Centre Viète - Université de Nantes

Thèse de doctorat présentée par Anne Boyé

Collegii Remensis Societatis Jesu

L'Apollonius Gallus et le problème des trois cercles, comme défense et illustration de la géométrie synthétique.

Tome I

UNIVERSITE DE NANTES - CENTRE FRANCOIS VIETE

L'APOLLONIUS GALLUS ET LE PROBLEME DES TROIS CERCLES, COMME DEFENSE ET ILLUSTRATION DE LA GEOMETRIE SYNTHETIQUE.

THESE DE DOCTORAT

SPECIALITE : HISTOIRE DES MATHEMATIQUES.

Présentée et soutenue publiquement par

Mme Boyé Anne

le 30 janvier 1998, devant le jury ci-dessous

M. Patrice Bailhache
Mme Evelyne Barbin
M. Rudolph Bkouche
M. Jean Dhombres
M. Marco Panza
M. Bernard Truffault
M. Bernard Vitrac.

Président du jury : **M. Jean Dhombres**

Directeur de thèse : **M. Jean Dhombres**

CENTRE VIETE - UNIVERSITE DE NANTES

THESE DE DOCTORAT

SPECIALITE : Histoire des mathématiques
PRESENTEE PAR : Anne Rabu-Boyé
SOUS LA DIRECTION DE : Monsieur le professeur Jean Dhombres

L'APOLLONIUS GALLUS ET LE PROBLEME DES TROIS CERCLES, COMME DEFENSE ET ILLUSTRATION DE LA GEOMETRIE SYNTHETIQUE.

TOME I

J'adresse mes remerciements les plus vifs à tous ceux qui m'ont permis de mener à bien ce travail.

J'ai pu accéder à un certain nombre de textes grâce à l'aide particulière de :

J. Borowczyk
A. Djebbar
J. P. Friedelmeyer
M. Guillemot
K. Jaouiche
X. Lefort
J. L. Verley.

Enfin, je dois une grande reconnaissance à mon mari, Jean, qui a contribué largement à la présentation matérielle de ma thèse, qui a relu tous mes textes, et qui m'a soutenue moralement tout au long de cette difficile entreprise, ce qui n'est pas la moindre des choses.


L'ALGEBRE
NOVVELLE DE
M^R. VIETE M^E.
DES REQVESTES
ORD^RE. DE L'HOSTEL DV
ROY.
TRADVICTE EN
FRANCOIS
PAR
A. VASSET.
A PARIS,
Chez Pierre Rocolet,
en la gallerie des prisonniers aux Armes de la
Ville.
Avec Privilege du Roy
1630
Rabel. Fecit.

TABLE DES MATIERES

Même les géomètres, qui sont gens sans grands préjugés, nous enseignent que les plus grandes nouveautés dans leur art, leur viennent des problèmes les plus anciens médités de nouveau, et repris de plus près.

Paul Valéry

Préface

Le problème des cercles tangents est un des grands problèmes de l'histoire de la géométrie. Il est présenté dans le livre VII de *La collection* de Pappus, comme étant le dixième du *Traité des contacts*, ouvrage perdu d'Apollonius. Les géomètres arabes l'ont traité comme illustration des méthodes par analyse et synthèse. Ce problème a été repris par Viète, dans *l'Apollonius Gallus*. Sa démonstration sera prise comme référence par tous les mathématiciens européens qui s'attaqueront au même problème, les démonstrations précédentes leur étant semble-t-il inconnues.

C'est là aussi que nous ferons débuter notre étude, pour au moins deux raisons :

- la période arabe des X° et XI° siècle concernant ce problème a été déjà particulièrement bien étudiée par K. Jaouiche et H. Bellosta-Baylet.

- A partir de l'époque de Viète la géométrie "analytique" va commencer son ascension et les mots analyse et synthèse vont bientôt prendre des sens très évolutifs. Et c'est sous cet angle que nous proposons d'examiner le problème d'Apollonius.

Nous étudierons des solutions successives proposées sur ce problème depuis l'époque de Viète jusqu'au XX°siècle. Il serait illusoire de vouloir en présenter une liste exhaustive, et sans doute fastidieux et sans grand intérêt. Chaque démonstration a été choisie comme illustration d'une méthode, liée aux options mathématiques, voire philosophiques de l'auteur.

Ce problème effectivement a, d'une certaine manière, participé à l'évolution de la géométrie, et à la naissance au XIX° siècle, de ce que l'on nommera "géométrie moderne", par opposition à "géométrie des Anciens".

Autour de ce problème il est possible d'approcher une histoire des méthodes en géométrie, pour reprendre un titre illustre, et, au-delà, une histoire des idées sur la simplicité , la beauté d'une construction mathématique ; il y a des modes en mathématiques, qui ne tiennent pas toujours de la rigueur pure.

Nous voudrions aussi, au long de cette étude, réhabiliter une géométrie en voie de disparition : la géométrie synthétique du XIX° siècle, la "belle géométrie", comme l'on dit, un brin de nostalgie dans la voix.

Nous ne pensons pas effectivement apporter ici une réflexion originale sur l'histoire de la géométrie, notre propos est essentiellement de proposer un corpus de textes commentés sur un problème, qui l'illustre particulièrement. Nous nous efforcerons aussi de montrer ce que cette géométrie que nous défendons peut apporter à la formation de l'esprit, quitte à la faire évoluer, bien sûr ; loin de nous l'idée de défendre une histoire figée. Cependant le retour aux sources permet souvent de se renouveler. L'histoire des mathématiques en renferme de nombreux exemples.

Notre étude s'articule sur l'*Apollonius Gallus* de Viète, dont nous possédions quelques traductions : une traduction manuscrite de Gergonne, déposée à la bibliothèque de Turin, une traduction aussi de Ritter, qui, dans la deuxième partie du XIX° siècle a traduit presque toute l'œuvre de Viète. Comparées au texte latin original, ces traductions nous ont paru très approximatives, voire très éloignées du texte, ou encore assez obscures. Ainsi nous avons traduit, du grec ou du latin, tous les textes de Viète que nous citons. Nous donnons dans le tome II le texte intégral de l'*Apollonius Gallus*, et la traduction française que nous en avons faite, ainsi que celle de l'épître en grec qui lui est associée. Nous avons tenté de donner une version à la fois fidèle et lisible.

Nous avons aussi traduit du latin les textes d'Euler que nous proposons ; nous n'en possédions pas de traduction française. En revanche, nous avons repris la traduction de Mme du Chastelet pour les *Principia* de Newton, et celle de N. Beaudeux pour l'*Arithmetica Universalis*, qui nous ont semblé satisfaisantes.

Chapitre I : Une histoire de méthodes

On pourrait s'étonner de voir invoquer la sensibilité à propos de démonstrations mathématiques, qui, semble-t-il, ne peuvent intéresser que l'intelligence. Ce serait oublier le sentiment de la beauté mathématique, de l'harmonie des nombres et des formes, de l'élégance géométrique. C'est un vrai sentiment esthétique que tous les vrais mathématiciens connaissent. Et c'est bien là de la sensibilité[1].

Poincaré.

Les débuts du XIX° siècle en mathématiques, sont marqués par la querelles des méthodes en géométrie. Alors que les travaux de Monge, par exemple, permettaient de penser que les deux branches de la géométrie, celle des figures et celle des nombres, qui cheminaient en parallèle depuis près de deux siècle pouvaient enfin se rencontrer et s'épauler, des circonstances exceptionnelles, des personnalités hors du commun vont, pour quelques temps du moins se mettre en travers de l'histoire.

La fin du XVIII° siècle voit la glorification de la "méthode analytique", même si l'expression n'a pas un sens très défini. Certains vont s'en émouvoir ; Carnot est l'un des premiers. Mais inversement, la méthode synthétique, qu'il défendra, ne trouve pas de définition vraiment plus claire. Pour élever le débat, un concours est organisé, en 1813, par la société des sciences, lettres et arts de Bordeaux, pour un *essai caractérisant la synthèse et l'analyse mathématique et déterminant l'influence de chaque méthode sur la rigueur, le progrès, l'enseignement des sciences exactes*. Le prix fut attribué à Armand de Maizière mais son texte nous est surtout connu par le brillant rapport[2] qu'en a fait Gergonne, dans ses *Annales de mathématiques pures et appliquées*.

Commençant par examiner les sens traditionnels des mots analyse et synthèse en mathématique, il distingue deux cas, selon que l'on veuille

[1]Poincaré, H., *L'invention mathématique*, Bulletin de l'Institut général psychologique, n°3, mai-juin 1908, P. 175 à187, reéd. J. Gabay, 1993, p. 148.

[2]Gergonne, J. D., *De l'analise et de la synthèse, dans les sciences mathématiques, Annales de mathématiques pures et appliquées*, tome VII, n° XII, juin 1817, p.345 à 372.

enseigner à autrui des vérités déjà découvertes, dont l'enchaînement est bien connu, ou que l'on veuille *ajouter des vérités nouvelles aux vérités déjà connues et augmenter l'édifice des connaissances.*

Il s'agit en fait de distinguer ce que l'on appelle traditionnellement les méthodes d'exposition, et les méthodes de découverte

Dans le premier cas, Gergonne met sur un pied d'égalité la méthode synthétique et la méthode analytique.

> *On a appelé Synthèse ou méthode synthétique, le procédé par lequel on s'élève, par degrés, des vérités les plus élémentaires à celles qui le sont moins ; et on a appelé Analise*[3] *ou Méthode Analitique, la méthode qui consiste, au contraire, à redescendre des vérités les plus élevées aux plus élémentaires, dans la vue de faire voir que les premières se réduisent au fond à celles-ci. Ces deux méthodes font donc parcourir la même route, mais dans des directions tout-à-fait inverses ; et elles n'ont absolument aucun avantage l'une sur l'autre, soit sous le rapport de la rigueur, soit sous celui de la brièveté.*[4]

Ainsi, dans ce cas, l'analyse, aussi bien que la synthèse, est une *méthode de doctrine* ; chacune peut se suffire à elle -même, même si, par prudence, vérifier par une méthode ce qui a été parcouru par l'autre permettra de relever une éventuelle erreur.

Dans le deuxième cas, où l'on veut découvrir de nouvelles vérités, deux situations très distinctes peuvent se présenter : soit l'on pressent une vérité que l'on veut établir, sans savoir exactement à quelle vérité antérieure elle se rattache, ou l'on désire résoudre un certain problème, sans connaître de quel autre déjà résolu il dépend, ou bien il se peut aussi que le seul but soit de découvrir des vérités nouvelles sans en avoir aucune en vue.

S'il s'agit de cette recherche, un peu en aveugle, il semble à notre auteur qu'on ne puisse s'en remettre qu'à la méthode synthétique, qui seule permettra, s'appuyant sur ce qui est déjà connu d'en tirer toutes les conséquences, *dans l'espoir d'en rencontrer quelques-unes qui soient dignes de remarque.*

Ceci est assez rare et demande du génie. *Voilà aussi sans doute pourquoi, dans le grand nombre de ceux qui cultivent les sciences, il en est si peu qui leur fassent faire des progrès de quelque importance*, ironise-t-il.

S'il s'agit de démontrer la vérité d'une nouvelle proposition, ou de trouver la construction d'un nouveau problème, Gergonne estime que c'est la méthode analytique qu'il convient de préférer.

---

[3] L'orthographe du mot "analyse" est fluctuante au début du XIX° siècle, et Gergonne a choisi "analise".
[4] Gergonne, article cité, p. 348.

Cette méthode est celle que l'on trouve définie au livre VII de *La collection mathématique* de Pappus.

> *Il y a deux genres d'analyse : celle qui est propre à la recherche, qu'on appelle théorétique, et celle qui s'applique à trouver ce qui est proposé, qu'on appelle problématique. Dans le genre théorétique, on considère comme établi et vrai ce que l'on cherche, puis, par les conséquences qui en découlent, admises comme vraies et comme répondant à l'hypothèse, on aboutit à une chose qui est déjà accordée ; et si cette chose accordée est vraie, ce que l'on cherche est vrai aussi, et la démonstration sera l'inverse de cette analyse ; tandis que, si l'on aboutit à une chose accordée qui est fausse, ce qui est cherché sera faux aussi.*[5]

C'est cette analyse théorétique que Viète nommera zététique.

Pappus a donné dans sa *Collection* quelques exemples de problèmes représentatifs de l'analyse des Anciens. Mais leur géométrie, en particulier celle des *Éléments*, est essentiellement synthétique. La rareté des textes sur l'analyse a donné naissance aux XVI° et XVII° siècles à un certain nombre d'essais pour en percer le mystère . C'est ce que remarque J. Itard : *Chacun recherchait alors l'Analyse des anciens, persuadé qu'on était qu'ils nous avaient caché leur méthode de recherche sous l'élégance sévère de leur exposition synthétique. Viète le premier avait cru reconstituer cette Analyse antique. Il avait en réalité fondé l'analyse moderne*[6].

Doit-on ainsi répartir les rôles : analyse, méthode de découverte, synthèse méthode d'exposition ? Une démonstration bien menée doit-elle comporter ces deux parties ? Peut-on se contenter de l'une ou de l'autre ? Ces questions sont un des fondements du débat.

Gergonne, dans la tourmente géométrique du XIX° siècle ajoute, dans l'article précédemment cité, que la méthode ne suffit pas, il y faut une main habile et exercée. Dans la recherche de vérités nouvelles, on ne tient, en effet, qu'un bout de la chaîne ; il se pourra alors que la synthèse soit le meilleur atout. Au bout du compte, l'analyse aussi bien que la synthèse peuvent être une méthode d'invention. Gergonne est même tenté, contre la tradition, de considérer la synthèse comme plus propre à l'invention, *tant parce qu'il n'est rien de ce qui a été découvert par l'analise qui n'ait pu l'être également par la synthèse, que parce que le hasard, le plus puissant et le plus universel de tous les agents de découverte, procède toujours synthétiquement.*

---

[5]Pappus d'Alexandrie, *La collection mathématique*, livre VII, Traduction de Paul Ver Eeccke, Paris, Blanchard, 1982, tome II, p. 478.
[6]Itard, J., *Essais d'histoire des mathématiques,* Paris, Blanchard, 1984, p. 277.

Au delà de l'usage des mots analyse et synthèse dans leur acceptation traditionnelle, même si les discussions théoriques n'ont pas manqué, la fin du XVIII° siècle a été marquée par un développement que certains qualifient d'un peu anarchique, de ce qu'on appelle l'esprit analytique.

La responsabilité en est imputée, par Gergonne et quelques autres, à Condillac, qui avait contribué à brouiller les pistes.

Mais la doctrine de Condillac sur ce point est d'un examen d'autant plus embarrassant et plus difficile, qu'après avoir lu son livre en entier, on ne voit pas bien clairement ce qu'il entend proprement par analise et par synthèse ; tout ce qu'on peut en recueillir, c'est qu'il professe pour la dernière de ces deux méthodes le mépris le plus profond, et qu'il regarde l'autre au contraire, comme la méthode unique, la méthode par excellence[7].

Très critique, il ajoutera

La seule manière de faire de la Logique de Condillac un ouvrage raisonnable serait, à ce qu'il nous paraît, d'y remplacer partout les mots analise et synthèse, par ces expressions : bonne méthode et mauvaise méthode ; mais, par cette substitution même, on en ferait un ouvrage tout-à-fait inutile ; puisqu'il se réduirait à dire que dans toute recherche, il faut soigneusement s'attacher aux bonnes méthodes, et éviter les mauvaises ; ce que personne jusqu'ici n'a probablement encore songé à contester.

Il faut dire qu'en cette fin de siècle, "l'analyse algébrique" triomphait. C'est Viète lui-même qui avait introduit le mot "Art Analytique" pour son algèbre littérale, car il s'agissait bien d'analyse au sens étymologique du terme. Mettre le problème en équation est une méthode heuristique. Descartes et Fermat, vont alors développer cette méthode de résolution, par la réduction au calcul, des problèmes de géométrie.

La réduction au calcul est d'abord d'ordre méthodologique (même si, comme toute transformation méthodologique, elle a une portée plus vaste) ; elle est un moyen de résoudre des problèmes portant sur les mêmes objets que la géométrie grecque dont Descartes et Fermat se considèrent les continuateurs[8].

Cette réduction au calcul via la mise en équations, va peu à peu devenir la caractérisation de la méthode analytique, la méthode synthétique devenant celle où l'on s'interdirait l'usage du nombre. Ce qui est abusif, comme le souligne

[7]Gergonne, article cité, p. 355.
[8]Bkouche - Lehman, *Appendice historique*, Initiation à la géométrie, Paris, PUF, p. 445.

Gergonne, car il est courant, en algèbre comme en géométrie pure, de procéder à la fois par analyse et par synthèse.

Toutefois, la méthode analytique, celle qui était réglée par la seule force des calculs, était triomphante dans les années post-révolutionnaires, en France. Rien ne semblait pouvoir l'arrêter. Ainsi s'exprimait Laplace :

Telle est la fécondité de l'analyse qu'il suffit de traduire dans cette langue universelle les vérités particulières, pour voir sortir de leurs seules expressions, une foule de vérités nouvelles et inattendues[9].

Il s'agissait bien de se passer de la figure, si l'on en croit Lagrange, dans la mécanique analytique :

Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions ni raisonnements géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques assujetties à une marche régulière et uniforme. [10]

Ce qui est réalisé pour l'explication du système du monde ou pour la mécanique doit pouvoir l'être pour la géométrie. C'est ainsi que l'on trouve un petit ouvrage directement inspiré de la mécanique de Lagrange, qui propose une nouvelle méthode pour réduire à de simple procédés analytiques les principaux théorèmes de géométrie.

Aussi est-ce aux méthodes analytiques que les mathématiciens doivent leurs progrès depuis un siècle, et leur perfection peut seule en reculer les limites.

On ne trouve dans la Méchanique Analytique du cit. Lagrange, ni figures ni constructions géométriques ; mais seulement des opérations algébriques assujetties à une marche régulière et constante ; ainsi depuis ce grand ouvrage, qui doit seul immortaliser notre siècle, la méchanique n'est plus qu'une branche particulière de l'analyse.

La géométrie élémentaire elle-même est susceptible d'une marche analytique, et aux méthodes de démonstration qu'on y a employé jusqu'à présent, on peut substituer les équations résultantes du rapport des quantités qu'on y considère.

Nous nous proposons de faire voir qu'en partant de ce principe purement analytique, on peut démontrer les divers théorèmes de la

---

[9]Laplace, P. S., *Exposition du système du monde,* Paris, 1796, cité par J. et N. Dhombres, Naissance d'un nouveau pouvoir : sciences et savants en France 1793 - 1824, Paris, Payot, 1989.
[10]Ibid., p. 471.

géométrie élémentaire, sans employer ni même supposer tacitement aucune espèce de figures ni constructions.[11]

C'est, semble-t-il, Lacroix qui dénommera cette géométrie : "géométrie analytique". C'est ainsi que naîtra, a contrario la géométrie synthétique. Un de ceux qui va permettre cette nouvelle naissance est sans doute Monge, qui pourtant cultivera l'application de l'analyse à la géométrie ; mais, il offrira aussi une nouvelle vision de la géométrie "descriptive", reprenant une tradition plus ou moins délaissée, devant le triomphe de l'analytique, qui était celle de Desargues.

Monge, par ses travaux et son enseignement aurait dû permettre la mise en cohérence des deux démarches, utilisant à la fois la vision projective et l'analyse, pour résoudre les problèmes de géométrie. Il allait, en fait, donner une possibilité de renouvellement, à la géométrie "pure". Les raisons en seront diverses ; y entre sûrement un refus quasi esthétique d'une forme de raisonnement qui s'éloigne en permanence de son sujet. Lisons, par exemple, ce jugement de Poncelet sur la géométrie analytique où il reconnaît certes sa supériorité apparente, mais critique de façon appuyée cette forme de raisonnement :

Descartes n'avait certainement pas entrevu la fécondité et la portée de sa méthode, qui, dans les derniers temps, entre les mains d'Euler, de Clairaut, mais surtout de Lagrange et de Monge, est devenue un instrument général de démonstration et de découvertes, une langue géométrique pour ainsi dire universelle ; avantage qu'elle doit non seulement à la simplicité de son algorithme et de ses notations, mais surtout à son système métrique de représentation des éléments droits ou courbes des figures, par la projection, véritable transformation linéaire ou rectiligne de ces derniers éléments, qui n'altère pas le degré, les affections et les propriétés essentielles des lignes, et ne sort point, en apparence, des voies de l'Algèbre pure, justement nommée ici Analyse indéterminée.

De là, d'ailleurs, il résulte, chose vraiment digne d'attention, que l'on se surprend, après un certain temps d'exercice, à confondre les êtres géométriques véritables avec leur représentation ou traduction algorithmique par des équations entre les ordonnées et les abscisses, qui ne sont pourtant que de purs auxiliaires du raisonnement logique. De là aussi, se croit-on fort souvent en droit, dans la

[11]J., G., C., (= Louis Alexandre Olivier de Corancez), *Précis d'une nouvelle méthode pour réduire à de simples procédés analytiques les principaux théorèmes de la géométrie et la dégager des figures et constructions qu'on y a employées jusqu'à présent*, Paris, imp. du journal de Paris, an VI, p. 10.

solution des problèmes de Géométrie analytique, de faire abstraction de la figure à laquelle cette représentation fictive s'applique, et de l'influence que peut avoir sur les résultats, la position attribuée primitivement, lors de la mise en équation, aux parties dont cette figure se compose. Or, ne l'oublions pas, ce n'est point là une conséquence rigoureuse de vérités géométriques antérieurement établies, mais bien un simple rapprochement, une vérification a posteriori, de laquelle on ne pourrait déduire aucune conséquence nouvelle, indiscutable et applicable à tous les cas possibles[12].

Les principes esthétiques sont ainsi liés à un certain purisme : l'analyse, s'écartant de son objet, la figure, ne trouve pas de fondements très certains, mathématiquement parlant ; le calcul peut mener à appliquer à certains cas de figures, ce qui a été déterminé dans une figure primitive de départ, qui pouvait être très différente. Ce que l'on utilise et accepte, sans cas de conscience pour le calcul, doit pouvoir se faire dans la géométrie "pure".

Carnot va ouvrir la voie. En 1803, dans sa *Géométrie de position*, il redéfinit les mots d'analyse et de synthèse, et assimilant en quelque sorte l'analyse aux travaux récents des mathématiciens, il la caractérise par l'usage des formes algébriques et l'application du calcul à ces espèces de symboles *hiéroglyphiques*, que sont les quantités négatives isolées, et, par voie de conséquence, les imaginaires. La méthode synthétique devra donc être celle où l'on ne perd pas de vue son objet, où l'on fait usage d'êtres réels, concevables pour l'intelligence, et de nature à pouvoir être montrés, ainsi qu'il arrive constamment en géométrie élémentaire. Dans l'article de Gergonne cité plus haut, sur l'analyse et la synthèse, cette position est quelque peu critiquée ; les quantités négatives, et même imaginaires sont en discussion, justement aussi en ce début de siècle :

Nous croyons du moins avoir prouvé ailleurs qu'on pouvait envisager la théorie des quantités négatives de manière à faire de ces quantités des êtres tout aussi intelligibles que peuvent l'être les quantités positives [...] En outre, quelques tentatives[13] *qui ont été faites dans ces derniers temps, permettent tout au moins de douter si les imaginaires sont des êtres aussi inintelligibles qu'on l'avait cru jusqu'ici.*[14]

---

[12]Poncelet, J. V., *Applications d'analyse et de géométrie,* tome II, Paris, Gauthier-Villars, 1864; p. 253.
[13]Il est fait ici allusion à de nombreux articles dans les *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, à la fois sur les quantités négatives, et sur les imaginaires. Le texte d'Argand vient juste, alors, d'y être publié.
[14]Gergonne, article cité, p. 368.

Finalement, pour Carnot, sera synthétique toute recherche où l'on ne fera usage d'aucune forme algébrique, sinon, elle sera analytique.

Les élèves de Monge et Carnot, ne suivront pas forcément ce dernier sur son aversion pour les quantités négatives, mais la géométrie "synthétique" est née.

La géométrie synthétique sera aussi parfois la géométrie "naturelle", celle qui ne demande pas de savoir préalable, contrairement à la géométrie "acquise", qui requiert un apprentissage préalable du calcul.

Dans la défense de la géométrie se profilent effectivement aussi des préoccupations pédagogiques. L'analyse, selon Poncelet ou Dupin, par exemple, serait réservée d'une certaine façon, à une élite qui pourrait consacrer un temps assez long à son apprentissage, puis à son exercice. La géométrie synthétique, en revanche, demande surtout de regarder autour de soi, de cultiver son imagination, d'apprendre à mettre en relation les formes naturelles qui se présentent.

Cependant, l'analyse a montré son efficacité, devant la géométrie des anciens, qui a donné des chefs d'œuvres, mais qui semble avoir atteint ses limites.

Ainsi, Poncelet et d'autres avec lui, vont analyser ce qui fait la force de l'analytique, pour en doter la géométrie, qui deviendra "supérieure".

> *La géométrie analytique ayant acquis sur la géométrie ordinaire une supériorité et une généralité qu'il est impossible de lui contester, dans l'état actuel de ces deux sciences (1818), à moins d'ignorer tout à fait les brillantes découvertes des algébristes modernes, ou d'être entièrement épris des méthodes anciennes, c'est une question aussi utile qu'intéressante que de rechercher directement quelles sont les causes de la faiblesse naturelle à l'une, et de la puissance extensive qui constitue en quelque sorte le caractère propre de l'autre. Car, si ces causes étaient une fois bien connues, il deviendrait peut-être possible de faire passer dans la géométrie ordinaire la généralité des conceptions de l'Analyse algébrique, généralité qui doit nécessairement appartenir à l'essence même de la grandeur figurée, indépendamment de toute manière de raisonner.*[15]

Pour que les choses soient claires, il est bien précisé que ce qui est appelé alors géométrie analytique est la méthodes des coordonnées, qui a été cultivée avec tant de succès depuis Descartes.

---

[15]Poncelet, J., V., *Applications d'analyse et de géométrie*, tome II, ouvrage cité, P. 297.

Pour Poncelet, ce qui fait la supériorité de l'analyse, c'est que par continuité, on ne s'attache pas aux cas de figures, parce que les calculs sur les quantités positives ont été étendus aux quantité négatives, et même aux imaginaires, alors même que ces quantités sont en discussion. Ce qui est admis pour les calculs devrait être admis aussi pour les figures.

Monge dans sa Géométrie descriptive a implicitement admis que les relations applicables à une certaine figure pouvait demeurer, dans une certaine mesure, applicables à toutes les situations possibles de figures ; d'autres l'ont suivi. Ce principe, joint à la corrélation des figures de Carnot, donnera ce que Poncelet nommera le principe de continuité. Poncelet, voulant établir ce principe clairement se fera reprendre particulièrement par Cauchy, le garant de la rigueur. Gergonne l'exprimera dans ses *Annales*, en 1827 :

> *Je persiste à penser que M. Poncelet a gravement compromis ses doctrines en mêlant au classique que tout le monde admet, le romantique que, pour ma part, je suis fort loin de repousser, mais sur lequel enfin on discute encore, et que MM. les commissaires de l'Académie eux-mêmes, au jugement desquels M. Poncelet déclare attacher beaucoup de prix, ont traité assez sévèrement*[16].

L'inventeur de la géométrie projective, pour se justifier, prend appui sur une comparaison avec le calcul. La "continuité" des opérations sur les nombres, correspond à une "continuité" des opérations sur les figures. Lorsqu'un dénominateur devient nul, lorsqu'un radicande devient négatif, l'on admet en algèbre que les quantités deviennent infinies ou imaginaires. Cela doit s'admettre aussi en géométrie. Il en donnera des exemples, que nous étudierons dans notre chapitre IV. Le principe de continuité dans le calcul s'y présente *presque à l'insu* du calculateur ; en géométrie, l'impossibilité apparente, ou le changement de cas de figure, frappe de façon plus évidente. C'est sans doute ce qui fait la difficulté de son acceptation. Poncelet admet que ce principe n'est peut-être pas défini en toute rigueur. Mais tout géomètre doit l' admettre comme juste intuitivement. Il faut donc avancer dans la théorie, et peu à peu les bases s'éclairciront.

Le principe de continuité n'est pas toute la différence avec la géométrie des Anciens, un style nouveau de pensée et d'écriture est aussi apparu grâce à Monge :

---

[16]Gergonne, J. D., *Annales de mathématiques pures et appliquées*, tome XVIII, p. 135.

> *La Géométrie descriptive de Monge est une source de bonnes doctrines, qui n'a point encore été épuisée. Après y avoir reconnu le germe, plus ou moins développé, de plusieurs méthodes, qui accroissent la puissance et étendent le domaine de la Géométrie, nous y voyons l'origine d'une nouvelle manière d'écrire et de parler cette science. Le style, en effet, est si intimement lié à l'esprit des méthodes, qu'il doit avancer avec elles ; de même qu'il doit aussi, s'il a pris les devants, influer puissamment sur elles et sur les progrès généraux de la science. Cela est incontestable et n'a pas besoin de preuves.*[17]

Une des différences majeures tiendra dans le nombre moindre de figures, puisque les cas de figures n'ont plus de raison d'être. La figure pourra même disparaître complètement pour se situer dans l'imaginaire, ou l'infini. C'est ainsi que Steiner écrira sur la fin de ses jours qu'il fermait les yeux pour voir[18].

La nouvelle géometrie née finalement des progrès de la géometrie analytique, va se construire peu à peu, donnant naissance à la géometrie projective, faisant la différence entre la géometrie métrique, et celle des situations. Ce mouvement n'est pas exclusivement français ; Steiner fondateur avec Poncelet de la géometrie projective, s'illustrera particulièrement, puis Von Staudt, qui s'intéressera aux fondements.

La géometrie des coordonnées y trouvera elle-même l'occasion d'un renouvellement, avec les coordonnées homogènes de Plucker, par exemple, version analytique de la géometrie projective.

Le débat s'appuie sur quelques problèmes et s'en enrichit. Curieusement, l'un des ces problèmes est celui du cercle tangent à trois cercles donnés, parce qu'il prend ses sources dans la géométrie ancienne, et que ni trop élémentaire ni trop difficile, il a servi successivement à la mise en valeur des nouvelles méthodes en mathématiques, depuis l'*Apollonius Gallus* de Viète.

Ce problème est présenté par Pappus dans le livre VII de sa *Collection*, comme étant le dixième du *Traité des contacts*, un des ouvrages perdus d'Apollonius. L'objet de ce traité, représentatif, selon Pappus, de l'Analyse des Anciens, était ainsi caractérisé :

Etant donné trois éléments quelconques parmi des points, des droites et des cercles, décrire un cercle qui passe par les points donnés, ou qui soit tangent

[17]Chasles, M., *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, troisième édition, Paris, Gauthier-Villars, 1889, p. 207.
[18]Sydler, J. P., *Aperçus sur la vie et sur l'œuvre de Jakob Steiner*, Bulletin de la société mathématique suisse, juin 1964;

aux droites et aux cercles donnés. Dans le dernier problème, le plus difficile, il fallait décrire un cercle tangent à trois cercles donnés.

Certains ont cherché les raisons de l'intérêt d'Apollonius pour ce problème, et ce qui avait pu l'amener à s'y intéresser. V. Khabelashvili,[19] fait l'hypothèse qu'Apollonius a pensé à un assemblage de quatre cônes circulaires, leurs axes étant parallèles, de même angle au sommet, l'un des cônes ayant son sommet vers le bas, et tangent aux trois autres. Coupant cet assemblage par un plan parallèle à la surface de base, il obtient un cercle tangent à trois autres. Coupant par d'autres plans, il aurait obtenu quatre coniques. La réduction du problème à celui des cercles serait due à la trop grande difficulté de la solution générale.

Cette idée est séduisante, a posteriori, puisqu'elle relie ce vieux problème "plan", aux solutions qui pourront en être données à l'aide de coniques justement ; cela va aussi dans le sens de la longue filiation de la géométrie projective. Nous ne saurions porter de jugement sur le bien fondé de cette hypothèse, mais elle peut être étudiée.

Les mathématiciens arabes des X° et XI° siècles, qui n'ont peut-être pas eu accès à la *Collection,* ont étudié les problèmes du *Traité des contacts* et en ont donné des solutions par la synthèse, ou par l'analyse (selon les sens anciens de ces termes.). Ces travaux resteront inconnus des mathématiciens européens, et leur référence sera l'essai de reconstitution par Viète du *Traité des contacts*, sous le titre de l'*Apollonius Gallus*. Nous étudierons ce texte célèbre en détail. Il est considéré par Viète comme un problème plan ; c'est ainsi que le classait apparemment Pappus.

Chasles fait un bel éloge du texte de Viète dans son *Aperçu historique des méthodes en géométrie* :

> *Viète n'était pas moins profond dans la géométrie pure des Anciens que dans l'Analyse algébrique. On lui doit le traité d'Apollonius De tactionibus, qu'il a restitué sous le titre d'Apollonius Gallus. C'est là qu'il résolut, le premier, le problème du cercle tangent à trois cercles donnés dans un plan, qui occupait alors les géomètres, et leur présentait des difficultés. Le célèbre Adrianus Romanus le résolvait par l'emploi de deux hyperboles ; ce qui était une faute contre les règles d'une bonne méthode, puisque la ligne droite seule devait suffire : aussi a -t-elle été relevée par Viète. Les plus grands géomètres ont continué, depuis, de s'occuper de ce problème, et en ont donné différentes solutions, parmi*

---

[19]Khabelashvili, A., V., *Problem by Apollonius of Perga,* Actes du congrès de Liège, 1997, à paraître.

lesquelles on distingue celles de Descartes, de Newton, de TH. Simpson, de Lambert, d'Euler, de Fuss.

Mais ce problème n'a plus offert aucune difficulté aux méthodes récentes, qui en ont fourni des solutions incomparablement plus élégantes et plus faciles, en théorie et en pratique, que toutes les autres, et il ne doit plus sa célébrité qu'aux grands noms qui brillent dans son histoire.

(Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, 3° édition, 1889, p. 53.)

Au cours des pages suivantes, nous nous plongerons dans cette histoire, et nous jugerons si finalement elle ne peut pas se prolonger, et si l'on ne peut ajouter d'autres solutions à la liste déjà imposante.

Chapitre II : Essais de reconstitution

1° Les travaux des mathématiciens arabes des X° et XI° siècles

L'intérêt des mathématiciens arabes pour le problème de l'analyse et de la synthèse en mathématique semble s'être particulièrement manifesté aux X° et XI° siècle, à tel point que deux d'entre eux au moins lui ont consacré un traité théorique. Si l'on se réfère à la thèse d'Hélène Bellosta-Baylet[20], le texte d'Ibrahim Ibn Sinan, consacré à l'analyse et la synthèse dans les démonstrations de géométrie est le premier sur ce sujet dans l'histoire des mathématiques, après le texte de Pappus dans l'introduction du livre VII de la *Collection mathématique*. Il n'est pas certain d'ailleurs que Ibn Sinan ait eu accès à ce texte.

Il consacrera deux autres ouvrages à l'analyse et à la synthèse : un livre sur *Les cercles tangents*, qui ne nous est malheureusement pas parvenu, et une *Anthologie de problèmes,* champ d'application de la méthode exposée précédemment.

Aussi bien Ibn Sinan, dans son *Anthologie de problèmes*, que Ibn al-Haytam, dans son *Traité sur l'analyse et la synthèse*, s'intéresseront au problème de tracer un cercle tangent à trois cercles donnés.

Ce problème, nous l'avons évoqué, trouve son origine dans *le Traité des contacts* d'Apollonius, qui ne nous est pas parvenu. Pappus indiquait que le *Traité* perdu était divisé en deux livres, qui contenaient chacun vingt-et-un lemmes, soixante théorèmes et onze problèmes, le contenu pouvant se résumer d'une seule proposition :

Trois éléments quelconques étant successivement donnés de position parmi des points, des droites, des cercles, décrire un cercle qui, passant par chacun des points donnés (dans le cas de points donnés), soit tangent à chacune des lignes données.[21]

Se présentent alors dix cas, donc dix problèmes, qu'Apollonius, selon Pappus, avait résolu .

Peuvent être donnés :

---

[20]Bellosta-Baylet, H., *L'analyse et la synthèse selon Ibrahim Ibn Sinan*, Thèse de doctorat, Université de Paris VII.

[21]Pappus d'Alexandrie, *la collection mathématique*, traduction de Paul Ver Eecke, Paris, Blanchard, 1982, tome II, p. 483.

- trois points
- trois droites
- deux points et une droite
- deux droites et un point
- deux points et un cercle
- deux cercles et un point
- deux droites et un cercle
- deux cercles et une droite
- un point, une droite, un cercle
- trois cercles.

Les premiers problèmes n'offraient pas de difficultés ; Pappus notait qu'ils étaient démontrés dans le quatrième livre des *Éléments* d'Euclide. Il considérait les six cas venant respectivement en troisième, quatrième, cinquième, sixième, huitième et neuvième position dans l'ordre ci-dessus comme assez simples. Ils étaient, écrivait-il, traités dans le premier livre des *Contacts* d'Apollonius. Le dixième problème est celui qui nous intéresse.

Il n'est pas dans notre intention d'entrer dans le détail des travaux d'Ibn Sinan ou d'Ibn al-Haytham, sur ce problème, Hélène Bellosta-Baylet, et Khalil Jaouiche[22] ayant contribué à une étude approfondie du sujet. Nous en donnerons cependant un aperçu, car les nombreuses similitudes, mais les différences aussi, avec les développements qui seront donnés aux XVII° et XVIII° siècles en Europe demandent d'y prêter une attention particulière.

Ibn Sinan semble avoir traité tous les dix problèmes cités par Pappus, les uns après les autres, le dernier se résolvant à l'aide de certains des précédents, à la manière de ce que fera Viète dans l'*Apollonius Gallus*. Il dit avoir traité dans son *Anthologie* les problèmes qu'il n'avait pas traités dans *Les cercles tangents* ou ceux dont il donne une nouvelle méthode. Nous trouvons ainsi dans l'*Anthologie* les problèmes 5, 6, 10, qui n'ont pas encore été étudiés, et le problème 8, qui est étudié différemment.

Il ne donne de ces problèmes qu'une analyse rapide, qu'il nomme "analyse abrégée des géomètres" ; c'est celle qui permet de trouver. Il y a aussi "l'analyse des géomètres dans laquelle on fait attention » ; on y détermine le genre du problème, on étudie les cas de figures, le nombre de solutions, les conditions nécessaires, les hypothèses surabondantes ...; c'est l'analyse utilisée dans *Les Cercles tangents*. Il y a enfin la "véritable analyse", telle qu'elle est utilisée dans les autres sciences, qui repose plus sur des bases de logique pure. Cette analyse est exposée dans *L'analyse et la synthèse*.

---

[22]Jaouiche, K., *Aperçu sur le problème des trois cercles*, 3° Symposium maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes, à paraître.

Car les méthodes utilisées dans tous les problèmes sont au nombre de trois :

-l'une est la méthode de la véritable analyse;

-l'autre la méthode abrégée des géomètres, avec laquelle le plus souvent se produisent des erreurs;

-la troisième est une méthode qui ressemble à celle des géomètres ; toutefois, si l'on veille à ce contre quoi j'ai mis en garde les gens, on se gardera des erreurs que commettent les géomètres ; il n'en reste pas moins que cette analyse est abrégée et que l'on peut croire que la synthèse n'est pas véritablement son inverse.[23]

Nous ne trouvons, dans l'*Anthologie*, que l'analyse et non la synthèse des problèmes. En fait dans l'analyse abrégée des géomètres, on s'estime satisfait si l'on montre que le problème posé se ramène à un problème soit de type algébrique, soit de type géométrique, que l'on sait résoudre ou que l'on a résolu.

Nous verrons que dans l'*Apollonius Gallus,* Viète ne donnera que la synthèse. Ibn al-Haytham donnera l'analyse et la synthèse du problème 10, qu'il traitera directement, sans passer par les premiers.

Nous allons brièvement donner quelques repères sur ces démonstrations ; nous devons signaler cependant que Ibn Sinan dit ne pas être le premier mathématicien arabe à avoir traité le problème 10. Ibn Karnib et al-Mawardi l'auraient déjà fait partiellement.

Ibn Sinan dans son *Anthologie*, résout successivement les problèmes dans l'ordre 8, 5, 9, 6, 10. Ce sera presque l'ordre adopté par Viète dans *l'Apollonius Gallus.* Seul le neuvième problème viendra après le cinquième problème.

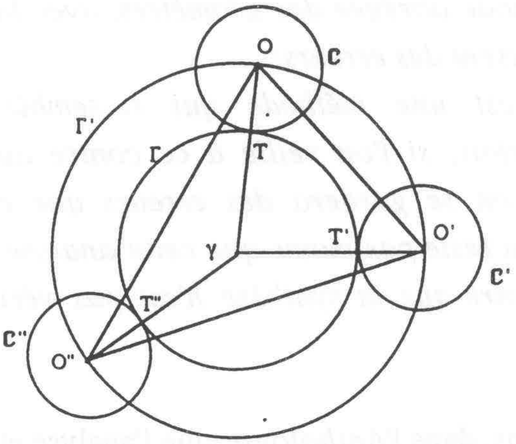
Dans son analyse du dixième problème Ibn Sinan considère trois cas : les trois cercles ont des rayons égaux, deux d'entre eux seulement ont des rayons égaux, puis les trois ont des rayons différents deux à deux. Ibn al-Haytham ne se placera que dans le troisième cas. Chez les deux auteurs cependant, les centres des trois cercles ne sont pas alignés. Ce sera le cas de la plupart des auteurs jusqu'au XIX° siècle.

Le premier cas de trois rayons égaux est très simple, puisque le centre du cercle cherché se trouvera à égale distance des trois centres des cercles donnés. Il suffit de faire passer un cercle auxiliaire par ces trois centres ; le cercle à construire aura pour rayon la différence entre le rayon des cercles donnés et le

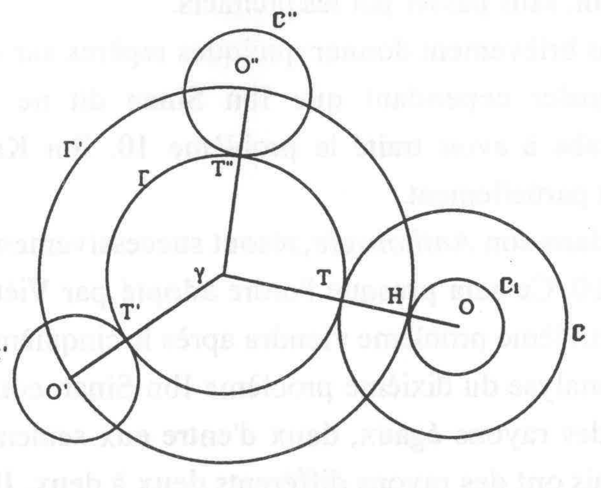
[23]Ibn Sinan, I., *Inventaire des questions résolues,* Thèse de doctorat, Hélène Bellosta Baylet, tome II, p.IV;

rayon du cercle auxiliaire. Le cercle tracé sera tangent extérieurement aux cercles donnés.

C, C', C" sont les cercles donnés, et Γ est le cercle cherché.



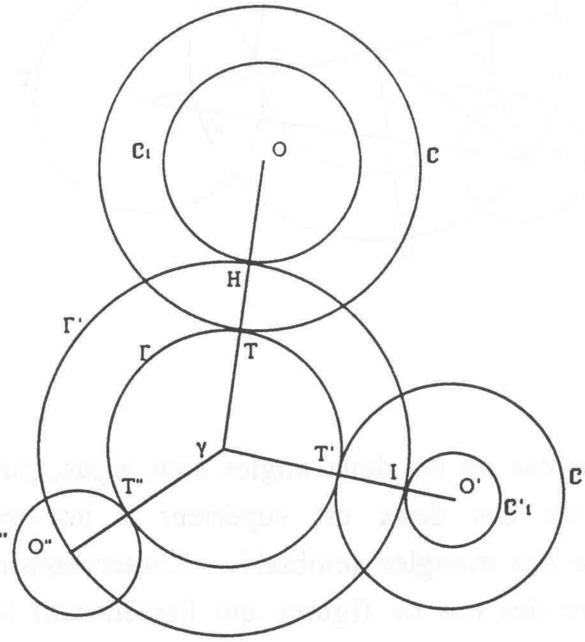
Dans le second cas, on suppose que le troisième cercle, de centre O a un rayon plus grand que celui des deux autres de centres O' et O". Supposant la figure construite, on joint le centre γ du cercle à construire aux trois centres des cercles donnés.



Prenons sur γO une longueur TH = T"O". alors, γH = γO' = γO". Le cercle de centre γ et de rayon γO' passe donc par O', O" et H. Le cercle de centre O et de rayon OH est donc connu. On est ainsi ramené à tracer le cercle passant par O'et O" connus, et tangent au cercle de centre O et de rayon OH, connu, qui est un problème traité précédemment.

Il n'y a pas de synthèse, mais la méthode pour obtenir le cercle cherché consiste à tracer des cercles concentriques à celui que l'on sait construire, et de rayons obtenus par soustraction ou addition des rayons des cercles donnés. Ce procédé sera celui de Viète.

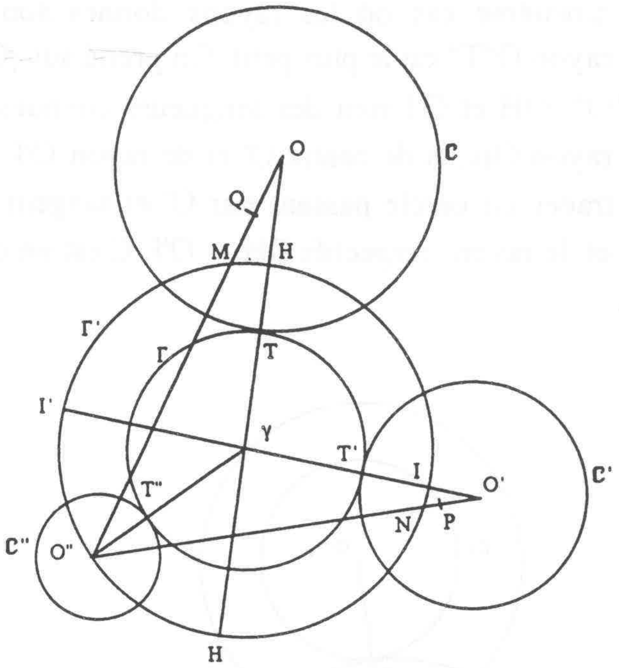
Pour le troisième cas où les rayons donnés sont tous différents, on suppose que le rayon O"T" est le plus petit. On prend sur γO et γO' une longueur TH = T'I = T"O". OH et O'I sont des longueurs connues, donc les cercles de centre O et de rayon OH, et de centre O' et de rayon O'I sont connus. Il s'agit finalement de tracer un cercle passant par O' et tangent aux deux cercles de centres O et O' et de rayons respectifs OH et O'I. C'est un des problèmes résolus précédemment.



La démonstration ainsi proposée se retrouvera dans l'*Apollonius Gallus,* mais sous la forme de la synthèse, avec cependant une différence. Ibn Sinan ne considère que le cas de trois cercles extérieurs les uns aux autres. Viète examinera d'autres situations.

La construction d'Ibn al-Haytam est tout à fait différente, puisqu'il prend directement le dernier problème, et en donne l'analyse et la synthèse. Il suppose que les trois cercles ont des rayons différents, qu'ils sont extérieurs l'un à l'autre, et il ne recherche que le cercle tangent extérieurement aux trois cercles donnés. Le début de son analyse est celle d'Ibn Sinan, mais il ne s'arrête pas là puisque les problèmes précédents n'ont pas été examinés.

Les angles γO"O et γO"O' ont une somme inférieure à deux droits. L'un au moins d'entre eux est donc aigu.



Il examine alors les cas où les deux angles sont aigus, puis où l'un des deux est droit, puis l'un des deux est supérieur à un droit. Il utilise essentiellement la théorie des triangles semblables. L'intervention de la valeur des angles fait apparaître des cas de figures qui l'amèneront à une analyse rigoureuse et complète, beaucoup plus que celle de Ibn Sinan, ou que celle que donnera Viète. Mais du coup elle est aussi longue et complexe.

Il donnera ensuite une synthèse pour chaque cas étudié. Nous renvoyons à la thèse déjà citée pour un compte-rendu complet de ce travail.

Ces travaux n'influenceront pas ceux des mathématiciens européens qui, à partir du XVI° siècle s'intéresseront au problème d'Apollonius. Ils les ignoraient, fort probablement. Nous avons noté certaines coïncidences avec l'*Apollonius Gallus*, il y en aura d'autres avec certains auteurs. Les sources des uns et des autres étaient sans doute différentes, donc aussi les essais de reconstruction, H. Bellosta-Baylet pose cependant la question de la similitude, peut-être, du développement des mathématiques, aux X° et XI ° siècles dans le Monde arabe, et celui des XVI° et XVII° siècles en Europe, ce qui expliquerait une similitude d'intérêts.

Il est cependant remarquable que pour traiter de l'analyse et de la synthèse en géométrie, les mathématiciens arabes aient choisi un étude approfondie du problème du cercle tangent à trois cercles donnés comme le feront leurs successeurs européens quelques siècles plus tard.

2° L'Apollonius Gallus de Viète :

L'histoire et les circonstances de la construction, par Viète d'un cercle tangent à trois cercles donnés, ou la genèse de l'*Apollonius Gallus*, ont gagné leurs célébrités, non seulement par le niveau et l'aisance en mathématiques qui sont alors mis en évidence, mais aussi par la façon dont deux historiographes, Jacques Auguste De Thou, puis Tallemant des Réaux les ont contées.

En 1589, Henri III avait déplacé le gouvernement de Paris à Tours et Viète (maître des requêtes à la cour et membre du conseil privé depuis 1580) y avait été appelé. Lorsque Henri III est assassiné en juillet 1589, et remplacé par Henri IV, Viète reste à Tours. (Tours n'est pas éloigné de Fontenay, et il y passe une bonne partie de son temps.)[24]C'est là que l'histoire de l'*Apollonius Gallus* va naître.

Rapportons nous en à Tallemant des Réaux[25] :

Monsieur Viète était un maître des requêtes, natif de Fontenay-le-Comte, en Bas-Poitou. Jamais homme ne fut plus né aux mathématiques; il les apprit tout seul.

Du temps d'Henri IV, un hollandais, nommé Adrianus Romanus, savant aux mathématiques, mais non pas tant qu'il croyait, fit un livre où il mit une proposition qu'il donnait à résoudre à tous les mathématiciens de l'Europe; or en un endroit de son livre il nommait tous les mathématiciens de l'Europe, et n'en donnait pas un à la France. Il arriva peu de temps après qu'un ambassadeur des États vint trouver le Roi à Fontainebleau. Le Roi prit plaisir à lui en montrer toutes les curiosités, et lui disait les plus excellents qu'il y avait en chaque profession de son royaume. Mais, Sire, lui dit l'ambassadeur, vous n'avez pas de mathématicien, car Adrianus Romanus n'en nomme pas un de français dans le catalogue qu'il a fait. "Si fait, si fait, dit le roi, j'ai un excellent homme: qu'on m'aille quérir Monsieur Viète."

On montre la proposition à Monsieur Viète, qui se met à une des fenêtres de la galerie où ils étaient alors, et avant que le Roi en sortit, écrivit deux solutions avec du crayon. Le soir il en envoya plusieurs à cet ambassadeur, et ajouta qu'il lui en donnerait tant

---

[24]Nous renverrons pour plus de détails aux nombreuses biographies et études sur Viète, dont la thèse de J.Grisard, 1969, l'introduction de la traduction anglaise de *L'art analytique*, Richard Witmer, 1983 parue dans le n° 53 de la revue Plot, 1990, p. 23 à 28, l'article Viète, de H.L.L.Busard, dans le DSB, p.18 à 25, et la préface de J.Hofmann, 1970.

[25]Tallemant des Réaux, *Mémoires pour servir à l'histoire du XVII°siècle*, historiette 46, 2° édition, Paris, Garnier,1861, tome 2, p.88.

qu'il lui plairait, car c'était un problème dont les solutions sont infinies.

L'ambassadeur envoie ces solutions à Adrianus Romanus, qui, sur l'heure, se prépare pour venir voir Monsieur Viète. Arrivé à Paris, il trouva que Monsieur Viète était allé à Fontenay; le bon hollandais va à Fontenay. A Fontenay, on lui dit que Monsieur Viète est à sa maison des champs. Il l'attend quelques jours, et retourne le redemander; on lui dit qu'il était en ville; Il fait comme Apelles, qui tira une ligne. Il laisse une proposition; Viète résout cette proposition; Le hollandais revient; on la lui donne, le voilà bien étonné; il prend son parti d'attendre jusqu'à l'heure du dîner. Le maître des requêtes revient; le hollandais lui embrasse les genoux; Monsieur Viète tout honteux le relève, lui fait un million d'amitiés; ils dînent ensemble, et après il le mène dans son cabinet; Adrianus fut six semaines sans le pouvoir quitter. Un autre étranger, nommé Galtade[26]*, gentilhomme de Raguse, se fit faire résident de sa république en France pour conférer avec Monsieur Viète. Monsieur Viète mourut jeune, car il se tua à force d'étudier.*

Adrien Romain[27] avait proposé son problème en 1590, à tous les mathématiciens les plus notables de son temps, dont il avait dressé une liste. Parmi ceux-ci ne figuraient aucun français. Les écrits de Viète commençaient tout juste à paraître à l'époque. *Isagoge in artem analyticem*, est par exemple publié à Tours en 1591. Il n'est pas étonnant alors qu'Adrien Romain ait ignoré ce mathématicien français. Cependant le problème avait été publié en 1593, et la visite de l'ambassadeur se situe en 1594.

Il s'agissait de résoudre une équation de degré 45 :

$$45x - 3795x^3 + 95634x^5 - 1138500x^7 + 7811375x^9 - 34512075x^{11} + 1050306075x^{13}$$
$$-232676280x^{15} + 384942375x^{17} - 488494125x^{19} + 483841800x^{21} - 378658800x^{23}$$
$$+236030652x^{25} - 117679100x^{27} + 46955700x^{29} - 14945040x^{31} + 3764565x^{33}$$
$$-740459x^{35} + 111150x^{37} - 12300x^{39} + 945x^{41} - 45x^{43} + x^{45} = \mathrm{N}.$$

Viète avait rapidement reconnu que l'équation était satisfaite par la corde d'un cercle de rayon 1, sous-tendant un arc de 8°, la quarante-cinquième partie

[26]Marin Getkade, de Raguse, qui a publié l'Apollonius Ressuscité ; note de l'auteur.

[27]Adriaen van Roomen (1561-1615), médecin et mathématicien belge, enseigna les mathématiques à Louvain et la médecine à Wurzbourg. La résolution de l'équation du quarante cinquième degré, connue sous le nom de "Équation d' Adrien romain" est exposée dans l'ouvrage : *Ideae mathematicae pars prima, sive methodus polygonorum, qua laterum perimetrorum et arearum cujuscumque polygoni investigandorum ratio exactissima et certissima ; una cum circuli quadratura continentur.Authore Adriano Romano Lovaniensi medico et mathematico.* Louvain, 1593. Dans ce même ouvrage, il donne le rapport de la circonférence au diamètre avec seize décimales.

d'un cercle. C'est la solution qu'Adrien Romain avait d'ailleurs proposée. Cependant dès le lendemain Viète avait trouvé les vingt-deux autres solutions positives. Nous savons qu'il en existe autant, négatives, mais il est aussi connu que notre mathématicien ne considérait pas les solutions négatives.

En 1595, Viète publie sa réponse sous le titre : *Ad problema quod omnibus mathematicis totius orbis construendum proposuit Adrianus Romanus, responsum.* Le ton du défi marque l'introduction : Viète alors n'a pas encore rencontré Adrien Romain, avec qui il se liera d'amitié. Cette introduction met aussi en lumière certains principes affirmés dans l'*Isagoge.*

Nous en proposons la traduction suivante :

S'il ne s'est pas perdu dans le monde entier à dénombrer péniblement les mathématiciens du monde entier capables de résoudre son unique problème, Adrien Romain n'a pas arpenté les Gaules et même les Lycia des Gaules comme il faut.

Que le Belge le cède au Romain, que le Romain le cède au Belge, en tout cas un Français tolérera à grand peine qu'un Romain ou un belge lui dérobe sa gloire.

Moi qui ne me proclame pas mathématicien, mais que les travaux mathématiques passionnent lorsque j'en ai le loisir , dès que j'ai lu le problème d'Adrien, je l'ai résolu sans qu'aucune erreur malheureuse ne m'égare.

Ainsi en trois heures je me suis révélé grand géomètre, d'autant plus qu'aucune expression étrangère, c'est à dire algébrique, ne m'a convenu car la géométrie se traite en géomètre et l'analytique en analyste.

A la fin de son texte, Viète propose à Adrien Romain de résoudre le dernier problème du traité perdu d'Apollonius, sur les contacts : tracer un cercle tangent à trois cercles donnés. Cette proposition dont nous donnons une traduction ci-dessous ne dépare en rien le ton de l'introduction.

Pour exercer l'intelligence des esprits studieux et non pour la mettre à la torture, je leur propose de construire le problème ci-dessous.

Décrire un cercle tangent à trois cercles donnés.

Apollonius l'a proposé dan son livre Des Contacts qui a péri sous les caprices du temps.

Si la Belgique ne met pas en avant ses Apollonius, la France produira le sien.

Je ne doute pas que les algébristes ne le résolvent en l'énonçant sous une autre forme :

Etant donnés les demi-diamètres de trois cercles quelconques et les distances de leurs centres, donner le demi-diamètre d'un quatrième cercle qui leur sera tangent et la distance de son centre aux trois autres centres des cercles donnés.

Regiomontanus qui a résolu le problème par l'algèbre, déclare qu'il ne peut être construit par la géométrie.

Ne serait-ce pas parce que jusqu'à ce jour, l'algèbre n'a été traitée que d'une manière corrompue ?

Acceptez ma nouvelle algèbre, vous qui aimez les sciences et sur ce, Salut et Prospérité.

Regiomontanus a-t-il vraiment résolu le problème par l'algèbre ? Du moins que signifie "résolu" dans ce cas ? S'il s'agit simplement d'avoir posé une équation avec des coefficients par exemple numériques, comme on pourrait le penser, il n'a pas effectivement résolu le problème général ; donc il n'a pu indiquer une construction géométrique au sens propre. Et cela ne répond pas au problème posé. Nous ne pourrons juger du travail de Regiomontanus, en l'absence de texte, nous savons uniquement que Regiomontanus[28] qui a commencé la traduction latine des *Coniques* d'Apollonius, a essayé de résoudre certains problèmes du livre des *Contacts* , mais a échoué au problème des trois cercles.

Il s'agit sans doute, ici, pour Viète, de souligner certaine supériorité de son algèbre qui permet par exemple de conserver, dans l'expression des solutions, les traces des éléments donnés au départ, donc donne un moyen de construire ces solutions, en traduisant les opérations algébriques géométriquement, ainsi qu'il l'énonce dans l'*Art Analytique,* sans avoir besoin de résoudre l'équation, mais en examinant seulement les coefficients. Il a, par ailleurs, affirmé que tout problème du second degré est un problème plan, c'est à dire peut se construire à la règle et au compas, ne dépendant que de considérations sur les droites et les cercles. Viète a reconnu dans le problème du cercle tangent à trois cercles donnés un problème plan ; un bon algébriste devrait donc arriver à cette même conclusion.

Par ailleurs, au paragraphe 29 du chapitre VIII de *L'Art analytique*, nous trouvons :

[28]voir Rosen E, *Regiomontanus*, in D.S.B., vol.20, p.348 à 352

Enfin l'art analytique s'approprie à bon droit le magnifique problème de la triple forme enfin revêtue, de la zététique, de la poristique, et de l'exégétique. Ce qui est : AUCUN PROBLÈME QUI NE SOIT RÉSOLU.

Cette formule pourra être rapprochée de ce qu'écrira Descartes quelques années plus tard, mais ici Viète met en avant la différence et la supériorité de son Analyse. Pour que ce soit très évident, au chapitre IV de l'*Isagoge*, il pousse le lecteur, de façon très explicite, à mettre en parallèle, point par point, la logistique numérique de Diophante, (c'est à dire *celle qui montre au moyen des nombres*), et sa propre logistique spécieuse,(c'est à dire *celle qui montre au moyen des espèces ou des formes des choses, comme au moyen des éléments alphabétiques*).

Adrien Romain, qui connaissait les travaux de Regiomontanus, ne parvint pas à résoudre le problème à l'aide de la règle et du compas seuls, forme de construction attendue de Viète. Il transmit une solution qui déterminait le centre du cercle tangent aux trois cercles donnés au point d'intersection de deux hyperboles. Cette solution fut publiée à Wurzbourg en 1596 sous le titre *Problema Apolloniacum quo datis tribus circulis*[29].

Le recours aux coniques , comme nous l'avons souligné, ne pouvait être accepté par Viète, et, dans son esprit, ne pouvait être conforme à la méthode des anciens.

D'une manière générale, les lieux sont appelés plans, ceux même dont nous allons traiter, en tant qu'ils sont constitués par des lignes droites ou des cercles.

Viète fait connaître sa solution par une lettre manuscrite adressée dès 1597 au géomètre belge qui résidait alors à Wurzbourg. Elle fut imprimée à Paris, en 1600, par l'imprimeur David Le Clerc, grâce aux soins vraisemblablement de Marino Ghetaldi, sous le titre *L'Apollonius Français de François Viète ou la résurrection de la géométrie sur les contacts d'Apollonius de Perga dédié à l'éminent belge Adrien Romain.* Il y explique pourquoi la solution qui recourt aux coniques n'est pas acceptable :

Éminent Adrien, j'ai proposé aux amateurs de mathématiques de traiter par une méthode géometrique et non par une méthode

---

[29]*Problema Apolloniacum quo datis tribus circulis, quaeritur quartus eos contingens, antea ab illustri viro D. Francisco Vieta consiliaro Regis Galliarum, ac libellorum supplicum in Regia Magistro, omnibus mathematicis sed potissimum Belgii ad construendum propositum, jam vero per belgam Adrianum Romanum constructum.*voir H.Bosmans, *Annales de la société scientifique*, Bruxelles, tome XXIX, 1905.

mécanique ce problème d'Apollonius du tracé d'un cercle que touchent trois cercles donnés. Tant qu'on touche le cercle avec des hyperboles, on n'aborde pas le problème avec doigté. En effet on ne peut pas tracer l'hyperbole par la géométrie au sens savant du terme.

Le texte dit de l'*Apollonius Gallus* est d'ailleurs suivi de deux petits appendices *: Au sujet des problèmes dont Regiomontanus dit ne pas connaître la construction géometrique,* et *Au sujet de problèmes dont les astronomes ne rapportent pas la conduite géometrique, et ainsi les résolvent malheureusement.* Ce qui marque bien ses idées sur la méthode géométrique, et la supériorité qu'il s'accorde à bien l'utiliser.

Dans l'édition originale de 1600, de *l'Apollonius Gallus,* une dédicace en grec adressée à Viète précède le texte latin. Elle ne sera pas reprise dans l'édition publiée à Leyde en 1646, dans l'*Opera mathematica.*

L'auteur de la dédicace en grec est manifestement un proche, et admirateur de Viète. J.Grisard, dans sa thèse pense qu'il s'agit peut-être d'Aleaume ou Du Lys. Nous en proposerions la traduction qui suit :

Au très illustre et très savant conseiller François Viète, salut.

Nombreuses sont les raisons qui me poussent à t'admirer, très illustre ami, car, bien que tu consacres la plupart de ton temps à tes charges judiciaires et politiques, tu excelles et brilles dans toutes les branches du savoir, au point que l'on s'étonne de cette maîtrise et plus particulièrement de cette sagacité d'esprit, qui t'a fait voir clair, quand des missives, de façon mystérieuse, dissimulaient sous chaque lettre bien des secrets concernant la guerre et la paix, mais qui t'a conduit aussi au faîte de toute la réflexion et de tout le savoir mathématiques. Cela était manifeste dans les traités que tu as publiés autrefois, car il est probable que ceux qui y ont approfondi avec rigueur et passion les notions mathématiques, te décernent la palme du savoir, et çà l'est plus encore dans les traités récents, où tu as donné l'explication et la solution de problèmes de géometrie proposés par d'autres par gloriole et pour se faire valoir. En vérité, tu y es apparu selon le mot de Lycophron :

".....démêlant les voies confuses des énigmes,
tandis que devant toi s'ouvre un chemin évident et tout droit,
devant toi, qui guides nos pas dans l'obscurité."

Or, il y a peu, voici ce qu'il m'est arrivé de découvrir en lisant les analyses développées à propos d'un problème opaque et *énigmatique par celui qui le propose. Plein d'onction, il ne récuse pas formellement ta solution. Mais il reste partagé sur son mérite, mérite qu'en plus il attribue à quelqu'un d'autre : malhonnêtement à mon avis. Forçant les choses et les poussant trop loin, il taxe d'arguties ce que tu as proposé de façon concise, mais néanmoins parfaite, lui qui vraiment ne mérite pas qu'on le loue pour son intelligence de la géométrie. Car tout travail de recherche où l'on retourne le problème trois, quatre fois, est, selon Pindare, marque d'impuissance. Il me semble donc avoir là fait fausse route en vous proposant peu à propos d'élaborer cette solution. Et nous délivrer de cette difficulté aux détours trop nombreux n'est pas de ma compétence. J'ambitionne en vérité de l'obtenir de toi, si tu peux ne pas être accaparé, comme cela t'arrive souvent sur l'ordre du roi, par les soucis de l'état et autres problèmes politiques et si tu as envie de t'associer à des passionnés pour redresser ce qui dans la géométrie a paru boiteux à d'autres. Et ce, afin que tu apparaisses comme un autre Apollonius, celui que les anciens appelaient le Grand, revivant parmi nous, et que grâce à toi le nom français ne soit surpassé par aucun autre dans l'intelligence des mathématiques. Salut.*

Ainsi que nous l'avons déjà souligné, le problème proposé par Viète trouve son origine dans le traité des contacts d'Apollonius, qui fait partie des nombreux traités perdus d'Apollonius dont les titres et quelques commentaires nous sont parvenus par l'intermédiaire de Pappus. Viète connaissait la traduction latine de Commandino de *La Collection* de Pappus.[30] Les livres I à IV des *Sections coniques* d'Apollonius étaient aussi connus, et, nous l'avons indiqué, Regiomontanus en avait fait une traduction partielle en latin,(Les livres V à VII restèrent inconnus du monde européen jusqu'à la découverte au milieu du XVII° siècle d'une traduction arabe datant de 1250. Le livre VIII n'a jamais été retrouvé.)

Le dernier problème du *Traité des contacts* avait été résolu, en partie, ainsi que nous l'avons constaté, par les mathématiciens arabes au X° siècle, ce qui, fort probablement était totalement inconnu des mathématiciens européens.

Pour résoudre ce dernier problème, celui-là même qu'il a soumis à Adrien Romain, Viète va reprendre les neufs problèmes précédents, dans la lignée du

[30]Pesara, 1588.

livre des contacts présenté par Pappus. L'ordre dans lequel il traite les problèmes diffère quelque peu de celui donné par Pappus.

> *Pappus a ramené les problèmes sur les contacts d'Apollonius de Perga à dix : je les résoudrai donc un à un selon l'ordre qui paraîtra le plus opportun.*

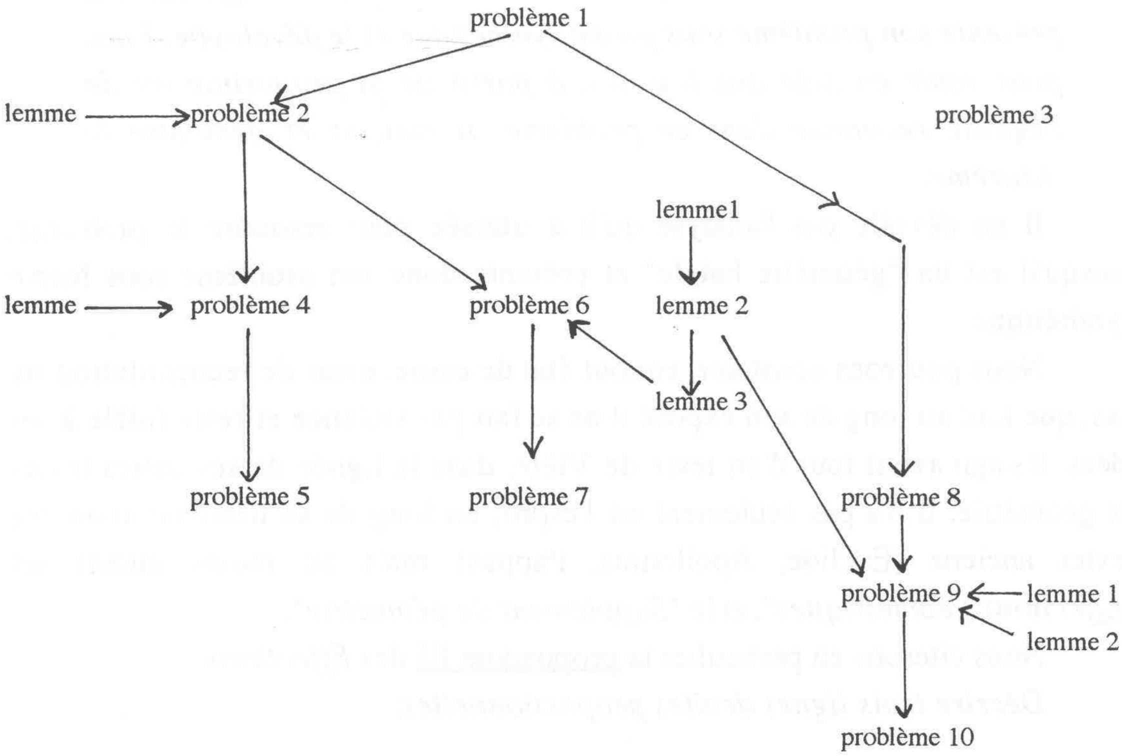
Nous trouvons :

- Problème 1 : Décrire un cercle qui passe par trois points donnés ; il faut par ailleurs que ces trois points ne soient pas sur une même droite.
- Problème 2 : Étant donné deux points et une ligne droite, décrire par ces deux points un cercle auquel soit tangente la droite donnée.
- Problème 3 : Étant donné trois droites, décrire un cercle auquel chacune soit tangente. Il faut par ailleurs que les droites données ne soient pas parallèles.
- Problème 4 : Étant donné deux droites et un point, faire passer par le point donné un cercle auquel soient tangentes les deux droites données.
- Problème 5 : Étant donné un cercle et deux droites, décrire un cercle auquel soient tangents le cercle et les droites donnés.
- Problème 6 : Étant donné un point, une droite et un cercle, faire passer par ce point un cercle auquel soient tangents cette droite et ce cercle.
- Problème 7 : Étant donné deux cercles et une droite, décrire un troisième cercle auquel soient tangents les deux cercles donnés et la droite donnée.
- Problème 8 : Étant donné deux points et un cercle, faire passer par les deux points donnés un cercle auquel soit tangent le cercle donné.
- Problème 9 : Étant donné deux cercles et un point, faire passer par le point donné un cercle auquel soient tangents les deux cercles donnés.
- Problème 10 : Étant donné trois cercles, décrire un quatrième cercle auquel ils soient tangents tous les trois.

Par ailleurs, Viète démontre sept lemmes, qui ne sont pas vraiment ceux cités par Pappus.

Ces seules constatations permettent de dire que l'*Apollonius Gallus* n'est pas une reconstitution, du moins fidèle, du *Livre des contacts* d'Apollonius. Il n'est pas absolument évident que ce fut le souci de Viète, en dépit du titre annoncé, *la résurrection de la géométrie sur les contacts*. Il s'agissait peut-être seulement de se montrer aussi "grand" qu'Apollonius, en résolvant les dix problèmes, à la manière des anciens.

Examinons par ailleurs l'organisation des résolutions successives des dix problèmes :



Nous constatons que les problèmes 2, 3, 4, 5, 6, 7 ne sont pas nécessaires pour la solution du problème 10, et l'on peut s'en étonner. Il ne s'agissait donc pas seulement pour Viète de résoudre le seul dernier problème. Volonté réelle alors de reconstitution ?

Quelques uns de ses successeurs , du moins, tout en admirant le génie de Viète, estimeront qu'il s'agit d'un essai de reconstitution imparfait et essaieront de "restituer" plus fidèlement *Le livre des contacts* .

Quoi qu'il en soit, nous constaterons que le style de la démonstration est très euclidien, tant dans la forme que dans l'esprit : énoncé général du problème, traduction plus précise en nommant les objets, démonstration synthétique où l'analyse n'apparaît nullement. Ceci est de toutes façons conforme semble-t-il à ce qu'il a déclaré dans le chapitre VII de l'*Isagoge* :

> *Toute résolution géométrique n'est pas élégante et chaque problème appelle un style propre. En vérité, la solution qui s'impose sur toutes les autres c'est celle qui n'articule pas la solution du problème à partir de la mise en équation, mais qui ordonne la mise en équation à partir de la position du problème : la position du problème est à elle-même sa propre démonstration. C'est pourquoi le géomètre habile, fut-il expert en analytique, le*

dissimule. Et comme s'il réfléchissait à la résolution à effectuer, il présente son problème sous forme synthétique et le développe. Puis, pour venir en aide aux logistes, à partir de la proportion ou de l'égalité reconnue dans ce problème, il conçoit et démontre le théorème.

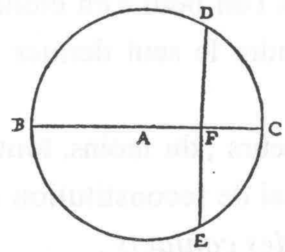
Il ne dévoile pas l'analyse qu'il a utilisée pour résoudre le problème, puisqu'il est un "géomètre habile" et présente donc son problème sous forme synthétique.

Nous pourrons constater, en tout état de cause, essai de reconstitution ou pas, que tout au long de son exposé il ne se fait pas violence et reste fidèle à ses idées. Il s'agit avant tout d'un texte de Viète, dans la lignée de ses autres textes de géométrie. Il n'a pas seulement en l'esprit, au long de sa démonstration, les textes anciens (Euclide, Apollonius, Pappus) mais au moins autant ses "*Effections géométriques*", et le "*Supplément de géométrie*".

Nous citerons en particulier la proposition III des *Effections* :

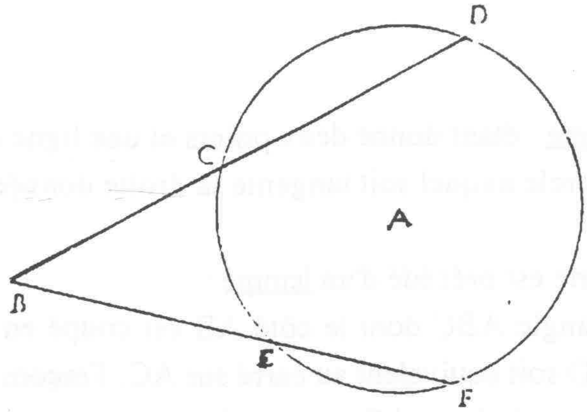
Décrire trois lignes droites proportionnelles:

Apparaît ici une figure de référence, où BF, FD, FC, sont proportionnelles, c'est-à-dire, en notations modernes : $\frac{BF}{FD} = \frac{FD}{FC}$ ou encore : $FD^2 = BF \, . \, FD$



Nous citerons aussi la proposition II du *Supplément de géométrie* :

Dans la construction suivante, $BC \, . \, BD = BE \, . \, BF$, en relation directe bien sûr avec ce que nous appelons maintenant la puissance d'un point par rapport à un cercle.



Il est temps alors d'étudier plus avant la démarche de Viète.
Nous examinerons de façon précise les procédés de construction, puisqu'il s'agit de s'assurer, de fait, que les problèmes sont constructibles à la règle et au compas. Cela ne fait aucun doute pour Viète qui s'est effectivement assuré de cette constructibilité, ainsi qu'il nous en a averti. Ses lecteurs peuvent peut-être avoir besoin d'en être convaincus.

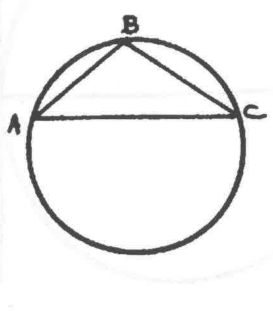
Nous n' avons pas toujours respecté l'écriture des démonstrations dans notre commentaire, nous avons pris parfois quelques libertés. En particulier, suivant le style euclidien, les éléments de la figure sont nommés avant d'avoir été définis. Ceci peut parfois rendre la lecture ardue. La traduction donnée en annexe permettra de rétablir le texte dans son intégralité.

Examen des dix problèmes de l'*Apollonius Gallus* :

Premier problème : décrire un cercle qui passe par trois points donnés. Il faut par ailleurs que ces points ne soient pas alignés.

En toute logique nous attendrions une analyse sommaire qui ferait effectivement apparaître cette condition. Il n'y a aucun embryon de discussion dans le texte de Viète, contrairement à ce qui a pu être fait dans les textes arabes par exemple.

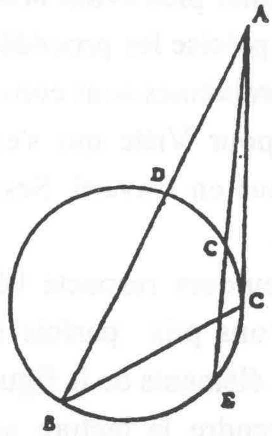
Le problème par ailleurs peut sembler assez trivial lorsqu'on se réfère à la proposition 5 du livre IV des *Éléments* d'Euclide. Viète nous y renvoie d'ailleurs rapidement.(C'est le seul endroit où il fait appel aux *Éléments*). Cependant, la proposition 5 concerne un cercle circonscrit à un triangle ; Viète nous propose donc de joindre les trois points pour obtenir un triangle.



<u>Deuxième problème</u> : étant donné deux points et une ligne droite, décrire par ces deux points un cercle auquel soit tangente la droite donnée.

Ce problème est précédé d'un <u>lemme</u> :

Soit un triangle ABC dont le côté AB est coupé en D de manière que le rectangle AB . AD soit équivalent au carré sur AC. Traçons le cercle passant par B, D, C. La droite AC est alors tangente au cercle DBC.



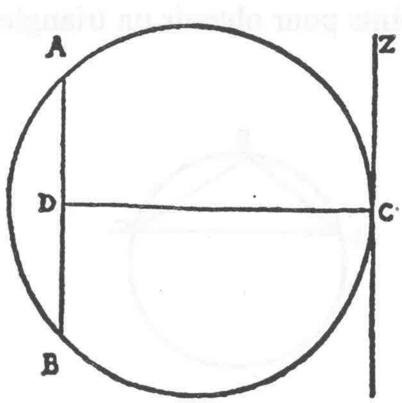
Il aurait pu se reporter à la proposition 37 du livre III des *Éléments* d'Euclide, sans trop d'inconvénient. Pourtant il démontre ce lemme à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.

Supposons que la droite AC ne soit pas tangente, alors elle coupe le cercle en deux points C et E. Alors, $AB \cdot AD = AE \cdot AC$. Ce résultat fait partie du corpus géométrique de Viète, ainsi que nous l'avons souligné, et, sans doute est-ce un résultat largement répandu, puisqu'il ne nous donne aucune référence.

Nous obtenons finalement $AB \cdot AD = AE \cdot AC = AC^2$, ce qui est impossible puisque les longueurs AE et AC ne sont pas égales.

Le deuxième problème peut alors être traité. Ici aussi, Viète distingue deux cas, sans en justifier la nécessité.

Dans le premier cas, la droite AB et la droite donnée sont parallèles.



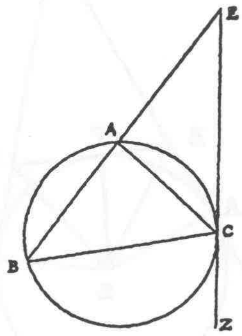
Il construit la médiatrice de [AB], qui coupe la droite donnée en C; il suffit alors de construire le cercle passant par A, B et C. Ce que l'on sait faire d'après le problème I.

Si maintenant la droite AB n'est pas parallèle à la droite donnée, ces deux droites se rencontrent en E. Il faut alors construire C sur la droite donnée, de sorte que $EA \cdot EB = EC^2$. Cette construction est celle de la proposition III des *Effections*. Cependant, là encore, Viète ne nous y renvoie pas.

Le point C étant construit, il suffit d'utiliser le problème I pour construire le cercle cherché.

La construction est -elle toujours possible ? Viète n'y fait pas allusion. Il s'est placé dans le "bon" cas.

Nous allons retrouver cette lacune, pour notre logique du XX°siècle, tout au long du travail de Viète.



Troisième problème : étant donné trois droites, tracer un cercle auquel chacune soit tangente. Il faut par ailleurs que les droites données ne soient pas parallèles.

Nous avons remarqué que ce problème est absolument indépendant des autres, et Viète nous ayant annoncé que les problèmes seraient traités selon l'ordre qui lui paraîtrait opportun, l'on peut s'étonner de la place de ce problème.

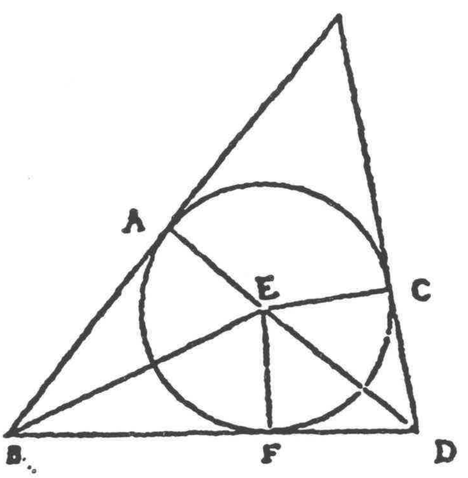
Pappus situait ce problème en deuxième position, sans doute parce que, similairement au premier, il est presque traité dans les *Éléments* d'Euclide. (proposition 4, livre IV, "Dans un triangle donné, construire un cercle").

D'ailleurs, par le fait que trois points non situés sur une droite sont donnés, la proposition revient à décrire un cercle autour d'un triangle donné et, par le fait que trois droites non parallèles sont données, (mais trois droites qui se rencontrent), la proposition revient à inscrire un cercle dans un triangle donné ; car le cas d'avoir deux droites parallèles et une autre qui les *rencontre est traité en tête de tous ces problèmes comme étant une partie du second problème subdivisé.*[31]

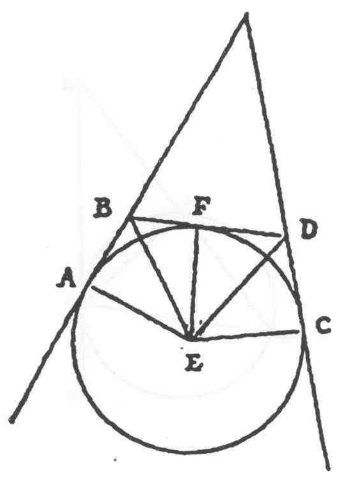
Viète ici, même si les figures jointes sont trompeuses, va traiter d'une façon originale les deux subdivisions du problème évoquées par Pappus. Il s'écarte en cela de la proposition 4, IV, des *Éléments*, et va bien au-delà.

La seule hypothèse prise en compte est qu'une des trois droites n'est pas parallèle aux deux autres ; ainsi elle les rencontre en deux points B et D, La construction des bissectrices des deux angles DBA et BDC donne un point E équidistant des trois droites. Il s'agit alors de construire un cercle de centre donné E et de rayon donné EA, ou EC, ou EF. Viète propose les deux premières figures, elles pourraient être complétées par la troisième où apparaît clairement la validité du raisonnement lorsque deux des droites sont parallèles.

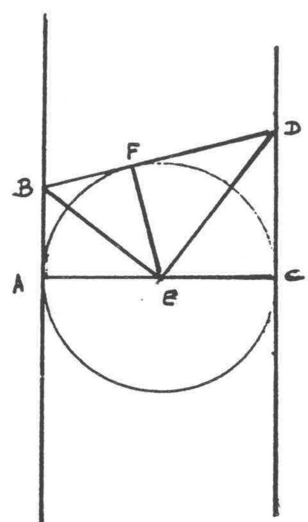
Nous remarquons que, même si la présentation suggère plusieurs constructions possibles, donc plusieurs solutions, leur nombre n'est pas discuté.



I



II



III

<u>Quatrième problème</u> : étant donné deux droites et un point, faire passer par le point donné un cercle auquel soient tangentes les deux droites données.

La résolution de ce problème est précédée d'un <u>lemme</u> : par un point donné tracer une droite qui coupe deux droites données sous des angles égaux.

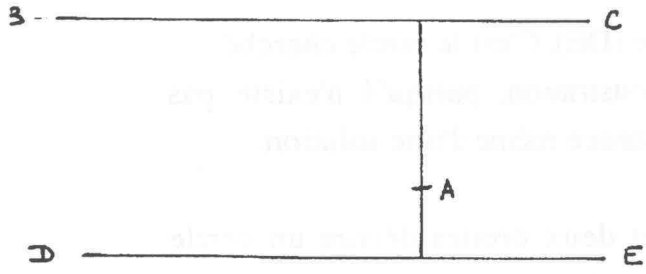
Si les droites sont parallèles, il suffit de mener par A la perpendiculaire (commune) aux deux droites.

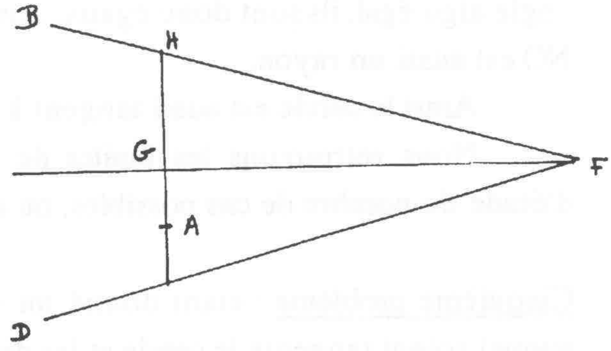
Si les droites ne sont pas parallèles, elles se rencontrent en F ; il construit la bissectrice de l'angle DFB, puis la perpendiculaire à cette bissectrice passant par A. Les triangles HGF et FGI sont égaux, et par suite les angles GHF et GIF.

---

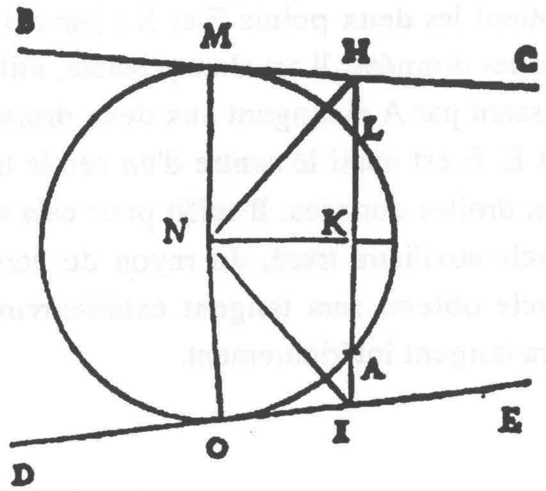
[31] Pappus d'Alexandrie, *La collection mathématique*, traduction de P. Ver Eecke, Blanchard, Paris, 1982, tome II, p.484.

Aucune directive de construction des divers éléments n'est donnée, mais à l'évidence, il s'agit , ici aussi, de constructions répertoriées et élémentaires.





Suit alors la résolution du problème, qui va s'appuyer bien sûr sur ce lemme, mais aussi sur le problème II.



A est le point donné, BC et DE les droites données. Par A, nous menons la droite qui coupe les deux droites BC et DE sous des angles égaux, respectivement en H et I. Nous construisons alors K le milieu de [IH], puis L sur (IH) de telle sorte que $KA = KL$. En utilisant le problème II, il est alors possible de construire le cercle passant par A et L et tangent à l'une des droites par exemple (BC). Si l'on montre que ce cercle est aussi tangent à (DE) ce sera le cercle cherché.

Soit M le point de contact de (BC) au cercle, et soit N son centre. Traçons la perpendiculaire passant par N à (DE) qui coupe la droite en O.

K est le milieu de [AL], donc (NK) est perpendiculaire à (AL) ou (IH).

K est le milieu de [HI], les triangles NHK et NHI sont donc deux triangles rectangles égaux, comme ayant les deux côtés KI et KH égaux, et le côté NK commun. Ainsi, $NI = NH$ et les angles NHK et NIK sont égaux.

Par construction les angles MHK et OIK sont égaux, par ailleurs les angles NHK et NIK sont égaux, donc les angles NHM et NIO sont égaux.

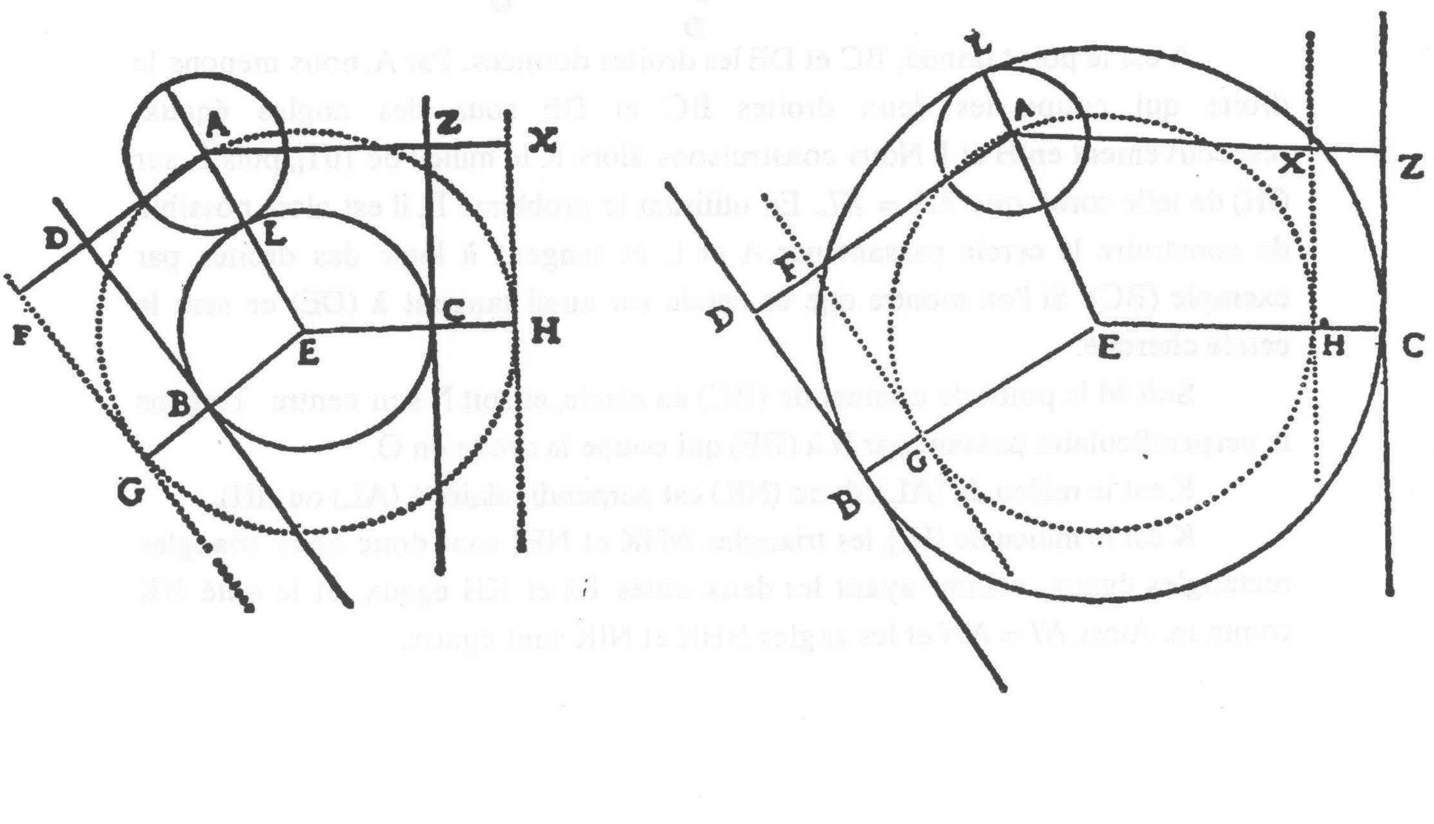
Les triangles rectangles NHM et NIO, ont des hypoténuses égales et un angle aigu égal, ils sont donc égaux. Ainsi $MN = NO$; or MN est un rayon, donc NO est aussi un rayon.

Ainsi le cercle est aussi tangent à la droite (DE). C'est le cercle cherché.

Nous retrouvons les limites de la démonstration, puisqu'il n'existe pas d'étude du nombre de cas possibles, ou de l'existence même d'une solution.

Cinquième problème : étant donné un cercle et deux droites décrire un cercle auquel soient tangents le cercle et les droites données.

Voici la construction proposée par Viète : le cercle donné a pour centre A on abaisse à partir de A les perpendiculaires aux deux droites, respectivement en D et Z. Sur chacune de ces deux droites, on prend des longueurs égales au rayon du cercle donné, en les ajoutant à AD et AZ, ou en les retranchant. On obtient les deux points F et X ; par ces points on trace les parallèles aux deux droites données. Il est alors possible, utilisant le problème IV, de tracer un cercle passant par A et tangent aux deux droites auxiliaires tracées. Le centre de cercle est E. E est aussi le centre d'un cercle tangent au cercle donné de centre A et aux droites données. Il suffit pour cela d'augmenter ou de diminuer le rayon du cercle auxiliaire tracé, du rayon du cercle donné de centre A. Dans un cas le cercle obtenu sera tangent extérieurement au cercle donné, dans l'autre cas il sera tangent intérieurement.



Cette construction ne présente apparemment pas de difficulté. Il n'existe cependant toujours pas de discussion sur le nombre de solutions possibles. Et nous pouvons d'ailleurs remarquer que la difficulté de la discussion devient de plus en plus délicate au fur et à mesure, puisque les constructions s'appuient les unes sur les autres.

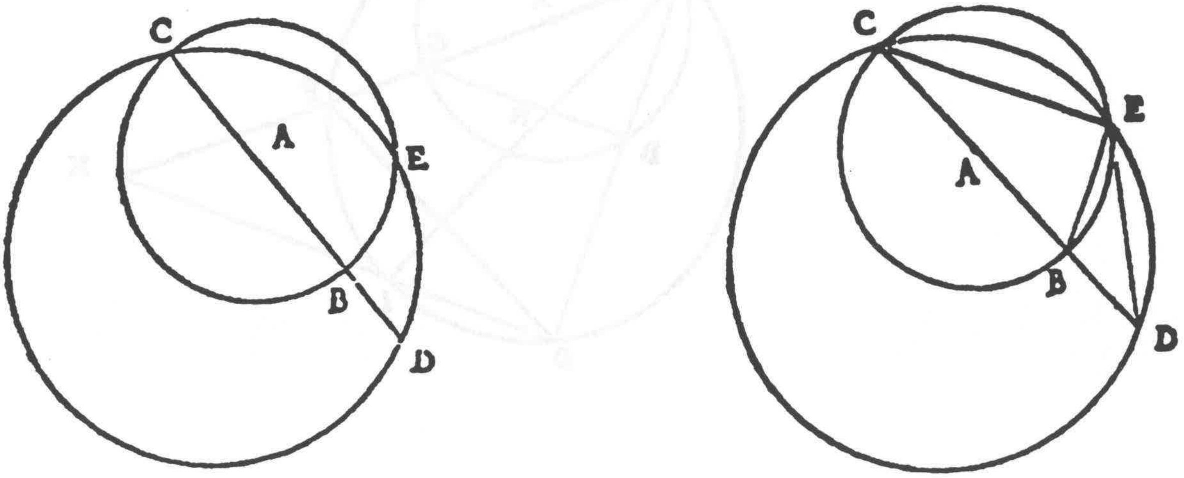
Nous reconnaissons ici que l'appareil de démonstrations géométriques utilisé par Viète n'est pas très adapté à ce genre de questions. Il permet de donner certaines solutions dans quelques cas bien choisis ; il est plus délicat d'examiner la validité de ces constructions dans tous les cas, et d'épuiser le nombre de possibilités. C'est ce que s'efforceront de faire, effectivement, la plupart de ses nombreux successeurs.

Continuons l'exploration de l'*Apollonius Gallus*.

Sixième problème : étant donné un point, une droite et un cercle, faire passer par ce point un cercle auquel soient tangents cette droite et ce cercle.

La résolution de ce problème est précédée de trois lemmes.

Lemme 1 : Si deux cercles sont sécants, et que nous menons à partir d'un de leurs points d'intersection une droite passant par le centre d'un des cercles, cette ligne ne passera pas par le centre du second cercle.



Il suffit de démontrer que l'angle CED n'est pas droit, pour que CABD ne soit pas un diamètre. Ce qui est vérifié puisque CEB est droit et que , par ailleurs, CED ne peut être égal à CEB.

Ce lemme est utile pour la démonstration du lemme suivant

Lemme 2 : Si deux cercles sont sécants, et que d'un de leurs points d'intersection nous traçons une sécante aux deux cercles, les segments de ces cercles seront dissemblables.

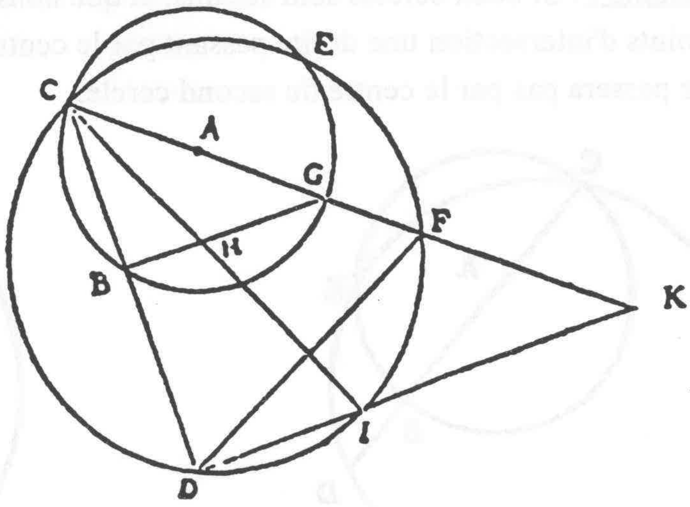
Les deux cercles se coupent en C et E ; l'un des cercles a pour centre A ; la sécante passe par C et coupe le cercle de centre A en B, l'autre cercle en D ; Il s'agit de montrer que les angles interceptés par l'arc CEB, et par l'arc CED ne sont pas égaux.

Viète distingue deux cas, selon que la sécante passe par A, et donc est un diamètre, ou ne passe pas par A;

Le premier cas est simple, puisque l'angle CEB est droit et l'angle CED ne peut l'être.

Pour le deuxième cas, on trace la sécante CA, qui coupe les cercles respectivement en G et F. D'après le lemme précédent, CF ne peut être un diamètre, donc l'angle CBG est droit, mais pas l'angle CDF. Le centre du cercle CEFD est appelé H , la droite CH coupe ce cercle en I, et l'angle CDI est donc droit. Les droites BG et DK sont donc parallèles, et les triangles CBG et CDK sont semblables. L'angle CGB (ou CEB) est donc égal à l'angle CKD ; l'angle CKD ne peut être égal à l'angle CFD (ou CED). il est donc clair que les angles CEB et CED ne sont pas égaux.

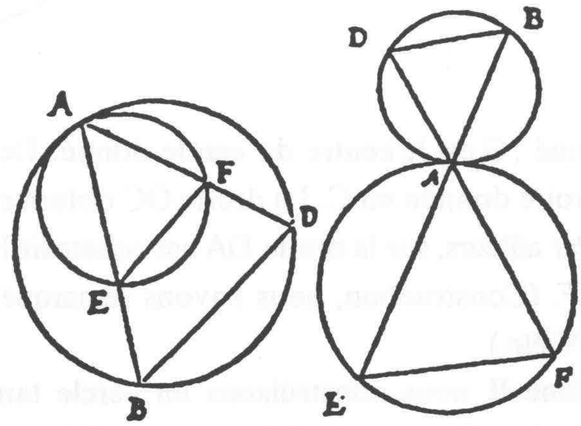
Ce deuxième lemme sert à la démonstration du troisième lemme.



Lemme 3 : Si on construit en partant des côtés d'un triangle une droite parallèle à sa base, on bâtit à partir du même sommet deux triangles semblables. Le cercle circonscrit au premier triangle sera tangent au cercle circonscrit au deuxième triangle.

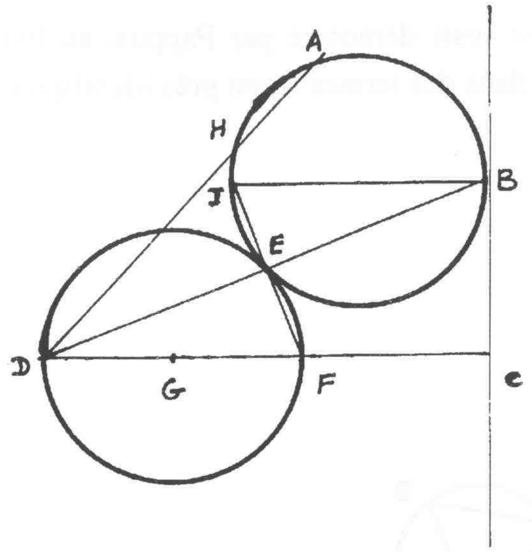
Les deux cercles ont le sommet A en commun, ils sont donc sécants ou tangents en A. Ils ne peuvent se couper puisque dans ce cas d'après le lemme précédent, les segments circulaires AB et AE seraient dissemblables, c'est à dire, les angles AFE et ADE ne seraient pas égaux. Ce qui est évidemment contraire à la construction.

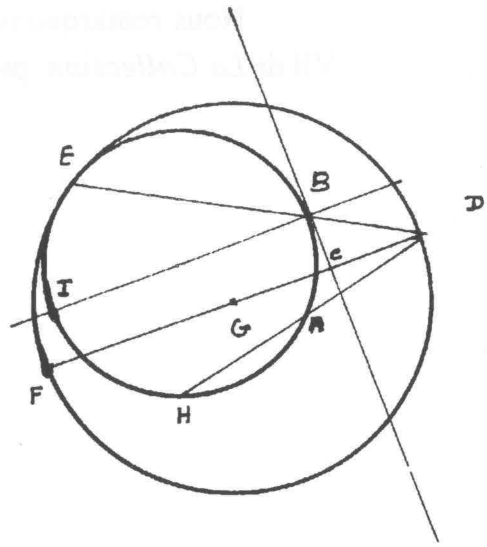
Nous remarquons que ce lemme est aussi démontré par Pappus, au livre VII de *La Collection*, proposition 104 [32], dans des termes à peu près identiques.



[32] Ouvrage déjà cité, p. 639-640.

Construction pour le problème 6 :





A est le point donné ; G est le centre du cercle donné. De G on abaisse la perpendiculaire sur la droite donnée en C. La droite GC obtenue coupe le cercle de centre G en D et F. Par ailleurs, sur la droite DA est construit H tel que

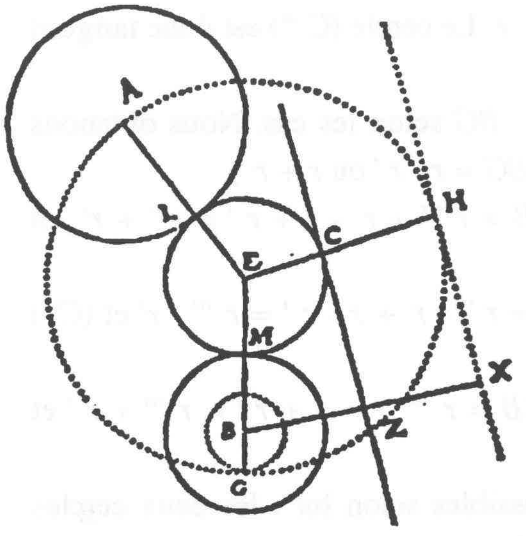
DA.DH = DC.DF. (Construction, nous l'avons remarqué, inscrite dans le corpus géométrique de Viète.)

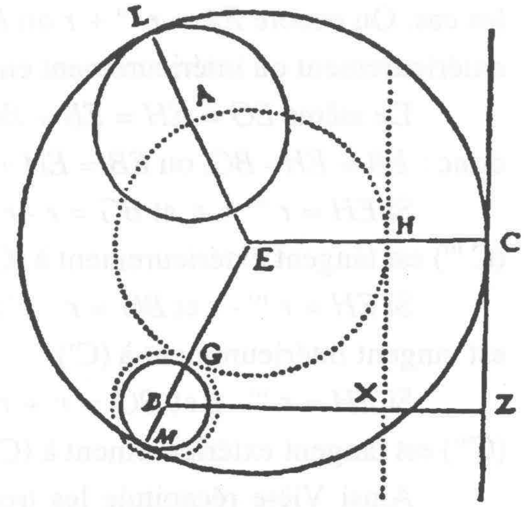
Utilisant le problème II, nous construisons un cercle tangent à la droite donnée en B, passant par A et H. La droite DB coupe en E le cercle de centre G ; l'angle DEF est alors droit. Les triangles DEF et DCB sont alors semblables et les produits DB.DE et DF.DC égaux. Par construction *DF.DC = DA.DH*, donc *DB.DE = DA.DH.* Viète en déduit immédiatement que A, H, E, B sont cocycliques, ce qui n'est pas absolument évident ; en d'autres circonstances, il prend le temps de justifier. Cela lui permet cependant d'affirmer que E est sur le cercle AHB. Le diamètre BI de ce cercle est perpendiculaire à la droite BC, puisque c'est une tangente. Ainsi, les droites BI et DC sont parallèles. De plus, les angles IEB et DEF sont droits. Donc I, E, F sont alignés. Les triangles DEF et BEI sont semblables, ayant même sommet, d'après le lemme 3 précédent, les cercles DEF et AEB sont tangents en E. Ainsi le cercle BAE est le cercle cherché.

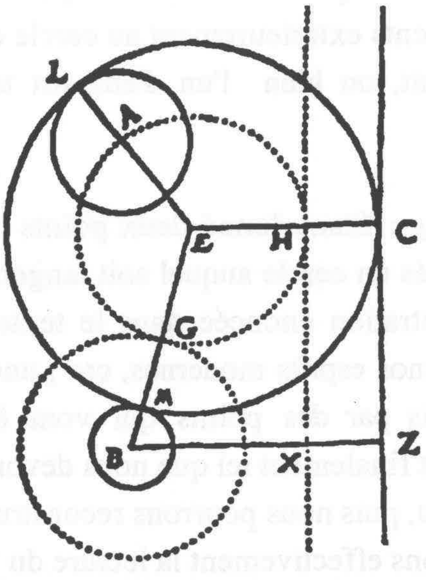
Les deux figures proposées par Viète indiquent implicitement deux cas où la construction est possible. Dans d'autres cas elle ne le serait sans doute pas. Mais ceci n'est aucunement mentionné.

Il semble clair que l'analyse manque tout de même pour nous convaincre, et que, à l'instar de la géométrie de style euclidien, la figure ici est un peu trop le support de la démonstration.

<u>Septième problème</u> : Étant donné deux cercles et une droite, décrire un troisième cercle auquel soient tangents les deux cercles donnés et la droite donnée .







Appelons (C) et (C ') les deux cercles, de centres respectifs A et B, et de rayons respectifs r et r '. Implicitement, Viète suppose que ces rayons sont inégaux et que r > r '. (Le cas de deux cercles de même rayon ne sera pas examiné). Soit (D) la droite donnée, (CZ).

La perpendiculaire à (D) passant par B coupe (D) en Z. Sur la droite BZ, nous plaçons X de telle sorte que $ZX = r$, d'un côté ou de l'autre de Z. Par X nous menons la droite (D ') parallèle à (D).

Puis nous traçons un cercle auxiliaire (C ") de centre B et de rayon $r - r'$ ou $r + r'$.

Utilisant le problème VI, nous pouvons tracer un cercle passant par A , tangent à (C ") en G et à (D ') en H. Son centre sera E. La droite EH coupe (D) au point C . Le cercle (C ''') de centre E et de rayon EC(= r ''') sera le cercle cherché.

En effet, par construction la droite EC est perpendiculaire à (D), donc le cercle (C ''') est tangent à (D)..

Par ailleurs, $EH = EA$, et $CH = r$. Donc, $EC = r''' = EA - r$ ou $EA + r$ selon les cas. Ou encore $EA = r''' + r$ ou $EA = r''' - r$. Le cercle (C ''') est donc tangent extérieurement ou intérieurement en L à (C).

De même $EG = EH = EB + BG$ ou $EB - BG$ selon les cas. Nous obtenons donc : $EB = EH - BG$, ou $EB = EH + BG$. (et $BG = r - r'$ ou $r + r'$)

Si $EH = r''' + r$ et $BG = r - r'$ alors $EB = r''' + r - r + r' = r''' + r'$, et (C ''') est tangent extérieurement à (C ');

Si $EH = r''' - r$ et $BG = r - r'$ alors $EB = r''' - r + r - r' = r''' - r'$ et (C''') est tangent intérieurement à (C').

Si $EH = r''' - r$ et $BG = r + r'$ alors $EB = r''' - r + r + r' = r''' + r'$ et (C''') est tangent extérieurement à (C').

Ainsi Viète récapitule les trois cas possibles selon lui : les deux cercles donnés sont tangents extérieurement au cercle construit, ou bien intérieurement au cercle construit, ou bien l'un d'eux est tangent intérieurement et l'autre extérieurement.

<u>Huitième problème</u> : Étant donné deux points et un cercle, faire passer par les deux points donnés un cercle auquel soit tangent le cercle donné.

La démonstration énoncée dans le texte original apparaît quelque peu embrouillée pour nos esprits modernes, car , une fois de plus les éléments de la figure sont définis par des points qui vont être construits progressivement ensuite. Il apparaît finalement ici que nous devons imaginer l'analyse, c'est à dire le problème résolu, puis nous pourrons reconstruire progressivement la synthèse.

Commençons effectivement la lecture du texte :

Soit deux points donnés B et D ainsi qu'un cercle EFG de centre A. Il faut par les points B et D décrire un cercle auquel soit tangent le cercle EFG.

Menons la droite BD passant par H de manière que le rectangle construit sur BD et BH soit égal à la différence des carrés de AB et AF, que la droite HF soit tangente au cercle EGF et que la droite BF coupe le cercle EFG en F et G.

En fait, les points donnés sont B et D. Le cercle donné a pour centre A. En termes contemporains, nous devons d'abord placer H sur la droite BD, de telle sorte que le produit BD.BH soit égal à la puissance de B par rapport au cercle de centre A. Ce point H peut se situer entre B et D ou à l'extérieur. Nous menons ensuite par H la tangente au cercle donné, pour obtenir le point de contact F. Puis la droite BF coupe le cercle en un deuxième point G, et la droite DG coupe le cercle en un deuxième point E. Nous pouvons alors aborder la démonstration de Viète en ayant bien noté que toutes ces constructions se font sans problème à la règle et au compas.

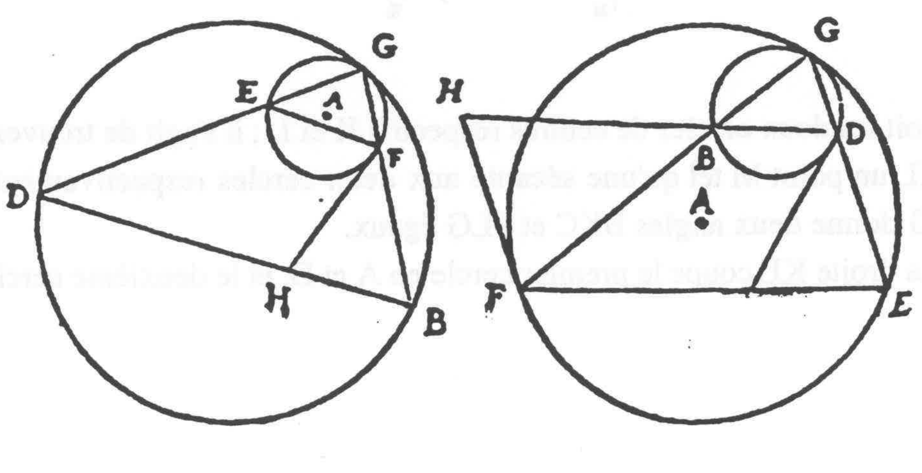
Utilisant le problème I, nous construisons le cercle passant par B, D et G. Il s'agit de montrer que ce cercle convient au problème.

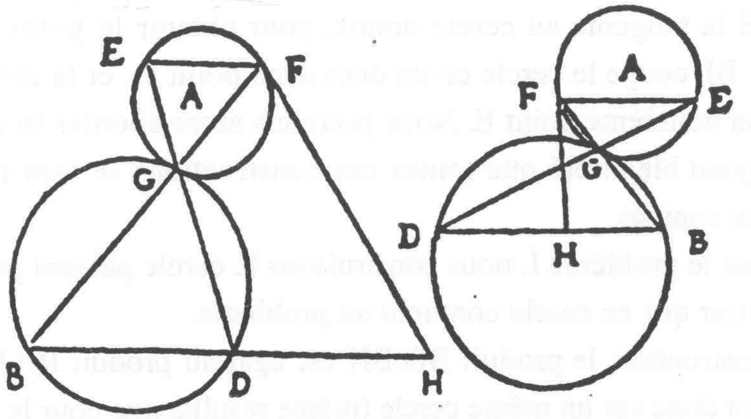
Par construction, le produit BD.BH est égal au produit BF.BG, les points D, G, F, H sont donc sur un même cercle (même résultat que pour le problème VI). Ainsi l'angle DGB est égal à l'angle FHB. (On peut s'appuyer sur la proposition 22 livre III des *Éléments*). De même l'angle GDB est égal à l'angle HFB ; et cet angle HFB est égal à l'angle GEF car la droite HF est tangente au cercle EFG. (proposition 32, livre III des *Éléments*)

Nous remarquons que Viète place toutes ces égalités sur un même plan, alors qu'elles font tout de même appel à des théorèmes ou situations différentes ; ceci ne facilite pas la lecture, et il n'est pas certain que les contemporains s'y retrouvaient beaucoup plus facilement.

Par ailleurs, les angles EGF et BGD sont égaux, donc les angles EGF et FHB sont égaux. Dans les triangles EGF et FBH, deux des angles sont égaux, donc le troisième aussi ; c'est à dire que l'angle FBH (ou GBD) est égal à l'angle EFG. Ainsi les triangles EGF et GBD sont semblables; ils ont de plus le sommet G en commun. D'après le lemme 3 de la proposition 6, les cercles GEF et GDB sont tangents en G. Le cercle GDB est donc un cercle qui convient.

Les quatre figures suivantes sont proposées par Viète, pour traduire ce qui peut se passer suivant la place de B et D par rapport au cercle donné, sans discussion sur le nombre de solutions ou la possibilité des constructions.

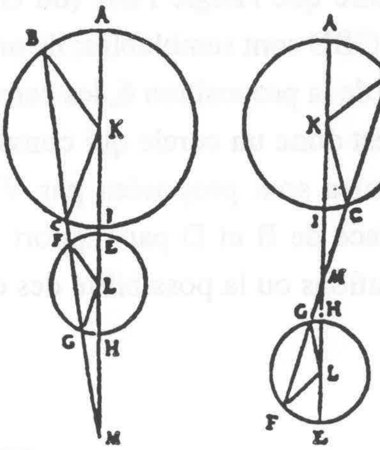




Neuvième problème : Étant donné deux cercles et un point, faire passer par le point un cercle auquel soient tangents les deux cercles donnés.

Ce problème est précédé de deux lemmes.

Lemme 1 : Étant donné deux cercles, trouver sur la droite joignant leurs centres un point tel que les segments, obtenus en traçant une droite quelconque passant par ce point et coupant ces cercles, seront semblables.



Soit les deux cercles de centres respectifs K et L ; il s'agit de trouver sur la droite KL un point M tel qu'une sécante aux deux cercles respectivement en B, C et F, G donne deux angles BKC et FLG égaux.

La droite KL coupe le premier cercle en A et D, et le deuxième cercle en E et H.

Plaçons sur la droite KL un point M tel que $\frac{KM}{LM} = \frac{AK}{EL}$. (AK est le rayon du premier cercle, et EL est celui du deuxième cercle ; Pour construire le point K, on peut utiliser la proposition V du supplément de géométrie : Étant donné deux droites Z et X, trouver deux droites HB et HI qui leur soient proportionnelles.)

Le point M peut être intérieur ou extérieur au segment KL.

Le point M trouvé est un point qui convient.

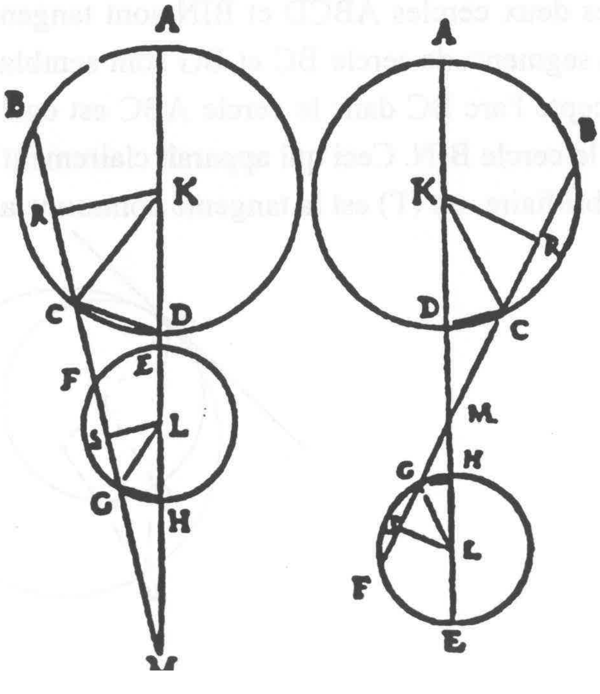
Par M on mène une sécante aux deux cercles, qui coupe le premier cercle en B et C et le deuxième en F et G, B et F étant les points les plus éloignés de M et C et G les plus proches.

Par construction $\frac{KM}{LM}$ est égal au rapport des rayons, donc à $\frac{KB}{FL}$, donc les droites BK et FL sont parallèles et l'angle KBC est égal à l'angle LFG. De même, $\frac{KM}{KL} = \frac{KC}{LG}$ et donc les droites KC et LG sont parallèles , et les angles KCB et LGF sont égaux. Dans les deux triangles BKC et FGL, les angles restant BKC et FGL sont donc égaux.

<u>Lemme 2</u> : reprenant la configuration précédente, le point M ayant été construit, alors, il s'agit de montrer que le produit MG.MB est égal au produit MH.MA.

Soit R le projeté orthogonal de K sur (BC), et S le projeté orthogonal de L sur (FG). Les triangles BKC et FLM étaient semblables, donc les triangles RKC et SLG le sont. Les triangles CKD et GLH sont semblables, et les droites CK et GL sont parallèles, donc les droites CD et GH le sont aussi.

Nous sentons ici Viète assez gêné dans la recherche d'une démonstration simple de ce qui peut paraître "évident". Nous percevons alors la facilité qui sera donnée lorsque un peu plus de deux siècles plus tard, un autre regard sur les figures permettra d' institutionnaliser les centres de similitudes ou d'homothéties, qui mettront les figures en correspondance.



Reprenant les triangles MCD et MGH, nous pouvons donc déduire de ce qui précède que $\frac{MD}{MC} = \frac{MH}{MG}$. Or, $\frac{MD}{MC} = \frac{MB}{MA}$ puisque $MC.MB = MD.MA$; donc finalement, $\frac{MH}{MG} = \frac{MB}{MA}$ ou encore, $MH.MA = MG.MB$. De même, bien sûr, on aura : $ME.MD = MF.MC$.

Résolution du problème IX :

Nous pourrons remarquer que ce problème est en fait le plus important, puisque le dernier s'en déduit quasi immédiatement. De nombreux auteurs, par la suite, quelque soit le procédé ou le support géométrique choisi, commenceront par résoudre ce problème, mentionnant seulement que le dernier s'y ramène.

Ce choix de démonstration sera souvent dénommé, "démonstration de Viète", même si la méthode choisie en est très éloignée.

Soit K et L les centres des cercles donnés et I le point donné. Utilisant le lemme 1, nous plaçons un point M sur la droite KL tel que toute sécante aux deux cercles passant par M détermine des segments de cercle semblables. La droite KL coupe diamétralement les deux cercles respectivement en A, D et en E, H.

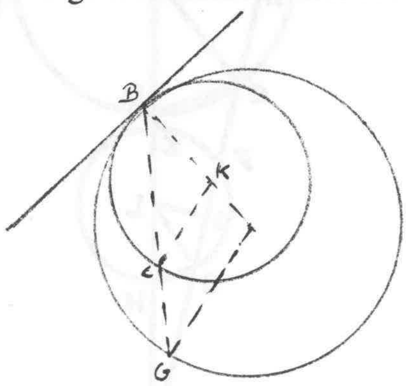
Plaçons aussi sur la droite MI un point N tel que $MI.MN = MH.MA$.

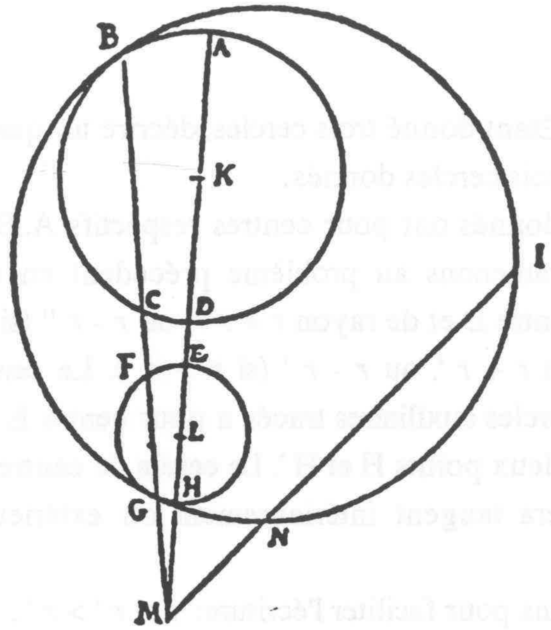
Utilisant le problème VIII, nous traçons un cercle passant par I et N et tangent au cercle de centre K en un point que l'on nommera B.

Il s'agit de montrer que ce cercle convient, c'est à dire qu'il est tangent au cercle de centre L.

La droite BM coupe les cercles de centre K et L respectivement en B, C et F, G comme déterminé dans les lemmes précédents. D'après le lemme 2, $MG.MB = MH.MA$; or $MH.MA = MN.MI$ par construction. Donc $MG.MB = MN.MI$, et N, I, B, G sont cocycliques. G est donc à la fois sur le cercle de centre L et sur le dernier cercle construit. Ces deux cercles sont donc soit sécants, soit tangents en G.

Les deux cercles ABCD et BIN sont tangents en B ; donc, nous affirme Viète, les segments de cercle BC et BG sont semblables ; c'est-à-dire que l'angle qui intercepte l'arc BC dans le cercle ABC est égal à l'angle qui intercepte l'arc BG dans le cercle BIN. Ceci qui apparaît clairement si nous dessinons une petite figure subsidiaire, où (T) est la tangente commune aux deux cercles.

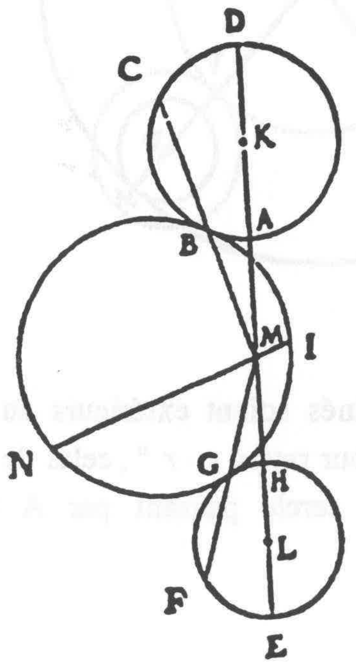


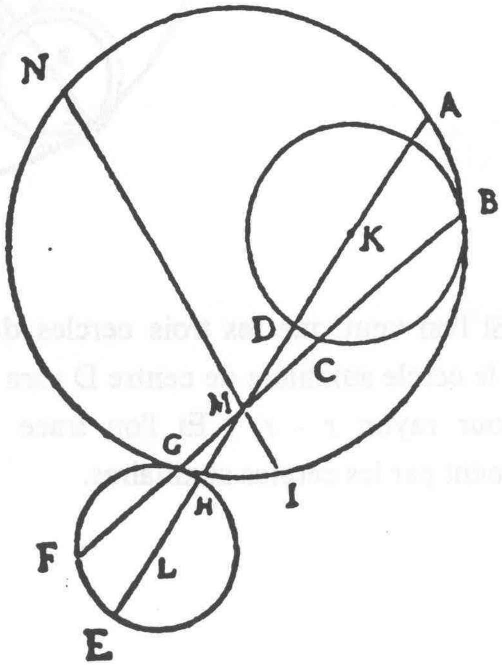


Par ailleurs d'après le lemme 1, les segments de cercles BC et FG sont semblables ; finalement, les segments de cercles FG et BG sont semblables. Ainsi, d'après le lemme 2 du problème VI, les cercles ne se coupent pas, mais sont tangents en G.

Le cercle MIN convient donc au problème.

Les trois figures données par Viète illustrent trois situations possibles : le cercle construit peut être tangent extérieurement aux deux cercles, ou l'un des cercles est tangent extérieurement et l'autre intérieurement, ou les deux sont tangents intérieurement. Mais les situations ne sont pas épuisées, et il n'est rien dit des possibilités de construction.



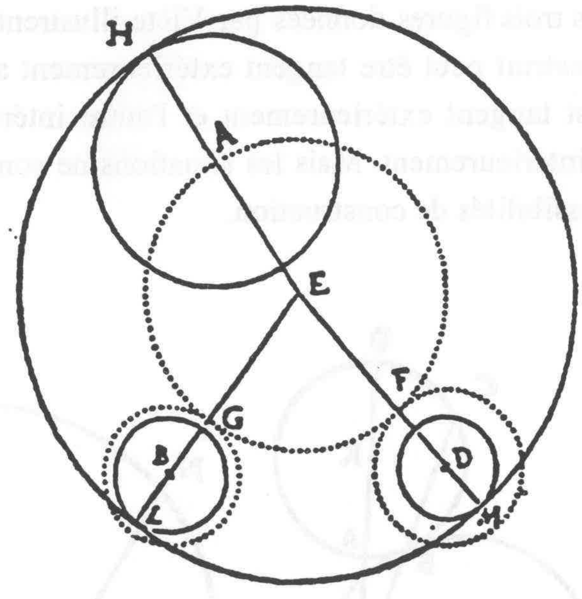


Dixième problème : Étant donné trois cercles, décrire un quatrième cercle auquel soient tangents les trois cercles donnés.

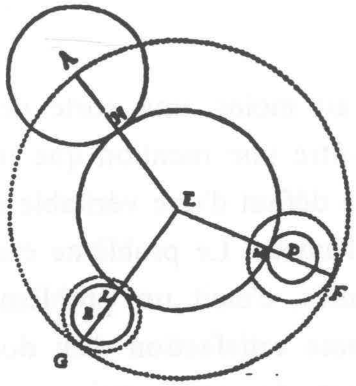
Si les cercles donnés ont pour centres respectifs A, B, D et pour rayons r, r', r ". Nous nous ramenons au problème précédent en traçant deux cercles auxiliaires, l'un de centre D et de rayon $r + r''$, ou $r - r''$ (si $r > r''$) et l'autre de centre B et de rayon $r + r'$, ou $r - r'$ (si $r > r'$). Le cercle passant par A et tangent aux deux cercles auxiliaires tracés a pour centre E. La droite EA coupe le premier cercle en deux points H et H '. Le cercle de centre E et de rayon H ou H' conviendra. Il sera tangent intérieurement ou extérieurement aux cercles donnés selon les cas.

Nous prendrons pour faciliter l'écriture: $r > r' > r''$.

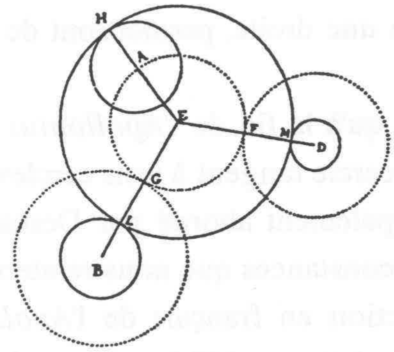
1) Si l'on veut que les trois cercles donnés soient intérieurs au cercle construit : le cercle auxiliaire de centre D aura pour rayon $r - r''$, celui de centre B aura pour rayon $r - r'$, Et l'on trace le cercle passant par A touché extérieurement par les cercles auxiliaires.



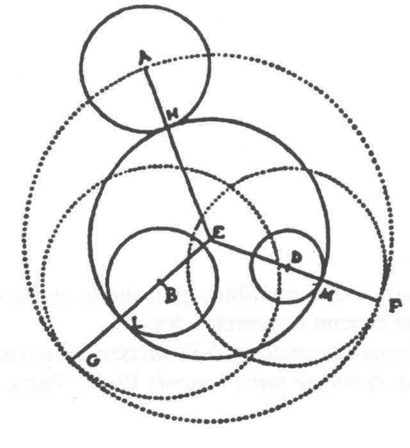
2) Si l'on veut que les trois cercles donnés soient extérieurs au cercle construit : le cercle auxiliaire de centre D aura pour rayon $r - r''$, celui de centre B aura pour rayon $r - r'$. Et l'on trace le cercle passant par A touché intérieurement par les cercles auxiliaires.



3) Si l'on veut que le grand cercle soit intérieur au cercle construit, et les deux autres cercles extérieurs : le cercle auxiliaire de centre D aura pour rayon $r + r''$, celui de centre B aura pour rayon $r + r'$. Et l'on trace par le point A le cercle touché extérieurement par les cercles auxiliaires.



4) Si l'on veut que le cercle construit soit touché extérieurement par le grand cercle, et intérieurement par les autres, le cercle auxiliaire de centre D aura pour rayon $r + r''$, celui de centre B aura pour rayon $r + r'$, et par A sera tracé le cercle touché extérieurement par les cercles auxiliaires.



Il serait attendu, ici au moins, une sorte de récapitulatif du nombre maximal de solutions ; peut-être une mention que toutes les constructions ne sont pas toujours possibles, à défaut d'une véritable discussion. En fait ce n'est sans doute pas le souci de l'auteur. Le problème était de construire un cercle tangent à trois cercles donnés, c'était un problème difficile et non résolu jusqu'alors. Il y a une certaine satisfaction d'en donner des solutions. Nous remarquerons que la plupart de ceux qui reprendront le problème ne reprocherons pas à Viète l'absence de discussion, même si le nombre maximal de solution [33] sera en général mentionné. Ce qui sera le plus couramment reproché à cette démonstration qui fait cependant référence, c'est en quelque sorte sa lourdeur, puisqu'il faut résoudre, dira-t-on, neuf problèmes avant d'aborder la pièce maîtresse. Nous avons vu que ceci est partiellement faux, et que les deux derniers problèmes n'en font presque qu'un seul.

Nous examinerons comment, au XIX° siècle en particulier, cet aspect sera traité ; des considérations sur les cercles de rayon nul équivalant à un point ou de rayon infini équivalant à une droite, permettront de réunir la presque totalité des problèmes en un seul.

Nous noterons aussi qu'à la fin de l'*Apollonius Gallus,* une allusion est faite au cas particulier d'un cercle tangent à trois cercles tangents entre eux deux à deux. Ce cas sera principalement abordé par Descartes, puis plus ou moins oublié et repris dans des circonstances que nous relaterons.

Les essais de traduction en français de l'*Apollonius Gallus* tarderont. Cependant, Herigone[34] produit en 1634 une traduction dans le langage symbolique qui est alors à la mode. Nous en donnons un bref extrait ; c'est à la fois intéressant pour la notation et inattendu. Quelques propositions sont ajoutées au travail de Viète, que nous retrouverons chez d'autres auteurs.

---

[33]Dans le meilleur des cas, il y a huit cercles possibles, puisque le cercle à construire peut être touché intérieurement ou extérieurement par chacun des cercles donnés.

[34]Hérigone, *Apollonii Pergaei tactionum geometria, à Francisco Vieta restituta. La géométrie des attouchements d'Apollonius Pergeus, restituée par François Viete,* Paris, 1634.

APOLLONII PERGÆI
TACTIONVM GEOMETRIA,
à Francisco Vieta restituta.

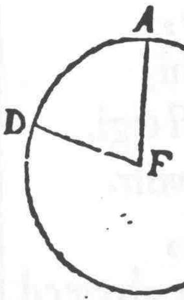
LA GEOMETRIE DES ATTOVchements d'Apollonius Pergeus, restituée par François Viete.

PROBL. I.

PER data duo puncta circulum magnitudine datum describere.

PAR deux poincts donnez descrire vn cercle de grandeur donné.

Hypoth. B———



a & d *snt* •; D;
b *est* —D.
Req. est ⊙fad & fa 2|2 b.

Constr.

22.1	af, df, b *snt* 2|2 de.		
1.p.1	fad *est* ⊙.		
symp.	*Req. est* ⊙ad.		

Demonstr.

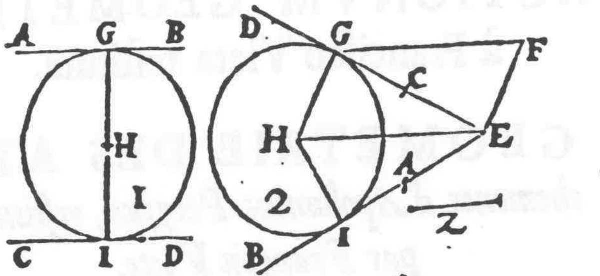
hyp.	b *est* —D.
constr.	fa 2|2 b,

2.d	fa *est* D.	*Determinat.*
concl. 6.d.d	⊙ad *est* D.	ad *n̄ est* 3|2 2b.

PROBL. II.

Datis duabus rectis lineis, circulum magnitudine datum describere, qui datas rectas contingat.

Estant donnees deux lignes droites, descrire vn cercle de grandeur donné, qui touche les deux lignes donnees.



	Hypoth.		*Constr..2.cas.*
	ab & cd *snt* — D..*posit.*	suppos.	dc,ba *n̄ snt* ═ de.
	z *est* — D.	2.34.d.1	deb *est* <,
	Req.est ⊙hgi.	9.1	<ceh 2|2 <heb,
	Constr..1.cas.	11.1	ef ⊥ de,
suppos.	ab ═ cd,	3.1	ef 2|2 z,
11.1	gi ⊥ ab,	31.1	fg ═ eh,
10.1	gh 2|2 hi,	11.1	gh ⊥ de,
symp.	*Req. est* ⊙gi.	3 p.1	hgi *est* ⊙.
	Demonstr.	symp.	*Req.est* ⊙hgi.
29.1	gi ⊥ cd,		*Præpar.*
concl. c.16.3	⊙gi *tang:* ab & cd.	12.1	hi ⊥ be.

3° D'autres essais :

Après ce premier essai de reconstitution du *Traité des contacts,* par Viète, avec l'*Apollonius Gallus*, d'autres suivirent.

Le premier fut celui de Marino Gethaldi,[35] sur quelques cas seulement , en 1637, en annexe de son essai de reconstitution du *Traité des inclinaisons.* En 1764, Lawson reprit et compléta les essais précédents, puis Camerer en 1795, fit paraître à Gotha un petit texte[36], donnant le texte grec de la notice, les lemmes de Pappus, puis la reconstitution de Viète. Il ajoutait à cela une solution du dernier problème par l'analyse algébrique. Enfin, au XIX° siècle, Haumann[37], en 1817 et Christmann[38] en 1826, produirent deux essais de reconstitution.

Nous dirons quelques mots de la reconstitution de Lawson, qui fait appel aux travaux de deux autres anglais qui ont largement contribué aux recherches sur la géométrie des anciens : Halley, et Simson. Les géomètres anglais vont en effet continuer, jusqu'au XIX° siècle, dans la lignée de Newton, à cultiver cette géométrie.

> *Quelques hommes ingénieux ont essayé , d'après l'exposé de Pappus, de restaurer quelques uns de ces traités perdus. Snellius s'est efforcé de nous donner les deux livres de la Section de rapport, la Section d'aire, et la Section déterminée. Fermat et Shooten ont travaillé au Traité des lieux plans ; et Marinus Gethaldus à celui des inclinaisons. Mais ceux qui ont le mieux réussi, et fait le plus grand chemin, sont deux incomparables mathématiciens de notre propre pays, le Dr. Halley et le Dr. Simson, à qui le monde entier est très reconnaissant pour leur travaux géométriques.*[39]

Marino Ghetaldi avait ajouté à l'*Apollonius Gallus* les solutions d'autres problèmes de contact que Pappus avait suggérés, élargissant le *Traité des contacts* d'Apollonius. C'est ce qui est repris par Lawson.

Nous trouvons ainsi comme premier problème : décrire un cercle passant par deux points donnés A et B, dont le rayon est égal à une ligne donnée ; puis,

---

[35]Gethaldi, M., *Marini Gethaldi de resolutione et compositione mathematica libri V*, Rome, 1630.

[36]Camerer, G., *Apollonii de Tactionibus quae supersunt, ac maxime lemmata Pappi in hos libros graece nunc primum edita e codicibus manuscriptis, cum Vietae librorum Apollonii restitutione, adjectis observationibus, computationibus ac problematis Apolloniani historia, a Joanne Guilielmo Camerer*, Gothae, 1795.

[37]Haumann, C. G., *Versuch einer Wiederherstellung der Bücher des Apollonius von Perga von Berührungen*, Breslau, 1817.

[38]Christmann, W. L., *Apollonius suevus, sive tactionum problema nunc demum restitutum, accedente censura in Vietam*, Tubingae, 1821.

[39]Lawson, J., *The two books of Apollonius Pergaeus, concerning tangencies, as they have been restored by Franciscus Vieta and Marinus Ghetaldus, with a supplement*, London, 1771.

deux droites AB et CD étant données de position, il est demandé de tracer un cercle, dont le rayon sera égal à une ligne donnée Z, et qui touche aussi les deux droites données.

Dans le problème III, deux cercles étant donnés de centres A et B, il faut tracer un cercle dont le rayon soit égal à une ligne donnée Z, et qui touche les deux cercles donnés.

Le problème IV demande de tracer un cercle dont le rayon soit égal à une ligne donnée Z, qui passe par un point donné A et soit tangent à une droite (=segment)donnée BC.

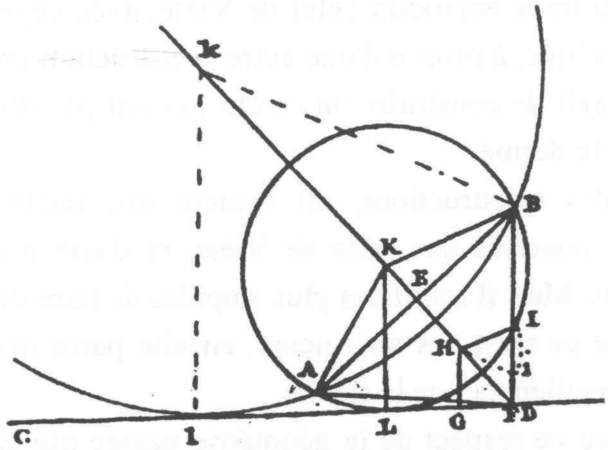
Dans le problème V, il est donné un point A, et un cercle de centre B. Il est demandé de tracer un cercle dont le rayon soit égal à une droite donnée Z qui passe par le point donné, et soit tangent au cercle donné. Enfin, le problème VI demande de tracer un cercle dont le rayon soit égal à une droite donnée Z, et qui touche une droite donnée BC et un cercle donné de centre A.

Il faut arriver au problème VII, pour trouver ce qui est le deuxième problème de Viète, à savoir : deux points A et B et une droite EF étant donnés, il est demandé de tracer un cercle qui passe par les points donnés et touche la droite donnée.

Nous trouvons la solution de Viète, plus une autre que Thomas Simpson aurait donnée à la fin de son Algèbre, que voici :

Soit A et B les points donnés, et CD la droite donnée : partageons par le milieu AB en E, et par E traçons la perpendiculaire à AB, qui coupe CD en F. D'un point quelconque H sur EF, traçons HG perpendiculaire à CD, puis sur BF, prenons I tel que HG = HI. Traçons par B la parallèle à HI, qui rencontre EF en K. Traçons ensuite le cercle de centre K et de rayon BK. Par K abaissons la perpendiculaire à CD en L. Nous avons des rapports égaux : $\frac{HG}{HI} = \frac{KL}{KB}$; comme HG = HI, on a aussi KL = KB. Par construction on a aussi KA = KB. Donc, KB = KL = KA.

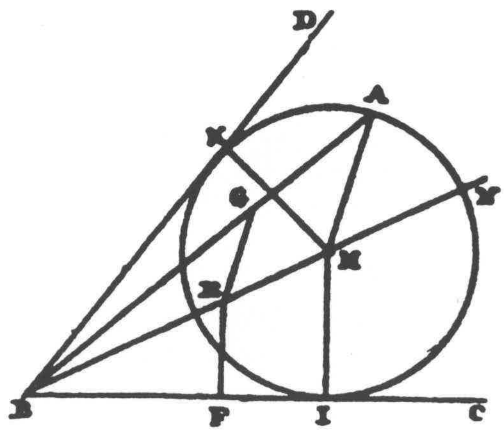
Ceci est suivi d'une discussion. Il y a deux possibilités pour prendre sur BF un point I tel que HG = HI, le problème admet deux solutions, sauf dans le cas particulier où le point A par exemple est sur CD, le problème étant alors plus simple, car le centre du cercle cherché doit être sur la ligne EF et sur la perpendiculaire en A à CD, donc à leur intersection. Si la ligne CD passe entre les points A et B, le problème est impossible.



Le problème VIII, qui correspond au quatrième de Viète, trouve aussi une deuxième solution venant de Simpson.

Il s'agit de tracer un cercle passant par un point donné A et touchant deux droites données BC et DE.

Supposons que les deux droites se rencontrent en B, traçons la bissectrice BN de l'angle donné DBC ; puis d'un point quelconque E de BN, traçons la perpendiculaire à BC en F, et prenons G sur BA tel que EG = EF ; par A traçons la parallèle à EG, qui rencontre BN en H. Traçons le cercle de centre H et de rayon AH. Traçons les perpendiculaires issues de H à BD et BC, respectivement en K et I. Nous avons HI = HK, et de plus, comme $\frac{EF}{EG} = \frac{HI}{HA}$ et que EF = EG, nous avons aussi HI = HA. Et le problème est terminé.



Nous retrouvons dans ces deux démonstrations la même démarche de construction. qui est un procédé qui semble ingénieux.

Le reste du traité reproduit celui de Viète, avec cependant une remarque plus ou moins ironique, à propos d'une autre construction du huitième problème de Viète, où il s'agit de construire un cercle passant par deux points donnés et tangent à un cercle donné.

Il existe des constructions, dit l'auteur qui semblent à certains plus élégantes et plus concises que celle de Viète, et d'une manière générale, que celles des Anciens. Mais il serait des plus stupides de faire des reproches à Viète, d'abord parce que ce n'est pas un Ancien, ensuite parce que lui ne connaissait pas de solutions meilleures que la sienne.

C'est un peu ce respect de la géométrie passée qui caractérise les efforts de ces géomètres anglais qui s'attachent aux textes anciens, alors que d'autres vont surtout chercher des solutions utilisant les nouveaux procédés, par exemple la nouvelle géométrie de Descartes, ou les procédés algébriques.

Chapitre III : Où l'on choisit le problème des trois cercles pour mettre en valeur son habileté mathématique ou la supériorité de sa méthode.

1° Descartes ou le premier essai de résolution analytique :

Ce problème, un de ceux où l'analyse algébrique ne s'applique pas avec facilité, occupa aussi Descartes ; et de deux solutions qu'il en trouva, il convient lui-même que l'une lui donnait une expression si compliquée, qu'il n'entreprendrait pas de la construire en un mois. L'autre, quoique moins embarrassée, l'est encore assez pour que Descartes n'ait osé y toucher. Remarquons enfin au sujet de ce problème, une anecdote qui l'illustre en quelque sorte. C'est que la princesse Élisabeth de Bohème, qui honorait, comme l'on sait, notre philosophe de sa correspondance, daigna s'en occuper, et lui envoya une solution ; mais comme elle est tirée du calcul algébrique, elle a les mêmes inconvénients que celle de Descartes.[40]

A la vue de la clarté lumineuse qui accompagne le plus souvent la méthode des anciens, je ne puis me refuser à quelques réflexions.
(...)
Je pourrais citer pour exemple, l'un des problèmes donnés dans la note A, savoir celui de faire toucher trois cercles donnés de position par un quatrième. Quiconque comparera les solutions élégantes que Viète et Newton ont données de ce problème, avec celle que présente le calcul algébrique, et celle de Descartes sera obligé de convenir que ce dernier avait tort de déprimer, comme il faisait, la méthode ancienne.

Je suis cependant bien éloigné de méconnaître la supériorité de l'analyse moderne, à d'autres égards, sur celle des anciens. Je n'ai prétendu blâmer que l'abus d'appliquer le calcul à des cas où, un peu plus d'attention, ou plus de connaissance en géométrie,

---

[40]Montucla,J.F. *Histoire des mathématiques*, Paris, an VII, tome I; p.252. (réed. Blanchard, 1968)

fournirait des solutions bien plus satisfaisantes pour l'esprit. Car, de même qu'on ne se sert pas du quart de cercle pour mesurer un objet qu'on a sous la main, ainsi ne doit-on pas employer le calcul algébrique dans des questions où il est superflu.[41]

Montucla.

Il n'est pas étonnant que Descartes ait essayé de tester sa méthode sur ce problème qui semblait particulièrement difficile.

Cet essai apparaît dans sa correspondance avec Élisabeth, Princesse de Bohême, en octobre et novembre de l'année 1643.

Il reconnaît auprès de son ami Pollot, que le problème est peut-être d'une difficulté trop grande.

Il me semble qu'un ange, qui n'aurait point eu d'autres instructions d'Algèbre que celles que St lui aurait données, n'en pourrait venir à bout sans miracle[42].

La lettre 408,[43] de Descartes à Élisabeth, de novembre 1643, est particulièrement significative, car Descartes y expose son principe de résolution du problème, essayant de mettre en valeur son efficacité. Nous nous devons de dire qu'en fait Descartes, mais ce fait lui est coutumier, ne va pas jusqu'au bout du calcul ; il se contente de montrer que c'est possible.

N'oublions pas cependant qu'il s'agit d'un problème de construction, et que celle-ci n'est pas faite ; pour cela les critiques de Montucla ne sont pas infondées.

Élisabeth aurait trouvé un moyen de résoudre la question en choisissant une seule inconnue. Avant même d'avoir pris connaissance de cette solution, Descartes lui conseille d' en choisir plusieurs. Sa méthode, explique-t-il, l'amène à s'appuyer sur deux théorèmes, l'un sur les propriétés des triangles semblables, l'autre le théorème que nous qualifions aujourd'hui, de Pythagore.

Alors il n'hésite pas à faire intervenir plusieurs inconnues, pour se référer seulement à ces deux théorèmes, et voir plus clairement tout ce qu'il fait.

En les démêlant, je trouve mieux les plus courts chemins, et m'exempte de multiplications superflues.

---

[41]Ib. p.167,168

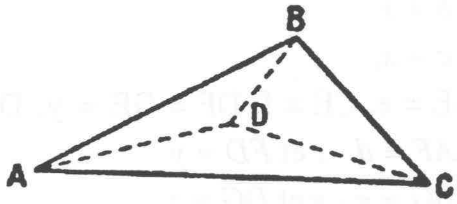
[42]Descartes, R., *Correspondance*, Paris, P.U.F, 1956, tome VI, p. 38. Descartes à Pollot, 21 octobre 1643.

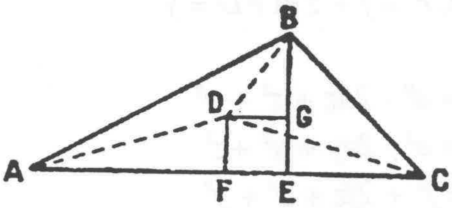
St pourrait désigner Stampisen, d'après l'annotation de Ch. Adam et G. Milhaud.

[43]Ibid. p.52 à 56.

A l'appui de cette réflexion, il propose de résoudre d'abord le problème en s'appuyant sur un autre théorème, "*qui enseigne à trouver l'aire d'un triangle par ses trois côtés.*"

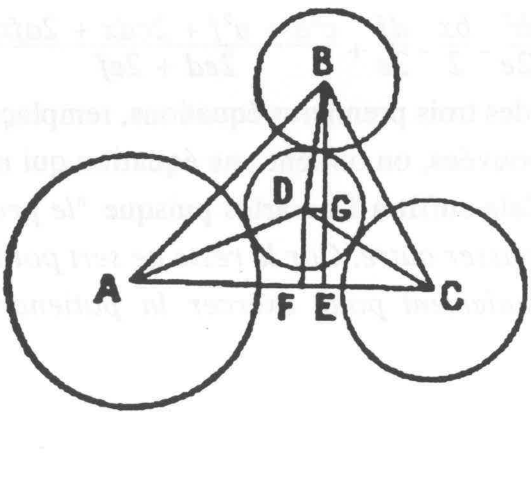
Dans ce cas, une seule inconnue suffirait. Si A, B, C sont les centres respectifs des cercles donnés, et D le centre du cercle cherché, il suffit de prendre comme inconnue le rayon x du cercle cherché. En effet, les distances DA, DB, DC seront composées des rayons des cercles donnés, donc connus, et de x. Par ailleurs, les côtés AB, AC, et BC sont aussi connus. Si bien qu' alors tous les côtés des triangles ABC, ACD, BCD, sont connus, donc leurs aires, qui jointes ensemble donnent ABC.





Descartes se contente d'affirmer que, ceci devrait permettre de trouver x, qui seul suffit, "*mais ce chemin me semble conduire à tant de multiplications superflues, que je ne voudrais pas entreprendre de les démêler en trois mois.*

Il va donc choisir une autre démarche, qui, pourrait-on dire, consiste à prendre pour inconnues les coordonnées de D dans un certain repère bien choisi, et le rayon du cercle cherché.



Ses inconnues sont donc DF, DG, et x le rayon cherché. C'est effectivement séduisant. Et nous ne pouvons nous empêcher de remarquer que ce style de démonstration (choisir un repère lié à la figure), sera en quelque sorte remis à l'honneur par Carnot, dans sa *Corrélation des figures de géométrie,* en 1801. Nous y reviendrons.

Cependant, suivons Descartes :

Sont ainsi apparus trois triangles rectangles : ADF, BDG, et CDF, dans lesquels on peut appliquer le théorème de Pythagore.

Posons $AD = a + x$

$BD = b + x$

$CD = c + x,$

Puis, avec AE = d, BE = e, CE = f, DF = GE = y, DG = FE = z, les côtés des triangles deviennent $AF = d - z$ et $FD = y$

$BG = e - y$ et $DG = z$

$CF = f + z$ et $FD = y$

et nous obtenons :

$$a^2 + 2ax + x^2 = d^2 - 2dz + z^2 + y^2$$
$$b^2 + 2bx + x^2 = e^2 - 2ey + y^2 + z^2$$
$$c^2 + 2cx + x^2 = f^2 + 2fz + z^2 + y^2$$

Une première simplification apparaît en soustrayant la première équation de la troisième. En effet, les x^2, y^2 et z^2 s'annuleront.

On obtient :

$$c^2 + 2cx - a^2 - 2ax = f^2 + 2fz - d^2 + 2dz,$$

donc

$$z = \frac{c^2 - a^2 + d^2 - f^2 + 2cx - 2ax}{2d + 2f} = \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}f + \frac{c^2 - a^2 + 2cx - 2ax}{2d + 2f}$$

Il "suffit" maintenant de soustraire la seconde équation de la première, et de remplacer alors z par ce qui vient d'être calculé. On peut alors trouver y en fonction de x :

$$y = \frac{1}{2}e - \frac{b^2}{2e} - \frac{bx}{2} - \frac{df}{2e} + \frac{c^2d + a^2f + 2cdx + 2afx}{2ed + 2ef}$$

puis, dans l'une des trois premières équations, remplaçant y et z par les quantités nouvellement trouvées, on obtient une équation qui ne contient plus que x et x^2, en inconnues. Cela suffit à Descartes puisque "*le problème est plan, et il n'est plus besoin de passer outre. Car le reste ne sert point pour cultiver ou recréer l'esprit, mais seulement pour exercer la patience de quelque calculateur laborieux.*"

L'on retrouve ici le style cartésien : les *clefs de son algèbre*, résident dans la mise en équation et la réduction , dans le cas présent à une équation du second degré; l'essentiel est de montrer que la solution est calculable, et non d'achever les calculs.

Ceci est précisé dans la lettre 414 de Descartes à Élisabeth, du même mois de novembre 1643 :

> *En substituant une seule lettre au lieu de plusieurs, ainsi qu'elle (Votre Altesse) a fait ici fort souvent, le calcul ne lui sera pas ennuyeux. C'est une chose qu'on peut quasi toujours faire, lorsqu'on veut seulement voir de quelle nature est une question, c'est-à-dire si elle se peut soudre avec la règle et le compas, ou s'il faut employer quelques autres lignes courbes du premier ou du 2° genre, etc. ..., et quel est le chemin pour la trouver ; qui est ce de quoi je me contente ordinairement, touchant les questions particulières. car il me semble que le surplus, qui consiste à chercher la construction et la démonstration par les propositions d'Euclide , en cachant le procédé de l'Algèbre, n'est qu'un amusement pour les petits géomètres, qui ne requiert pas beaucoup d'esprit ni de science.*

L'attaque est directe, et le jugement assez méprisant. Ici elle semble dirigée directement contre l'auteur de l'*Apollonius Gallus*. La remarque de Montucla se justifie alors.

Il reste que, dans ce problème de construction, le contrat n'est pas tout à fait respecté, si l'on s'en tient du moins au problème initial. Mettre en évidence que le problème est constructible à la règle et au compas est une chose, réaliser la construction en est une autre.

Par ailleurs, là où l'algèbre aurait pu montrer sa supériorité, aucune discussion n'apparaît. Il semble que Descartes considère un x positif, et se réfère à la figure proposée ; il ne considère alors que le cas où les trois cercles donnés seront tangents extérieurement au cercle cherché, même si sa méthode n'implique pas que les rayons des cercles soient obligatoirement différents.

La résolution complète de l'équation obtenue aurait peut-être permis la discussion des cas possibles. Mais il faut avouer, rejoignant Descartes, que cette résolution s'avérerait longue et fastidieuse.

L'utilisation de l'algèbre cartésienne ne présente donc pas ici une grande supériorité sur la *méthode des anciens*, pour reprendre la qualification de Montucla.

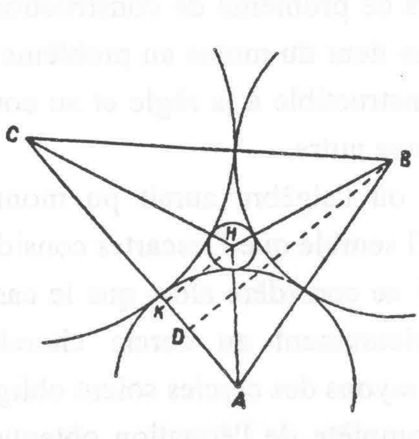
Descartes cependant, surpris peut-être dans son orgueil par cette petite princesse qui semble avoir mené les calculs jusqu'au bout pour résoudre le fameux problème, va expliquer plus avant le choix de ses inconnues, et proposer une solution pour un cas particulier, celui du cercle tangent à trois cercles donnés, tangents eux mêmes extérieurement deux à deux.

> *Il est bon aussi alors d'observer que les quantités, qu'on dénomme par les lettres, aient semblable rapport les unes aux autres, le plus qu'il est possible ; cela rend le théorème plus beau et plus court, pour ce qui s'énonce de l'une de ces quantités, s'énonce en même façon des autres, et empêche qu'on ne puisse faillir au calcul, pour ce que les lettres qui signifient des quantités qui ont même rapport, s'y doivent trouver distribuées en même façon ; et quand cela manque, on reconnaît son erreur.*

De fait le point de départ est quelque peu modifié ; il prend comme lettres de base, a, b, c, pour les côtés du triangle ABC, et d, e, f, pour les rayons des trois cercles donnés.

> *Mais, pour ce que le calcul en est ennuyeux, si Votre Altesse a désir d'en faire l'essai, il lui sera plus aisé, en supposant que les trois cercles donnés s'entretouchent, et n'employant, en tout le calcul, que les quatre lettres d, e, f, x, qui étant les rayons des quatre cercles ont semblable rapport l'une à l'autre.*

Effectivement, dans ce cas, les côtés AC, AB, BC, sont respectivement égaux à $d + f$, $d + e$, et $e + f$.



Notre auteur indique à la princesse qu'alors elle trouvera :

$$AK = \frac{d^2 + df + dx - fx}{d + f} \quad et \quad AD = \frac{d^2 + df + de - fe}{d + f}$$

ce qui est satisfaisant pour l'esprit, puisque x est pour AK, comme e est pour AD, en correspondance avec la situation géométrique de x et e pour les triangles AHC et ABC.

Ce résultat s'obtient assez facilement en appliquant une fois de plus le théorème de Pythagore aux triangles HKA et HKC, BDA et BCD.

Continuant, nous devrons obtenir l'équation suivante :

$$d^2e^2f^2 = 2def^2x^2 + 2de^2f^2x - d^2e^2x^2 + 2de^2fx^2 + 2d^2ef^2x - d^2f^2x^2 + 2d^2efx^2 + 2d^2e^2fx - e^2f^2x^2.$$

de laquelle on tire, pour théorème, que les quatre sommes, qui se produisent en multipliant ensemble les carrés de trois de ces rayons, font le double de six, qui se produisent en multipliant deux de ces rayons l'un par l'autre, et par les carrés des deux autres.

Il n'est pas si évident de trouver le passage des premières égalités à cette dernière. C'est ce que soulignera Coxeter reprenant cette démonstration quelques siècles plus tard, en 1968.

Unfortunately there is a gap in the argument which precludes any clear understanding of the crucial steps leading to his conclusion.[44]

Ce résultat dérivé du problème d'Apollonius sera désigné par Pedoe *Théorème du cercle de Descartes.*

Pour l'anecdote, signalons qu'effectivement, Pedoe[45] s'intéresse à ce résultat paru en 1936 dans la revue *Nature*, sous la forme d'un poème par Frederick Soddy. Ce résultat a été démontré, pense-t-il, par Cox[46] en 1883 à l'aide du calcul de Grassmann, puis par Coxeter[47], par la trigonométrie. Pedoe reprend et prolonge cette étude à l'espace, et découvre alors que le premier à avoir énoncé le théorème fut Descartes. De là le nom qu'il lui donne.

En 1968, dans la même revue, *The American mathematical Monthly*, Coxeter reprend l'étude de Pedoe, et remarque que l'égalité énoncée par Descartes, s'écrirait de nos jours plus simplement :

$$\frac{1}{d^2}+\frac{1}{e^2}+\frac{1}{f^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{2}{ef}+\frac{2}{fd}+\frac{2}{de}+\frac{2}{dx}+\frac{2}{ex}+\frac{2}{fx}$$

ou encore :

---

[44]Coxeter,H.S.M., *The problem of Apollonius, The American Mathematical Monthly*, janvier 1968,p. 5 .

Malheureusement il y a une lacune dans la démonstration qui empêche toute compréhension claire des pas décisifs menant à sa conclusion.

[45]Pedoe, D., *On a theorem in geometry, The American Mathematical Monthly*, juin-juillet 1967, p.627.

[46]Cox, H., *Quarterly Journal*, 19, 1883, p.74.

[47]Coxeter, H. S. M., *Introduction to Geometry*, Wiley, New York,1961.

$$2(\frac{1}{d^2}+\frac{1}{e^2}+\frac{1}{f^2}+\frac{1}{x^2})=(\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}+\frac{1}{x})^2.$$

Ce très beau résultat de Descartes a été , nous dit Coxeter, redécouvert exactement 200 ans plus tard par M. Philip Beecroft de Hyde, dans le Cheshire et publié dans *The Lady ' s and gentleman ' s Diary* en 1842.

Revenons aux conseils de Descartes à Élisabeth, lui expliquant que grâce à son résultat, *si par exemple les rayons des trois cercles donnés sont* $\frac{d}{2}, \frac{e}{3}, \frac{f}{4}$ *alors, j'aurai 576 pour ddeeff, et 36 xx pour ddeexx, et ainsi des autres. D'où je trouverai*

$$x=-\frac{156}{47}+\sqrt{\frac{31104}{2209}},$$

si je ne me suis trompé au calcul que je viens de faire.

Il est clair que, en dehors de l'intérêt certain de voir ici mise en œuvre et expliquée la méthode de Descartes, il n'est pas vraiment question de construction au sens premier du terme. Il s'agit de calcul de longueurs. Le nombre a remplacé l'objet géométrique, et rejoignant Montucla nous aurions tendance à dire, très subjectivement, que la solution cartésienne, quoique très astucieuse, manque un peu d'élégance, si tant est qu'elle soit efficace.

Cependant, si l'on en croit la légende et Montucla, Descartes aurait résolu, par l'algèbre, le problème équivalent à celui des trois cercles, dans l'espace : trouver une sphère qui en touche quatre autres données. Nulle trace n'a pu être trouvée de la solution de Descartes, mais Fermat a résolu le problème à l'aide de la géométrie des Anciens.

> *Remarquons ici, en passant que M. de Fermat s'est proposé et a résolu un problème beaucoup plus difficile. C'est celui-ci : quatre sphères étant données de position et de grandeur, trouver celle qui les touchera toutes. Ce problème lui avait été proposé par Descartes, qui dit aussi en avoir trouvé la solution, et par l'algèbre, et par la géométrie ordinaire. On ne la trouve nulle part. mais celle de Fermat, qui forme un petit traité, se lit dans ses œuvres*[48].

Nous n'entrerons pas dans le détail des résolutions de ce nouveau problème, mais ce texte de Fermat mérite d'être mentionné car les deux problèmes, dans le plan et dans l'espace, seront en général évoqués de pair. Fermat donne ici une démonstration de géométrie pure, et Euler sera le premier, à la fin du XVIII° siècle à proposer une démonstration algébrique. Jusque là, sur

[48]Montucla, J. F., ouvrage cité, tome I, P. 252.

le problème des sphères, la géométrie des anciens sera considérée comme très supérieure.

Le déroulement du texte de Fermat suit presque pas à pas celui de l'*Apollonius Gallus*. Il y fait d'ailleurs directement allusion.

La théorie des contacts d'Apollonius de Perge a été élégamment restituée par l'Apollonius Gallus, masque sous lequel se cachait ce François Viète de Fontenay dont les admirables travaux en mathématiques ont fourni de si heureux suppléments à la Géométrie ancienne. Et personne, que je sache, ne l'a poussée plus loin et ne s'est hasardé à l'élever aux problèmes sphériques.

On va voir qu'on arrive dans cette voie à de brillants problèmes et qu'on peut facilement obtenir une élégante construction pour les questions les plus ardues[49].

Se succèdent alors quinze problèmes, où la sphère recherchée passe par des points donnés , ou touche des plans donnés ou des sphères données. Le premier problème demande que la sphère passe par quatre points donnés, le dernier est celui de quatre sphères données qui se ramène, selon les mêmes principe que dans l'*Apollonius Gallus*, à celui d'une sphère passant par un point donné et touchant trois sphères données.

2° Les deux solutions de Newton :

Toutefois, le livre de Newton et l'Almageste ont quelque chose de commun : c'est la méthode, qui est la même dans les deux ouvrages, car Newton, malgré ses brillantes découvertes dans les nouveaux calculs, avait conservé une telle estime pour la géométrie des anciens, qu'il la suivit dans tout le cours de son ouvrage, opposant ainsi aux futurs incrédules des preuves incontestables des ressources que cette géométrie pouvait offrir dans les spéculations les plus relevées[50].

Chasles

---

[49]Fermat, P., *Des contacts sphériques*, Œuvres, traductions de Paul Tannery, Paris, Gauthier-Villars, 1896, p. 49.

[50]Chasles, M., *Discours d'inauguration du cours de géométrie supérieure de la faculté des sciences de Paris*, Traité de géométrie supérieure, Paris, Gauthier-Villars, 1880, p.572.

Newton va nous offrir deux solutions du problème d'Apollonius, qui se situent tout à fait dans le profil que nous avons assigné à ce chapitre : illustrer la puissance de sa méthode et son originalité. Nous trouvons d'une part une démonstration selon une "géométrie sans calcul", dans le *livre I* des *Principia*, d'autre part une démonstration que l'on qualifiera d'algébrique, dans *Arithmetica Universalis.*

L'on attendait peu ce problème dans le livre I, *Du mouvement des corps*, des *Principia.*

Si nous suivons Richard Westfall dans son appréciation :

> *Il semblerait que Newton l'ait inséré [le développement mathématique du livre I] pour donner une démonstration publique de sa musculature mathématique. Dans un ouvrage qui renonçait aux formes établies de l'analyse moderne, il publia une solution du lieu géométrique qui donnait un démenti à la prétention cartésienne en renonçant également au secours de l'analyse moderne.*

Cependant, dans ce lemme XVI, le problème qui nous intéresse n'est pas abordé directement, mais incidemment, à travers une question d'hyperbole, ce qui du coup surprend moins..

Il est étonnant de retrouver sous la plume de Newton cette méthode sur laquelle avait buté Adrien Romain, après peut-être Regiomontanus. La solution de Newton est à la fois élégante et astucieuse : il n'a pas besoin de tracer les hyperboles ; il reste donc dans le cadre du problème constructible à la règle et au compas. Mais on ne peut dire qu'elle respecte vraiment la "méthode des anciens", puisque nous constaterons qu'elle ne comporte que l'analyse et non la synthèse ; en l'occurrence c'est peut-être un de ses défauts.

Le lemme XVI s'énonce ainsi [51]:

> *Trouver un point duquel tirant des lignes droites à trois points donnés, les différences de ces droites soient nulles ou données.*

A la fin de la démonstration, nous trouvons :

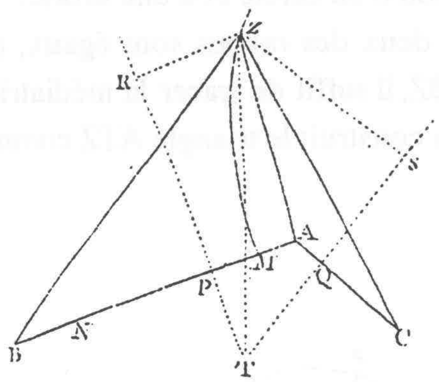
Le problème se résout aussi par le livre des touchantes d'Apollonius restitué par Viète.

Imaginons effectivement la figure constituée d'un cercle tangent extérieurement à trois autres ; en appelant R le rayon du cercle de centre Z, tangent aux trois autres, r, r ' et r ", les rayons des autres cercles, de centres respectifs A, B, C, nous aurons :

[51] Newton, I., *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Londres, 1687, traduction française de Mme du Chastelet, Paris, 1759, tome I, livre I.

$ZB - ZA = r' - r$, $ZC - ZB = r'' - r'$, $ZC - ZA = r'' - r$.

Les rayons r, r ' et r " étant donnés, il s'agit bien de trouver un point (Z), correspondant aux conditions du lemme. Nous constatons que Newton considère les cas où certains des rayons donnés sont égaux.



Il examine en premier lieu le cas général de rayons distincts deux à deux.

$ZB - ZA = r' - r$, donc Z est sur une hyperbole de foyers A et B, de grand axe $MN = r' - r$. Newton fait alors intervenir la directrice (PR) et la distance ZR de Z à cette directrice,(le point P est constructible puisqu'il est défini par : $\frac{PM}{MA} = \frac{MN}{AB}$), de telle sorte que $\frac{AZ}{ZR} = \frac{MN}{AB}$ qui est l'excentricité et est connue.

Par le même raisonnement, Z est sur une hyperbole de foyers A et C et de grand axe r " - r, et si ZS est la distance de Z à la directrice (QS) , on aura $\frac{AZ}{ZS}$ connu. Finalement, le rapport $\frac{ZS}{ZR}$ est donné.

Appelons T le point d'intersection des deux directrices (qui existe si A, B, C ne sont pas alignés[52]) la figure TRZS est *donnée d'espèce*, nous dit Newton, et la droite TZ est *donnée de position*.

$\frac{ZR}{ZS}$ est en effet un rapport donné et constant.

(TA) est aussi donné, puisque A et T le sont, donc l'angle ATZ.

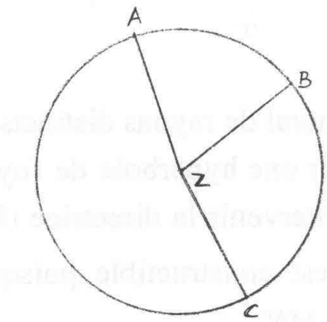
Et parce que les raisons de AZ et de TZ à ZS sont données, celle de AZ et de TZ entr'elles sera donnée aussi, et par conséquent le triangle entier ATZ, dont le sommet est le point cherché Z, sera enfin donné, C.Q.F.T.

[52]Ce qui n'est pas précisé par Newton, mais qui semble aller de soit pour tous les auteurs étudiés, du moins jusqu'au XIX° siècle.

Si nous examinons bien les choses, l'angle ATZ étant connu, l'angle RTZ l'est aussi, et son sinus est $\frac{ZR}{ZT}$ ou encore $\frac{ZR}{ZS} \times \frac{ZS}{ZT}$. Le rapport $\frac{ZR}{ZS}$ est connu, donc aussi le rapport $\frac{ZS}{ZT}$.

Finalement, $\frac{AZ}{ZS}$ et $\frac{ZS}{ZT}$ sont connus, donc aussi $\frac{AZ}{TZ}$, et l'on peut ainsi placer Z, comme intersection d'un cercle et d'une droite.

Dans le deuxième cas où deux des rayons sont égaux, (une des différences est nulle) par exemple $AZ = BZ$, il suffit de tracer la médiatrice de [AB], sur laquelle se trouvent Z et T, puis on construit le triangle ATZ comme précédemment



Si, dans le troisième cas, les trois rayons sont égaux,(les trois différences sont nulles) donc si $AZ = BZ = CZ$, alors Z est le centre du cercle passant par A, B, C.

L'analyse est faite, il manque cependant la synthèse. D'une part la discussion apparaîtrait peut-être, pour les deux premiers cas, d'autre part la difficulté ou la certitude de la constructibilité (à la règle et au compas) serait sans doute plus évidente.

Qu'en est-il de la deuxième démonstration que l'on peut trouver dans l'*Arithmetica Universalis* ?

Il s'agit d'un ouvrage totalement différent. Si nous nous reportons au jugement de Chasles, ce serait un ouvrage de pédagogie :

Il s'agit d'un ouvrage totalement différent. Si nous nous reportons au jugement de Chasles, ce serait un ouvrage de pédagogie :

L'Arithmétique universelle, modèle parfait de l'application de la méthode de Descartes à la résolution des problèmes de géométrie et à la construction des racines d'une équation, présentait une foule de questions variées, se rapportant à toutes les parties des mathématiques. Cet ouvrage est trop peu lu de nos jours, parce que l'on oublie sans doute que son illustre auteur, en en faisant le texte de ses leçons à l'Université de Cambridge, l'avait jugé propre à initier ses élèves dans la science et dans l'art du géomètre.[53]

L'ouvrage effectivement, publié pour la première fois en 1707, fut écrit entre les années 1673 et 1683, sans doute pour les leçons que Newton donna à Cambridge. Ce n'est pas l'oeuvre la plus connue de l'auteur des *Principia*, mais une de celles qui fut le plus rééditée au XVIII° siècle.

Nous trouvons dans cet ouvrage de nombreuses contributions à l'algèbre, mais, paradoxalement aussi une défense argumentée de l'analyse des anciens, et la section la plus importante est consacrée à la résolution de questions de géométrie.

Newton dans une longue introduction explique sa position sur la géométrie, et même si l'on reconnaît parfois le style cartésien dans les problèmes de l'*Arithmetica*, il est tout à fait transformé , et l'on s'en éloigne souvent totalement ; le problème que nous allons traiter en est un exemple significatif.

Mais lisons plutôt Newton :

Lorsqu'on est maître de choisir entre plusieurs constructions également géométriques, il faut toujours choisir la plus simple : cette règle n'admet point d'exception. Or les expressions algébriques les plus simples ne sont pas toujours les plus faciles à construire. La simplicité que l'on doit préférer ne doit donc s'entendre que de la simplicité de description : c'est elle uniquement que considéraient les géomètres qui rangeaient le cercle dans la même classe que la ligne droite.

(...)

Une équation est, en général, l'expression d'un calcul arithmétique, où l'on prononce que quelques quantités sont égales à d'autres. Une équation ne peut être géométrique qu'autant que les quantités qu'elle contient sont géométriques, telles que lignes,

---

[53]M. Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, 3° edition, Paris, 1889, p. 157.

surfaces, solides ou proportions. C'est par une innovation des modernes qu'on y a fait entrer des multiplications, des divisions, et d'autres calculs de cette espèce ; et cette innovation n'est pas heureuse ; elle répugne aux premiers principes de la science. Car si l'on réfléchit bien aux constructions des problèmes par la ligne droite et le cercle, telles que les ont imaginées les anciens géomètres, on verra facilement qu'ils n'y ont eu recours qu'afin d'éviter, par le tracer facile de quelques lignes, l'ennui des longs calculs . Il ne faut donc pas confondre ces deux sciences ; les anciens en séparaient les limites avec tant de soin, que jamais ils ne se sont permis d'introduire des termes d'arithmétique dans la géométrie ; et les modernes en les confondant, ont fait disparaître la simplicité qui fait toute l'élégance de la géométrie. La simplicité arithmétique consiste à exprimer une question par l'équation la plus simple, et la simplicité géométrique, à résoudre une équation en menant les lignes les plus simples.[54]

Descartes cherchait la simplicité du calcul ; il apparaît clairement ici que Newton n'oublie pas la simplicité de la construction. Il reste par ailleurs attaché à la géométrie des anciens, insistant particulièrement sur son élégance. Sont en germe ici des questions qui seront d'une certaine façon au coeur des discussions au XIX°siècle.

Le problème XLVII de l'*Arithmetica Universalis*, celui qui nous intéresse, illustre, nous l'avons déjà signalé, particulièrement ces idées. Il vient après trois problèmes :
Problème XLIV : décrire un cercle qui passe par un point donné, et touche deux droites *données de position.*
Problème XLV : décrire un cercle qui passe par deux points donnés, et touche un autre cercle *donné de position.*
Problème XLVI : décrire un cercle qui passe par un point donné, touche un cercle donné, et une droite *donnée de position.*

Nous trouvons donc ensuite le problème XLVII : décrire un cercle qui passe par un point donné, et touche deux autres cercles *donnés de grandeur et de position.*

Le problème XLVII s'appuie sur les précédents. Il ne s'agit donc pas d'une construction directe, ainsi que pourrait le faire présager une résolution

[54]Newton I., *Arithmetica Universalis*, traduction française de N. Beaudeux, 1802.

algébrique. Privilégier la simplicité de la construction géométrique, tout en préservant une certaine simplicité des calculs demande sans doute ce détour.

Nous constatons de plus que Newton suit ici le procédé de Viète, puisqu'il traite le problème IX de l'*Apollonius Gallus*, qui permet, quasi immédiatement, de construire le dernier.

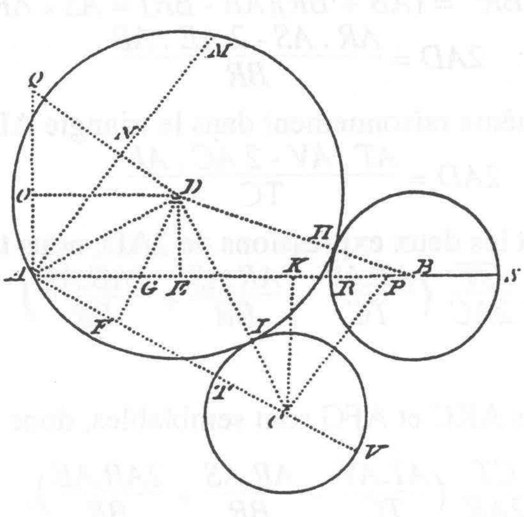
Au dernier paragraphe de la démonstration de Newton, nous trouvons en effet :

> *Par ce même problème on pourrait décrire un cercle qui en touchât trois autres donnés de grandeur et de position. Soient A, B, C, les rayons des trois cercles donnés, D, E, F leurs centres ; des centres E et F, avec des rayons respectivement égaux à B±A , C±A , décrivez deux cercles, et un troisième qui passe par le point D. Soit G le rayon de ce troisième cercle, et H son centre. Du point H avec un rayon égal à G±A , décrivez un quatrième cercle, et il touchera les trois autres, comme on le demandait.*

Ici s'arrête la comparaison avec l'ouvrage de Viète. S'il ne s'agit pas vraiment de géométrie analytique au sens de Descartes, la démonstration est , disons, algébrique, et comporte une analyse, puis une synthèse.

A est le point donné ; le cercle cherché, passant par A touchera les deux cercles donnés de centres B et C, respectivement en H et I. Le centre du cercle cherché est appelé D.

La figure est supposée construite, et il en est fait une analyse.



La droite (AB) coupe le cercle de centre B en R et S. La droite (AC) coupe le cercle de centre C en T et V. La perpendiculaire à (AB) issue de D coupe (AB) en E, et la perpendiculaire à (AC) issue de D coupe (AC) en F, et la droite (AB) en G. La perpendiculaire à (AB) issue de C coupe (AB) en K.

Une référence à la proposition 13 du livre II des *Éléments*, (qui marque bien, au passage, son attachement à la géométrie des anciens), lui permet d'écrire :

Le triangle ADB donne $\overline{AD}^2 - \overline{DB}^2 + \overline{AB}^2 = 2\,AE\,.\,AB$.

Rappelons rapidement la substance de la démonstration de la proposition 13 :

Dans le triangle ADB, de hauteur DE, nous avons

$AD^2 = DE^2 + EA^2$ et $DB^2 = DE^2 + EB^2$ et $AB = AE + EB$.

Donc :

$$AD^2 - DB^2 + AB^2 = DE^2 + EA^2 - DE^2 - EB^2 + AE^2 + EB^2 + 2\,AE\,.\,EB$$

$$= 2\,AE^2 + 2\,AE\,.\,(AB - AE) = 2\,AE.\,AB$$

Newton nous propose alors de substituer à DB, $AD + BR$.
Effectivement, DB est la somme des rayons du cercle de centre D et du cercle de centre B, qui sont respectivement AD et BR.

Nous obtenons alors :

$$AD^2 - AD^2 - BR^2 - 2\,AD\,.\,BR + AB^2 = 2\,AE.\,AB$$

Soit, $AB^2 - 2\,AD.\,BR - BR^2 = 2\,AE\,.\,AB$

Or $AB^2 - BR^2 = (AB + BR)(AB - BR) = AS \times AR$

Finalement : $2AD = \dfrac{AR\,.\,AS - 2\,AE\,.\,AB}{BR}$

Un même raisonnement dans le triangle ADC donnera :

$$2AD = \frac{AT\,.\,AV - 2\,AC\,.\,AF}{TC}.$$

En égalisant les deux expressions de 2AD, nous trouverons finalement :

$$AF = \frac{CT}{2AC}\left(\frac{AT.AV}{TC} - \frac{AR.AS}{BR} + \frac{2AB.AE}{BR}\right).$$

Les triangles AKC et AFG sont semblables, donc $\dfrac{AK}{AC} = \dfrac{AF}{AG}$, et $AG = \dfrac{AF.AC}{AK}$

ou encore, $\dfrac{CT}{2AK}\left(\dfrac{AT.AV}{TC} - \dfrac{AR.AS}{BR} + \dfrac{2AB.AE}{BR}\right)$.

On trouvera alors,

$$GE = AE - AG = \frac{CT}{2AK}\left(\frac{AE.2AK}{CT} + \frac{AR.AS}{BR} - \frac{AT.AV}{TC} - \frac{2AB.AE}{BR}\right).$$

Utilisant alors les triangles AKC et ADE, semblables,

$$\frac{CK}{AK} = \frac{GE}{DE} \quad \text{et} \quad DE = \frac{CT}{2CK}\left(\frac{AE.2AK}{CT} + \frac{AR.AS}{BR} - \frac{AT.AV}{TC} - \frac{2AB.AE}{BR}\right)$$

Sur la droite (AB) nous devons prendre P tel que :

$\dfrac{BR}{CT} = \dfrac{AB}{AP}$, ce qui permettra d'écrire : $DE = \dfrac{CT}{2CK}\left(\dfrac{AR.AS}{BR} - \dfrac{AT.AV}{TC} - \dfrac{2PK.AE}{CT}\right)$.

Puis sur la perpendiculaire en A à (AB), nous prenons Q tel que

$AQ = \dfrac{CT}{2CK}\left(\dfrac{AR.AS}{BR} - \dfrac{AT.AV}{TC}\right)$, puis toujours sur cette perpendiculaire, nous prenons O tel que $QO = \dfrac{PK.AE}{CK}$, de telle sorte que $AO = DE$.

Les triangles DOQ et CKP seront semblables. Donc les angles OQD et KPC sont égaux, par conséquent, (QD) est perpendiculaire à (PC). Menons par A la parallèle à (CP) qui coupe (QD) en N . Les triangles rectangles AQN et PCK seront semblables, donc $\dfrac{PC}{CK} = \dfrac{AQ}{AN}$, puis $AN = \dfrac{CT}{2PC}\left(\dfrac{AR.AS}{BR} - \dfrac{AT.AV}{TC}\right)$.

Prolongeant AN jusqu'en M de telle sorte que $AN = NM$, nous aurons bien sûr $AD = DM$, donc M sera un point du cercle cherché.

L'analyse étant achevée, Newton nous propose la résolution du problème :

> *Prenez sur AB une ligne AP dont vous déterminerez la longueur par cette proportion, BR : CT : : AB : AP, tirez la droite CP, menez à CP la parallèle AM, et faites,* $AM : \dfrac{AR.AS}{BR} - \dfrac{AT.AV}{TC}$ *: : CT : PC ; et par le moyen du problème XLV, faites passer par les points A et M le cercle AIHM, de manière qu'il touche un des cercles HRS, TIV, et il les touchera tous les deux. C . Q . F . T.*

Cette construction simple, et tout à fait synthétique, satisfait l'esprit du géomètre. Le problème ainsi semble constructible à la règle et au compas. L'analyse est "analytique" dans tous les sens du terme. Elle permet de comprendre les raisons de la construction. Elle utilise presqu'uniquement les triangles semblables, on ne peut dire cependant qu'elle vienne naturellement. Éclaire-t-elle vraiment la synthèse ? Elle n'amène pas non plus de discussion. Il n'est pas question par exemple du cas où les deux cercles donnés seront intérieurs au cercle cherché.

Nous devons par ailleurs signaler que le problème XLV, qui est utilisé, est lui tout à fait dans la ligne de Descartes, au sens où il s'appuie finalement sur les longueurs. En effet, A et B étant les deux points donnés, D le milieu de [AB], et C le centre du cercle cherché, Newton détermine une équation dont la solution x est la longueur CD.

Au bout du compte, il n'est pas certain que la deuxième solution, algébrique , soit supérieure à la construction géométrique donnée dans les Principia. Nous trouvons cependant sous la plume de Newton, comme c'était le cas pour Descartes, un effort pour traiter plus directement le dernier problème, sans passer par tous ceux de l'*Apollonius Gallus*. C'est ce qui va être tenté par les analystes du XVIII° siècle.

3° La solution du Marquis de l'Hospital :

Le *Traité analytique des sections coniques*[55] du Marquis de l'Hospital, est publié , à titre posthume, en 1707. A vrai dire, il y a plus qu'une coïncidence de date, avec l'*Arithmetica Universalis* de Newton.

En premier lieu, la qualité pédagogique des deux ouvrages est appréciée, à juste titre, au long du XVIII° siècle. Le traité du Marquis de l'Hospital est considéré comme ayant joué pour la géométrie analytique, un rôle analogue à celui que son *Analyse des infiniment petits* a joué pour l'analyse, (au moins sur le "Continent").

Les deux ouvrages de 1707, mêlent une illustration particulièrement efficace du calcul cartésien, et un penchant assez marqué pour les méthodes des Anciens, penchant contre lequel notre Marquis avait dû quelque peu lutter dans son *Analyse*, pour rester dans le ton leibnizien, ... ou par manque de place.

En fait, paradoxalement, si nous songeons à la controverse qui secoue parallèlement le monde des infiniment petits , il y a une sorte de communauté d'esprit entre les deux ouvrages.

En introduction du livre X, du *Traité des sections coniques*, le Marquis de l'Hospital définit sa méthode de résolution des problèmes déterminés, très cartésienne, et proche de celle de l'*Arithmetica Universalis* :

On regardera d'abord le problème proposé comme s'il était résolu et on tirera les lignes que l'on jugera les plus propres pour faire connaître ce qui n'est que supposé. On nommera ensuite toutes ces lignes (qui font pour l'ordinaire des triangles rectangles ou

[55]L'Hospital, G.F., Marquis de, *Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la résolution des équations dans les problèmes tant déterminez qu'indéterminez*, ouvrage posthume, Paris, Boudot, 1707.

semblables) par des lettres de l'alphabet, savoir les lignes qui sont connues par les premières lettres, et les lignes inconnües par les dernières lettres ; et on parcourra toutes les conditions du problème, en comparant ces lignes entr'elles dans l'ordre le plus simple et le plus naturel qu'il sera possible ; ce qui doit servir à former autant de différentes égalités qu'il y a d'inconnües. On emploiera enfin les règles ordinaires de l'algèbre pour réduire ces différentes égalités à une seule dans laquelle il ne se trouve plus qu'une inconnüe, et pour l'abaisser s'il se peut à un moindre degré ; et l'ayant résolüe par les règles prescrites dans le livre précédent, on en tirera la solution cherchée du problème. Ceci s'éclaircira parfaitement par les exemples qui suivent[56].

Parmi ces exemples suivants, il n'est pas étonnant de trouver des questions relatives aux cercles, dont celle qui nous intéresse. De fait, dans cet ouvrage, les propriétés de l'ellipse sont dérivées de celles du cercle, par exemple en considérant les ellipses comme sections obliques d'un cylindre à base circulaire. Cette méthode sera d'ailleurs reprise par Mac Laurin.

Le Marquis de l'Hospital a aussi adopté, comme définition des sections coniques, à l'instar de plusieurs géomètres contemporains, des courbes telles que la somme ou la différence des distances de chacun de leurs points à deux points fixes est constante, ou, dont chaque point est à égale distance d'un point et d'une droite fixe.

C'est justement un problème de ce genre qui est posé, comme exemple IV, au livre des *Problèmes déterminés* du *Traité*[57], dont nous donnons le texte complet en annexe :

Trois points A, B, C étant donnés, en trouver un quatrième M, duquel ayant mené à ces points les droites MA, MB, MC, les différences de l'une d'elles aux deux autres soient données.

Puis le corollaire I :

De là on voit comment on peut décrire un cercle qui touche trois cercles donnés.

L'on songe immédiatement, en écho, au problème étudié par Newton, non plus dans l'*Arithmetica*, mais dans les *Principia*. De fait, sur un ton analytique, (au moins partiellement), Le Marquis de l'Hospital va mener une réflexion voisine, à ceci près que Newton examinait d'abord le cas général de trois distances différentes ; dans le *Traité*, le cas des trois distances MA, MB, MC égales est d'abord étudié, puis celui de deux distances égales, enfin le cas

[56]Ibid., p.362.
[57]Ouvrage cité, p.374 à 381.

général de trois distances différentes. Cet ordre n'est pas indifférent, nous le constaterons.

Le premier cas, de deux différences nulles, ou de trois distances égales est traité rapidement, puisqu'il s'agit de trouver le centre d' un cercle passant par trois points donnés A, B, C.

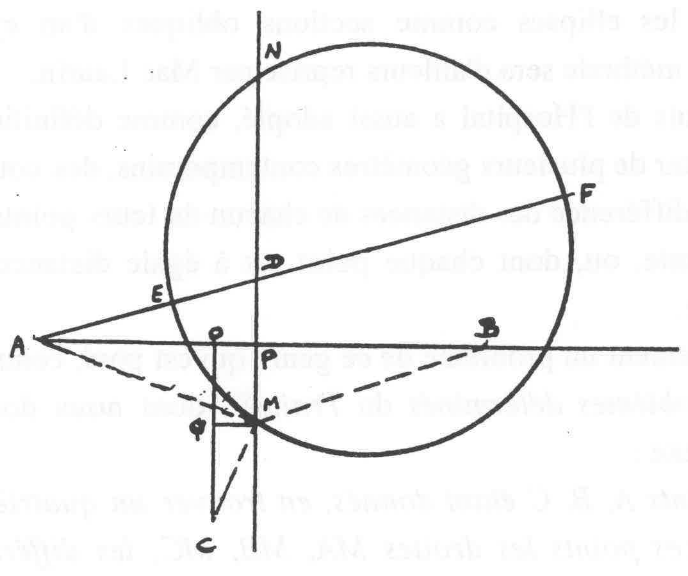
Le deuxième cas s'ouvre sur une analyse, "analytique", c'est à dire sous forme de mise en équation, dans le style cartésien. La figure étant supposée construite, M est projeté orthogonalement sur (AB) et sur la perpendiculaire à (AB) passant par C, respectivement en P (qui est, d'après l'hypothèse MA = MB, le milieu de [AB]) et Q. Les *données* sont nommées :

$AP = PB = a\ ,\ OP = b\ ,\ OC = c\ , AM - MC = f,$

puis les inconnues :

$AM = z\ ,\ PM = y.$

Ainsi, $MC = AM - f = z - f$ et $QC = OC - OQ = c - y.$



Le théorème de Pythagore appliqué aux triangles AMP et MCQ donne :

$z^2 = a^2 + y^2$ (1)

$z^2 - 2fz + f^2 = b^2 + c^2 - 2cy + y^2$ (2).

et, en retranchant la deuxième équation de la première, il vient :

$2fz - f^2 = a^2 - b^2 - c^2 + 2cy$

ou encore : $\dfrac{z}{y + \dfrac{a^2 - b^2 - c^2 + f^2}{2c}} = \dfrac{c}{f}$ (3).

L'analyse est faite, une synthèse est proposée, c'est à dire une façon d'obtenir le point M.

Sur la perpendiculaire à [AB] en son milieu P, on prend:
$$PD = \frac{a^2 - b^2 - c^2 + f^2}{2c}.$$

Sur (AD), on prend E et F tels que $\frac{AE}{ED} = \frac{c}{f}$ et $\frac{AF}{FD} = \frac{c}{f}$.

Le cercle de diamètre EF coupe (PD) au point cherché M, puisqu'il satisfait aux conditions (1) et (3), qui définissent le problème.

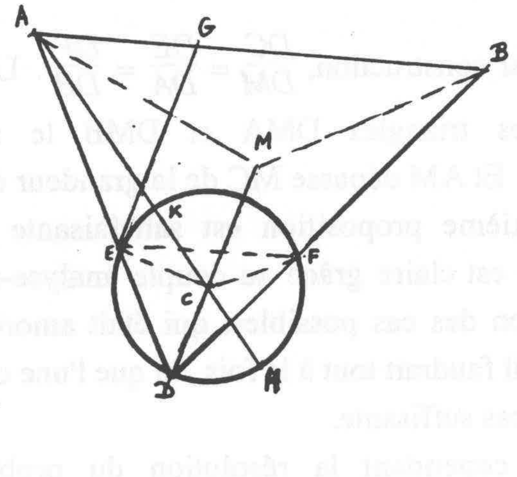
En fait la droite (DP) rencontre la circonférence en un autre point N, qui conviendra aussi, puisque $NA = NB$, et les différences de NA, NB avec NC seront aussi égales à f. Dans le premier cas, MC est la plus petite des longueurs MA, MB, MC ; dans le deuxième cas, NC est la plus grande des longueurs NA, NB, NC.

Cette analyse- synthèse est assez satisfaisante, à ceci près qu'il n'est pas très facile de construire (à la règle et au compas), une longueur PD égale à $\frac{a^2 - b^2 - c^2 + f^2}{2c}$, difficulté que nous avons déjà rencontrée dans les analyses de style cartésien, où c'est la longueur qui est d'abord prise en considération.

Le Marquis de l'Hospital, attaché nous l'avons dit à la méthode des anciens, est peut-être, sans l'avouer explicitement, gêné par cet écueil ; aussi propose-t-il, dans la foulée, une autre résolution :

On peut encore résoudre ce second cas sans aucun calcul.

Suit une très belle résolution dans la forme très classique analyse-synthèse, de parfaite géométrie pure.



Supposant le problème résolu et la figure construite, il construit le cercle de centre C et de rayon *MA - MC*. La droite (MC) rencontre ce cercle en D, la droite (DA) le rencontre en E, et la droite (DB) le rencontre en F. Alors,

$MD = MC + CD = MC + (MA - MC) = MA,$

donc le triangle MDA est isocèle.

Par ailleurs, $DC = CE$ comme rayons d'un même cercle, donc DCE est aussi isocèle.

Or ces deux triangles ont l'angle en D commun, ils sont donc semblables ; ainsi, (AM) et (EC) sont parallèles, et $\frac{DA}{DE} = \frac{DM}{DC} = \frac{DB}{DF}$.

Le problème se ramène donc à trouver sur le cercle de centre C un point D tel que les points E et F obtenus en joignant AD et BD, donnent une corde parallèle à (AB).

Voici alors la construction proposée :

Ayant tracé le cercle de centre C et de rayon AM - MC, appelons K et H les intersections de (AC) avec ce cercle. Sur (AB), prenons G tel que AG soit la quatrième proportionnelle à AB, AH, AK. Par G menons la tangente au cercle, et le point de contact sera nommé E. La droite (AE) coupe le cercle en D. Sur (DC) plaçons M tel que $\frac{DM}{DC} = \frac{DA}{DE}$. Ce point M convient.

La justification suit :

D'après les propriétés du cercle, nous avons bien sûr : $AK.AH = AE.AD$.
Or, $\frac{AB}{AH} = \frac{AK}{AG}$, donc $AH.AK = AB.AG = AE.AD$. Ou encore, $\frac{BA}{AD} = \frac{AE}{AG}$. Ainsi, les triangles DAB, et GAE, qui ont l'angle en A commun et les côtés adjacents proportionnels, sont semblables. Par conséquent, les angles AEG, et ABD, sont égaux. Mais, (GE) étant tangente au cercle en E, l'angle AEG est aussi égal à l'angle DFE. Les angles ABD et EFD étant égaux, les droites FE et AB sont parallèles.

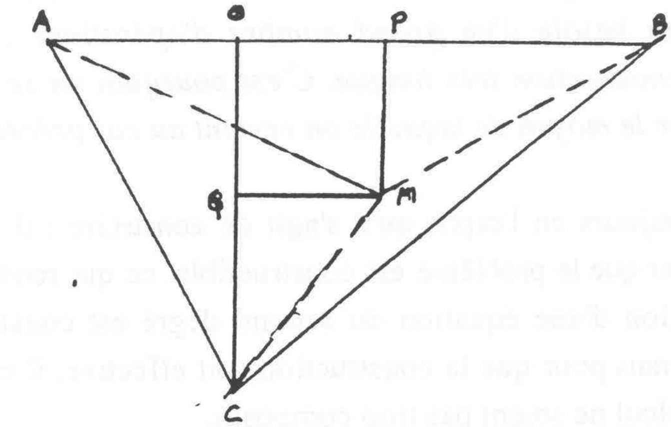
De plus, par construction, $\frac{DC}{DM} = \frac{DE}{DA} = \frac{DF}{DB}$. Les triangles DCE et DCF sont isocèles, les triangles DMA et DMB le sont donc aussi. Alors, $MD = MA = MB$. Et AM dépasse MC de la grandeur donnée CD.

Cette deuxième proposition est satisfaisante du point de vue de la construction. Elle est claire grâce au couple analyse-synthèse. Il manque sans doute la discussion des cas possibles, qui était amorcée dans la phase calcul. L'on sent bien qu'il faudrait tout à la fois , et que l'une ou l'autre méthode, réduite à elle seule, n'est pas suffisante.

Achevons cependant la résolution du problème en considérant le troisième cas, celui de trois longueurs MA, MB, MC inégales deux à deux.

L 'analyse reprend sur le mode du calcul cartésien.

Supposant la figure construite, le problème va être mis en équation.



Soit O le projeté orthogonal de C sur (AB). Soit P et Q les projetés orthogonaux respectifs de M sur (AB) et (CO).

Les *données* sont nommées : $AO = a$; $OB = b$; $CO = c$; $AM - MD = d$; $AM - MC = f$.

Et les inconnues : $OP = x$; $PM = y$; $AM = z$.

Ainsi, $AP = a + x$, $BP = b - x$, $CQ = c - y$, $BM = z - d$, $CM = z - f$.

Le théorème de Pythagore appliqué aux triangles APM, BPM, CQM, donne :

$$AM^2 = AP^2 + PM^2 \quad soit \quad z^2 = a^2 + 2ax + x^2 + y^2 \quad (1)$$

$$BM^2 = BP^2 + PM^2 \quad soit \quad z^2 - 2dz + d^2 = b^2 - 2bx + x^2 + y^2 \quad (2)$$

$$CM^2 = CQ^2 + QM^2 \quad soit \quad z^2 - 2zf + f^2 = c^2 - 2cy + y^2 + x^2 \quad (3)$$

puis, retranchant la deuxième équation puis la troisième de la première, nous obtenons :

$$2dz - d^2 = a^2 - b^2 + 2ax + 2bx \quad (4)$$

$$2zf - f^2 = a^2 - c^2 + 2ax + 2cy \quad (5).$$

Tirant y de cette dernière équation, la valeur trouvée remplacera y dans la première, qui ne comportera plus alors que x et z. Tirant alors x de la quatrième équation, sa valeur est reportée dans la première équation ; au bout du compte, cette équation ne comportera plus que l'inconnue z, et ce sera une équation du second degré en z. Elle peut donc se résoudre *en n'employant que les lignes droites et les cercles, comme on l'a enseigné dans les art. 380 ou 382.*

Si z est connu, le point M aussi, car il sera à l'intersection de deux arcs de cercles l'un de centre A et de rayon z, l'autre de centre B et de rayon z - d.

Cependant :

On voit assez qu'en achevant le calcul, on serait arrivé à une égalité du second degré qui aurait renfermé dans ses termes des quantités très composées ; de sorte que pour les réduire sous des expressions simples, comme le demandent les articles 380 et 382, on aurait besoin d'un grand nombre d'opérations ; ce qui rendrait la construction très longue. C'est pourquoi on se servira de celle-ci par le moyen de laquelle on revient au cas précédent.

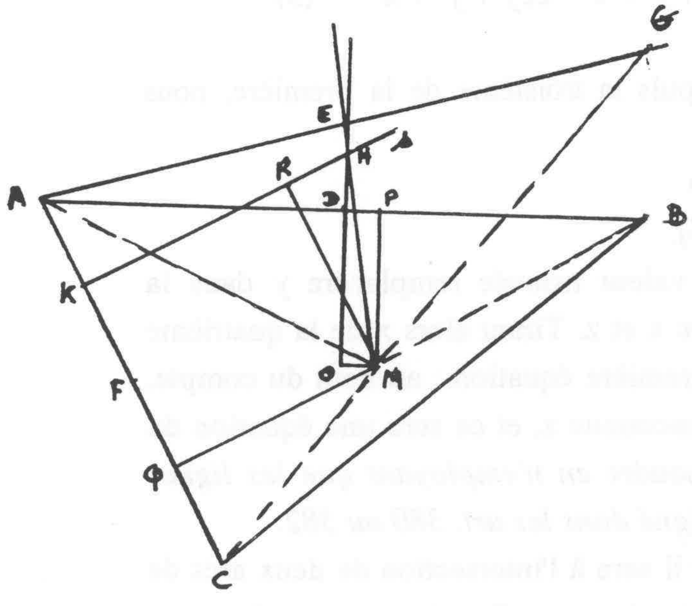
L'auteur, a toujours en l'esprit qu'il s'agit de construire ; il ne s'agit pas seulement de montrer que le problème est constructible, ce qui rendrait le calcul suffisant. Une solution d'une équation du second degré est constructible à la règle et au compas, mais pour que la construction soit effective, il est nécessaire que les termes du calcul ne soient pas trop composés.

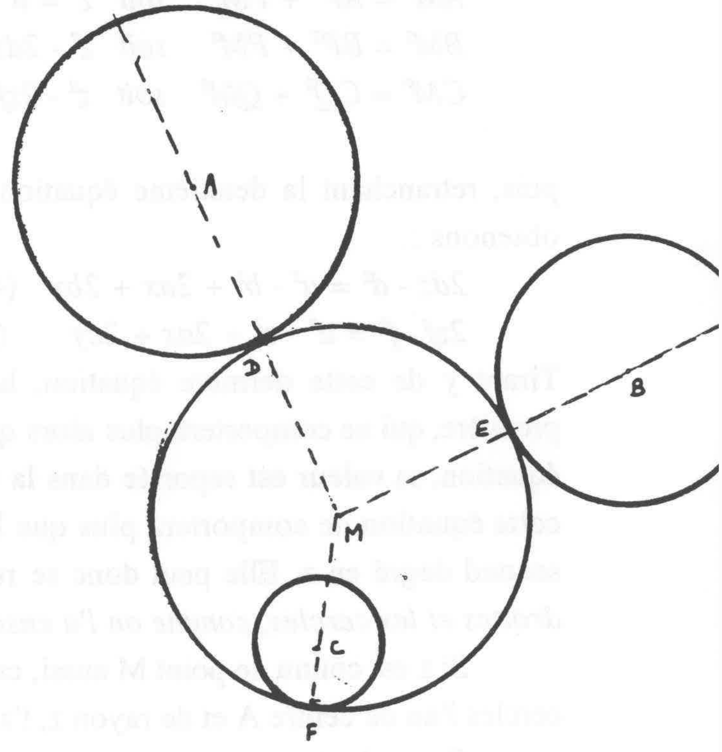
Nous remarquons aussi que l'avantage du calcul qui permettrait une discussion, disparaît si le calcul n'est pas mené jusqu'au bout.

La deuxième proposition de résolution va ramener le problème au cas précédent, c'est à dire lorsque deux des longueurs sont égales.

Nous pourrons remarquer que les mots hyperbole, foyer, grand axe ne sont pas écrits, cependant, sous forme analytique, cette solution a de grandes analogies avec celle proposée dans les *Principia* de *Newton*.

La figure étant toujours supposée construite, on appelle D le milieu de [AB], et F le milieu de [AC]. P et Q sont les projetés orthogonaux de M respectivement sur (AB) et (AC).





Les *données* sont nommées : $AB = 2a$; $BC = 2b$; $AM - MB = 2c$;

$$AM - MC = 2d.$$

Et les inconnues : $DP = x$; $FQ = y$, puis $AM + BM = 2t$.

Ainsi, si AM est la plus grande distance, $AM = t + c$, et $BM = t - c$.

Les triangles rectangles APM et BPM donnent :

$PM^2 = AM^2 - AP^2 = BM^2 - BP^2$ ou encore *en termes analytiques*, nous dit le texte : $t^2 + 2ct + c^2 - a^2 - 2ax - x^2 = t^2 - 2ct + c^2 - a^2 + 2ax - x^2$.

Ce qui donne $t = \frac{ax}{c}$ donc, $AM = t + c = \frac{ax}{c} + c$.

De la même façon, à partir des triangles AQM et CQM, on trouvera

$$AM = \frac{by}{d} + d.$$

Et, finalement, $AM = \frac{ax}{c} + c = \frac{by}{d} + b$, et, posant $d - c = f$,

$\frac{ax}{c} = \frac{by}{d} + f$, ou encore $\dfrac{x}{y + \frac{df}{b}} = \dfrac{b}{\frac{ad}{c}}$. Ce qui est suffisant pour proposer une construction.

D et F étant les milieux de [AB] et [AC], on prend sur [AC] du côté de A un point K tel que $FK = \frac{df}{b}$. Les perpendiculaires à (AB) et (AC) respectivement en D et K se coupent en H. Dans l'angle formé par ces deux droites, opposé à l'angle KHD, on mène par H la droite lieu des points M tels que, si O et R sont les projetés orthogonaux respectifs de M sur (DH) et (KH), on ait : $\dfrac{MO}{MR} = \dfrac{b}{\frac{ad}{c}}$. (On reconnaîtra ici la droite (TZ) des *Principia* de Newton.) . On trace alors la perpendiculaire à (HM) passant par A, qui coupe (HM) en E, puis on prend sur cette perpendiculaire le point G tel que $AE = EG$.

Utilisant alors le second cas, puisque $MA = MG$, on trouve le point M particulier tel que la différence entre MA et MC soit égal à la différence donnée 2d. Et ce point M convient aussi pour les points A, B, C.

La construction est satisfaisante, la discussion n'est toujours pas là, puisque la synthèse ne l'a pas fait apparaître.

Le corollaire est classique maintenant, puisque la recherche du centre M d'un cercle qui touche trois cercles donnés de centres respectifs A, B, C, se ramène à celle d'un point dont les différences des distances à trois points sont données. Nous trouvons cependant une ébauche de généralité, car le cas traité est celui où l'un des cercles donnés sera intérieur au cercle cherché, les autres étant extérieurs ; ce qui sous-entend que les autres positions sont possibles.

Ici, en effet, si les rayons donnés sont a, b, c, et le rayon cherché z, on cherche M tel que $AM = z + a$, $BM = z + b$, *et* $CM = z - c$; ce qui donne $AM - BM = a - b$, $BM - CM = b + c$, *et* $AM - MC = a + c$.

Ainsi le Marquis de l'Hospital, s'il n'a pas traité le problème dans toute sa généralité, a cependant remarqué que l'on devait distinguer les cas où les rayons sont égaux, où deux des rayons sont égaux, et où les trois sont égaux, reprenant en quelque sorte l'étude de Ibn Sinan. Newton avait seulement distingué dans sa première démonstration le cas de trois rayons égaux. Il est aussi notable qu'il n'a pas hésité à reprendre la voie de la géométrie pure lorsque le calcul devenait trop ardu. La géométrie épaulant le calcul, le calcul épaulant la géométrie, c'est peut être la méthode la plus efficace.

Un autre voie va s'ouvrir, celle de la trigonométrie, qu'empruntera Euler, et après lui Carnot.

4° L'élégante solution trigonométrique de Euler :

L'algèbre des sinus et des cosinus due principalement à Euler, est un de ces moyens d'abréviation auquel toutes les parties des mathématiques ont des obligations préalables.[58]

Bossut

En 1779, devant l'Académie des sciences de Saint Pétersbourg, Euler présente un petit mémoire donnant la *solution simple du problème où est demandé un cercle qui soit tangent à trois cercles donnés.*[59] Ceci sera suivi, peu de temps après, de l'exposé d'une *solution simple du problème où est demandé une sphère tangente à quatre sphères de positions données*[60].

L'on ne sera pas étonné de trouver sous la plume de cet éminent mathématicien l'utilisation de la trigonométrie, qu'il a largement fait progresser, pour traiter l'un et l'autre de ces problèmes. C'est la méthode trigonométrique, que reprendra Carnot, quelques vingt ans plus tard, en 1801, citant d'ailleurs les travaux d'Euler. Au-delà, nous trouvons aussi la virtuosité du grand algébriste dans la manipulation des équations.

---

[58]Bossut, C., *Essai sur l'histoire générale des mathématiques* , Paris, Louis, 1802, tome II, p. 124.
[59]Euler, L.,*Solutio facilis problematis quo quaeritur circulus qui datos tres circulos tangat*, Opera omnia, vol. XXVI, Lausanne, Andreas Speiser, 1953, P. 270 à 275.
[60]Ibid. p. 334 à 343.

Nous nous attacherons à l'étude particulière de la solution du premier problème ; mais la solution proposée pour le deuxième mérite d'être mentionnée à plus d'un titre. Deux solutions sont en fait proposées, toutes deux trigonométriques et algébriques, et c'est peut-être la première fois que ce problème dans l'espace est mené jusqu'au bout, par une méthode qui ne relève pas de la géométrie des anciens. Elle ne manque pas non plus de poésie, et l'astronome aidant l'algébriste, Euler choisit tout simplement, pour désigner certaines quantités, les symboles des planètes . L'originalité de la notation, qui donne peut-être un supplément de sens, peut être appréciée dans l'extrait joint. Il est permis de penser que cette écriture n'est pas une invention de l'éditeur et qu'elle se trouve à coup sûr dans le texte original de Euler.

Extrait de SOLUTIO FACILIS PROBLEMATIS QUO QUAERITUR SPHAERA QUAE DATAS QUATUOR SPHAERAS UTCUMQUE DISPOSITAS CONTINGAT. Opera Omnia. vol. XXVI, p.342.

orietur sequens aequatio:

$$2\odot = \text{♄} + \text{♃} + 2\text{♂}\cos\zeta$$
$$+\cos\varphi\,(2\text{♂} + \text{♄}\cos\zeta + \text{♃}\cos\zeta) + (\text{♃} - \text{♄})\sin\varphi\sin\zeta\ .$$

quam aequationem brevitatis gratia ita repraesentemus

$$\text{☾} = \text{♀}\cos\varphi + \text{☿}\sin\varphi\ ,$$

ita ut sit

$$\text{☾} = 2\odot - \text{♄} - \text{♃} - 2\text{♂}\cos\zeta\ ,$$
$$\text{♀} = 2\text{♂} + \text{♄}\cos\zeta + \text{♃}\cos\zeta$$

et

$$\text{☿} = (\text{♃} - \text{♄})\sin\zeta\ .$$

19. Hinc iam facile foret per aequationem quadraticam vel $\sin\varphi$ vel $\cos\varphi$ definire, multo autem commodius resolutio instituetur, si ex quantitatibus cognitis ♀ et ☿ quaeratur angulus θ, ita ut sit

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\text{♀}}{\text{☿}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\ .$$

Hinc igitur erit

$$\sin\theta = \frac{\text{♀}}{\sqrt{\text{♀}^2 + \text{☿}^2}} \quad \text{et} \quad \cos\theta = \frac{\text{☿}}{\sqrt{\text{♀}^2 + \text{☿}^2}}\ ,$$

unde vicissim habebimus

$$\text{♀} = \sin\theta\sqrt{\text{♀}^2 + \text{☿}^2} \quad \text{et} \quad \text{☿} = \cos\theta\sqrt{\text{♀}^2 + \text{☿}^2}\ .$$

Iam isti valores pro ♀ et ☿ substituti producent hanc aequationem:

$$\text{☾} = (\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi)\sqrt{\text{♀}^2 + \text{☿}^2}\ ,$$

unde porro concluditur

$$\frac{\text{☾}}{\sqrt{\text{♀}^2 + \text{☿}^2}} = \sin(\theta + \varphi)\ .$$

Ad hanc aequationem construendam quaeratur angulus η, cuius sinus sit $= \frac{\text{☾}}{\sqrt{\text{♀}^2 + \text{☿}^2}}$, ita ut fiat $\sin\eta = \sin(\theta + \varphi)$ ideoque etiam $\eta = \theta + \varphi$, consequenter orietur angulus quaesitus $\varphi = \eta - \theta$. Cum autem angulus $180 - \eta$ eundem habeat sinum, erit etiam $\varphi = 180 - \eta - \theta$ sicque etiam haec analysis nos perducit ad binos valores anguli φ.

Il nous est annoncé une solution simple pour le problème du cercle tangent à trois cercles donnés. Elle a au moins le mérite d'être assez courte et directe, s'attaquant sans préalable au cœur même du sujet. Il faut cependant reconnaître que malgré la clarté de l'exposé, et l'invention de notations particulièrement simplificatrices, qui signent tout à fait l'œuvre de notre mathématicien, cette solution n'était sans doute pas à la portée du premier venu.

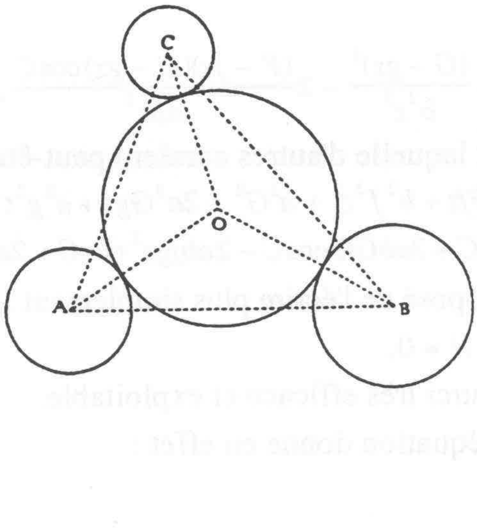
Le résumé souligne d'ailleurs la densité du texte :

Ce petit mémoire, dont le titre indique suffisamment le sujet, n'est pas susceptible d'extrait : car il serait impossible de se faire une idée de la solution que l'Auteur donne de ce problème traité par beaucoup de géomètres, sans le suivre presque pas à pas dans ses calculs.

Nous allons cependant nous efforcer de tirer la substance de la démonstration.

Nous constaterons en préalable que Euler sait utiliser la solution algébrique pour instaurer une discussion sur le nombre de cas possibles, par une étude assez habile des signes affectés aux différentes quantités. C'est un progrès assez considérable sur les auteurs précédents, même si cette discussion reste un peu embarrassée. Il reste à examiner si le Géomètre trouve son compte quant à la construction véritable d'une solution.

A, B, C étant les centres des trois cercles donnés, de rayons respectifs α, β, γ et O le centre du cercle cherché, de rayon x, on pose : CA = a, CB = b, et l'angle ACB égal à C.



La première remarque porte sur la façon dont les cercles se touchent, intérieurement ou extérieurement ; ainsi, pour la figure proposée, nous aurions :

OA = x + α, OB = x + β, et OC = x + γ.

Mais pour tenir compte du fait que les cercles A ou B ou C peuvent être intérieurs au cercle inconnu, il suffit de remarquer que les signes précédant α ou β ou γ peuvent être + ou - . Ainsi existent a priori huit solutions, puisque huit agencements de signes possibles. Ceci étant convenu, l'étude sera faite pour trois signes +, sachant que l'on pourra toujours échanger les signes.

Va intervenir alors une nouvelle inconnue z = OC = x + γ , de telle sorte que x = z - γ, donc OA = z + f et OB = z + g, en posant f = $\alpha - \gamma$ et g = $\beta - \gamma$; puis deux angles inconnus : p = OCA et q = OCB, dont la somme C est connue.

Tout va se ramener à trouver z, à l'aide de la trigonométrie.

Dans le triangle OCA, $OA^2 = AC^2 + OC^2 - 2AC \times OC \cos p$, ce qui permet d'évaluer *cos p.*

$$\cos p = \frac{a^2 + z^2 - (z+f)^2}{2az} = \frac{a^2 - 2fz - f^2}{2az}$$

De la même façon, dans le triangle OCB, on obtiendra *cos q* :

$$\cos q = \frac{b^2 + z^2 - (z+g)^2}{2bz} = \frac{b^2 - 2gz - g^2}{2bz}.$$

L'on sait par ailleurs que : *sin C = sin p cos q + cos p sin q*, donc

$$\sin^2 C = \sin^2 p \cos^2 q + \cos^2 p \sin^2 q + 2\sin p \cos q \cos p \sin q.$$

Et remplaçant sin^2p par $1 - cos^2p$ et sin^2q par $1 - cos^2q$,
nous obtenons :

$$\sin^2 C = \cos^2 p + \cos^2 q - 2\cos p \cos q \cos C.$$

Il suffit alors dans cette équation de remplacer *cos p* et *cos q* par les valeurs trouvées précédemment, et nous obtenons une équation du second degré en z.

A vrai dire cette équation est très compliquée à écrire. Pour la simplifier Euler propose d'appeler F la quantité $a^2 - f^2$, et G la quantité $b^2 - g^2$; ce qui permet d'obtenir :

$$\sin^2 C = \frac{(F - fz)^2}{a^2z^2} + \frac{(G - gz)^2}{b^2z^2} - 2\frac{(F - fz)(G - gz)\cos C}{abz^2},$$

puis une équation devant laquelle d'autres auraient peut-être reculé :

$$a^2b^2z^2 \sin^2 C = b^2F^2 - 2b^2Ffz + b^2f^2z^2 + a^2G^2 - 2a^2Ggz + a^2g^2z^2$$
$$-2abFG\cos C + 2abGfz\cos C - 2abfgz^2\cos C + 2abFgz\cos C.$$

Il nous est alors proposé de l'écrire plus simplement :

$$Lz^2 - 2Mz + N = 0,$$

ce qui constitue un raccourci très efficace et exploitable.

La résolution de l'équation donne en effet :

$$z = \frac{M \pm \sqrt{M^2 - LN}}{L}.$$

Lorsque $M^2 > LN$, il y a donc deux solutions z. Il y avait au départ, d'après le jeu de signes, huit équations possibles. Il semblerait que, dans certains cas au moins, il y ait donc seize cercles solution possibles. Il existera aussi des cas où aucune solution n'existera, lorsque $M^2 < LN$,

Euler instaure alors une discussion sur le nombre réel maximum de cas possibles.

Première interrogation : que se passe-t-il si la valeur trouvée pour z est négative ?

Il va montrer que ceci se produira si pour α, β, γ, tous les signes ont été changés.

Si tous les signes de α, β, γ, changent, alors f qui est $\alpha - \gamma$, et g qui est $\beta - \gamma$, changent aussi de signes, mais F et G ne changent pas, puisque dans leurs expressions n'interviennent que les carrés de f et g.

$$L = b^2 f^2 + a^2 g^2 - a^2 b^2 \sin^2 C - abfg \cos C$$

Donc L ne change pas puisque dans son expression n'interviennent que les carrés de f et g, ou le produit fg.

$$M = b^2 Ff + a^2 Gg - ab \cos C(Gf + Fg)$$

Donc M change de signe.

Enfin, $N = b^2 F^2 + a^2 G^2 - 2abFG \cos C$, ne changera pas de signe.

Si bien que si tous les signes de α, β, γ, sont changés, l'équation initiale deviendra :

$$Lz^2 + 2Mz + N = 0$$

Qui consiste à *prendre z négativement.*

En sorte que les deux cas α, β, γ, et $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, aboutissent à la même équation quadratique, dont la racine positive convient au premier cas, et la négative au second, qui doit être considérée alors comme positive.

Nous reconnaissons ici la discussion propre au XVIII° siècle, voire au XIX° siècle sur la façon de considérer les racines négatives des équations.

Ceci permet , quoiqu'il en soit, de ne considérer que quatre équations différentes, qui vont correspondre aux cas :

I	II	III	IV
$\alpha + \beta + \gamma$	$\alpha + \beta - \gamma$	$\alpha - \beta + \gamma$	$-\alpha + \beta + \gamma$
$-\alpha - \beta - \gamma$	$-\alpha - \beta + \gamma$	$-\alpha - \beta + \gamma$	$+\alpha - \beta - \gamma$

Finalement, nous retrouvons les huit cas possibles .

Le génie calculatoire d'Euler a permis de mener à son terme la discussion algébrique, qui a le mérite d'exister. Comment cependant retrouver le support géométrique du départ ?

Le grand calculateur se souvient de l'origine du problème et reconnaît que *ce n'est pas tant le calcul numérique que la construction géométrique qui ordinairement donne du souci.*

L'équation algébrique aura permis de mener la discussion, mais la construction sera menée différemment.

Un autre calcul va se mettre en place, où l'inconnue sera cette fois un angle.

Prenant l'angle ACB égal à 2ζ , (qui est donné), et prenant ACO = p = $\zeta+\varphi$ et BCO = q = $\zeta-\varphi$, la nouvelle inconnue sera φ .

cos p et cos q ont été calculés précédemment, en fonction de z. A partir des deux égalités, éliminant z entre les deux, nous trouvons une équation liant cos p et cos q, donc cos $(\zeta+\varphi)$ et cos$(\zeta-\varphi)$, où la seule inconnue est φ.

$$Gf - Fg = (bF - aG)\cos\zeta\cos\varphi + (aG + bF)\sin\zeta\sin\varphi .$$

Pour alléger l'écriture, il nous est proposé de prendre :

$$L = Gf - Fg \; ; M = bF-aG \; ; N = aG + bF.$$

Ainsi l'équation devient :

$$L = M\cos\zeta\cos\varphi + N\sin\zeta\sin\varphi .$$

Cette nouvelle équation est alors résolue d'une façon qui nous est maintenant tout à fait classique, en posant :

$$\sin\theta = \frac{M\cos\zeta}{\sqrt{M^2\cos^2\zeta + N^2\sin^2\zeta}}$$

et

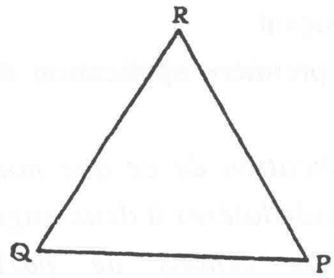
$$\cos\theta = \frac{N\sin\zeta}{\sqrt{M^2\cos^2\zeta + N^2\sin^2\zeta}}$$

et finalement : $\tan\theta = \dfrac{M\cos\zeta}{N\sin\zeta}$.

Puis appelant λ un angle dont le sinus est $\dfrac{L}{\sqrt{M^2\cos^2\zeta + N^2\sin^2\zeta}}$, nous obtenons : $\sin(\theta+\varphi) = \sin\lambda$, ce qui donnera : $\theta+\varphi = \lambda$, donc $\varphi = \lambda-\theta$, ou bien, $\theta+\varphi = 180° - \lambda$, donc, $\varphi = 180° - \lambda - \theta$.

L'angle θ est connu puisque sa tangente est connue.

Pour construire l'angle λ, il nous est proposé de construire le triangle auxiliaire PQR, de côtés PQ = bF, PR = aG, et dont l'angle PQR sera 2ζ, c'est à dire l'angle ACB du départ.



Dans ce cas, effectivement QR sera égal à :

$$\sqrt{b^2F^2 + a^2G^2 - 2abFG\cos 2\zeta}\,,$$

et donc *sin* λ sera déterminé puisque : $\sin\lambda = \dfrac{Gf - Fg}{QR}$. L'angle λ peut donc se construire, puis l'angle φ.

Reste à connaître CO, mais d'après les équations posées au départ,

$$CO = \frac{F}{f + a\cos(\zeta + \varphi)}.$$

Finalement la solution est "construite";

La proposition est habile, la construction est cependant contournée, et le géomètre armé de sa règle et de son compas, n'est peut-être pas encore satisfait.

Le propos d'Euler, finalement n'était peut-être pas de construire une solution. Il n'en construit d'ailleurs pas. N'a -t-on pas tendance, lorsqu'on est algébriste, à se laisser emporter par la magie du calcul ; l'équation remplace la ligne dans l'imagination, le dessin est accessoire. C'est un des reproches que ne manqueront pas de faire les géomètres aux analystes, au début du XIX° siècle.

5° Les ébauches de Carnot:

Carnot va largement contribuer au changement de regard que l'on portera sur la géométrie au XIX° siécle. Il va publier coup sur coup, deux ouvrages : *La corrélation des figures de géométrie,* en 1801, et la *Géométrie de position,* en 1803.

Nous remarquerons que, aussi bien dans la *Corrélation des figures de géométrie,* que dans la *Géométrie de position,* le problème des trois cercles sur un plan ou des quatre sphères dans l'espace sont proposés comme application des méthodes exposées. Nous avons déjà noté que ce qui est proposé par Carnot est très proche des démonstrations d'Euler. Ainsi Carnot n'éprouve pas la nécessité de mener les démonstrations jusqu'au bout, renvoyant le lecteur à ses illustres prédécesseurs. Pour autant nous donnerons un aperçu de ce qui est proposé, étant donné l'influence que les deux ouvrages cités ont exercé sur la géométrie du XIX° siècle commençant.

Nous trouvons donc une première application dans la *Corrélation des figures de géométrie.*

> *198- Pour faire une application de ce que nous venons de dire particulièrement sur les quadrilatères à deux angles droits opposés, tels que celui dont nous venons de parler, soient trois circonférences tracées dans un même plan ; on demande qu'il soit tracé une quatrième circonférence, qui soit tangente aux trois autres*[61].

Il s'agit d'une application trigonométrique, assez simple, concernant cependant le cas particulier d'un cercle qui touchera extérieurement les trois cercles donnés, dont nous devons reconnaître qu'elle apporte peu de chose au regard des solutions précédemment étudiées.

Si A, B, C sont les centres des trois circonférences données, X celui de la circonférence cherchée, abaissons les perpendiculaires de X sur AB en E, et sur BC en F.

Les angles BEX et BFX sont droits, donc la circonférence de diamètre BX passe par E et F. On peut donc écrire que $EF = BX.\sin ABC$. Cela a été démontré précédemment.

Ou encore $EF^2 = BX^2.\sin^2 ABC$.

Par ailleurs, dans le triangle EBF, on a : $EF^2 = EB^2 + BF^2 - 2EB.BF.\cos ABC$, donc :

$BX^2.\sin^2 ABC = EB^2 + BF^2 - 2EB.BF.\cos ABC$.

Posons maintenant :

x pour le rayon de la circonférence cherchée,

A, B, C les rayons des circonférences de centres respectifs A, B, C,

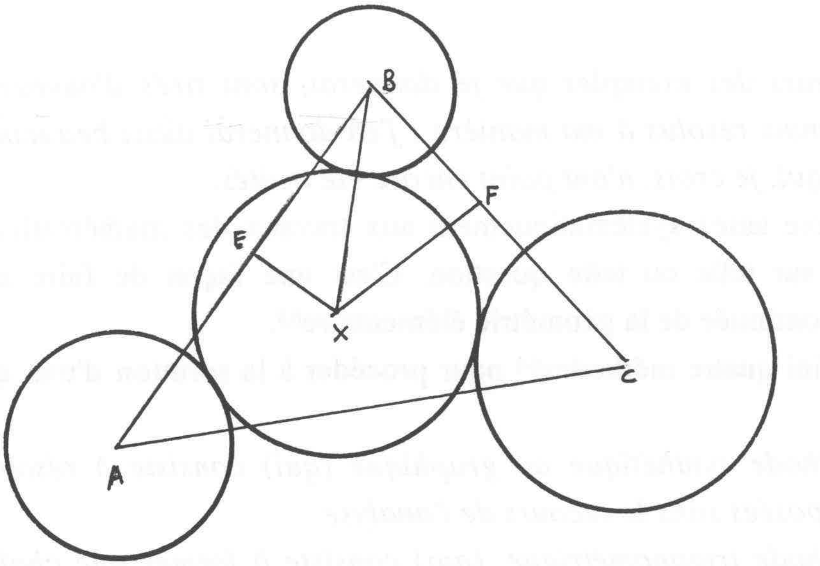
a, b, c les côtés du triangle ABC, respectivement opposés aux angles A, B, C[62],

enfin, m et n, le sinus et le cosinus de l'angle connu ABC.

---

[61] Carnot, L. N. M., *De la corrélation des figures de géométrie*, Paris, Duprat, 1801, p.109.

[62] Il semble que cette façon de dénommer les côtés d'un triangle soit due à Euler.



L'équation précédente deviendra :

$(B+x)^2 m^2 = EB^2 + BF^2 - 2EB.BF.n$

Pour avoir une équation ne renfermant que des x et des quantités données, Carnot propose d'évaluer EB et BF en "*valeur de x*".

Dans le triangle XAB, on a

$EB^2 - AE^2 = BX^2 - AX^2$

ou encore, en remplaçant AE par AB - EB ou c - EB, BX par B + x, et AX par A + x, on aura :

$2EB.c - c^2 = B^2 - A^2 + (2B - 2A)x$

ou : $EB = \dfrac{B^2 - A^2 + c^2 + (2B-2A)x}{2c}$.

On trouvera de même :

$BF = \dfrac{B^2 - C^2 + a^2 + (2B-2C)x}{2a}$.

Reprenant donc l'équation précédente, nous aurons :

$$(B+x)^2.m^2 = \left(\frac{B^2 - A^2 + c^2 + (2B-2A)x}{2c}\right)^2 + \left(\frac{B^2 - C^2 + a^2 + (2B-2C)x}{2a}\right)^2$$
$$-n\frac{(B^2 - A^2 + c^2 + (2B-2A)x)(B^2 - C^2 + a^2 + (2B-2C)x)}{2ac}.$$

Cette équation *ne monte qu'au second degré.*

Ceci suffit pour notre auteur. Il a mis en application ses résultats et sa méthode, il a trouvé une équation du second degré que l'on sait donc résoudre. Le problème de la construction n'est pas évoqué.

Peu après le problème sera repris, dans la *Géométrie de position.* Carnot alors met l'accent plus sur l'originalité de ses méthodes que sur celle des exemples qu'il choisit :

Plusieurs des exemples que je donnerai, sont tirés d'ouvrages connus, mais résolus à ma manière ; j'en donnerai aussi beaucoup d'autres qui, je crois, n'ont point encore été traités.

Il renvoie assez systématiquement aux travaux des mathématiciens qui l'ont précédé sur telle ou telle question. C'est une façon de faire sentir la construction continuée de la géométrie élémentaire[63].

Il a défini quatre méthodes[64] pour procéder à la solution d'une question proposée :

La méthode synthétique ou graphique (qui) consiste à résoudre les questions proposées sans le secours de l'analyse.

La méthode trigonométrique, (qui) consiste à former une chaîne non interrompue de triangles entre les données et les inconnues de la figure proposée. Cette méthode comporte deux versants : *la trigonométrie numérique (trigonométrie proprement dite)* utile pour calculer par exemple des angles et *la trigonométrie analytique ou algébrique,* utile pour faire découvrir les propriétés générales des figures.

La méthode analytique (qui) consiste à traiter les questions proposées par les seuls moyens que fournit l'analyse, en ne tirant de la géométrie que ce qui est absolument indispensable pour l'expression des conditions de chaque problème.

La méthode mixte, qui est souvent plus expéditive qu'aucune autre.

Si cette méthode n'a pas l'avantage d'une certaine uniformité dans ses procédés, elle a plus de moyens pour profiter des diverses propriétés déjà connues des figures, et des simplifications accidentelles, qu'offre dans chaque cas particulier la nature de la question. Aussi fournit-elle des solutions très élégantes : comme elle ne reprend pas les choses d'aussi haut que les méthodes purement analytiques, puisqu'elle profite de ce qui est déjà fait, c'est-à -dire, des propriétés déjà connues, elle est souvent plus expéditive qu'aucune autre, et jusqu'à présent elle a été la plus usitée. Les ouvrages de Newton, l'Hospital , Bossut, etc..., en fournissent un grand nombre d'exemples[65].

C'est la méthode que Carnot choisit de suivre. Mais pour cela il faut avoir résolu un certain nombre de problèmes élémentaires dans chaque méthode, auxquels on pourra rapporter les nouveaux problèmes qui seront proposés. Pour

---

[63]On pourra consulter sur ce sujet : Dhombres, J. et N., *Lazare Carnot*, Paris, Fayard, p. 514 à 552.
[64]Carnot, L., N., M., *Géométrie de position*, Paris, Duprat, 1803, p.351.
[65]Ibid. P. 354.

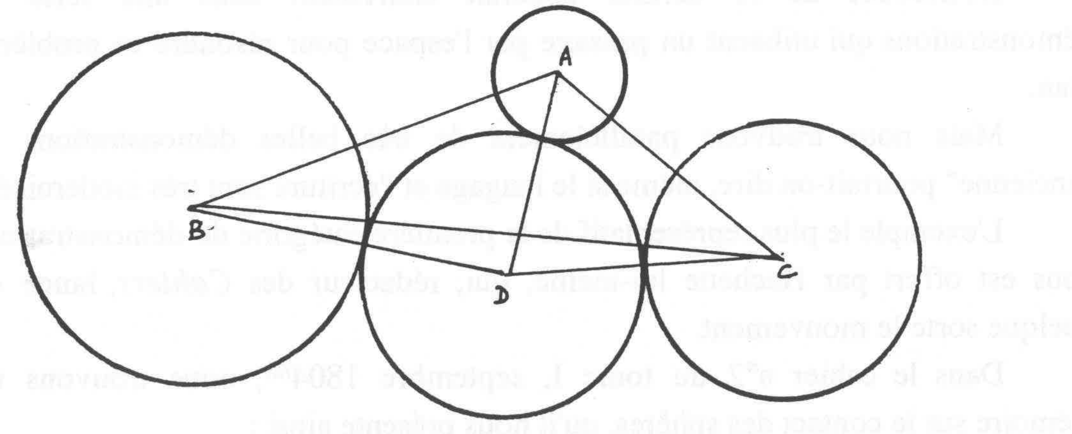
une plus grande efficacité, des tableaux sont dressés pour que toutes les situations possibles issues d'un problème "type" puissent être examinées.

Le problème primitif auquel se rapporte, par exemple, la recherche du cercle qui en touche trois autres sur un plan, est le problème XLVI de la *Géométrie de position :*

De ces six choses, savoir les quatre côtés d'un quadrilatère et ses deux diagonales, cinq quelconques étant données, trouver la sixième.

A partir de là, une ébauche de solution au problème des trois cercles est donnée .

Cette fois, A, B, C sont les centres des trois circonférences données, mais D est celui de celle qui est cherchée. Les rayons des circonférences données seront a, b, c et x celui de la circonférence cherchée. Les six segments AB, AC, BD, CD, AD, BC, seront désignés respectivement par m, n, p, q, r, s. Les quantités m, n, s sont données par hypothèse, et si l'on trouve x, on aura p, q et r, car $p = b + x$, $q = c + x$, *et* $r = a + x$.



Pour trouver x, on peut appliquer au quadrilatère ABCD la formule établie précédemment qui n'est pas vraiment simple :

$$(m^2q^4 + q^2m^4 + n^2p^4 + p^2n^4 + r^2s^4 + s^2r^4) + (m^2n^2s^2 + m^2p^2r^2 + n^2q^2r^2 + p^2q^2s^{2)}$$

$$-(m^2n^2p^2 + m^2n^2q^2 + m^2p^2q^2 + m^2q^2r^2 + m^2q^2s^2 + m^2r^2s^2 + n^2p^2q^2 + n^2p^2r^2 + n^2p^2s^2 + n^2r^2s^2 + p^2r^2s^2 + q^2r^2s^2) = 0$$

On remplacera dans cette formule p, q, r par $b + x$, $c + x$, *et* $a + x$ respectivement ; ainsi la formule est une équation en x, qui peut se réduire au second degré puisque n'apparaîtra que x^2 et x^4.

Carnot s'arrête à cette étape une fois de plus, se justifiant ainsi :

> *Je n'effectue pas ce calcul parce que ce problème a été résolu d'une manière plus simple par des géomètres de premier ordre, tels que Viète, Newton, Euler, et que la synthèse en fournit plusieurs solutions très-élégantes. Mon objet a été seulement de faire voir que la formule trouvée ci-dessus est susceptible d'un grand nombre d'applications*[66].

Le problème étant déjà plusieurs fois résolu, la préoccupation de Carnot se résumait à mettre en valeur sa méthode, sur un exemple d'un certain niveau.

6° La correspondance sur l'École polytechnique

Dès la création ou presque, en 1804, de la *Correspondance sur l'École polytechnique*[67], le problème de tracer un cercle tangent à trois cercles donnés, ou son extension à l'espace d'une sphère tangente à quatre sphères données, se trouve en bonne place ; c'est sans doute une bonne façon d'exercer la sagacité de ces géomètres formés par Monge,.

L'influence de ce dernier apparaît clairement dans une série de démonstrations qui utilisent un passage par l'espace pour résoudre ce problème plan.

Mais nous trouvons parallèlement de très belles démonstrations "à l'ancienne" pourrait-on dire, même si le langage et l'écriture sont très modernisés.

L'exemple le plus représentatif de la première catégorie de démonstrations nous est offert par Hachette lui-même, qui, rédacteur des *Cahiers*, lance en quelque sorte le mouvement.

Dans le cahier n°2 du tome I, septembre 1804[68], nous trouvons un mémoire sur le contact des sphères, qu'il nous présente ainsi :

> *J'ai réuni dans ce mémoire les recherches faites à l'École polytechnique sur les sphères qui se touchent ; il est divisé en sept questions ; les solutions de ces questions n'exigent que des considérations avec lesquelles ceux qui ont étudié la géométrie descriptive sont déjà familiers. Supposant le lecteur habitué à lire*

---

[66] Ibid. p. 390 à 391.

[67] Une étude de ce périodique est faite par B. Dody, *La correspondance sur l'école polytechnique*, mémoire de DEA, E.H.E.S.S., 1992.

[68] Hachette, J.N., *Mémoire sur le contact des sphères*, Correspondance sur l'École polytechnique, tome I, cahier n° 2, septembre 1804, p.17 à 28.

> *dans l'espace, j'ai cru pouvoir supprimer les figures, et suppléer par des caractères aux dessins géométraux.*

Ce n'est pas le moindre paradoxe de cette géométrie qui se veut sans calcul, de se passer aussi des figures. L'imagination, la vision intérieure que décrira si bien Steiner quelques années plus tard, les remplace, si l'on s'est suffisamment exercé, ce qui est le cas des élèves du grand Monge, si l'on en croit Chasles :

> *Personne plus que Monge, n'a conçu et n'a fait de la géométrie sans figures. C'est une tradition, dans l'École polytechnique, que Monge savait, à un degré inouï, faire concevoir dans l'espace toutes les formes les plus compliquées de l'étendue, et pénétrer dans leurs relations générales et leurs propriétés les plus cachées, sans autre secours que celui de ses mains, dont les mouvements secondaient admirablement sa parole, quelquefois difficile, mais toujours douée de la véritable éloquence du sujet : la netteté et la précision, la richesse et la profondeur d'idées.*[69]

Hachette avait réuni dans ce mémoire les recherches faites à l'École polytechnique par plusieurs élèves, dont la solution de Dupin du problème de la sphère tangente à trois sphères données, qui avait conduit ce dernier à deux théorèmes sur les propriétés de la surface enveloppe des sphères tangentes à trois autres.

La sixième question du mémoire est celle de mener un cercle tangent à trois cercles donnés. La septième est de mener une sphère tangente à quatre sphères données.

Pour résoudre la sixième question, Hachette considère les cercles donnés comme des grands cercles de trois sphères. La question proposée revient donc à trouver parmi les sphères tangentes à trois sphères données, celle qui a son centre dans le même plan que les centres des sphères touchées.

Hachette constate en premier lieu qu'il y a huit solutions. La sphère tangente peut toucher chaque sphère donnée intérieurement ou extérieurement. Une astucieuse notation, qui rappelle le jeu de signes de Euler, est utilisée : Si A, B, C sont les trois sphères données, la sphère qui les touche toutes trois intérieurement sera notée $A_iB_iC_i$, celle qui les touche toutes trois extérieurement $A_eB_eC_e$, puis nous aurons $A_eB_iC_i$, $A_iB_eC_i$, etc...il y a ainsi huit variations possibles, donc huit solutions.

Sont comparées alors les sphères $A_iB_iC_i$, et $A_eB_eC_e$: elles ont toutes leur centre sur une courbe du second degré.

---

[69]Chasles, M., *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Paris, Gauthier - Villars, 3° édition, 1889, p.209.

Appelant en effet r le rayon d'une sphère $A_iB_iC_i$, et d, d ', d ", les distances de son centre aux centres des sphères A, B, C, de rayons respectifs a, b, c, on a :

d = r - a ; d ' = r - b ; d " = r - c.

donc : d ' - d = a - b ; d " - d ' = b - c ; d " - d = a - c.

Les centres des sphères $A_iB_iC_i$, se trouvent donc à la fois sur trois hyperboloïdes de révolution, donc sur une courbe qui leur est commune.

Le quatrième problème du mémoire a permis d'étudier la courbe parcourue par le centre d'une sphère mobile assujettie à toucher constamment trois sphères fixes. Et il a été démontré qu'il s'agissait d'une hyperbole; les centres des sphères $A_iB_iC_i$, sont donc sur cette hyperbole.

Si nous considérons maintenant les sphères $A_eB_eC_e$, nommant R le rayon de l'une d'elles, et δ, δ ', δ " les distances de son centre aux centres des sphères A, B, C, on obtient : δ = R + a ; δ ' = R + b ; δ " = R + c,

donc : δ – δ ' = a - b ; δ ' - δ " = b - c ; δ – δ " = a - c.

Les centres des sphères $A_eB_eC_e$ sont donc sur la même courbe que ceux des sphères $A_iB_iC_i$.

De la même façon les centres des sphères $A_iB_iC_e$ et $A_eB_eC_i$ ont leur centre sur la même hyperbole, etc..... Ainsi les centres des huit sphères sont situés sur quatre hyperboles.

Dans le cinquième problème du mémoire, le dernier paragraphe, *De quelques propriétés de la courbe parcourue par le centre d'une sphère mobile qui touche constamment trois sphères fixes*, a permis d'établir que *pour l'une de ces hyperboles, les points de cette courbe situés dans le plan mené par les centres des sphères touchées en étaient les sommets.*

Ceci est vrai pour chaque hyperbole, donc les centres des sphères demandées sont les huit sommets des quatre hyperboles. Et si l'on sait déterminer l'un de ces sommets, on saura déterminer les sept autres.

Considérons par exemple toutes les sphères $A_eB_eC_e$ tangentes aux sphères fixes A, B, C. Le quatrième problème a permis de démontrer que l'hyperbole lieu des centres des sphères $A_eB_eC_e$ est dans un plan perpendiculaire à la droite L qui passe par les sommets des cônes circonscrits extérieurement aux sphères fixes données, deux à deux, (en quelques sorte ce sont les centres d'homothéties positives, des sphères prises deux à deux). Cette droite est dans le plan des centres des sphères A, B, C.

Le cinquième problème, a mis en évidence que le lieu des points de contact avec les sphères touchées était un cercle dans un plan perpendiculaire à celui des centres .

Nous trouvons alors une proposition pour déterminer le centre du cercle cherché, correspondant à la position $A_eB_eC_e$.

1° On détermine la droite L

2° On trouve le centre d'une sphère $A_eB_eC_e$ de rayon choisi à volonté.

3° On détermine le point de contact de cette sphère avec l'une quelconques des trois sphères A, B ou C.

4° Par le centre de la sphère $A_eB_eC_e$ déterminée au 2°, on mène un plan perpendiculaire à la droite L. Ce sera le plan de l'hyperbole. Ce plan coupe le plan des centres de A, B, C suivant une droite qui contient le centre du cercle cherché.

5° Par le point de contact déterminé au 3° on mène le plan tangent à la sphère sur lequel il est situé, par exemple A. Ce plan coupe la droite L en un point par lequel on mènera la tangente au cercle donné qui est un grand cercle de la sphère A. Le centre du cercle cherché est donc sur la droite qui joint le point de contact et le centre de ce grand cercle.

Le centre du cercle cherché est à l'intersection de deux droites déterminées, il est donc déterminé.

Il serait délicat d'affirmer que la construction proposée est simple, voire même efficace. L'on sent plutôt ici la volonté d'appliquer, à un problème devenu classique, et traité récemment plutôt analytiquement, la brillante étude qui a été faite dans les cinq questions précédentes du mémoire. C'est une sorte d'illustration de la méthode de Monge. Il est remarquable d'ailleurs que le reproche majeur qui sera fait à l'*Apollonius Gallus* de devoir traiter huit ou neuf problèmes avant d'aborder l'essentiel, pourrait être fait ici, puisque la solution des dernières questions dépend bien sûr des premières.

Le style de la démonstration n'est peut-être pas imputable à Hachette seul puisqu'il s'agit d'un recueil de travaux de divers élèves, toutefois nous revient en mémoire à ce sujet une appréciation peu flatteuse de Poncelet que l'on pourra comparer à l'éloge flatteur de Chasles sur Monge :

On peut voir (...) combien les méthodes suivies par MM. Hachette et Girard, dans le cours de Géométrie descriptive, étaient longues, compliquées et pénibles. [70]

Il sera noté par ailleurs, par Gaultier de Tours, dans un mémoire lu à l'institut en 1812, que dans le mémoire produit par Hachette, les géomètres se sont bornés à constater l'existence des courbes sur lesquelles sont situés les points qui permettraient de construire les solutions, ce qui les a amenés, dans le cas particulier des sphères à conclure faussement sur le nombre de solutions :

70Poncelet, V., *Applications d'analyse et de Géométrie*, Paris, Mallet-Bachelier, 1862, p.457.

L'esprit qui règne dans ces discussions ne permet pas de douter que si les savans qui s'en sont occupés, eussent construit les solutions de ces problèmes, ils se fussent aperçus que cette dernière conséquence était inexacte ; mais les considérations qu'ils ont mises en usage, quoique très-ingénieuses, rendaient les constructions graphiques trop difficiles pour qu'ils pussent se convaincre de cette erreur.[71]

Nous retrouverons dans la correspondance quelques essais de démonstrations sur les mêmes principes, parfois accompagnés de figures. Une variante du problème, dans l'espace, apparaît aussi , traitée sur le même ton :

Trois circonférences quelconques de grands ou de petits cercles étant tracées sur la surface d'une sphère, trouver une quatrième circonférence tangente aux trois premières.

Cette variante sera par exemple traitée, élégamment, nous dit le rédacteur, dans le cahier n°1 du tome III, par M. Olivier[72].

Carnot en a donné un début de solution analytique dans sa *Géométrie de position*[73], il s'agit bien sûr ici d'en donner une solution synthétique.

L'influence de Monge n'est pas la seule à se faire sentir dans la correspondance, et nous trouvons d'autres constructions du cercle tangent à trois cercles donnés, qui trouveraient sans doute plutôt leurs ascendances du côté de Carnot, ou de la géométrie "traditionnelle", utilisant les figures semblables.

Nous retiendrons deux de ces démonstrations, l'une de Cauchy, l'autre de Poncelet, étrangement réunis alors, quand on sait tout ce qui les séparera bientôt tant sur le plan de leurs idées mathématiques que de leur carrière.

Il est en particulier surprenant de trouver ce genre de démonstration sous la plume du jeune Cauchy. Le même esprit l'animera cependant lorsqu'il présentera ses deux mémoires sur les polyèdres[74], en 1811-1812. ce qui fera dire à Chasles dans son *Discours d'inauguration du cours de Géométrie supérieure*[75] :

Ce théorème d'Euler et la belle théorie des polyèdres d'un ordre supérieur, de M. Poinsot, avaient conduit un jeune géomètre

[71] Gaultier de Tours, L., *Mémoire sur les moyens généraux de construire graphiquement un cercle déterminé par trois conditions, et une sphère déterminée par quatre conditions*, Journal de l'École polytechnique, cahier n°16, mai 1813, p.127.
[72] Olivier, T., *Solution d'un problème de géométrie*, Correspondance sur l'École polytechnique, Tome III, cahier n°1, janvier 1814, p.10.
[73] Carnot, L.N.M., *Géométrie de position*, Paris, Duprat, 1803, p.415.
[74] Cauchy, A.L., *Recherches sur les polyèdres*, Journal de l'École polytechnique, cahier n°16, p.68 à 86, et 87 à 98.
[75] Chasles, M., *Discours d'inauguration du cours de Géométrie supérieure*, Traité de géométrie supérieure, Paris, Gauthier-Villars, 1880, p. 575-576.

à deux Mémoires remarquables, qu'on ne peut se rappeler sans éprouver le regret que, depuis, l'illustre auteur ait consacré exclusivement à l'Analyse les ressources de son génie mathématique.

Quoiqu'il en soit, voici comment le rédacteur de la Correspondance présente cette nouvelle solution[76] au problème des trois cercles :

M. Cauchy m'a communiqué une solution de ce même problème, qui m'a paru remarquable par sa simplicité.

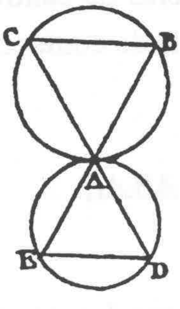
La méthode choisie est celle que nous avons rencontrée très souvent.:

Supposez que l'on augmente ou diminue le rayon du cercle cherché d'une quantité égale au rayon du plus petit cercle donné, selon que ces deux cercles doivent se toucher intérieurement ou extérieurement, cela reviendra à diminuer ou augmenter les rayons des deux autres cercles donnés de la même quantité, suivant la nature de leurs points de contact avec le cercle cherché, et le problème se trouvera par ce moyen ramené à cet autre.

Mener par un point donné un cercle tangent à deux cercles donnés.

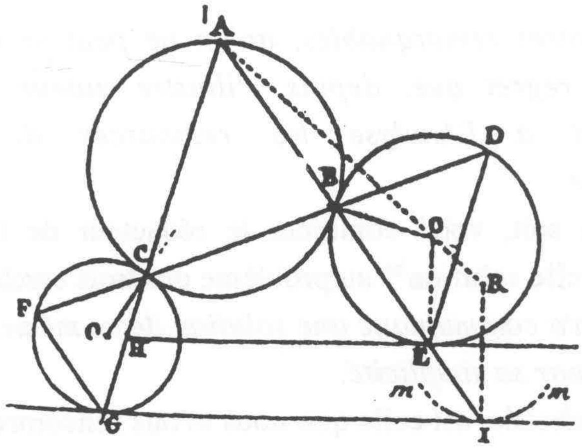
Toute la démonstration s'appuie sur un théorème très simple de géométrie élémentaire :

Si deux cercles sont tangents en A, et si par ce point A on mène deux sécantes, CD et BE, les triangles ABC et ADE seront semblables et les côtés BC et DE parallèles.



Revenons alors au problème donné. Soit A le point donné et O et O ' les centres des deux cercles donnés. Supposant le problème résolu, soit B et C les points de contacts du cercle cherché avec les cercles de centres respectifs O et O'.

[76]Cauchy, A.L., *Mener un cercle tangent à trois cercles donnés,* Correspondance sur l'École polytechnique, tome I, cahier n°6, juillet 1806.



Menant les sécantes ABE, ACG et DBCF, d'après le théorème énoncé, les trois triangles ABC, BDE, CFG sont semblables.

Menons alors par E la tangente au cercle de centre O, qui coupe (AC) en H, et par G la tangente au cercle de centre O ' qui coupe (AB) en I.

Alors, l'angle AEH est égal à l'angle BDE, qui lui-même était égal à l'angle BCA.

L'angle AGI est égal à l'angle CFG, qui lui-même était égal à l'angle CBA.

Les triangles AGI et AEH sont donc semblables au triangle ABC. Ils ont en effet l'angle A en commun, et un deuxième angle égal à l'un de ceux du triangle ABC. Finalement, les triangles AHE et AGI sont semblables, et les côtés EH et GI sont parallèles. (Les angles AEH et AIG, par exemple sont égaux.)

Nous avons les rapports égaux : $\frac{AC}{AB} = \frac{AI}{AG}$. Donc, $AC.AG = AB.AI$.

Menant de A les tangentes aux cercles de centres O et O ', appelons t et t ' les distances respectives de A aux points de contact.

Nous aurons :

$$t^2 = AB.AE,$$

et $$t'^2 = AC.AG = AB.AI,$$

Donc : $$\frac{t'^2}{t^2} = \frac{AI}{AE}.$$

Cette analyse permet de constater que les conditions qui déterminent E et G sont que les tangentes menées par ces points aux cercles donnés soient parallèles, et que $\frac{AI}{AE} = \frac{t'^2}{t^2}$, où $\frac{t'^2}{t^2}$ est un rapport connu.

Voici donc la construction proposée :

A partir de A sur AO, prenons R tel que : $\frac{AR}{AO} = \frac{t'^2}{t^2}$.

Décrivons alors le cercle de centre R et de rayon RI tel que : $\frac{RI}{OE} = \frac{t'^2}{t^2}$, et tel que (RI) soit parallèle à (OE). (RI) et (IG) doivent être perpendiculaires, donc (GI) doit être tangente au cercle de centre R en I.

Finalement à partir des données initiales, le cercle de centre R est constructible facilement ; dans un deuxième temps, on trace la tangente commune à ce cercle et au cercle de centre O ' , on obtient ainsi I et G. Puis on joint AG et AI, et on obtient les points de contacts du cercle cherché avec les deux cercles donnés.

La démonstration est simple et efficace ; elle s'appuie sur de la géométrie très élémentaire, et aurait pu se trouver sous la plume de tout géomètre un peu expert. Il faut cependant reconnaître que cette construction ne comporte pas de discussion et que les autres cas de figures ne découlent peut-être pas tout à fait directement de celle qui a été examinée où les deux cercles sont extérieurs au cercle cherché.

Pour reprendre l'appréciation de Hachette , cette solution est, quoiqu'il en soit, remarquable par sa simplicité.

La démonstration proposée par Poncelet[77] qui, sortant de l'École polytechnique, vient d'être admis dans le Génie militaire[78] se distingue aussi par sa simplicité, et va sans doute plus loin car il examine plusieurs cas possibles.

Il est toutefois surprenant de lire ici une démonstration très proche de celle de Viète pour le problème IX de l'*Apollonius Gallus*. Poncelet utilise en particulier des résultats préalablement démontrés au premier volume de la Correspondance, qui ne sont autres finalement que les lemmes qui précèdent le problème IX de l'*Apollonius Gallus*.

Poncelet constate lui aussi que le problème de tracer un cercle tangent à trois cercles donnés se ramène à celui de tracer un cercle passant par un point donné et tangent à deux cercles donnés.

Pour déterminer ce cercle, une proposition préalable est démontrée :

Les cercles donnés sont nommés X et Y, le point donné A. Alors,

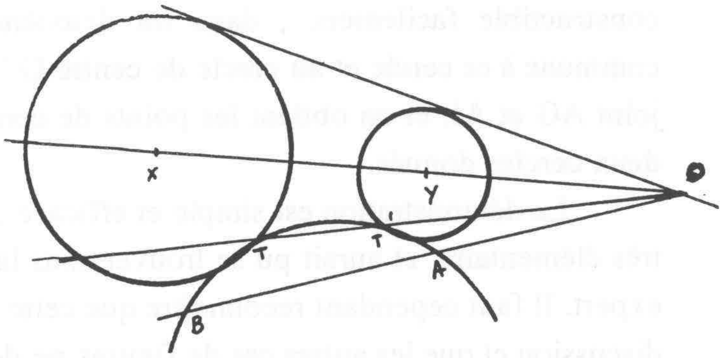
Si par le point O où se coupent les tangentes extérieures communes aux cercles X et Y, et par le point A où doit passer le cercle tangent à ces deux cercles, on mène une droite AO, que l'on

---

[77]Poncelet, V., *Problèmes de géométrie*, Correspondance sur l'École polytechnique, tome II, cahier n°3, janvier 1811.

[78]Poncelet reproduit cette solution dans ses *Souvenirs et additions*, Applications d'analyse et de géométrie, (ouvrage cité), p.443, et note : *Ces solutions d'un problème célèbre de géométrie ancienne, qui pendant longtemps a résisté aux efforts de l'analyse algébrique, sont extraites de la Correspondance sur l'École polytechnique. L'auteur en avait remis, dès 1809, le manuscrit à M. Hachette, rédacteur de cette correspondance, qui lui-même s'était exercé sur ce genre de problèmes, et avait exigé le retranchement de divers passages, jugés par lui inutiles ou étrangers à la question.*

fasse passer ensuite par le point O une sécante quelconque OT, qui vient couper les cercles X et Y intérieurement en T et T ' ; qu'enfin par ces deux points T et T ' et par le point A on fasse passer un cercle, cette circonférence de cercle coupera AO en un point B qui sera le même, quelle que soit la sécante OT.



Les droites OB et OT sont sécantes d'un même cercle, donc :

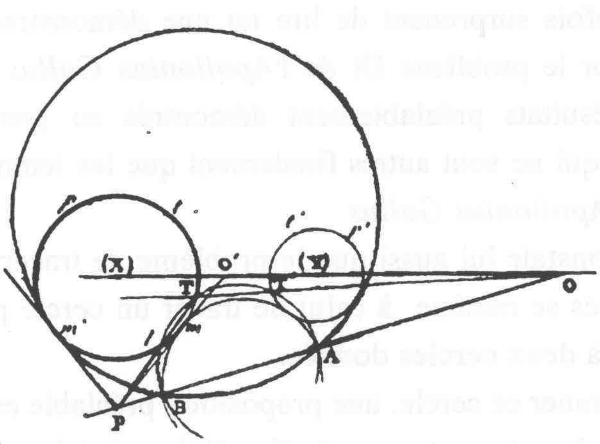
$$OA \,.\, OB = OT \,.\, OT'$$

Si l'on mène une autre sécante par O qui coupe les cercles X et Y respectivement en t et t ', d'après les lemmes cités précédemment,

$$Ot \,.\, Ot' = OT \,.\, OT'$$

ainsi, $Ot \,.\, Ot' = OA \,.\, OB.$

Le cercle passant par A, t, et t ', passe donc aussi par B.



Toujours d'après les lemmes cités, un cercle tangent aux cercles X et Y, a ses deux points de contacts alignés avec O, si les deux cercles X et Y le touchent tous les deux extérieurement, ou tous les deux intérieurement. Donc, le cercle tangent cherché, passant par A et les deux points de contact alignés avec O, passe par B. Il suffit finalement de trouver un cercle tangent à X ou Y qui passe par A et B. (C'est le problème VIII de Viète.)

Les points T et T ' étaient les intersections "intérieures" de la sécante issue de O avec les cercles X et Y ; qu'en est-il si, cette fois, on choisit les intersections "extérieures", p et p ' ?

$Op \,.\, O p' = OT \,.\, OT' = OA \,.\, OB$ donc le cercle passant par p, p ' et A passe aussi par B.

On peut donc à chaque fois considérer les intersections "extérieures" ou "intérieures" .

Voici donc la proposition de construction:

On trace une sécante OTT ', puis le cercle passant par ATT '. On mène la corde Tl commune à ce cercle et au cercle X. Cette corde coupe la droite AO en P. Par P on mène les tangentes au cercle X. Les points de contact sont m et m '.

Les points m et m ' sont aussi les points de contact des cercles cherchés, avec le cercle X, l'un touchant extérieurement, l'autre intérieurement.

En effet : $Pm^2 = Pl \,.\, PT.$

Or $PL \,.\, PT = PB \,.\, PA.$

Donc $Pm^2 = PB \,.\, PA.$

Ce qui indique que le cercle passant par m, A et B est tangent à la droite (Pm) en m.

De même le cercle passant par A, B et m ' touche le cercle X en m '.

Un travail analogue pourrait se faire en utilisant le point O ' intersection des tangentes communes intérieures aux cercles X et Y. On obtiendrait aussi deux solutions.

Il y a donc quatre solutions au problème de tracer un cercle tangent à deux cercles donnés et passant par un point donné.

La conclusion du premier problème proposé, des trois cercles, n'est pas détaillée par Poncelet ; il est clair que chaque solution du problème traité donne deux solutions pour le problème des trois cercles. Il y aurait donc huit cercles possibles. La discussion là encore n'est pas menée à son terme.

Le dernier paragraphe est particulièrement intéressant car Poncelet généralise immédiatement sa solution au problème, dans l'espace, de tracer une sphère tangente à quatre sphères données, calquant la démonstration presque point par point. (Rappelons que Fermat s'était déjà livré à cet exercice à partir de l'*Apollonius Gallus*, en en conservant toute la richesse, mais aussi tout l'embarras.)

Voici ce que nous propose notre jeune polytechnicien :

Si par la droite qui joint les sommets des trois cônes circonscrits deux à deux à trois sphères, et par un point donné, on mène un plan P ; qu'ensuite par la même droite on mène un plan qui coupe les sphères ; que par le cercle tangent aux cercles d'intersection et par *le point donné on fasse passer la surface d'une sphère, cette surface coupera le plan P suivant un cercle qui restera le même, quelle que soit la section qu'on ait faite dans les sphères. On voit aisément que la sphère qui passe par le point donné, et qui est tangente aux trois sphères dont il s'agit, devra aussi passer par ce cercle ; car cette sphère doit avoir ses points de contact placés sur un plan qui passe par la droite qui joint les sommets des cônes.*

En dépit de quelques faiblesses ces solutions de Cauchy et de Poncelet sont simples et répondent bien au problème posé de construire. La règle et le compas sont ici des instruments efficaces. L'on pourrait penser qu'il reste seulement à les parfaire, que c'est un bon point de départ pour une discussion éventuelle... . L'on songe par exemple à alléger l'écriture en nommant ce point d'intersection des tangentes communes. (Euler, puis Monge l'ont appelé centre de similitude). La solution de Poncelet est nous l'avons constaté assez proche de celle de Viète. N'ayant pas le souci de reconstitution, et partant de l'analyse de la figure, il s'est attaqué directement au problème, ne retenant que les préalables strictement utiles ; le problème IX, puis le problème VIII de Viète sont apparus l'un après l'autre utiles à la résolution du problème X ; c'est l'avantage de l'analyse. L' écriture et la lecture sont alors considérablement allégées.

Bref, une revue de détails de l'une ou l'autre de ces solutions et l'on n'en parle plus.

L'histoire en fait est déjà partie sur un autre registre et va se poursuivre de plus belle.

Chapitre IV : Un problème au cœur de la controverse Géométrie synthétique - Géométrie analytique

1° Les acteurs principaux :

Au début du XIX° siècle, en France, l'une des figures les plus marquantes de cette concurrence entre le point de vue analytique et le point de vue de la géométrie pure est, sans nul doute Poncelet ; Steiner, en Allemagne, qui participera lui aussi, presqu'en parallèle, à la création de la géométrie projective, sera un défenseur encore plus acharné et plus strict de la géométrie qui sera bientôt nommée synthétique.

L'on pourrait dire que ces deux mathématiciens ont construit leur idéal mathématique sur des circonstances exceptionnelles, bien que différentes, qui les ont peut-être mené à privilégier des aspects du savoir mathématique qui avait été quelque peu négligés devant la toute puissance que l'analyse avait acquise à la fin du XVIII° siècle : l'intuition, l'intériorisation de la pensée, un parti pris de pureté qui ne se trouverait pas dans le calcul, des préoccupations pédagogiques sans doute aussi. Pour apprendre il ne faut pas seulement mémoriser, recevoir de l'extérieur, il faut aussi intérioriser, reconstruire en soi-même. C'est ce que Poncelet retient de sa douloureuse expérience du camp de Saratoff en 1813 et 1814, où *il dut refaire péniblement, et pour ainsi dire un à un, les éléments indispensables aux études mathématiques, privé qu'il était de tout livre, de tout instrument de précision*[79]. C'est aussi ce qu'il a retenu des deux grands maîtres qui l'ont formé : Monge, qui a redonné de l'actualité à la géométrie "pure", et Carnot qui oppose la géométrie "naturelle", dont les principes seraient pour ainsi dire dans le sentiment, à la géométrie acquise ou "analyse".

Chasles dans son *Rapport sur les progrès de la géométrie* met l'accent sur l'influence déterminante de ces deux mathématiciens sur le développement de la géométrie.

> *La géométrie descriptive, bien qu'elle n'ait pas de méthode de recherches qui lui soit propre, a néanmoins contribué aux progrès de la géométrie rationnelle, en familiarisant les esprits avec les*

[79]Poncelet, J.V., *Applications d'analyse et de géométrie*, Paris, Mallet-bachelier, 1862, p. IX.

conceptions de l'espace, et en donnant les moyens de les ramener à des constructions rigoureuses sur un plan.

Les travaux de Carnot ont un caractère très-différent. Fondés sur la méthode des anciens, ils ont eu une influence considérable et des plus heureuses, en inspirant aux jeunes géomètres le goût des recherches de Géométrie pure, et en faisant naître l'espoir de trouver des ressources suffisantes dans une méthode simple et lumineuse, qui avait été entièrement délaissée depuis l'apparition de la Géométrie de Descartes, c'est-à-dire de la Géométrie analytique[80].

Dans son *Aperçu historique,* ayant présenté l'œuvre de Monge, puis la *Géométrie de position* et l'*Essai sur la théorie des transversales* de Carnot, il ajoute :

Ces deux ouvrages, dans l'histoire des progrès de la Géométrie rationnelle, ne doivent point être séparés de la géométrie descriptive de Monge, ayant été, comme elle, et dans le même temps, une continuation des belles méthodes de Desargues et de Pascal, et ayant aussi, comme elle, contribué puissamment aux nouvelles théories et aux découvertes de la géométrie.

Ce rapprochement entre les doctrines et les travaux des quatre grands géomètres que nous venons de nommer, qu'avaient pu faire pressentir nos observations sur les méthodes de Desargues et de Pascal, nous paraît établir la véritable chaîne des pensées qui ont présidé aux progrès de la géométrie.[81]

Avant de conclure plus loin :

Ainsi nous pouvons dire que la méthode de Monge, et celle de Carnot sont, en Géométrie rationnelle, la généralisation et le perfectionnement immédiat des méthodes de Desargues et de Pascal[82].

La filiation, soulignée par Chasles, est claire, et revendiquée par tous ceux qui vont contribuer à la mise en œuvre de cette nouvelle géométrie, en particulier la géométrie projective. Durant les XVII° et XVIII° siècles, la géométrie de Descartes s'est particulièrement développée, au détriment de l'autre géométrie, celle de Desargues et Pascal, qui, si elle avait été cultivée, aurait sans doute, dans l'esprit de ces nouveaux géomètres, sûrement égalé en puissance la

---

[80]Chasles, M., *Rapport sur les progrès de la géométrie,* Paris, imprimerie nationale, M DCCC LXX, p. 3 et 4.

[81]Chasles, M., *Aperçu historique sur l'origine et le dévelopement des méthodes en géométrie,*3° édition, Paris, Gauthier-Villars et fils, 1889, p. 210-211.

[82]Ibid., p. 212.

géométrie analytique, l'aurait peut-être dépassée même. C'est une des raisons de l'âpreté du combat d'idées ; il faut prendre une revanche sur l'histoire.

Poncelet :

Poncelet publie en 1822, à partir de ses cahiers rédigés au camp de Saratoff, un *Traité des propriétés projectives des figures* ; Il avait entre temps, en 1820, présenté un mémoire à l'Académie des sciences, qui, approuvé par les rapporteurs, subit d'assez fortes critiques de la part de l'un d'eux, Cauchy. Ce jugement renforce l'inimitié entre les deux personnages. Il faut reconnaître que tout les sépare : la rigueur de l'analyste, qui s'est donné pour mission de donner au savoir mathématique des bases solides et incontestables, contre l'esprit d'invention du géomètre qui aime à redire le mot de D'Alembert : *Allez en avant et la foi vous viendra.*

S'ajoute à cela sans aucun doute un contexte politique et social qui accentue la rancœur de celui qui a ressenti dans sa chair la défaite de Napoléon I°, contre le légitimiste bien en place.

Commentant , quelques quarante ans plus tard ce pénible passage de sa vie de mathématicien, Poncelet résumera :

> *Avec un peu d'expérience des affaires académiques et d'après les vaines tentatives que j'avais faites pour obtenir une audience du savant rapporteur, ainsi que par les mots bienveillants, mais discrets, échappés à mes anciens et illustres maîtres, Ampère, Arago, Lacroix, Poinsot et Poisson, peu soucieux d'intervenir dans la discusion, j'aurais dû comprendre que l'opinion de M. Cauchy n'était pas favorable à la tendance de mes idées philosophiques.*[83]

Dans le rapport, qui est, certes, très critique sur le fameux principe de continuité, nous trouvons quelques appréciations positives, dont l'une :

> *On doit distinguer, dans le même paragraphe, une solution très-élégante du problème dans lequel on demande de tracer un cercle tangent à trois autres*[84].

Le rapporteur Cauchy songe peut-être à celle que, jeune polytechnicien, il avait lui-même fourni.

Gergonne :

---

[83]Poncelet, J.V., *Applications d'analyse et de géométrie*, tome II, Paris, Gauthier-Villars, 1864, p. 564.
[84]Ibid. p.562.

Cette solution, ainsi que le mémoire de Poncelet à l'Académie des sciences avaient été publiés une première fois dans les *Annales de mathématiques pures et appliquées* dirigées par Gergonne.

Les *Annales*, fondées en 1810, vont refléter très vite la controverse idéologique qui s'installe en géométrie.

La parution des *Annales* est mensuelle et régulière, favorisant les échanges, et le rédacteur, quoique dévoué particulièrement à la géometrie analytique est assez ouvert pour accueillir dans ses pages toute contribution intéressante.

C'est Gergonne lui même qui va lancer le débat , à partir justement du cercle tangent à trois cercles donnés. Il a traduit en français l '*Apollonius Gallus* de Viète et raconte comment il a été amené à trouver une autre solution au problème :

> *Ce fut vers 1810, en lisant les Éléments d'analise géométrique et d'analise algébrique de M. Lhuilier, que je conçus la première idée du nouveau tour qu'on pouvait faire prendre à la géométrie analitique. Je publiai, par forme d'exemple, les solutions de quelques problèmes, traités suivant le système que je m'étais formé à ce sujet (Mémoires de l'académie du Gard, pour 1810) ; et j'annonçai dès-lors qu'il était possible de construire tous les problèmes de l'Apollonius Gallus de Viète, sans résoudre aucune équation du second degré.*
>
> *Environ quatre ans après j'adressai à l'académie de Turin un mémoire contenant la solution analitique complète des problèmes de Viète et de Fermat, relatifs à la détermination du cercle et de la sphère, au moyen de trois ou de quatre conditions. Je donnai ensuite, dans le présent recueil (tome IV), la construction du cercle qui en touche trois autres sur une sphère ; et enfin dans le tome VII, indépendamment du problème que j'avais déjà traité dans le volume de l'académie du Gard, je donnai quelques développemens à la première partie de mon mémoire à celle de Turin.*[85]

Il reviendra sur ce problème, et développera sa solution défendant de façon assez combative la supériorité de la géometrie analytique, dans ses Annales en avril 1817. Les défenseurs de l'autre géométrie ne vont pas manquer de répondre, l'inventeur de la géométrie projective à leur tête. Nous trouverons parmi les protagonistes J.B. Durrande, professeur de mathématiques spéciales et de physique au collège royal de Cahors, à plusieurs reprises, mais aussi des

---

[85]Gergonne, J.D., ***Réflexions sur l'usage de l'analise***, Annales de mathématiques pures et appliquées, tome VIII, n° V, 1° novembre 1817, p. 158.

abonnés anonymes. Cet échange, par journal interposé, sur le problème des trois cercles et les problèmes dérivés dans l'espace, se poursuivra jusqu'en 1827, où le consensus semblera établi, sur la supériorité, dans cette question particulière, de la géométrie "synthétique".

Gaultier de Tours :

Un nom revient dans tous les exposés, c'est celui de Louis Gaultier de Tours, ancien élève de l'École polytechnique et professeur de géométrie descriptive au conservatoire des Arts et Métiers. On lui doit en particulier les noms d'axe radical et de centre radical, pour la figure formée de deux ou trois cercles. Cette dénomination est apparue dans un très beau mémoire, lu à la première classe de l'institut le 15 juin 1812, et publié dans le journal de l'École polytechnique, dans le cahier n°16 en 1813 : *Sur les moyens généraux de construire graphiquement un cercle déterminé par trois conditions, et une sphère déterminée par quatre conditions.* C'est un des rares cahiers, si l'on se reporte à l'étude de L.Lamy[86], qui comporte des articles de géométrie pure, après 1810. C'est dans ce même cahier que l'on trouve les mémoires de Cauchy sur les polyèdres. Il est remarquable une fois de plus de constater qu'une très fructueuse théorie mathématique est ainsi développée pour construire, entre autres, le problème qui nous occupe.

Dans son mémoire, Gaultier de Tours définit de façon très précise et très argumentée les raisons qui l'ont mené à reprendre ces questions qui ont déjà été traitées, il les cite, par de nombreux prédécesseurs célèbres : Newton et Euler par exemple, qui ont donné des solutions analytiques, Fermat qui a résolu géométriquement *quinze problèmes sur les sphères qui remplissent quatre conditions,* puis aussi les solutions parues dans la *Correspondance sur l'École polytechnique, qui est le travail le plus étendu qui ait été fait sur ce sujet.* Mais ces géomètres ne se sont pas vraiment préoccupés de construire les solutions, tandis que, le titre de son mémoire l'indique clairement, il se propose, lui, de *construire graphiquement* un cercle ou une sphère.

> *La marche que nous avons suivie nous a fourni l'occasion de développer un grand nombre de propositions neuves ; mais nous ne nous sommes point bornés à de simples considérations géométriques, puisque nous donnons les moyens d'effectuer graphiquement toutes les solutions*[87].

---

[86]Lamy, L., *Le journal de l'École polytechnique de 1795 à 1831*, mémoire de D.E.A., Sciences et techniques en perspective, vol.32, 1995, Université de Nantes, centre Viète.
[87]Gaultier de Tours, L., *Sur les moyens généraux de construire graphiquement un cercle déterminé par trois conditions, et une sphère déterminée par quatre conditions*, journal de l'École polytechnique, cahier n°16, 1813, p. 128.

Son étude va cependant se situer dans la lignée une fois de plus des grands maîtres, Monge, qu'il cite abondamment, et Carnot, dont nous retrouvons l'empreinte, dans la volonté que marque Gaultier de Tours à répertorier dans des tableaux toutes les situations possibles et tout ce que l'on peut déduire d'un problème primitif.

Dans son *Aperçu historique*, Chasles rend un hommage appuyé à l'inventeur de l'axe radical de deux cercles :

Le beau mémoire de M. Gaultier offre la première solution, vraiment générale, de la question du contact des cercles ou des sphères [88].

Chasles:

Chasles, bien sûr, n'est pas le moindre des représentants de la nouvelle géométrie ; c'est son nom qui sera associé à sa première reconnaissance officielle, puisqu'on lui confiera la première chaire du cours de géométrie supérieure en 1846 :

> *M. le Ministre de l'Instruction publique, dans sa sollicitude pour toutes les parties de l'enseignement soumis à sa haute direction, a jugé que le temps était venu de combler en France aussi une lacune préjudiciable aux progrès des Sciences mathématiques. La faculté des sciences, consultée, a partagé ces vues judicieuses et libérales, et émis le vœu que l'enseignement des mathématiques supérieures reçût dans la faculté le complément qui lui manquait, et qu'une chaire de* ***haute géométrie*** *y fût immédiatement instituée. M. le Ministre m'a fait l'honneur de me confier cet enseignement.*[89]

Le *Traité de géométrie supérieure* dont la première édition date de 1852, constitue donc, de fait, un des premiers manuels d'enseignement officiel, en France, de la nouvelle géométrie. La quatrième section traite des cercles, et le chapitre XXII, du système de trois cercles quelconques, et du contact des cercles.

> *La quatrième section traite des cercles. On y trouve d'assez nombreuses propositions, dont une partie se représenteront dans la théorie des sections coniques et dont on aurait pu par conséquent ajourner la démonstration*[90]*. Mais j'ai vu plusieurs raisons de faire entrer, dès ce moment, ces propositions dans le développement des propriétés relatives aux cercles. Elles seront un utile exercice, qui*

---

[88]Chasles, ouvrage cité, P; 206.
[89]Chasles, M., *Discours d'inauguration du cours de Géométrie supérieure*, Traité de géométrie supérieure, 2° édition, Paris, Gauthier Villars, 1880, p. 548-549.
[90]Un *Traité des sections coniques* suivra ce *Traité de géométrie supérieure*.

convaincra le lecteur que les procédés de démonstration mis en usage avec tant de facilité dans la théorie des figures rectilignes s'appliquent, avec non moins de succès, aux cercles et même aux sections coniques, car on s'apercevra bien que presque toujours les démonstrations resteront les mêmes pour ces courbes.

Cette Théorie du cercle suffira donc pour répandre naturellement, avant d'aborder l'étude des sections coniques, la connaissance d'une partie considérable des propriétés de ces courbes et surtout de celles que l'on néglige dans les traités de Géométrie analytique.

Les jeunes géomètres dépasseront ainsi, sans travail pénible et au grand avantage de la science, les programmes de l'enseignement classique devenus trop restreints.[91]

Cet extrait de la préface marque bien, en premier lieu, l'importance que l'auteur, mais avec lui tous les promoteurs de la nouvelle géométrie, accordent aux questions de l'enseignement ; c'est par la formation des jeunes esprits que les choses peuvent évoluer. En second lieu nous percevons la part que la Théorie du cercle occupera comme initiation à certains procédés de démonstration ; et nous y retrouverons le problème des cercles tangents.

Steiner :

L'évolution de la géométrie n'est pas propre à la France, nous avons évoqué le rôle de Steiner en Allemagne, l'Angleterre restera, semble-t-il, un peu à l'écart de la polémique. En fait les mathématiciens anglais, depuis Newton, nous l'avons remarqué, sont restés attachés à cultiver les méthodes des anciens et, en ce début du XIX° siècle, ce sont plutôt les analystes et les algébristes qui essaient d'installer leur pouvoir. Il faut aussi noter que ni l'Angleterre, ni l'Allemagne, n'ont l'équivalent, en ce début du XIX° siècle, de l'École polytechnique, dont nous avons pu déjà évoquer longuement le rôle centralisateur.

During the first half of the nineteenth century the center of activity became diffused. Nevertheless, several decades passed before there were institutions that could boast the mathematical strength of the French, epitomized by the École Polytechnique[92].

---

[91]Chasles, M., Préface de la première édition (1852), *Traité de géométrie supérieure*, ouvrage cité, p. XXXI.

[92]Boyer, C.B., *A history of mathematics*,New york, John Wiley & sons, 1989.

Pendant la première moitié du XIX° siècle le centre des activités se dispersa. Néanmoins, plusieurs décades passèrent avant qu'il n'y ait des institutions qui puissent s'enorgueillir de la force des françaises, incarnées par l'École polytechnique.

La centralisation à la française peut être une force ou représenter un certain frein. En Allemagne, par exemple, sous l'impulsion de W. von Humboldt, et de Jacobi, dès 1834, une nouvelle chaire de géométrie a été créée, à l'Université de Berlin, pour Jacob Steiner. Cet élève de Pestalozzi, qui n'a appris à lire qu'à quatorze ans, et dont la formation en mathématiques ne correspond pas vraiment aux critères universitaires habituels, n'aurait peut-être pas eu la même chance d'être reconnu au pays de Monge et de Carnot.

Reconnaissons cependant qu'un journal a joué aussi son rôle pour la diffusion des idées de jeunes scientifiques non encore reconnus, et Jacob Steiner en tout premier lieu, c'est le journal fondé par Crelle, en 1826, à l'instar des annales fondées par Gergonne en France. Ces journaux indépendants, qui vont éclore peu à peu, dans de nombreux pays, vont jouer un rôle non négligeable dans l'avancement des sciences au XIX° siècle.

2° Les nouveaux éléments de géométrie :

L'un des protagonistes cités ,défenseur dans les *Annales* de Gergonne de la géométrie pure, résume assez bien les théories nouvelles sur lesquelles vont s'appuyer la plupart des démonstrations du problème des trois cercles :

> *Mais, comme les détails dans lesquels je vais entrer se lient à la théorie des pôles et des polaires, à celle des centres axes et plans de similitude, à celle des centres axes et plans radicaux ; théories qui n'ont guère été démontrées jusqu'ici que par les méthodes de Monge, ; je commencerai par en établir les principaux points à l'aide de l'ancienne géométrie*[93].

Une géométrie de l'espace :

Toute cette nouvelle géométrie s'appuie en effet, au départ du moins, sur la géométrie traditionnelle. Les nouveaux concepts, centre de similitude, axe radical ... ne sont pas vraiment nouveaux; sans être nommés, sans être utilisés en tant que tels, toutes les propriétés qui leur sont liées sont utilisées dans l'ancienne géométrie. La grande majorité des démonstrations, même d'un Viète, font intervenir le point de concours des tangentes communes à deux cercles, ou le point "d'égale tangente", ... En quoi donc y a-t-il changement en ce XIX° siècle commençant ?

La vision géométrique, en premier lieu, est profondément différente. Conséquence sûrement de la géométrie descriptive de Monge, de la géométrie

---

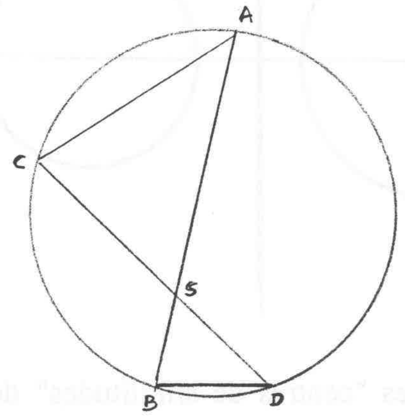
[93]Durrande, J.B., *Théorie élémentaire des contacts des cercles, des sphères, des cylindres et des cônes,* Annales de mathématiques pures et appliquées, tome XI, n°1, 1°juillet 1820, p. 4.

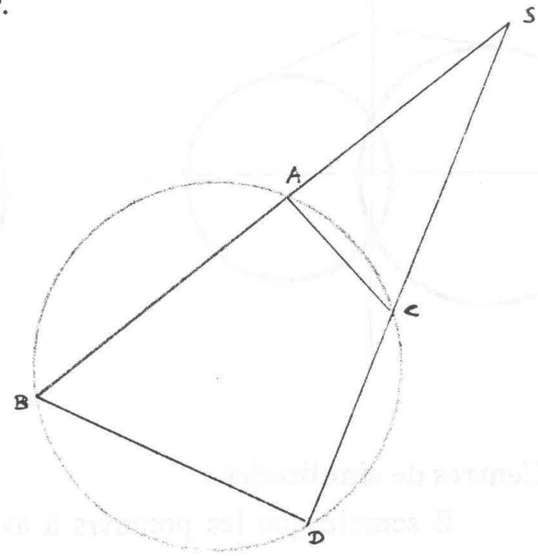
des coordonnées aussi, une figure n'est plus considérée en tant que telle, elle est partie intégrante d'un espace, des éléments extérieurs peuvent intervenir. La figure peut aussi subir des transformations en conservant certaines propriétés qu'il ne sera pas utile de redémontrer comme cela serait de mise avec les méthodes anciennes.

L'exemple classique repris par Poncelet est le suivant :

D'un point S intérieur à une circonférence menons deux sécantes ASB, et CSD. On montre très facilement, à l'aide des triangles semblables ACS et DBS, que $\frac{SA}{SC} = \frac{SD}{\mathrm{SB}}$ ou encore que $SA.SB = SC.SD$. Pour tout point S intérieur au cercle, *la disposition mutuelle des parties restant la même, il n'y aura évidemment pas lieu à refaire cette démonstration.*[94]

Mais si le point S est extérieur au cercle, *en suivant la marche rigoureuse de la géométrie, on se voit obligé de recommencer sur de nouveaux frais, la démonstration proposée ci-dessus ; c'est en effet ainsi que les anciens, toujours scrupuleux, et ceux d'entre les modernes qui ont suivi leurs traces, en agissaient dans tous les cas semblables*[95].





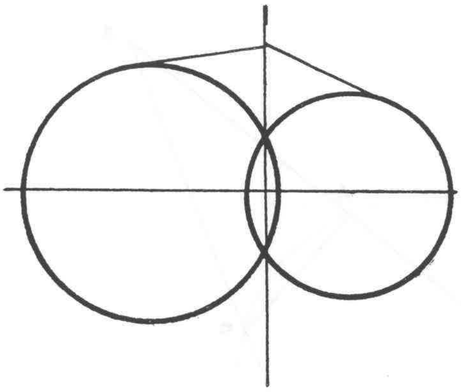
C'est la corrélation des figures, due à Carnot, qui permet de considérer que ces deux figures correspondent à une seule propriété. Cette corrélation peut être plus difficile à mettre en œuvre dans certains cas de relations métriques où il faudra faire intervenir des changements de signes, ce que l'auteur de la *Géométrie de position* a aussi étudié.

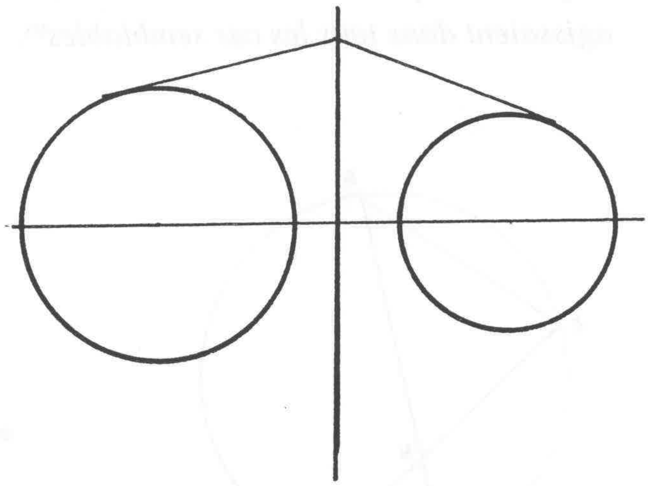
[94]Poncelet, J.V., *Applications d'analyse et de géométrie*, tome II, Paris, Gauthier-Villars, 1864, p. 307.
[95]Ibid. , p.308.

Axe radical, centre radical :

Revenons au cas de la sécante au cercle étudié par Poncelet. Associer ces deux cas de figures à un seul permet de définir ce que nous appelons depuis Steiner, la puissance d'un point par rapport à un cercle[96], que ce point soit extérieur, intérieur ou sur le cercle. Un point sur le cercle a une puissance nulle, et s'il est besoin, la puissance d'un point intérieur sera négative, extérieur positive. Cette définition est liée à celle de l'axe radical de deux cercles.

Si l'on s'arrête, en effet, aux points d'où l'on peut mener deux "tangentes égales" à deux cercles, seuls les cercles extérieurs l'un à l'autre seront concernés. Si l'on constate que dans ce cas de figure, de deux cercles extérieurs, un point d'où l'on peut mener deux "tangentes égales" aux deux cercles est aussi un point d'égale puissance par rapport à ces deux cercles, l'attention va se porter sur cette propriété plus générale, puisqu'elle peut concerner toutes les situations possibles de deux cercles. L'on définit ainsi, avec Gaultier de Tours, l'axe radical de deux cercles, ensemble des points qui ont même puissance par rapport à ces deux cercles.





Centres de similitudes :

Il semble que les premiers à avoir utilisé les "centres de similitudes" de deux cercles en tant que tels, soient Euler[97] et Monge. Cette notion aussi, en apparence très ancienne, va acquérir une généralité qui permettra quelques années plus tard à Chasles d'instituer la notion d'homothétie et de centre d'homothétie.

Lorsque deux cercles sont extérieurs l'un à l'autre, il est possible, en général de mener à ces deux cercles deux tangentes communes extérieures, et

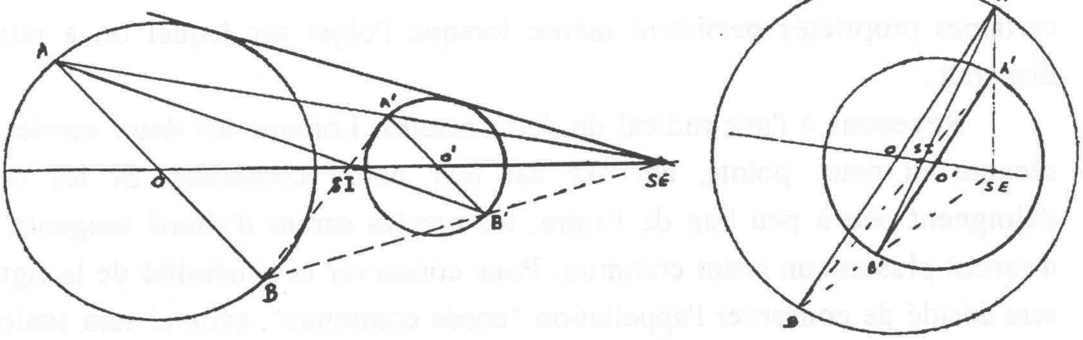
---

[96]Il semblerait que le premier à avoir utiliser le mot "puissance d'un point par rapport à un cercle" soit Steiner, dans un article paru en 1826 dans le premier volume du Journal de Crelle (*Einige geometrische Betrachtungen*) (Jacob Steiner 's Gesammelte Werke, Bd. 1, p. 21), repris en 1827 par Gergonne dans ses Annales.

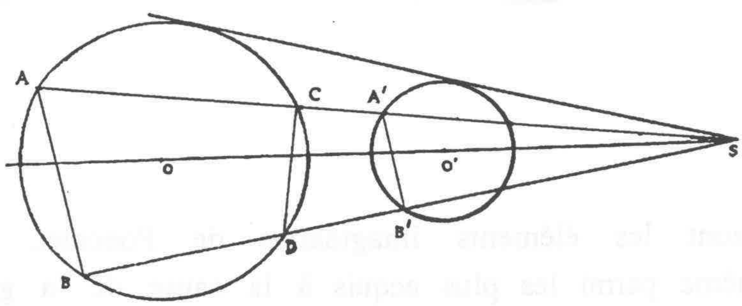
[97]Le terme "centre de similitude" est dû à Euler,(Nova Acta academiae scientiae petropolitanae, vol. 9, p. 154, présenté à l'Académie le 23 octobre 1777).

deux tangentes communes intérieures. Si les rayons des deux cercles sont inégaux, ces deux couples de tangentes ont chacun un point d'intersection ; ces points sont donc les centres de similitudes, puisqu'une sécante issue de l'un de ces points, détermine sur les deux cercles des figures semblables. Et, dans le but de généraliser ceci aux cas mêmes où il n'est pas possible de mener deux tangentes communes, par exemple lorsque l'un des cercles est intérieur à l'autre, on va s'attacher à une propriété qui sera conservée dans tous les cas.

Sur chaque cercle une sécante issue du centre de similitude détermine des diamètres parallèles. Nous appellerons donc centres de similitude ces points obtenus en joignant les extrémités des diamètres parallèles , sachant qu'il en existe deux, l'un appelé centre de similitude externe, l'autre centre de similitude interne.



Les propriétés et les définitions vont s'enchaîner de façon pour ainsi dire naturelle. Remarquons que la figure précédente permet de définir ce qui sera nommé "droites antiparallèles". Deux sécantes issues d'un centre de similitude définissent sur les deux cercles deux cordes : celles qui sont homologues, qui sont parallèles, et les deux autres, antihomologues, et qui seront "antiparallèles". Sur la figure suivante, AB et A'B' sont homologues, CD et A'B' sont antihomologues.



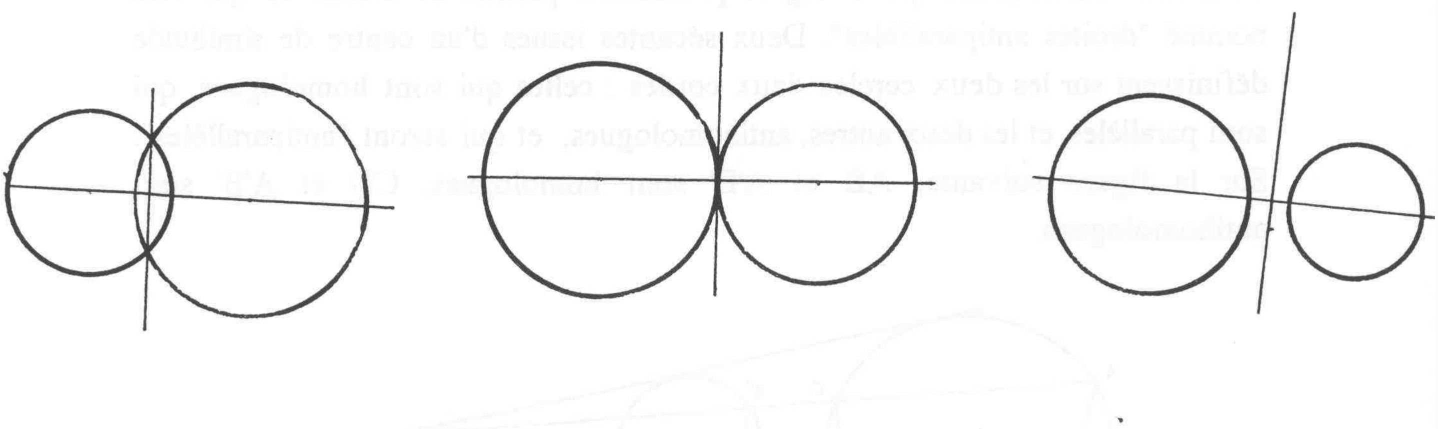
Pour généraliser encore la notion de centre de similitude, on peut s'intéresser d'abord à deux polygones semblables, (dont les côtés "homologues" sont parallèles), puis examiner le cas particulier de deux polygones réguliers d'un nombre pair de côtés, qui deviendront deux cercles, lorsque le nombre de leurs côtés sera infini.

Dans les faits, un élément important intervient en supplément : une figure n'est plus figée, elle se transforme, elle se met en mouvement, en conservant un certain nombre de propriétés : Un cercle dont le rayon devient infiniment grand devient une droite ; si son rayon devient infiniment petit, nul, c'est un point. Ce qui a été démontré pour un cercle restera vrai pour la droite ou le point que l'on obtiendra.

Les éléments imaginaires :

Pour atteindre une plus grande généralité encore, il faut admettre que certaines propriétés persistent même lorsque l'objet sur lequel on a raisonné disparaît .

Revenons à l'axe radical de deux cercles. Lorsque les deux cercles sont sécants en deux points, cet axe est leur corde commune. Si les centres s'éloignent peu à peu l'un de l'autre, les cercles seront d'abord tangents, puis n'auront plus aucun point commun. Pour conserver la généralité de la figure, il sera décidé de conserver l'appellation "corde commune", celle-ci sera seulement devenue "imaginaire", idéale. Il en sera de même bien sûr si le plus petit cercle par exemple devient intérieur au plus grand.



Ce sont les éléments imaginaires de Poncelet. Certains mathématiciens, même parmi les plus acquis à la cause de la géométrie synthétique, resteront très réservés sur ces imaginaires ; c'est le cas de Steiner, qui les appelle les ombres de la géométrie.

Les éléments à l'infini :

En revanche les éléments à l'infini vont devenir une partie constitutive de la nouvelle géométrie. Reprenons le cas de deux cercles dont les rayons sont égaux. Les tangentes communes extérieures sont parallèles. Leur centre de similitude externe sera cependant pris en considération. Il est seulement rejeté à l'infini.

Le principe de continuité :

Le grand principe qui sous-tend cette manière très universelle de considérer les figures est ce que Poncelet appelle le principe de continuité, que nous avons évoqué déjà.

> *Le principe de continuité, considéré sous le rapport de la Géométrie, consiste, comme on a pu le voir par ce qui précède, en ce que, si l'on conçoit qu'une figure donnée vienne à changer de situation par un mouvement progressif et continu des parties dont elle se compose, sans cependant violer la liaison et la dépendance primitivement établies entre elles, les relations ou propriétés métriques qui concernaient la figure dans la situation première demeurent applicables, dans leur forme générale, à toutes les figures dérivées, sans autre changement que celui des dénominations simples plus et moins qui peuvent s'intervertir entre elles dans ces relations. Quant aux relations purement descriptives ou graphiques qui concernent la figure primitive, elles demeurent applicables à toutes les figures dérivées sans autre modifications que celles survenues dans la situation respective des lignes*[98].

Ce point de vue est légitimé par ce qui se passe en analyse et en géométrie analytique. Pourquoi ce qui est implicitement admis en analyse, et ce qui en fait la force, ne pourrait-il être admis en géométrie synthétique ?

> *La seule, l'unique différence qu'on puisse trouver entre ces deux cas de la géométrie et de l'Algèbre, consiste en ce que, dans l'un, le changement d'ordre et la non existence de certaines grandeurs sont manifestes et sautent pour ainsi dire aux yeux, en sorte qu'on se voit arrêté dès les premiers pas qu'on veut faire ; tandis que, dans l'autre, au contraire, rien ne pouvant avertir du*

---

[98]Poncelet, J.V., *Lettre à M.O.Terquem*, Metz 1818, Applications d'analyse et de géométrie, tome II, p. 534.

changement survenu et tout restant explicitement le même, on continue le raisonnement d'une manière involontaire, sans qu'il soit possible de s'en douter. Or, cette différence ne touche nullement le fond des choses et ne tient qu'à la manière de les présenter au point de vue particulier sous lequel on les considère ; ainsi tout reste semblable de part et d'autre, et la distinction qu'on voudrait établir serait illusoire et nullement fondée[99].

Poncelet n'est pas tout à fait dupe du fondement peut-être incertain de son principe, mais il affirme que l'on ne peut avancer en géométrie sans cela et que beaucoup, sans l'écrire ouvertement, l'utilisent, car c'est un principe tout à fait en accord avec l'intuition. Si on ne peut l'accepter en géométrie, on ne doit pas non plus l'accepter en algèbre, où il n'est pas plus démontré. C'est pourtant ce qui a permis par exemple d'étendre, par continuité, les opérations des nombres positifs aux quantités négatives et aux quantités imaginaires, des quantités finies, aux infiniment petits.... En ce début de siècle où les fondements en sont à leurs balbutiements, il n'a pas tout à fait tort. Il est instructif de mettre en parallèle, par exemple, les affirmations de Poncelet et ce qu'écrit Lacroix, dans son traité élémentaire d'application de l'algèbre à la géométrie :

22. *Pour bien comprendre ce qui va suivre, il faut se pénétrer d'avance de la continuité qui règne toujours entre les différens résultats qu'on déduit d'une même expression algébrique, ou d'une même construction géométrique, et qui consiste en ce que chaque valeur que prend l'expression dont il s'agit, est toujours précédée ou suivie de valeurs qui diffèrent aussi peu qu'on voudra de la première, et en ce que, dans la description d'une ligne, chaque point est toujours précédé ou suivi de points qui lui sont immédiatement contigus*[100].

Il est clair que, dans un cas comme dans l'autre, la question de la continuité n'est pas encore réglée. Il est indéniable aussi que, dans une certaine mesure, il fallait pour progresser, ne pas trop s'attarder sur les fondements.

Pôles et polaires :

Une autre théorie qui va jouer un rôle important, pour notre problème et pour la géometrie synthétique en général, qui sera en partie à la base de ce qui deviendra le principe de dualité, à la source d'une controverse qui opposera Poncelet et Gergonne, c'est la théorie des pôles et polaires.

---

[99] Poncelet, J.V., *Applications d'analyse et de géométrie*, p. 315

[100] Lacroix, S. F., *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique, et d'application de l'algèbre à la géométrie,* 4° édition, Paris, Courcier, 1807, p. 19.

Dans une note relative au VII° cahier écrit à Saratoff, Poncelet, en 1862, remarque qu'une certaine obscurité règne dans son exposé, qui serait levée s'il avait employé la théorie des pôles et polaires :

> *Cela prouve qu'à l'époque de 1810, où je quittai l'École polytechnique, on était loin d'avoir des notions bien arrêtées sur la dépendance mutuelle de ce que l'on a nommé depuis, le pôle et la polaire dans les courbes du deuxième degré ; car l'expression même de polaire, aujourd'hui si universellement adoptée, ne l'a été qu'à partir de 1813-1814 où MM. Gergonne et Servois s'en servirent dans le t. III des Annales de mathématiques de Montpellier*[101].

Nous nous attarderons sur ces notions dans le cas des cercles, puisque c'est notre objet.

Si l'on considère les cordes de contact de tous les angles circonscrits à un même cercle, de telle sorte que leurs sommets soient tous sur une même droite (D), ces cordes de contact concourent en un point unique qu'on appelle pôle de la droite (D) . La droite passant par le centre du cercle et le pôle est perpendiculaire à (D).

Réciproquement, les sommets de tous les angles circonscrits à un même cercle de telle sorte que leurs cordes de contact soient concourantes en un point unique, sont situés sur une même droite, appelée polaire du point de concours. Cette droite est perpendiculaire à la droite passant par le centre du cercle et le point de concours.

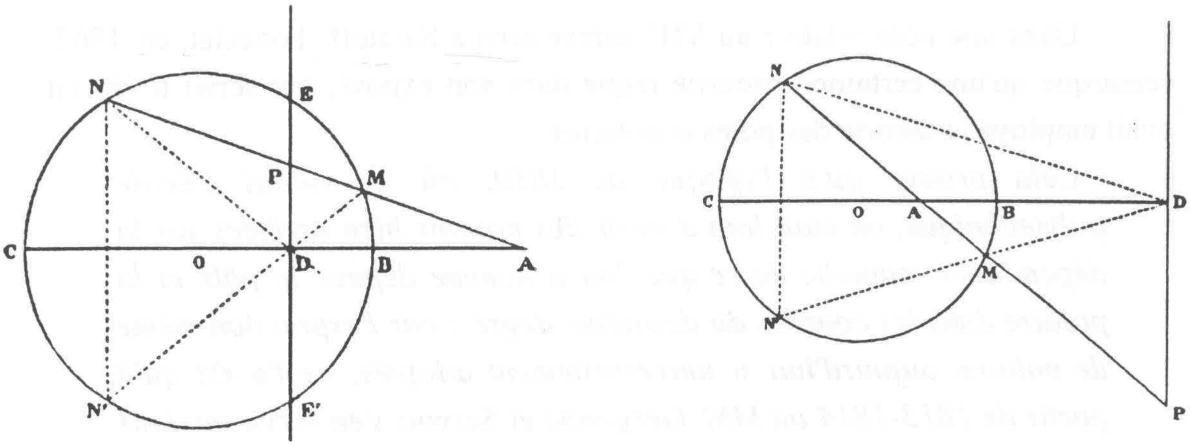
Pour élargir et généraliser une fois de plus cette situation , une propriété du pôle et de la polaire va être exploitée.

Lorsque sur une droite quatre points A, B, C, D sont tels que $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$, ces points forment une division harmonique. C et D sont dits conjugués sur AB.

Considérons maintenant la figure constituée d' un cercle de centre O et d'une sécante issue d'un point A à ce cercle. Soient M et N les intersections avec le cercle, et P le conjugué de A sur MN. On peut démontrer que le lieu des points P lorsque la sécante pivote autour de A est une droite perpendiculaire à la droite (AO). Cette droite sera la polaire de A, et A sera le pôle de cette droite.

Il y a réciprocité, c'est à dire qu'à une droite (D) correspond son pôle A, et qu'à A correspond sa polaire (D), et, si un point Q est sur la polaire de P, alors, P est sur la polaire de Q. Ces propriétés donneront naissance à la transformation par polaire réciproque, permettant de faire correspondre des droites aux points et des points aux droites.

[101]Poncelet, J.V., *Applications d'analyse et de géoémétrie*, p. 427.



Si le point A est intérieur au cercle, la polaire sera extérieure, si le point A est extérieur, la polaire sera intérieure, s'il est sur le cercle, la polaire est la tangente au cercle en A.

Inversion ou transformation par rayons vecteurs réciproques :

L'on glisse peu à peu vers la notion de transformation, et c'est l'inversion, ou plus exactement la transformation par rayons vecteurs réciproques qui apportera une façon originale de construire le problème des trois cercles.

Il n'est pas très facile de déterminer l'inventeur de ce qui, comme la similitude de deux cercles, est d'abord une relation entre deux figures, avant d'être une transformation au sens propre.

Poncelet donne des origines très anciennes à cette transformation :

> *M. Lamé qui l'emploie en lui attribuant dans les applications, beaucoup plus de portée et de puissance qu'elle n'en comporte réellement, semble ignorer l'origine, tout à fait géométrique, de cette très-ancienne méthode anamorphique, réalisée pour le plan par le miroir en cône des cabinets de physique, voilà ce qui ne se conçoit guère*[102].

Il semble en fait que la première vraie publication sur ce sujet soit due à Quetelet, dans son mémoire : *Résumé d'une nouvelle théorie des caustiques,*[103] de 1827, qui pourrait avoir été écrit en 1824. Il utilise alors le terme d'inversion et en donne une traduction en coordonnées rectangulaires et polaires. Sans utiliser le terme d'inversion, Steiner, dans l'article déjà cité du Journal de Crelle, en 1826, a déjà développé les mêmes idées, mais c'est seulement en 1913 que l'on retrouva

---

[102]Poncelet, J.V., Ibid., p. 494.

[103]Quetelet, A., *Résumé d'une nouvelle théorie des caustiques,* Académie royale des sciences de Belgique, nouveaux mémoires, vol.4, 1827, p. 81 à 113.

un document[104], daté de 1824, dans lequel il est clair que Steiner pense alors clairement l'inversion comme une transformation géométrique. Dans les premiers utilisateurs de cette transformation, nous trouvons Magnus, en 1832[105], Bellavitis en 1836[106], Liouville[107] qui donne le nom de transformation par rayons vecteurs réciproques, nom qui persistera très longtemps. Cette transformation est liée à la projection stéréographique des Anciens, et donc finalement a des origines réellement lointaines. Mais l'utilisation comme procédé de transformation d'une figure en une autre, sur laquelle il est plus facile de raisonner, pour revenir le cas échéant à la figure initiale, est totalement imputable aux géomètres du XIX° siècle. Le problème des trois cercles constituera une très fructueuse application de ce procédé.

Les nouvelles constructions d'un cercle tangent à trois cercles donnés sont basées sur les éléments et sur les principes que nous venons d' examiner. Il est remarquable que la plupart du temps ils seront mis en place pour cette démonstration, comme dans le mémoire de Gaultier de Tours, ou bien précisés ou exposés, dans les articles des *Annales* de Gergonne par exemple. Le rôle de ce problème apparaît ici, indéniablement.

Nous nous sommes attardés sur le nouveau cadre de la géométrie synthétique, car c'est le plus apparent. Les démonstrations de géométrie analytique vont aussi bénéficier, par ricochet, de cette réflexion. Les différents protagonistes, au-delà de l'aspect partisan, reconnaîtront honnêtement que l'une et l'autre géométrie doivent être cultivées de pair. C'est tout à fait clair dans les écrits d'un Poncelet ou d'un Chasles, qui les ont fait au demeurant progresser toutes les deux.

Presque dans le même paragraphe Poncelet écrit que l'analyse *ne saurait jamais diriger ni suppléer le jugement et la conception : c'est le vrai bâton des aveugles.*

Et pourtant :

> *Cet exemple et tant d'autres doivent faire sentir vivement la nécessité qu'il y a de cultiver la géométrie rationnelle de pair avec l'analyse algébrique, en les faisant marcher, autant que possible et*

104Bützberger, F;, *Über bizentrische Polygone, Steinersche Kreis-und Kugelreihen und die Erfindung der Inversion*, Leipzig, 1913.

105Magnus, L. I., *Nouvelle méthode pour découvrir des théorèmes de géométrie*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, vol. 8, 1832, p. 51 à 63.

106Bellavitis, G., *Teoria delle figure inverse e loro uso nella geometria elementare*, Annali delle Scienze del regno Lombardo-Veneto, vol. 6, 1836, p. 126 à 141.

107Liouville, J., *Journal de mathématiques pures et appliquées*, tome X, XI, XII, 1845 à 1847.

si je puis m'exprimer ainsi, à la même hauteur ; car chacune de ces deux sciences s'accroîtra de tous les progrès qu'on aura pu faire faire à l'autre.[108]

Et Chasles a déjà déclaré dans son discours d'inauguration du cours de géométrie supérieure, en 1846 :

L'Analyse et la géométrie, au point de vue philosophique, sont deux branches d'une science unique qui a pour objet la recherche des vérités naturelles ; elles sont destinées à s'éclairer mutuellement, à se prêter un secours réciproque : toutes deux sont des instruments aujourd'hui indispensables[109].

3° Les démonstrations :

Qu'il s'agisse de démonstrations de géométrie des coordonnées, ou de démonstrations de géométrie synthétique, elles sont marquées par l'esprit de généralité que nous avons décrit. L'objet est de traiter le cas le plus général, c'est à dire le dixième problème de l'*Apollonius Gallus*, non pour en rester là comme ce pouvait être le cas précédemment, mais parce que les autres problèmes n'en seront que des cas particuliers : tout ce qui sera dit sur les cercles pourra en effet être étendu aux droites qui ne sont que des cercles de rayon infini, et aux points qui ne sont que des cercles de rayon nul.

Le mémoire de Gaultier de Tours est publié en 1813, puis, à partir de l'article de Gergonne, sur un cercle qui en touche trois autres sur une sphère, dans lequel il évoque son mémoire de Turin, les démonstrations vont se succéder, se répondant l'une l'autre. Nous évoquerons les plus marquantes, pour leur style, ou pour ce qu'elles veulent défendre.

La démonstration analytique de Gergonne :

En juin 1814, donc, à propos de la recherche d'un cercle qui en touche trois autres sur une sphère, Gergonne résume très simplement la façon dont il a alors résolu le problème sur un plan, et de la même façon la recherche d'une sphère qui en touche quatre données, dans un précédent mémoire. Pour le problème plan, il a déterminé les points de contact du cercle cherché avec les cercles donnés. Gergonne nous expliquera comment il a fait évoluer sa recherche et ses démonstrations, mais elles seront caractérisées par la détermination des points de contacts ; c'est ainsi que cette façon de procéder restera sous le nom de "méthode de Gergonne", de la même façon que le procédé

108Poncelet, J.V., *Applications d'analyse et de géométrie*, tome II, p. 295.
109Chasles, M., *Traité de géométrie supérieure*, Paris, Gauthier-Villars, 1880, p.585.

où l'on se ramène à la recherche d'un cercle passant par un point donné et tangent à deux cercles, est resté sous le nom de "méthode de Viète". Gergonne justifiera son choix.

Dans l'article cité, il a déjà un peu modifié sa méthode de Turin, pour la rendre plus générale et applicable par exemple aux cercles sur la sphère. Le ton n'est pas encore polémique ; l'auteur exprime seulement la satisfaction naturelle qu'il éprouve à fournir, grâce à son analyse, une construction simple et élégante, qui est *un moyen de ramener à des procédés uniformes, et faciles à retenir, tous les problèmes de Viète sur le contact des cercles, et ceux de Fermat sur le contact des sphères*[110].

Trois ans plus tard, le ton est devenu plus accusateur, plus combatif. Il avait cru son mémoire de Turin suffisamment puissant, suffisamment convaincant, pour que les deux problèmes soit réglés une fois pour toutes. Il apparaissait cependant que certains y travaillaient encore ! Il ne trouvait là qu'une seule explication : son laconisme excessif qui ne leur avait permis de suivre ni ses méthodes ni l'esprit dans lequel il avait travaillé. Il se proposait donc de reprendre le sujet pour le développer davantage. Le propos est alors on ne peut plus clair :

> *Il y a environ trois ans que l'académie de Turin voulut bien rendre public, par la voie de l'impression, un mémoire que je lui avais adressé, et où, dans le dessein de venger complètement la géométrie analitique du reproche qu'on ne lui avait fait que trop souvent de ne pouvoir rivaliser avec la géométrie pure, pour la construction des problèmes, j'essayais de prouver que cette géométrie analitique, convenablement maniée, offrait les solutions les plus directes, les plus élégantes et les plus simples de deux problèmes dès-long-temps célèbres, et qui passent pour difficiles : je veux parler du problème où il s'agit de décrire un cercle qui touche trois cercles donnés et de celui où il est question de décrire une sphère qui touche quatre sphères données*[111].

Il faut *venger* la géométrie analytique !

Il s'agit de plus encore. Ces deux problèmes vont lui permettre d'*ouvrir un nouveau champ de spéculations et de recherches de nature à faire prendre à la géométrie analitique une face entièrement nouvelle.* Ses méthodes, par

---

[110]Gergonne, J.D., *Recherche du cercle qui en touche trois autres sur une sphère*, Annales de mathématiques pures et appliquées, tome IV, n° XII, 1° juin 1814, p.350.

[111]Gergonne, J. D., *Recherche du cercle qui en touche trois autres sur un plan,* Annales de mathématiques pures et appliquées, tome VII, n° X, avril 1817, p. 289.

leur facilité pourront de surcroît trouver leur place dans les traités les plus élémentaires.

Le problème plan seul sera traité, car ses méthodes s'étendront sans difficultés au problème des sphères.

Soit donc c, c ', c ", trois cercles donné sur un plan. Il faut en trouver un quatrième C qui touche à la fois les trois premiers. Il vient d'abord à l'esprit de déterminer le centre et le rayon du cercle C. Mais il est aussi naturel de chercher trois points de ce cercle. C'est ce qu'il choisit en proposant de découvrir les points t, t ' et t " où le cercle C doit être touché par les cercles donnés. En fait si l'on sait trouver l'un des points, il suffira de répéter la construction pour avoir les deux autres. Gergonne explique pourquoi cette méthode est très certainement plus simple que la méthode centre et rayon. En effet, dès que le centre et le rayon sont connus, le problème est quasi résolu. En revanche, la connaissance des points de contact demande encore de construire le cercle passant par ces trois points. Comme il y a inévitablement un nombre donné d'opérations pour parvenir au résultat, il est certainement plus facile de déterminer les points de contact que le centre et le rayon, et encore plus simple de trouver un seul de ces points de contact puisque restera encore deux tiers de la construction !

> *Puis donc que, lorsqu'ils sont connus, le problème n'est pas encore résolu, on peut présumer avec beaucoup de vraisemblance, que la recherche de l'un d'eux ne comportera pas même le tiers de la complication totale du problème.*
>
> *Si Viète et Newton sont parvenus très simplement à ramener le problème qui nous occupe à celui où il s'agit de décrire un cercle qui, passant par un point donné, touche deux autres cercles donnés, c'est que ce dernier problème est presque aussi difficile à résoudre que le premier*[112].

Il nous est donc proposé de rechercher le point t " où le cercle C touche le cercle c ". Il faut pour cela connaître deux lignes sur lesquelles il se trouve. L'une d'elle est déjà connue, c'est c ".

Le problème est finalement le suivant : trois cercle c, c ', c ", étant donnés sur un plan, trouver une ligne qui coupe c " au point t ", où il est touché par un quatrième cercle C, qui touche à la fois les trois premiers.

Rapportons la figure à deux axes rectangulaires. Pour concilier simplicité et symétrie, l'origine des axes est choisie au centre de c ", les axes ayant une direction quelconque par rapport aux deux autres cercles.

---

[112] Ibid. p. 292.

Soit r, r ', r " les rayons des cercles c, c ', c " ; soit a , b les coordonnées du centre de c , a ' , b ' les coordonnées du centre de c '. Soit R le rayon de C et A , B les coordonnées de son centre. Soit enfin x , y les coordonnées de t ". Le cas étudié sera celui où les contacts sont extérieurs. Par un changement de signe qui nous est maintenant habituel les autres contacts pourraient en être déduits, et le problème peut avoir huit solutions.

t " est sur c ", donc :

$$x^2 + y^2 = r''^2 \qquad (1)$$

La distance du centre de C aux centres de chaque cercle c, c ', c " doit être égale à la somme de leur rayons :

$$(A-a)^2 + (B-b)^2 = (R+r)^2 \qquad (2)$$

$$(A-a')^2 + (B-b')^2 = (R+r')^2 \qquad (3)$$

$$A^2 + B^2 = (R+r'')^2 \qquad (4)$$

En retranchant l'équation (4) des équations (2) et (3), nous obtenons :

$$2aA + 2bB - 2(r''-r)R = a^2 + b^2 + (r''-r)(r''+r) \qquad (5)$$

$$2a'A + 2b'B - 2(r''-r')R = a'^2 + b'^2 + (r''-r')(r''+r') \qquad (6)$$

Gergonne nous fait remarquer que cette substitution d'équations est un des moyens les plus puissants de l'analyse et de la géométrie.
Ces équations seront encore simplifiées en faisant apparaître (R+r ").
Nous obtenons ainsi :

$$2aA + 2bB - 2(r''-r)(R+r'') = a^2 + b^2 - (r''-r)^2 \qquad (7)$$

$$2a'A + 2b'B - 2(r''-r')(R+r'') = a'^2 + b'^2 - (r''-r')^2 \qquad (8).$$

Il faut maintenant lier les équations (1), (4), (7), (8).
Le point t " est aligné avec l'origine et le centre de C, donc :

$$\frac{y}{x} = \frac{B}{A} \quad ou \quad yA = xB \qquad (9).$$

De (4) et (9) nous tirons : $A = \dfrac{x(R+r'')}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $B = \dfrac{y(R+r'')}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

puis avec (1) $A = \dfrac{x(R+r'')}{r''}$ $B = \dfrac{y(R+r'')}{r''}$

Substituant ces valeurs dans (7) et (8), puis éliminant *(R + r ")* entre les deux, on obtient :

$$\frac{ax + by - r''(r''-r)}{a^2 + b^2 - (r''-r)^2} = \frac{a'x + b'y - r''(r''-r')}{a'^2 + b'^2 - (r''-r')^2} \qquad (10).$$

C'est l'équation d'une ligne qui coupe c " en t ", l'équation est du premier degré, il s'agit donc d'une droite. Cette droite donnerait deux points d'intersection avec c ". En fait elle correspond aussi au cas où les signes des trois rayons sont changés. Elle résout donc à la fois le cas de trois contacts extérieurs et de trois contacts intérieurs.

Rechercher les valeurs de x et y à l'aide de (1) et (10) est possible mais très compliqué. Il vaut mieux construire la droite d'équation (10). Cependant si l'on se réfère aux moyens habituels, les axes étant quelconques, cela ne sera pas simple. Il sera préférable de trouver deux points de la droite indépendants de la situation des axes. C'est une des clés de la simplicité que nous propose l'auteur :

> *Ceux qui prétendent contester à la géométrie analitique l'avantage d'offrir des constructions simples et élégantes se fondent principalement sur ce que, quelque attention qu'on apporte à bien choisir les axes de coordonnées, ces axes sont, le plus souvent, des lignes tout-à-fait étrangères au problème qu'il s'agit de résoudre. (...). Nous conviendrons de tout cela ; mais voilà aussi pourquoi nous ne réputons bonnes les constructions déduites de la géométrie analitique, qu'autant qu'on est parvenu à les rendre tout-à-fait indépendantes de la situation des axes ; voilà pourquoi nous nous efforçons de prouver, par des exemples, que la géométrie analitique, convenablement employée peut toujours en offrir de telles ; et qu'alors elles sont bien supérieures, pour l'élégance et la simplicité, à celles de la géométrie pure, ou même de ce que M. Carnot appelle géométrie mixte*[113].

Pour trouver deux points de la droite (10), on peut chercher celui qui correspond à la nullité de ses deux membres, puis celui qui correspond aux deux membres égaux à l'unité.

La première supposition donne : $ax + by = r''(r'' - r)$ (11)

$a'x + b'y = r''(r'' - r')$ (12)

La deuxième supposition donne: $a(x - a) + b(y - b) = r(r'' - r)$ (13)

$a'(x - a') + b'(y - b') = r'(r'' - r')$ (14)

Pour trouver les deux points on pourrait résoudre le système formé par (11) et (12), puis le système formé par (13) et (14).

Ou mieux encore on peut construire les droites d'équation (11) et (12) dont l'intersection donnera le premier point ;les droites d'équation (13) et (14) donneront le deuxième point. Le problème peut être simplifié, en remarquant que les droites d'équation (12) et (14) sont situées par rapport aux cercles c ' et c ", comme les droites d'équation (11) et (13) le sont pour les cercles c et c ". Si l'on sait construire les deux dernières, on saura construire les deux autres. Les équations (11) et (13) permettent aussi de remarquer que les droites correspondantes sont parallèles et perpendiculaires à la droite joignant le centre de c au centre de c ".

Examinant encore les équations (11) et (13), la première devient la deuxième, en changeant x et y respectivement en (a-x) et (b-y), et en permutant

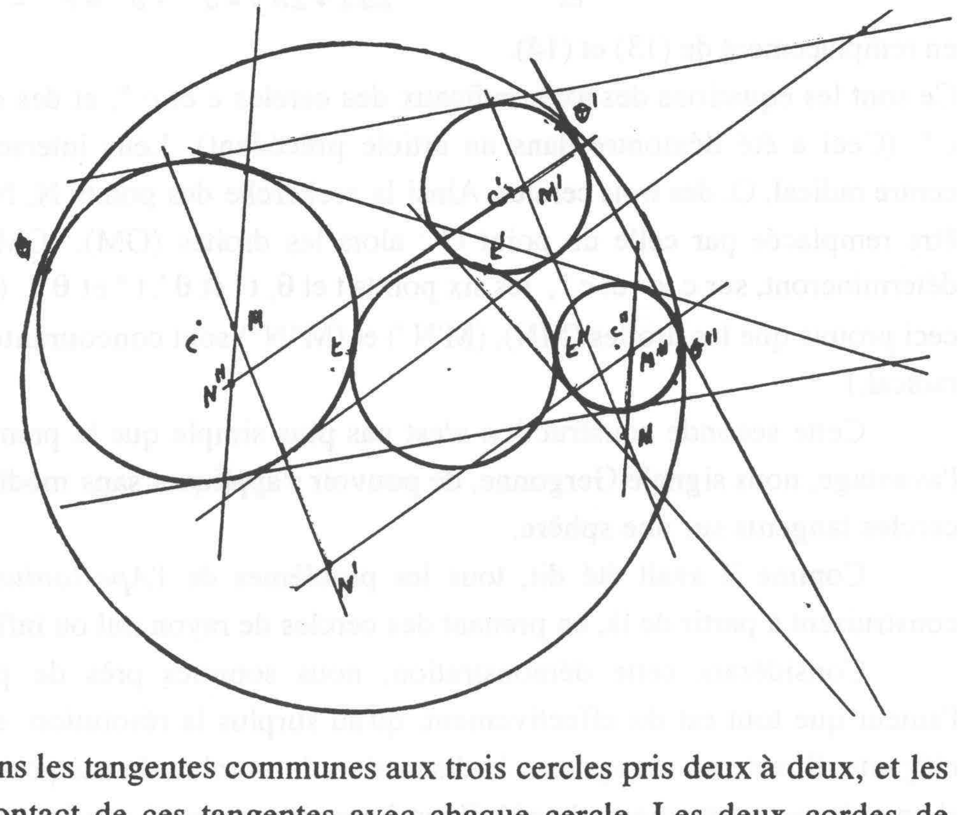
---

113Ibid., p. 299.

les deux rayons r et r ". Ainsi, la droite (13) est par rapport au cercle c, comme la droite (11) pour le cercle c ". Finalement il suffit de s'occuper de la droite (11).

Prenant un point quelconque sur c " de coordonnées x ' et y ', nous avons la relation : $x'^2 + y'^2 = r''^2$ (m)
et l'équation de la tangente à c " en ce point est : $xx' + yy' = r''^2$
ou encore : $y = -\frac{x'}{y'}x + \frac{r''^2}{y'}$.
Si l'on veut préciser x ' et y ' pour que cette tangente touche aussi le cercle c, il faut que sa distance à c soit égale à r. Cette condition donne : $\frac{ax' + by' - r''^2}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = r$,
ce qui joint à (m) donne : $ax' + by' = r''(r'' - r)$ (n).
Il serait possible de calculer les coordonnées du point où la tangente commune à c et c" touche c" ; (Il y aura deux tangentes car (m) est du second degré).
Il est plus simple de construire la droite d'équation (n). (n) est l'équation d'une droite qui contient les points où c " est touché par les tangentes communes à c et c ". C'est la corde de contact. Or (n) et (11) sont identiques. (11) est donc l'équation de la corde de contact avec c " des tangentes communes à c et c ". (13) est alors l'équation de la corde de contact des mêmes tangentes avec c ; (12) et (14) sont les équations des cordes de contact avec c " et c ' des tangentes communes à ces deux cercles.

Nous avons ainsi une construction du problème.



Menons les tangentes communes aux trois cercles pris deux à deux, et les cordes de contact de ces tangentes avec chaque cercle. Les deux cordes de contact sur c se coupent en M et leurs parallèles sur c ' et c " en N. Les deux cordes de contact sur c ' se coupent en M ' et leur parallèles sur c " et c en N '; les cordes de contact sur c " se coupent en M " et leurs parallèles sur c et c ' en N ".

(MN) coupe c en t et θ ; (M 'N ') coupe c ' en t ' et θ ' ; (M "N ") coupe c " en t " et θ ". Le cercle passant par t, t ', t " et le cercle passant par θ, θ ', θ " sont deux cercles cherchés. Si l'on veut les tracer, leur centre est facilement connu puisqu'il est sur la droite passant par les centres des cercles donnés et t, ou t ' ou t ", et θ ou θ ' ou θ ".

Pour obtenir les autres solutions, il est facile de penser qu'il suffira de substituer aux tangentes extérieures des tangentes intérieures communes.
Mais il n'est pas toujours possible de mener des tangentes communes. Que fait-on dans ce cas ?

Gergonne l'examine. Si, en effet deux des cercles sont l'un dans l'autre en tout ou partie, les constructions font défaut puisque les tangentes communes intérieures, voire aussi extérieures, n'existent plus. Les droites (11), (12), (13), (14) existent toujours. Par exemple (11) et (13) représentent les droites ayant pour pôle commun le centre de similitude de c et c ".
On peut aussi modifier les constructions, en recherchant pour la droite d'équation (10) non plus le point correspondant aux deux membres égaux à 1, mais plutôt à 2. On obtient alors :

$$2ax + 2by - a^2 - b^2 = r''^2 - r^2 \qquad (15)$$

et

$$2a'x + 2b'y - a'^2 - b'^2 = r''^2 - r'^2 \qquad (16)$$

en remplacement de (13) et (14).
Ce sont les équations des axes radicaux des cercles c et c ", et des cercles c ' et c ". (Ceci a été démontré dans un article précédent). Leur intersection est le centre radical, O, des trois cercles. Ainsi la recherche des points N, N' et N" peut être remplacée par celle du point O ; alors les droites (OM), (OM') et (OM") détermineront, sur c, c ' et c ", les six points t et θ, t ' et θ ', t " et θ ". (Au passage, ceci prouve que les droites (MN), (M'N ') et (M"N") sont concourantes au centre radical.)

Cette seconde construction n'est pas plus simple que la première ; elle a l'avantage, nous signale Gergonne, de pouvoir s'appliquer sans modification aux cercles tangents sur une sphère.

Comme il avait été dit, tous les problèmes de l'*Apollonius Gallus* se construisent à partir de là, en prenant des cercles de rayon nul ou infini.

Considérant cette démonstration, nous sommes près de penser avec l'auteur que tout est dit effectivement, qu'au surplus la résolution est simple et élégante. Il reste un manque sur la discussion du nombre de cas possibles, même si ce point est vaguement abordé. Il est à remarquer aussi que les points M, M ' et M " n'existent pas toujours, dans le cas par exemple où les centres des trois cercles donnés sont alignés. Il semble que ceci ait échappé à Gergonne. Hadamard reprendra ce cas à la fin du siècle et proposera d'utiliser alors une inversion. Nous n'en sommes pas encore là.

Cette belle démonstration, une page remarquable de mathématiques qui restera célèbre à juste titre, appelle cependant certaines remarques. Le calcul analytique ne s'est pas fait au hasard. Ou l'auteur était mu par une intuition géniale, ou bien ce sont des considérations de géométrie pure qui l'ont conduit. Il connaît de façon certaine le travail de Gaultier de Tours. L'utilisation des axes radicaux et centres radicaux en serait la moindre preuve. Le problème reste posé, et les détracteurs de la géométrie analytique ne se priveront pas de le rappeler : peut-on faire de la géométrie analytique sans réflexion parallèle ou préalable de géométrie pure ? Était-il même nécessaire de s'appuyer sur cette analyse en coordonnées, aussi brillante soit-elle, pour parvenir à cette construction ?

Poncelet, commentant quelques années plus tard les articles parus dans les *Annales* de Gergonne autour des années 1817-1820, écrit :

> *Je supprime ici les réflexions que l'article précédent de philosophie a suggérées à M. Gergonne, et dans lesquelles, pour établir la supériorité des méthodes algébriques sur celles de la géométrie pure, il rappelait ses élégantes solutions des problèmes relatifs aux cercles et aux sphères tangents à d'autres donnés à volonté sur un plan ou dans l'espace. Mais, outre que ces solutions avaient été précédées par d'autres purement géométriques qui, sauf le manque de généralité, n'étaient point dénuées d'un certain mérite, le savant rédacteur des annales aurait dû ne pas oublier que le succès de ses méthodes trigonométriques est principalement dû à l'heureux mélange qu'il a su faire des considérations géométriques avec celles de l'analyse algébrique.*[114]

L'auteur de cette remarque ne semble plus trop savoir, tant d'années après, que la méthode utilisée par Gergonne en 1817 n'était pas du tout trigonométrique. Il n'en reste pas moins que son propos sur l'alliance entre géométrie pure et analyse algébrique semble fondé. En revanche, parmi les solutions géométriques, l'une au moins, celle de Gaultier de Tours, ne manquait pas de genéralité.

Le mémoire de Gaultier de Tours :

---

[114]Poncelet, J. V., *Applications d'analyse et de géométrie*, tome II, ouvrage cité, p. 476.

Le mémoire de Gaultier de Tours que nous avons évoqué, mais auquel il n'a nullement été fait allusion dans les textes précédents, était peut-être aussi remarquable que l 'article du rédacteur des *Annales*.

Ce professeur de géométrie descriptive, après un tour d'horizon complet de ce qui a été produit sur le problème des cercles tangents sur un plan, ou celui des sphères tangentes, jusqu'à ce mois de juin 1812, dresse son programme :

> *Tel est à-peu-près le point où l'on s'est arrêté, et celui d'où nous sommes partis, lorsque nous avons entrepris de donner des moyens de solutions qui s'appliquassent avec la même facilité à tous les cas qui peuvent se présenter. Ces moyens, qui diffèrent entièrement de ceux qui ont été proposés jusqu'à ce jour, n'exigent, pour être saisis, que les principes les plus élémentaires de la géométrie plane et de la géométrie descriptive, puisque nous n'employons dans nos construction que la droite et le cercle ; cependant notre méthode est tellement générale et indépendante des données particulières, qu'elle conduit immédiatement à toutes les solutions dont chaque problème est susceptible, et qu'elle indique en même temps celles qui deviennent imaginaires*[115].

Rappelons qu'il a précisé clairement qu'il proposait de **construire graphiquement** les cercles. Dans ce but il faut examiner un certain nombre de propriétés géométriques des cercles et des sphères. Ce sera l'objet du premier chapitre, et ceci d'une façon originale et efficace. Une des faiblesses de la géométrie pure par rapport à l'analyse, c'est la lourdeur de l'écriture d'un raisonnement, même lorsqu'il s'agit de propriétés simples et courantes. Une équation au contraire exprime de façon concise à peu près la même chose et réalise une économie de pensée considérable. Gaultier de Tours va ainsi mettre en place une nomenclature et des dénominations qui devront permettre d'alléger l'écriture et de suivre plus facilement le fil directeur du raisonnement.

> *La théorie que nous développons dans ce I° chapitre, a nécessité l'emploi de quelques dénominations particulières qui servent à rappeler, plus brièvement que des périphrases, les propriétés nouvelles qui en sont l'objet ; mais nous avons réduit cette espèce de nomenclature, qui paraissait d'abord un peu compliquée, aux seuls termes qui désignent les propriétés les plus fondamentales, et dont l'emploi fréquent aurait entraîné des longueurs inévitables*[116].

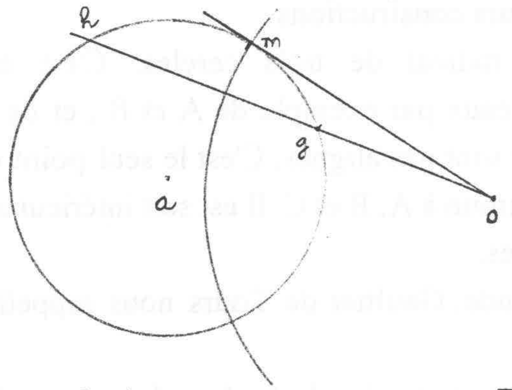
---

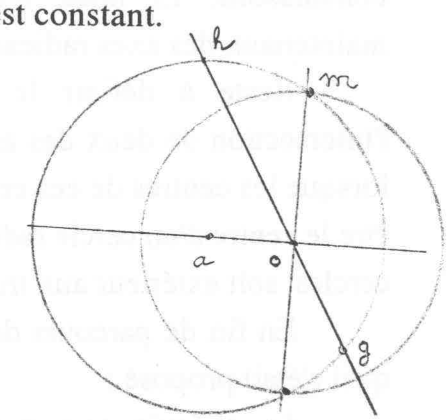
[115] Gaultier de Tours, L., ouvrage cité, p. 128.
[116] Ibid. p.131.

Les définitions particulières, sur lesquelles tout le développement va s'appuyer, sont celles de cercle radical ou sphère radicale, axe radical, plan radical et centre radical.

Le pivot de tout ceci est la notion de *cercle radical* dans le plan, *sphère radicale* dans l'espace. Nous nous attacherons plus particulièrement au plan et au problème des cercles dans un plan, tout pouvant se transposer facilement à l'espace.

Si par un point quelconque o dans le plan d'un cercle A, dit cercle primitif, on mène des sécantes à ce cercle, le produit $og \times ok$ est constant.





Le cercle de centre o et de rayon $\sqrt{og \times ok}$ est appelé cercle radical du cercle A, et noté O rad. A. Le terme "radical" est créé, et se justifie parfaitement. L'auteur ajoute :

> *Cette expression (cercle radical A) doit être considérée comme équivalente à cette phrase : cercle dont le rayon a pour valeur la racine carrée du produit constant formé par les parties des sécantes ou des cordes menées de son centre à la circonférence du cercle primitif A auquel il est comparé*[117].

Il y a deux espèces de cercle radicaux, suivant que le point o est intérieur ou extérieur au cercle A.

Si o est extérieur à A, le rayon du cercle O rad. A est om, où m est le point de contact de la tangente issue de o à A. Et l'on constate alors que le cercle A est aussi radical du cercle de centre o. Alors le cercle O est dit radical réciproque du cercle A. On note O rad.réc. A, ou ce qui revient au même, A rad. réc. O.

Si o est intérieur au cercle A, le rayon du cercle radical est om, où m est l'intersection du cercle A et de la perpendiculaire en o à (oa). Alors A n'est pas radical de O. Le cercle radical de centre o est dit radical simple, et le cercle A est dit primitif simple. On note O rad. simp. A ou A prim. simp. O.

---

[117] Ibid. p. 131

Si o est sur le cercle A, le cercle radical se réduit à o (le rayon du cercle radical est nul.). Il peut être considéré comme radical simple ou réciproque, indifféremment.

Considérons maintenant deux cercles A et B dans le plan, et cherchons une propriété des centres des cercles radicaux communs à A et B. Gaultier de Tours montre que le lieu de ces centres est une droite perpendiculaire à la droite ab. Cette droite sera appelée axe radical des cercles A et B, et c'est bien l'axe radical lieu des points de "même puissance" par rapport à A et B que nous connaissons. Et nous retrouvons ainsi toutes les propriétés, habituelles maintenant, des axes radicaux, et leurs constructions.

Reste à définir le centre radical de trois cercles. C'est bien sûr l'intersection de deux des axes radicaux par exemple de A et B , et de A et C, lorsque les centres de ces cercles ne sont pas alignés. C'est le seul point qui peut être le centre d'un cercle radical commun à A, B et C. Il est soit intérieur aux trois cercles, soit extérieur aux trois cercles.

En fin de parcours de son étude, Gaultier de Tours nous rappelle le but qu'il s'était proposé :

> *La théorie que nous avons exposée dans les deux premiers chapitres ayant principalement pour but d'arriver à la détermination d'un cercle qui satisfait à trois conditions et d'une sphère qui en remplit quatre, nous avons réuni les conditions qui peuvent se présenter le plus souvent, et nous les avons combinées de toutes les manières possibles pour en former les tableaux suivans. Ils offrent aussi le nombre des solutions dont chaque problème est susceptible dans le cas le plus général.*

Suit un tableau pour les cercles puis un tableau pour les sphères, qui se veulent exhaustifs.

Voici le tableau concernant les cercles, précédé des symboles utilisés :

> *Nous conviendrons, avant tout, de désigner par une lettre particulière chacune des conditions que doit remplir le cercle ou la sphère cherchée, afin d'abréger l'exposé des combinaisons que l'on peut faire de ces conditions.*
>
> *Les lettres suivantes signifieront que le cercle ou la sphère cherchée, doit,*
>
> *1°* **p** *, Passer par un point donné ;*
>
> *2°* **l** *, Toucher une droite donnée ;*
>
> *3°* **c** *, Toucher un cercle donné ;*
>
> *4°* **r** *, Avoir un rayon donné. Cette condition ne peut rentrer qu'une fois dans chaque combinaison .*

*5 **t** , Toucher une droite ou un cercle en un point donné. Cette condition équivaut à deux pour le cercle comme pour la sphère.*

*6° **d** , Avoir son centre sur une droite donnée. Cette condition ne peut être employée que deux fois dans chaque combinaison. Nous ne l'emploierons jamais par rapport à la sphère, parce qu'elle équivaut à avoir son centre en même temps sur deux plans.*

*7° **P** , Toucher un plan donné ;*

*8° **s** , Toucher une sphère donnée ;*

*9° **T** , Toucher un plan ou une sphère en un point donné, ce qui équivaut à trois conditions ;*

*10° **D** , Avoir son centre dans un plan donné.Ccette condition ne peut être employée plus de trois fois dans chaque combinaison.*

Nous ne faisons pas entrer comme condition d'avoir un centre donné, puisqu'elle équivaut, par rapport au cercle, à avoir son centre sur deux droites, et, par rapport à la sphère, à avoir son centre sur trois plans.

CERCLES DÉTERMINÉS PAR TROIS CONDITIONS.

N.os	COMBINAISONS.	SOLUTIONS.	N.os	COMBINAISONS.	SOLUTIONS.
1.	*tp*........		18.	*pcd*........	
2.	*td*.........		19.	*lld*........	2.
3.	*rdd*.........	1.	20.	*cdd*........	
4.	*ppp*.........		21.	*rpc*........	
5.	*ppd*.........		22.	*rll*.........	
6.	*pdd*.........		23.	*rcd*........	
7.	*tr*...........		24.	*plc*.........	4.
8.	*tl*...........		25.	*pcc*.........	
9.	*tc*...........		26.	*lll*..........	
10.	*rpp*..........		27.	*lcd*.........	
11.	*rpl*..........		28.	*ccd*.........	
12.	*rpd*.........	2.	29.	*rlc*..........	
13.	*rld*.........		30.	*rcc*..........	
14.	*ppl*.........		31.	*llc*..........	8.
15.	*ppc*.........		32.	*lcc*..........	
16.	*pll*.........		33.	*ccc*..........	
17.	*pld*.........				

Après ce panorama de toutes les situations possibles, il ajoute qu'il arrive souvent que le nombre de solutions est moindre que celui indiqué par les tableaux, pour des données prises au hasard. Il faut donc pour chaque problème indiquer comment l'on reconnaît *que certaines solutions s'anéantissent.* Trois problèmes sont examinés sous cet angle, le premier étant celui de *trouver un cercle qui touche en même temps trois cercles donnés A, B, C.*

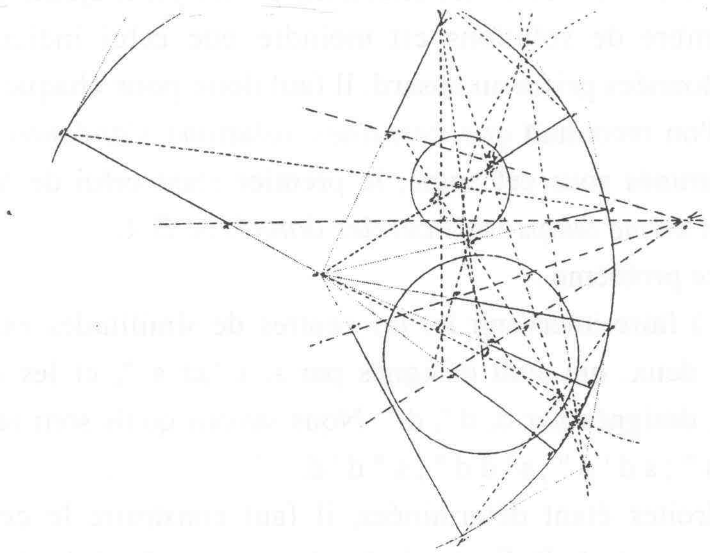
Examinons ce problème :

Nous aurons à faire intervenir ici les centres de similitudes externes des cercles pris deux à deux, qui sont désignés par s, s ',et s ", et les centres de similitudes internes, désignés par d, d ', d ". Nous savons qu'ils sont répartis sur quatre droites ; s s ' s " ; s d ' d " ; s ' d d " ; s " d ' d.

Ces quatre droites étant déterminées, il faut construire le centre o du cercle O radical commun de A, B, C, c'est à dire le centre radical des trois cercles donnés . De ce centre on abaisse sur chacune des droites précédentes les perpendiculaires respectivement en f, g, h, i . Chacune de ces perpendiculaires contient le centre de tout cercle satisfaisant à la combinaison de contacts indiquée par les lettres s et d. (s, s ', s " indique trois contacts de même ordre, s, d', d", indique que les contacts pour le cercle c sont différents des contacts pour les cercles c ' et c "). En effet, il est possible de montrer que le centre radical est centre de similitude des deux cercles de contact correspondant à une combinaison donnée, par exemple s s ' s ", et par ailleurs, l'axe de similitude correspondant est l' axe radical des deux cercles cherchés. Ceci a été démontré par Gaultier de Tours grâce à ce qu'il appelle suites de cercles, qui admettent le même axe radical, que nous nommerions faisceaux de cercles, et dont les centres bien sûr sont en ligne droite, puisque l'axe radical de deux cercles est perpendiculaire à la droite qui joint leurs centres.

L'axe radical des deux cercles A et O coupe s s ' s " en k, s d ' d " en l, d s ' d " en m et d d ' s " en n, et chacun de ces points est centre d'un cercle radical commun aux cercles A et O. Si du point k on mène les deux tangentes au cercle A, en p et p ', ces points p et p ' seront les points de contact de deux cercles qui touchent de la même façon les cercles A, B, C. En effet, *la corde de contact*, qui passe par les points de contact d'un des cercles donnés, (par exemple ici A) avec les deux cercles cherchés correspondant à une combinaison donnée, (par exemple trois contacts de même ordre) contient le pôle de l'axe de similitude correspondant,(dans l'exemple, s s ' s ") pris par rapport au cercle considéré (ici A). Les centres de ces deux cercles sont les intersections des droites (of) et (ap) ou (ap '). Nous avons ainsi deux solutions.

De la même façon, en utilisant l ou m ou n, on trouverait les autres cercles cherchés. Et il y en a huit.



Il se pourrait cependant que l'un des points k, ou l, ou m, ou n se trouve à l'intérieur du cercle A, les cercles correspondants n'existeraient alors pas. Il se peut ainsi qu'il y ait moins de huit solutions, voire aucune solution. Si l'un de ces points est sur le cercle A, alors les deux solutions correspondantes ne font qu'une.

Cette solution géométrique n'est pas moins remarquable que celle fournie par Gergonne, et très générale, puisqu'en fait à peu près tous les cas sont examinés, si ce n'est là encore, le cas de trois cercles dont les centres sont alignés. Par les mêmes remarques aussi, l'on peut déduire de cette étude les solutions des autres problèmes de l'*Apollonius Gallus* en prenant des rayons nuls ou infinis, cas limites qui ont été examinés dans la partie théorique.

Il nous semble que ce texte de l'inventeur des axes et centres radicaux a été ignoré injustement par ses contemporains. Il sonne indéniablement en résonance avec le texte précédemment étudié.

Géométrie analytique versus Géométrie synthétique :

Le ton quelque peu provocateur de l'article de Gergonne et, nous venons de le constater, peut-être un peu discret vis à vis de ses sources, décidait le capitaine du génie Poncelet à produire une réponse, aussi polémique, qui paraîtra dans les *Annales* en novembre 1817. Les formes sont mises :

> *Monsieur, vous ne trouverez pas indiscrète, sans doute, la liberté que je prends de vous adresser quelques réclamations touchant la comparaison que vous établissez entre les résultats de la géométrie pure, et ceux de la géométrie analytique. L'impartialité dont vous faites profession m'est un garant assuré que tout ce qui peut tendre*

à éclairer la partie philosophique des sciences exactes doit, indépendamment de vos opinions personnelles et de votre manière particulière d'envisager les choses, trouver un libre accès dans votre journal, principalement destiné, à ce qu'il paraît, à recueillir les discussions qui peuvent s'élever entre les géomètres sur l'estime relative que l'on doit accorder aux diverses méthodes propres à agrandir le domaine de la science.[118]

Au delà des précautions oratoires, le problème est cependant clairement et directement posé : l'analyse, ou plutôt, la méthode des coordonnées est admirable et très puissante, mais l'autre géométrie ne l'est pas moins. Tout dépend, en fait, de ce que l'on dénomme géométrie pure. Celle des anciens, que d'illustres noms ont cultivée, bien que très estimable, ne possède pas assez de généralité pour mener à des solutions simples ou élégantes ; mais la nouvelle géométrie, celle où l'on s'interdit seulement l'usage des coordonnées ou des calculs, supporte sans aucun doute la comparaison, et , souvent en sa faveur :

Mais si, par géométrie pure, vous voulez entendre, en général, celle où l'on s'interdit simplement l'usage de la méthode des coordonnées, ou même de toute espèce de calcul quelconque qui permettrait de perdre momentanément de vue la figure dont on s'occupe ; si par là vous voulez désigner cette géométrie, cultivée par les modernes, dans laquelle, au moyen des notions d'infiniment grands et d'infiniment petits, on parvient à découvrir les relations qui existent entre les diverses parties d'une figure supposée variable ; si vous voulez parler enfin de cette géométrie qui consiste à chercher dans les propriétés de l'étendue à trois dimensions, la solution des problèmes de la géométrie plane, pour repasser ensuite de celle-ci à ce qui concerne la géométrie de l'espace ; je déclare franchement que je ne saurais admettre avec vous, Monsieur, que cette géométrie ne puisse donner, à la fois, des solutions aussi simples et aussi élégantes que celles qu'on déduit du calcul.

[...]

Je pense, avec Monsieur Dupin, que chacune de ces deux sciences [géométrie pure et géométrie analytique] a des moyens qui lui sont propres, et qu'on ne pourrait, sans un grand préjudice pour l'avancement de la science, cultiver l'une ou l'autre d'une manière trop exclusive. J'ajouterai même qu'il me paraît qu'on ne saurait

---

118Poncelet, J. V., *Réflexions sur l'usage de l'analise algébrique dans la géométrie; suivies de la solution de quelques problèmes dépendant de la géométrie de la règle*, Annales de mathématiques pures et appliquées, tome VIII, n° V, 1° novembre 1817, p. 20.

trop s'efforcer de les élever , pour ainsi dire, de front, à la même hauteur ; en employant les principes généraux de l'analise à donner aux résultats de la géométrie toute l'extension qui leur manque d'ordinaire, et qui appartient essentiellement à ceux de la première ; et en se servant réciproquement, dans celle-ci, des considérations de la géométrie, soit pour simplifier l'état de la question, en la ramenant à des circonstances particulières plus facilement accessibles, soit pour faire le choix d'inconnues le plus convenable, soit enfin pour interpréter et pour développer les conséquences géométriques des résultats de ses calculs.

J'ai tout lieu de croire, Monsieur, que vous souscrirez volontiers à ces dernières réflexions, et que vous les trouverez tout-à-fait conforme à vos propres idées sur la géométrie pure et sur la géométrie analitique[119].

L'alliance de la géométrie pure et de la géométrie analytique sera garante de la plus grande réussite. Dans sa réponse, publiée à la suite de l'article, le rédacteur des *Annales* renchérit sur ce point de vue. Mais chacun propose cependant de mieux cultiver "sa" géométrie, et met en avant quelque problème qui montre la supériorité de sa méthode. Poncelet l'a mise en valeur sur deux problèmes concernant les sections coniques, Gergonne va rappeler sa résolution du problème d'Apollonius :

J'entendais, en effet, répéter sans cesse, comme une chose tout-à-fait hors de doute, que, malgré les avantages qu'offrait la géométrie analitique, sous le point de vue de la généralité et de l'uniformité des procédés, elle ne pouvait donner, pour la solution des problèmes, des constructions comparables, pour l'élégance et la simplicité, à celle dont les géomètres de l'antiquité, et ceux d'entre les modernes qui ont marché sur leurs traces, nous ont laissé de si beaux exemples ; et cependant je voyais plusieurs de ces problèmes céder sans efforts aux procédés du calcul ; je voyais ces procédés conduire à des constructions incomparablement plus simples et plus élégantes que tout ce qu'on avait connu jusqu'alors. La géométrie analitique m'avait conduit, en particulier, pour la recherche du cercle qui en touche trois autres sur un plan et pour celle de la sphère qui en touche quatre autres dans l'espace, à des constructions qui, indépendamment d'une merveilleuse simplicité,

---

119Ibid. , p. 144.

avaient à la fois l'avantage de fournir une solution directe de ces problèmes plus simples qui en forment communément le cortège[120].

Il souligne, par ailleurs, une fois de plus, que ses constructions *n'avaient pas produit la sensation* qu'il attendait. Ce qui explique l'ardeur qu'il avait mis à défendre ses méthodes.

La vérité est pourtant que je ne crois pas, dans tout ce que j'ai écrit et publié sur ce sujet, avoir dépassé les bornes prescrites par la froide raison, et avoir rien avancé que je doive aujourd'hui rétracter.

Finalement cette rivalité de méthodes plaît assez aux protagonistes, et c'est une bonne manière de faire avancer la géométrie. C'est ce qui conclut cette longue réponse :

De mon côté, je ne négligerai aucune des occasions que mes courts loisirs pourront m'offrir, pour multiplier les exemples du genre d'application de l'analise à la géométrie que je cherche à faire prévaloir ; et j'ose croire que la diversité de nos méthodes ne fera jamais naître d'autre rivalité entre nous que celle du zèle pour l'avancement de la science.[121]

Les *Annales* s'offrent ainsi comme tribune au débat, et très rapidement les articles s'y succéderont, souvent à propos du problème des trois cercles. L'on doit reconnaître que peu d'analystes s'y intéressent. Gergonne avait-il raison de soutenir que sa solution analytique devait clore la question, ou bien devait-on reconnaître que finalement, sur ce sujet, la simplicité et l'élégance était plutôt dans le camp de la géométrie pure ?

S'agit-il alors de la géométrie "moderne" défendue par Poncelet, ou de celle "des Anciens" ? Certains vont jusqu'à soutenir que cette dernière suffit à faire naître une géométrie puissante, aussi puissante que la géométrie analytique.

Un des premiers à illustrer ce point de vue est Durrande, professeur de mathématiques spéciales au collège royal de Cahors. Un petit mémoire, sur les contacts des cercles, des sphères, des cylindres et des cônes, est publié sous son nom, dans les *Annales*. A la manière de Gaultier de Tours, il développe une théorie pour traiter de ces contacts, et plus particulièrement les problèmes sur lesquels Gergonne s'est particulièrement illustré. Le professeur de Cahors reconnaît l'éminence de la démonstration analytique :

Mais indépendamment de leur élégant laconisme qui permet d'en réduire l'énoncé à quelques mots, ce qui distingue éminemment les constructions de M. Gergonne, ce qui leur assure une incontestable

---

[120]Gergonne, J. D., *Réflexions sur l'article précédent*, Annales de mathématiques pures et appliquées, tome VIII, n° V, novembre 1817, p. 157.
[121]Ibid. p. 161

supériorité, c'est que, tandis que jusqu'ici on n'était généralement parvenu à résoudre ces problèmes qu'en les ramenant successivement à d'autres, de plus en plus faciles ; ce qui en définitive, rendait la construction assez compliquée.[122]

Cependant puisqu'il s'agit de rivaliser, l'auteur du mémoire se place sur le même terrain et dans les mêmes termes :

Dans le dessein de venger l'ancienne géométrie du reproche d'impuissance dont ces mêmes problèmes ont semblé offrir un nouveau motif, je ne puis donc rien faire de plus convenable que de lutter avec elle seule contre ce que la géométrie analitique offre peut-être de plus élégant, et de montrer que par de simples comparaisons de triangles, on peut facilement être conduit à ces mêmes constructions auxquelles M. Gergonne est parvenu par une voie tout à fait différente[123].

Il va s'appuyer sur la théorie des pôles et des polaires, des axes et centres radicaux, mais démontrées non pas par *les méthodes d eMonge,* mais par celles de l'ancienne géométrie. Il fera par ailleurs œuvre utile en mettant à la portée, même de débutants, *des théories dont chaque jour voit étendre les applications et auxquelles leur extrême fécondité méritera sans doute bientôt une place distinguée dans tous les ouvrages destinés à l'enseignement des principes de cette belle science.*

Nous retrouvons les présupposés pédagogiques ,et s'il ne nous appartient pas ici d'en juger le bien fondé, il reste que la théorie développée ne nécessite effectivement que les *Éléments* d'Euclide, ce qui n'est déjà pas rien, mais assaisonnés d'une vision moderne de l'espace comme nous avons déjà pu le souligner, et ce principe de transformation de cercles en droites ou points, avec conservation de certaines propriétés. Nous sommes loin de la géométrie des Anciens. En fait le vocabulaire est un peu différent, mais la théorie développée est proche de celle de Gaultier de Tours, et la solution proposée presque équivalente. Pour cela même, elle est aussi proche de la construction de Gergonne, ce que reconnaît d'ailleurs l'auteur :

Cette solution est exactement celle qui a été donnée par M. Gergonne dans les Mémoires de Turin.

Ces solutions sont en fait caractérisées par la recherche simultanée des deux cercles qui toucheront les cercles donnés avec la même combinaison de contacts, pour reprendre l'expression de Gaultier de Tours, en construisant leurs

---

[122]Durrande, J. B., *Théorie élémentaire des contacts des cercles, des sphères, des cylindres et des cônes,* Annales de mathématiques pures et appliquées, tome XI, n° I, juillet 1820, p. 3.
[123]Ibid. p. 3 et 4.

points de contacts. Examinée sans passion, la recherche analytique de Gergonne, qui justifie sa construction, apporte peu en regard d'une recherche directement géométrique, si ce n'est l'exemple d'un calcul élégant et habile.

La discussion même du nombre de cas possibles n'est pas supérieure, chacun soulignant, sans rentrer dans le détail , que quelques unes des droites qui doivent déterminer les points de contact sur les cercles peuvent, au lieu d'être des sécantes, être simplement tangentes, ou même ne pas rencontrer les cercles. Dans ces cas le nombre des solutions diminue ou devient nul.

Le problème est à la mode, et chacun veut proposer une démonstration, de géométrie non analytique, plus simple que la précédente. Elles ne le sont pas toujours et manquent souvent de généralité. Poncelet cependant, qui avait promis une démonstration, différente bien sûr de celle produite dans la correspondance sur l'École polytechnique, ce temps est désormais lointain, la communique au rédacteur des *Annales* qui la fait paraître, en écho à celle de Durrande[124]. Le rapprochement, souligne-t-il, est curieux. Le lecteur ne peut qu'être frappé par l'analogie du support géométrique, l'un des auteurs défendant pourtant la nouvelle géométrie, d'un autre niveau que celle des Anciens, l'autre soutenant qu'il s'agit en fait de la géométrie des Anciens.

Poncelet propose lui aussi une construction des points de contact du cercle cherché avec les cercles donnés.

C'est la démonstration que Cauchy avait remarquée dans le mémoire présenté à l'Académie royale des sciences en 1820, repris dans le tome II des Applications d'analyse et de géométrie.

Il remarque que, deux cercles étant tracés sur un plan, les cordes et tangentes homologues inverses pour l'un des centres de similitude, concourent sur leur axe radical.

Ainsi, trois cercles C, C ', C " étant donnés, l'on détermine celui des quatre axes de similitude qui correspond à l'espèce de contact qu'on se propose d'obtenir.

Puis, prenant un point arbitraire M sur le plus grand des cercles donnés, C, on construit son homologue inverse M ' sur C ', puis l'homologue inverse M" de M ' sur C ", puis enfin l'homologue inverse N de M" sur C.

Si N et M se confondent, M, M' et M" seront les points de contact du cercle cherché avec les trois cercles donnés. Un simple tracé de trois droites aura résolu le problème.

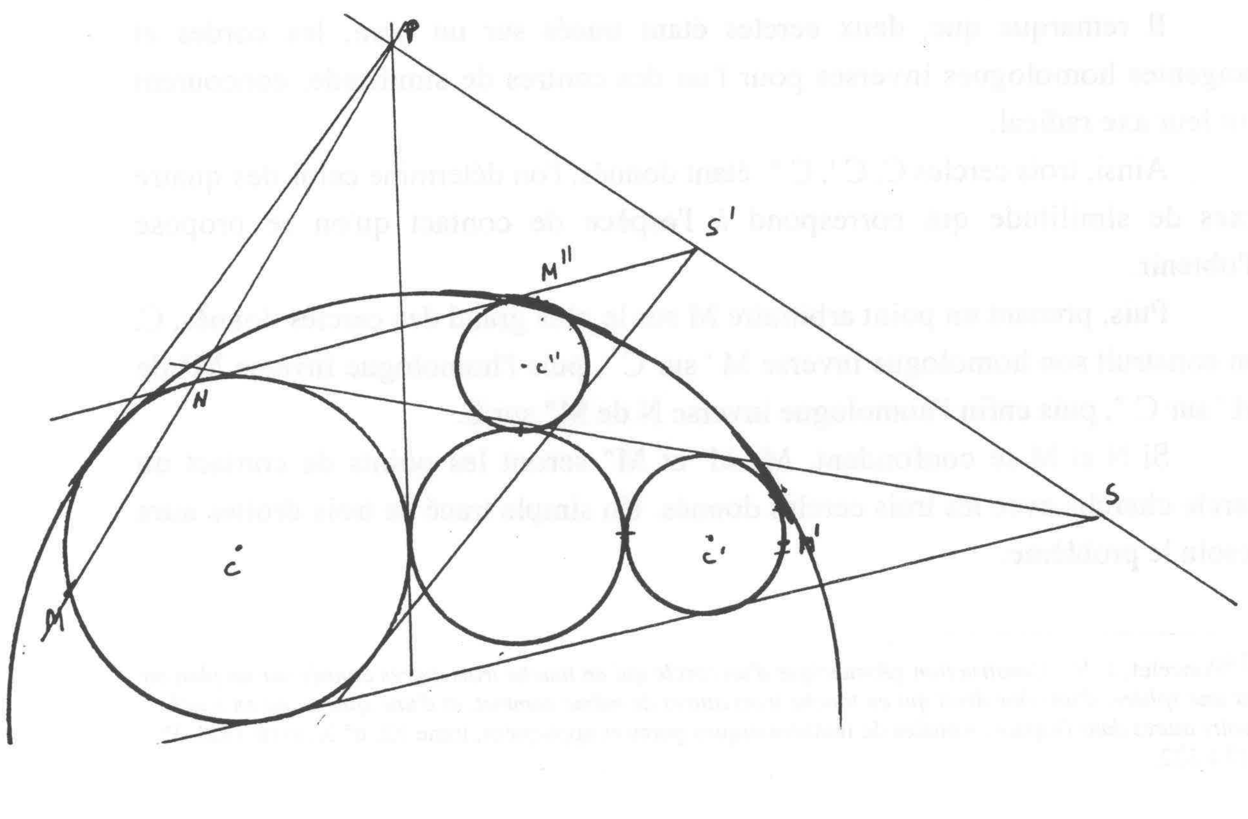
124Poncelet, J. V., *Construction géométrique d'un cercle qui en touche trois autres donnés sur un plan ou sur une sphère, d'un cône droit qui en touche trois autres de même sommet, et d'une sphère qui en touche quatre autres dans l'espace*, Annales de mathématiques pures et appliquées, tome XI, n° X, avril 1821, P; 317 à 322.

Si N et M ne se confondent pas, la droite (NM) coupera l'axe de similitude en un point P. De P, menons les tangentes au cercle C ; les points de contact obtenus, sont aussi les points de contact des cercles cherchés avec le cercle A.

L'affirmation est un peu brutale. Dans son mémoire à l'académie des sciences, les justifications nécessaires ont été développées. Examinons les données :

Les points M, M', M", N, homologues inverses sont situés sur un même cercle (s), ceci a été démontré. Si l'on prenait un autre point de départ sur le cercle C, on obtiendrait un autre cercle (s'). Et ces deux cercles ont pour axe radical l'axe de similitude choisi. Ainsi tous les cercles (s), (s'), ... font partie du faisceau de cercles associé à cet axe radical. Le cercle cherché, tangent aux trois cercles, fait partie de ce faisceau (c'est le cas où M et N sont confondus.). Prenant l'un de ces cercles (s), la droite (MN) est l'axe radical de (s) et C. L'intersection P de (MN) et de l'axe de similitude est donc le centre radical des cercles (s), C, et du cercle cherché tangent à C. Le point P est invariant car c'est le pôle de la corde dite de contact, joignant les points de contact des deux cercles cherchés avec le cercle C. Les tangentes à C, issues de P, donnent donc bien les points de contact sur C.

Il faut en principe recommencer la même opération avec les cercles C' et C". En fait il suffit de prendre sur ces deux cercles les cordes homologues inverses de celles déterminées sur C. Ces cordes seront d'ailleurs concourantes au centre radical des trois cercles C, C', C".



La même opération répétée pour les trois autres axes de similitude donnera les huit cercles cherchés.

Poncelet nous fait remarquer que cette construction n' exige que l'emploi d'une simple règle, dès lors que les centres de similitudes sont donnés. Son procédé s'étend de plus par la simple utilisation du principe de continuité aux polygones inscrits à une conique, dont les côtés sont assujettis à pivoter autour de points fixes situés en ligne droite. Ce qu'il a fait dans le mémoire dont Cauchy fut le rapporteur.

Ce problème des trois cercles qui avait déjà occupé le jeune Poncelet, sortant de l'École polytechnique, revient périodiquement dans ses réflexions. Il n'a pas renié sa solution de jeunesse, qu'il reproduit dans le tome I d'*Applications d'analyse et de géométrie*, dans les lemmes de géométrie synthétique. Sous le même titre, il produit une autre solution, plus directe puisqu'elle donne une construction des points de contact du cercle cherché avec les cercles donnés. En 1811, il s'était ramené, selon le procédé de Viète, à un cercle passant par un point donné et tangent à deux cercles donnés. La nouvelle solution repose un peu cependant sur les mêmes propriétés de géométrie élémentaire. Pour cette raison , peut-être, les critères très subjectifs d'élégance et d'esthétique étant plus ou moins affaire d'habitude, cette construction semble un peu lourde, en comparaison de celles qui viennent d'être étudiées.

Dans le tome II, de son traité, s'excusant presque, il revient sur le problème, nous l'avons dit, reproduisant son mémoire à l'Académie. Il y fournit une analyse intéressante:

> *Les diverses propriétés qui nous ont occupés dans ce qui précède conduisent d'une manière si naturelle, si directe, à celles du cercle tangent à trois autres situés sur un plan, que nous ne croyons pas devoir nous abstenir de les rapporter ici, quoiqu'elles appartiennent à un sujet tant de fois traité par de savants et illustres géomètres. D'ailleurs, comme ces propriétés se rattachent d'une manière intime à la théorie des cordes et des tangentes communes aux circonférences de cercle, et que nous aurons même occasion par la suite de les étendre aux sections coniques en général, je pense qu'on me pardonnera facilement l'espèce de digression qu'elles amènent pour le moment*[125].

---

[125]Poncelet, J. V., *Application d'analyse et de géométrie*, tome II, ouvrage cité, p. 416.

Considérant alors le système constitué de trois cercles (C), (C '), (C") donnés sur un plan, et rappelant que les centres de similitude de ces cercles pris deux à deux sont répartis sur quatre droites qui sont les axes de similitude, il va s'attacher aux propriétés de l'axe renfermant les trois centres de similitude directe, S, S ' et S", sachant que ce qui sera dit pour cet axe s'appliquera immédiatement aux trois autres.

Il note douze propriétés, qui résument selon lui tout ce que l'on connaît d'intéressant sur le problème, pointant même les propriétés qui ont été utilisées par Gergonne, et celles qui ont été utilisées par Gaultier de Tours, désignant les démonstrations qui ont retenu son attention :

Voilà en peu de mots, tout ce qu'on connaît d'intéressant sur le cercle tangent à trois autres décrits sur un plan. Les Prop. III, VIII et IX donnent la solution du problème correspondant qui appartient à M. Gaultier de Tours, mais un peu généralisée ; les VII° et X° donnent une solution qui revient, quant au fond, à celle qu'a présentée du même problème, M. Gergonne, rédacteur des Annales de Mathématiques[126].

Voici ces douze propriétés :

1° Le centre de similitude s des cercles tangents (c) et (c') est, à la fois, sur chacune des trois cordes communes aux cercles proposés, et se trouve par conséquent à leur intersection mutuelle.

2° La corde commune aux mêmes cercles passe à la fois par S, S', S" et se confond par conséquent avec l'axe de similitude SS'S"des cercles proposés.

3° La ligne des centres de ces cercles, qui passe par s, est par suite perpendiculaire à cet axe.

4° Si l'on trace le cercle T T ' T" ou (s), qui a s pour centre et pour rayon une quelconque des tangentes aux cercles (C), (C'), (C"), issues de ce même point, il coupera à la fois orthogonalement ces trois cercles, et aura SS'S" pour corde commune avec les cercles tangents (c) et (c').

5° Si l'on trace les trois cercles (S), (S'), (S") [127]*qui appartiennent aux cercles (C), (C'), (C"), pris deux à deux, ils auront respectivement même corde commune avec ceux qui leur correspondent, et couperont à la fois orthogonalement les cercles (c), (c') et (s) ; de*

---

[126]Ibid. p.418.

[127]Il s'agit des cercles que Gaultier de Tours nomme respectivement S rad.(c), S' rad.(c) et S" rad.(c). Poncelet se refuse à utiliser le terme "radical "dans son étude, préférant par exemple "corde commune" en lieu "d'axe radical", car son étude se veut générale et doit pouvoir s'étendre sans changement aux coniques.

sorte que, ayant leurs centres sur l'axe de similitude SS'S", ils appartiendront à la série orthogonale réciproque de ces cercles,[128] *et auront par conséquent la droite des centres c et c' pour corde commune.*

6° Les trois points de contact A, A', A" ou B, B', B", qui appartiennent à chaque cercle tangent aux proposés sont, deux à deux, sur trois droites concourant respectivement aux centres de similitude S, S', S" qui leur correspondent, en sorte que les trois cordes de contact AB, A'B', A"B" sont, dans le même ordre, homologues inverses.

7° Ces cordes de contact passent toutes trois par le centre de similitude s des cercles (c) et (c'), c'est à dire par le point de concours unique des cordes deux à deux communes aux cercles proposés.

8° Les pôles P, P', P" de ces cordes respectives sont tous trois rangés sur la corde commune à (c) et (c'), c'est-à-dire sur l'axe de similitude SS'S" que l'on considère.

9° Les cordes Tt, T 't', T "t", deux à deux communes au cercle (s) et aux cercles proposés, c'est-à-dire les polaires qui correspondent à ces cercles et au point s, vont concourir respectivement aux pôles P, P', P" dont il s'agit.

10° Les pôles π, π', π" de l'axe de similitude SS'S", dans chaque cercle proposé, sont situés respectivement sur les trois cordes de contact AB, A'B' et A"B".

11° Enfin, ces mêmes pôles sont deux à deux homologues inverses, c'est-à-dire qu'ils sont, dans le même ordre, sur des droites passant par les centres de similitude S, S', S" correspondants.

A ces diverse propositions on pourrait joindre la suivante, bien facile à démontrer :

12° Les centres des cercles tangents (c) et (c') se trouvent à la fois situés sur trois sections coniques, ayant chacune pour foyers deux des centres des cercles proposés, et pour grand axe la différence des rayons qui leur correspondent respectivement.

Il nous a paru intéressant de citer ces propriétés in extenso, car à peu de choses près, il s'agit bien de tout ce qui peut être utile pour effectuer l'une ou l'autre des constructions qui pourront être imaginées du problème des trois cercles. Seul manque au tableau ce qui sera lié à l'inversion ; pourtant, à vrai dire, c'en est un peu aussi une conséquence.

---

[128]Il s'agit de la suite des cercles orthogonaux à tous ceux du faisceau contenant (c), (c') et (s), qui sont nommés radicaux réciproques par Gaultier de Tours.

Après ce panorama, Poncelet propose la construction que nous avons étudiée dans les *Annales de mathématiques*, insistant sur l'avantage qu'elle présente à ses yeux : elle peut être exécutée avec la règle seule.

Poncelet est un des premiers à s'être occupé des problèmes constructibles à la règle seule, influencé, peut-être par les travaux de Mascheroni,[129] puis de quelques autres à sa suite, sur la question des problèmes constructibles à l'aide du seul compas. C'était sans doute aussi une manière de mettre en œuvre la théorie des transversales. Quoiqu'il en soit, la première réponse à Gergonne dans l'article de 1817, portait en sous-titre : *suivie de quelques problèmes dépendant de la géométrie de la règle*. Sa solution du problème des trois cercles se place dans ce cadre.

Les noms de Poncelet et Steiner seront associés à ce genre de construction à la règle seule, pour peu qu'un cercle et son centre soit donnés dans le plan. En 1833, Steiner faisait d'ailleurs paraître un petit ouvrage sur le sujet : *Constructions géométriques à la règle seule, un cercle fixe et son centre étant donnés*[130].

Nous avions déjà remarqué que les situations et les théories de Poncelet et Steiner, l'un en France, l'autre en Allemagne, étaient assez comparables. C'est justement un article de Steiner, relaté par Gergonne qui va clore, en quelque sorte, le débat sur le problème des trois cercles dans les *Annales de mathématiques*.

Cet article [131]est la deuxième publication de Steiner dans le journal de Crelle, en Allemagne, et Gergonne, dans le numéro d'avril 1827 de ses *Annales* en présente de façon détaillée la substance[132]. Steiner s'est attaqué au problème de Malfatti[133] , et expose ici les théories sur lesquelles repose tout son travail.

Gergonne est admiratif devant la qualité et la généralité du travail du mathématicien suisse, qui repose sur des théories, somme toute, élémentaires:

> *On conviendra que des théories qui permettent d'atteindre sans effort à des questions aussi éminemment difficiles doivent être considérées comme fondamentales dans la géométrie et doivent mériter, à ce titre, toute l'attention des géomètres. Ces théories ne*

---

[129]Mascheroni, L., *Géométrie du compas*, ouvrage traduit de l'italien par M. Carette, Paris, 1798.

[130]Steiner, J., *Geometrical constructions with a ruler, given a fixed circle with its center*, traduit de l'allemand par M. E., Stark, New York, 1950.

[131]Steiner, J., *Einige geometrische Betrachtungen*, article cité.

[132]Gergonne, J. D., *Théorie générale des contacts et des intersections des cercles, par M. Steiner, extraite du journal allemand de M. Crelle,* Annales de mathématiques pures et appliquées, tome XVII, n° X, avril 1827.

[133]Il s'agit d'inscrire, dans un triangle quelconque, trois cercles tels que chacun soit tangent aux deux autres et à deux côtés du triangle. Steiner a résolu très simplement ce problème et ce fut considéré comme une très belle réussite. Dans le même article il a résolu un autre problème réputé difficile, dit problème de Pappus, où il établit des relations entre les rayons des cercles en chaîne, inscrits entre deux cercles.

sont pourtant autres que celle des "centres, axes et plans de similitude", celle des "axes, plans et centres radicaux", celle enfin des pôles, polaires, plans polaires et polaires conjuguées," que nous avons si souvent recommandées à l'attention de nos lecteurs, et dont on a déjà tiré si bon parti dans le présent recueil, mais que l'auteur a tout à la fois, étendues et simplifiées d'une manière assez notable.

Nous pensons donc faire une chose très-utile pour le progrès de la géométrie pure, et conséquemment très-agréable à nos lecteurs, en offrant ici, dans un cadre resserré, les principaux points de la doctrine de M. Steiner[134].

Les éléments sur lesquels s'appuie Steiner, sont sans aucun doute, à quelque chose près, assez bien connus de la plupart de ses lecteurs, au moment où Gergonne écrit son texte. Ce dernier a cependant l'habileté, dans sa présentation, de reprendre à travers l'œuvre de Steiner, ce qui a pu être l'apport de l'un ou de l'autre, posant ce texte comme la somme de ce qui peut être connu sur les théories des similitudes, axes et centres radicaux, pôles et polaires. Il sélectionne aussi le vocabulaire le plus adapté : c'est dans ce texte que Steiner propose le mot "puissance" d'un point par rapport à un cercle, qui sera aussitôt adopté ; en revanche, Gergonne préfère "axe radical", à "la droite d'égale puissance" du même Steiner. Il n'hésite pas non plus à substituer à quelques définitions embarrassées celles des cercles radicaux de Gaultier de Tours. Il s'agit d'un travail en quelque sorte pédagogique, de mise au clair d'une théorie. Ce qui n'est pas rien, même si Steiner, dans l'article cité du *Journal* de Crelle, va très au-delà.

L'on peut s'étonner que notre montpelliérain ait attendu la publication d'un allemand, même brillant, pour exposer des théories qui mettent en avant la qualité et la puissance d'une géométrie purement synthétique. Il va jusqu'à conseiller aux professeurs de la cultiver auprès de leurs élèves :

Ceux de M. M. les Professeurs de nos écoles publiques qui sont dans l'usage de donner des devoirs journaliers à leurs élèves, usage qui devrait être universellement adopté, trouveront dans ce qui va suivre d'abondantes ressources pour les exercer d'une manière plus profitable qu'ils ne pourraient le faire avec la plupart des problèmes qu'on leur donne ordinairement, et dont la difficulté constitue souvent tout le mérite[135].

---

[134]Gergonne, J. D., *Théorie générale des contacts et des intersections des cercles*, article cité, p. 286.
[135]Ibid. p.287.

Cette géométrie est ainsi recommandée pour la formation des jeunes esprits à la géométrie ; ce n'est rien d'autre que ce que défendent Poncelet et Steiner.

C'est peut-être un moyen habile pour Gergonne, sous le prétexte de faire connaître un grand géomètre allemand, de rendre hommage malgré tout à cette géométrie qu'il a souvent sous-estimée. C'est d'autant plus remarquable que le texte s'achève sur une construction du problème des trois cercles, dans laquelle il reconnaît sa propre démonstration, dans un registre de géométrie pure. Implicitement, la partie analytique a disparu.

> *Problème : décrire un cercle qui en touche trois autres donnés sur un même plan .*
>
> *Solution : comme on sait faire passer une circonférence par trois points donnés, tout se réduit évidemment à construire les points de contact du cercle cherché avec le cercle donné.*
>
> *Veut-on que le cercle cherché touche les trois cercles donnés de la même manière, on joindra leur centre radical aux pôles de leur axe de similitude directe, pris par rapport à ces trois cercles, par des droites, dont les intersections respectives avec eux, déterminent leurs points de contact avec le cercle cherché.*
>
> *Veut-on, au contraire, que le cercle cherché touche deux des cercles donnés de la même manière et le troisième d'une manière différente, il s'agira uniquement de substituer, dans la construction, à l'axe de similitude directe, celui des trois axes de similitude inverse qui contiendra le centre de similitude directe des deux cercles qui devront être touchés de la même manière par le cercle cherché.*
>
> *Chaque construction donnera six points de contact, relatifs à deux cercles qui résoudront le problème ; mais on parviendra aisément à distinguer les trois points de contact relatifs à un même cercle en observant que les droites qui les joignent aux centres des cercles auxquels ils appartiennent respectivement, doivent concourir en un même point, centre du cercle cherché.*
>
> *Tout amour propre mis à part, cette construction, que nous avons donnée pour la première fois il y a plus de douze ans (mémoires de Turin pour 1814), nous paraît de beaucoup préférable à toutes celles qu'antérieurement et postérieurement on a données du même problème*[136].

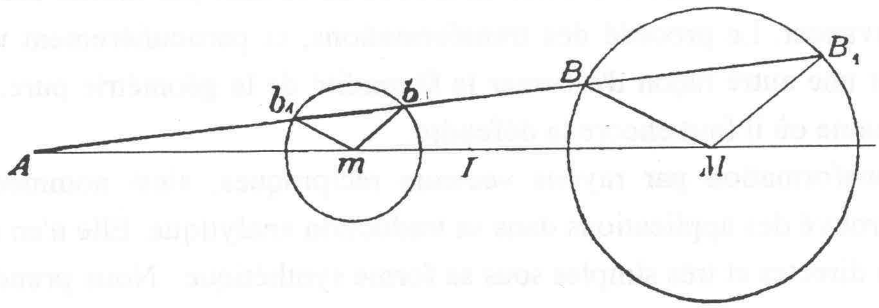
---

[136]Ibid. p. 305.

L'admiration de Gergonne n'est pas feinte, d'autant qu'elle flatte son amour propre.

Dans ce même article Steiner évoquait une propriété qu'il nommait puissance jointe de deux cercles, que Gergonne n'a pas retenue, car elle apparaît très incidemment, et ne trouve pas ici d'application particulière. C'est pourtant un point de départ de ce qui deviendra inversion ou transformation par rayons vecteurs réciproques.

Dans la figure suivante, le produit $Ab.AB$ est égal au produit $Ab_1.AB_1$ et à un nombre constant a^2. C'est ce nombre a^2 qui est nommé la puissance jointe des deux cercles m et M.



Si l'on choisit pour pôle d'inversion le centre de similitude A, et comme puissance ou rapport d'inversion a^2, le cercle m est l'inverse du cercle M, b et B sont inverses (et antihomologues).

Une utilisation de l'inversion :

Nous avons évoqué comment peu à peu cette nouvelle transformation va trouver sa place. Dans ces années proches du milieu du siècle, les enrichissements réciproques des géométries analytique et synthétique sont reconnus, mais les défenseurs des deux méthodes ne restent pas moins désireux de les faire avancer. Le procédé des transformations, et particulièrement ici de l'inversion est une autre façon d'affirmer la fécondité de la géométrie pure, c'est aussi un domaine où il faut encore la défendre.

La transformation par rayons vecteurs réciproques, ainsi nommée par Liouville, a trouvé des applications dans sa traduction analytique. Elle n'en a pas moins de très directes et très simples sous sa forme synthétique. Nous prendrons pour exemple ce qu'en donne, H. A. Newton, de l'université de New Haven, dans *The Mathematical Monthly*, revue qui paraît à Cambridge (Massachusetts), à partir de 1858, s'inspirant du modèle des journaux scientifiques européens. Elle s'adresse à des étudiants et des professeurs, et se veut une tribune de diffusion et de discussions des nouvelles théories, à un niveau universitaire, un peu comme les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, créées par Terquem, en 1842, en France.

Dans le numéro d'avril 1859, H. Newton propose de décrire un cercle tangent à un cercle donné, par une méthode nouvelle qui est celle de la transformation par rayons vecteurs réciproques, dans le cas où deux des cercles donnés sont sécants[137].

Le principe de cette transformation est peu connu, il en expose donc d'abord les éléments, s'appuyant sur une géométrie très élémentaire.

[137]Newton, H. A., *To describe a circle tangent to three given circles*, The mathematical Monthly, Vol.1, n° VII, Cambridge, Mass.,1859.

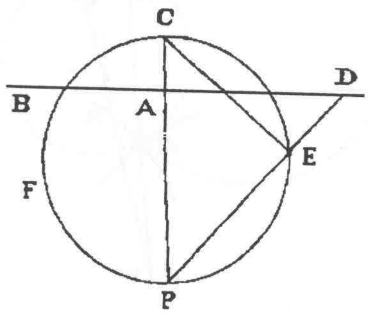
Soit un point donné P, appelé le pôle, et "un carré arbitraire pris comme unité d'aire". Deux points A et B sont dits réciproques l'un de l'autre, si, étant alignés avec P, " le rectangle PA.PB est égal à l'unité d'aire choisie". L'attache à la géométrie des anciens se marque même dans l'expression. Il s'agit, pourtant, d'aborder ici une notion des plus contemporaines.

Deux courbes sont dites réciproques l'une de l'autre quand le réciproque de chaque point de l'une est sur l'autre.

La première propriété démontrée est la suivante :

La réciproque d'une droite est une circonférence qui passe par le pôle. Nous ajouterions : lorsque la droite ne passe pas par le pôle.

Soit P le pied de la perpendiculaire menée de P à la droite donnée. Et nommons C le réciproque de A. Traçons le cercle de diamètre CP. Soit D un point quelconque de la droite donnée, et E son réciproque. Il s'agit de montrer que E est sur le cercle tracé.



On démontre facilement, à l'aide des triangles semblables PEC et PAD que l'angle CEP est droit, donc E est bien sur le cercle. La circonférence CFP est donc la réciproque de la droite AB.

Deux corollaires suivent :

Une droite passant par P est sa propre réciproque.

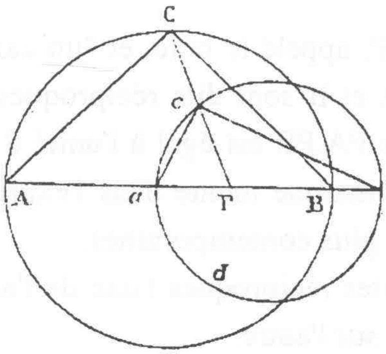
Des circonférences réciproques de droites parallèles sont tangentes entre elles au pôle P.

La deuxième propriété s'énonce :

La réciproque d'une circonférence ne passant pas par le pôle est une circonférence.

Une démonstration est faite pour P intérieur à la circonférence, le cas où P est extérieur s'en déduit facilement. On s'appuie là encore sur les triangles semblables, et des égalités d'angles.

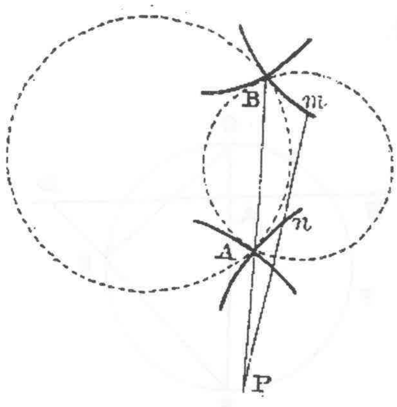
Le cercle ABC est donné, (AB étant un diamètre passant par P). a et b sont les réciproques de A et B. On trace le cercle de diamètre ab ; on montre que le réciproque c de C est sur ce cercle.



Enfin une dernière propriété est énoncée :

Si deux courbes se coupent suivant un certain angle, leurs réciproques se coupent suivant le même angle.

La démonstration est intéressante, parce que très intuitive.



Soit deux courbes qui se coupent en A. Leurs réciproques se couperont en B, le réciproque de A. Si n est un point d'une des courbes, et M son réciproque sur l'autre courbe, m, n, A, B sont sur un même cercle puisque

PA.PB = Pm.Pn.

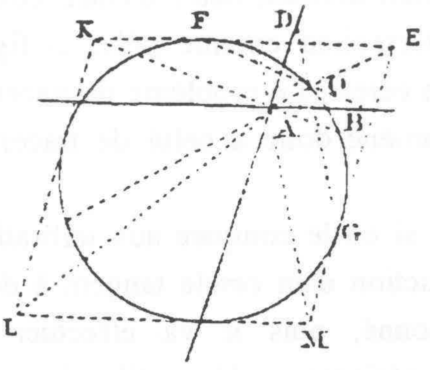
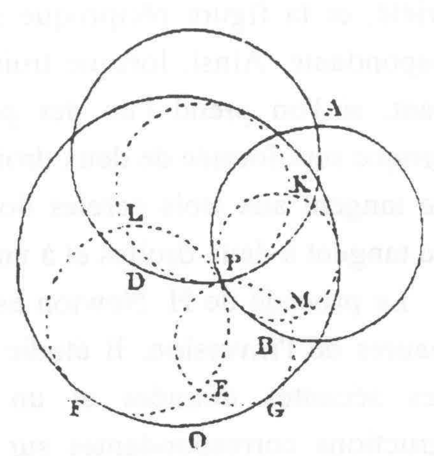
Si m et n se rapprochent de B et A jusqu'à coïncider avec eux, le cercle ABmn devient tangent à l'une des courbes en A, et à sa réciproque en B. Un second cercle peut être tangent à la deuxième courbe en A et à sa réciproque en B. Et bien sûr, l'angle fait par ces circonférences en A est "évidemment" égal à l'angle fait en B.

Cette conservation des angles, (donc des contacts), est une des propriétés importantes de l'inversion. C'est une transformation conforme et c'est ce qui entrait en jeu dans le cas des projections stéréographiques, leurs lointains ancêtres.

A partir de là, H. Newton établit un tableau à deux colonnes, très proches de ceux de Gergonne pour les propriétés duales, montrant quelques exemples de correspondances entre une figure sur laquelle on a pu établir facilement quelque propriété, et la figure réciproque sur laquelle on pourra induire la propriété correspondante. Ainsi, lorsque trois cercles sont donnés, deux d'entre eux se coupant, si l'on prend l'un des points d'intersection comme pôle, la figure réciproque sera formée de deux droites et d'un cercle. Le problème de tracer un cercle tangent aux trois cercles donnés se ramène donc à celui de tracer un cercle tangent à deux droites et à un cercle.

Le procédé de H. Newton est original, si on le compare aux utilisations ultérieures de l'inversion. Il étudie la construction d'un cercle tangent à deux droites sécantes données et un cercle donné, puis il va effectuer les constructions correspondantes sur la figure réciproque. Une utilisation plus classique de l'inversion consistera, par la suite, dans la transformation des trois cercles donnés en trois autres cercles plus simples, ou en une droite et deux cercles ou deux cercles et une droite ... selon les cas, à tracer l'inverse du cercle cherché, puis à le transformer par la même inversion pour revenir à la figure initiale ; et nous remarquerons que sous l'angle de la faisabilité de la construction, ce ne sera pas toujours très simple.

Voici une traduction du texte de H. Newton, en deux colonnes, respectant la présentation de l'article.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Soit AB et AD les deux droites, et GOF le cercle donné. Tracez deux droites parallèles à AB, touchant le cercle GOF, et aussi deux parallèles à AD, tangentes à GOF. Tracez les droites passant par A et chacun des points d'intersection, E, K, L, et M de ces tangentes. Les points où elles coupent la circonférence GOF sont les points où les cercles cherchés la touchent. Les points de contact sur AB et AD peuvent être ainsi trouvés. Que la droite AE détermine le point de contact O sur GOF, et que la parallèle à AD passant par E et tangente à GOF le touche en G. Tracez la droite GO, qui coupe AD en D. De la même façon, déterminez B sur AB. Le cercle passant par D, B, O, touchera en ces points les droites données et le cercle donné.</td>
<td>Soit PAB et PAD les deux cercles qui se coupent et GOF le troisième cercle. Tracez deux cercles touchant le cercle PAB en P et le cercle GOF ; aussi deux cercles touchant PAD en P et tangent à GOF. Tracez les cercles passant par P, A et chacun des points d'intersections de ces cercles E, K, L, M. Les points où ils coupent la circonférence GOF sont les points où les cercles cherchés la touchent. Les points de contact sur PAB et PAD peuvent être ainsi trouvés. Que le cercle PAE détermine le point de contact O sur GOF, et que le cercle passant par E tangent à PAD en P et tangent à GOF touche GOF en G. Tracez le cercle passant par P, G, et O, qui coupera le cercle PAD en D. De la même façon déterminez B sur PAB. Le cercle passant par D, B et O touchera les trois cercles donnés. Si l'un ou plus de ces trois cercles étaient remplacés par des droites cette construction serait applicable avec de légères modifications.</td>
</tr>
</table>

Les autres cercles pourront bien sûr être construits de la même façon avec les autres points.

Cette construction est un peu délicate, en raison du grand nombre de cercles qu'il faut tracer, et des constructions auxiliaires pour y arriver. Elle est cependant assez remarquable, même s'il s'agit d'un cas particulier. Elle évite une initiation aux théories des centres radicaux, centres de similitudes, pôles et polaires, même si le mathématicien initié reconnaîtra les constructions déjà effectuées à l'aide de ces éléments. Elle n'évite pas certaines questions. Comment trace-t-on par exemple un cercle tangent à un cercle en un point donné P, et à un autre cercle donné ? Quels sont les éléments de géométrie qui entrent en jeu ? On peut penser qu'il s'agit de géométrie élémentaire, et cette construction ne serait sans doute pas considérée comme plus élégante ou plus simple que d'autres selon les critères de Gergonne par exemple. Il serait tentant aussi d'étudier si, dans le cas général de cercles qui ne sont pas forcément sécants, une construction de ce type pourrait convenir.

Cet article a au moins un mérite, c'est celui de mettre en évidence un autre moyen de découverte en géométrie. C'était rappelons le un des critères mis en avant pour la défense de la géométrie analytique, sa puissance d'invention et de découverte ; ce fut une des raisons de la mise en œuvre de la géométrie supérieure. Ici l'inversion, ou transformation par rayon vecteurs réciproques, se présente comme une nouvelle méthode de découverte : l'étude d'un problème simple donne la solution d'un problème plus compliqué. C'est ainsi que Magnus rappelons le avait intitulé un de ses articles sur l'inversion : *Nouvelle méthode pour découvrir des théorèmes de géométrie*[138].

Ainsi là où l'histoire paraissait terminée, une autre voie de recherche apparaît.

Les grands problèmes n'ont jamais de fin, et celui des trois cercles va continuer de faire courir les géomètres. En fait, le registre sera différent. La géométrie synthétique a trouvé sa place, il s'agit maintenant de tirer parti au mieux des méthodes nouvelles, mais surtout de les diffuser, de les enseigner. Ce sera le nouveau rôle de notre problème : un appui pour la pédagogie, un exemple pour l'apprentissage des méthodes en géométrie.

---

[138] Article déjà cité.

Chapitre V : Un classique de la géométrie supérieure, un problème exemplaire.

1 . Les solutions synthétiques trouvent un point d'achèvement

Aux environs des années 1850, la géométrie synthétique a trouvé sa place à part entière dans le monde des géomètres. En France, nous l'avons noté, la chaire de Géométrie supérieure créée en 1846 va contribuer à la répandre. C'est ainsi que Chasles écrira dans ses *Réflexions sur les progrès de la géométrie* :

> *La Géométrie moderne, enfin, dont les premiers pas datent de ce siècle, et dont l'avenir paraissait douteux à la plupart des géomètres, exclusivement occupés des méthodes analytiques, a trouvé néanmoins dans les efforts de quelques-uns, plus confiants, en France et à l'étranger, des ressources dont la puissance s'est accrue avec une continuité qui assure désormais sa marche ascendante.*[139]

Il est aussi reconnu que la géométrie synthétique et la géométrie analytique seront d'autant plus puissantes qu'elles seront cultivées de pair. D'autres voies de la géométrie se sont aussi ouvertes en ce XIX° siècle où le débat mathématique s'est largement étendu grâce à la diffusion accrue de journaux mathématiques, grâce aussi sans doute au regroupement de personnalités hors du commun sur des sites universitaires, ou au sein d'écoles, en France comme à l'étranger. Les journaux scientifiques, en particulier, par leur style, ont permis à des théories balbutiantes, ou en dehors des normes officielles de se faire connaître et de se développer.

Cependant la Géométrie supérieure, dont Chasles défend si bien la valeur doit continuer de se développer, et suivre les progrès des autres domaines des mathématiques. Si nous en croyons l'auteur du *Rapport sur les progrès des mathématiques,* ceci n'est pas favorisé, une fois de plus en France, où l'on tarde à ouvrir des chaires, à l'Université, pour ces nouveaux enseignements.

A propos de la théorie des fonctions transcendantes, et de la théorie des invariants, il déclare :

---

139 Chasles, M., *Rapport sur les progrès de la géométrie*, Paris, Imprimerie nationale, 1870, p. 375-376.

Ces deux branches considérables des mathématiques, qui s'offrent au secours de la géométrie, particulièrement dans l'étude des lignes et des surfaces courbes, peuvent contribuer non-seulement à ses acquisitions partielles, mais au développement aussi de ses propres méthodes. Or ces deux branches de la science, si prospères en Allemagne, comme en Angleterre, et qui trouvent depuis quelques années en Italie des disciples si distingués, dont le nombre tend à s'accroître, ne sont enseignées dans aucune de nos écoles.[140]

Le problème des trois cercles ne se situe plus au cœur des débats géométriques. C'est devenu un classique sur lequel on s'accorde. Trois grandes démonstrations sont retenues : la démonstration dite "de Viète", où l'on se ramène à un cercle tangent à deux cercles donnés et passant par un point donné, celle dite de Gergonne, et celle de Poncelet, qui sont toutes trois de géométrie "pure". Les recherches et propositions de perfectionnement des démonstrations vont cependant se poursuivre. Nous avons noté à plusieurs reprise que la discussion du nombre de solutions était absente ou imparfaite. Ce sera donc examiné. Certains cas de figures ne se prêtent pas, parfois, à la construction proposée. Il en est ainsi de la solution de Gergonne, qui ne convient pas dans le cas de trois centres de cercles alignés. La solution sera donc complétée. Il s'agit aussi d'examiner dans quelles conditions la solution du problème des trois cercles permet de donner celle des autres problèmes de l'*Apollonius Gallus*, puisque c'était une des supériorité affirmées des solutions de Gergonne et Poncelet par exemple. Enfin les questions, déjà soulevées, de la constructibilité réelle des solutions vont continuer de se poser.

Nous citerons ici, essentiellement, les travaux de Maurice Fouché, dans un article des *Nouvelles annales de mathématiques*, de 1892, et ceux de Jacques Hadamard dans ses *Leçons de géométrie*, dont la première édition se situe en 1898, pour la partie géométrie plane.

La solution de Fouché-Poncelet :

Dans son article Fouché prend comme référence la solution de Gergonne, que l'on pourrait plutôt qualifier, à notre sens, de Gergonne-Steiner. Il se propose de la transformer pour qu'elle s'applique, en particulier, au cas des centres des cercles donnés en ligne droite, et qu'il puisse s'établir une discussion du nombre de solutions. En fait, sa solution est très proche de celle de Poncelet, et la postérité nommera cette construction "Fouché-Poncelet".

---

[140] Ibid., p.378.

La méthode que je vais développer pour résoudre le problème du cercle tangent à trois cercles donnés, comparée à celle de Gergonne, présente les avantages suivants :

1° Elle s'applique sans modification au cas où les centres des trois cercles sont en ligne droite.

2° Elle donne une démonstration commode de la réciproque, c'est-à-dire qu'il est aisé de prouver que la construction indiquée fournit bien une solution du problème.

3° La construction dépend d'une circonférence auxiliaire indéterminée, ce qui permet de la varier à volonté suivant la disposition des données ; elle se prête, du reste, à de légères modifications qui la rendent encore praticable dans les cas où les centres de similitude des cercles donnés sont en dehors des limites de l'épure.

4° La construction s'applique aussi bien que celle de Gergonne aux cas particuliers où un ou plusieurs des cercles donnés sont remplacés par des droites ou des points, et dans les cas où des points figurent parmi les données elle reproduit directement la construction usuelle dont elle peut être ainsi considérée comme une généralisation.

5) Elle fournit une démonstration très aisée de ce que le problème admet toujours huit solutions réelles lorsque les trois circonférences sont extérieures, proposition qui, combinée avec la transformation par inversion, permet de faire la discussion complète.[141]

La nouvelle construction s'appuie, nous explique Fouché, sur celle des cercles isogonaux. Dans la tradition qui s'est déjà établie les années précédentes, il nous expose donc en préalable cette théorie. Le problème des trois cercles sert une fois de plus de prétexte à un nouveau traité. Le problème des trois cercles ne nécessite que l'utilisation des cercles tangents et des cercles orthogonaux, cas particuliers bien étudié alors, des cercles isogonaux. Les propriétés de ces cercles, nous dit Fouché, ont été indiquées rapidement , mais seulement pour les cercles tracés sur une sphère, dans le *Traité de géométrie* de Rouché et de Comberousse. Les cercles isogonaux sont des cercles qui coupent les trois cercles donnés sous un même angle.

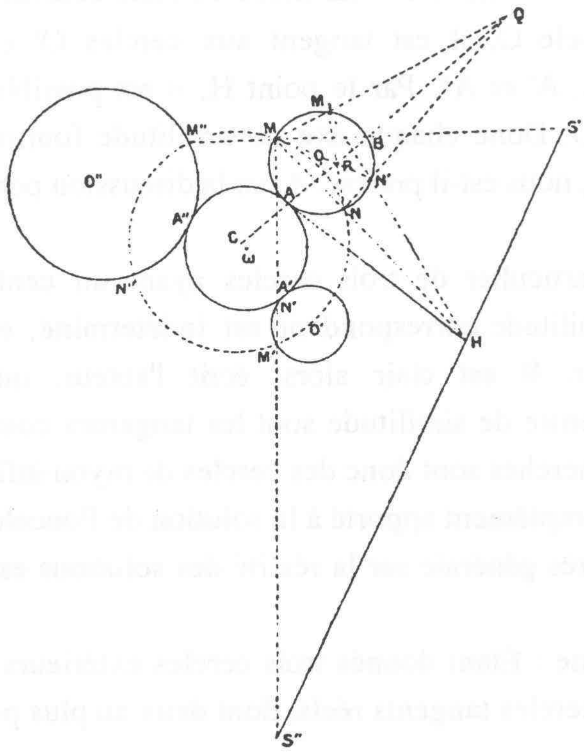
La recherche d'un cercle isogonal à trois cercles donnés fait intervenir entre autres, les axes de similitudes. Fouché distingue alors le cas particulier, qui n'a pas été étudié jusqu'ici, de trois cercles qui ont un centre de similitude

---

[141] Fouché, M., *Sur les cercles qui touchent trois cercles donnés ou qui les coupent sous des angles donnés*, Nouvelles annales de mathématiques, 3° série, tome XI ; juin, août et octobre 1892, p.1.

commun, qui ne peut être traité comme le cas où les centres de similitude sont répartis sur quatre droites.

Nous trouvons donc en application de la théorie des cercles isogonaux, le problème de construire un cercle tangent à trois cercles donnés. Une analyse de la figure donnera la construction.



Si ω est le cercle cherché, tangent en A, A', A" aux trois cercles donnés O, O', O", ce cercle est un cercle isogonal qui coupe les trois cercles donnés sous un angle nul. Il est donc possible d'utiliser la théorie qui vient d'être développée. Cependant, une première remarque indique que le problème peut être traité directement, indépendamment de cette théorie, aboutissant à la même construction.

Le premier cas considéré est le cas général de trois centres de similitudes distincts sur l'axe de similitude correspondant au contact recherché pour ω . Sur la figure proposée, ce serait la droite contenant les centres de similitude externes, correspondant à trois cercles touchant de la même façon le cercle cherché.

La construction est alors exactement celle de Poncelet. Les trois points de contact A, A', A" sont deux à deux antihomologues ; on construira donc trois points, M, M', M", M' et M" étant respectivement antihomologues de M sur O' et

O". Si M varie, les cercles M M' M" ont même puissance par rapport aux points S' et S", donc tous ces cercles ont le même axe radical S'S". La corde commune MN au cercle variable M M' M" et au cercle fixe O passe donc par un point fixe H (puisqu'il s'agit d'un point qui a même puissance par rapport à tous les cercles variables et au cercle O), point situé sur l'axe S'S". En particulier, la tangente commune à O et ω passe par ce point H. On mène donc de H une tangente au cercle O, en A, puis on cherche les antihomologues A' et A" de A sur les cercles O' et O" relativement aux centres de similitude de l'axe considéré. Comme ω est tangent en A au cercle O, il est tangent aux cercles O' et O" aux points antihomologues de A, A' et A". Par le point H, il est possible de mener deux tangentes au cercle O. Donc chaque axe de similitude fournit deux solutions, réelles ou imaginaires, nous est-il précisé. Ainsi la discussion portera sur la réalité des solutions.

Dans le cas particulier de trois cercles ayant un centre de similitude commun, l'axe de similitude correspondant est indéterminé, et la méthode ne peut plus s'appliquer. Il est clair alors, écrit l'auteur, que les solutions correspondant à ce centre de similitude sont les tangentes communes aux trois cercles. Les cercles cherchés sont donc des cercles de rayon infini.
Ce n'est pas le seul complément apporté à la solution de Poncelet.

La discussion très générale sur la réalité des solutions est menée jusqu'au bout.

Premier théorème : Étant donnés trois cercles extérieurs deux à deux, on peut leur mener huit cercles tangents réels, dont deux au plus peuvent se réduire à deux droites.

Il est clair qu'un axe de similitude fournit deux solutions réelles si et seulement si le point H est extérieur au cercle O, donc à l'extérieur du segment MN. Pour cela, l'axe de similitude ne doit pas couper le segment MN, ou, ce qui revient au même, ne doit pas couper l'arc MN, du cercle M M' M", à l'intérieur du cercle O. Un axe de similitude donne donc deux solutions réelles si et seulement si le cercle M M' M" ne coupe pas l'axe de similitude correspondant, ou le coupe en deux points d'un même côté du cercle O.

O étant un cercle quelconque parmi les trois cercles, et une solution ne pouvant être à la fois réelle et imaginaire, si le cercle M, M', M" coupe l'axe de similitude à l'intérieur d'un des cercles donnés, il le coupera aussi à l'intérieur des deux autres. Le cercle M, M' M" ne coupe l'axe qu'en deux points. Cet axe ne donne donc aucune solution réelle si l'un au moins de ces deux points est intérieur à la fois à deux des cercles. Ceci ne peut arriver si les cercles sont extérieurs deux à deux. Dans ce cas les solutions sont donc toutes réelles.

Par ailleurs, il peut arriver que trois cercles aient deux tangentes communes, mais ils ne peuvent en avoir plus.

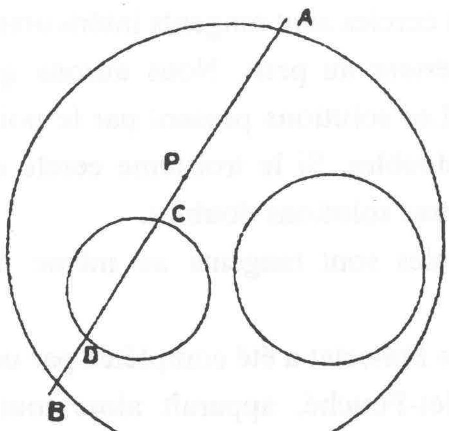
La discussion générale peut alors s'établir, selon la disposition des centres de similitude par rapport aux cercles donnés.

1° Si les circonférences n'ont aucun point commun, il peut y avoir :

a) Trois couples de centres de similitudes extérieurs : il y a huit solutions réelles.

b) Un couple intérieur et deux extérieurs, c'est à dire deux cercles intérieurs et le troisième extérieur à ces deux là. Les solutions sont manifestement imaginaires.

c) Deux couples intérieurs, et le troisième extérieur, c'est à dire que deux des circonférences données sont à l'intérieur de la troisième, et extérieures entre elles.



Dans ce cas, prenons un pôle d'inversion P intérieur à la grande circonférence, et extérieur aux petites, et un rapport égal à la puissance de P par rapport à la grande circonférence. les trois cercles sont transformés en trois cercles extérieurs. En effet, une droite passant par P coupe la grande circonférence en A et B, et l'une des petites circonférences en C et D. La grande circonférence se transformera en elle même ; les longueurs PC et PD sont inférieures à PB, les distances inverse PC' et PD' seront donc supérieures à PA. Les points C' et D' seront donc au delà de A. Le problème admet donc huit solutions réelles, et aucune ne se réduit à une droite.

d) Trois couples intérieurs. Manifestement toutes les solutions sont imaginaires.

2° Si deux des circonférences se coupent, on les transforme en deux droites, en prenant pour pôle d'inversion l'un de leurs points d'intersection.

Nous pouvons rappeler que c'est le cas qui avait été traité par H. Newton, dans la revue *Mathematical Monthly*. Il y a alors huit solutions réelles si le troisième cercle coupe les deux premiers sans passer par l'un des points d'intersection, quatre seulement si le troisième cercle coupe un seul de ces cercles ou n'en coupe aucun, ou passe par l'un de leur point d'intersection. Dans ce dernier cas, le point de concours des trois circonférences peut être considéré comme un cercle de rayon nul formant une solution quadruple.

S'il y a des cercles tangents, il y a des solutions doubles.

Enfin, si les trois cercles passent par les deux mêmes points, ils se transforment par l'inversion proposée en trois droites concourantes, et le problème ne peut admettre d'autres solutions que les deux points communs qui constituent deux solutions quadruples de rayon nul.

3° S'il y a deux cercles tangents, le troisième ne coupant pas les deux premiers, ces deux cercles tangents seront transformés en deux droites parallèles en prenant pour pôle d'inversion le point de contact. Nous trouverons six solutions réelles si les cercles sont tangents extérieurement et que le troisième leur est extérieur, ou si les cercles sont tangents intérieurement, le troisième étant intérieur au grand et extérieur au petit. Nous aurons quatre solutions réelles dans tous les autres cas. Les solutions passant par le point de contact doivent être considérées comme doubles. Si le troisième cercle est tangent à l'un des deux autres, il y aura d'autres solutions doubles.

4° Si les trois cercles sont tangents au même point, le problème est indéterminé.

Ainsi, la solution de Poncelet a été complétée par une discussion générale. La dénomination Poncelet-Fouché, apparaît alors tout à fait légitime. Une utilisation habile de l'inversion a permis cette étude. Cette transformation montrera effectivement ses avantages dans la discussion des solutions, en ramenant le problème à des cas déjà étudiés, ou plus simples, plus que dans la construction même des solutions.

Achèvement de la discussion :

Hadamard, dans ses Leçons de géométrie, va reprendre la discussion, à peu près dans les mêmes termes, mais d'une façon encore plus systématique.

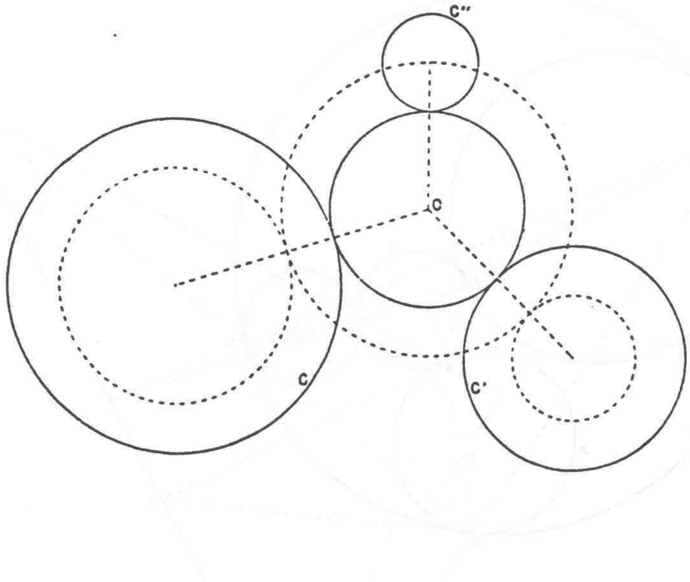
Dans le chapitre *Constructions*, il va s'intéresser au problème des cercles tangents, proposant la solution dite de Viète puis celle de Gergonne. Cette dernière solution sera complétée par une note, justifiée dans la préface de sa première édition :

Ainsi que l'a signalé M. Koenigs, la solution connue de Gergonne, même complétée par la synthèse que son auteur avait négligée, laisse *subsister un desideratum. C'est cette lacune que je me suis proposé de combler.* [142]

Dans la préface de sa deuxième édition, il ajoutera :

J'ai déjà dit que la méthode exposée dans la note C pour le problème des cercles tangents appartient en réalité à M. Fouché ou même à M. Poncelet.[143]

Le problème 231 du chapitre *Constructions*, pose le problème de construire un cercle tangent à trois cercles donnés.[144] Il le ramène par le procédé que nous connaissons bien maintenant à celui de la recherche d'un cercle passant par un point donné et tangent à deux cercles donnés. C'est la méthode de Viète. Rappelons le principe : si C, C', C" sont les trois cercles donnés, de rayons r, r', r" et O un cercle de rayon R qui, par exemple, les touche tous les trois extérieurement, un cercle de centre O et de rayon $R + r"$ passera par le centre du cercle C" et touchera les cercles concentriques à C et C' ayant pour rayons les différences entre les rayons r, r' respectivement et le rayon r".



Le problème 230[145] a donné la solution suivante du cercle passant par un point donné et tangent à deux droites (ou circonférences) données :

Par une des deux inversions qui transforme l'une dans l'autre les lignes données, le cercle cherché est transformé en lui même. On en connaît donc un

[142]Hadamard, J., *Leçons de géométrie*, vol.I, Géométrie plane, 13° édition, Paris, A. Colin, 1947, éd. J. Gabay, 1988.
[143]Ibid.
[144]Ibid. , p. 222.
[145]Ibid. , p. 221.

deuxième point, à savoir le transformé du point donné par l'inversion considérée. On est ainsi ramené à la construction d'un cercle passant par deux points donnés et tangent à une droite ou une circonférence donnée.

Cette construction a elle-même été obtenue par une inversion de pôle l'un des points donnés. Le cercle cherché doit alors passer par un point connu et être tangent à un cercle connu (les inverses du second point et du cercle donné).

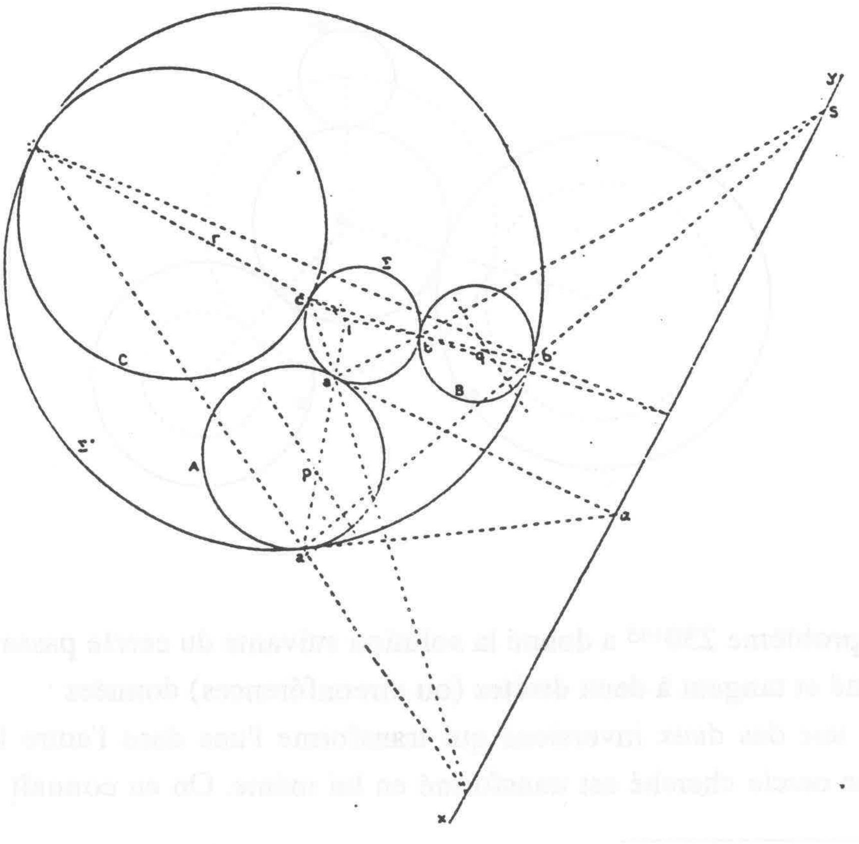
D'inversion en inversion, la construction n'est pas forcément très simple.

Aussi il nous est proposé une autre construction par la méthode de Gergonne.

Si A, B, C sont les cercles donnés, nous cherchons d'abord un cercle Σ ayant avec les cercles donnés des contacts de même espèce aux points a, b, c.

Une analyse du problème donne la construction dite de Gergonne qui est, rappelons-le, la suivante :

Il faut déterminer le centre radical I des trois cercles donnés, et leur axe de similitude direct xy. Soit p, q, r les pôles de xy par rapport aux cercles donnés. Joignant I à ces trois points, les droites obtenues coupent les cercles correspondants aux points cherchés a, a' ; b, b' ; c, c'.



Hadamard nous propose une synthèse, dont il doutait qu'elle ait été exécutée par Gergonne, pour examiner si cette construction donne effectivement des cercles satisfaisant aux conditions demandées.

Il démontre que les points a, b, c, a', b', c', sont antihomologues deux à deux dans les cercles donnés.

Cherchons l'antihomologue, par exemple, de la corde aa' du cercle A dans le cercle B. Cette corde est déterminée par les deux conditions : les deux cordes se coupent sur l'axe radical des cercles A et B ; les points où elles rencontrent les polaires du centre de similitude direct S par rapport à leurs cercles respectifs sont homologues.

Or, leur point d'intersection I est le centre radical, donc est bien sur l'axe radical de A et B. De plus les points p et q, pôles de xy par rapport à A et B sont sur les polaires de S par rapport à ces cercles ; dans l'homothétie de centre S qui fait correspondre le cercle A au cercle B, la droite xy se correspond à elle-même, ses pôles se correspondent donc.

L'antihomologue de la corde aa' est donc la corde bb'. Il en sera de même pour les cordes cc' et aa' dans les cercles C et A, et les cordes cc' et bb' dans les cercles C et B.

Soit maintenant b et c les deux antihomologues de a ; b' et c' sont alors les antihomologues de a'. Soit Σ le cercle passant par a, b et c, et Σ' le cercle passant par a', b' et c'. L'axe radical de ces cercles est xy puisque cet axe doit passer par l'intersection de ab et a'b' d'une part, et de ac et a' c' d'autre part.

Soit α_1 le point d'intersection des tangentes à A en a et a'. Ce point est sur xy, puisque aa' passe par p ; il est aussi sur la perpendiculaire à [aa'] en son milieu.

Mais le point α, où se coupent les tangentes en a et a' aux cercles Σ et Σ' respectivement, est aussi sur xy puisque c'est l'axe radical de Σ et Σ' ; il est donc aussi sur la perpendiculaire à [aa'] en son milieu.

Les points α_1 et α coïncident, et les cercles Σ et Σ' touchent A en a et a', donc aussi B et C en b, b' ; c, c'.

Le travail fait pour des contacts de même espèce, peut être fait pour des contacts d'espèces différentes. Il y a quatre axes de similitudes, le problème peut donc avoir huit solutions. Certaines solutions cependant peuvent ne pas exister.

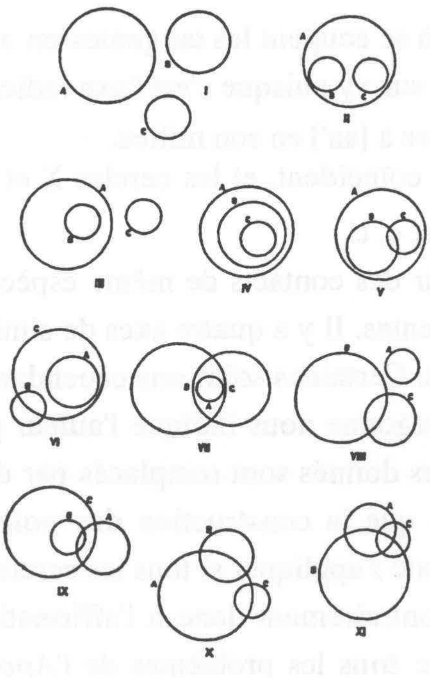
La solution de Gergonne nous indique l'auteur peut s'appliquer aux cas où un ou deux des cercles donnés sont remplacés par des droites ou des points. Toutefois elle ne donne que la construction des points de contacts avec les cercles. Elle ne pourra donc s'appliquer si tous les cercles sont remplacés par des points ou des droites. Contrairement donc à l'affirmation de Gergonne, elle ne donne pas la solution de **tous** les problèmes de l'*Apollonius Gallus*, même si ceux qui subsistent sont alors élémentaires.

Cette solution est aussi en défaut, nous l'avions remarqué, dans le cas où les centres des cercles donnés sont en ligne droite. Il peut être remédié à cette situation en transformant la figure par une inversion, si l'on ne fait figurer dans la solution précédente que des propriétés se conservant par inversion, comme le contact ou l'angle de deux circonférences. C'est ainsi que l'auteur nous renvoie à la fameuse note C[146], où il propose une solution modifiée.

Cette solution n'est autre , il l'annonçait dans la préface de la seconde édition, que celle de Fouché-Poncelet. La nouvelle construction peut convenir au cas des cercles dont les centres sont alignés, mais de plus elle s'applique lorsque l'un ou plusieurs des cercles donnés sont remplacés par des points ou des droites. Elle est en défaut dans le seul cas de trois points, qui est élémentaire.

Une discussion va aussi pouvoir s'établir, semblable bien sûr à celle que Fouché a effectué, à partir de la position des centres de similitudes par rapport aux trois cercles donnés. Elle sera cependant plus complète et plus lisible grâce à une présentation astucieuse. S12 désignera par exemple le centre de similitude externe des cercles 1 et 2 ; S'12 désignera le centre de similitude interne des mêmes cercles. Si un centre de similitude est extérieur aux cercles concernés, il est dit positif, s'il est intérieur il est dit négatif. Cela correspond à l'existence ou non de tangentes communes réelles.

Il examine alors les onze cas de figures possibles, en excluant les cas où deux des cercles sont tangents, ces cas étant considérés comme limite de ceux où les cercles ont zéro ou deux intersections ; alors deux des solutions du problème se confondent.



146Ibid. p. 287 à 292.

Le cas XI, possède une variante : les points d'intersections des cercles A et B par exemple pourraient être tous deux extérieurs, ou tous deux intérieurs au troisième cercle C. Pour le problème étudié cela ne donnerait aucun changement.

A partir des onze cas de figures, il nous fournit un tableau indiquant pour chaque cas le nombre de solutions.

	CENTRES de similitude positifs.	CENTRES de similitude négatifs.	NOMBRE de solutions.	GROUPES correspondants.
I	tous	•	8 sol.	
II	S_{23}, S'_{23}	S_{12}, S'_{12}, S_{13}, S'_{13}	idem	
III	S_{13}, S'_{13}, S_{23}, S'_{23}	S_{12}, S'_{12}	néant	
IV	néant	tous	idem	
V	S_{23}	S'_{23}, S_{12}, S'_{12}, S_{13}, S'_{13}	4 sol.	(0,1)
VI	S_{12}, S'_{12}, S_{23}	S'_{23}, S_{13}, S'_{13}	idem	(2,3)
VII	S_{23}	S'_{23}, S_{12}, S'_{12}, S_{13}, S'_{13}	idem	(0,1)
VIII	S_{12}, S'_{12}, S_{13}, S'_{13}, S_{23}	S'_{23}	idem	(0,1)
IX	S_{12}, S_{13}	S'_{12}, S'_{13}, S_{23}, S'_{23}	idem	(2,3)
X	S_{12}, S_{13}, S_{23}, S'_{23}	S'_{12}, S'_{13}	idem	(0,1)
XI	S_{12}, S_{13}, S_{23}	S'_{12}, S'_{13}, S'_{23}	8 sol.	

La dernière colonne indique par quels centres d'homothétie[147] les solutions sont obtenues : 0 indique le groupe des trois centres d'homothétie directs, 1 indique le groupe formé en considérant B et C comme homothétiques directs entre eux et inverses de A, 2 et 3 désignent les groupes analogues, obtenus en remplaçant A par B, puis par C.

Enfin Hadamard remarque que le nombre des hypothèses à examiner aurait pu être largement diminué en tenant compte que les cas I et II se ramènent l'un à l'autre par une inversion, de même les cas III et IV, les cas V, VI, VII, VIII, et les cas IX, X.

Au terme de cette étude, il semble que le problème des trois cercles a trouvé son achèvement . Nous ne trouverons pas de changement notable par la suite, et les trois grandes démonstrations étudiées feront référence. Le problème continue cependant d'être étudié, à des fins pédagogiques en particulier.

[147]Nous remarquerons que dans cette étude, Hadamard utilise indistinctement les mots *centre de similitude* ou *centre d'homothétie*, *transformation par rayons vecteurs réciproques* ou *inversion*.

2° Un classique des manuels d'enseignement, un exemple pour l'apprentissage de méthodes :

Fouché comme Hadamard écrivait pour des étudiants et des enseignants. La géométrie synthétique, ou supérieure, est considérée comme fondamentale dans l'apprentissage de la géométrie et des mathématiques en général. Hadamard le souligne dans la préface de sa première édition :

> *En rédigeant ces Leçons de géométrie, je n'ai pas perdu de vue le rôle tout spécial que joue cette science dans l'ensemble des mathématiques élémentaires.*
>
> *Placée à l'entrée de l'enseignement mathématique, elle est, en effet, la forme la plus simple et la plus accessible du raisonnement. La portée des méthodes, leur fécondité y sont plus immédiatement tangibles que celles des théories relativement abstraites de l'arithmétique ou de l'algèbre. Par là, elle se montre capable d'exercer, sur l'activité de l'esprit, une influence considérable.*

Cependant cette formation de l'esprit ne s'obtient pas par n'importe quel enseignement de la géométrie. Nous trouvons dans la préface de la deuxième édition :

> *Depuis l'apparition de cet ouvrage, l'enseignement des mathématiques et, particulièrement de la géométrie, a subi, non plus seulement dans ses détails, mais dans tout son esprit, des modifications profondes depuis longtemps attendues et universellement réclamées. On tend à le faire reposer, pour les commençants, sur la pratique et l'intuition, et non plus sur la méthode euclidienne dont ils sont incapables de comprendre l'utilité.*

Ces principes de pédagogie sont en quelque sorte ceux qui étaient défendus par Poncelet ou Steiner

Un exercice de géométrie synthétique :

Les manuels de géométrie élémentaire se sont peu à peu imprégnés de la géométrie moderne.

En 1851, *Les leçons nouvelles de géométrie analytique* de Briot et Bouquet intègrent les théories de la nouvelle géométrie, dans leur transposition analytique, notant qu'*une fois les principes de la géométrie symbolique établis, toute la série des théorèmes s'en déduit sans difficulté par les raisonnements synthétiques de la géométrie ordinaire ; ces raisonnements* *tiennent lieu d'opérations algébriques, telles que transformations et combinaisons d'équations*[148].

Nous trouvons, dans la onzième édition des *Éléments de géométrie* de Legendre, en 1864, un appendice, exposant la théorie des transversales, et la théorie des pôles et polaires. Le problème de décrire un cercle tangent à trois cercles donnés est proposé en exercice[149].

A partir de là, jusqu'au début du XX° siècle les manuels de géométrie élémentaire se rapprocheront de plus en plus de la première partie du *Traité des propriétés projectives des figures* de Poncelet, concernant les lemmes de géométrie synthétique, atteignant un niveau assez remarquable. La plupart de ces manuels traiteront du problème des trois cercles, comme application de cours, ou dans le cours théorique lui-même, choisissant l'une ou l'autre des solutions devenues classiques, voire les trois.

Chasles le premier dans son *Traité de géométrie supérieure* , consacre un chapitre entier à l'étude des systèmes de trois cercles[150], et choisit la solution de Gergonne pour mener un cercle tangent à trois cercles donnés. Il signale la facilité de la construction et les solutions des problèmes plus simples qui en découlent, lorsqu'un ou plusieurs des cercles deviennent des points ou des droites. Il n'a pas noté les restrictions que Hadamard traitera un peu plus tard.

Desboves dans ses *Questions de géométrie élémentaire*,[151] choisit aussi la solution de Gergonne, et étudie quelques uns des problèmes dérivés, dans les mêmes termes que Chasles.

Catalan fournit une présentation originale du problème. Nous trouvons dans ses *Théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire*, une refondation moderne, en quelque sorte, de l'*Apollonius Gallus*[152]. Il résout successivement les différents problèmes où sont donnés deux points et une droite, deux points et un cercle, un point et deux droites, un point et deux cercles, un point, une droite et un cercle, deux droites et un cercle, une droite et deux cercles, enfin, trois cercles. Seuls les cas "élémentaires" de trois points ou trois droites ont été traités bien avant. Les solutions proposées font appel aux théorèmes de géométrie élémentaire, et sont basées sur l'utilisation des centres de similitude, ou d'axes de symétrie. Elles s'enchaînent bien sûr plus ou moins les unes aux autres, comme dans l'*Apollonius Gallus*. Pour le dernier problème une première solution

---

[148]Briot C., Bouquet C., *Leçons nouvelles de Géométrie analytique*, Paris, Dezobry et Magdeleine, 1851, p. 438.
[149]Legendre, A. M., *Éléments de géométrie*, Paris, 1864, p.134.
[150]Chasles, M., *Traité de géométrie supérieure*, ouvrage cité, p. 498 à 501.

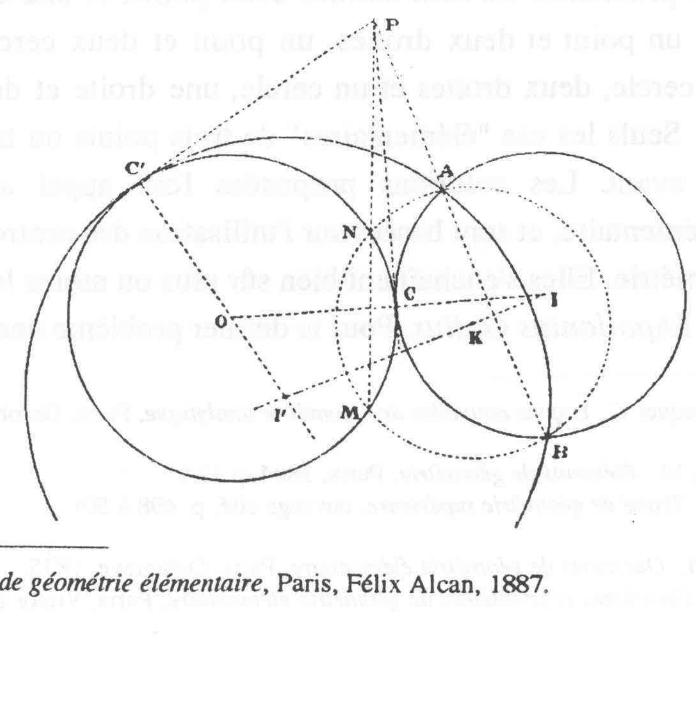
[151]Desboves, M., *Questions de géométrie élémentaire*, Paris, Delagrave, 1875.
[152]Catalan, E., *Théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire*, Paris, Victor Dalmont, 1879, p.116 à 124.

est donnée qui est celle de Viète. Puis une deuxième est proposée, *l'élégante* solution de Gergonne, sans autre commentaire particulier, si ce n'est qu'elle est justifiée par l'utilisation des axes radicaux, des pôles et des polaires, rompant totalement avec les démonstrations qui précédaient dans l'ouvrage.

A la fin du siècle, le *Cours de Géométrie élémentaire* de Combette, présente de façon complète la géométrie supérieure, pour les aspirants au baccalauréat ès-sciences et les candidats aux écoles du gouvernement[153]. Nous sommes ainsi enclins à penser que ce manuel est assez représentatif du savoir géométrique exigé, en France, à cette époque au niveau préuniversitaire. La somme de connaissances exigées est considérable et le niveau est assez élevé. Sans doute, a contrario, le niveau en analyse par exemple n'a pas suivi. Quoiqu'il en soit, le problème de tracer un cercle tangent à trois cercles donnés est présenté, comme partie intégrante du cours. Deux solutions sont proposées, celle dite "de Viète", et celle de Gergonne[154].

Pour la première solution, il faut, en fait, avoir construit d'une part un cercle passant par deux points donnés et tangent à un cercle donné, d'autre part, un cercle passant par un point donné et tangent à deux cercles donnés.. Une solution assez simple de ces problèmes est proposée, qui, dans les faits, revient à celle de Viète ; mais il est clair que l'évolution du langage et la caractérisation de certains éléments par un nom, comme centre de similitude ou axe radical, facilite considérablement l'expression. C'est là une bonne partie de l'évolution de la géométrie. Pour en juger, considérons les démonstrations proposées, présentées comme applications directes des éléments théoriques étudiés.

Tracer une circonférence passant par deux points donnés et tangente à une circonférence donnée.



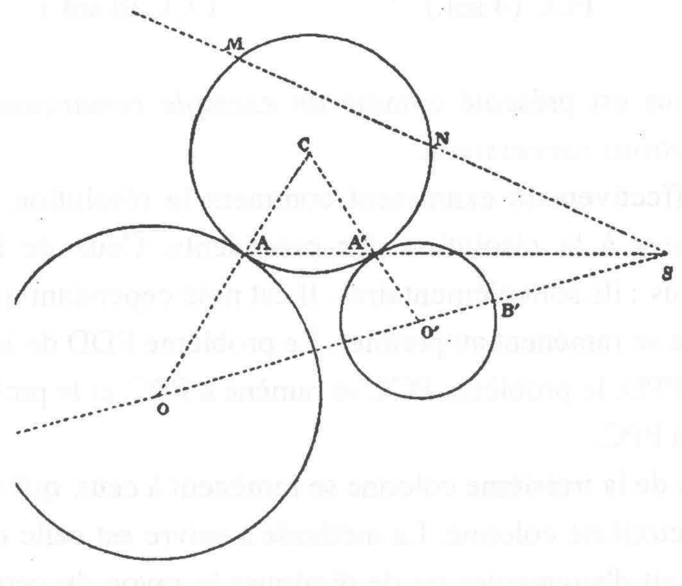
[153]Combette, E., *Cours de géométrie élémentaire*, Paris, Félix Alcan, 1887.
[154]Ibid., p. 239 à 244.

Par les points donnés A et B, nous traçons une circonférence qui coupe la circonférence donnée O. La corde commune MN des deux cercles coupe la droite AB en un point P. Nous traçons les tangentes PC et PC' à la circonférence O. Les circonférences circonscrites aux triangles ACB, d'une part, AC'B d'autre part répondent à la question.

Il y aura autant de solutions que l'on pourra mener de tangentes distinctes du point P au cercle O. Il y aura donc impossibilité seulement lorsque P sera intérieur au cercle O. Il sera alors entre M et N et entre A et B. A et B seront donc l'un intérieur au cercle O, l'autre extérieur. Il n'y aura qu'une solution si P est sur le cercle, dans ce cas, il est confondu avec A ou B. Il y aura deux solutions lorsque P sera extérieur au cercle O, c'est à dire lorsque A et B sont dans la même région de plan limitée par le cercle O.

Tracer maintenant une circonférence passant par un point donné et tangent à deux circonférences données.

Si l'on considère le centre C d'une circonférence passant par le point M, donné, et touchant extérieurement les circonférences données O et O' aux points A et A', la droite AA' passe par le centre de similitude direct S, et les points A et A' sont antihomologues. Les points B et B' intersection de la droite S O O' et des cercles respectifs O et O' sont aussi antihomologues.



Traçons la droite SM. Cette droite rencontre le cercle cherché en un deuxième point N, qu'il s'agit de déterminer.

Nous avons: $SN \times SM = SA \times SA' = SB \times SB'$. Ainsi, SN est la quatrième proportionnelle aux longueurs SM, SB, SB', toutes connues.

Le point N étant connu, il faut tracer une circonférence passant par les points M et N et tangente à l'une des circonférences données ; elle sera aussi tangente à l'autre.

On répétera le même raisonnement pour obtenir des contacts différents. Ainsi dans le cas général, il y a quatre solutions.

Le problème du cercle tangent à trois cercles donnés s'en déduit par la méthode de Viète.

Le problème est aussi proposé suivant, donc, la méthode de Gergonne, sous sa forme désormais classique.

Au XX° siècle, le problème trouve sa place dans les manuels de géométrie, sous des formes diverses. Nous en trouvons une présentation dans le traité de Géométrie de Rouché et de Comberousse, (8° édition) qui donne une vue d'ensemble des problèmes de l'*Apollonius Gallus*, indiquant comment la résolution de l'un permet de donner une solution de l'autre, sous entendant une résolution du type "Viète", assez inattendue. Il s'agit plus d'illustrer une "méthode"que de donner une solution.

Un tableau en trois colonnes répertorie tous les problèmes. P représente un point, D représente une droite, et C représente un cercle.

PPP(1 sol.)	PDD (2 sol.)	DDC (8 sol.)
DDD (4sol.)	PCD (4 sol.)	DCC (8 sol.)
PPD (2 sol.)	PCC (4 sol.)	CCC (8 sol.)
PPC (2 sol.)		

Ce tableau nous est présenté comme *un exemple remarquable de (la) méthode des substitutions successives.*

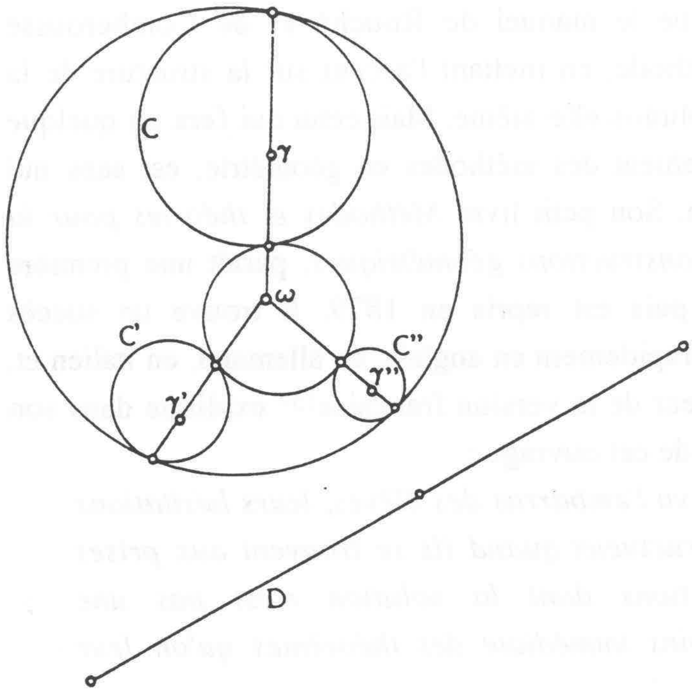
Les auteurs effectivement examinent comment la résolution de certains problèmes se ramènent à la résolution des précédents. Ceux de la première colonne ont été résolus ; ils sont élémentaires. Il est noté cependant que les deux derniers de la colonne se ramènent au premier. Le problème PDD de la deuxième colonne se ramène à PPD, le problème PCC se ramène à PPC, et le problème PCD se ramène à PPD ou à PPC.

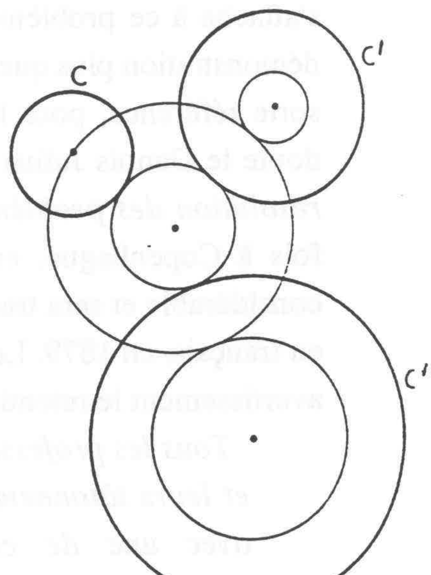
Les problèmes de la troisième colonne se ramènent à ceux qui sont placés en vis à vis dans la deuxième colonne. La méthode à suivre est celle qualifiée de *Translation*, où il s'agit d'augmenter ou de diminuer le rayon du cercle cherché par le rayon R du cercle donné ou d'un des cercles donnés.

Cette articulation est différente de celle de l'*Apollonius Gallus*, elle est cependant du même type. Au-delà de la résolution même, l'ouvrage de Viète est donc une référence aussi de méthode. C'est finalement assez inattendu, en ce début du XX° siècle.

Si nous effectuons un grand saut dans le temps, nous trouverons, dans *Les cent grands problèmes de mathématiques élémentaires*, de Dörrie,[155] en 1965, le problème d'Apollonius. La solution choisie est celle de Gergonne, après un bref exposé des propriétés nécessaires sur les centres de similitude et les polaires.

Enfin, la *Géométrie* de Marcel Berger, mentionne les deux solutions de Viète et de Gergonne, au problème d'Apollonius, dans le chapitre traitant des problèmes sur les cercles[156]. Ce problème est en bonne compagnie : le problème de Napoléon-Mascheroni, le cercle des neufs points, le problème de Malfatti, etc....





Le problème d'Apollonius fait décidément partie des grands problèmes qui font les mathématiques. Il est clair par ailleurs, que les préférences oscillent entre les trois grandes démonstrations de référence, et il est assez surprenant de constater, que, au bout du compte, la démonstration de l'*Apollonius Gallus*, un peu modernisée, n'est pas moins considérée que les deux autres. La différence la plus marquante, hors le langage, bien sûr, réside dans la démarche. Souvenons nous que Viète, dans le souci sans doute de présenter une reconstitution des Anciens n'avait fourni que la synthèse. Dans les reprises modernes de son travail, une analyse du problème est en général effectuée au préalable. Reconnaissons

[155] Dörrie, H., *The tangency problem of Apollonius*, 100 great problems of elementary mathematics, Dover, 1965. p. 154 à 160.

[156] Berger, M., *Géométrie*, tome I, Paris, Nathan, 1990, p. 364.

que la compréhension y gagne un peu. Il reste que le travail de Viète peut-être considéré, après plus de deux siècles, comme un grand exposé de mathématiques.

Un point d'appui pour l'enseignement de méthodes :

L'apprentissage de la géométrie ne se réduit pas à celui d'un savoir plus ou moins élaboré. La naissance de la géométrie synthétique a mis en évidence que la formation de l'esprit à une certaine vision de l'espace, à la mise en relation de divers éléments est aussi fondamentale. C'est cette formation qui permettra de résoudre les problèmes, de décider de la transformation de la figure qui sera efficace pour le problème proposé, qui, au-delà, permettra l'invention.

Nous avons pu noter que le manuel de Rouché et de Comberousse s'attache à ce problème de méthode, en mettant l'accent sur la structure de la démonstration plus que sur la solution elle-même. Mais celui qui fera en quelque sorte référence, pour l'enseignement des méthodes en géométrie, est sans nul doute le Danois Julius Petersen. Son petit livre *Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques*, paraît une première fois à Copenhague, en 1866, puis est repris en 1879. Il trouve un succès considérable et sera traduit très rapidement en anglais, en allemand, en italien et, en français, en 1879. Le traducteur de la version française[157] explique dans son avertissement le retentissement de cet ouvrage :

> *Tous les professeurs ont vu l'embarras des élèves, leurs hésitations et leurs tâtonnements infructueux quand ils se trouvent aux prises avec une de ces questions dont la solution n'est pas une conséquence plus ou moins immédiate des théorèmes qu'on leur enseigne dans le cours.*
>
> *Nous croyons qu'il faut en voir la cause dans l'absence complète de méthodes qui préside aux recherches.*
>
> *[...]*
>
> *L'auteur (J. Petersen) n'a eu qu'un but unique : mettre les méthodes bien en évidence. Aussi ce petit livre renferme-t-il beaucoup plus de choses importantes que sa taille exigüe ne pourrait le faire croire au premier abord*

Petersen distingue, traditionnellement, les problèmes surabondamment déterminés, lorsque la figure cherchée est soumise à plus de conditions qu'il n'en faut pour la déterminer, les problèmes déterminés, quand ils ne comportent qu'un nombre fini de solutions, enfin les problèmes indéterminés qui peuvent admettre

[157] Petersen, J., *Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques*, traduit par O. Chemin, Paris, Gauthier-Villars, 1880, ed. J. Gabay, 1990.

une infinité de solutions. Le problème des trois cercles fait partie des problèmes déterminés.

Pour résoudre ce genre de problème, il faut effectuer la construction, démontrer qu'elle est exacte, la discuter.

La géométrie analytique fournit une méthode complètement générale pour la résolution des problèmes de géométrie, mais cette méthode est la même pour tous les problèmes Elle demande donc souvent de grands détours, ou mène à des calculs d'un degré tel de complication, parfois, qu'il est impossible en pratique de les conclure. Ainsi, il est souvent préférable de trouver la solution du problème en étudiant par la voie géométrique les liaisons entre les éléments donnés de la figure et ceux qu'on cherche, en dessinant la solution cherchée. On se ramène souvent alors à d'autres problèmes simples, grâce aux théorèmes.

Le problème du cercle tangent à trois cercles donnés se prête, nous l'avons constaté, à plusieurs méthodes de construction. Il est ainsi pris comme exemple à plusieurs reprises par Petersen. C'est un bon problème, puisqu'il fait partie de ceux, reprenant l'expression de l'auteur, *qui ont pu être considérés pendant plusieurs siècles comme une sorte d'énigme dont la solution ne pouvait guère être tentée que par quelques esprits doués de facultés toutes spéciales*[158].

Il est choisi dans un premier temps comme application des méthodes par inversion.

Pour construire un cercle passant par un point donné et tangent à deux cercles donnés, on peut transformer la figure donnée par une inversion de pôle le point donné P. Le problème revient alors à la recherche de la tangente commune à deux cercles. En choisissant bien la puissance d'inversion, l'un des deux cercles ne change pas.

Puis le problème est de construire un cercle tangent à trois cercles donnés.

Une des méthodes qui permet de ramener ce dernier problème au précédent est celui de "translations parallèles", que nous avons évoquées dans le manuel de Rouché et de Comberousse. Certains éléments de la figure, peuvent être transportés dans une nouvelle position, parallèle à la position primitive. Par exemple, si le rayon d'un cercle augmente ou diminue, ce cercle est "transporté parallèlement à lui-même". Le rayon peut même diminuer jusqu'à devenir nul. Si donc l'un des trois cercles donnés se réduit à un point, le problème des trois cercles devient celui de deux cercles et d'un point.

---

[158] Ibid. p.1.

Enfin, dans la partie *problèmes concernant les systèmes de cercles,* Petersen conseille d'utiliser la théorie des centres de similitude et des axes radicaux. Il propose alors, pour le problème des trois cercles, la solution de Gergonne.

Le deuxième livre de méthodes qui a connu un assez grand succès, que nous pourrions considérer comme la bible des exercices de géométrie synthétique, tant il est complet, est sans nul doute le fameux *Manuel d'exercices de géométrie* de F. G. M, comprenant *l'exposé des méthodes géométriques, et 2000 questions résolues.* L'auteur met ici aussi l'accent sur l'importance de l'apprentissage des méthodes. La taille du livre de son prédécesseur était *exigüe,* ce nouvel ouvrage est ample et se veut complet. Il s'agit de géométrie synthétique, même s'il est fait mention des solutions algébriques éventuelles :

> *La méthode algébrique offre des ressources qu'on aurait grand tort de négliger ; elle fournit, pour un grand nombre de questions, des solutions parfois peu élégantes, il est vrai, mais toujours faciles à imaginer. En effet, quel que soit le problème proposé, si l'on parvient à lier les inconnues aux données par des équations des deux premiers degrés ou par une équation bicarrée, on peut considérer la question comme complètement résolue : car l'algèbre nous donne des règles certaines et invariables pour déterminer les inconnues*[159].

Les méthodes comprennent outre cette méthode algébrique, qui est un peu le dernier recours, l'analyse et la synthèse, les lieux géométriques, l'emploi de figures auxiliaires, la transformation des figures, qui est le moyen le plus puissant d'investigation, la discussion, *qui entre de plus en plus dans les habitudes classiques*, l'extension, qui n'est pas très pratiquée, mais *qui contribue plus que tout autre étude géométrique à développer les forces de l'esprit,* la méthode des maxima et minima, qui représente, nous dit l'auteur, une véritable nouveauté dans son livre.

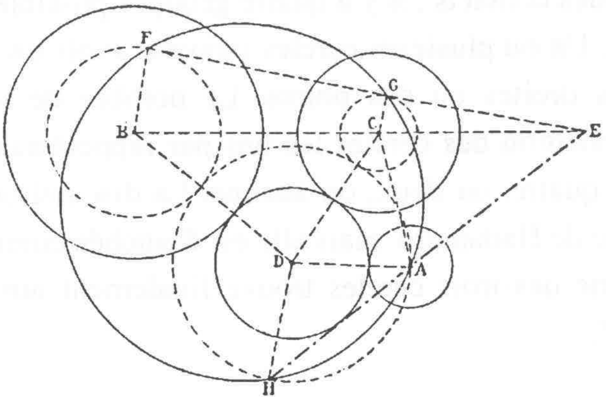
La première édition publiée en 1875 était modeste et ne comprenait pas cette partie "méthodes". Sur ce plan n'existait alors que l'ouvrage de Petersen. La deuxième édition du manuel de F. G. M. qui comporte alors cette partie de méthodes propose une autre approche, originale et complémentaire du livre du savant Danois. Au cours des éditions l'ouvrage s'est enrichi, aussi, de notes historiques qui ont leur importance dans la formation de l'esprit. C'est vraiment l'œuvre d'un pédagogue.

Les grands problèmes ont toute leur place dans ces exercices de géométrie, en particulier, bien sûr, le problème des trois cercles.

---

[159] F. G. M., *Exercices de géométrie*, 6° édition, Paris, 1920, éd. J. Gabay, 1991, p. V;

Il est d'abord étudié sous la forme analyse-synthèse, dont on peut soupçonner que ce fut celle de Viète, qui nous avait donné, suivant la tradition grecque, la seule synthèse.



Pour décrire un cercle tangent à trois cercles donnés, une analyse de la figure supposée terminée nous amènera à traiter le problème du cercle passant par un point donné et tangent à deux cercles donnés. Supposant ce problème résolu, si E est un centre de similitude des deux cercles donnés, menant de E la tangent commune aux deux cercles donnés , qui les touche en F et G, puis la sécante EA qui coupe le cercle cherché en H, on a :

EA.EH = EF.EG.

Ainsi pour trouver H, il suffit de tracer le cercle passant par les trois points donnés F, G, A.

Le problème est alors ramené à ce dernier : décrire un cercle qui passe par deux points donnés A et H, et qui soit tangent à un cercle donné, qui se ramène lui-même à tracer un cercle passant par trois points donnés.

L'auteur note que cette démarche analytique comporte des difficultés, car les questions successives ne sont pas réciproques les unes des autres. Il faut faire attention de ne pas omettre de solutions. La synthèse exposera en premier lieu le problème le plus simple, et remontera au plus compliqué.

La première solution géométrique du problème : construire un cercle qui en touche trois autres, est due à Viète ; elle se trouve dans son Apollonius Gallus : c'est la solution même que nous donnons ; mais ce savant procédait du simple au composé, il traite des cas particuliers et termine par le problème général, tandis que dans le mode d'exposition ci-dessus, on procède à l'inverse, afin d'amener la question proposée à un problème de plus en plus simple ; telle a été probablement la marche *que Viète lui-même a suivie pour trouver la solution remarquable que nous lui devons.*[160]

Ce problème va servir d'exemple un peu plus loin, dans le cadre de la discussion d'un problème. Il est remarqué que les solutions vont par paires, suivant la nature des contacts ; il y a quatre groupes possibles de deux solutions, donc huit en tout. Un ou plusieurs cercles peuvent avoir un rayon nul ou infini, donc devenir des droites ou des points. Le nombre de solution par ailleurs dépend de la disposition des cercles les uns par rapport aux autres. Il pourra y en avoir huit, ou quatre, ou deux, ou aucune. La discussion est moins poussée que dans l'ouvrage de Hadamard, mais elle est ébauchée comme exemplaire.

Le problème des trois cercles trouve finalement aussi sa place dans la partie " exercices".

3° Épilogue :

La géométrographie :

Lapalisse aurait dit que dans un problème de construction, il faut construire. Pourtant paradoxalement ce n'est pas toujours le but recherché. Il arrive souvent, et c'est le cas pour certaines solutions du problème des trois cercles, que le problème soit considéré comme résolu dès que les moyens de le rapporter à d'autres problèmes plus simples sont indiqués. Si vous voulez alors construire vraiment et exactement la solution, avec les instruments traditionnellement admis en géométrie qui sont la règle et le compas, vous abandonnerez vite, la figure devenant surchargée, ou les constructions indiquées étant impossibles à mener exactement de bout en bout.

Dans son traité sur les constructions à la règle, Steiner s'est préoccupé de cet aspect des problèmes :

> *C'est une chose vraiment différente de mettre à exécution une construction, c'est-à-dire avec les instruments à la main, et de la mener à bonne fin, si je peux m'exprimer ainsi, simplement par le moyen de la parole. Il est en effet facile de dire : je vais faire cela, puis cela et ensuite ceci ; mais la difficulté, et nous pouvons le dire dans certains cas l'impossibilité, d'achever vraiment des constructions qui sont hautement compliquées nous demande de peser prudemment dans un problème lequel des différents procédés est le plus simple pour la construction complète, ou lequel convient le plus selon des circonstances particulières et ce qui doit être*

---

[160] Ibid. p. 19.

écarté de ce que la parole émet parfois inconsidérément, quand il s'agit d'épargner tout souci superflu, ou d'atteindre la meilleure précision. [161]

D'autres mathématiciens ont eu ces préoccupations. Nous avons évoqué les études sur les constructions à la règle seule ou au compas seul. Steiner ici propose de se préoccuper toujours de la simplicité, de l'exactitude et de la sûreté de la construction.

Cette nouvelle science qui va se créer, portera le nom de *Géométrographie*. Un de ses premiers représentants sera le français Lemoine. Il a mis au point une méthode d'évaluation, ou mesure de la simplicité et de l'exactitude, et produira en 1902, une *Géométrographie ou Art des constructions géométriques*[162].

Ce qui nous intéresse ici est un article des *Nouvelles Annales de mathématiques*, dans lequel il applique sa méthode à l'évaluation des différentes constructions du problème des trois cercles. Fouché vient de fournir sa démonstration, dans les mêmes *Annales*, ce qui lui donne l'idée d'étudier la constructibilité de ce qu'il considère comme un grand problème :

Dans le numéro de juin 1892, page 227 de ce journal, se trouve le commencement d'un très intéressant article de M. Maurice Fouché, sur le célèbre problème d'Apollonius : mener les cercles tangents à trois cercles donnés. Je ne connais pas de question particulière de géométrie élémentaire qui ait donné lieu à tant de travaux et ingénieuses solutions. Il n'y a pour ainsi dire pas d'années où quelque géomètre n'ait publié soit une solution nouvelle, soit des remarques nouvelles, soit quelque démonstration nouvelle au sujet du célèbre problème ; et la mine n'est pas épuisée comme nous le montre M. Fouché.[163]

Le problème d'Apollonius est effectivement un sujet de choix pour qui veut faire des comparaisons de solutions.

Le principe d'évaluation repose sur des principes simples, mais *exige cependant beaucoup d'attention et même de sagacité pour être employée convenablement.*

Avec une règle on peut faire deux opérations : faire passer le bord de la règle par un point (R_1), ou tracer la ligne qui suit le bord de la règle (R_2).

---

[161] Steiner, J., article cité, p. 65.
[162] Lemoine, E., *Géométrographie ou art des constructions géométriques*, Paris, 1902.
[163] Lemoine E., *Application d'une méthode d'évaluation de la simplicité des constructions à la comparaison de quelques solutions du problème d'Apollonius*, Nouvelles annales de mathématiques, troisième série, tome XI, 1892.

Avec un compas, on peut : mettre une pointe en un point placé (C_1), mettre une pointe en un endroit indéterminé d'une ligne tracée (C_2) et tracer un cercle (C_3).

Toutes les constructions sont ainsi codées, par le nombre d'opérations R_1, R_2, C_1, C_2, C_3. S'il y a M_1 opérations R_1, M_2 opérations R_2, N_1 opérations C_1, N_2 opérations C_2, N_3 opérations C_3, le coefficient de simplicité sera le nombre d'opérations effectuées, donc $M_1 + M_2 + N_1 + N_2 + N_3$. Le coefficient d'exactitude sera $M_1 + N_1 + N_2$, c'est à dire le nombre de droites et de circonférences tracées.

Par exemple, tracer une droite passant par un point donné sera codé $R_1 + R_2$, tracer un cercle de centre et de rayon donnés sera codé $3C_1 + C_3$.

Placer le centre radical de trois circonférences données A, B, C, demande de tracer deux circonférences O et O' qui rencontrent les trois circonférences données ($2C_3$), puis traçant huit droites on obtient les axes radicaux de B et A, et de B et C ($16 R_1 + 8R_2$). Cette opération , $16 R_1 + 8 R_2 + 2 C_3$, a comme simplicité 26 et comme exactitude 16. Plus la note est basse, meilleures sont la simplicité ou l'exactitude.

Lemoine procède alors au codage des solutions du problème d'Apollonius qu'il a retenues : celle de Viète, celle de Gergonne, celle de Fouché, enfin une dernière, récente et peu connue, qu'il explique, celle de Mannheim.

La première, codée $52R_1 + 26R_2 + 98C_1 + C_2 + 58C_3$, obtient en simplicité 235, et en exactitude 151. Celle de Gergonne, codée $120R_1 + 60R_2 + 104C_1 + 72C_3$ donne 356 en simplicité, 224 en exactitude. La solution Fouché $112R_1 + 56R_2 + 53C_1 + 26C_3$, sera honorée de 247 en simplicité, 165 en exactitude.

La solution de Mannheim, parue en 1885 dans les *Nouvelles Annales* est ainsi décrite :

Soit O, O_1 et O_2 les trois circonférences, de centres o, o_1, o_2. On mène par o, o_1 et o_2 trois rayons parallèles et de même sens.

Soit a un point quelconque de O. Au moyen de rayons parallèles sont construits sur O_1 et O_2 les points a_1 et a_2 antihomologues de a et, a'_2, antihomologue de a_1 sur O_2.

Prenant un point quelconque α sur O, construisons α_2 et α'_2 analogues à a_2 et a'_2.

Les droites $a_2\alpha'_2$, $a'_2\alpha_2$ se coupent en K, et les droites $a_2\alpha_2$ et $a'_2\alpha'_2$ se coupent en K'.

La droite KK' coupe O_2 en deux points M_2 et M'_2, qui sont les points de contact de O_2 avec deux circonférences demandées. Ces circonférences touchent O et O_1en des points qui sont les antihomologues de M_2 et M'_2.

Pour trouver les trois autres couples de solutions, il faudra utiliser au départ des rayons qui ne seront pas tous parallèles. L'auteur désigne par + le sens adopté pour obtenir M_2 et M'_2 et par - le sens opposé. Toutes les possibilités sont résumées dans un tableau :

Sens des rayons menés	par o	par o_1	par o_2
pour l'un des trois couples	−	−	+
pour le deuxième couple	−	+	+
pour le troisième couple	+	−	+

Ce tableau en rappelle beaucoup d'autres. Le tableau est aussi une méthode en géométrie.

Quoiqu'il en soit, il y a huit solutions possibles en général.

La construction correspondant à cette solution est codée $108R_1 + 54\ R_2 + 20C_1 + 10C_3$, et obtient donc 192 pour la simplicité et 128 pour l'exactitude.

Au total, la moins bonne pour la construction est la solution de Gergonne. *La moins bonne pour la construction est la célèbre et didactiquement élégante solution de Bobillier*[164] *et Gergonne ; son coefficient de simplicité, c'est-à-dire le nombre d'opérations élémentaires qu'elle exige est 356. Cela surprendra certainement au premier moment beaucoup de géomètres ; j'ai été bien surpris moi-même*[165], souligne notre auteur.

Celle de Fouché et celle de Viète sont à peu près équivalentes, la dernière étant tout de même supérieure. Enfin celle qui l'emporte pour la simplicité et l'exactitude est la dernière née, celle de Mannheim. Cette construction est, en fait, celle de Fouché un peu simplifiée. Lemoine fait tout de même remarquer qu'elle a perdu en cours de route quelque pouvoir, puisque sous cette forme, elle ne renferme plus la possibilité de résoudre tous les autres problèmes de l'*Apollonius Gallus*. Tout dépend de ce que l'on veut :

> *Celle de M. Mannheim, qui n'avait, par conséquent, point été suffisamment remarquée, est de beaucoup la meilleure au point de vue où nous nous plaçons, mais bonne pour le cas général, elle ne s'applique pas à tous les cas particuliers ; je ne vois point, par*

---

[164] Bobillier a contribué à l'amélioration de la solution dite de Gergonne, d'où le nom utilisé ici.
[165] Ibid., p.472.

exemple, comment elle conduit à la construction des cercles tangents à un cercle, à une droite, et passant par un point. Si c'est une infériorité théorique, elle importe bien peu au dessinateur ; car lorsque parmi les cercles donnés il y en a qui sont les variétés point ou droite, le problème est plus simple à résoudre que le problème où l'on a réellement trois cercles[166].

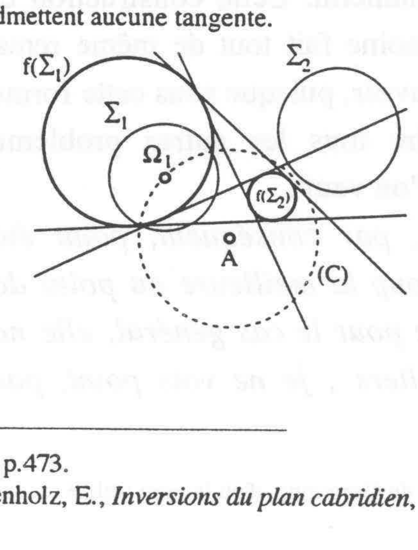
Des constructions à l'ordinateur ?

Un nouvel outil de construction est apparu dans le monde de la géométrie. Il n'est pas impensable qu'un jour assez proche, la règle et le compas soit considérés comme des instruments obsolètes. Les coefficients de simplicité ou d'exactitude de Lemoine devront être réinventés. Un logiciel comme Cabri II, permet de "construire" sans règle ni compas, des médiatrices, des hauteurs, des tangentes..., permet même d'obtenir la transformée d'une figure par inversion.

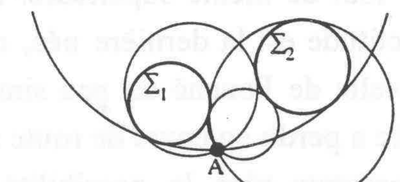
Voici ce que propose la revue *Abracadabri* [167], par exemple, pour la construction d'un cercle tangent à deux cercles donnés et passant par un point donné, qui est nous le savons le neuvième problème de Viète auquel le dixième et dernier se ramène :

Une première application

Donnons-nous deux cercles Σ_1 et Σ_2 de centres Ω_1 et Ω_2, et un point A. On veut construire les cercles passant par A et tangents aux cercles Σ_1 et Σ_2. Donnons-nous une inversion f de pôle A, définie par exemple par le cercle (C) de centre A passant par Ω_1. On applique deux fois la macro *inverse(cercle)* pour créer $f(\Sigma_1)$ et $f(\Sigma_2)$. Il existe pour ces deux cercles $f(\Sigma_1)$ et $f(\Sigma_2)$ trois possibilités : soit ils sont extérieurs l'un à l'autre, et dans ce cas ils admettent 4 tangentes communes, soit ils se coupent et ils admettent 2 tangentes, soit l'un est intérieur à l'autre et ils n'admettent aucune tangente.



Dans une position fidèle au premier cas, construisons les 4 droites D_1, D_2, D_3 et D_4, tangentes aux cercles $f(\Sigma_1)$ et $f(\Sigma_2)$. Si une de ces droites passe par A, son image est une A-droite, et c'est un A-cercle dans le cas contraire. De toutes manières, le théorème 3 nous assure que ces images, qui passent par A, sont tangentes à $f(f(\Sigma_1))$ et à $f(f(\Sigma_2))$, c'est à dire à Σ_1 et Σ_2 : merci f pour ta délicieuse involutivité...



Il ne reste donc plus qu'à appliquer 4 fois la macro *inverse(droite)* aux droites D_1, D_2, D_3 et D_4.

[166]Ibid. p.473.

[167]Hakenholz, E., *Inversions du plan cabridien*, abraCadabri, n°10, septembre octobre 1995, P, 12.

C'est une nouvelle ouverture pour le problème d'Apollonius ; c'est aussi d'autres interrogations : quelle est la valeur théorique d'une telle construction ? quelle est sa précision ? Quel nouveau monde géométrique s'ouvre devant nous ?

Quel bel avenir aussi pour ce vieux problème !

Conclusion :

Nous avons proposé, utilisant le problème des trois cercles, de parcourir quelques étapes de l'histoire de la géométrie, sur des textes évocateurs.

Survolant ainsi quatre siècles d'évolution des notations, du langage, des méthodes, nous pouvons mesurer que c'est sans doute l'utilisation et la culture croisée de plusieurs domaines des mathématiques qui permettent le progrès. Les géomètres du XIX° siècle ont bien compris que, s'appuyant sur la géométrie des Anciens, et lui donnant la force des méthodes analytiques, ils construisaient une nouvelle géométrie.

Cette "nouvelle" géométrie est en voie de disparition, puisqu'elle n'est plus enseignée. C'était pourtant de la belle et bonne géométrie. Ce peut être encore une formation efficace à la vision de l'espace, à la mise en relation des formes, à une mise en pratique des transformations. Ce n'est pas seulement la géométrie des figures, puisqu'elle permet de penser l'infini et l'imaginaire. En fait, elle permet d'abstraire, mais pas de n'importe quelle façon. Il faut pouvoir favoriser l'épanouissement de toutes les formes d'expression, et nous pourrions reprendre un jugement un peu incisif de Chasles, dans son aperçu historique :

> *On dira, sans doute que les goûts sont libres en mathématiques comme dans toute autre carrière de la république des lettres. [...] Or, les doctrines analytiques et les découvertes qu'il est possible de présenter par l'analyse, sont seules enseignées dans ces cours ; peut-on dire que les goûts sont libres ? Cette indifférence, ou plutôt cette exclusion d'une partie si importante des sciences mathématiques, n'est pas philosophique, et fait un très grand tort à leur progrès*[168].

Les mathématiques contemporaines, et la géométrie en particulier, ne sont plus comparables à celles du XIX° siècle ; mais les problèmes de la formation initiale demeurent, et la géométrie joue un très grand rôle dans la vision mathématique, l'intuition, nécessaire dans tous les domaines.

La question ne peut sans doute pas être tranchée de la primauté du numérique sur le géométrique ou l'inverse. Se référant à l'histoire, Poncelet nous rappelait la naissance de l'analyse moderne :

> *Quoiqu'il en soit, et gardons nous de l'oublier, c'est en essayant de soumettre aux combinaisons du calcul les questions de la Géométrie*

[168]Chasles, M., *Aperçu sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, ouvrage cité, p. 185.

ordinaire, où toutes les quantités sont nécessairement représentées par des caractères étrangers à la grandeur, que Viète eut l'idée d'introduire les lettres alphabétiques en Algèbre ; c'est donc à la Géométrie, ou plutôt aux conceptions géométriques, que le calcul algébrique est redevable de son plus beau perfectionnement.[169]

Les débats du début du XIX° siècle sur la toute puissance du numérique ne sont pas tout à fait désuets. C'est une compréhension du monde qui est en jeu .

Au demeurant, nous avons toujours beaucoup à apprendre des géomètres passés, et les progrès et l'efficacité ne sont pas toujours là où on les attend. L'*Apollonius Gallus*, après quatre siècles, demeure un grand texte de l'histoire des mathématiques.

Nous terminerons en laissant la plume à Lamé :

Que doit-on le plus admirer, ou du calcul qui commence les travaux avec confiance et finit presque toujours par répondre à la question, ou de la géométrie qui part sans rien promettre et revient quelquefois offrir, avec la solution du problème, celle de plusieurs autres qu'on ne lui demandait pas et qu'elle a recueillis sur son passage ?[170]

---

[169] Poncelet, J. V., *Applications d'analyse et de géométrie*, tome II, ouvrage cité, p. 330.

[170] Cité par Chasles, dans *Rapport sur les progrès de la géométrie*, extrait de *Avantages de la géométrie*, Paris, 1818.

Bibliographie

Barbin, E., *Méthode cartésienne et figure géométrique dans les Éléments de géométrie de Lamy,* Questions de méthodes au XVII° siècle, IREM des pays de Loire, centre du Mans, 1994.

Bellavitis, G., *Teoria delle figure inverse e loro uso nella geometria elementare,* Annali delle Scienze del regno Lombardo-Veneto, vol. 6, 1836.

Bellosta-Baylet, H., *L'analyse et la synthèse selon Ibrahim Ibn Sinan,* Thèse de doctorat, Université de Paris VII.

Berger, M., *Géométrie,* tome I, Paris, Nathan, 1990.

Bkouche, Lehmann, *Initiation à la géométrie,* Paris, PUF, 1988.

Blay, M., *Les "Principia" de Newton,* Paris, PUF, 1995.

Bossut, C., *Essai sur l'histoire générale des mathématiques,* Paris, 1802.

Boyer, C. B., *A History of mathematics,* 2° ed., New York, John Wiley & sons, 1989.

Briot, C., Bouquet, C., *Leçons nouvelles de géométrie analytique,* Paris, Dezobry et Magdeleine, 1851.

Brunschvicg, L., *Les étapes de la philosophie mathématique,* Paris, Blanchard, 1981.

Busard, H. L. L. , *Viète,* Dictionary of scientific biography, vol. 20, New York, Scibner's, 1976.

Camerer, G., *Apolloni de tactionibus quae supersunt, ac maxime lemmata Pappi in hos libros graece nunc primum edita e codicibus manuscriptis, cum Vietae librorum Apollonii restitutione, adjectis observationibus, computationibus ac problematis Apolloniani historia, a Joanne Guilielmo Camerer,* Gothae, 1795.

Carnot, L. N. M., *De la corrélation des figures de géométrie,* Paris, Duprat, 1801.

Carnot, L. N. M., *Géométrie de position,* Paris, Duprat, 1803.

Catalan, E., *Théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire,* Paris, Victor Dalmont, 1879.

Cauchy, A. L., *Mener un cercle tangent à trois cercles donnés,* Correspondance sur l'École polytechnique, tome I, cahier n° 6, juillet 1806.

Cauchy, A. l., *Recherches sur les polyèdres,* Journal de l'École polytechnique, cahier n° 16, mai 1813.

Chasles, M., *Aperçu historique sur l'origine et les développements des méthodes en géométrie,* 3° ed., Paris 1889.

Chasles, M., *Rapport sur les progrès de la Géométrie*, Paris, imprimerie nationale, 1870.

Chasles, M., *Traité de Géométrie supérieure*, Paris, Gauthier-Villars, 1880.

Christmann, W. L., *Apollonius suevus, sive tactionum problema nunc demum restitutum, accedente censura in Vietam*, Tubingae, 1821.

Collette, J. P. , *Histoire des mathématiques*, Montréal, Vuibert-ERPI, 1979.

Combette, E., *Cours de géométrie élémentaire*, Paris, Félix Alcan, 1887.

Commission Inter-Irem d'épistémologie et histoire des mathématiques, *La mémoire des nombres*, actes du X° colloque , Cherbourg, 1994.

Commission inter-Irem d'épistémologie et d'histoire des mathématiques, *La démonstration mathématique dans l'histoire*, actes du VII° colloque, Besançon, 1989.

Condillac, E. , *La langue des calculs*, édition posthume, Paris, 1798.

Coxeter et Greitzer, *Redécouvrons la géométrie*, Paris, Dunod, 1971, J. Gabay, 1997.

Coxeter, H. S. M., *Introduction to Geometry*, New York, Wiley, 1961.

Coxeter, H. S. M., *The problem of Apollonius*, The American Mathematical Monthly, janvier 1968.

Dedron, Itard, *Mathématiques et mathématiciens*, Paris, Magnard, 1959.

Delambre, J. B., *Rapports à l'Empereur sur le progrès des sciences, des lettres et des arts, depuis 1789*, tome I, Les sciences mathématiques, Paris, Belin, 1989.

Desboves, M., *Questions de géométrie élémentaire*, Paris, Delagrave, 1875.

Descartes, R., *Correspondance*, Paris, PUF, 1956.

Dhombres, J. et N., *Lazare Carnot*, Paris, Fayard, 1997.

Dhombres, J. et N., *Naissance d'un nouveau pouvoir : sciences et savants en France 1793-1824*, Payot, 1989.

Diophante d'Alexandrie, *Les six livres d'arithmétique et le livre des nombres polygones*, trad. Ver Eeccke, Blanchard, Paris, 1959.

Dody, B., *La correspondance sur l'École polytechnique*, mémoire de DEA, EHESS, 1992.

Dörrie, H., *100 great problems of elementary mathematics*, Dover, 1965.

Durrande, J. B., *Théorie élémentaire des contacts des cercles, des sphères, des cylindres et des cônes*, Annales de mathématiques pures et appliquées, tome XI, n° I, 1820.

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées, sous la direction de J. Molk, tome III, Paris, Gauthier-Villars, 1904-1914, J. Gabay, 1992.

Euclide - Vitrac, *Euclide, Les Éléments*, trad. B. Vitrac, Paris, PUF, 1990-1994.

Euler, L., *Solutio facilis problematis quo quaeritur circulus qui datos tres circulos tangat*, Opera Omnia, vol. XXVI, Lausanne, Andreas Speiser, 1953.

F. G. M., *Exercices de géométrie*, 6° ed., Paris, 1920, éd. J. Gabay, 1991.

Fermat, P., *Des contacts sphériques,* Œuvres, trad. de Paul Tannery, Paris, Gauthier-Villars, 1896.

Fouché, M., *Sur les cercles qui touchent trois cercles donnés ou qui les coupent sous des angles donnés,* Nouvelles annales de mathématiques, troisième série, tome XI, juin, aout, octobre, 1892.

Gaultier de Tours, L., *Mémoire sur les moyens généraux de construire graphiquement un cercle déterminé par trois conditions, et une sphère déterminée par quatre conditions*, Journal de l'École polytechnique, cahier n° 16, mai 1813.

Gergonne J. D., *De l'analise et de la synthèse, dans les sciences mathématiques,* Annales de mathématiques pures et appliquées, tome VII, N° XII, 1817.

Gergonne, J. D., *Recherche du cercle qui en touche trois autres sur un plan,* Annales de mathématiques pures et appliquées, tome VII, n° X, 1817.

Gergonne, J. D., *Recherche du cercle qui en touche trois autres sur une sphère,* Annales de mathématiques pures et appliquées, tome IV, n° XII, 1814.

Gergonne, J. D., *Théorie générale des contacts et des intersections des cercles, par M. Steiner, extraite du journal allemand de M. Crelle,* Annales de mathématiques pures et appliquées, tome XVII, n° X, 1827.

Ghetaldi, M., *Marini Gethaldi de resolutione et compositione mathematica,* libri V, Rome, 1630.

Granger, G. G., *Essai d'une philosophie du style*, Paris, Odile Jacob, 1988.

Grattan-Guiness, I., *The Fontana history of mathematical sciences*, London, Fontana press, 1997.

Grisard, J., *François Viète, mathématicien de la fin du XVI° siècle, Essai bio-bibliographique,* Thèse de troisième cycle, Paris, 1969, EPHE, VI° section.

Hachette, J. N., *Mémoire sur le contact des sphères,* correspondance sur l'École polytechnique, tome I, cahier n° 2, septembre 1804.

Hadamard, J., *Leçons de géométrie,* vol. I, géométrie plane, 13° ed. , Paris, Armand Colin, 1947, éd. J. Gabay, 1988.

Hakenholz, E., *Inversion du plan cabridien*, Abracadabri, n° 10, septembre-octobre 1995.

Haumann, C., G., *Versuch einer wiederherstellung der Bücher des Apollonius von Perga von Berührungen*, Breslau, 1817.

Hofmann, J. E., *Introduction dansViète, Opera mathematica*, Hildesheim, G. O., Verlag, 1970.

Itard, J., *Essai d'histoire des mathématiques*, Paris, Blanchard, 1984.

J. G. C., (Louis Alexandre Olivier de Corancez), *Précis d'une nouvelle méthode pour réduire à de simples procédés analytiques les principaux théorèmes de la géométrie et la dégager des figures et constructions qu'on y a employées jusqu'à présent,* Paris, an VI.

Jaouiche, K., *Aperçu sur le problème des trois cercles,* 3° symposium maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes, à paraître.

Jullien, V., *Descartes - La géométrie de 1637,* Paris, PUF, 1996.

Khabelashvili, A. V., *Problem by Apollonius of Perga,* Actes du congrès d'histoire des sciences, Liège, 1997, à paraître.

Klein, F., *Le programme d'Erlangen,* Paris, Gauthier-Villars, 1974, J; Gabay, 1991.

L'Hospital, (Marquis de), G. F., *Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la résolution des équations dans les problèmes tant déterminez qu' indéterminez,* ouvrage posthume, Paris, Boudot, 1707.

Lacroix, S. F., *Traité élémentaire de trigonométrie rectangulaire et sphérique, et d'application de l'algèbre à la géométrie,* 4° éd., Paris, Courcier, 1807.

Lamy, L., *Le journal de l'École polytechnique de 1795 à 1831,* mémoire de DEA, Sciences et techniques en perspective, vol. 32, 1995, centre Viète, Université de Nantes.

Laplace, P. S., *Exposition du système du monde,* Paris, 1796, Fayard, 1984.

Lawson, J., *The two books of Apollonius Pergaeus, concerning tangencies, as they have been restored by Franciscus Vieta and Marinus Ghetaldus, with a supplement,* London, 1771.

Lebesgue, H., *Leçons sur les constructions géométriques,* Paris, Gauthier-Villars, 1950, J. Gabay, 1987.

Legendre, A. M., *Éléments de géométrie,* 11° ed., Paris, 1864.

Lemoine, E., *Application d'une méthode d'évaluation de la simplicité des constructions à la comparaison de quelques solutions du problème d'Apollonius,* Nouvelles annales de mathématiques, troisième série, tome XI, 1892.

Lemoine, E., *Géométrographie ou art des constructions géométriques,* Paris, 1902.

Liouville, *Journal de mathématiques pures et appliquées,* tomes X, XI, XII, 1845 à 1847.

Magnus, L. I., *Nouvelle méthode pour découvrir des théorèmes de géométrie,* Journal für die reine und angewandte Mathematik, vol. 8, 1832.

Mascheroni, L., *Géométrie du compas, ouvrage traduit de l'italien par M. Carette,* Paris, 1798.

Montucla, J., F., *Histoire des mathématiques,* Paris, Agasse, 1799-1802, Blanchard, 1968.

Newton, H. A., *To describe a circle tangent to three given circles,* The Mathematical Monthly, vol. 1, n° VII, Cambridge, Mass., 1859.

Molk, J. (ed.), *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, t. III, vol.2, fasc. 1, Géométrie descriptive et géométrie élémentaire, et t.III, vol. 1, fasc. 1 et 2, Fondements de la géométrie, Gauthier-Villars, Paris, 1904 à 1914, rééd. Gabay, Paris, 1992.

Newton, I., *Arithmetica Universalis*, London, 1707, trad. française de N. Beaudeux, 1802.

Newton, I., *Philosophiae naturalis principia mathematica*, London, 1687, trad. Française de Mme du Chastelet, Paris, 1759, rééd. Blanchard, Paris, 1964.

Olivier, T., *Solution d'un problème de géométrie*, correspondance sur l'École polytechnique, tome III, cahier n° 1, janvier 1814.

Pappus d'Alexandrie, *La collection mathématique*, trad. de Paul Ver Eecke, Paris, Blanchard, 1982.

Pedoe, D., *On a theorem in geometry,* The American Mathematical Monthly, juin-juillet 1967.

Petersen, J., *Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques,* traduit par O. Chemin, Paris, Gauthier-Villars, 1880, éd. J. Gabay, 1990.

Poincaré, H., *L'invention mathématique,* Bulletin de l'institut général psychologique, n° 3, mai-juin 1908, éd. J. Gabay, 1993.

Poncelet, J. V., *Construction géométrique d'un cercle qui en touche trois autres donnés sur un plan ou sur une sphère, d'un cône droit qui en touche trois autres de même sommet, et d'une sphère qui en touche quatre autres dans l'espace,* Annales de mathématiques pures et appliquées, tome XI, n° X, 1821.

Poncelet, J. V., *Problèmes de géométrie,* Correspondance sur l'École polytechnique, tome III, cahier n° 3, janvier 1811.

Poncelet, J. V., *Réflexions sur l'usage de l'analise algébrique dans la géométrie ; suivies de la solution de quelques problèmes de la géométrie de la règle,* Annales de mathématiques pures et appliquées, tome VIII, n° V, 1817.

Poncelet,J. V., *Applications d'analyse et de géométrie*, Paris, Mallet-Bachelier, 1862-1864.

Quetelet, A., *Résumé d'une nouvelle théorie des caustiques*, Académie Royale des sciences de Belgique, nouveaux mémoires, vol. 4, 1827.

Réaux, T., *Mémoires pour servir à l'histoire du XVII° siècle,* 2° ed. Paris, Garnier, 1861.

Ritter, F., *Introduction à l'Art analytique*, Bulletino di Bibliographa e di Storia delle Scienze Matematische e Fisiche, Rome, vol. 1, 228, 1868.

Rosen, E., *Regiomontanus*, Dictionary of scientific biography, vol. 20, New York, Scibner's, 1976.

Rouché, E., et de Comberousse, C., *Traité de géométrie*, 8° ed. Paris, 1912.

Simpson, Th., *A treatrise of algebra wherein the principles, are demonstrated and applied*, Londres, John Nourse, 1755.

Steiner, J., *Jacob Steiner's geometrical constructions with a ruler, given a fixed circle with its center*, traduction anglaise de la première édition allemande de 1833, par M. E. Stark. The scripta Mathematica Studies, number four, Yeshiva University, New York, 1950.

Sydler, J. P., *Aperçus sur la vie et l'œuvre de Jakob Steiner,* Bulletin de la société mathématique suisse, juin 1964.

Taton, R., *Histoire générale des sciences*, Paris, PUF, 1957-1964.

Vaulézard, *La nouvelle algèbre de M. Viète*, Paris, Julien Jacquin, 1630, Fayard, 1986.

Viète, F., *Opera mathematica*, Abrabim Elzeviriorum, 1646, réimp. G. Olms Verlag, avec introduction de Joseph E. Hofmann, Hildesheim, 1970.

Westfall, R., *Newton*, Trad. française, Flammarion, 1994.

Witmer, T. R., *Translator introduction, in The analytic Art, Nine studies in Algebra, Geometry and Trigonometry,* Kent, The Kent State University Press, 1983, trad. en français de l'introduction, Plot, n°53, 1990.

Index des noms cités