions, ce qui en fournirait quatre parmi les sphères $A(sBsC)$. Mais, si une ou les deux intersections ci-dessus n'avaient pas lieu, cette partie du problème ne donnerait que deux ou aucune solution.

GÉOMÉTRIE.

209

Il est facile d'appliquer les mêmes raisonnemens à chacune des quatre combinaisons du n.° [74.], et de voir que ce problème peut avoir seize solutions dans le cas le plus général.

Si l'on voulait que le rayon donné fût zéro, la sphère cherchée serait un point, et ce problème, qui alors ne serait possible que dans le cas que présente la *fig. 24*, n'aurait plus que deux solutions données par les points z et z' de la *fig. 8*. En effet, un point placé sur une sphère la touche à-la-fois intérieurement et extérieurement, en sorte que toutes les combinaisons entre les contacts se confondent. Limites du rayon donné.

Si l'on voulait que le rayon donné fût infini, la sphère cherchée deviendrait un plan, et la solution de ce problème ne serait possible que dans le cas où le cône app' (ou ses analogues) fournirait une arête parallèle au plan of , ce qui dépend de l'intersection de ces deux surfaces.

Lorsque cette intersection est une ellipse, il n'y a point de solution correspondante; mais alors la droite F , à laquelle le plan of est perpendiculaire, coupe les grands cercles horizontaux des sphères données [60.].

Lorsque cette section est une parabole, le cône app' ne fournit qu'une arête parallèle au plan of , alors la droite F correspondante est tangente aux trois grands cercles horizontaux, et les trois contacts de cette droite sont les mêmes que ceux d'un plan unique, vertical et tangent aux trois sphères données.

Enfin lorsque la section est une hyperbole, le cône app' fournit deux arêtes parallèles au plan of ; la ligne F correspondante qui alors ne coupe pas les grands cercles horizontaux, est la trace commune à deux plans tangens aux trois sphères données.

On peut faire les mêmes raisonnemens pour chacune des quatre combinaisons, en sorte que ce problème peut avoir huit solutions dans le cas le plus général.

Nous observerons que, pour conserver l'analogie entre les combinaisons des contacts, il faut considérer comme contacts semblables, par

XVI. Cahier.

dd

rapport à un plan, ceux de deux sphères situées d'un même côté par rapport à ce plan, et comme contacts différens, ceux de deux sphères situées de côtés opposés, par rapport au plan tangent commun.

Conclusions gé-
nérales.

[77.] Les exemples que nous venons de développer nous ont paru suffisans pour diriger dans les solutions de tous les problèmes relatifs aux contacts; car, si l'on supposait que les cercles ou les sphères données fussent remplacés par des points, des droites ou des plans, on trouverait dans le second chapitre, les moyens de déterminer le centre rad., les lignes F et les plans FF dans chacune de ces dernières circonstances. Or, ces constructions une fois établies, la marche de la solution ne diffère en rien de celle que nous avons suivie dans les exemples précédens.

Dans le cas où les données présenteraient une droite qui contiendrait le centre du cercle cherché, les deux autres données fourniraient un cercle S et un cercle D , qui seraient l'un ou l'autre radicaux du cercle cherché. La droite donnée serait donc alors l'axe commun à deux suites radicales de l'une desquelles fait partie le cercle cherché; la première, déterminée par la droite donnée et le cercle S [17.]; la seconde par la même droite donnée et le cercle D .

Enfin, si les données présentaient un plan qui contînt le centre de la sphère cherchée, ce plan couperait chacun de ceux désignés par of , og , oh et oi , n.º [74.], suivant une droite par laquelle, et par le centre de la sphère A , on mènerait un plan qui serait entièrement analogue à l'un de ceux que nous avons supposés menés n.º [75.] par les perpendiculaires abaissées du point o' sur chacun des plans FF .

Il paraît donc inutile de donner un plus grand nombre d'exemples; et même nous avons cru devoir nous arrêter ici, afin que l'on puisse juger par soi-même de la facilité avec laquelle on applique les mêmes principes aux solutions des autres problèmes.

D'après le rapport de MM. Poisson et Arago, la Classe a arrêté l'impression de ce Mémoire dans son *Recueil des Savans étrangers*.

Nota. Afin de mettre à portée de saisir plus facilement l'ensemble des propositions qui font l'objet de ce Mémoire, nous avons cru devoir indiquer l'ordre dans lequel elles se succèdent, en réunissant les principaux énoncés dans cette espèce de table.

CHAPITRE I.^{er}

Propriétés géométriques des Cercles radicaux, des Sphères radicales, et de leurs suites.

§. I.^{er} Notions préliminaires sur les Cercles radicaux et les Sphères radicales.

- [1.] Cercles radicaux : il y en a de deux espèces.
- [2.] Cercles rad. réc., prim. réc., rad. simp., prim. simp.
- [3.] Sphères rad. réc., prim. réc., rad. simp., prim. simp.
- [4.] Cercles et sphères prim. et rad. considérés dans leurs limites.
- [5.] Relations radicales d'un cercle ou d'une sphère comparée à deux autres.
- [6.] Cercles rad. communs à deux autres. — Axe rad. des cercles.
- [7.] et [8.] Construction de l'axe rad.
- [9.] Sphères rad. communes à deux autres. — Plan rad.
- [10.] Cercle rad. commun à trois autres. — Centre rad. des cercles.
- [11.] Sphères rad. communes à trois autres. — Axe rad. des sphères.
- [12.] Sphère rad. commune à quatre autres. — Centre rad. des sphères.
- [13.] Discussion des limites au maximum des n.^{os} [10.], [11.] et [12.]

§. II. Suites radicales des Cercles.

- [14.] Description des suites rad. des cercles. — Système de cercles rad. — Suite des cercles P. — Axe pp. — Suite des cercles M et N. — Axe mn.
- [15.] Système rad. par contact.
- [16.] Propriété des cercles M.
- [17.], [18.], [19.] et [20.] Diverses déterminations d'un système de cercles rad. par deux conditions.
- [21.] Relations rad. des cercles de chaque suite avec ceux de la suite opposée.

- [22.] *Description des cercles de chaque suite.*
- [23.] *Limites des cercles de chaque suite rad.*
- [24.] *Cercle de chaque suite déterminé par une troisième condition. — Rayon donné.*
- [25.] *Rad. d'un cercle donné A.*
- [26.] *et [27.] Limites du cercle A.*
- [28.] *Tangent à un cercle donné.*
- [29.] *Observations et conclusions sur ce qui précède.*

§. III. Suites radicales des Sphères.

- [30.] *Description des suites rad. des sphères. — Système de sphères rad. — Suite au plan. — Suite à l'axe. — Plan ppp et axe mn. — Plan mnm et axe pp. — Plan principal et axe principal.*
- [31.] *Système de sphères rad. par contact.*
- [32.] *Un système de sphères rad. peut être déterminé par deux ou trois conditions.*
- [33.] *Suite au plan déterminée par deux conditions.*
- [34.] *Suite à l'axe déterminée par trois conditions.*
- [35.] *Relations des sphères d'un système rad.*
- [36.] *Description des sphères de chaque suite. — Limites de ces sphères.*
- [37.] *Conclusion sur ce qui précède.*
- [38.], [39.], [40.], [41.], [42.] *et [43.] Sphères de chaque suite assujetties à une nouvelle condition. — Une sphère déterminée sur la suite à l'axe. — Un nombre infini de sphères sur la suite au plan. — Limites.*
- [44.] *Observations et conclusions sur ce qui précède.*

CHAPITRE II.

Propriétés géométriques des Cercles et des Sphères qui se touchent.

§. I.^{er} Cercles et Sphères qui en touchent deux autres.

- [45.] *Propriété fondamentale.*
- [46.] *Propriétés communes aux cercles V ou X qui en touchent deux autres. — Propriétés des points s et d.*

GÉOMÉTRIE.

213

[47.] *Le point s est le centre d'un cercle S rad. de tous les cercles V, et le point d celui d'un cercle D rad. de tous les cercles X.*

[48.] *Les quatre cercles A, B, S et D font partie d'une même suite rad.*

[49.], [50.] et [51.] *Limites.*

[52.] et [53.] *Sur le lieu des centres des cercles qui en touchent deux autres.*
— *Limites.*

[54.] *Propriétés des sphères qui en touchent deux autres.*

§. II. *Cercle ou Sphères tangentes à trois autres, et Sphère tangente à quatre autres.*

[55.] *Trois cercles étant donnés. Il y a sur chacune des trois lignes de centres un point s et un point d. — Les six points s ou d sont trois à trois en ligne droite. — Ces droites sont désignées par la lettre F.*

[56.] *Il y a quatre combinaisons entre les trois contacts. — Notation particulière à ces combinaisons. — Un cercle de chaque combinaison fait partie d'une suite rad. déterminée. — Le cercle O fait partie de chacune de ces quatre suites.*

[57.], [58.] et [59.] *Discussion des limites.*

[60.] *Sphères tangentes à trois autres. — Les mêmes combinaisons entre leurs contacts que par rapport aux cercles. — Les sphères de chaque combinaison font partie d'une suite au plan, et chacun de leurs plans principaux passe par l'axe OO rad. ABC. — Les lignes F deviennent des axes principaux.*

[61.], [62.] et [63.] *Limites des sphères données.*

[64.] *Sphère tangente à quatre autres. Il y a seize lignes F, dont quatre horizontales. — Chacune des lignes F horizontale est rencontrée par six des douze lignes F inclinées, et est la trace de deux plans FF.*

[65.] *Il y a huit combinaisons entre les quatre contacts. — Notation particulière à ces combinaisons. — Une sphère de chaque combinaison fait partie d'une suite à l'axe. — La sphère O' rad. ABCE fait partie de chacune des huit suites.*

[66.], [67.], [68.] et [69.] *Limites des sphères données.*

[70.] *Considération sur un rayon donné comme condition.*

[71.] *Observations et conclusions.*

CHAPITRE III.

Tableaux de la plupart des problèmes auxquels on peut appliquer les principes développés dans les chapitres précédents, et discussion complète de trois des problèmes les plus élevés de ces tableaux.

[72.] *Lettres servant à indiquer les diverses conditions. — Tableau de trente-trois problèmes sur le cercle. — Autre tableau de soixante-quatorze problèmes sur la sphère.*

[73.] Problème I.^{er} *Trouver un cercle qui touche en même temps trois cercles donnés.*

[74.] Trois sphères étant données, *déterminer sur l'une d'elles la courbe formée par la suite des points de contact des sphères qui touchent les trois sphères données.*

[75.] Problème II. *Trouver une sphère qui touche quatre sphères données.*

[76.] Problème III. *Trouver une sphère d'un rayon donné qui touche en même temps trois sphères aussi données.*

[77.] *Conclusions générales.*



Questions de géométrie élémentaire

M. Desboves,

deuxième édition, Delagrave 1875

XVI. Décrire un cercle tangent à trois cercles donnés.

Quelques cas particuliers du problème des cercles tangents ont déjà été traités, mais nous allons faire connaître une solution générale, qui est encore applicable lorsqu'un ou plusieurs des cercles donnés sont remplacés par des droites ou des points.

Plusieurs cas de figure peuvent se présenter : le cercle demandé peut être tangent, intérieurement ou extérieurement, aux deux cercles donnés ; envelopper un ou deux des cercles donnés, et toucher extérieurement les deux autres ou le troisième. Mais, pour fixer les idées, nous considérons à la fois les deux cercles qui touchent extérieurement et intérieurement les trois cercles donnés.

On démontre d'abord les trois théorèmes suivants :

1. *Le centre radical des trois cercles donnés est le centre de similitude inverse des deux cercles cherchés ; et en ce point viennent concourir les cordes qui joignent les points de contact des deux cercles cherchés avec chacun des trois cercles donnés.*

En effet, soient o, o', o'' (fig. 198) les centres des trois cercles donnés ; c et c' les centres des cercles cherchés ; a, a', a'' , et b, b', b'' , les points de contact des cercles c et c' avec les trois cercles o, o', o'' . Menons les cordes $ab, a'b', a''b''$, aa', bb' , et prolongeons les deux dernières jusqu'à leur rencontre en S'' .

Lorsque l'on considère les systèmes formés des deux cercles c et c' et de l'un des cercles o, o', o'' , les trois cordes $ab, a'b', a''b''$ sont des droites qui joignent deux centres de similitude, l'un direct, l'autre inverse ; elles devront donc passer par le centre T de similitude inverse des cercles c et c' .

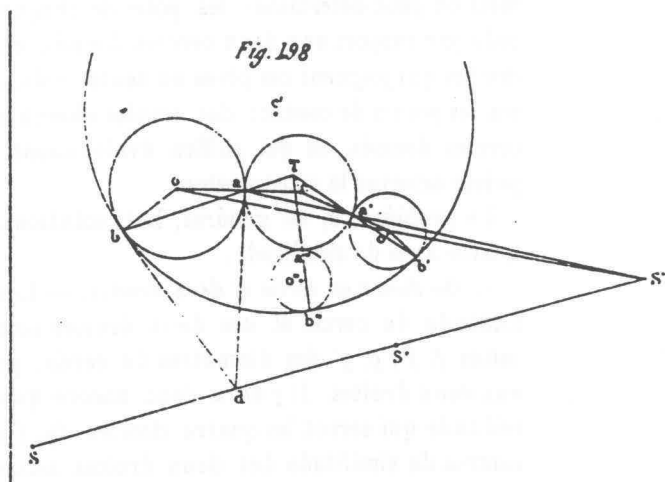
Je dis maintenant que le point T est le centre radical des trois cercles donnés. En effet, lorsqu'on associe successivement les cercles c et c' avec les deux cercles o et o' , les cordes aa', bb' sont des droites qui passent par deux centres de similitude inverse ; elles doivent donc passer par le centre de similitude directe S'' des deux cercles o et o' . Or a et a' , b et b' sont des points, deux à deux, antihomologues sur ces deux cercles, puisque les deux rayons $oa, o'a'$ viennent concourir en c , et les deux rayons ob, ob' en c' : le point de rencontre T des cordes $ab, a'b'$ appartient, par conséquent, à l'axe radical des cercles o et o' (63).

On prouve de même que le point de rencontre de ab et $a''b''$ est sur l'axe radical des cercles o et o'' : le point d'intersection T des trois droites $ab, a'b', a''b''$ n'est donc autre que le centre radical des trois cercles donnés. Mais ce même point est en même temps, d'après la première partie de la démonstration, le centre de similitude inverse des deux cercles c et c' ; le premier théorème est donc démontré.

2. *L'axe de similitude directe des trois cercles donnés est l'axe radical des deux cercles cherchés.*

En effet, T étant le centre de similitude inverse des cercles c et c' , et les points a et b , ainsi que les points a' et b' , étant antihomologues sur ces deux cercles (on le voit comme plus haut), les cordes aa', bb' se coupent sur l'axe radical. Mais leur point de rencontre est justement le centre de similitude directe S'' des deux cercles o et o' ; ce centre de similitude se trouve donc sur l'axe radical des deux cercles c et c' .

On démontre qu'il en est de même des centres de similitude directe S' et S des cercles o et o'', o' et o'' pris, deux à



deux : donc l'axe de similitude directe des cercles o', o'', o'' et l'axe radical des cercles c et c' se confondent.

3. *La corde, qui passe par les points de contact d'un de cercles donnés avec les deux cercles cherchés, contient le pôle de l'axe de similitude directe des trois cercles donnés, pris par rapport à celui de ces trois cercles que l'on considère.*

a et b étant, comme nous l'avons dit tout à l'heure, deux points antihomologues qui sont situés sur les deux cercles c et c' et sur un rayon vecteur partant de l'un de leurs centres de similitude T , les tangentes en ces deux points doivent se couper en d sur l'axe radical SS'' des deux cercles c et c' . Mais les droites ad et bd étant tangentes au cercle o , en même temps qu'aux cercles c et c' , la corde ab est la polaire du point d , et doit, par conséquent, passer par le pôle e de la droite SS'' , pris par rapport au cercle o .

On est maintenant conduit à la solution suivante :

Déterminez le centre radical T et l'axe de similitude directe SS'' des trois cercles donnés ; prenez, par rapport à chacun d'eux, les pôles e, e', e'' de cet axe ; puis menez les droites Te, Te', Te'' qui coupent les trois cercles o, o', o'' en a, b, a', b', a'', b'' : le cercle qui passe par les trois points a, a', a'' , et celui qui passe par les trois autres points b, b', b'' seront les deux cercles demandés.

On trouverait de même deux solutions qui correspondraient à chaque axe de similitude inverse : le problème est donc, en général, huit solutions.

Cas particuliers.

1. *On donne deux cercles et une droite.* — Un cercle et une droite ont deux centres de similitude (67), il y aura donc comme dans le cas de trois cercles, quatre axes de similitude.

L'axe radical d'un cercle et d'une droite, étant cette droite elle-même (8), on aura le centre radical T par l'intersection de la droite avec l'axe radical des deux cercles.

Maintenant le pôle d'une droite, par rapport à une autre droite, est un point à l'infini sur la première droite (28), et, par suite, la droite qui joint ce point au centre radical T est parallèle à la droite donnée, et même est confondue avec elle, puisque le point T lui appartient. On en conclut seulement, ce qu'on savait d'avance, que les points de contact des cercles cherchés avec la droite donnée sont sur cette droite; mais on peut déterminer les pôles de chaque axe de similitude par rapport aux deux cercles donnés, et en tirant des droites qui joignent ces pôles au centre radical T , on connaîtra les points de contact des cercles cherchés avec les deux cercles donnés, ce qui suffira évidemment pour que l'on puisse achever la construction.

Le problème a, en général, huit solutions, puisqu'il y a quatre axes de similitude.

2. *On donne un cercle et deux droites.* — Les centres de similitude du cercle et des deux droites seront aux extrémités f, f', g, g' des diamètres du cercle, perpendiculaires aux deux droites. Il y aura donc encore quatre axes de similitude qui seront les quatre droites $fg, f'g', fg', gf'$; les centres de similitude des deux droites seront alors considérés comme étant à l'infini sur les quatre droites précédentes, ou placés à leur rencontre avec les droites données (69). Le centre radical T sera d'ailleurs le point d'intersection des deux droites données (48).

Pour achever la construction relative à l'un des axes de similitude, on prendra le pôle de cet axe, par rapport au cercle donné, et on tirera la droite qui joint ce pôle au centre radical : on obtiendra ainsi les deux points de contact a et b de deux des cercles cherchés avec le cercle donné o . Tirant alors les droites oa et ob , et les prolongeant jusqu'à leur rencontre avec la bissectrice de l'un des angles des deux droites, on aura les centres des cercles, et, par suite, leurs rayons : les deux cercles sont donc déterminés.

A chacun des trois autres axes correspondent deux cercles qu'on détermine de la même manière que les précédents, et le problème a encore, en général, huit solutions.

3. *On donne deux cercles et un point.* — Les deux cercles ont deux centres de similitude; mais, un point et un cercle n'ayant qu'un seul centre de similitude (63), il n'y aura que deux axes de similitude, et, par suite, seulement quatre solutions, qu'on trouvera comme dans les cas précédents.

4. *On donne un cercle, une droite et un point.* — Les centres de similitude d'un point et d'un cercle ou d'une droite étant confondus avec ce point lui-même, il n'y a que deux axes de similitude, et, par suite, quatre solutions seulement. On n'aura d'ailleurs à prendre que les pôles des deux axes de similitude par rapport au cercle et au point; ce qui suffira pour déterminer les cercles demandés.

5. *Un cercle et deux points.* — Les centres de similitude d'un point et d'un cercle se réduisent à ce point lui-même; il n'y a donc qu'un seul axe de similitude qui est la droite joignant les deux points donnés, et le problème n'a plus que deux solutions qu'on trouve encore comme précédemment.

Il ne reste plus à considérer que les quatre cas où, parmi les données, ne figure aucun cercle; mais ces cas échappent à la méthode, et on les traite directement sans difficulté.

Théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire

par Eugène Catalan, troisième édition,

Paris, Victor Dalmont éditeur, 1879.

p. 116 à 125.

PROBLÈME XXVIII.

Construire un triangle ABC, connaissant la base BC, l'angle opposé A et le rapport des deux derniers côtés.

Fig. 168. Le sommet A appartient à l'arc capable de l'angle donné, décrit sur la base BC.

Supposons menée la bissectrice AED : elle passera au milieu D de l'arc BDC ; de plus, elle doit diviser la base BC en deux segments BE, EC, proportionnels aux deux côtés AB, AC. Il est donc bien facile d'obtenir les points D, E, de cette bissectrice : l'intersection de cette ligne avec l'arc BAC sera le sommet A.

PROBLÈME XXIX.

Décrire une circonférence qui passe par deux points donnés A, B, et qui touche une droite donnée CD.

Voyez le Problème II.

Remarque. Le problème admet ordinairement deux solutions. Pour qu'il soit possible, il faut que les deux points A, B soient d'un même côté de CD.

PROBLÈME XXX.

Décrire une circonférence qui passe par deux points donnés A, B, et qui touche une circonférence donnée I.

Fig. 171. Soit E le point de contact de la circonférence demandée O avec la circonférence donnée I. Soit F le point où la droite AB rencontre la tangente commune EF. Si nous menons une sécante quelconque FDC, nous aurons

$$\overline{FE}^2 = FA.FB = FD.FC;$$

les quatre points A, B, C, D appartiennent donc à la même circonférence. Ainsi, pour résoudre le problème, il faut : décrire une circonférence quelconque passant par les points A, B et coupant la circonférence donnée ; tirer les cordes AB, CD, et les prolonger jusqu'à leur rencontre en F ; enfin, mener par ce point des tangentes FE, FE' à la circonférence donnée. Les points E, E', où cette circonférence touche les deux cercles cherchés, étant connus, le problème s'achève comme celui qui précède.

PROBLÈME XXXI.

Décrire une circonférence O qui passe par un point donné A, et qui touche deux droites MN, PQ.

Que les droites MN, PQ se coupent ou qu'elles soient parallèles, nous pourrions facilement construire leur *axe de symétrie* CD, axe qui sera aussi celui de toute la figure. Si donc nous abaïssons AE perpendiculaire à CD, et que nous prolongions cette droite d'une longueur égale EA', le point A' appartiendra à la circonférence demandée. Il suffira donc de faire passer, par les deux points A, A', une circonférence qui touche la droite PQ : c'est un problème que nous savons résoudre.

PROBLÈME XXXII.

Décrire une circonférence O qui passe par un point donné A, et qui touche deux circonférences données B, C.

Soient D, E les points de contact inconnus. Menons la Fig. 175. corde ED, et prolongeons-la jusqu'à sa rencontre en F avec la ligne des centres. Il est facile de voir que, les deux circonférences B, C se touchant extérieurement en E, ce

point de contact E est un centre de similitude *interne*. De même, les circonférences O, C' ont pour centre de similitude *interne* le point D. Donc (Th. VII) F' est le centre de similitude *externe* des deux circonférences données.

Si nous prolongeons F'DE jusqu'à sa rencontre en L avec la circonférence B, les points D, L seront homologues dans les deux circonférences données; et, en appelant H, H', K, K' les points de rencontre de BC' avec ces deux lignes, nous aurons

$$\frac{FL}{FD} = \frac{FH}{FK'}$$

D'ailleurs, $FL \cdot FH' = FL \cdot FE$;
donc, en multipliant membre à membre,
 $FH' \cdot FK' = FD \cdot FE$.

Cette relation nous apprend que les quatre points H', K', D, E sont sur une même circonférence.

Soit maintenant G le point inconnu où la droite AF rencontre le cercle cherché O. Nous aurons
 $FD \cdot FE = FA \cdot FG$;
d'où, à cause de l'égalité précédente,

$$FH' \cdot FK' = FA \cdot FG.$$

Ainsi, les quatre points A, H', K', G sont situés sur une même circonférence.

Construction. Après avoir mené la ligne des centres BC' et avoir construit le centre de similitude F', on mène AF'. Par les trois points A, H', K' on fait passer une circonférence, laquelle coupe AF' en un point G. Il suffit ensuite de faire passer, par les deux points A, G, une circonférence qui touche l'un des deux cercles donnés : elle touchera en même temps l'autre, et satisfera à la question.

Remarque. Par les points A, G, on peut faire passer deux circonférences tangentes au cercle B. En même temps, l'on peut remplacer le centre de similitude *externe* F' par le centre de similitude *interne*. Donc le problème admet, généralement, quatre solutions.

PROBLÈME XXXIII.

Décrire une circonférence O qui passe par un point donné A, et qui touche une droite donnée BC et une circonférence donnée L.

Fig. 174.

Soit I' le point inconnu où la circonférence cherchée touche la droite BC, et soit D le point de contact des deux circonférences. Menons OI' qui passe par ce point D; joignons le centre inconnu O au point E; menons, par le centre donné L, la droite FKH' perpendiculaire à BC; enfin, tirons les cordons ED, FD, DK.

Le rayon OE, perpendiculaire à la tangente BC, est parallèle à IF'; donc les angles EOD, FID sont égaux comme alternes internes, et les deux triangles isocèles EOD, FID sont semblables. Par suite, les points E, D, F sont sur une même ligne droite. Il résulte de là que l'angle EDK est droit, parce qu'il est supplémentaire de l'angle FDK, inscrit dans un demi-cercle.

Le quadrilatère EDKH' a deux angles opposés droits; donc la circonférence décrite sur EK comme diamètre passerait par les sommets D, H. Nous aurons donc

$$FD \cdot FE = FK \cdot FH.$$

Soit maintenant G le point où la droite connue AF rencontre la circonférence cherchée O. Nous aurons aussi

$$FA \cdot FG = FD \cdot FE.$$

La comparaison de ces deux égalités donne

$$FA \cdot FG = FK \cdot FL.$$

Ainsi, les quatre points A, G, K, L sont situés sur une même circonférence.

On construira donc aisément le point G, après quoi il ne s'agira plus que de faire passer, par les points A, G, une circonférence tangente à la droite BC.

Remarque. Le problème admet, en général, quatre solutions.

PROBLÈME XXXIV.

Décrire une circonférence O qui touche deux droites données AB, AC, et une circonférence donnée I.

Soient N, P, R les points de contact de la circonférence O avec les deux droites données et avec la circonférence I. Menons ON, OP, OR; du point O, décrivons une circonférence qui passe par le centre I de la circonférence donnée: elle coupera les prolongements des droites ON, OP en des points M, Q tels, que $MN = PQ = IR$. Conséquemment, si l'on mène aux droites données AB, AC, des parallèles A'B', A'C' qui en soient distantes d'une longueur égale au rayon IR de la circonférence donnée, ces parallèles seront tangentes à la circonférence OI.

On est donc ramené à trouver le centre O d'une circonférence passant en un point donné I, et tangente à deux droites données A'B', A'C'.

Remarque. Le problème admet, ordinairement, deux solutions.

PROBLÈME XXXV.

Décrire une circonférence tangente à une droite donnée PQ et à deux circonférences données AN, BM.

Il peut arriver plusieurs cas: 1° la circonférence cherchée peut toucher extérieurement les deux circonférences données; 2° elle peut les toucher intérieurement; 3° elle peut toucher l'une d'elles intérieurement et l'autre extérieurement. Ce qui fait, en tout, quatre solutions.

Soit O le centre de la circonférence qui touche la droite PQ et qui est tangente, extérieurement, aux deux circonférences données. Décrivons, du point O comme centre, une circonférence passant par le centre A de la plus petite des deux circonférences données: elle touchera la circonférence décrite du point B comme centre avec un rayon BF égal à la différence des rayons donnés; elle touchera aussi la droite P'Q menée parallèlement à PQ, à une distance de cette droite égale au rayon AD de la plus petite circonférence. La question est donc ramené au Problème XXXIII.

Remarque. La droite P'Q' donnera deux des solutions du problème. Pour avoir les deux autres, on devra prendre la droite P''Q', symétrique de P'Q' relativement à la droite donnée PQ.

PROBLÈME XXXVI.

Décrire une circonférence tangente à trois circonférences données A, B, C.

Première solution. Soit O le centre de la circonférence demandée, et soient M, N, P les points de contact inconnus. Menons OA, OB, OC. Décrivons, du point O comme centre, une circonférence qui passe par le centre B du plus

Fig. 175.

Fig. 177.

petit des trois cercles donnés, et qui coupe les droites OA, OC aux points D, E : elle sera tangente aux cercles qui seraient décrits des points A et C comme centres, avec AD et CE pour rayons. Le problème est donc ramené à celui-ci : *décrire une circonférence OB qui passe par un point donné B, et qui touche deux circonférences données.* Ce dernier problème a été résolu ci-dessus : il admet quatre solutions.

En remplaçant les cercles AD, CE par deux cercles ayant pour rayons, respectivement, AM+BP, CN+BP, on obtiendra les quatre autres circonférences qui satisfont à la question.

Seconde solution. L'élégante solution qu'on va lire est due en partie à Bobillier, en partie à M. Gergonne ; elle est extraite, presque textuellement, de la *Géométrie* du premier de ces deux savants professeurs.

Les circonférences données peuvent être touchées toutes trois extérieurement ou toutes trois intérieurement ; chacune peut être touchée extérieurement et les deux autres intérieurement, ou bien intérieurement et les deux autres extérieurement.

Deux circonférences, qui déterminent sur chacune des trois circonférences données un contact extérieur et un contact intérieur, sont appelées *circonférences conjuguées*.

Considérons les deux circonférences conjuguées *abc*, *a'b'c'*, qui touchent les circonférences données, l'une extérieurement et l'autre intérieurement. Le point de contact *a'* est le centre de similitude directe de *a'b'c'*, *a'a'a''* ; le point *a* est le centre de similitude inverse de *abc*, *aa'a''*. Donc la droite *aa'* doit passer par le centre de similitude inverse de ... , il est du même pour *bb'* et pour *cc'*. Par

Fig. 178.

conséquent, ces trois droites concourent en un point *o*, qui est ce centre de similitude. De plus, si l'on prolonge *aa'* en *s*, et *cc'* en *t*, les droites *os* et *oa'*, *ot* et *oc* seront des droites homologues ; d'où résulte

$$\frac{os}{oa'} = \frac{ot}{oc'}$$

$$\text{ou} \quad os \cdot oc' = oa' \cdot ot.$$

$$\text{On a aussi} \quad oc \cdot ol = os \cdot oa;$$

$$\text{donc} \quad o : oc' = oa \cdot oa' = ob \cdot ob'.$$

Le point *o* est donc le *centre radical* des trois circonférences données.

La droite *ab*, passant par le centre de similitude inverse de *abc*, *aa'a''*, et par le centre de similitude inverse de *abc*, *bb'b''*, doit contenir le centre de similitude directe de *aa'a''*, *bb'b''*. Il en est de même pour *a'b'*. Donc *m* est ce centre de similitude. De même, *m'* est le centre de similitude directe de *bb'b''*, *cc'c''* ; enfin *m''* est le centre de *aa'a''*, *cc'c''*. Donc *mm'm'* est l'axe de similitude directe des trois circonférences données.

A cause de la relation $oa \cdot oa' = oc \cdot oc'$, les quatre points *a*, *a'*, *c*, *c'* sont situés sur une même circonférence ; donc

$$m''a \cdot m'c' = m'a' \cdot m'c'.$$

Ainsi, le point *m''* appartient à l'axe radical des deux circonférences cherchées. On prouverait de la même manière que les points *m'* et *m''* appartiennent à cet axe ; d'où l'on conclut que *mm'm'*, axe de similitude directe des trois circonférences données, est en même temps l'axe radical des deux circonférences cherchées.

Puisqu'il en est ainsi, les tangentes en *a* et *a'* doivent se couper en un point *x* situé sur cette droite ; et il en est de

même pour les tangentes en b, b' , et pour les tangentes en c, c' .

La polaire du point x est aa' ; donc le pôle p de mm'' doit se trouver sur aa' . Ainsi, les pôles de l'axe de similitude directe des trois circonférences données, par rapport à chacune d'elles, sont placés respectivement sur les trois cordes de contact aa', bb', cc' .

De là, cette construction : 1° tracez l'axe de similitude des trois circonférences A, B, C ; 2° cherchez les pôles de cet axe par rapport à chaque circonférence; 3° joignez ces pôles p, p', p'' au centre radical o .

En remplaçant l'axe de similitude directe par chacun des trois axes de similitude inverse, on obtient les trois autres couples de circonférences conjuguées.

PROBLÈME XXXVII.

Décrire une circonférence θ passant par deux points donnés A, B et interceptant, sur un cercle donné C , une corde DE de longueur donnée l .

Fig. 179. Faisons passer, par les points A, B , une circonférence quelconque $ABF'G$, qui coupe en F, G la circonférence donnée C . Les deux cordes AB, FG et la corde inconnue DE se coupent en un même point I (Th. XXVII). Ce point étant obtenu par la construction précédente, il suffira d'inscrire, dans le cercle donné C , une corde DE , de longueur donnée, passant par le point donné I .

PROBLÈME XXXVIII.

Décrire une circonférence I , qui passe par deux points donnés A, B , et qui coupe, suivant un diamètre, une circonférence donnée O .

Ce problème peut être regardé comme un cas particulier Fig. 180. de celui qui précède. On peut aussi le résoudre directement comme il suit.

Si l'on joint le point A au centre O de la circonférence donnée, et qu'on prolonge AO jusqu'à sa rencontre en E avec la circonférence I , on aura $OE \cdot OA = OC \cdot OD = R^2$. On obtient donc le point E en construisant une troisième proportionnelle DE à la droite AO et au rayon R du cercle donné.

PROBLÈME XXXIX.

Trouver sur un arc AB un point C tel, que le rectangle de ses distances aux extrémités de l'arc soit équivalent à un carré donné p^2 .

Si l'on mène le diamètre CD , et qu'on abaisse CE perpendiculaire à AB , on aura, d'après un théorème connu, $AC \cdot CB = CD \cdot CE$ et, par suite, $CD \cdot CE = p^2$. On tire, de cette dernière égalité, $CE = \frac{p^2}{CD}$. La distance du point C à la corde AB étant connue, le problème peut être regardé comme résolu.

PROBLÈME XL.

Par un point A , extérieur à un cercle θ , mener une droite ABC qui soit partagée en moyenne et extrême raison par la circonférence.

1° Supposons d'abord que la corde BC soit le plus grand des deux segments de la droite ABC , de manière que

$$\overline{CB}^2 = AC \cdot AB.$$

E. Rouché et C. de Comberousse

Traité de géométrie

huitième édition, Paris, 1912.

Scolie - 263.

SCLIE.

263. La détermination d'un cercle O astreint à trois conditions prises parmi celles qui consistent à passer par un point donné, ou à toucher une droite ou un cercle donné, répond à dix problèmes qu'on peut désigner par les symboles

PPP (1 sol.),	PDD (2 sol.),	DDC (8 sol.),
DDU (4 sol.),	PCD (4 sol.),	DCC (8 sol.),
PPD (2 sol.),	PCC (4 sol.),	CCC (8 sol.),
PPC (2 sol.),		

en représentant un point par P , une droite par D , un cercle par C . Nous avons indiqué, à côté de chaque symbole, le nombre des solutions dont le problème correspondant est susceptible.

La résolution de ces dix problèmes offre un exemple remarquable de la méthode des substitutions successives.

Les problèmes de la première colonne ont été déjà résolus (151, 161, 262); on a vu d'ailleurs (262) que les deux derniers se ramenaient au premier PPP. — Indiquons ici, en passant, une nouvelle solution du problème PPD, qui n'exige que la connaissance du Livre II. — P et P' désignant les deux points donnés, et P_1 le symétrique de P' par rapport à la droite donnée D , il est aisé de constater que la droite PP_1 est vue des deux points de contact cherchés sous des angles qui sont respectivement égaux aux angles des deux droites D et PP' . Il suffit donc, pour avoir ces points de contact, de décrire sur PP_1 un segment capable de l'un de ces angles, et de marquer les intersections de la droite D et du cercle ainsi obtenu.

Le premier problème PDD de la deuxième colonne se ramène à PPD, en observant que la circonférence cherchée doit contenir le symétrique du point donné par rapport à la bissectrice de l'angle que forment les droites données et qui renferme le point donné. — Le problème PCC se ramène à PPC; car on connaît (261) le centre de similitude S des deux cercles donnés et la puissance de ce point par rapport au cercle cherché O . On peut donc déterminer le second point d'intersection de la droite PS et du cercle inconnu O . — Le problème PCD se ramène de la même manière (261) à PPD ou à PPC.

Enfin, les problèmes de la troisième colonne se ramènent respectivement à ceux qui sont placés vis-à-vis dans la deuxième colonne. La marche à suivre reste la même pour tous les trois : c'est la méthode de *translation* (171). Ainsi, pour le problème DDC, on remarquera que, si le rayon du cercle cherché augmentait ou diminuait du rayon R du cercle donné, le nouveau cercle inconnu passerait par le centre du cercle donné et toucherait les droites données *déplacées parallèlement à elles-mêmes* d'une quantité égale à R . — De même, s'il s'agit du problème DCC, on remplacera le plus grand des deux cercles donnés par un cercle ayant pour rayon (suivant la nature des contacts) la somme ou la différence des rayons de ces deux cercles, et l'on déplacera la droite donnée parallèlement à elle-même d'une quantité égale au rayon

du plus petit des deux cercles. — Enfin, pour le problème CCC, on substituera aux deux plus grands cercles des circonférences concentriques dont les rayons différeront des leurs d'une quantité égale au rayon du plus petit des trois cercles donnés.

Titre : L'Apollonius Gallus et le problème des trois cercles, comme défense et illustration de la géométrie synthétique.

IREM : Pays de la Loire

Auteur : Anne Boyé

Date : Octobre 1998

Public concerné : tout public

Mots clés : Histoire des mathématiques , géométrie analytique, géométrie synthétique, méthodes en géométrie.

Résumé :

Dans le livre VII de La collection mathématique, Pappus présente le Traité des contacts, ouvrage perdu d'Apollonius, dont le dernier problème, celui de tracer un cercle tangent à trois cercles donnés, est considéré comme le plus difficile.

Viète, à la fin du XVI^e siècle, est le premier mathématicien européen à résoudre ce problème, dans son essai de reconstitution du traité des contacts, l'Apollonius Gallus, ignorant, fort probablement, les travaux des mathématiciens arabes des X^e et XI^e siècles.

Durant les XVII^e et XVIII^e siècles, de nombreux essais de résolution vont se succéder. Au XIX^e siècle, le problème des trois cercles sera un enjeu de la confrontation entre la géométrie analytique et la géométrie synthétique.

L'étude des différentes solutions permet d'approcher quelques moments de l'histoire des méthodes en géométrie et d'étudier différentes facettes de la pensée géométrique, et de son enseignement, jusqu'à nos jours.

Cette thèse comporte deux tomes. Le premier comprend l'analyse de différentes solutions du problème, le second les textes sur lesquels est basée l'étude, et, en particulier, une traduction du latin de l'Apollonius de Viète.

Format : A4

Nombre de pages : 251

prix : 45 F

