IREM

des Pays de la Loire

LES MATHÉMATIQUES NE SE SONT PAS FAITES EN UN JOUR ...

Promenades historiques

Deuxième promenade : Les moins que rien
et les imaginaires mènent au réel.

Mai 1998

INSTITUT DE RECHERCHE SUR
L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES
DES PAYS DE LA LOIRE

2, rue de la Houssinière • BP 92208
44322 NANTES CEDEX 03
Tel. 02 51 12 59 41
Site : www.irem.sciences.univ-nantes.fr/

PREAMBULE

Nous vous proposons au travers d'une série de petits cahiers quelques promenades historiques au fil des mathématiques.

Nous nous adressons autant aux élèves qu'aux professeurs ; chacun, nous l'espérons, pourra y trouver son compte.

Pour cela, nous avons choisi un langage simple et vous trouverez au long des pages des activités expérimentées avec nos élèves. Ces activités permettent soit d'introduire une notion du programme, soit de la prolonger, soit aussi d'acquérir une "culture mathématique".

Les mathématiques ne se sont pas faites en un jour ; elles ont une histoire pleine de bonds et de rebonds ; en lisant cette histoire, l'élève comprendra que ses difficultés furent peut-être aussi celles des plus grands mathématiciens ; il découvrira comment certaines notions ont évolué et pourquoi ; il fera des mathématiques autrement.

Nous appuierons ces promenades sur la lecture de textes originaux en proposant, lorsque cela semble nécessaire pour la compréhension, des traductions en termes plus modernes.

Nous indiquerons le ou les niveaux d'accessibilité, et les prérequis, le cas échéant. Mais nous avons pris le parti de ne privilégier aucun niveau, du collège au lycée, en passant par le lycée professionnel.

Nous vous souhaitons d'agréables promenades mathématiques. Le rêve est peut-être au bout du chemin.

Ce fascicule s'adresse plutôt à des élèves de 1ère ou Terminale.

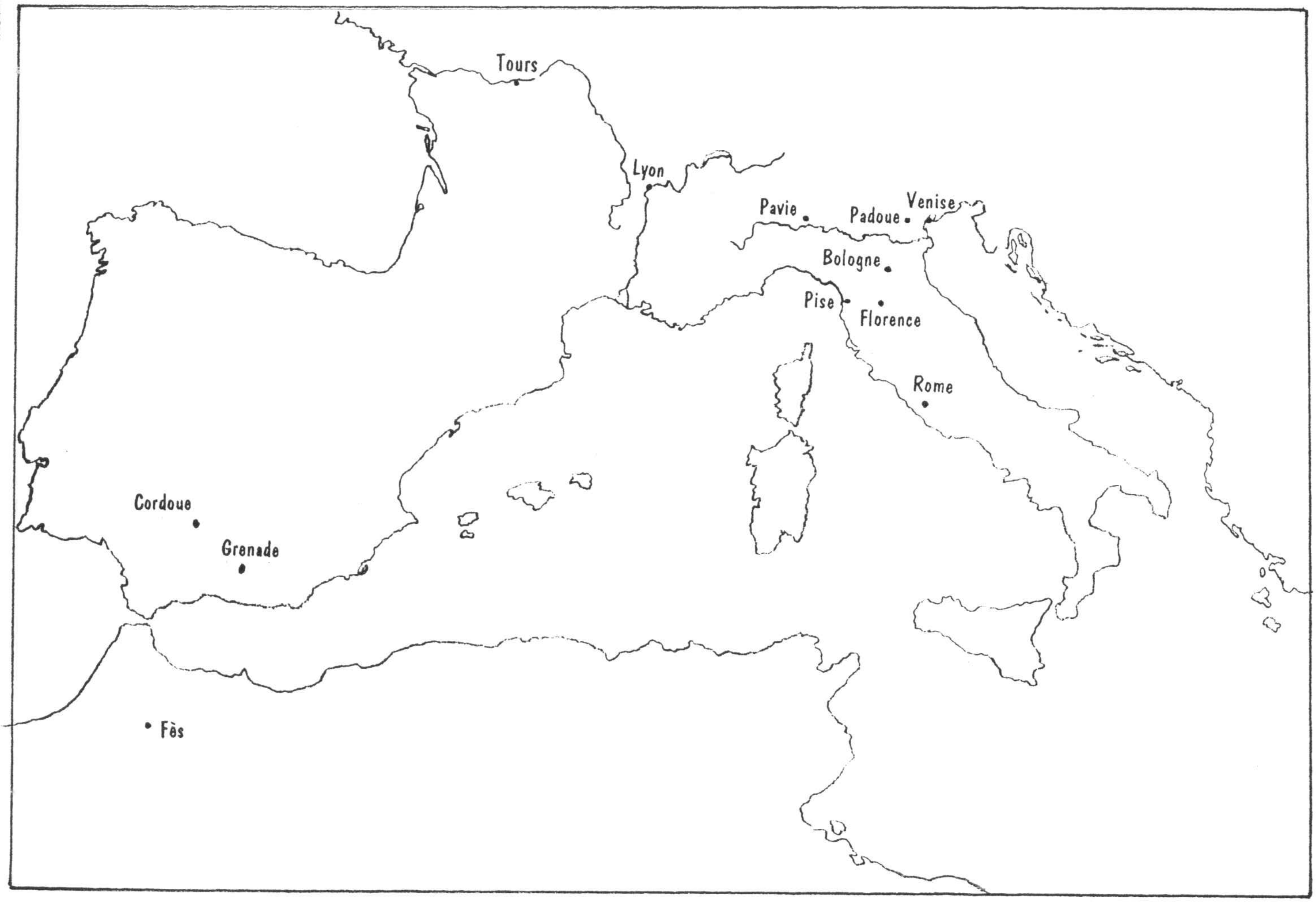
Néanmoins, on pourra trouver dans les chapitres I, IV,V, des exercices concernant les négatifs et les équations, abordables en fin de collège et en 2nde.

Anne BOYÉ - Marie-Cécile COMAIRAS - Madeleine HERBET - Xavier LEFORT - Pierre MERCIER - Marc PEANO.

Ces idées sont très élémentaires; néammoins il n'est pas si aisé qu'il pourrait le paraître d'abord de les établir d'une manière bien lumineuse, et d'y donner cette généralité que demande leur application aux calculs. On ne peut d'ailleurs douter de la difficulté du sujet, si l'on réfléchit que les sciences exactes avaient été cultivées pendant un grand nombre de siècles, et qu'elles avaient fait de grand progrés avant qu'on eût acquis les véritables notions des quantités négatives, et qu'on eût conçu la manière générale de les employer.

Argand, *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques,* 1806.

1- "Un moins que rien"



Vers 1450 Ibn Razen qui vient d'on ne sait où, peut-être du Maghreb, chemine avec Olivier du côté de Quéribus ou de Peyrepertuse. Il est médecin, mathématicien, géographe...La conversation avec Olivier porte sur Al-Qalasadi, Averroes[1]*...Il est l'otage d'Olivier; il vont bientôt se découvrir amis, liés par un formidable secret mathématique, une révolte et un étonnement partagés.*

Dans le donjon du château de Quéribus, ils ont découvert un manuscrit: Compendi del arte del algorisme

Le problème produit cinq équations et les phrases étirent leurs calculs

"Stempre sta eguale
Al cubo delle cose netto
Quando che'l cubo restasse lui solo,
Tu osserverai..."

Mais soudain, Ibn Razen se redresse, s'immobilise un instant, surpris, inquiet, son regard s'absente derrière ses paupières à demi fermées, puis sa main tourne rapidement les dernières feuilles. Il se penche, son doigt s'est arrêté sur les dernières lignes du manuscrit et les frappe à petits coups redoublés. Ici le texte donne une des solutions du problème et c'est le nombre[2] $-10\frac{3}{4}$. Puis il dit quelques mots, rapides et coléreux, revient en arrière dans sa lecture, cherche ici et là au hasard des feuilles, troublé dans sa tranquille certitude, presque fébrile.

Olivier a rejoint son étonnement:

-La solution est $-10\frac{3}{4}$. Cela n'existe pas-, dit Olivier, avec timidité. Mais dans l'éblouissement de cette nuit, n'est-il pas prêt à accepter toutes les étrangetés?

-Cela n'existe pas!-, crie Ibn Razen, farouche. Cette quantité là est au-dessous de rien, elle n'a pas de réalité ni de respiration dans le monde des choses! Mais plus que sa présence même au bout du calcul, ce qui l'étonne, c'est l'accueil sans réserve que le mathématicien provençal lui fait. Qui donc était celui là? Un marchand lombard? Mais non, ce sont gens qui n'acceptent que des espèces bien sonnantes. Un juif peut-être, à l'affût de quelque secret insensé de la Kabbale? Ou peut-être? Oui, c'est peut-être tout simplement un copiste de couvent qui s'est perdu dans la réécriture du manuscrit? Ibn Razen se force au calme, reprend sa lecture, vérifie, vérifie encore. En vain. La solution est $-10\frac{3}{4}$. Et pas la moindre réticence. Aucune remarque, aucune mise en garde, les calculs vont leur chemin d'habitudes et la main n'a pas trébuché au dernier moment. Peut-être... Est-ce qu'Olivier est sûr que c'est là le dernier feuillet? N'a-t-il pas égaré... mais non, il relit lentement la fin du texte, le récit s'achève avec netteté, un trait est tracé, une arabesque rouge, comme une signature. L'histoire est fermée, sans hésitation. Ibn Razen en prend son parti, il fait quelques pas dans la salle, il sourit vaguement, comme détaché, amusé.

"Comment peser un moins que rien?" dit-il.

---

[1]Averroes (1126-1198), nom latin de Ibn Rushd, médecin, mathématicien et juriste arabe, surtout connu comme commentateur d'Aristote..

[2]signifie -10,75

"-10! crie Ibn Razen, si je dis que tu m'as donné -10 écus, cela veut dire simplement que tu m'as ôté dix écus!"

Olivier pense à la rançon qu'il n'exigera pas, et à ce qu'il faudra inventer pour ses hommes.

"Cela est absurde! Je regarde autour de moi, les choses, tes livres, tes chiens; au dehors tes hommes et les pierres du château. Plus loin, en Espagne, je vais dans les marchés, les boutiques les ports, où l'on vend, où l'on mesure, où l'on compte, où l'on construit. Je vois les hommes qui arpentent les terrains, et ceux qui fabriquent moulins et norias. Je vais dans nos écoles, là où j'ai appris, là où d'autres apprennent encore davantage. Je lève les yeux pour dénombrer les étoiles du ciel et lire leur géométrie. Tout ce que je sais du monde, tout, et sur les travaux de nos maîtres, me crie que ce résultat est absurde!"

Jacques Bonnet, *La folie de Jérôme Cardan*, Les presses du languedoc, 1991.

Une équation peut-elle avoir une solution négative?

Les mathématiciens de la Renaissance européenne n'entrevoient même pas cette possibilité qui n'aurait aucun sens. Ils sont comme notre Ibn Razen de l'histoire.

Résoudre une équation c'est chercher une "chose" qui égale un nombre... Le nombre est positif"par essence"; une chose c'est une ligne, un poids... on peut l'exhiber, la construire.

Pouvez vous construire quelque chose de négatif?

Les fractions, les racines... même les racines, ces fameux nombres sourds, peuvent se construire, mais le négatif?

Exercice:

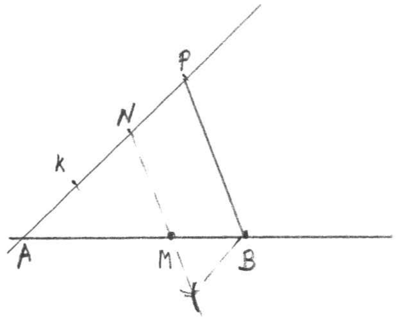
A 1 B

Nous supposons que AB vaut 1. Construire[3] une ligne CD qui vaut $\frac{2}{3}$, puis une ligne EF qui vaut 1,75 (qui serait écrite en général au moment de notre histoire $1\frac{3}{4}$, pourquoi?); construire ensuite une ligne GH qui vaut $\sqrt{13}$.

[3] "construire" signifie avec une règle non graduée et un compas.

Éléments de corrigé

1)



(AP) est une droite quelconque passant par A;

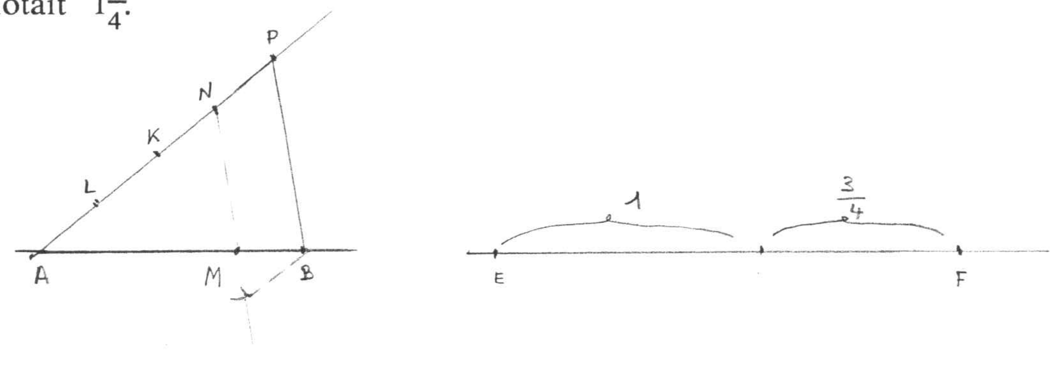
AK=KN=NP

On joint PB; on construit le parallélogramme NPBJ.

(NM) est donc parallèle à (PB) et d'après le théorème de Thalès: $AM=\frac{2}{3}AB$.

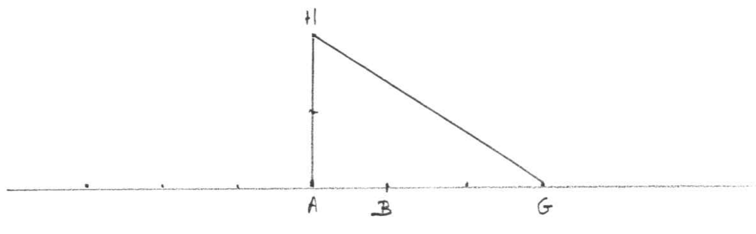
Donc si AB=1 alors $AM=\frac{2}{3}$.

2)C'est seulement en 1585 que la notation des nombres en écriture décimale (1,75) fut inventée par Simon Stévin. Au XV° siècle, 1,75 se notait $1\frac{3}{4}$.



S'inspirer de la construction précédente.

3)



AG vaut 3, AH vaut 2, HG vaut $\sqrt{13}$ d'après le théorème de Pythagore.

Pour construire AH, on peut utiliser la construction d'une médiatrice.

Pour tous les mathématiciens de cette époque, l'équation que nous écrivons $x+5=3$ n'a pas de solution; on le sait à l'avance, puisqu'il serait stupide de chercher quelque chose qui ajouté à 5 donne 3.

Mais si vous voulez résoudre une équation du second degré, par exemple, il est plus difficile de savoir à l'avance s'il y a des solutions "non absurdes"; a fortiori si vous vous aventurez dans le troisième ou le quatrième degré[4].

Ce sont ces chemins risqués dans lesquels vont s'engager nos mathématiciens. Nous verrons qu'ils auront des inventions extraordinaires, impensables...Et pourtant, le négatif reste une barrière difficilement franchissable.

Attachons nous pour commencer au simple second degré. Les mathématiciens arabes l'ont particulièrement bien étudié. D'Al-Kwàrismi jusqu'à Al-Qalasadi, ils en ont donné toutes les règles.

Il y a trois sortes d'équations du second degré à trois termes:

1) Un carré et des racines sont égaux à un nombre
2)Un carré et un nombre sont égaux à des racines
3)Un nombre et des racines sont égaux à un carré

Cequi s'écrit actuellement:

$x^2+mx=a$

$x^2+a=mx$

$mx+a=x^2$

Question: Écririez vous tous ces types d'équations? Pourquoi les mathématiciens arabes ou de la Renaissance européenne distinguent-ils ces cas? Pourquoi s'arrêtent-ils là? Auraient-ils pu écrire d'autres équations du second degré?

[4]Une équation du second degré serait par exemple:$x^2+2x-4=0$, du troisième degré: $2x^3-x^2+2x-3=0$, du quatrième degré: $x^4+2x-6=0$ etc...

Éléments de corrigé:

Nous n'avons qu'un seul type pour ces trois équations:

$x^2+mx+a=0$, en supposant que m et a peuvent être négatifs ou positifs.

A l'époque que nous considérons, les coefficients[5] négatifs sont évités, et par ailleurs on ne peut considérer que quelque chose soit égal à rien; le second membre de l'égalité ne peut être 0.

$x^2-2x+3=0$ s'écrirait $x^2+3=2x$.

Il y a des équations du second degré à deux termes, comme:

$x^2-2x=0$ (ou $x^2=2x$)

$x^2-5=0$ (ou $x^2=5$)

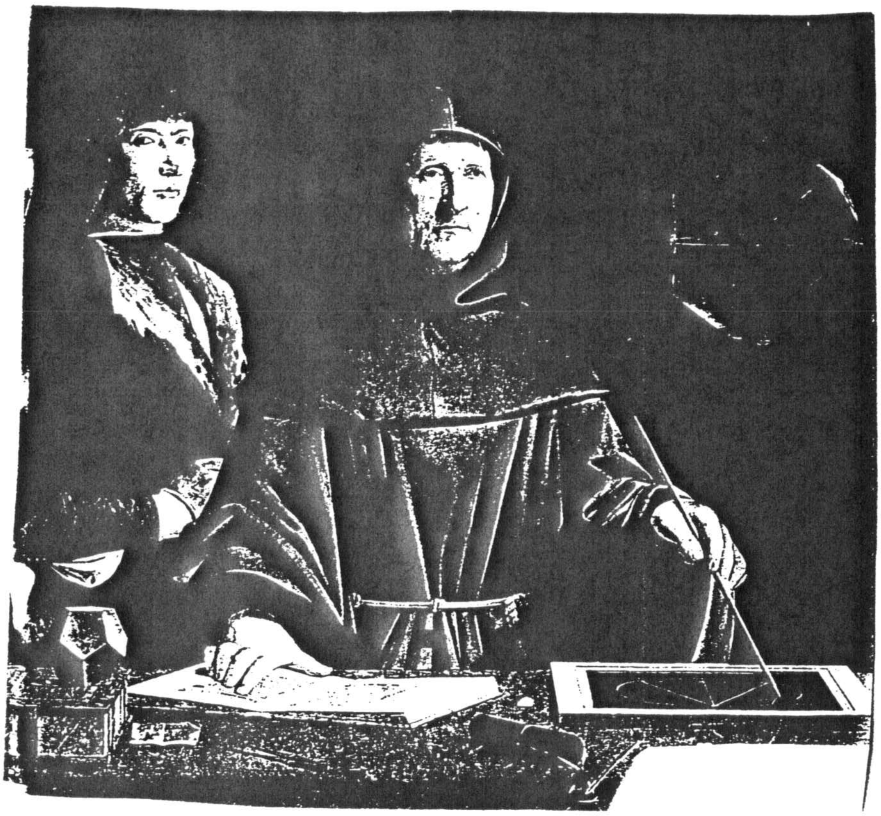
....

Ces équations se ramènent à des équations du premier degré.

[5]Ce terme de coefficient est abusif, car l'écriture algébrique n'est pas encore établie et en est à ses balbutiements; c'est Viète qui inventera le mot coefficient.

Voici un petit poème de Luca Pacioli (ou Luca di Borgo)(1445-1517).

Si res et census numero coequantur, à rebus
Dimidio sumpto, censum producere debes,
addere numero, cujus à radire totiens,
Tolle semis rerum, census latusque redibit.



"Portrait du moine franciscain Luca Pacioli, humaniste et mathématicien", par Jacopo de Barbari

Et si cum rebus drachmae quadrato pares sint,
Adde, sicut primo, numerum producto quadrato
E rebus mediis, hujusque radice recepta,
Si rebus mediis addes, census patefiet.

At si cum numero radices census equabit,
Drachmas à quadrato deme rei medietatis,
Hujus quod superir radicem adde trahere
A rebus mediis, sic census costa notescet.

(Cité dans Montucla, *Histoire des mathématiques*, tome I,p.590,Paris, 1758, réed. Blanchard,)

Nous pourrions traduire ansi la première strophe:

Si les choses et le cens[6] égalent un nombre, tu dois former le cens de la moitié des choses et l'ajouter au nombre; alors de la racine carrée du tout enlève la moitié de la chose, et il reste le côté du cens.

Voici l'interprétation que fait Montucla de ce texte:
"Si l'on a: $x^2+mx=a$, il faut prendre la moitié du coefficient m (des choses), en faire le carré et l'ajouter à a. Ensuite ayant tiré la racine de cette somme, en ôter la moitié du coefficient m; le restant sera, disaient les algébristes de ce temps, la valeur cherchée."

<u>Exercice:</u>

Avec la méthode de Luca Pacioli, expliquée par Montucla, résoudre l'équation:

$x^2+x=2.$

Luca Pacioli trouve une solution, positive. Nous arrêterions nous là?

Aide: Pour ceux qui n'ont pas encore une grande habitude du second degré:

vérifier que: $x^2+x-2=(x+\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}$ et achever la résolution de l'équation proposée.

[6]Le cens signifie en fait le carré; nous préférons à l'instar de traducteurs éminents garder le mot cens qui garde une connotation "matérielle", plus qu'algébrique.

Luca Pacioli, *Summa de arithmetica,* première édition Venise 1494. (Histoire des mathématiques, Collette, éditions du renouveau pédagogique, Québec, 1973.)

Sūma de Arithmetica Geometria Proportioni e Proportionalita.

Continentia de tutta lopera.

De numeri e misure in tutti modi occurrenti.

Proportioni e ꝓportiõalita anotitia del. 5° de Euclide e de tutti li altri soi libri.

Chiaui ouero euidentie numero. 13. ꝑ le q̃ntita continue ꝓportiõali del. 6° e. 7° de Euclide extratte.

Tutte le pti delalgorismo: cioe releuare. partir. multiplicar. sūmare e sotrare cō tutte sue ꝓue i sani e rotti. e radici e progressioni.

De la regola mercantesca ditta del. 3. e soi fōdamenti con casi exemplari per c.m° §. ⁊ guadagni: perdite: transportationi: e inuestire.

Partir. multiplicar. summar. e sotrar de le proportioni e de tutte sorti radici.

De le. 3. regole del catayn ditta positiõe e sua origie.

Euidentie generali ouer conclusioni n° 66. absoluere ogni caso che per regole ordinarie nō si podesse.

Tutte sorte binomij e recisi e altre linee irratiõali del decimo de Euclide.

Tutte regole de algebra ditte de la cosa e lor fabriche e fondamenti.

Compagnie i tutti modi. e lor partire.

Socide de bestiami. e lor partire

Fitti: pesciõi: cottimi: liuelli: logagioni: e godimenti.

Baratti i tutti modi semplici: composti: e col tempo.

Cambi reali. secchi. fittitij. e di minuti ouer comuni.

Meriti semplici e a capo danno e altri termini.

Resti. saldi. sconti. de tempo e denari e la recare a un di piu partite

Oro. argēti. e oro affinare. e caratare.

Molti casi e ragioni straordinarie varie e diuerse a tutte occurentie commo nella sequente tauola apare ordinatamente de tutte.

Ordine a saper tener ogni cōto e scripture e del quaderno in vinegia.

Tariffa de tutte vsanze e costumi mercanteschi in tutto el mõ. do.

Pratica e theorica de geometria e de li. 5. corpi regulari e altri dependenti.

E molte altre cose d grandissimi piaceri e frutto cōmo diffusamente per la sequente tauola appare.

Éléments de corrigé:

Méthode de Luca Pacioli:

$x^2+x=2$

$m=1 \qquad \frac{m}{2}=\frac{1}{2} \qquad (\frac{m}{2})^2=\frac{1}{4}$

$a=2 \qquad (\frac{m}{2})^2+a=\frac{1}{4}+2=\frac{9}{4}$

$$\sqrt{(\frac{m}{2})^2+a}=\frac{3}{2}$$

$$\sqrt{(\frac{m}{2})^2+a}-\frac{m}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$$

$x=1$

Méthode "moderne":

a) on vérifie que 1 est solution.

$x^2+x-2=0$ admet deux racines 1 et x' dont le produit est -2, donc x'=-2.

Les solutions sont donc 1et -2. (La deuxième solution n'est pas acceptable pour Luca Pacioli.).

b) ou bien: x^2+x-2 admet pour discriminant 1+8=9.

Les deux solutions de l'équation proposée sont donc:

$x'=\frac{-1-3}{2}=-2$ et $x''=\frac{-1+3}{2}=1$.

c) ou bien:

$x^2+x=2 \Leftrightarrow x^2+x-2=0$ et $x^2+x-2=(x+\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}=(x-1)(x+2)$, donc l'équation proposée admet pour solutions 1 et -2.

Remarque:

Les formules "modernes" pour résoudre $x^2+mx-a=0$ donnent:

$$x'=\frac{-m-\sqrt{m^2+4a}}{2}=-\frac{m}{2}-\sqrt{\frac{m^2}{4}+a}$$

$x''=\frac{-m+\sqrt{m^2+4a}}{2}=-\frac{m}{2}+\sqrt{\frac{m^2}{4}+a}$, et cette solution est celle donnée par Luca Pacioli, sans démonstration.

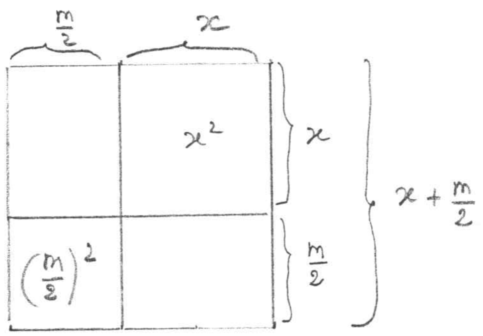
Luca Pacioli donne les règles sans les justifier. Cette manière de procéder est commune à l'époque.

En fait pour les mathématiciens de la renaissance, les règles de résolution des équations du second degré sont parfaitement connues et justifiées par des "démonstrations" de géométrie, de style euclidien, héritées des mathématiciens arabes.

Résoudre l'équation $x^2+x=2$ demande de connaître la résolution des équations de type: $x^2+mx=a$.

$$(x+\frac{m}{2})^2=x^2+mx+(\frac{m}{2})^2$$

donc $x^2+mx=a$ revient à: $(x+\frac{m}{2})^2=a+(\frac{m}{2})^2$

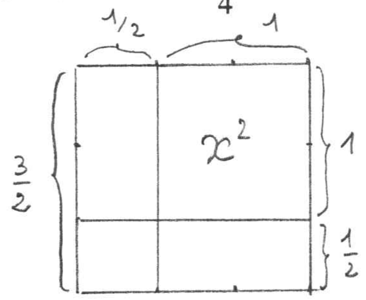


Le grand carré vaut $a+(\frac{m}{2})^2$.

Ce carré a pour côté $x+\frac{m}{2}$ ou encore $\sqrt{a+(\frac{m}{2})^2}$, donc $x=\sqrt{a+(\frac{m}{2})^2}-\frac{m}{2}$.

Dans notre exemple: $m=1$, $a=2$, $a+(\frac{m}{2})^2=\frac{9}{4}$.

Le grand carré vaut $\frac{9}{4}$



Donc $x=1$

Ici il ne peut y avoir qu'une solution, positive.

Pour certaines équations cependant, les mathématiciens savent qu'il peut y avoir deux solutions (positives); c'est le cas pour les équations du type: $x^2+a=mx$.

Première page du manuscrit Oxford Hunt 214, f 1.a de l'oeuvre d'Al Khwarizmi.
(M:A.T.H. tome 2, IREM Paris VII, 1990.)


بسم الله الرحمن الرحيم
هذا كتاب وضعه محمد بن موسى الخوارزمي افتتحه بأن قال
الحمد لله على نعمه بما هو أهله من محامده التي بأداء ما افترض منها على من يعبده
من خلقه يقع اسم الشكر ويستوجب المزيد ويؤمن من الغير إقرارا بربوبيته
وتذللا لعزته وخشوعا لعظمته بعث محمدا صلى الله عليه وعلى آله
بالنبوة على حين فترة من الرسل وتنكر من الحق ودروس من الهدى فبصر به من العمى
واستنقذ به من الهلكة وكثر به بعد القلة وألف به بعد الشتات تبارك
الله ربنا وتعالى جده وتقدست أسماؤه ولا إله غيره وصلى الله على محمد النبي وآله
وسلم ولم تزل العلماء في الأزمنة الخالية والأمم الماضية يكتبون الكتب
مما يصنفون من صنوف العلم ووجوه الحكمة نظرا لمن بعدهم واحتسابا
للأجر بقدر الطاقة ورجاء أن يلحقهم من أجر ذلك وذخره وذكره ويبقى لهم
من لسان الصدق ما يصغر في جنبه كثير مما كانوا يتكلفونه من المؤونة ويحملونه
على أنفسهم من المشقة في كشف أسرار العلم وغامضه إما رجل سبق إلى ما
لم يكن مستخرجا قبله فورثه من بعده وإما رجل شرح مما أبقى الأولون
ما كان مستغلقا فأوضح طريقه وسهل مسلكه وقرب مأخذه وإما رجل
وجد في بعض الكتب خللا فلم شعثه وأقام أوده وأحسن الظن بصاحبه غير راد
عليه ولا مفتخر بذلك من فعل نفسه وقد شجعني ما فضل الله به الإمام
المأمون أمير المؤمنين مع الخلافة التي حاز له إرثها وأكرمه بلباسها وحلاه
بزينتها من الرغبة في الأدب وتقريب أهله وإدنائهم وبسط كنفه لهم ومعونته
إياهم على إيضاح ما كان مستبهما وتسهيل ما كان مستوعرا على أن ألفت من
حساب الجبر والمقابلة كتابا مختصرا حاصرا للطيف الحساب وجليله
لما يلزم الناس من الحاجة إليه في مواريثهم ووصاياهم وفي مقاسمتهم وأحكامهم
وتجاراتهم وفي جميع ما يتعاملون به بينهم من مساحة الأرضين وكري الأنهار

Un exemple:

"Un carré et vingt et un en nombre sont égaux à dix racines"	$x^2+21=10x$	$x^2+a=mx$
"Divise en deux les racines, ce qui donne 5.	$10:2=5$	
Multiplie 5 par lui-même, tu obtiens 25.	$5x5=25$	$\frac{m}{2}x\frac{m}{2}=\frac{m^2}{4}$
Retire les 21 ajoutés au carré, il reste 4.	$25-21=4$	$\frac{m^2}{4}-a$
Extrais la racine, cela donne 2.	$\sqrt{4}=2$	$\sqrt{\frac{m^2}{4}-a}$
Retire la de la moitié de la racine, c'est-à-dire 5, il reste 3.	$5-2=3$	
C'est la racine du carré que tu cherches et le carré est 9.	$x=3;\ x^2=9$	$x=\frac{m}{2}-\sqrt{\frac{m^2}{4}-a}$
Si tu le désires, ajoute cela,(2), à la moitié de la racine.	$5+2=7$	$x=\frac{m}{2}+\sqrt{\frac{m^2}{4}-a}$
Ce qui donne 7, racine du carré que tu cherches, et dont le carré est 49.	$x=7;\ x^2=49$.	
Si tu rencontres un problème qui se ramène à ce cas, examine sa justesse à l'aide de l'addition; si tu ne le peux pas, tu obtiendras certainement (la solution) à l'aide de la soustraction.		
Parmi les trois cas, c'est le seul où l'on se serve de l'addition et de la soustraction.	Seule l'équation $x^2+a=mx$ ($a>o$ et $m>o$) admet, si elle en a, deux solutions positives.	
Sache en outre que si tu divises en deux la racine, que tu la multiplies par elle-même, et que le produit soit plus petit que les dirhams[7] ajoutés au carré, alors le problème est impossible. Mais s'il est égal aux dirhams, la racine du carré est égale à la moitié de la racine sans qu'on ajoute quoi que ce soit."	Si $\frac{m^2}{4}<a$, alors le problème est impossible. Si $\frac{m^2}{4}=a$, alors $x=\frac{m}{2}$	

Al-Kwàrismi (780-850), Traduction de Rosen, Londres 1831.

Exercice:

Résoudre par ce moyen l'équation:

$x^2+40=14x$, dont Fibonacci[8] (1175-1250) a donné deux solutions.

---

[7]Les dirhams désignent les nombres connus.

[8]Fibonacci, ou Leonard de Pise, est considéré comme le premier mathématicien de l'occident chrétien. Il est l'auteur en particulier du *Liber*

Éléments de corrigé:

$x^2+40=14x$

$a=40$ (les dirhams)

$m=14$ (les racines)

On divise en deux les racines: $\frac{m}{2}=7$.

$7\times7=49$	$\frac{m}{2}\times\frac{m}{2}$
$49-40=9$	$\frac{m^2}{4}-a$
$\sqrt{9}=3$	$\sqrt{\frac{m^2}{4}-a}$
$7-3=4$	
$x=4$	$x=\frac{m}{2}-\sqrt{\frac{m^2}{4}-a}$
ou	
$7+3=10$	
$x=10$	$x=\frac{m}{2}+\sqrt{\frac{m^2}{4}-a}$

Vérification:

$4^2+40=14\times4$ donc 4 est bien solution de l'équation proposée.

$10^2+40=14\times10$ donc 10 est aussi solution de l'équation proposée.

Abaci, où l'on trouve "la suite de fibonacci", mais aussi des résolutions d'équations très en avance sur son époque.

Nous pourrions dire que cette résolution s'appuie sur la remarque suivante:

Si l'on cherche un nombre dont le carré est $\frac{m^2}{4} - a$

(si bien sûr $\frac{m^2}{4} - a > o$, sinon le problème est impossible), il s'en trouve deux: $\sqrt{\frac{m^2}{4} - a}$ et $-\sqrt{\frac{m^2}{4} - a}$.

Il est admis déjà couramment à la Renaissance que:

Si $A^2 = B$ alors $(-A)^2 = B$, car la règle des signes a déjà fait son apparition, même si elle ne se manie encore qu'imparfaitement.

Nous revenons ainsi au négatif; si l'on manie la règle des signes, c'est que l'on sait utiliser le négatif!

Oui, certes, dans les calculs; mais trouver une solution négative, cela a-t-il un sens? A vrai dire on ne s'en préoccupe pas, on n'écrit pas de solution négative.

Nicolas Chuquet(XV°s) utilise les nombres négatifs dans son "Triparty en la science des nombres", écrit en 1484, mais qui ne sera imprimé qu'en 1881.

(Folio 35 verso). — « lon doit savoir que qui adiouste ou soustrait 0 avec aulcun nombre laddicion ou soustraction ne augmente ne diminue Et qui adiouste ung moins avec ung autre nombre ou qui dicellui le soustrayt laddicion se diminue et la soustraction croist ainsi comme qui adiouste moins 4 avec 10 laddicion monte 6 Et qui de 10 en soustrait moins 4 Il reste 14 Et quant lon dit moins 4 cest comme si une personne navoit rien et quil deust encores 4 Et quant on dit 0 cest rien simplement » folio 66 v.

« Plus et Plus moins et moins adioustons plus et moins soustrayons ».

(Folios 84 verso, 85 recto). — « lon doit sçavoir que moins et plus se ont lung envers laultre ainsi comme privacion et habit ou comme debte et avoir dont 0 est disposicion commune precedente lung et laultre comme de moins 12ρ qui se peult ainsi mettre 0 moins 12 cest a entendre que se une personne avait 0 $\bar{m}$ 12ρ Il nauroit riens si devroit encores oultre et par dessus 12ρ Et sil avoit 0 $\bar{p}$ 12ρ Il auroit 12ρ oultre et pardessus 0. Et ainsi fault entendre de tous aultres nombres. »

Essai de traduction:

"L'on doit savoir que, qui ajoute ou soustrait 0 avec un nombre quelconque, l'addition ou soustraction n'augmente ni ne diminue. et qui ajoute un moins avec un autre nombre ou qui de celui-ci le soustrait, l'addition diminue et la soustraction croît; ainsi comme qui ajoute moins 4 avec 10, l'addition monte 6 et qui de 10 soustrait moins 4, il reste 14. Et quand l'on dit moins 4 c'est comme si une personne n'avait rien et qu'il dût encore 4. Et quand on dit 0 c'est rien simplement."

"Plus et plus, moins et moins, ajoutons plus et moins soustrayons."

"L'on doit savoir que moins et plus sont l'un envers l'autre comme privation et possession ou comme dette et avoir dont 0 est disposition commune précédent l'un et l'autre comme de moins 12ρ qui se peut mettre 0moins 12; c'est à entendre que si une personne avait 0m̃12ρ[9], elle n'aurait rien et devrait encore outre et par-dessus 12ρ. Et s'il avait 0p̃12ρ, il aurait 12ρ outre et par-dessus 0. Et ainsi faut-il entendre de tout autre nombre."

Exercice:

Voici un autre extrait de "Triparty en la science des nombres":

> (Folio 159 r.). — « Ung revendeur a achette tant de pommes qui luy coustent tant dargent que si les revend 3 au denier Il gangne 15 ds Et si les revend 4 au denier Il gangne 14 ds Assavoir moult quantes pommes Il a achettees et aussy quelles luy ont couste Response 12 pommes o m̃ 11 deniers.
>
> « C'est-à-dire que cellui revendeur les a achetees et luy ont este baillees en telle maniere que si les revend cellui de qui Il les a achettees luy donne 11 ds qui luy devoit et aussi les pommes. Qui vault autant a dire que celui revendeur les a achettees dung a qui il devoit 11 ds lequel luy a dit Je vous donne les 11 ds que vous me devez et aussi ces 12 pommes pourveu que les revendez au pris dessus ditz. »

Nous pourrions en donner la traduction suivante:

"un revendeur a acheté une certaine quantité de pommes pour une somme telle que s'il les revendait 1 denier les 3 pommes, il gagnerait 15 deniers; et s'il les revendait 1 denier les 4 pommes, il gagnerait 14 deniers.

L'on voudrait savoir combien de pommes il a achetées et ce qu'elles lui ont coûté. Réponse 12 pommes et 0m̃11 deniers.

C'est à dire que ce revendeur les a achetées de telle sorte que s'il les revend, celui auquel il les a achetées lui donne 11 deniers et aussi les pommes. Ce qui veut dire aussi que le revendeur les a achetées à quelqu'un à qui il devait 11 deniers, et celui-ci lui a dit: je vous donne les 11 deniers que vous me devez et aussi ces 12 pommes, pourvu que vous les revendiez au prix ci-dessus".

Question: Appeler x le nombre de pommes demandé et y ce qu'elles ont coûté au revendeur. Retrouver alors les solutions proposées par N.Chuquet. Que pensez vous de son interprétation?

[9]Notons l'emploi de p et m pour plus et moins, début timide d'emploi de symboles.

Boutique de marchands au XV° siècle. Miniature du manuscrit de J. LeGrant, *Le livre des bonnes moeurs*. Reproduite d'après; Éléments d'histoire des sciences, p197, sous la direction de Michel Serres. Bordas, Paris 1989.

Éléments de corrigé:

S'il vend les pommes 1 denier les 3, le prix total de la vente sera $\frac{x}{3}$; le bénéfice sera donc $\frac{x}{3}-y$.

Nous obtenons donc une première équation: $\frac{x}{3}-y=15$.

S'il vend les pommes 1 denier les 4, le prix total de la vente sera $\frac{x}{4}$; le bénéfice sera donc $\frac{x}{4}-y$.

Nous obtenons donc une deuxième équation: $\frac{x}{4}-y=14$.

Il s'agit donc de résoudre le système

$$\frac{x}{3}-y=15$$

$$\frac{x}{4}-y=14$$

Il est facile de vérifier que la solution de ce système est donnée par: $x=12$ et $y=-11$.

L'interprétation de Chuquet est astucieuse. Il n'est pas certain que nous ayions donné la même. Nous aurions auparavant défini les ensembles d'appartenance de x et y , qui auraient été respectivement N et Q^+. Et sans doute nous n'aurions pas accepté la solution proposée.

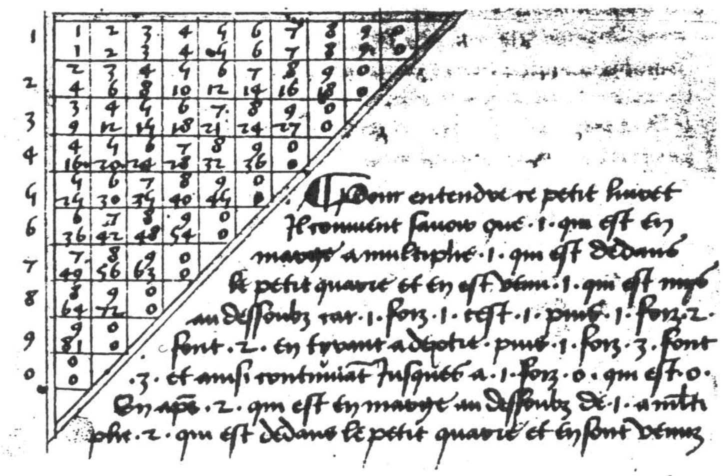
Nous ne faisons pas ici de commentaire sur les notations algébriques, qui mériteraient un fascicule à elles seules. N.Chuquet est très moderne sur ce point pour l'écriture des équations; il écrivait par exemple $12\tilde{p}3^1$egaulx a 4^2 pour $12+3x=4x^2$.

Nous remarquons que dans ce texte Nicolas Chuquet donne les solutions négatives d'un problème; pourtant il ne donnera, semble-t-il, jamais les solutions négatives d'une équation du second degré.

En fait il s'agit ici d'un problème concret , qui a trait à l'argent et au commerce. Une solution négative s'interpréte "naturellement" comme une dette.

0m̃11deniers n'est pas un nombre négatif, mais une quantité négative; cette différence a une longue histoire dont nous reparlerons dans les chapitres suivants.

Dans une équation "purement" mathématique, une solution est un nombre, représentable par une ligne géométrique, par exemple le côté d'un carré, et il y a une impossibilité, dans ces conditions, de considérer un nombre négatif.



Une page du Tryparty de Nicolas Chuquet, 1484
(Mathématiques et mathématiciens, Dedron et Itard, Magnard, paris, 1959.)

L'historien des mathématiques J.F.Montucla raconte que ce serait le fameux Cardan qui le premier aurait donné des solutions négatives pour une équation.

> Cardan est encore le premier qui ait aperçu la multiplicité des valeurs de l'inconnue dans les équations, et leur distinction en positives et négatives. Cette découverte qui, avec une autre de Viète[10], est le fondement de toutes celles d'Harriot[11] et Descartes sur l'analyse des équations, cette découverte, dis je, est clairement contenue dans son Ars Magna. Dès l'article troisième il observe que la racine d'un carré est également plus ou moins le côté de ce carré, et dans l'article 7 il propose une équation qui, réduite à notre langage, serait $x^2+4x=21$, et il remarque que la valeur de x est également +3ou-7, et qu'en changeant le signe du second terme, elle devient -3ou+7. Ces racines négatives, il les nomme feintes[12]. Cardan redressera en cela l'erreur de Pacioli, qui n'ayant fait aucune mention de ces racines négatives, semble ne les avoir pas remarquées.


HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE-
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

Habes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cosa vocant) novis adinventionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea vulgo tritis, iam septuaginta evaserint. Neque solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, verum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aût librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & plane inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitaretur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto avidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

Page de titre de L'Ars Magna, avec un portrait de Cardan, 1545.
(Mathématiques et mathématiciens, Dedron et Itard, Magnard, Paris, 1959.)

---

10 Viète découvrira entre autres les fonctions symétriques des racines.

11 Thomas Harriot,(1560-1621) mathématicien anglais qui a en particulier introduit des notations simples en algèbre.

12 Notons que Libri, dans son histoire des mathématiques en Italie, (Paris 1838-1841) écrit:"Cardan appelle moins pures les racines négatives".(Cité par J.Itard, matériaux pour l'histoire des nombre complexes, brochure APMEP, 1969).

Exercice:

J.F.Montucla cite l'équation $x^2+4x=21$.

En reprenant la méthode de Luca Pacioli, et en ajoutant qu'un nombre positif est le carré de deux nombres opposés, retrouver les solutions de Cardan.

Les solutions négatives ont-elles malgré tout un sens pour Cardan?

Éléments de corrigé:

$x^2+4x=21$ est du type $x^2+mx=a$

$\frac{m}{2}=2 \quad (\frac{m}{2})^2=4$

$(\frac{m}{2})^2+a=21+4=25$

Deux "nombres" ont pour carré 25.

$\sqrt{(\frac{m}{2})^2-a} = 5$ et $-\sqrt{(\frac{m}{2})^2-a} = -5$

Les solutions sont donc $x=5-2=3$ et $x=-5-2=-7$.

Un autre grand mathématicien dont le nom restera attaché à celui de Cardan, nous verrons pourquoi par la suite, Rafael Bombelli (1526-1573) va sortir du support géométrique et matériel pour résoudre les équations. Il donne des algorithmes, et invente la forme canonique. Ses démonstrations sont purement algébriques. Il s'arrête cependant au seuil de la solution négative; car, le "nombre négatif isolé" n'a pas de sens.

Voici l'exemple de l'équation x2+6x=16 traité par Bombelli. (Traduction de l'IREM de Rennes)

> " 1^2p.6^1 eguali a16.
>
> Opérez comme il a été montré plus haut, quand on dit de prendre la racine carrée de l'inconnue et de ses puissances; alors, étant pris la moitié du coefficient de l'inconnue, qui est 3, et l'ajoutant à la racine de la puissance, qui est 1^1p.3, dont le carré est 1^2p.6^1p.9. Nous, nous voulons 1^2p.6^1, mais en ajoutant 9 à la fois aux deux parties, on aura 1^2p.1^1p.9 égal à 25. Alors en prenant la racine de 1^2p.6^1p.9, qui est 1^1p.3, et ceci étant égal à la racine de 25, qui est 5, alors le 3 étant ôté de chacune des parties , il restera 2 égal à 1^1, et l'inconnue vaudra 2".

la classification des équations du second degré n'a pas changé; il y a trois chapitres:

"di Potenze e Tanti eguale a numero"

"di tanti e numero eguale a Potenza"

"di Potenze e numero eguale a Tanti"

Ce qui s'écrit actuellement:

$(ax^2+bx=c)$

$(bx+c=ax^2)$

$(ax^2+c=bx)$

> Résolution pour le type 1:
>
> "Le premier (mode) est celui-ci. Divise chaque chose par la quantité de la puissance; puis prends la moitié de "l'autant que" et son carré ajoute le au nombre; de la somme prend le côté et du côté retranche la moitié de "l'autant que". Il restera la valeur de "l'autant que".[13]
>
> R Bombelli, *Algebra*, Bologne 1579, traduction proposée dans "équations du second degré", IREM de Toulouse.

$ax^2+bx=c$

$x^2+\frac{b}{a}x=\frac{c}{a}$

$\frac{b}{2a} \quad (\frac{b}{2a})^2 \quad (\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}$

[13] Le mot *Tanti* a été traduit dans le premier texte par "linconnue", et dans le deuxième texte par "l'autant que"; il s'agit de la même chose.

On prend le nombre dont le carré est $(\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}$

On retranche $\frac{b}{2a}$ à ce nombre.

C'est x.

A un moment donné Bombelli note qu'il y a "deux côtés" pour $(\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}$, c'est à dire deux nombres qui ont le même carré: $\sqrt{(\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}}$ et $-\sqrt{(\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}}$; il y a donc parfois deux"autant que" possibles.

Ceci peut arriver en particulier dans le type 3.
Voici la résolution qu'il propose pour ce type sur l'exemple $x^2+12=8x$:

"*égaler* 1 $\overset{2}{\smile}$ *p* 12 *à* 8 $\overset{1}{\smile}$"	soit $x^2 + 12 = 8x$.
lorsqu'il arrive par la réduction à :	
(1 $\overset{1}{\smile}$ *m* 4)^2 *égal à* 4	$(x - 4)^2 = 4$
il notera après avoir résolu :	
1 $\overset{1}{\smile}$ *m* 4 *égal à* 2	$x - 4 = 2$
1 $\overset{1}{\smile}$ *égal à* 6	$\boxed{x = 6}$
que	
"*le côté de* 1 $\overset{2}{\smile}$ *m* 8 $\overset{1}{\smile}$ *p* 16 *peut aussi être* 4 *m* 1 $\overset{1}{\smile}$ *dont le carré est aussi*	$\sqrt{x^2 - 8x + 16} = \pm (x-4)$
	car
1 $\overset{2}{\smile}$ *m* 8 $\overset{1}{\smile}$ *p* 16. *Nous aurons*	$(4-x)^2 = (x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$
alors 4 *m* 1 $\overset{1}{\smile}$ *égal à* 2 *ce*	Ainsi
qui en enlevant le moins donne	$4 - x = 2$
4 *égal à* 1 $\overset{1}{\smile}$ *p* 2.	$4 = x + 2$
Et le "tant que" vaudra 2".	$\boxed{x = 2}$

Bombelli signale aussi que dans ce cas, parfois il y a des impossibilités, car il faudrait trouver un nombre dont le carré soit négatif. Il ne faudrait surtout pas commettre l'erreur d'écrire:

$\sqrt{-4}=-2$ ou $\sqrt{-4}=2$.

Exercice:

1) appliquer le procédé de Bombelli à la résolution de l'équation:

$$2x^2+12x=32.$$

Bombelli donne ici une racine. Pourquoi?

2)appliquer de même le procédé de Bombelli à la résolution de l'équation:

$$x^2+6=5x$$

Combien ici Bombelli proposerait-il de solutions?

3) Mêmes questions pour l'équation:

$$x^2+20=8x.$$

Éléments de corrigé:

1) $2x^2+12x=32$ peut déjà s'écrire $x^2+6x=16$

Nous obtenons donc: $(x+3)^2=25$, donc $x+3=5$ ou $x+3=-5$, **puis x=2** ou $x=-8$. Cette deuxième solution n'est pas retenue par **Bombelli** car elle set négative.

2) $x^2+6=5x$ donne $(x-\frac{5}{2})^2=\frac{1}{4}$, donc $x-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$ ou

$x-\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}$, c'est à dire $x=3$ ou $x=2$. Solutions toutes **deux** retenues par Bombelli.

3) $x^2+20=8x$ donne $(x-4)^2=-36$ donc il n'y a aucune solution.

Page de titre de Margarita philosophica(1503),
(A history of mathematics, C. Boyer, USA, réed. 1989.)

2- "Cette autre sorte de racine carrée"

Quando che'l cubo con le cose appresso
Se agguagli a qualche numero discreto :
Nicolo TARTAGLIA (1534)

Ho trovato un'altra sorte de R.C legate
molto differenti dall'altre.
Raffaele BOMBELLI (1572)

Vue de Bologne au XVI^e siècle.

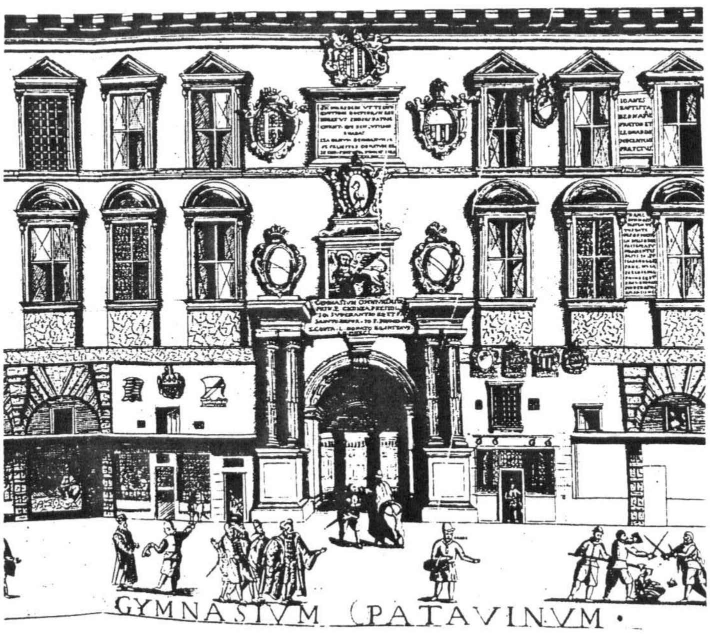
La Renaissance est l'époque des "grandes découvertes".

En 1492 le génois Colomb inaugure le chemin vers ce qui ne sont pas encore les Amériques. En 1572, et probablement déjà vers 1550, le bolognais Bombelli, s'appuyant sur les algorithmes de Cardan pour la résolution des équations cubiques, découvre une "terra incognita" des mathématiques : une nouvelle sorte de racine carrée qui plus tard sera appelée nombre imaginaire puis nombre complexe.

C'est donc à une promenade autour de cette découverte que nous vous convions. Mais auparavant, écoutons cet avertissement de deux grands historiens des sciences :

"L'histoire de la découverte de la solution de l'équation du troisième degré est une histoire célèbre entre toutes : celle de la première grande bataille scientifique. Elle reste, malgré les études nombreuses qui lui ont été consacrées, assez mystérieuse : les documents essentiels nous manquent, et les témoins de l'affaire - témoins dans leur propre cause - Tartaglia, Cardan et Ferrari sont loin d'inspirer une confiance absolue."

(A.Koyré et R.Taton dans "Histoire générale des sciences")



L'Université de Padoue à la fin du XVIe siècle.

LES PROTAGONISTES

NICOLO TARTAGLIA

Né à Brescia vers 1500 dans une famille plus que modeste, orphelin à 6 ans, gravement blessé lors du sac de la ville par les Français le 19 Février 1512, le bégaiement qui lui en resta lui valut le surnom de Tartaglia (le Bègue).
Autodidacte, malgré de lourdes charges de famille, il réussit à acquérir de fortes connaissances scientifiques. Il donna des cours publics ou privés à Vérone, Plaisance, Mantoue, Brescia et Venise où il mourut dans la nuit du 13 au 14 Décembre 1557.
Auteur de trois ouvrages écrits dans le dialecte de la vallée du Pô :

- Nova scientia (1537), traité de balistique
- Quesiti e inventioni diverse (1546), ouvrage autobiographique dans lequel il présente en particulier son procédé de résolution de l'équation cubique ;
- Generale trattato di numeri e misure (1556).

Il nous raconte, page suivante, dans un dialogue avec un gentilhomme de Brescia, les circonstances dramatiques qui lui valurent son surnom.

Nicolo Tartaglia (vers 1500-1557).

P. - Dites-moi un peu, vous souvenez-vous m'avoir connu quand je demeurais à Brescia?
N. - Il m'en souvient, bien qu'à cette époque je fusse très jeune, et en voici une preuve : votre seigneurie demeurait dans le quartier entre les Carmini et Santo Christofolo, ou Santa Chiara nouvelle.
P. - Vous dites la vérité, mais dites-moi encore comment s'appelait votre père .
N. - Mon père avait pour nom Michel. Et comme la nature ne fut pas moins avare à lui donner une taille convenable que la fortune à le faire participer à ses bienfaits, il était appelé Micheletto.
P. - Certainement si la nature fut un peu trop avare pour donner à votre père une taille convenable, elle n'a pas été avec vous très libérale.
N. - Je m'en réjouis, car d'être si petit me prouve que je suis vraiment son fils, et bien qu'il ne nous ait laissé au monde, tant à moi qu'à un frère et à deux soeurs, quasi rien d'autre qu'un bon souvenir de lui, il me suffit d'avoir entendu de beaucoup de gens qui le connaissaient et le fréquentaient qu'il était homme de bien, ce dont je me réjouis beaucoup plus que s'il m'avait laissé beaucoup d'avoir et une triste renommée.
P. - Quel métier faisait votre père?
N. - Mon père possédait un cheval, avec lequel il courait la poste pour les messieurs de Brescia, c'est-à-dire qu'il portait les lettres de l'illustre noblesse de Brescia à Bergame, à Crémone, à Vérone et en d'autres lieux analogues.
P. - Quel était son nom de famille ?
N. - Par Dieu, je n'en sais rien ni ne me rappelle rien de sa famille, même pas le nom, si ce n'est qu'étant petit je ne l'ai entendu appeler que Micheletto le cavalier. Peut-être avait-il quelqu'autre nom, mais aucun que je connaisse. La cause en est que mon père mourut quand je n'avais que six ans environ, et je restais ainsi avec un frère un peu plus âgé que moi, et une soeur un peu plus jeune ensemble avec notre mère veuve, dépourvue des biens de la fortune, avec laquelle nous fûmes bientôt après complètement ruinés, ce qui serait trop long à raconter et ce qui me fit penser à bien autre chose qu'au nom de famille de mon père.
P. - Ignorant le nom de famille de votre père, comment se fait-il que vous vous appeliez Nicolo Tartaglia?
N. - Je vous dirai que lorsque les Français saccagèrent Brescia, auquel sac fut pris le Magnifique seigneur Andrea Gritti, de bonne Mémoire (à cette époque Proviseur) et fut amené en France pendant que sa maison était dévalisée (encore qu'il y eût peu de choses), je m'étais réfugié dans le Dôme de Brescia avec ma mère, ma soeur et plusieurs autres hommes et femmes de notre quartier, croyant être en un tel lieu au moins saufs de nos personnes. Mais cet espoir fut déçu car, dans l'église, en présence de ma mère, il me fut donné cinq blessures mortelles, trois sur la tête (en chacune le cerveau se voyait) et deux sur la face. Si la barbe ne les cachait je semblerais un monstre. J'en avais une à travers la bouche et les dents qui me sépara les maxillaires et le palais en deux. Cette blessure ne m'empêchait pas seulement de parler (si ce n'est de la gorge, comme font les pies) mais je ne pouvais même pas manger, car je ne pouvais remuer les lèvres ni les mâchoires, étant fracassées avec les dents, comme j'ai dit, si bien qu'il fallait me nourrir que de liquide, et avec beaucoup de mal. Mais le plus fort est que ma mère, n'ayant pas la possibilité d'acheter des onguents ni d'appeler un médecin, fut astreinte à me soigner de sa propre main ; et non avec des onguents, mais seulement en nettoyant fréquemment les plaies, prenant exemple des chiens qui lorsqu'ils sont blessés ne se soignent qu'en tenant leurs plaies propres avec la langue. Avec de pareils soins elle me mena à bon port au bout de quelques mois, et pour retourner à notre propos, ayant guéri de ces blessures, il fut un temps où je ne pouvais pas bien parler, mais où je bégayais toujours, à cause de ma blessure à travers la bouche et les dents (qui ne sont pas encore bien consolidées) et les enfants de mon âge avec qui je conversais m'imposèrent le surnom de Tartaglia (bègue). Et comme ce surnom me dura longtemps, en souvenir de ma disgrâce, j'ai voulu m'appeler Nicolo Tartaglia.
P. - Quel âge aviez- vous à cette époque?
N. - Douze ans environ.
P. - Certainement ce fut une chose bien cruelle de blesser un enfant de cet âge, et je vous avouerai que je m'émerveillais de votre nom étrange car il me semblait ne jamais avoir connu un tel nom de famille à Brescia.

Quesiti e inventioni diverse (1546)

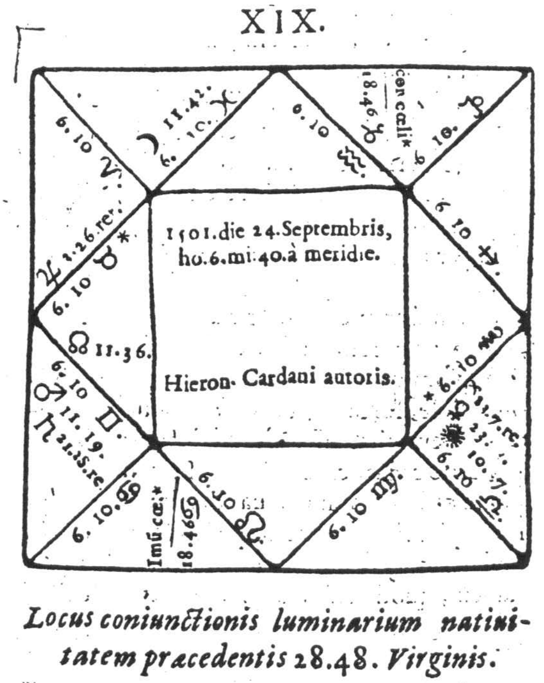
JEROME CARDAN

Gerolamo (Jérôme) Cardano, c'est tout autre chose. Personnage éclatant, vrai fils de la Renaissance italienne, médecin, mathématicien, mécanicien, philosophe, mais aussi astrologue et un peu magicien, écrivain prolifique créateur d'un genre nouveau : l'autobiographie; son nom mériterait d'être connu aujourd'hui pour autre chose que la méthode de transmission, le cardan, qui en a fait un nom commun de notre dictionnaire. Voici comment il se décrit dans "Ma vie" :

Portraits de Cardan à 46, 71 et 49 ans
(d'après J. F. Christ, *Nuits académiques*, Magdebourg, 1727-1728).

Taille médiocre ; pieds courts, larges vers les orteils, avec le cou-de-pied si haut que je trouve difficilement des chaussures qui me conviennent et suis obligé de les faire confectionner sur mesure ; poitrine un peu étroite ; bras assez grêles, la main droite plus épaisse, les doigts détachés les uns des autres au point que les chiromanciens me jugèrent stupide et balourd : ce qui leur fit honte lorsqu'ils me connurent. Dans cette main, la ligne de vie est courte et la saturnienne longue et profonde. La main gauche est belle, les doigts allongés, fins et serrés, les ongles brillants. Le cou est un peu trop long et mince ; le menton fendu; la lèvre inférieure épaisse et pendante ; les yeux petits et presque fermés sauf lorsque je regarde attentivement quelque chose ; sur la paupière de l'oeil gauche j'ai une tache semblable à une lentille, mais si petite qu'on peut à peine la distinguer. Le front, assez large, est dénudé de côté vers les tempes. La chevelure et la barbe étaient blondes. Je porte d'ordinaire les cheveux coupés et une barbe courte qui, comme mon menton, est à deux pointes ; au-dessous de celui-ci la peau est couverte de poils fort longs qui me font paraître plus barbu en cet endroit. La vieillesse a blanchi la barbe, peu les cheveux. J'ai coutume de parler fort, assez pour m'attirer des reproches de ceux qui se donnent pour mes amis. Ma voix est rude et ample, mais ne s'entendait pas très loin quand j'enseignais, mon élocution peu agréable et abondante. Mon regard a la fixité de quelqu'un qui médite. Mes dents supérieures sont grandes, mon teint d'un blanc rosé, mon visage légèrement allongé ; ma tête se rétrécit en arrière en une sorte de petite sphère. Il n'y a rien de rare en moi et les peintres qui sont venus de loin pour faire mon portrait ne sont pas parvenus à me représenter avec ressemblance. [...]

Quant à l'astrologie divinatrice, je l'ai pratiquée, plus que je n'aurais dû, et j'y ai ajouté foi à mes dépens. L'astrologie naturelle ne me fut d'aucun usage ; j'en ai reçu les premières notions il y a trois ans, c'est-à-dire à soixante et onze ans. Je suis très versé dans la géométrie, l'arithmétique, la médecine théorique et pratique, plus encore dans la dialectique, la magie blanche, qui étudie les propriétés des corps et les choses semblables, comme par exemple le fait que l'ambre renforce la chaleur naturelle, et pourquoi. Faut-il compter aussi l'habileté au jeu de dés? Je possède la maîtrise de la langue latine et de quelques autres, ainsi que la théorie de la musique. Je n'ai pas abordé la navigation ; quant à l'art militaire que je n'ai pas à compter parmi les sciences, je m'en suis abstenu en raison d'une foule de difficultés ; de même pour l'architecture. Il reste encore certaines demi-sciences comme l'emploi des lettres symboliques, leur association, leur interprétation. Dans ma spécialité il me manque la pratique chirurgicale. Si on fixe le nombre des disciplines importantes à trente-six, il en est vingt-six dont l'étude et la connaissance m'ont complètement manqué.



L'horoscope de Cardan, dressé par lui-même dans *Cent exemples d'horoscopes.*

CHRONOLOGIE DE LA "PREMIERE GRANDE BATAILLE SCIENTIFIQUE"

1526 Scipione del Ferro (1465-1526) est un professeur réputé de l'Université de Bologne où il enseigne depuis 1496. Peu de temps avant sa mort il révèle, sous le sceau du secret, à son élève Antonio Maria Fior, et peut-être à quelques autres, l'algorithme de résolution d'une cubique de la forme $x^3+px=q$.

1534 Depuis quelques années Tartaglia travaillait sur ce problème qui lui avait été proposé par un certain Zuane da Coi, professeur à Milan.
En 1534 Fior provoque Tartaglia à un tournoi mathématique où chacun aurait à résoudre 30 équations proposées par l'adversaire. Voici, sous la plume de Jacques Bonnet dans "La folie de Jérôme Cardan", une "reconstitution" de ce que pouvait être l'ambiance d'un tel tournoi :

> [...] Il faut du talent à suivre les cinq jouteurs : les défis partent à toute volée, d'une table à l'autre ; Zuane provoque le Bègue et Jérôme se mêle de la partie. Quelques instants de silence, les seigneurs et les dames immobilisent avec grâce le pli de leur lèvre ou la palpitation de leur téton, des yeux brillent, quelques moines et lettrés écrivent debout en grande hâte, puis l'un des cinq hoche la tête, ou crie parfois ; le juge du tournoi, on ne l'avait pas encore vu celui-là, point piqué au bord du cercle sur une chaise basse, fait une croix sur un rouleau. Et la course repart...
> L'équation est jetée, premièrement ramener d'un côté... secondement, le cube, puis le census, tiercement diviser, extraire... Aujourd'hui, il n'est plus question d'équations du premier ou du second degré. Diophante, Al-Karagi, le Fibonaci, sont abandonnés au bord du chemin. Ce qui siffle chaque fois dans la provocation de l'un ou de l'autre, c'est "la chose au cube". La cubique ![...]
>
> Jacques Bonnet *La folie de Jérôme Cardan (1991)*

Tartaglia comprend alors qu'il existe une solution et, redoublant d'efforts, il réussit à trouver celle-ci quelques jours avant la clôture du concours, découvrant en même temps des algorithmes pour résoudre des cubiques de la forme $x^3 = px + q$ et $x^3 + px^2 = q$ que Fior, lui, ne put résoudre. Mais curieusement, au lieu de publier sa grande découverte, Tartaglia à son tour la garde secrète.

1539 Cardan fait annoncer à Tartaglia qu'il prépare un grand traité d'algèbre et le prie de lui communiquer sa "règle" en lui promettant de ne la publier qu'avec le nom de son inventeur. Tartaglia refuse. Le traité annoncé par Cardan est cependant publié à Milan cette même année ; Cardan s'y révèle un algébriste d'une habileté remarquable. Mais Cardan reste sur sa faim : il manque toujours à sa grande oeuvre algébrique la règle de résolution de la cubique.

Sans se décourager il réitère sa demande à Tartaglia, peut-être en lui faisant entrevoir la possibilité de lui présenter un mécène qui pourrait résoudre ses éternels problèmes d'argent. Tartaglia accepte enfin de lui communiquer sa règle sous la forme d'un poème en lui faisant jurer qu'il ne la transmettrait à personne. Voici ce poème :

> Quando che'l cubo con le cose appresso
> Se agguaglia a qualche numero discreto :
> Trovati dui altri differenti in esso,
> Dapoi terrai, questo per consueto,
> Che'l loro produtto, sempre sia eguale
> Al terzo cubo delle cose netto ;
> El residuo poi suo generale,
> Delli lor lati cubi, ben sottratti
> Varrà la tua cosa principale.
>
> In el secondo, de cotesti atti ;
> Quando che' l cubo restasse lui solo,
> Tu osserverai quest'altri contratti,
> Del numer farai due, tal part'a volo
> Che l'una, in l'altra, si produca schietto,
> El terzo cubo delle cose in stolo ;
> Delle qual poi, per commun precetto,
> Torrai li lati cubi, insieme gionti,
> Et cotal somma, sarà il tuo concetto ;
>
> El terzo, poi de questi nostri conti,
> Se solve col secondo, se ben guardi
> Che per natura son quasi congionti.
>
> Questi trovai, et non con passi tardi
> Nel mille cinquecent'e quattro e trenta ;
> Con fondamenti ben saldi e gagliardi
> Nella Città del mar intorno centa.
>
> Nicolo Tartaglia (*Quesiti et inventioni diverse 1546*)

La première strophe donne la règle pour résoudre $x^3 + px = q$. On pourrait la traduire ainsi :

Quando che'l cubo con le cose appresso Se agguaglia a qualche numero discreto :	Pour résoudre $x^3 + px = q$
Trovati dui altri differenti in esso.	trouve deux nombres tels que $A - B = q$
Da poi terrai, questo per consueto, Che'l loro produtto sempre sia eguale Al terzo cubo delle cose netto ;	et $AB = \left(\frac{p}{3}\right)^3$
El residuo poi suo generale, Delli lor lati cubi, ben sottratti Varrà la tua cosa principale.	alors la solution sera $\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}$

Exercice : On considère l'équation $x^3 + px = q$ ($p>0$ et $q>0$)
1°) Montrer que l'on peut trouver, et ce de manière unique, deux nombres A et B strictement positifs tels que :

$$\begin{cases} A - B = q \\ AB = \left(\dfrac{p}{3}\right)^3 \end{cases}$$

2°) Montrer qu'alors $$A = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$ et $$B = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

3°) On pose $a = \sqrt[3]{A}$ et $b = \sqrt[3]{B}$
Montrer que $s = a-b$ est une solution strictement positive de l'équation $x^3 + px = q$.
4°) Exprimer s en fonction de p et q .
5°) En étudiant les variations de la fonction $x \longrightarrow x^3 + px - q (p > 0, q > 0)$ démontrer que l'équation $x^3 + px = q$ a une solution unique dans R.
6°) Résoudre, en utilisant le résultat ci-dessus, les équations :
a) $x^3 + 12x = 63$
b) $x^3 + 6x = 20$

Eléments de corrigé :

$$1°)\begin{cases} A - B = q \\ AB = \left(\frac{p}{3}\right)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + (-B) = q \\ A(-B) = -\left(\frac{p}{3}\right)^3 \end{cases}$$

On cherche donc deux nombres (A et -B) dont le produit et la somme sont donnés. Il est aisé de montrer que ces nombres sont les solutions, si elles existent, de l'équation $X^3 - qX - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$

or $\Delta = q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3$, donc $\Delta > 0$

donc il existe bien deux racines pour l'équation du second degré ; ces racines sont de signes contraires puisque leur produit $-\left(\frac{p}{3}\right)^3$ est négatif. On prendra alors pour A la racine positive et pour B l'opposé de la racine négative.

2°)

$$A = \frac{q + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{\Delta}{4}} = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$B = -\frac{q - \sqrt{\Delta}}{2} = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

3°)

$A > B$ donc $\sqrt[3]{A} > \sqrt[3]{B}$ et par conséquent $s = \sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B} > 0$

on pose $a = \sqrt[3]{A}$ et $b = \sqrt[3]{B}$ pour simplifier les écritures .

Vérifions que s = a - b est solution de $x^3 + px = q$ en calculant

$$\begin{aligned} s^3 + ps &= (a - b)^3 + p(a - b) \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + p(a - b) \\ &= a^3 - b^3 - (a - b)(3ab - p) \end{aligned}$$

$$\text{or } AB = \left(\frac{p}{3}\right)^3 \Leftrightarrow a^3b^3 = \left(\frac{p}{3}\right)^3 \Leftrightarrow ab = \frac{p}{3}$$

$$\begin{aligned} &= A - B - (a - b)(p - p) \\ &= q \end{aligned}$$

4°)

$$s=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

5°) $f(x) = x^3 + px - q$

$f'(x) = 3x^2 + p$, $f'(x) > 0$

la fonction f est dérivable, strictement croissante, $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans R. Par ailleurs cette solution est strictement posistive car $f(0) = -q < 0$

6°)

a)

$x^3 + 12x = 63 \quad p = 12 \quad q = 63$

$s = \sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{1} = 4 - 1 = 3$

b)

$x^3 + 6x = 20 \quad p = 6 \quad q = 20$

$s = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$

mais 108 n'est pas le carré d'un entier ! et pourtant, si on prend la calculatrice pour terminer les calculs "ça tombe juste" : on trouve s = 2 . Explication : calculer $\left(\sqrt{3}+1\right)^3$ et $\left(\sqrt{3}-1\right)^3$

La deuxième strophe donne la règle pour résoudre $x^3 = px + q$. On pourrait la traduire ainsi :

In el secondo, de cotesti atti ;	Pour résoudre
Quando che' l cubo restasse lui solo,	$x^3 = px + q$
Tu osserverai quest'altri contratti,	
Del numer farai due, tal part'a volo	trouve deux nombres tels que $A + B = q$
Che l'una, in l'altra, si producta schietto,	et $AB = \left(\frac{p}{3}\right)^3$
El terzo cubo delle cose in stolo ;	
Delle qual poi, per commun precetto,	
Torrai li lati cubi, insieme gionti,	alors la solution sera
Et cotal somma, sarà il tuo concetto ;	$\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$

Une maison de jeu à la Renaissance (gravure du XIXe siècle, d'après une miniature du XVIe).

Exercice : On considère l'équation $x^3 = px + q$ ($p>0$ et $q>0$)

1°) Montrer que le système $\begin{cases} A + B = q \\ AB = \left(\dfrac{p}{3}\right)^3 \end{cases}$ n'a de solution que si $q^2 - 4\left(\dfrac{p}{3}\right)^3 \geq 0$

2°) Cette condition étant remplie, montrer que :

$$A = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$\text{et } B = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

3°) On pose alors $a = \sqrt[3]{A}$ et $b = \sqrt[3]{B}$

Montrer que $s = a + b$ est une solution strictement positive de l'équation $x^3 = px + q$.

4°) Exprimer s en fonction de p et q .

5°) Montrer que :

* si $s^3 > 4q$ il existe deux autres solutions réelles strictement négatives ;
* si $s^3 = 4q$ il existe une autre solution réelle strictement négative ;
* si $s^3 < 4q$ s est la seule solution réelle.

6°) Résoudre en utilisant la formule de la question 4 les équations :

a) $x^3 = 6x + 40$

b) $x^3 = 3x + 2$

c) $x^3 = 19x + 30$

Eléments de corrigé :

1°) A et B sont les solutions, si elles existent, de l'équation :

$X^3 - qX + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$ et $\Delta = q^2 - 4\left(\frac{p}{3}\right)^3$

il est donc nécessaire que Δ soit positif.

2°) Si Δ est positif alors les racines de l'équation sont :

$X_1 = \frac{q - \sqrt{\Delta}}{2}$ et $X_2 = \frac{q + \sqrt{\Delta}}{2}$, d'où le résultat.Par ailleurs ces racines sont de même signe (produit positif) et positives (somme q positive).

3°) On vérifie que $s = a + b$ est solution en calculant :

$$\begin{aligned} s^3 &= (a+b)^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \end{aligned}$$

$$\text{or} AB = \left(\frac{p}{3}\right)^3 \Leftrightarrow a^3b^3 = \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow ab = \frac{p}{3}$$

$$\begin{aligned} &= A + B + ps \qquad \text{or } A + B = q \\ &= q + ps \end{aligned}$$

l'équation est vérifiée .

Remarque : comme $A > 0$ et $B > 0$ alors $s = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} > 0$

4°) $s = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$

5°) s étant racine du polynôme $x^3 -px -q$ on peut écrire

$x^3 - px - q = (x - s)\left(x^2 + sx + \frac{q}{s}\right)$; l'existence d'autres racines dépend du signe du discriminant de $x^2 + sx + \frac{q}{s}$ $\Delta = s^2 - 4\frac{q}{s} = \frac{s^3 - 4q}{s}$; or $s > 0$ donc le signe de Δ est celui de $s^3 - 4q$. D'où la discussion et le résultat :

* si $s^3 > 4q$ il existe deux autres solutions de produit positif $\left(\frac{q}{s}\right)$, de somme négative (-s), donc deux autres solutions négatives.
* si $s^3 = 4q$ il existe une autre solution double $\left(-\frac{s}{2}\right)$ donc négative.
* si $s^3 < 4q$ il n'existe pas d'autre solution réelle.

6°)

a) $x^3 = 6x + 40 \quad p = 6 \quad \text{et} \quad q = 40$

$s = \sqrt[3]{20 + \sqrt{400 - 8}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{400 - 8}}$

$= \sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}}$

or $20 + \sqrt{392}$ est le cube de $2 + \sqrt{2}$ (à vérifier)

de même $20 - \sqrt{392}$ est le cube de $2 - \sqrt{2}$

donc $s = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$

De plus $s^3 - 4q = 64 - 160 < 0$ donc s est la seule solution .

b) $x^3 = 3x + 2 \quad p = 3 \quad \text{et} \quad q = 2$

$s = \sqrt[3]{1 + \sqrt{1 - 1}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 - 1}} = 2$

Ici $s^3 - 4q = 8 - 8 = 0$. Il existe une autre solution qui est $x = -1$

c) $x^3 = 19x + 30 \quad p = 19 \quad \text{et} \quad q = 30$

On trouve $x = 5$.

Comme $s^3 - 4q = 125 - 120 = 5 > 0$, il existe deux autres solutions négatives (-3 et -2)

Les solutions négatives, qui apparaissent en b) et c), ne peuvent pas être trouvées grâce à ces formules par Tartaglia.Mais, à cette époque, les nombres négatifs n'ayant pas de signification en tant que solutions d'une équation (voir Chapitre 1),on ne les aurait pas prises en considération.

Revenons à la fameuse " bataille scientifique".

1545 Malgré la promesse faite, Cardan publie en 1545 dans son Ars Magna la solution donnée par Tartaglia. Comme cet ouvrage est le premier où paraissent les formules de résolution, celles-ci seront connues sous le nom de "formules de Cardan". Tartaglia cria au parjure mais Cardan lui objecta qu'il avait trouvé les démonstrations et ajouté d'autres cas d'équation (par exemple $x^3 + px^2 + qx = t$), ce qui lui permettait de faire sienne cette découverte. Pourtant Cardan mentionne ses sources :

> Chapitre du cube et des inconnues égales à un nombre.
> Scipion del Ferro, de Bologne, il y a trente années de cela, inventa ce chapitre et le transmet à Antonio Maria Fior de Venise, qui dit qu'au cours d'un défi qu'il avait lancé à Nicolo Tartaglia de Brescia, ce même Nicolo résolut la question et il nous la communiqua sur notre demande, mais dépourvue de démonstration.
>
> Jérôme Cardan *Ars Magna (1545)*

S'ensuivit alors une querelle entre les deux hommes qui ne prit fin qu'à la mort de Tartaglia en 1557. Les "armes" utilisées pour cette "bataille" mathématique furent des problèmes qu'ils se lancèrent l'un à l'autre !

Dans l'Ars Magna il n'y a plus de place pour la poésie : voici la règle énoncée par Cardan pour résoudre l'équation $x^3 + px = q$

REGVLA.

Deducito tertiam partem numeri rerum ad cubum, cui addes quadratum dimidij numeri æquationis, & totius accipe radicem, scilicet quadratam, quam seminabis, uniq; dimidium numeri quod iam in se duxeras, adijcies, ab altera dimidium idem minues, habebisq; Binomium cum sua Apotome, inde detracta ℞ cubica Apotomæ ex ℞ cubica sui Binomij, residuũ quod ex hoc relinquitur, est rei æstimatio.

Exemplum. cubus & 6 positiones, æquantur 20, ducito 2, tertiam partem 6, ad cubum, fit 8, duc 10 dimidium numeri in se, fit 100, iunge 100 & 8, fit 108, accipe radicem quæ est ℞ 108, & eam geminabis, alteri addes 10, dimidium numeri, ab altero minues tantundem, habebis Binomiũ ℞ 108 p: 10, & Apotomen ℞ 108 m: 10, horum accipe ℞ cub & minue illam quæ est Apotomæ, ab ea quæ est Binomij, habebis rei æstimationem, ℞ v: cub: ℞ 108 p: 10 m: ℞ v: cubica ℞ 108 m: 10.

cub p: 6 reb æqlis 20
2 20
8 —— 10
108
℞ 108 p: 10
℞ 108 m: 10
℞ v: cu. ℞ 108 p: 10
m: ℞ v: cu. ℞ 108 m: 10.

Jérôme Cardan *Ars Magna - chapitre XI - 1545*

Cardan remarque qu'il existe un cas "irréductible" dans la résolution des équations cubiques du type $x^3 = px + q$: celui où $\left(\frac{q}{2}\right)^2$ est inférieur à $\left(\frac{p}{3}\right)^3$ car dans ce cas le calcul de

$\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$ est impossible.

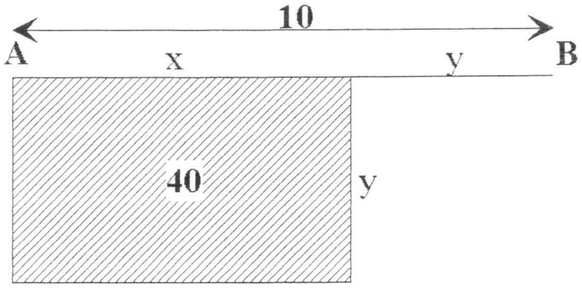
Et pourtant, même dans ce cas, on peut trouver des solutions. Il faudrait pouvoir écrire la racine carrée d'un nombre négatif. Cardan n'est pas loin de faire cette chose inimaginable. Il propose de résoudre le problème suivant :

> "Pour que la compréhension soit claire, soit donc à diviser une ligne AB, que l'on pose égale à 10, en deux parties dont le rectangle doit être 40."

Ce que l'on peut traduire algébriquement par :

trouver deux nombres x et y tels que : $\begin{cases} x + y = 10 \\ xy = 40 \end{cases}$

et graphiquement par :



> Exercice : Trouver deux nombres dont on connait la somme et le produit était un problème classique. En effet ce problème se ramène à la résolution d'une équation du second degré, ici $x^2 + 40 = 10x$ et l'on connait une méthode pour la résoudre (voir chapitre 1 p.14). Utiliser cette méthode pour résoudre l'équation.

Eléments de corrigé :

on calcule

$$\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 40 = 25 - 40 = -15$$

si l'on poursuit l'algorithme donné p.14 on devrait écrire que les solutions sont

$5+\sqrt{-15}$ et $5-\sqrt{-15}$!..

Voyons comment Cardan résout ce problème :

"Soit donc AD le carré de côté AC, moitié de AB ;

$$AC = \frac{AB}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$AD = AC^2 = 25$$

de AD on retranche le quadruple de AB.

$$AD - 4AB = 25 - 4x10 = z$$

S'il restait quelquechose, sa racine carrée respectivement ajoutée et retranchée à AC nous donnerait les parties cherchées.

$$x = 5+\sqrt{z} \ ; \ y = 5-\sqrt{z}$$

Mais comme le résultat est négatif ***tu imagineras*** $\sqrt{-15}$, où -15 est la différence de AD avec le quadruple de AB, en l'ajoutant d'une part et en le retranchant d'autre part de AC tu auras les parties cherchées. Bien entendu, en faisant abstraction des *tortures infligées à notre entendement*, le produit de $5+\sqrt{25-40}$ et de $5-\sqrt{25-40}$ est $25-(-15)$ donc 40."

C'est Bombelli qui va oser écrire la racine carrée d'un nombre négatif et, utilisant alors les formules de Cardan, résoudre les équations du "cas irréductible".

1572 L'équation qui a tout déclenché est la suivante : $x^3 = 15x + 4$
Examinons la démarche de Bombelli :

	Traduction avec les notations actuelles
Ancora si puo procedere nella agguagliatione di tal Capitolo in questa guisa.	
Agguaglisi $1\overset{3}{\smile}$ a $15\overset{1}{\smile}+4$;	$x^3 = 15x + 4$
piglisi il terzo delli Tanti, ch'è 5,	$\frac{15}{3} = 5$
cubisi fa 125	$5^3 = 125$
e questo cavisi del quadrato della metà del numero, ch'è 4, resta -121	$\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 125 = -121$
(il quale sarà chiamato **più di meno**)	(il sera appelé plus de moins) que l'on pourrait noter $\sqrt{-1}$
che di questo pigliata la R.q. sarà **+ di -11**	$\sqrt{-121}$ sera noté $11\sqrt{-1}$
che aggionto con, la metà del numero fa 2+di-11,	$\frac{4}{2} + 11\sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1}$
che pigliatone il lato cubico ed aggionto col suo residuo fa 2+di-1 et 2-di-1,	$\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} = 2 + \sqrt{-1}$ $\sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = 2 - \sqrt{-1}$ $(2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4$
che gionti insieme fanno 4, e 4 è la valuta del Tanto.	$x = 4$

Et benchè a molti parerà questa cosa stravagante, perchè di questa opinione fui anch'io già un tempo, parendomi più tosto sofistica che vera, nondimeno tanto cercai che trovai la dimostratione.
(Et bien que ceci puisse paraitre extravagant à beaucoup de gens, et en réalité j'avais d'abord eu une telle opinion, parce que cela me semblait plutôt sophistiqué que vrai, néanmoins j'ai tant cherché que j'ai trouvé la démonstration.)

Cette "chose extravagante", Bombelli va la formaliser dans son Algèbre (1572) :

> J'ai trouvé une sorte de racine cubique très différente des autres, qui paraît au chapitre sur le cube égal à une quantité et à un nombre[1] quand le cube du tiers de la quantité est plus grand que le carré de la moitié du nombre[2] comme il a été démontré dans ce chapitre.
> **Cette autre sorte de racine carrée** a pour son algorithme des opérations fort différentes des autres et a un nom différent ; car, lorsque le cube du tiers de la quantité est plus grand que le carré de la moitié du nombre, l'excès ne peut être appelé ni plus ni moins, mais il peut être appelé ***plus de moins*** quand il a été ajouté, et quand il a été retranché il sera appelé ***moins de moins*** et cette opération est encore nécessaire pour l'autre racine carrée dans le chapitre sur la puissance de la puissance accompagnée du cube de la quantité ou tous les deux ensemble[3] où les cas d'égalité faisant apparaître cette sorte de racine sont beaucoup plus importants que les autres. Ceci peut paraître très sophistiqué mais, en réalité, j'avais d'abord eu une telle opinion tant que je n'en avais pas trouvé la démonstration au moyen des lignes[4] (comme ceci a été prouvé dans le chapitre sur les aires planes) et d'abord je traiterai de la multiplication en donnant les règles pour plus et moins.

Les règles de la multiplication sont énoncées sous la forme d'une comptine :

	En notant $\sqrt{-1}$ le nombre **più di meno**, cela se traduit par :
Più via più di meno fa più di meno,	$1 \times \sqrt{-1} = \sqrt{-1}$
Meno via più di meno fa meno di meno,	$(-1) \times \sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$
Più via meno di meno fa meno di meno,	$1 \times \left(-\sqrt{-1}\right) = -\sqrt{-1}$
Meno via meno di meno fa più di meno,	$(-1) \times \left(-\sqrt{-1}\right) = \sqrt{-1}$
Più di meno via più di meno fa meno,	$\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$
Più di meno via meno di meno fa più,	$\sqrt{-1} \times \left(-\sqrt{-1}\right) = +1$
Meno di meno via più di meno fa più,	$\left(-\sqrt{-1}\right) \times \sqrt{-1} = +1$
Meno di meno via meno di meno fa meno.	$\left(-\sqrt{-1}\right) \times \left(-\sqrt{-1}\right) = -1$

Il est à remarquer que Bombelli a inventé un nouveau nombre qui lui permet de trouver la racine positive de l'équation $x^3 = 15x + 4$ mais il passe sous silence les deux autres racines qui sont négatives. En fait "la nouvelle sorte de racine carrée" est un outil pour résoudre les équations mais celles-ci ne peuvent avoir que des solutions positives. Il faudra attendre encore une cinquantaine d'années pour que les mathématiciens acceptent aussi les racines négatives ainsi que les racines complexes.

---

[1] $x^3 = ax + b$

[2] $\left(\frac{a}{3}\right)^3 > \left(\frac{b}{2}\right)^2$

[3] les équations du quatrième degré

[4] géométriquement

Exercice :

En utilisant "l'autre sorte de racine carrée" inventée par Bombelli, résoudre l'équation $x^3 = 51x + 104$

Ancora si può procedere nelle equatione di questo Capit.° in un'altro modo: come se si havesse ad agguagliare 1³ à 15¹ p. 4: pigliasi il terzo de le Cose che è 5. cubasi fa 125. et questo si caua del quadrato della metà del num.° che è 4 restarà 0 m. 121, che di questo pigliata la Radice, dirà R[0 m. 121], che giunta con la metà del numero, farà 2 p. R[0 m. 121], che pigliatone il lato Cubico, et aggiunto col suo residuo farà R³[2 p. R[0 m. 121]] p. R³[2 m. R[0 m. 121]] et tanto uale la cosa: Et benche questo modo si possa più tosto chiamar sofistico, che altrim.te come fu detto innanti nel Capitolo di Censi, et N.° eguali à Cose che pure nell'operationi serua senza difficoltà niuna, et assai uolte si truoua la ualuta de la Cosa per numero, come questo, et sà creatore; ch'il Creatore di

1³ Eguale à 15¹ p. 4

5 / 5 / 25 / 5 / 125 ; 2 / 2 / 4 / 125

R[0 m. 121]

2

Somma R[0 m. 121] Caua R[0 m. 121]

R³[2 p. R[0 m. 121]] p. R³[2 m. R[0 m. 121]]

Creatore 2 p. R[0 m. 1] p. 2 m. R[0 m. 1]

2 m. R[0 m. 1]

Somma 4: et tanto uale la Cosa.

ALGEBRA, R. BOMBELLI, 1572.

Eléments de corrigé :

$$x^3 = 51x + 104 \quad p = 51 \quad q = 104$$

$$\frac{p}{3} = 17 \quad \frac{q}{2} = 52$$

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = -2209 = -47^2$$

$$x = \sqrt[3]{52 + 47\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{52 - 47\sqrt{-1}}$$

or $52 + 47\sqrt{-1} = \left(4 + \sqrt{-1}\right)^3$

et $52 - 47\sqrt{-1} = \left(4 - \sqrt{-1}\right)^3$

donc $x = 4 + \sqrt{-1} + 4 - \sqrt{-1} = 8$

3- Des racines[1]:" Les vraies, les fausses, et les imaginaires"

René Descartes

[1]Racine, ici, est employé comme solution d'une équation, ou valeur annulant une expression polynomiale. Au départ, la racine, ou racine carrée, est le côté inconnu du carré , puis ce pourra être une racine cubique ou quatrième...Ce nom est généralisé pour toutes les solutions d'équations polynomiales. Les mathématiciens pensaient, jusqu'à ce que Galois l'infirme au 19° siècle, que toutes les solutions de toutes les équations polynomiales pouvaient s'exprimer à l'aide de radicaux.

Cardan s'était intéressé au nombre de solutions d'une équation, comme nous le décrit Montucla dans son Histoire des mathématiques:

> "Ce que dit Cardan sur la multiplicité des racines des équations, ne se borna pas aux équations carrées. Il montre aussi que les cubiques sont susceptibles de trois solutions différentes."

Peu à peu, avec Bombelli puis Viète, les mathématiciens vont considérer qu'une équation de degré n a au plus n racines. Ces racines sont bien sûr des nombres (réels) seulement positifs pour Viète, mais pour certains autres (nous l'avons vu pour Cardan), les racines négatives ("moins pures", "feintes") sont aussi acceptées.

Un texte fondamental va alors fixer les choses: il s'agit de "L'invention nouvelle en algèbre" d'Albert Girard.

Albert Girard est un mathématicien français, peu connu, disciple de Stevin[2]; ses notations algébriques ont subi à la fois les influences de Bombelli, Chuquet, et, bien sûr, Viète.

Son ouvrage paraît en 1629, et l'on y trouve un "théorème" qui deviendra plus tard le théorème fondamental de l'algèbre; il constitue à l'époque plutôt une affirmation sur le nombre de solutions d'une équation de degré n: une équation de degré n a n racines. Pour cela, Girard prend en considération <u>toutes</u> les racines: positives, négatives, et impossibles.

> Théorème
>
> Toutes les équations reçoivent autant de solutions que la dénomination de la plus haute quantité le demonstre, excepté les incomplettes: & la première faction des solutions est esgale au nombre du premier meslé, la seconde faction des mesmes, est esgale au nombre du deuxiesme meslé; la troisiesme, au troisiesme, & tousjours ainsi, tellement que la dernière faction est esgale à la fermeture, & ce selon les signes qui se peuvent remarquer en l'ordre alternatif.

Ce que Girard nomme première faction est la somme des racines, deuxième faction, la somme de tous les produits deux à deux des racines, troisième faction, la somme des produits trois à trois... La dernière faction est le produit de toutes les racines. Nous appelons aujourd'hui ces factions les fonctions symétriques des racines, et c'est Viète qui le premier s'en occupa.

Une équation "incomplette", est une équation où manque une puissance de l'inconnue dans la suite des puissances. Par exemple:

$x^4+2x^2+1=0$

est une équation "incomplette"

Pour Girard les résultats sur les factions constituent une sorte de "démonstration" de son "théorème".

> <u>Exercice:</u>
>
> A l'appui de son théorème, pour mieux comprendre, Girard nous donne des exemples.
>
> <u>Premier exemple:</u>
>
> Il s'agit de l'équation "complette":
>
> 1(4)esgale à 4(3)+7(2)-34(1)+24.

[2]Stevin est surtout connu comme auteur de *La dîme*, où il a introduit les nombres décimaux.

ou encore: $x^4=4x^3+7x^2-34x+24$.

D'après Girard combien cette équation admet-elle de racines?

Le premier "meslé" est 4. Que nous indique-t-il?

Le deuxième "meslé" doit être affecté du signe - (les signes en ordre alternatif), nous obtenons donc -7. Que nous indique-t-il?

Continuer ainsi.

(Pour la facilité, il est possible de nommer x_1, x_2, x_3,... les racines).

Deuxième exemple:

1(4)esgale à 4(3)-6(2)+4(1)-1.

Écrire sous forme moderne cette équation, et répondre aux mêmes questions que précédemment.

Troisième exemple:

1(3)esgale à 7(1)-6, appelée "équation incomplette". Pourquoi cette appellation à votre avis?

Vérifier que les solutions sont :1, 2, -3.

Girard nous indique qu'elle peut se mettre sous une forme "complette", à savoir:

$x^3=0x^2+7x-6$.

Vérifier alors la valeur de toutes les "factions".

Quatrième exemple:

1(4)esgale à 4(1)-3

$x^4=4x-3$ ou encore $x^4=0x^3+0x^2+4x-3$

Vérifier que cette équation équivaut à:

$(x-1)^2(x^2-2x+3)=0$.

Résoudre alors l'équation en admettant l'usage d'une "racine carrée d'un nombre négatif"

Vérifier alors le principe des factions.

Exemple non proposé par Girard[3]:

Soit l'équation du second degré:

$x^2-x-6=0$

Vérifier que cette équation admet deux racines réelles, par le calcul du discriminant par exemple.

A l'aide des formules habituelles calculer la somme et le produit des racines. Comparer ces résultats au calcul des "factions' de Girard.

[3]Destiné à ceux qui connaissent les formules de résolution des équations du second degré.

Éléments de corrigé:

exemple 1

L'équation admet 4 solutions;

4 est la somme des racines: $x_1+x_2+x_3+x_4$,

-7 est la somme: $x_1x_2+ x_1x_3+ x_1x_4+ x_2x_3+ x_2x_4+ x_3x_4$,

-34 est la somme: $x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4$,

-24 est le produit: $x_1x_2x_3x_4$.

(pour les curieux, il est possible de vérifier que les racines sont 1, 2, -3, 4.)

exemple 2:

$x^4=4x^3-6x^2+4x-1$

4 est la somme des racines: $x_1+x_2+x_3+x_4$,

6 est la somme: $x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4$,

4 est la somme: $x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4$,

1 est le produit: $x_1x_2x_3x_4$.

Les curieux pourront vérifier que la seule racine est 1, mais elle compte 4 fois car $x^4-4x^3+6x^2-4x+1=(x-1)^4$, ce que Girard a remarqué.

exemple 3:

Équation "incomplette", car il manque les termes en x^2.

La première faction vaut 0, ce qui est bien 1+2-3, la deuxième faction vaut -7, ce qui est bien $1\times2+1\times(-3)+2\times(-3)$, la troisième faction vaut -6, ce qui est bien $1\times2\times(-3)$.

exemple 4:

x^2-2x+3 admet comme discriminant: -8.

Les racines sont donc: $\frac{2-\sqrt{-8}}{2}$ et $\frac{2+\sqrt{-8}}{2}$, ou encore: $1-\sqrt{-2}$ et $1+\sqrt{-2}$.

Les solutions de l'équation proposée sont donc:

1, 1, $1+\sqrt{-2}$, $1-\sqrt{-2}$.

L'on vérifiera facilement les factions successives, en utilisant pour les racines carrées de nombres négatifs les règles de calcul habituelles.

Dernier exemple:

Le discriminant est 25, qui est positif.

La somme des racines est $-\frac{-1}{1}$, soit 1, et le produit est $\frac{-6}{1}$, soit -6.

Les factions indiquées par Girard sont pour

$x^2=x+6$,

1 pour la somme et - 6 pour le produit.

Girard va conclure cette partie en expliquant son théorème par une justification de l'usage des racines négatives ou imaginaires.

> "Donc[4] il faut se resouvenir d'observer tousjours cela: on pourrait dire à quoy sert ces solutions qui sont impossibles, je respond pour trois choses, pour la certitude de la reigle generale, & qu'il n'y a point d'autre solutions, & pour son utilité: l'utilité est facile, car elle sert à l'invention des solutions de semblables équations comme on peut remarquer en l'arithmétique de Stevin.[...] Ainsi qu'on peut donner trois noms aux solutions, veu qu'il y en a qui sont plus que rien; d'autres moins que rien; et d'autres enveloppées, comme celles qui ont des $\sqrt{-}$, comme des $\sqrt{-3}$, ou autres nombres semblables."

Les solutions "impossibles" sont devenues "enveloppées". Au demeurant Girard ne se prononce pas sur la réalité de ces solutions.

Ce nom inventé par Girard ne sera pas retenu par la postérité.

C'est en effet un tout petit passage de Descartes, dans "La géométrie", en 1636, qui retiendra l'attention des successeurs.

> "Au reste tant les vrayes racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement **imaginaires**; c'est à dire qu'on peut bien toujours en imaginer autant que j'ay dit en chaque Equation; mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité qui corresponde à celles qu'on imagine: comme encore qu'on puisse imaginer trois en celle-ci $x^3-6xx+13x-10\propto 0$, il n'y en a toutefois qu'une réelle qui est 2; & pour les deux autres, quoy qu'on les augmente, ou diminüe, ou multiplie en la façon que je viens d'expliquer, on ne sçaurait les rendre autres qu'imaginaires."

Le mot "imaginaire" est né, et côtoiera longtemps celui d'impossible pour désigner ces sortes de racines.

Nous remarquons les notations très modernes de Descartes et le fait qu'il n'hésite pas à écrire qu'une expression est égale à 0, c'est à dire **rien**.(le signe $\propto$ est utiliser par Descartes pour =).

Il reprend certaines idées de Girard pour le nombre de solutions. Il nous donne à cette occasion un procédé très couramment utilisé depuis pour construire une équation admettant par exemple les nombres 2 et -1 comme racines. Nous pouvons prendre:

$(x-2)(x+1)=0$

Cette façon de faire constitue plus ou moins une justification du nombre de racines en fonction du degré de l'équation.

---

[4]L'orthographe des textes de Girard peut choquer, mais il convient de remarquer qu'au 17° siècle les règles strictes que nous connaissons ne sont pas encore apparues, et que l'orthographe va continuer longtemps encore d'évoluer. Il est fréquent de trouver par exemple dans une même page le même mot orthographié de plusieurs façons.

Exercice:

1)L'équation proposée par Descartes est:

$$x^3-6x^2+13x-10=0.$$

Il nous indique 2 comme racine réelle. Achever la résolution pour découvrir celles qui sont imaginaires.[5]

2) Construire une équation admettant comme racines: $2, -\frac{1}{2}, 5, 1$; puis une équation admettant pour racines: 2,2,-3.

LA

GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

Des problesmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles & des lignes droites.

TOus les Problesmes de Geometrie se peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'est besoin par aprés que de connoistre la longeur de quelques lignes droites, pour les construire.

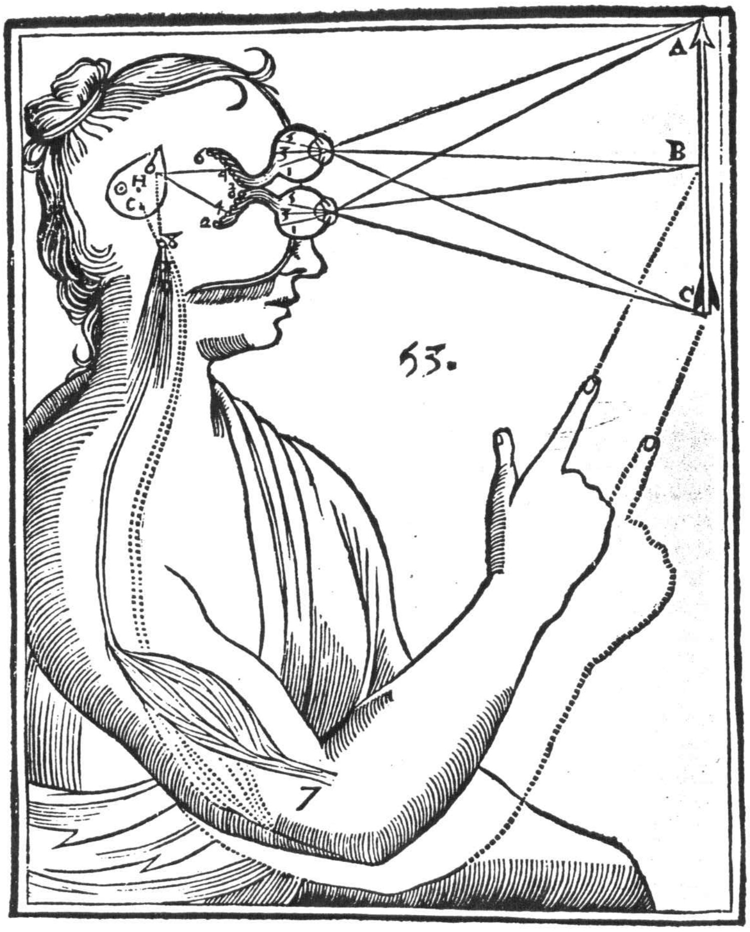
Et comme toute l'Arithmetique n'est composée, que de quatre ou cinq operations, qui sont l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Diuision, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne espece de Diuision : Ainsi n'at'on autre chose a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a estre connuës, que leur en adiouster d'autres, ou en oster, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres , & qui peut ordinairement estre prise a discretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatriesme, qui soit à l'vne de ces deux, comme l'autre est a l'vnité, ce qui est le mesme que la Multiplication ; oubien en trouuer vne quatriesme, qui soit a l'vne de ces deux, comme l'vnité

Commẽt le calcul d'Arithmetique se rapporte aux operations de Geometrie.

Pp est

Première page de *La Géométrie* de Descartes

[5]Cette question ne pourra sans doute être traitée valablement que par ceux qui connaissent la factorisation des polynômes.



La Dioptrique (*1637*) de *Descartes*.
Illustration du chapitre analysant le phénomène de la vision humaine.
Bibliothèque nationale, Paris.

Éléments de corrigé:

1)L'équation proposée peut s'écrire après factorisation:
$(x-2)(x^2-4x+5)=0$;
Le discriminant de x^2-4x+5 est 16-20, soit -4. Ses racines sont donc:
$\frac{4-\sqrt{-4}}{2}$, et $\frac{4+\sqrt{-4}}{2}$ ou encore:
$2-\sqrt{-1}$, et $2+\sqrt{-1}$

2) Une équation ayant comme racines 2, $-\frac{1}{2}$, 5, 1 sera par exemple: $(x-2)(x+\frac{1}{2}(x-5)(x-1)=0$, ce qui donnera après développement:
$x^4-7{,}5x^3+13x^2-1{,}5x-5=0$
Une équation ayant comme racine: 2, 2, -3 sera par exemple:
$(x-2)^2(x+3)=0$, ou après développement:
$x^3-x^2-8x+12=0$
Note: il est possible bien sûr d'ajouter à chaque fois un facteur constant. Par exemple : $2(x-2)^2(x+3)=0$ a aussi pour solutions 2, 2, -3.

D'Alembert, en 1746, essaiera de démontrer le théorème fondamental de l'algèbre. En réalité, il donnera une certaine justification du fait que tous les nombres imaginaires sont de la forme $a+b\sqrt{-1}$, où a et b sont réels.

Voici ce qu'il écrit dans l'article *Imaginaire* de "l'Encyclopédie":

> "J'ai démontré le premier, dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, pour l'année 1746, & même dans un ouvrage antérieur, envoyé à l'Académie de Berlin au commencement de 1746, que toute quantité *imaginaire* donnée à volonté & de telle forme que l'on voudra, peut toujours se réduire à $e+f\sqrt{-1}$, e & f étant des quantités réelles. M. Euler a démontré depuis cette même proposition, dans les mémoires de l'Académie de Berlin en 1749; mais il est aisé de voir que sa démonstration ne diffère en aucune façon de la mienne. Pour s'en convaincre, on peut comparer la page 273 des Mémoires de Berlin de 1749, avec l'article 79 de ma Dissertation sur les vents."

Dès lors le théorème s'appellera "Théorème de D'Alembert".

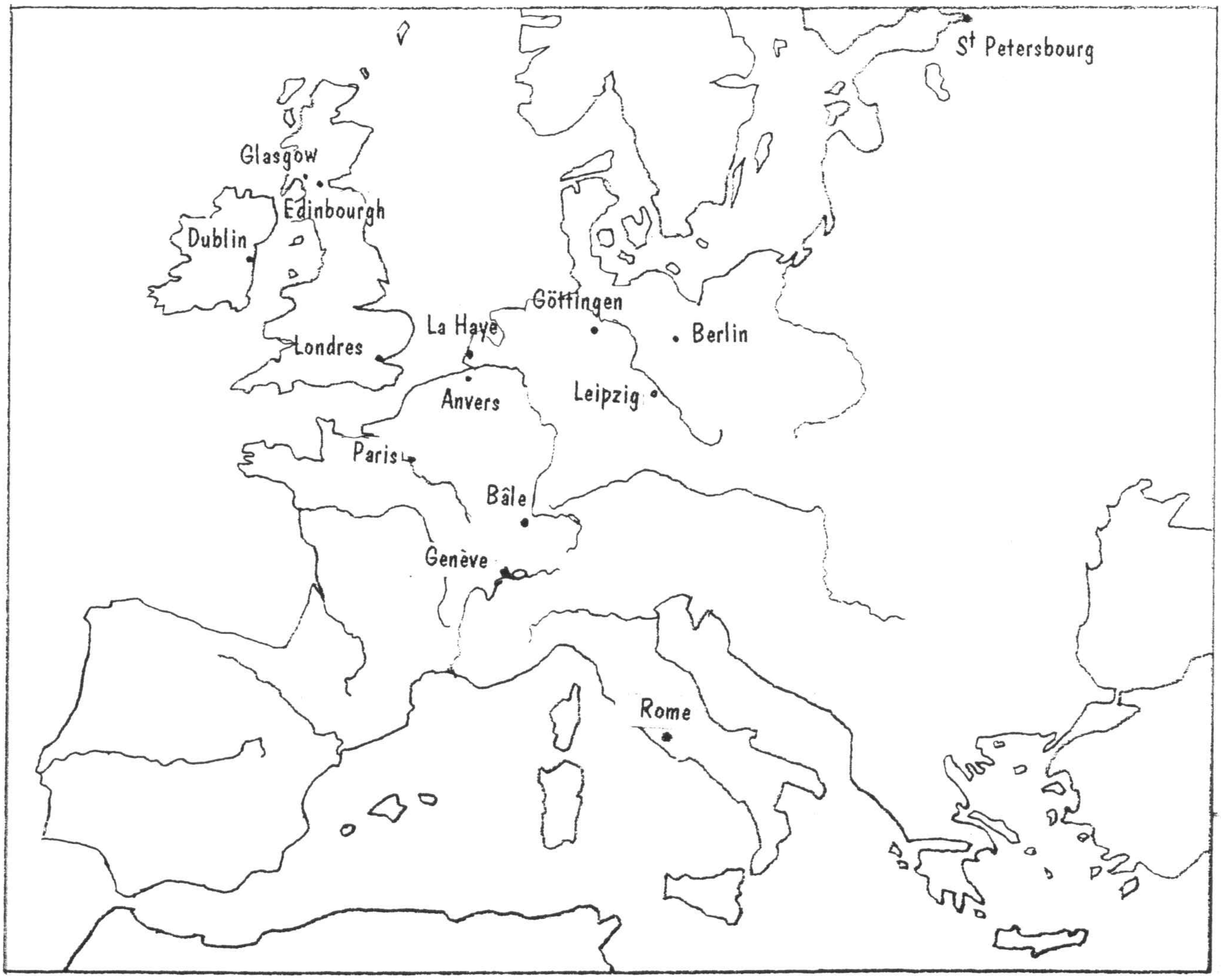
Cette démonstration sera soumise à une critique sévère de la part de Gauss qui en donnera une autre plus satisfaisante en 1799. Gauss produira d'ailleurs plusieurs démonstrations du théorème.

Ainsi, depuis Girard et Descartes, les nombres négatifs et imaginaires sont, au même titre que les positifs, comptés parmi les racines des équations, essentiellement pour pouvoir généraliser les théorèmes. A ce titre, sans se poser trop de questions de rigueur, tout ce qui est démontré pour les "réels" est immédiatement élargi aux "imaginaires", en particulier tout ce qui concerne les développements en séries entières, très utilisés au 18°siècle.

Cependant, sauf en quelques rares occasions, les racines négatives ou imaginaires ne sont pas de "vraies" racines; elles n'ont pas de sens autre qu'opératoire.

Quelques suggestions ou questions vont ouvrir la voie, et nous citerons une fois encore Girard comme précurseur:

> "La solution par moins s'explique en géométrie en rétrogradant, et le moins recule, là où le plus avance."


St Petersbourg
Glasgow
Edinbourgh
Dublin
Göttingen
La Haye
Berlin
Londres
Anvers
Leipzig
Paris
Bâle
Genève
Rome

4- "Dis-moi, tu as tout compris dans cette histoire ? "

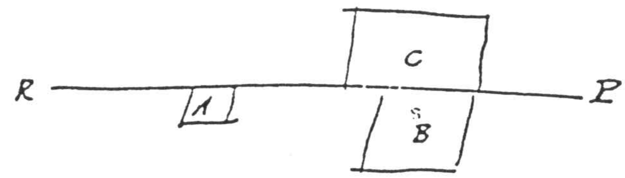
Lorsqu'on résout une équation on peut donc trouver des nombres positifs, des nombres négatifs, et des nombres imaginaires. Pour ces deux dernières catégories de nombres plusieurs problèmes vont se poser, liés essentiellement à la difficulté de donner un sens, une signification concrète à ces nombres.

Pour les nombres négatifs, la première difficulté est celle de la "règle des signes".

Voici tout d'abord l'avis d'un non-mathématicien : Stendhal, dans son roman autobiographique "La vie d'Henri Brulard" (1835) décrit ainsi son désarroi face à la "règle des signes" :

> Suivant moi l'hypocrisie était impossible en mathématiques et, dans ma simplicité juvénile, je pensais qu'il en était ainsi dans toutes les sciences où j'avais ouï dire qu'elles s'appliquaient. Que devins-je quand je m'aperçus que personne ne pouvait m'expliquer comment il se fait que : moins par moins donne plus (- x - = +) ? (C'est une des bases fondamentales de la science qu'on appelle algèbre).
>
> On faisait bien pis que ne pas m'expliquer cette difficulté (qui sans doute est explicable car elle conduit à la vérité), on me l'expliquait par des raisons évidemment peu claires pour ceux qui me les présentaient.
>
> M. Chabert pressé par moi s'embarrassait, répétait sa leçon, celle précisément contre laquelle je faisais des objections, et finissait par avoir l'air de me dire :
>
> "Mais c'est l'usage, tout le monde admet cette explication. Euler et Lagrange, qui apparemment valaient autant que vous, l'ont bien admise. Nous savons que vous avez beaucoup d'esprit (cela voulait dire : nous savons que vous avez remporté un premier prix de belles-lettres et bien parlé à M.Teste-Lebeau et aux autres membres du Département), vous voulez apparemment vous singulariser."
>
> Quant à M.Dupuy, il traitait mes timides objections (timides à cause de son ton d'emphase) avec un sourire de hauteur voisin de l'éloignement. Quoique beaucoup moins fort que M.Chabert, il était moins bourgeois, moins borné, et peut-être jugeait sainement de son savoir en mathématiques. Si aujourd'hui je voyais ces Messieurs huit jours, je saurais sur-le-champ à quoi m'en tenir. Mais il faut toujours en revenir à ce point.
>
> Je me rappelle distinctement que, quand je parlais de ma difficulté de *moins par moins* à un *fort*, il me riait au nez ; tous étaient plus ou moins comme Paul-Emile Teysseyre et apprenaient par coeur. Je leur voyais dire souvent au tableau à la fin des démonstrations : *"Il est donc évident"*, etc.
>
> Rien n'est moins évident pour vous, pensais-je. Mais il s'agissait de choses évidentes pour moi, et desquelles malgré la meilleure volonté il était impossible de douter.
>
> Les mathématiques ne considèrent qu'un petit coin des objets (leur quantité), mais sur ce point elles ont l'agrément de ne dire que des choses sûres, que la vérité et presque toute la vérité.
>
> Je me figurais à quatorze ans, en 1797, que les hautes mathématiques, celles que je n'ai jamais sues, comprenaient tous ou à peu près tous les côtés des objets, qu'ainsi, en avançant je parviendrais à savoir des choses sûres, indubitables, et que je pourrais me prouver à volonté, *sur toutes choses.*
>
> Je fus longtemps à me convaincre que mon objection sur – x – = + ne pourrait pas absolument entrer dans la tête de M.Chabert, que M.Dupuy n'y répondrait jamais que par un sourire de hauteur, et que les forts auxquels je faisais des questions se moqueraient toujours de moi.
>
> J'en fus réduit à ce que je me dis encore aujourd'hui : il faut bien que - par - donne + soit vrai, puisque évidemment en employant à chaque instant cette règle dans le calcul, on arrive à des résultats vrais et indubitables.

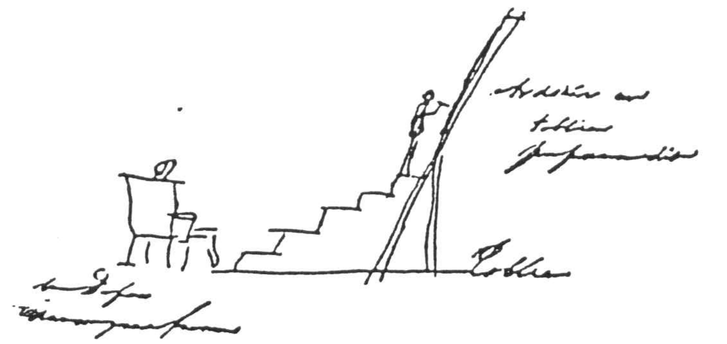
Mon grand malheur était cette figure :



Supposons que RP soit la ligne qui sépare le positif du négatif, tout ce qui est au-dessus est positif, comme négatif tout ce qui est au-dessous ; comment, en prenant le carré B autant de fois qu'il y a d'unités dans le carré A, puis-je parvenir à faire changer de côté au carré C ?

Et, en suivant une comparaison gauche que l'accent souverainement traînard et grenoblois de M. Chabert rendait encore plus gauche, supposons que les quantités négatives sont les dettes d'un homme, comment en multipliant 10 000 francs de dette par 500 francs, cet homme aura-t-il ou parviendra-t-il à avoir une fortune de 5 000 000, cinq millions ?

L'obstacle sur lequel bute Stendhal provient de l'interprétation en terme de dette qui a été donnée au nombre négatif (voir aussi N.Chuquet au chapitre 1) : cette interprétation permet effectivement d'éclairer l'addition des nombres négatifs mais crée un obstacle dans le cas de la multiplication.



[Ardoise ou tableau proprement dit. — Tableau. — M. Dupuy dans son grand fauteuil.]

Exercice : On peut cependant tenter de donner de la matérialité aux nombres négatifs, en accord avec la règle des signes :

Le trésorier d'une association tient parfaitement à jour le Livre de Compte de celle-ci.

Un crédit, une arrivée d'adhérent sont représentés par des nombres **positifs**,

Un débit, une démission d'adhérent sont représentés par des nombres **négatifs**.

On a reproduit la première page de ce livre :

DATE	Nature de l'opération	Calcul	Variation de l'avoir	Nouvel avoir
31/12/95	solde de l'année 1995	/	/	10 000
01/01/96	cotisations de 50 nouveaux adhérents	(+50)x(+100)	+5 000	15 000
15/01/96	achat d'un badge pour chaque nouvel adhérent	( )x(-5)	-250	
30/1/96	remboursement de cotisations à 10 adhérents démissionnaires	(-10)x( )	-1 000	
31/01/96	remboursement des badges par les démissionnaires	(-10)x(-5)		13 800

Question : Compléter ce tableau.

Eléments de corrigé :

DATE	Nature de l'opération	Calcul	Variation de l'avoir	Nouvel avoir
31/12/95	solde de l'année 1995	/	/	10 000
01/01/96	cotisations de 50 nouveaux adhérents	(+50)x(+100)	+5 000	15 000
15/01/96	achat d'un badge pour chaque nouvel adhérent	(+50)x(-5)	-250	**14 750**
30/1/96	remboursement de cotisations à 10 adhérents démissionnaires	(-10)x(+100)	-1 000	**13 750**
31/01/96	remboursement des badges par les démissionnaires	(-10)x(-5)	+50	13 800

Après l'avis d'un non-spécialiste, voici maintenant celui de M.Duhamel, professeur à l'Ecole Polytechnique, qui écrit en 1866 :

> Toute démonstration de règles sur les quantités négatives isolées, ne peut être qu'une illusion, puisqu'il n'y a aucun sens à attacher à des opérations arithmétiques sur des choses qui ne sont pas des nombres, et n'ont aucune existence réelle.

Il est vrai que la justification de la règle des signes est loin d'être simple.

Par exemple Cardan qui, on l'a vu, est le premier à avoir donné des solutions négatives pour une équation a été amené à énoncer la règle des signes tantôt de **façon correcte** :

> Plus ductum in plus, et divisum per plus ; et minus ductum in minus, et divisum per minus producunt semper plus, et ita plus in minus, vel minus in plus, vel plus divisum per minus, vel minus per plus, producit minus.

Ce que l'on peut traduire par :
"Plus multiplié par plus, et divisé par plus ; et moins multiplié par moins, et divisé par moins donnent toujours plus, et de même plus multiplié par moins, ou moins par plus, ou plus divisé par moins, ou moins divisé par plus, donne moins."

tantôt de **façon erronée** :

> Igitur minus in minus, seu alienum in alienum, et minus in plus, seu plus in minus, quod est in alienum, seu alienum in id quod est, producunt minus solum, seu alienum.
> Et ideo patet communis error dicentium quod minus in minus producit plus. Neque enim magis minus in minus producit plus quam plus in plus producat minus.

Ce que l'on peut traduire par :
"Donc moins multiplié par moins, ou ce qui n'existe pas par ce qui n'existe pas, et moins multiplié par plus ou plus par moins, ce qui est par ce qui n'existe pas, ou ce qui n'existe pas par ce qui est, ne produisent jamais que moins ou quelque chose qui n'existe pas.

Et ainsi est mise en évidence l'erreur commune de ceux qui disent que moins par moins fait plus. Car moins par moins ne fait pas davantage plus, que plus par plus ne fait moins".

Voyons maintenant quelques unes des justifications de la règle des signes proposées au cours des siècles.

THEOREME.

Plus multiplié par plus, donne produict plus, & moins multiplié par moins, donne produict plus, & plus multiplié par moins, ou moins multiplié par plus, donne produict moins.

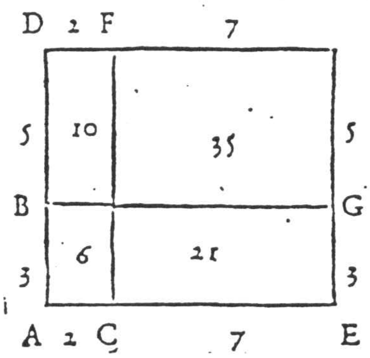
Explication du donné. Soit 8—5 multiplié par 9—7, en ceste sorte; —7 fois —5 font +35 (+35, par ce que, comme

comme dict le theoreme, —par—, faict +) Puis—7 fois 8 faict —56 (—56, par ce que, comme dict le theoreme, —par+, faict —) Et semblablement soit —5, multiplie par le 9, & donneront produicts 72—45. Puis ajoustez +72 +35, font 107. Puis ajoustez les —56 —45, font —101; Et soubstraict le 101 de 107 reste 6 pour produict de telle multiplication. De laquelle la disposition des characteres de l'operation est telle:

$$\begin{array}{r} 8 - 5 \\ 9 - 7 \\ \hline -56 + 35 \\ 72 - 45 \\ \hline 6 \end{array}$$

Explication du requis. Il faut demonstrer par ledict donné, que + multiplié par +, faict +, & que — par —, faict +, & que + par —, ou — par +, faict —. *Demonstration.* Le nombre à multiplier 8—5, vaut 3, & le multiplicateur 9—7 vaut 2; Mais multipliant 2 par 3, le produict est 6; Doncques le produict cy dessus aussi 6, est le vray produict: Mais le mesme est trouvé par multiplication, là ou nous avons dict que + multiplié par +, donne produict +, & — par — donne produict +, & + par —, ou — par + donne produict —, doncques le theoreme est veritable.

Autre demonstration geometrique.



Soit AB 8—5 (à sçavoir AD 8—BD 5) Puis AC 9—7 (à sçavoir AE 9—CE 7) leur produict sera CB: ou bien selon la multiplication precedante ED 72—EF 56—DG 45 + GF 35, Lesquels

nous demonstrerons estre egales à CB en ceste sorte. Du tout le ED + GF, soubstraict EF, & DG, reste CB.

Conclusion. Plus doncques multiplié par plus, donne produict plus. & moins multiplié par moins, donne produict plus, & plus multiplié par moins, ou moins multiplié par plus, donne produict moins; ce qu'il falloit demonstrer.

L'explication de Stevin est fondée sur la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ; par ailleurs il se sent obligé de donner une explication géométrique en plus de l'explication arithmétique : au XVIIème siècle la meilleure démonstration est toujours géométrique.

Exercice : En procédant comme Stevin dans sa "démonstration" géométrique, effectuer la multiplication (10-6)x(7-2)

LES

ŒUVRES Mathematiques

DE

SIMON STEVIN de Bruges.

Ou ſont inſerées les

MEMOIRES MATHEMATIQVES,

Eſquelles s'eſt exercé le Tres-haut & Tres-illuſtre Prince MAURICE de NASSAU, Prince d'Aurenge, Gouverneur des Provinces des Païs-bas unis, General par Mer & par Terre, &c.

Le tout reveu, corrigé, & augmenté

Par ALBERT GIRARD Samielois, Mathematicien.

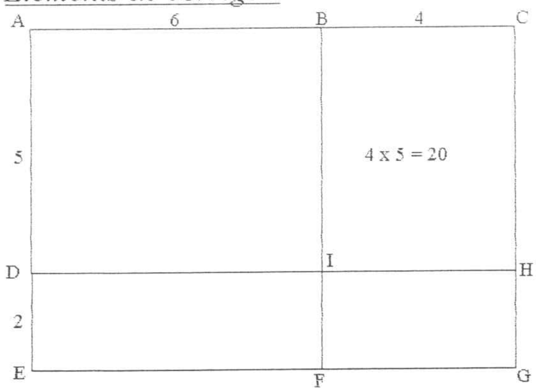
A LEYDE

Chez Bonaventure & Abraham Elſevier, Imprimeurs ordinaires de l'Univerſité, ANNO CIↃ IↃ C XXXIV.

Hors-texte 5.

Page de titre de la seconde édition française des *Œuvres Mathematiques* de Simon Stevin de Bruges, Leyde, 1634, Traduction et commentaires d'Albert Girard.

Eléments de corrigé :



aire(BCHI)	=	aire(ACGE)	-	aire(ABFE)	-	aire(DHGE)	+	aire(DIFE)
4x5	=	10x7	-	6x7	-	10x2	+	6x2

Pourquoi rajoute-t-on l'aire du rectangle (DIFE) ?

L'explication de Mac Laurin (1748) :

On pourrait de là déduire la règle des signes telle qu'on a coutume de l'énoncer, qui est que les signes semblables dans les termes du multiplicateur et du multiplicande donnent + au produit, et les signes différents donnent -. Nous avons évité cette manière de présenter la règle, pour épargner aux Commençants l'expression révoltante - par - donne +, qui est cependant une conséquence nécessaire de la règle : on peut, comme nous avons fait, la déguiser, mais non l'anéantir ou la contredire ; le Lecteur, sans s'en apercevoir, en a observé tout le sens dans les exemples précédents ; familiarisé avec la chose, pourrait-il encore s'effaroucher des mots ? s'il lui reste là-dessus quelque scrupule, qu'il fasse attention à la démonstration suivante qui attaque directement la difficulté.

+a - a = 0, ainsi par quelque quantité qu'on multiplie +a - a, le produit doit être 0 : si je le multiplie par n, j'aurai pour le premier terme +na, donc j'aurai pour le second -na, puisqu'il faut que les deux termes se détruisent. Donc les signes différents donnent - au produit. Si je multiplie +a - a par -n, par le cas précédent, j'aurai -na pour premier terme ; donc j'aurai +na pour second, puisqu'il faut toujours que les deux termes se détruisent ; donc - multiplié par - donne + au produit.

Cette explication repose aussi sur la distributivité mais cette fois on a une démonstration formelle, pas seulement un exemple.

L'explication d'Euler (1770) :

Cette explication se trouve dans un ouvrage destiné aux débutants (*Eléments d'Algèbre Tome 1. 1774.* Traduit de l'allemand) :

32. Commençons par multiplier -a par 3 ou +3 ; or puisque -a peut être considéré comme une dette, il est clair que si l'on prend trois fois cette dette, elle doit aussi devenir trois fois plus grande, et par conséquent le produit cherché est -3a. De même s'il s'agit de multiplier -a par +b, on obtiendra -ba, ou, ce qui est la même chose -ab. Nous tirons de là la conséquence qu'une quantité positive étant multipliée par une quantité négative[1] , le produit est négatif ; et nous prenons pour règle que + par + fait + ou plus, et qu'au contraire + par -, ou - par + donne - ou moins.

33. Il nous reste à résoudre encore ce cas où - est multiplié par -, ou, par exemple -a par -b. Ilest évident d'abord que, quant aux lettres, le produit sera ab ; mais il est incertain encore si c'est le signe +, ou bien le signe - qu'il faut mettre devant ce produit; tout ce qu'on sait, c'est que ce sera ou l'un ou l'autre de ces signes. Or je dis que ce ne peut être le signe - : car -a par +b donne -ab, et -a par -b ne peut produire le même résultat que -a par +b ; mais il doit en résulter l'opposé, c'est-à-dire +ab ; par conséquent nous avons cette règle : - multiplié par - fait +, de même que + multiplié par +.

Il y aurait beaucoup à redire sur cette "explication" : dans le premier paragraphe Euler généralise, à partir de 3 x (-a) = -3a, à un réel b quelconque non entier ; et que penser de la "pirouette" finale ? Euler était pourtant un très grand mathématicien.

L'explication de Laplace (1795) :

La règle des signes présente quelques difficultés : on a peine à concevoir que le produit de -a par -b soit le même que celui de a par b. Pour rendre cette identité sensible, nous observerons que le produit -a par +b est -ab (puisque le produit n'est que -a répété autant de fois qu'il y a d'unités dans b). Nous observerons ensuite que le produit de -a par (b - b) est nul, puisque le multiplicateur est nul ; ainsi le produit de -a par +b étant -ab, le produit de -a par -b doit être de signe contraire ou égal à +ab pour le détruire.

On retrouve ici à la fois la maladresse d'Euler pour expliquer que (-a) x b = -ab et l'astuce du zéro de Mac Laurin.

[1] Jusqu'à la fin du XIXème siècle les lettres a, b, etc... désignent toujours des nombres positifs.

L'explication de Hankel (1867) :

Il s'agit cette fois d'une explication purement formelle : si l'on veut *prolonger* à l'ensemble de tous les réels les propriétés de l'addition et de la multiplication des réels positifs, ce ne peut être que conformément à la règle des signes. En effet :

$0 = a \times 0 = a \times (b + \text{opp } b) = ab + a \times (\text{opp } b)$

$0 = 0 \times (\text{opp } b) = (a + \text{opp } a) \times (\text{opp } b) = a \times (\text{opp } b) + (\text{opp } a) \times (\text{opp } b)$

d'où $(\text{opp } a) \times (\text{opp } b) = ab$

La justification de la règle des signes, que l'on utilise par ailleurs sans problème, n'est pas le seul obstacle à l'utilisation des nombres négatifs. Ainsi le nombre négatif ne se comporte pas comme le nombre positif au regard de l'ordre.

Voici ce que dit Carnot dans son ouvrage *La géométrie de position (1803)* :

> Soit cette proportion[1] 1 : -1 :: -1 : 1 ; si la notion combattue était exacte, c'est-à-dire, si -1 était moindre que 0, à plus forte raison serait-il moindre que 1 ; donc le second terme de cette proportion devrait être moindre que le premier ; donc le quatrième devrait être moindre que le troisième ; c'est-à-dire que 1 devrait être moindre que -1 ; donc -1 serait tout ensemble moindre et plus grand que 1 ; ce qui est contradictoire.
>
> [...] Une multitude de paradoxes ou plutôt d'absurdités palpables résulteraient de la même notion, par exemple, -3 serait moindre que 2 ; cependant $(-3)^2$ serait plus grand que 2^2, c'est-à-dire qu'entre deux quantités inégales le carré de la plus grande serait moindre que le carré de la plus petite, ce qui choque toutes les idées claires qu'on peut se former de la quantité.

Examinons le raisonnement de Carnot :

a et b étant des nombres positifs, si $b < a$ (*le second terme est moindre que le premier*) alors $a/b > 1$. Si donc c et d (positifs) vérifient $a/b=c/d$, alors nécessairement $c/d > 1$ et donc $d<c$ (*le quatrième terme est moindre que le troisième*).D'où le problème : s'il est vrai que $-1<1$ et que $1/-1= -1/1$ alors, d'après le raisonnement ci-dessus, on devrait avoir $1<-1$! Une propriété liée à l'ordre des positifs ne s'étend pas aux négatifs !

Une autre propriété liée à l'ordre des positifs non transférable aux négatifs est celle de la comparaison des carrés :

Si deux nombres (positifs) sont rangés dans un certain ordre ($a<b$) alors leurs carrés sont rangés dans le même ordre ($a^2<b^2$). Que se passe-t-il si a est un nombre négatif et b un positif ? Carnot illustre cette incohérence en prenant $a = -3$ et $b=2$.

---

(1) il s'agit de la proportion $\frac{1}{-1} = \frac{-1}{1}$

Exercice : Le comportement des négatifs vis-à-vis de l'ordre est-il si incohérent que cela ?

1. a, b, c et d sont quatre nombres **négatifs** tels que $a/b = c/d$

Supposons que $b < a$. Comparer alors a/b et 1.

En déduire dans quel ordre sont rangés d et c.

Y a-t-il une différence de comportement entre les positifs (voir le commentaire du texte de Carnot) et les négatifs ?

2. a et b sont deux nombres **négatifs** tels que $a < b$. Comparer leurs carrés.

D'Alembert, dans l'article "Quantité" de l'Encyclopédie dit que les quantités négatives sont *homogènes* entre elles mais *hétérogènes* aux positives.

Jean Le Rond d'Alembert

Eléments de corrigé :

1. Si $b < a$ alors $1 > a/b$ (on a divisé par un **négatif**).

Comme $a/b = c/d$, alors $1 > c/d$ et donc $d < c$ (on a multiplié par un **négatif**)

On retrouve exactement la règle énoncée par Carnot : si le second terme est moindre que le premier alors le quatrième est moindre que le troisième.

2. Si $a < b$ alors $a^2 > ab$ (on a multiplié par a **négatif**)

et aussi $ab > b^2$ (on a multiplié par b **négatif**)

d'où on déduit que $a^2 > b^2$.

Leonhard Euler

L'autre problème soulevé par les nombres négatifs, et aussi par les imaginaires, est d'ordre plus philosophique que mathématique : ces nombres représentent-ils quelque chose de *tangible* ?

Ecoutons de nouveau Carnot *(La géométrie de position)* :

> Pour obtenir réellement une quantité négative isolée, il faudrait retrancher une quantité effective de zéro, ôter quelque chose de rien : opération impossible. Comment donc concevoir une quantité négative isolée ?

Ou encore Lacroix (Eléments d'Algèbre édition de 1800) :

> **114.** Dans les questions précédentes, l'équation a eu deux solutions ; l'une positive, l'autre négative. Dans la dernière, elle en a deux positives. Elle peut en avoir aussi deux négatives, mais cela n'arrive que lorsque l'énoncé de la question est vicieux; car alors chacune de ces deux solutions négatives, indique (24) que l'inconnue doit être prise dans un sens tout opposé à celui de l'énoncé. Par exemple, si l'on proposoit cette question : *Trouver un nombre tel, que si, à son quarré, on ajoute neuf fois ce même nombre, et encore le nombre 50, le tout fasse* 30 ; cette question, mise en équation, donneroit
>
> $$x^2+9x+50=30,$$
>
> qui, en suivant les règles données plus haut, deviendroit successivement
>
> $$x^2+9x=-20,$$
> $$x^2+9x+\tfrac{81}{4}=\tfrac{81}{4}-20=\tfrac{1}{4};$$
>
> tirant la racine quarrée, on auroit
>
> $$x+\tfrac{9}{2}=\pm\tfrac{1}{2},$$
>
> d'où
>
> $$x=-\tfrac{9}{2}+\tfrac{1}{2}=-4, \quad \text{et} \quad x=-\tfrac{9}{2}-\tfrac{1}{2}=-5.$$
>
> Les deux signes — montrent que la question doit être changée en cette autre : *Trouver un nombre tel, que si, après avoir ajouté* 50 *à son quarré, on retranche du tout neuf fois ce même nombre demandé, il reste* 30.
>
> **115.** L'Algèbre a donc cet avantage, que non-seulement elle résout les questions, mais elle fait encore distinguer si elles sont bien ou mal posées;

Si ces nombres représentent quelque chose de tangible, alors comment se fait-il qu'on ne puisse pas leur appliquer les mêmes règles opératoires qu'aux nombres positifs ?

Encore un extrait de *La géométrie de position* :

> Passons à la seconde notion, qui consiste à dire que les quantités négatives ne diffèrent des quantités positives qu'en ce qu'elles sont prises dans un sens opposé. Cette idée est ingénieuse, mais elle n'est pas plus juste que la précédente. En effet, si deux quantités, l'une positive, l'autre négative, étaient aussi réelles l'une que l'autre et ne différaient que par leurs positions, pourquoi la racine de l'une serait-elle une quantité imaginaire, tandis que celle de l'autre serait effective ? Pourquoi $\sqrt{-a}$ ne serait-elle pas aussi réelle que $\sqrt{+a}$? Et d'où viendrait le privilège que la première, -a, aurait de donner son signe au produit (-a) x (+a) ?

Et si ces nombres ne reflètent aucune réalité, comment se fait-il qu'en les combinant dans des calculs on obtienne des résultats incontestablement tangibles ?

-Dis-moi, tu as tout compris dans cette histoire ?
-Quelle histoire ?
-Celle des nombres imaginaires.
-Oui. Ce n'est pas si compliqué que ça. Il suffit de se rappeler que l'unité de calcul, c'est la racine carrée de moins un.
-Justement, cette racine n'existe pas ! Tout nombre, qu'il soit positif ou négatif, donne, élevé au carré, un nombre positif. Il ne peut donc y avoir de nombre *réel* qui soit la racine carrée d'une quantité négative !

-D'accord. Mais pourquoi n'essaierait-on pas quand même d'appliquer à un nombre négatif le calcul de l'extraction d'une racine carrée ? L'opération ne peut donner, c'est entendu, aucune valeur réelle, et c'est bien pourquoi on qualifie le résultat d'imaginaire. C'est comme si tu disais : autrefois, il y avait toujours quelqu'un d'assis à cet endroit, apportons-lui donc une chaise aujourd'hui encore, et serait-il mort entre-temps, nous ferons comme s'il allait venir.
-Mais comment le peut-on quand on sait en toute certitude, avec une certitude mathématique, que c'est impossible ?
-Précisément : on agit comme si ce n'était pas impossible, en dépit des apparences, en pensant que cela finira bien par donner un résultat quelconque. Après tout, en va-t-il autrement des nombres irrationnels ? Une division qui garde toujours un reste, une fraction dont la valeur ne sera jamais, jamais obtenue, aussi loin que l'on pousse le calcul ? Et comment vas-tu te *représenter* le fait que deux parallèles ne se rejoignent qu'à l'infini ? Je crois que si l'on voulait se montrer trop pointilleux, il n'y aurait pas de mathématiques du tout.
-Là tu as raison. Dès qu'on voit le problème sous cet angle, il ne manque pas d'étrangeté. Mais le plus étonnant, c'est que ces valeurs imaginaires ou impossibles permettent quand même des calculs *réels*, au bout desquels on obtient un résultat *tangible* !
-C'est simplement que les facteurs imaginaires, à cet effet, s'annulent réciproquement au cours de l'opération.
-Oui, oui, je sais cela aussi bien que toi. N'empêche que quelque chose d'étrange subsiste dans toute l'affaire. Comment l'exprimerais-je ? Ecoute-moi bien : au début de tout calcul de ce genre, on a des chiffres parfaitement solides qui peuvent symboliser des mètres, des poids ou ce que l'on voudra de concret. C'est de semblables chiffres que l'on retrouve à la fin de l'opération. Mais ces derniers chiffres sont reliés aux premiers par quelque chose *qui n'existe pas* ! Ne dirait-on pas un pont qui n'aurait que ses piles extrêmes et que l'on ne franchirait pas moins tranquillement comme s'il était entier ? Pour moi, ce genre de calculs a quelque chose de vertigineux ; comme si, à un moment donné, il conduisait Dieu sait où. Mais le plus mystérieux, c'est encore la force cachée dans une telle opération et qui vous maintient d'une main si ferme que vous finissez quand même par aborder sur l'autre rive.
Il éprouvait maintenant pour les mathématiques un soudain respect : d'aride matière à mémorisation, elles étaient devenues d'un coup pour lui problème vivant.

Robert von Musil (1880-1943)
Les désarrois de l'élève Törless

Dans ce texte, Müsil évoque d'autres nombres dont la compréhension pose problème à l'élève Toërless : les rationnels (pour l'élève Toërless, 2/3 est une opération, pas un nombre) et les irrationnels ($\sqrt{2}$ est-il un nombre ?)

Et pourtant 2/3 et $\sqrt{2}$ sont *tangibles* ! On peut les construire à la règle et au compas. Si l'on a du mal à concevoir les rationnels et les irrationnels il n'y a rien d'étonnant à être dérouté par les imaginaires.

Ce texte n'est certes pas celui d'un mathématicien mais il montre bien l'obstacle qu'est la *représentation* du nombre.

Lacroix, qui veut qu'on réécrive le texte du problème lorsque la résolution de celui-ci conduit à des solutions négatives, agit de même avec les nombres imaginaires :

117. Les expressions $\sqrt{-b}$, $a+\sqrt{-b}$, et en général celles qui comprennent la racine quarrée d'une quantité négative, se nomment *quantités imaginaires* (*). Ce ne sont que des symboles d'absurdité qui tiennent la place de la valeur qu'on auroit obtenue, si la question proposée eût été possible.

On ne les néglige point dans le calcul, parce qu'il arrive quelquefois qu'en les combinant d'après certaines loix, l'absurdité se détruit, et le résultat devient réel. On en trouvera des exemples dans le *Complément*.

(*) Il seroit plus exact de dire *expressions* ou *symboles imaginaires*, puisque ce ne sont pas des quantités.

Enfin laissons à Carnot le soin de clore ce chapitre :

Avancer qu'une quantité négative isolée est moindre que 0, c'est couvrir la science des mathématiques, qui doit être celle de l'évidence, d'un nuage impénétrable, et s'engager dans un labyrinthe de paradoxes tous plus bizarres les uns que les autres ; dire que ce n'est qu'une quantité opposée aux quantités positives, c'est ne rien dire du tout, parce qu'il faut expliquer ensuite ce que c'est que des quantités opposées ; recourir pour cette explication à de nouvelles idées premières, semblables à celles de la matière, du temps et de l'espace, c'est déclarer qu'on regarde la difficulté comme insoluble, et c'est en faire naître de nouvelles ; car si l'on me donne pour exemple de quantités opposées un mouvement vers l'orient et un mouvement vers l'occident, ou un mouvement vers le nord et un mouvement vers le sud, je demanderai ce que c'est qu'un mouvement vers le nord-est, vers le nord-ouest, vers le sud-sud-ouest, etc., et de quels signes ces quantités devront être affectées dans le calcul ?
[...] Aucune quantité ne peut devenir, soit négative, soit imaginaire, sans cesser d'être une véritable quantité, parce qu'il n'y a évidemment de véritables quantités, que les quantités absolues.

Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal (1797)

PIERRE-SIMON de LAPLACE

5- " Les racines des équations sont des chemins réels "

"Tous les mathématiciens qui pensent, et qui sont de bonne foi, conviennent que la théorie des quantités négatives est loin d'être satisfaisante. Mais, s'il en est ainsi des quantités simplement négatives, que doit-on dire des imaginaires ?

Pour un esprit qui tient à voir clair, n'ont-elles pas quelque chose de repoussant ? Quoi ! en opérant sur des êtres imaginaires, on obtiendra des résultats réels ? la vérité sortira de la région des chimères ?

(...)

Il reste une difficulté qui est grande pour tout esprit exact : c'est qu'on applique à des figures qui n'expriment rien, des transformations, des règles et des équations qui n'ont été démontrées que pour les formules qui expriment des quantités.

(...)

Avec un nouveau système d'algèbre que je cherchais, j'ai trouvé un nouveau système de géométrie, auquel je ne m'attendais pas. Ce ne sont cependant pas deux sciences ; ce n'est qu'une seule science, une seule théorie, laquelle a deux faces, l'une algébrique, et l'autre géométrique. C'est une algèbre émanée de la géométrie ; c'est une géométrie généralisée et rendue algébrique.

L'idée fondamentale de cette théorie est celle du chemin, considéré comme conduisant en un seul sens. Sur toute ligne on peut concevoir deux chemins conduisant en sens opposés, l'un de A en B, par exemple, et l'autre de B en A. Pour que deux chemins soient égaux, en tant que chemins, il ne suffit pas qu'ils aient même longueur, il faut aussi qu'ils aient même direction. De sorte que tous les rayons d'un même cercle, considérés comme conduisant du centre à la circonférence, sont des chemins inégaux. L'expression algébrique (ou même arithmétique) d'un chemin en déterminera la direction, relativement à un autre chemin pris pour terme de comparaison, ou, si l'on veut, pour unité. D'après ce système, **toutes les racines des équations sont des chemins réels,** toutes les formules usitées en algèbre expriment des chemins réels situés sur un même plan ; toutes les racines de l'unité, en particulier, sont tous les rayons d'un même cercle."

C.V. Mourey *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires.* 1828.

Nous avons choisi ce petit extrait de l'introduction de l'ouvrage de C.V. Mourey, car les questions qui y sont évoquées, ainsi que la proposition d'y répondre géométriquement sont dans l'air du temps en ce début du 19°siècle.

A cette époque, effectivement, de façon tout à fait indépendante, plusieurs mathématiciens vont apporter des réponses très proches aux interrogations qui commencent à se présenter : quelle est la réalité de ces "quantités" négatives ou imaginaires qui sont solutions d'équations? quel sens peut-on leur donner ? peut-on justifier de façon rigoureuse les opérations que l'on applique à ces quantités ?

Ces mathématiciens seront Wessel (Essai sur la représentation analytique de la direction 1797 (traduit du norvégien en 1897)), Argand (Essai sur la manière de représenter les quantités imaginaires 1806), Mourey, Warren (A treatrise on geometrical representation of the square roots of negative quantities 1828), Buée (Mémoire sur les quantités imaginaires 1805).... peu d'attention en fait fut accordée à ces idées très novatrices, publiées par des mathématiciens tout à fait inconnus et sans influence, jusqu'à ce que Gauss publie, en 1831, un article sur la représentation des nombres complexes.

Au 18°siècle, les mathématiciens ont étendu toutes les propriétés des nombres réels aux "imaginaires", comme cela avait déjà été fait des nombres positifs au négatifs. Les questions de sens et de rigueur ne se sont pas vraiment posées, puisque les résultats obtenus permettaient de progresser.

Quelques mathématiciens, cependant, parmi les plus grands, feront des propositions novatrices. L'un d'eux est Euler, peut-être parce qu'il avait quelques problèmes avec la règle des signes et quelques difficultés avec certains calculs sur les imaginaires.

Voici un extrait de ses éléments d'algèbre de 1774

> 142 - Or nous avons remarqué plus haut que les nombres positifs sont plus grands que rien ou 0, et que les nombres négatifs sont tous plus petits que rien ou 0 ; de façon que tout ce qui surpasse 0 s'exprime par des nombres positifs, et que tout ce qui est moindre que 0 s'exprime par des nombres négatifs. Nous voyons donc que les racines quarrées de nombres négatifs ne sont ni plus grandes ni plus petites que rien. cependant on ne peut pas dire qu'elles soient 0 ; car 0 multiplié par 0 fait 0, et par conséquent ne donne pas un nombre négatif.
>
> 143 - Or puisque tous les nombres qu'il est possible d'imaginer sont ou plus grands ou plus petits que 0, ou sont 0 même, il est clair qu'on ne peut pas même compter la racine quarrée d'un nombre négatif parmi les nombres possibles, et il faut donc dire que c'est une quantité impossible. C'est de cette façon que nous sommes conduits à l'idée de nombres qui

par leur nature sont impossibles. On nomme ordinairement ces nombres des quantités imaginaires, parce qu'elles existent purement dans l'imagination.

146 - Notre première notion dans la matière que nous traitons, est que le quarré de $\sqrt{-3}$ par exemple, ou le produit de $\sqrt{-3}$ par $\sqrt{-3}$ est -3 ; que celui de $\sqrt{-1}$ par $\sqrt{-1}$, fait -1 ; et en général, qu'en multipliant $\sqrt{-a}$ par $\sqrt{-a}$, ou en prenant le quarré de $\sqrt{-a}$, on obtient -a.

147 - Maintenant, comme -a signifie autant que +a multiplié par -1, et que la racine quarrée d'un produit se trouve en multipliant ensemble les racines des facteurs, il s'ensuit que la racine de a multiplié par -1 ou $\sqrt{-a}$, est autant que $\sqrt{a}$ multiplié par $\sqrt{-1}$. Or $\sqrt{a}$ est un nombre possible ou réel, par conséquent, ce qu'il y a d'impossible dans une quantité imaginaire peut toujours se réduire à $\sqrt{-1}$. Par cette raison donc $\sqrt{-4}$ est autant que $\sqrt{4}$ multipliée par $\sqrt{-1}$ et autant que $2\sqrt{-1}$, à cause de $\sqrt{4}$ égal à 2. Par la même raison $\sqrt{-9}$ se réduit à $\sqrt{9}.\sqrt{-1}$ ou à $3\sqrt{-1}$ et $\sqrt{-16}$ signifie $4\sqrt{-1}$.

148 - De plus comme $\sqrt{a}$ multipliée par $\sqrt{b}$ fait $\sqrt{ab}$, l'on aura $\sqrt{6}$ pour la valeur de $\sqrt{-2}$ multipliée par $\sqrt{-3}$; et $\sqrt{4}$ ou 2 pour la valeur du produit $\sqrt{-1}$ par $\sqrt{-4}$. On voit donc que deux nombres imaginaires, multipliés l'un par l'autre, en produisent un réel ou possible.

Mais au contraire un nombre possible, multiplié par un nombre impossible, donne toujours de l'imaginaire : $\sqrt{-3}$ par $\sqrt{15}$ fait $\sqrt{-15}$.

Exercice:

1) Lorsque Euler désigne des nombres par les lettres a et b, quelle est la nature de ces nombres ?

Actuellement, lorsque l'on désigne un nombre par a, quelle est la nature de a si l'on ne précise rien ?

2) Dans le paragraphe 146, Euler souligne que $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$ est le carré de $\sqrt{-1}$. Dans ce cas, quelle règle applique-t-il ? Qu'en déduit-il pour le résultat de $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$?

3) Dans le paragraphe 148, il utilise la propriété $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

Qu'en est-il alors de $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$?

4) En utilisant les paragraphes 146 et 148 :

$$\sqrt{-a} = \sqrt{-1} \times \sqrt{a}$$

Donc $\sqrt{-3} = \sqrt{-1} \times \sqrt{3}$ $\qquad$ $\sqrt{-2} = \sqrt{-1} \times \sqrt{2}$

finalement : $\sqrt{-3} \times \sqrt{-2} = \sqrt{-1} \times \sqrt{3} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{2}$

Quel résultat obtient-on ? Quel est le problème qui se présente alors ?

Éléments de corrigé:

1) Les lettres chez Euler désignent les seuls "vrais" nombres, c'est à dire les réels positifs.
Actuellement une lettre désigne un réel quelconque si on ne précise rien.
2) Dans le paragraphe 146 Euler applique la règle (connue pour les réels positifs)

$a \times a$ est le carré de a et de plus, le carré de $\sqrt{a}$ est a. Il en déduit que

$\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$

3) Dans le paragraphe 148, en appliquant la règle, valable pour les réels positifs, que $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, il en déduira que

$\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{-1 \times -1} = \sqrt{1} = 1$

4) En utilisant les paragraphes 146 et 148 on obtiendra donc d'une part :

$\sqrt{-3} \times \sqrt{-2} = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} = -1 \times \sqrt{6}$

D'autre part:

$\sqrt{-3} \times \sqrt{-2} = \sqrt{-3 \times -2} = \sqrt{6}$

Il y a donc un problème. On ne peut ainsi étendre <u>toutes les opérations</u> valables pour les réels positifs aux racines carrées de nombres négatifs, sans précaution.

Il faut remarquer qu'à l'époque d ' Euler, $\sqrt{4}$ est égal à 2 ou à -2, selon le contexte. De là, naît une certaine ambiguité à laquelle nous ne sommes pas habitués.

Quelques années plus tard Euler aura pris conscience de la difficulté de notation, et du fait que, peut-être, on ne peut étendre toutes les opérations sur les nombres réels aux imaginaires, sans précaution.

En 1777 dans un mémoire à l' Académie de Saint-Pétersbourg il propose d'abandonner la notation $\sqrt{-1}$, qui ne convient manifestement pas, pour i (début de imaginaire ou d'impossible) . Les mémoires d'académie paraissent en général assez tardivement et cette proposition ne sera publiée qu'en 1794, après la mort de Euler.

Bien qu'elle soit séduisante et de bon sens, la nouvelle notation mettra de longues années à être utilisée.

Le premier sera Gauss en 1801, timidement Cauchy à partir de 1847 ; la plupart des mathématiciens continueront à utiliser $\sqrt{-1}$, au moins lorsque cela ne pose pas problème, même au 20°siècle.

Euler en 1748, dans son introduction à l'Analyse infinitésimale avait fait d'autres propositions.

> Une quantité variable devient déterminée, lorsqu'on lui attribue une valeur déterminée quelconque.
>
> Elle peut donc le devenir d'une infinité de manières, puisqu'on peut lui substituer tous les nombres imaginables. La signification d'une quantité variable ne peut être censée épuisée, qu'autant qu'on aura conçu en sa place toutes les valeurs déterminées. Ainsi une telle quantité comprend tant les nombres positifs que négatifs, les nombres entiers et fractionnaires, ceux qui sont rationnels, irrationnels transcendants ; on ne doit pas même en exclure zéro, ni les nombres imaginaires.

La lecture de ces lignes rend bien compte de la difficulté pour les contemporains d' Euler d'admettre "tous les nombres". "On ne doit pas même exclure.."

Notons que c'est en étendant (de façon plus ou moins rigoureuse) des développements en séries entières pour des variables réelles, aux variables imaginaires qu'Euler établira la forme exponentielle d'un nombre "complexe" et les formules dites d' Euler.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

En remplaçant x par ix dans le premier développement on obtient :

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Dans le même ouvrage, dans le tome 2, où il étudie les courbes, il va utiliser les nombres négatifs et positifs pour repérer les points ; il calcule par exemple l'ordonnée y (qui pourra être négative) à partir de l'abscisse x qui peut être négative. C'est un début de reconnaissance "géométrique" des nombres négatifs.

INTRODUCTION

A

L'ANALYSE INFINITÉSIMALE.

LIVRE SECOND,

CONTENANT la Théorie des Lignes courbes, avec un Traité abrégé des Surfaces.

CHAPITRE PREMIER.

Des Lignes Courbes en général.

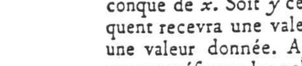
2. Soit donc x une quantité variable, repréſentée par la droite indéfinie RS; il eſt clair que toutes les valeurs déterminées de x, pourvu qu'elles ſoient réelles, peuvent être exprimées par des portions priſes ſur la ligne RS. Par exemple, ſi le point P tombe ſur le point A, l'intervalle AP, devenant nul, repréſentera la valeur de $x = 0$; mais plus le point P s'éloignera du point A, plus la valeur déterminée de x repréſentée par l'intervalle AP deviendra grande.

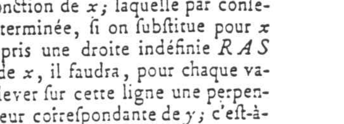
On appelle ces intervalles AP, ABSCISSES.

Ainſi les abſciſſes repréſentent les valeurs déterminées de la variable x.

3. Or, comme la droite indéfinie RS s'étend à l'infini de part & d'autre du point A, on pourra auſſi couper de part & d'autre toutes les valeurs de x. Mais, ſi nous prenons les valeurs poſitives de x, en allant ſur la droite depuis le point A, les intervalles Ap ſitués ſur la gauche repréſenteront les valeurs négatives de x. En effet, puiſque plus le point P s'éloigne du point A vers la droite, plus eſt grande la valeur de x repréſentée par l'intervalle AP; réciproquement, plus le point P s'éloigne vers la gauche, plus la valeur de x eſt diminuée; &, ſi P tombe ſur A, la valeur de x devient $= 0$. C'eſt pourquoi, ſi le point P eſt reculé davantage vers la gauche, les valeurs de x deviendront plus petites que zéro, c'eſt-à-dire, ſeront négatives, & les intervalles Ap pris ſur la gauche depuis le point A, repréſenteront les valeurs négatives de x, ſi les intervalles AP, ſitués à la droite, ſont cenſés repréſenter les valeurs poſitives. Au reſte, il eſt indifférent de prendre du côté qu'on voudra les valeurs poſitives de x; car le côté oppoſé renfermera toujours les valeurs négatives.

Pl. I. Fig. 2. 4. Puiſqu'une ligne droite indéfinie eſt propre à repréſenter une quantité variable x, cherchons à préſent une manière très-commode de repréſenter géométriquement une fonction quelconque de x. Soit y cette fonction de x; laquelle par conſéquent recevra une valeur déterminée, ſi on ſubſtitue pour x une valeur donnée. Ayant pris une droite indéfinie RAS pour repréſenter les valeurs de x, il faudra, pour chaque valeur déterminée AP de x, élever ſur cette ligne une perpendiculaire PM, égale à la valeur correſpondante de y; c'eſt-à-dire que, ſi la valeur de y eſt poſitive, il faudra la placer au-deſſus de RS; mais, ſi la valeur de y devient négative, il faudra la placer perpendiculairement au-deſſous de la droite





RS. Car les valeurs poſitives de y étant priſes au-deſſus de la droite RS, celles qui deviennent nulles tomberont ſur la ligne même RS, & celles qui ſont négatives, au-deſſous.

Les repères utilisés auparavant étaient choisis en fonction du problème à traiter de sorte que les nombres négatifs n'apparaissaient pas. Ici, il n'y a pas encore d'axe des ordonnées, mais cela ressemble tout de même fortement à nos repères "cartésiens". C'est peut-être alors avec l'étude analytique des courbes qu'une sorte d'unification entre les réels positifs, négatifs ou nuls va se mettre en place.

Revenons au texte de Mourey, cité en introduction. Il va aussi unifier l'ensemble des nombres, y compris les imaginaires, en montrant que "géométriquement" il n'y a aucune différence.

Considérant l'algèbre , il constate que la première difficulté est la soustraction, puisque si l'on veut faire la différence, au sens propre du terme, entre deux éléments a et x, il faudrait savoir si x est plus grand ou plus petit que a ; ce qui ne peut être connu à l'avance si x est inconnu ; aussi conclut-il :

"Il faudrait trouver le moyen d'exprimer la différence de deux quantités, sans recourir à la soustraction."

Et son premier point s'énoncera : "Moyen de suppléer à la soustraction."

2 - Si un voyageur, ou un mobile quelconque, partant du point A, va d'abord au point B (fig 1, 2, 3, 4)

fig.1

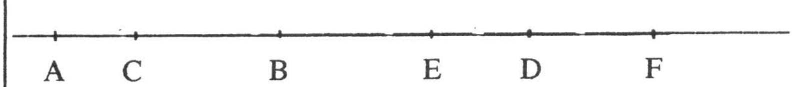


fig.2

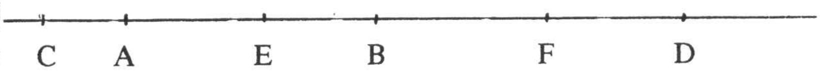


fig.3

fig.4

et que du point B il aille ensuite en C, il sera aussi avancé que s'il fut allé directement de A en C, ni plus ni moins ; donc

voyage de A en B + voyage de B en C est équivalent à voyage de A en C. Ou, pour abréger :
AB + BC = AC

Ainsi dans les figures 2 et 3 le voyage AC, qui est à proprement parler la différence de deux voyages AB, BC, peut être considéré comme la somme réduite de ces deux voyages.

6 lieues au sud + 4 li. au nord = 2 li. au sud

4 li. sud + 6 li. nord = 2 li. nord

Donc 6 li. sud - 4 li. sud = 6 li. sud + 4 li. nord

6 li. nord - 4 li. nord = 6 li. nord + 4 li. sud

(...) Ainsi, par rapport aux voyages, la soustraction peut être remplacée par une addition.

Au lieu de retrancher, par exemple 4 li. sud, on ajoutera 4 li. nord. En général, au lieu de retrancher un voyage, on en ajoutera l'inverse."

Un peu plus loin :

"Lorsqu'il s'agit d'exprimer les chemins en nombres, c'est à dire de les rapporter à une mesure, il ne suffit pas de déterminer la longueur de cette mesure ou de cette unité, il faut aussi en déterminer la direction.

Si l'unité est, par exemple, un mètre conduisant de gauche à droite, les chiffres 1, 2, 3 etc.... représenteront 1 mètre à droite, 2 mètres à droite, 3 mètres à droite, etc.... Donc les quantités 1 mètre à gauche, 2 mètres à gauche, 3 mètres à gauche...qui seront respectivement égales à -1 mètre à droite, -2 mètres à droite, -3 mètres à droite, etc....pourront être représentées par les formules -1, -2, -3 etc..........

Le nombre relatif est dit concret lorsqu'on en spécifie l'unité, et abstrait dans le cas contraire. Ainsi, dans l'hypothèse précédente, les formules 1, 2, 3, ...-1, -2, -3...représentent des nombres abstraits. On conçoit donc que le nombre abstrait peut être un chemin, comme toute autre quantité."

Exercice :

1) Les plus avancés reconnaîtront peut-être, au début du texte, une relation bien connue. Laquelle ? (Nous y reviendrons.)

2) Mourey emploie les mots "inverse" et "direction". Ont-ils le même sens que dans notre vocabulaire actuel en mathématiques ?

3) Mourey nous propose l'exemple suivant pour appliquer ses théories :

"Soit 3000 francs la fortune actuelle de Pierre ; nous imaginerons un mobile T, qui ait parcouru un chemin AB = à 3000 unités abstraites, et ce chemin AB sera le représentant de la fortune actuelle de Pierre. Établissons que T sera assujetti, par la suite, à parcourir autant d'unités positives que Pierre gagnera de francs, et autant d'unités négatives que Pierre perdra de francs ; il résultera que le nombre des unités contenues de A à T, sera constamment l'expression exacte de la fortune de Pierre.

Je suppose que, dans une circonstance désignée, le mobile T se soit trouvé en B, et qu'on veuille découvrir combien Pierre a gagné ou perdu depuis cette circonstance ; il suffira de calculer la longueur et la direction actuelle de BT.

Si depuis que T était en B, Pierre a successivement gagné 300 Fr, perdu 700 Fr et gagné 100 Fr, combien a-t-il gagné ou perdu, en définitive, depuis cette époque ?
Traduisez : depuis que T était en B, il a parcouru successivement : +300, -700, +100. "

Quel est actuellement le chemin BT ?

4) Problème posé par Mourey :

"Pierre est âgé d'un nombre a d'années, et Jean d'un nombre a ' ; on demande à quelle époque l'âge de Jean sera égal au produit de l'âge de Pierre, multiplié par un nombre donné r.

Note: Il se peut que l'âge de Jean ne doive jamais se trouver égal au produit de l'âge de Pierre par r, et que cela soit arrivé antérieurement : or, dans cas il faut trouver à quelle époque cela est arrivé. Ainsi, l'époque demandée peut être indifféremment passée ou future."

Imaginer une ligne[1] qui représente le temps. Soit A sur cette ligne représentant le moment actuel et E l'époque demandée. Soit P le point représentant la naissance de Pierre et J celui représentant la naissance de Jean.

Le chemin PA représente l'âge de Pierre donc PA = ...

Le chemin JA = ...

PE est l'âge qu'aura, ou qu'a eu Pierre à l'époque E et JE celui de Jean à la même époque. Écrire d'après l'énoncé une relation entre JE et PE.

Il s'agit de trouver AE = t

En utilisant la "relation de Chasles",[2] exprimer JE en fonction de JA et AE, puis de même PE.

---

[1]Mourey nous précise que sur cette ligne tout chemin positif conduira du passé au futur (de l'antérieur au postérieur), et tout chemin négatif du postérieur à l'antérieur.

[2] Chasles est postérieur à Mourey, on peut donc constater que ce n'est pas lui qui a vraiment inventé la relation qui porte son nom. Par ailleurs, il faut noter que la notation des chemins orientés qui font fortement penser à nos vecteurs, ainsi que celle de leurs mesures qui ne sont autres que les mesures

En déduire une relation entre a, a ' , t et r, puis la formule permettant d'obtenir t. Si Pierre a 30 ans et Jean 40 ans, si r = 3, trouver t. Interpréter. Mêmes questions dans les cas suivants: Pierre a 40 ans, Jean a 30 ans, r = 3 Pierre a 30 ans, Jean a 40 ans, r = 1 Pierre a 30 ans, Jean a 40 ans, r = 0 Pierre a 10 ans, Jean a 100 ans, r = 2

LA VRAIE THÉORIE

DES

QUANTITÉS NÉGATIVES

ET DES

QUANTITÉS PRÉTENDUES IMAGINAIRES.

INTRODUCTION.

Source des difficultés de l'Algèbre.

1. Pour exprimer la différence de deux quantités, on place la plus petite à droite de la plus grande, en les séparant par le signe —; 6 — 4.

On aurait une expression absurde, si l'on plaçait la plus grande à droite de la plus petite; ainsi la formule 4 — 6 est absurde.

Il suit de là qu'il est impossible d'exprimer la différence par le moyen du signe —, lorsque l'un des termes est inconnu ou arbitraire. Soit x un terme inconnu ou arbitraire : on ne peut pas écrire $a - x$, parce qu'on ne sait pas si x n'est pas plus grand que a; on ne peut pas davantage poser $x - a$, parce qu'on ne sait pas si x n'est pas plus petit que a.

Il suit de là que le signe —, considéré comme exprimant la soustraction, ne peut pas être admis en Algèbre. L'Algèbre, étant censée ne s'occuper que de

algébriques n'est pas encore inventée non plus. Il faut donc être attentif au contexte, ici AB désigne non pas la longueur AB, mais sa mesure algébrique, ce que nous noterions $\overline{AB}$.

Smithsonian Institution Photo No. 91-419

Carl Friedrich Gauss

Éléments de corrigé :

1) Il s'agit bien sûr de la relation de Chasles.

2) "Inverse" est devenu pour nous "opposé", et "direction" est remplacé par "sens".

3) 300-700+100 = -300

4)PA = a ; JA = a ' ; il faut que JE = r x PE

JE = JA + AE ; PE = PA + AE ; donc JE = a ' + t et PE = a + t.

La relation précédente s'écrit donc : a ' + t = r (a + t).

a) Si a = 30, a ' = 40 et r = 3 cela donne : 40 + t = 3(30 + t).

Donc 2t = -50 et t = - 25 ; l'âge de jean était 3 fois celui de pierre il y a 25 ans. alors Jean avait 15 ans et Pierre avait 5 ans.

b) a = 30 ; a ' = 40 ; r = 1 : pas de solution.

c) a = 30 ; a ' = 40 ; r = 0 : t = - 40 . (Jean naissait et pierre n'était pas né !)

d) a = 40 ; a ' = 30 ; r = 3 : t = - 45 (Aucun des deux n'était né !)

e) a = 10 ; a ' = 100 ; r = 2 : t = 80 (Jean aurait 180 ans !)

Dans toute cette partie traitant des négatifs, Mourey s'efforce en fait de ne pas faire de différence entre le négatif et le positif, et finalement accepte des solution négatives.

Les nombres réels sont ce que nous appellerions aujourd'hui les "mesures algébriques".

Il va préciser son idée :

"Positif et négatif

16 - De ces idées résultent d'abord deux espèces de nombres : 1° ceux qui ont même direction que l'unité, et 2° ceux qui ont une direction opposée à l'unité. Les premiers sont représentés simplement par les chiffres 1, 2, 3, ... ; les derniers par les chiffres affectés du signe - ; - 1, - 2, - 3... . Il serait fort à désirer que l'on désignât ces deux espèces de nombres par des dénominations qui répondissent à des idées si simples et si justes ; je serais tenté d'appeler les premiers commétriques, et les derniers antimétriques ; mais s'il faut obéir à la routine, servons nous des mots positifs et négatifs.

(...)

De ces définitions résultent plusieurs conséquences qu'il est important de signaler dans l'enseignement, pour préserver les élèves des fausses idées que présentent naturellement les mots positif et négatif, ainsi que le signe, - , lorsqu'on l'énonce par le mot moins.

1) Il n'y a que les chemins et les mouvements, en un mot, il n'y a que les quantités susceptibles de conduire en deux sens opposés qui puissent être positives ou négatives.

(...)

5) Les quantités négatives sont tout aussi réelles et aussi palpables que les positives.

6) Les quantités négatives ne sont point les résultats de soustractions impossibles.

17 - Remarques : 1) On emploie le signe + par opposition au signe - . Ainsi, l'on écrit + a, + 4 pour a, 4. Le signe + employé de cette manière, n'exprime point d'addition ; il signifie non inverse, ou si l'on veut directe. Mais l'énoncé de ce signe ne tire pas à conséquence comme celui du signe -.

2) Lorsque le signe - affecte un chiffre, on peut l'énoncer par le mot négatif ; car - 4, par exemple, est un nombre négatif. Dans le même cas, le signe + peut s'énoncer par positif.

3)Il n'en est pas de même devant une lettre . On peut représenter un nombre négatif par b, par exemple ; or dans cette hypothèse, + b sera négatif, et - b positif. Ainsi, lorsque le signe - affecte une lettre, il ne peut être énoncé que par le mot inverse."

Si ce n'est l'usage du mot "inverse" au lieu de notre mot "opposé", nous avons ici une vision très moderne des notations. "a" peut désigner n'importe quel réel, positif comme négatif.

En fait cette manière de penser est assez révolutionnaire, et nous avons remarqué dans nos chapitres précédents que ceci demandera un temps assez long pour être admis. Il est important de noter aussi que Mourey utilise les mots "positif" et "négatif" pour ne pas rompre avec les habitudes, mais avec réticence. Ce sera le cas de plusieurs autres mathématiciens que nous allons évoquer, estimant que cet usage est une gêne pour la compréhension. (En particulier en raison de la confusion de symbole entre opérations +, -, et notation + 3, ou - 3; aussi de la hiérarchie qui s'établit ainsi entre le positif et le négatif.)

Nous avons bien senti dans le premier extrait que Mourey ne va pas se contenter de la "ligne", il va aussi considérer des chemins dans le plan, pour aboutir alors à l'interprétation des imaginaires.

C'est ce que va faire aussi un autre grand précurseur, Argand. Il va dans le même courant de pensée, s'intéresser à la problématique des nombres négatifs pour accéder à celle des imaginaires.

Dans son mémoire de 1806 "Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques", il établit d'abord l'idée de rapport dans la comparaison entre nombres négatifs ou positifs.

"... Deux quantités d'une espèce susceptible de fournir des valeurs négatives étant comparées entre elles, l'idée de leur rapport est complexe. Elle comprend : 1) l'idée du rapport numérique dépendant de leurs grandeurs respectives considérées absolument ; 2) l'idée du rapport des directions ou sens auxquels elles appartiennent, rapport qui en est l'identité ou l'opposition.

(...)

3 - Maintenant, si, faisant abstraction du rapport des grandeurs absolues, on considère les différents cas que peut présenter le rapport des directions, on trouvera qu'ils se réduisent à ceux qu'offrent les deux proportions[3] suivantes : + 1 : + 1 : : - 1 : - 1

+ 1 : - 1 : : - 1 : + 1

L'inspection de ces proportions et de celles qu'on formerait par le renversement des termes montre que les termes moyens sont de signes semblables ou différents, suivant que les extrêmes sont eux-mêmes de signes semblables ou différents.

Qu'on se propose actuellement de déterminer la moyenne proportionnelle géométrique entre deux quantités de signes différents, c'est-à-dire la quantité x qui satisfait à la proportion :

+ 1 : + x : : + x : - 1 .

On est arrêté ici comme on l'a été en voulant continuer au delà de 0 la progression arithmétique décroissante, car on ne peut égaler x à aucun nombre positif ou négatif, mais puisqu'on a trouvé plus haut que la quantité négative, imaginaire lorsque la numération était

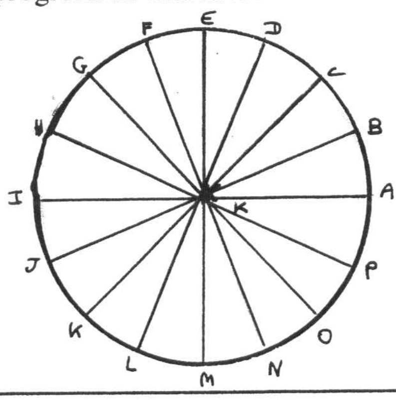
[3] Suit ici l'écriture des proportions que nous avons déjà rencontrée. a : b : : c : d signifie $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Les extrêmes sont a et d, les moyens sont b et c.

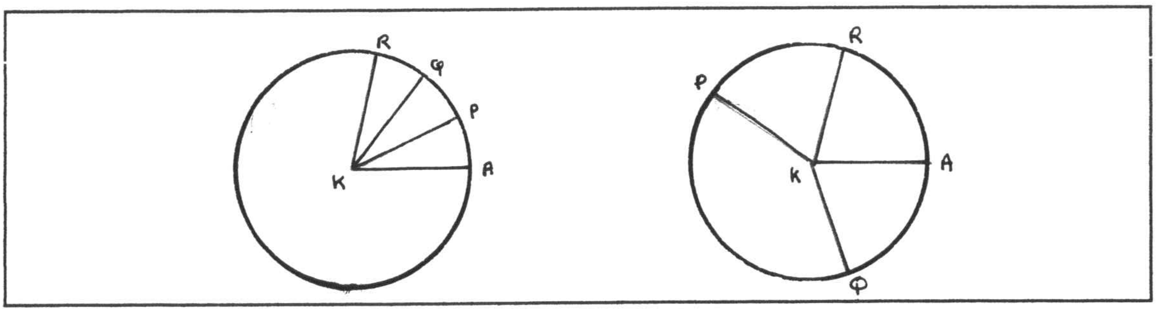
appliquée à certaine grandeur, devenait réelle lorsque l'on combinait d'une certaine manière l'idée de grandeur absolue avec l'idée de direction, ne serait-il pas possible d'obtenir le même succès relativement à la quantité dont il s'agit, quantité réputée imaginaire par l'impossibilité où l'on est de lui assigner une place dans l'échelle des quantités positives ou négatives ?

En y réfléchissant , il a paru qu'on parviendrait à ce but si l' on pouvait trouver un genre de grandeurs auquel on put s'allier l'idée de direction, de manière que, étant adoptées deux directions opposées, l'une pour les valeurs positives l'autre pour les valeurs négatives, il en existerait une troisième telle que la direction positive fût à celle dont il s'agit comme celle-ci à la direction négative.

4 - Or, si l'on prend un point fixe K et qu'on adopte pour unité positive la ligne KA considérée comme ayant sa direction de K en A, et ce qu'on pourra désigner par $\overline{KA}$ pour désigner cette quantité de la ligne KA dans laquelle on ne considère que la grandeur absolue, l'unité négative sera $\overline{KI}$, le trait supérieur ayant la même destination que celui qui est placé sur $\overline{KA}$, et la condition à laquelle il s'agit de satisfaire sera remplie par la ligne KE, perpendiculaire aux précédentes et considérée comme ayant sa direction de K en E, et qu'on exprimera également par $\overline{KE}$. En effet la direction de $\overline{KA}$ est à l'égard de la direction de $\overline{KE}$ ce que cette dernière est à l'égard de la direction de $\overline{KI}$. De plus on voit que cette même condition est aussi bien remplie par $\overline{KN}$ que par $\overline{KE}$, ces deux dernières quantités étant entre elles comme + 1 et - 1 , ainsi que cela doit être . Elles sont donc ce qu'on exprime ordinairement par $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$.

Par une marche analogue on pourra insérer de nouvelles moyennes proportionnelles entre les quantités dont il vient d'être question. En effet, pour construire la moyenne proportionnelle entre $\overline{KA}$ et $\overline{KE}$ il faudra tirer la ligne CKL qui divise l'angle AKE en deux parties égales , et la moyenne cherchée sera $\overline{KC}$ ou $\overline{KL}$. La ligne GKP donnera également les moyennes entre $\overline{KE}$ et $\overline{KI}$ ou entre $\overline{KA}$ et $\overline{KN}$. On obtiendra de même les quantités $\overline{KB}$, $\overline{KD}$, $\overline{KF}$, $\overline{KH}$, $\overline{KJ}$, $\overline{KM}$, $\overline{KO}$, $\overline{KQ}$,pour moyenne entre $\overline{KA}$ et $\overline{KC}$, $\overline{KC}$ et $\overline{KE}$ ..., et ainsi de suite. On pourra pareillement insérer un plus grand nombre de moyennes proportionnelles entre deux quantités données, et le nombre des constructions qui pourront résoudre la question sera égal au nombre des rapports que présente la progression cherchée.





"6 - En conséquence de ces réflexions, on pourra généraliser le sens des expressions de la forme $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{KP}$ ... et toute expression pareille désignera, par la suite, une ligne d'une certaine longueur, parallèle à une certaine direction, prise dans un sens déterminé entre les deux sens opposés que présente cette direction et dont l'origine est à un point quelconque, ces lignes pouvant elles-mêmes être l'expression de grandeurs d'une autre espèce.

Comme elles doivent être le sujet des recherches qui vont suivre, il est à propos de leur appliquer une dénomination particulière. On les appellera *lignes en direction* ou, plus simplement, *lignes dirigées.* Elles seront ainsi distinguées des *absolues* dans lesquelles on ne considère que la longueur, sans aucun égard à la direction.

7 - En rapportant aux dénominations d'usage les diverses espèces de lignes en direction qui s'engendrent d'une unité primitive $\overline{KA}$, on voit que toute ligne parallèle à la direction primitive est exprimée par un nombre réel , que celles qui lui sont perpendiculaires sont exprimées par des nombres imaginaires ou de la forme $\pm a\sqrt{-1}$, et, enfin, que celles qui sont tracées dans une autre direction autre que les deux précédentes appartiennent à la forme $\pm a \pm b\sqrt{-1}$, qui se compose d'une partie réelle et d'une partie imaginaire.

Mais ces lignes sont des quantités tout aussi réelles que l'unité primitive ; elles se décrivent par la combinaison de l'idée de la direction avec l'idée de la grandeur, et elles sont, à cet égard, ce qu'est la ligne négative, qui n'est nullement regardée comme imaginaire. Les noms de *réel* et d'*imaginaire* ne s'accorde donc pas avec les notions qui viennent d'être exposées. Il est superflu d'observer que ceux d'impossible et d'absurde, qu'on rencontre quelquefois, y sont encore plus contraires. On peut d'ailleurs s'étonner de voir ces termes employés dans les sciences exactes autrement que pour qualifier ce qui est contraire à la vérité.

Une quantité absurde serait celle dont l'existence entraînerait la vérité d'une proposition fausse ; tel serait par exemple, la quantité x qui satisferait à la fois aux équations $x = 2$, $x = 3$, d'où s'ensuivrait $2 = 3$. En admettant une pareille quantité dans le calcul, on arriverait à des conséquences aussi contradictoires que l'équation $2 = 3$; mais les résultats obtenus par l'emploi des quantités dites *imaginaires* sont en tout conformes à ceux qu'on déduit des raisonnements dans lesquels on ne fait usage que de quantités réelles. On pouvait donc pressentir un vice dans les dénominations qui plaçaient dans la même classe les quantités vraiment absurdes et les racines d'ordre pair des quantités négatives, et c'est le sentiment secret de cette inconvenance qui a été le premier germe des idées qui reçoivent leur développement dans cet Essai. Nous sommes donc conduits à employer d'autres dénominations."

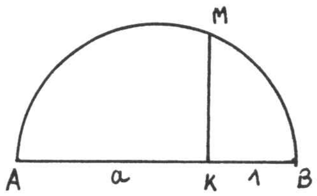
<u>Exercice :</u>

1) Définition : x, a, b étant des réels non nuls, x est moyenne proportionnelle entre a et b si : $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$

Déterminer la moyenne proportionnelle entre 3 et 4.

2) Construction d'une moyenne proportionnelle entre 1 et un réel positif non nul, a, à la manière de Descartes.

soit C le demi-cercle de diamètre AB = a + 1.



Soit K sur le segment [AB] tel que AK = a.

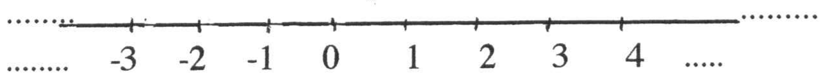
Évaluer MK en fonction de AK et KB.

En déduire que MK est moyenne proportionnelle entre 1 et a.

Application : a = 3. Construire à la règle et au compas, en utilisant les résultats précédents, une longueur MK = x, telle que x soit moyenne proportionnelle entre 3 et 1.

Nous remarquons que pour construire une moyenne proportionnelle nous avons utilisé une perpendiculaire à (AB).

3) Argand dans le début de son texte, à l'instar de Mourey, a proposé de prendre sur une droite une "direction" qui donnera le sens positif ; la direction opposée donnera le sens négatif.



Sur cette droite, Argand appelle K le point correspondant à 0.

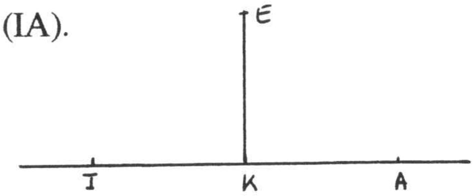
Si KA = 1, il est logique de représenter - 1 par KI.

Cependant pour différencier ceci des longueurs (qui sont par essence positives), ces "segments orientés" seront notés : $\overline{KA} = 1$, $\overline{KI} = -1$.

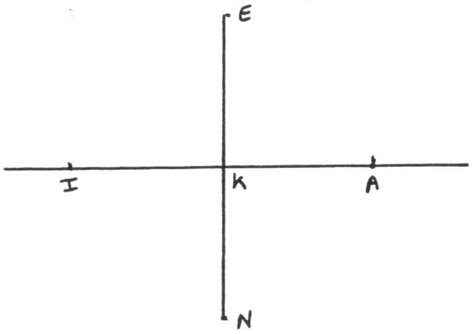
Dans ce cas, si x est la moyenne proportionnelle entre -1 et 1, c'est à dire, si

$$\frac{-1}{x} = \frac{x}{1},$$

il semble "logique" d'après la construction précédente de représenter x perpendiculairement à (IA).



Cependant si $x^2 = N$, nous savons en principe que deux nombres opposés répondent à la question si $N \neq 0$. Donc il y a deux "segments orientés opposés" qui conviendront.



Or si $\frac{-1}{x} = \frac{x}{1}$ alors $x^2 = -1$.

Ainsi $\overline{KE}$ et $\overline{KN}$ représentent deux "quantités" dont le carré est - 1.

On peut décider que $\overline{KE}$ représente $\sqrt{-1}$ et $\overline{KN}$ représente $-\sqrt{-1}$.

Il y a donc moyenne proportionnelle de longueurs mais aussi, en quelque sorte de directions.

i, ou $\sqrt{-1}$ serait donc associé à la longueur 1 et la direction faisant un angle de $\frac{\pi}{2}$ avec une direction origine choisie.

- i ou $-\sqrt{-1}$ serait associé à la longueur 1 et l'angle $-\frac{\pi}{2}$.

4) Comment placera-t-on une moyenne proportionnelle entre i (ou $\sqrt{-1}$) et 1 ?

Cette moyenne proportionnelle sera associée à quelle longueur et à quel angle ?

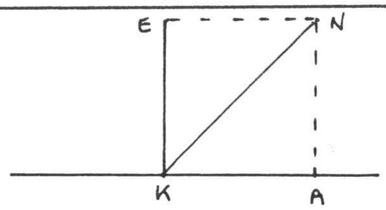
5) Peut-on représenter dans ce système le nombre 2i (ou $2\sqrt{-1}$) ? $-\frac{1}{2}$ i ? 4 ? -2?

Peut-on représenter ce qui serait associé à la longueur 3 et à l'angle $\frac{\pi}{4}$?

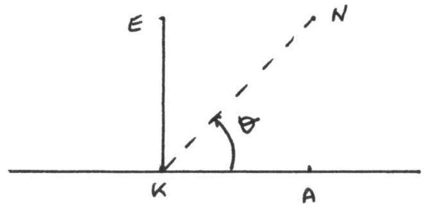
6) Sur quelle demi-droite sont représentés les réels positifs ? A quel angle sont-ils associés ?

Mêmes questions pour les réels négatifs, puis pour les "nombres" de la forme $\pm a\sqrt{-1}$, a étant un nombre réel positif.

7) Considérons le "nombre" 1 + i ; il est "composé" de 1, réel positif et de i. les lignes dirigée peuvent se composer :



Appelons θ l'angle ($\overline{KA}$; $\overline{KN}$).



Évaluer KA en fonction de KN et θ, ainsi que KN. Le "nombre " 1 + i est caractérisé par la longueur KN et l'angle θ. Quelle est la valeur de KN ? Et celle de θ ?

Éléments de corrigé :

1)$x = \sqrt{12}$

2)MK est la hauteur dans le triangle rectangle AMK.

Donc $MK^2 = KA \times KB$.

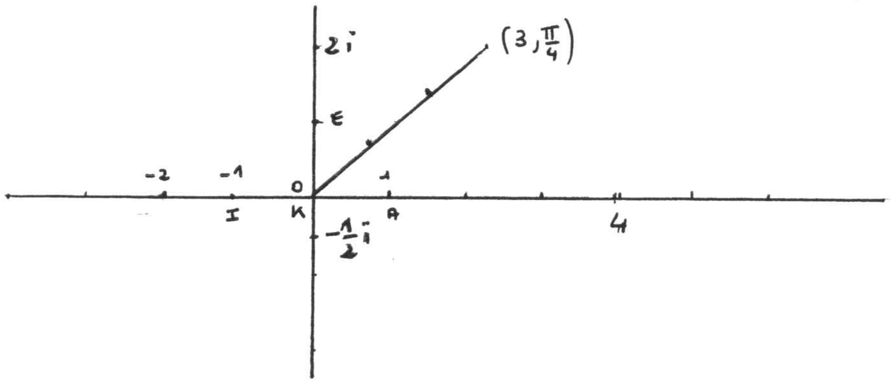
(Ceci peut se démontrer à l'aide de relations trigonométriques simples.)

$\frac{MK}{KA} = \frac{KB}{MK}$ ou encore : $\frac{MK}{a} = \frac{1}{MK}$

Pour construire une moyenne proportionnelle entre a et 1, il suffit de construire un demi cercle de diamètre AB = a+1, de prendre sur [AB] un point K tel que AK = a. La perpendiculaire à (AB) en K coupe le demi-cercle en M tel que MK soit la moyenne proportionnelle cherchée.

4) Il suffit de prendre sur la bissectrice de l'angle AKE une longueur égale à 1. Cette moyenne proportionnelle est associée à la longueur 1 et à l'angle $\frac{\pi}{4}$.

5)



6) Les réels positifs sont représentés sur la demi-droite [KA). Ils sont associés à l'angle nul.

Les réels négatifs sont sur la demi-droite [KI). Ils sont associés à l'angle plat. Les nombres de la forme $+a\sqrt{-1}$ sont sur la demi-droite [KE) et associés à l'angle droit positif ; les nombres de la forme $-a\sqrt{-1}$ sont sur la demi-droite [KN) et associés à l'angle droit négatif.

7) KA = KN cos θ ; et KE = KN sin θ.

KN est la diagonale d'un carré de côté 1, donc $KN = \sqrt{2}$. On a donc

$$\cos\theta = \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Donc $\theta = \frac{\pi}{4}$

Argand insiste sur le fait que tous les nombres de la forme $\pm a \pm b\sqrt{-1}$ sont représentés dans son système et sont tous associés à une longueur et un angle. (a et b sont pour Argand des réels positifs, pour cela il les fait précéder de ± de manière à obtenir tous les cas.)

En 1815 dans un article des Annales de mathématiques pures et appliquées, dirigées par le mathématicien Gergonne, il précise que tous les résultats qu'il a obtenus en considérant les longueurs et les angles auraient pu être obtenus par des calculs algébriques sur la forme $\pm a \pm b\sqrt{-1}$; il y a donc équivalence.

A cette occasion il précise que la "longueur" associée à $a+b\sqrt{-1}$ est égale à $\sqrt{a^2 + b^2}$ et il lui donne le nom de <u>module</u>.

> "Il faudrait rapprocher l'expression des imaginaires de la notation des lignes dirigées, en écrivant par exemple : $\sqrt{a^2 + b^2}\,\{\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sqrt{-1}\}$ pour $a+b\sqrt{-1}$.
> $\sqrt{a^2 + b^2}$ pourrait être appelé le <u>module</u> de $a+b\sqrt{-1}$, et représenterait la <u>grandeur absolue</u> de la ligne $a+b\sqrt{-1}$, tandis que l'autre facteur, dont le module est l'unité, en représenterait la direction ."

Argand souligne cependant que pour calculer le module ou la direction d'un produit son procédé est beaucoup plus simple que les calculs que l'on serait amené à faire sur la forme algébrique. (Avec la représentation d'Argand, le module du produit par exemple est le produit des modules, et l'argument(ou angle) du produit est la somme des arguments.)
Notons que c'est Cauchy qui en 1838 inventera le nom argument pour désigner la direction, c'est à dire l'angle entre $\overline{KA}$ et $\overline{KN}$, si $\overline{KA}$ est la direction origine et $\overline{KN}$ celle de $a+b\sqrt{-1}$.

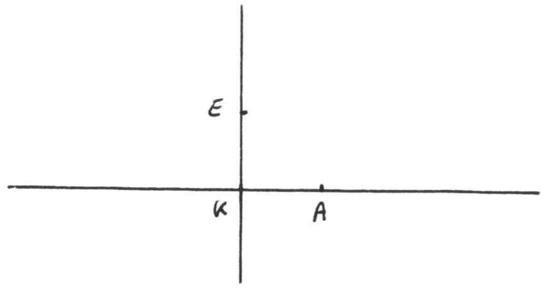
<u>Exercice :</u>

1) Soit le nombre 2+2i et le nombre $\frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}i$.

Déterminer le module de 2+2i et de $\frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}i$, ainsi que leurs arguments.

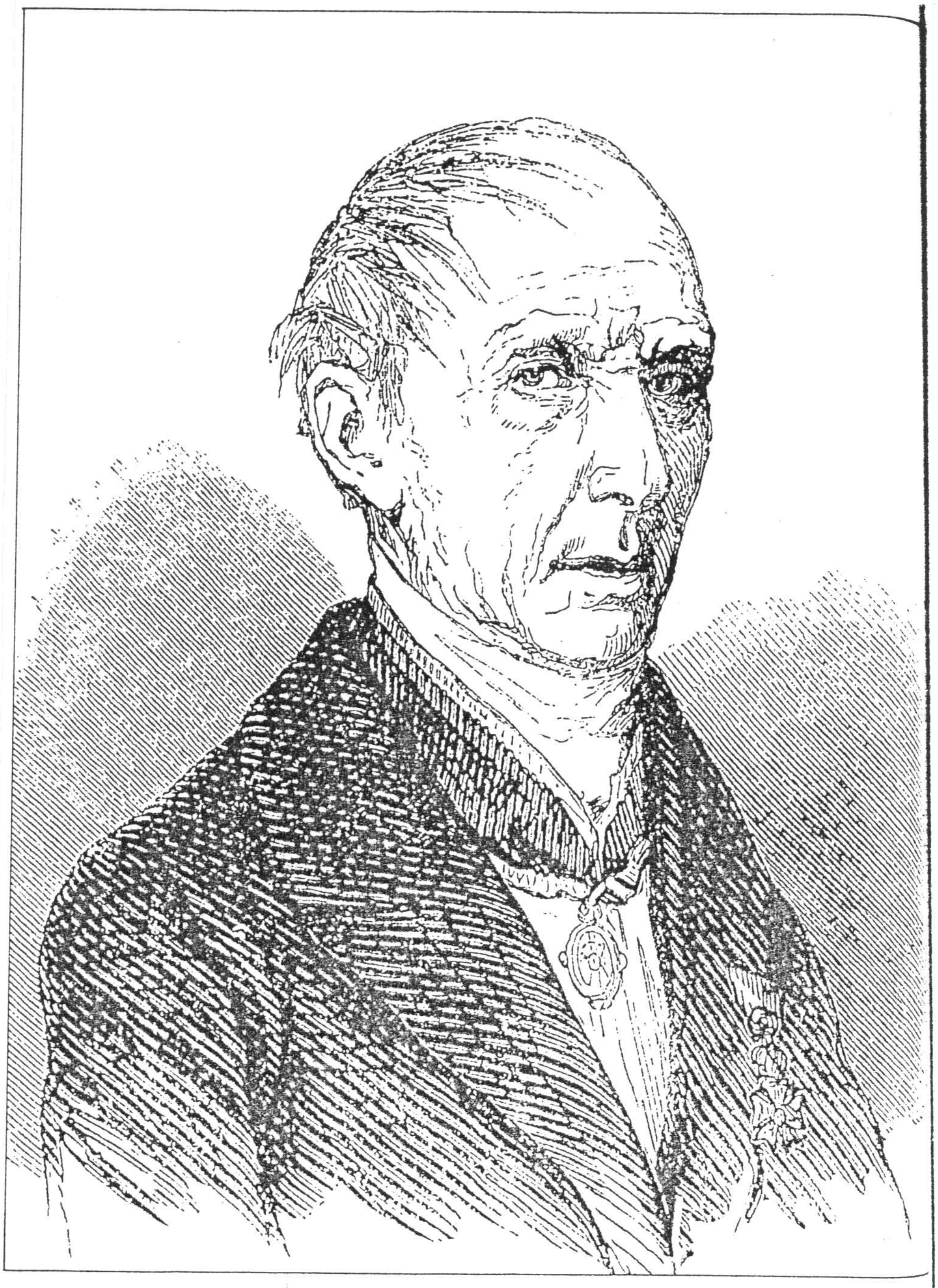
2) Déterminer alors le module et l'argument du produit $(2+2i)(\frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}i)$.

Placer les points représentant 2+2i, $\frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}i$ et leur produit.



3) Calculer algébriquement le produit de 2+2i et $\frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}i$.

En utilisant cette seule forme est-il facile de placer les points représentant 2+2i, $\frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}i$ et leur produit de façon précise ? Peut-on trouver facilement sous cette forme le module et l'argument d'un produit ?



AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY

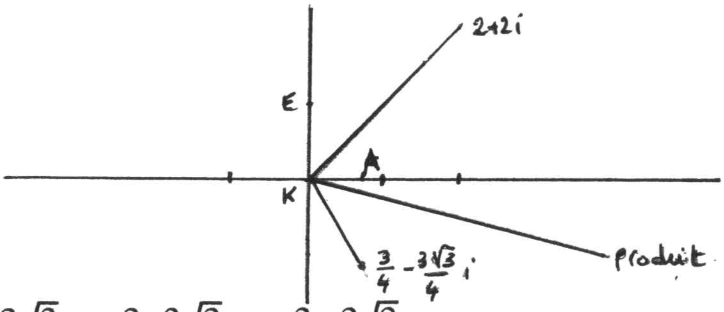
Éléments de corrigé :

1) Le module de 2 + 2i est $\sqrt{8}$, son argument est $\frac{\pi}{4}$.

Le module de $\frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}i$ est $\frac{3}{2}$ et son argument est $-\frac{\pi}{3}$.

Le module de leur produit est $\sqrt{8} \times \frac{3}{2}$ soit $3\sqrt{2}$; et son argument est $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}$, soit $-\frac{\pi}{12}$.

2)



3) $(2+2i)(\frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}i) = \frac{3+3\sqrt{3}}{2} + i\,(\frac{3 - 3\sqrt{3}}{2})$.

Le placement précis est peu pratique. Le calcul du module n'est pas trop difficile, par contre celui de l'argument mène à un sinus et un cosunus non répertoriés dans les valeurs usuelles.

Notre histoire touche à sa fin, cependant nous ne pouvons manquer de citer la contribution de Gauss,[4] puisque c'est lui, finalement, qui, par l'autorité que lui conférait sa renommée a permis à ces représentations géométriques d'être reconnues.

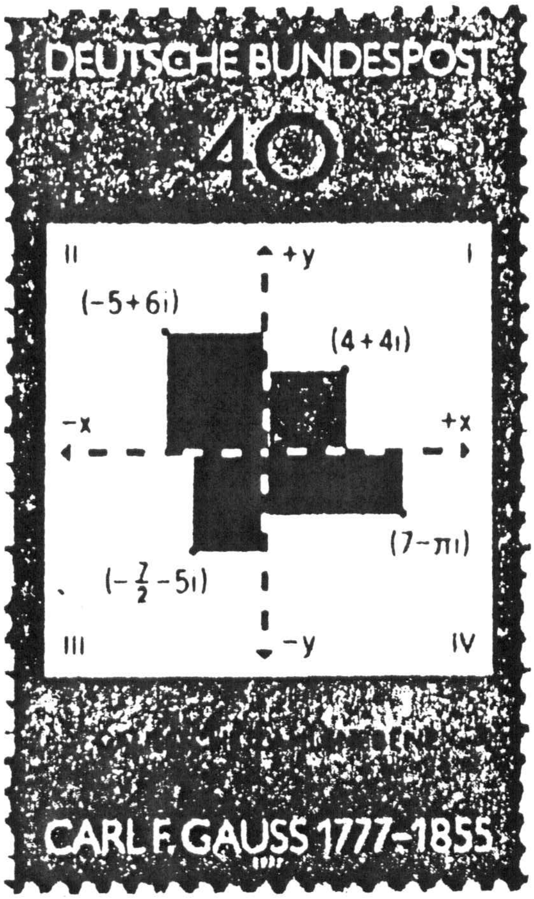
"Notre arithmétique générale, en tant qu'elle excelle à étendre la Géométrie des anciens, est entièrement une création des temps modernes. Partie d'abord de la notion des nombres absolus, elle a graduellement élargi son domaine. Aux nombres entiers elle a joint les fractions, aux quantités rationnelles les quantités irrationnelles ; à la quantité positive la quantité négative ; aux nombres réels les nombres imaginaires. Ces progrès néanmoins ont toujours été faits à pas bien timides et bien hésitants. Les anciens algébristes appelaient les racines négatives des équations des racines fausses, et elles le sont en effet, quand le problème pour lequel la relation a été posée présente des quantités auxquelles on ne peut en attribuer d'autres qui leur soient opposées. Mais c'est justement dans l'arithmétique générale que personne n'hésite à admettre des fractions, lorsqu'il y a cependant tant d'objets capables d'être représentés par des nombres, pour lesquels les fractions n'auraient aucun sens ; de même il ne faut pas refuser aux nombres négatifs les droits accordés aux nombres positifs par la raison qu'il y a d'innombrables choses auxquelles on ne peut en opposer d'autres. La réalité des nombres négatifs est suffisamment justifiée puisque dans d'innombrables autres cas ils trouvent des objets auxquels ils peuvent s'appliquer (substratum) exactement. cela est admis depuis longtemps ; mais les quantités imaginaires, anciennement et parfois encore de nos jours, quoique à tort, nommées impossibles, furent encore plutôt tolérées qu'entièrement naturalisées, et elles apparaissent plutôt comme un vain jeu de symboles auquel tout substratum imaginable est dénié sans hésitation par des gens qui ne songent pourtant pas à déprécier la riche contribution dont ce jeu de symboles a enrichi le trésor des relations entre elles des quantités réelles."

Puis un peu plus loin :

"Ces relations ne peuvent être rendues intuitives que par une représentation géométrique, et pour le faire le plus simplement possible il n'y a pas de raison d'employer une autre manière que la manière carrée (le quadrillage, c'est à dire que dans un plan illimité l'on trace des carrés au moyen d'un double système de lignes parallèles se coupant à angles droit, et on prend les points d'intersection comme symboles. Chacun de ces points est entouré de quatre points adjacents, et si l'on désigne le rapport du point A à n'importe lequel des points voisins par +1, le sens du symbole -1 est déterminé par cela même ; après on peut prendre pour +i lequel on voudra des deux autres points, c'est à dire qu'on peut

[4]Compte-rendu de Gauss de son ouvrage : "Theoria residuorum quadraticarum, commentatio secunda", dans les "Annonces savantes de Goettingue", du 23 avril 1831 ; cité par W-W Beman, "Un chapitre de l'histoire des mathématiques", in "L'enseignement mathématique", 1899.p. 177 et suivantes.

marquer par +i le passage au point de droite ou à celui de gauche. La distinction entre la droite et la gauche, dès que nous avons fixé à volonté ce que nous appellerons en avant et en arrière dans le plan, au-dessus et au-dessous par rapport aux deux côtés du plan, est complètement déterminée par elle-même, bien que nous ne puissions faire partager à d'autres notre intuition qu' au moyen d'objets matériels réellement existants. Mais quand nous aurons décidé de tout cela, nous verrons que nous aurons encore matière à choix pour savoir laquelle de deux séries qui se coupent en un point doit être choisie comme la série principale, et quelle direction dans celle-ci doit être choisie pour avoir affaire aux nombres positifs. Nous voyons encore que si l'on veut mettre +1 pour la relation exprimée auparavant par +i nous devrons nécessairement mettre +i pour la relation exprimée avant par -1. Dans le langage des mathématiciens cela veut dire que +i est une moyenne proportionnelle entre +1 et -1, et correspond au symbole $\sqrt{-1}$. Nous ne disons pas la moyenne parce que -i a le même droit à cette dénomination. La démonstrabilité d'une signification intuitive de $\sqrt{-1}$ est donc pleinement justifiée, et nous n'avons plus besoin d'autre chose pour faire entrer les quantités imaginaires dans le domaine des objets réels de l'arithmétique."



Dès lors les nombres de la forme a+bi seront appelés <u>nombres complexes</u> pour gommer toute idée d'imaginaire ou d'impossible, et le plan dans lequel on les représente s'appellera <u>plan complexe</u>.

Tous les "nombres connus" y trouvent leur place, et il n'y a plus de raison de distinguer les réels positifs, les réels négatifs ou les imaginaires.

Notons encore quelques contributions dont celle de Hamilton, évoquée par Tait, dans son "Traité des quaternions" (1867) :

"Dans ce but, Hamilton s'est servi d'une figure pour représenter l'ensemble des valeurs numériques, et il a ainsi conçu l'idée d'une échelle (scala), qui s'étendrait en ligne droite depuis les régions de l'infini négatif jusqu'à celles de l'infini positif ; les valeurs numériques seraient en quelque sorte les degrés de l'échelle.

De plus, un mobile qui cheminerait le long de l'échelle et qui servirait d'index, désignerait, à proprement parler, le nombre scalaire, en un mot le scalar : chaque position que l'index occuperait sur l'échelle fournirait une valeur du scalar.

Par abréviation, nous pourrions aussi adopter le substantif "le scalaire", mais nous risquerions ainsi de créer une expression qui serait en dehors du génie de la langue."

Ainsi est vraiment créé ce que nous appelons classiquement l'axe des réels, et la notion de "scalaire" qui a finalement été adoptée.
Nous trouvons un peu plus loin :

"En faisant usage des notations ordinaires de la géométrie analytique à deux dimensions et en employant deux axes rectangulaires, nous pourrons définir le principe en question de la manière suivante : sur oy l'unité de longueur sera représentée par $\sqrt{-1}$, sur oy ' par - $\sqrt{-1}$; par contre, sur ox elle le sera par + 1 et sur ox ' par - 1.

Si nous disposons ces quantités dans un ordre circulaire, savoir dans l'ordre dans lequel elles se succéderont lorsqu'on les parcourt à l'aide d'une rotation dans le sens positif (et nous adopterons pour cela le sens opposé à celui du mouvement des aiguilles d'une montre.) nous aurons la série :

$$1 , \sqrt{-1} , -1 , -\sqrt{-1} .$$

Dans cette série chacun des termes se déduit du précédent par la multiplication de ce dernier par le facteur $\sqrt{-1}$. Nous sommes ainsi en droit de conclure que $\sqrt{-1}$ est un opérateur, dont l'application agit d'une manière analogue à celle d'une manivelle qui ferait tourner d'un angle de 90°, et dans le sens positif, toute droite passant par l'origine et assujettie à se mouvoir dans le plan xy.

D'après cette manière de voir, la position d'un point dans le plan se trouve déterminée par la seule donnée d'une expression imaginaire. C'est ainsi que $a+b\sqrt{-1}$ pourra être considéré comme la simple représentation d'un point dont les coordonnées sont a et b. Mais on pourra aussi bien se servir de l'expression en question pour la représentation de la droite menée de l'origine au point dont il s'agit. Sous ce dernier aspect, l'expression $a+b\sqrt{-1}$ désigne à la fois et la direction et la longueur de la droite que nous venons de définir ; il est évident, en effet, que la droite forme avec l'axe des x un angle dont la tangente est $\frac{b}{a}$ et que la longueur de la droite est $\sqrt{a^2+b^2}$."

Ce texte unifie les visions que l'on peut avoir des "expressions imaginaires", qui engloberont au passage les "nombres réels", si par exemple b est nul. Nous remarquons en effet que a et b dans ce texte désignent n'importe quel nombre réel négatif, positif, ou nul. Il est tout à fait moderne dans son écriture, à ceci près que "droite" signifie "segment orienté" (les vecteurs ne sont pas loin ; ce sont ces considérations même qui vont mener Hamilton à leur invention en 1843, par le biais des quaternions.). Notons aussi que "direction" n'a pas le sens actuel de direction d'une droite mais désigne en fait à la fois direction et sens, c'est à dire : angle avec la direction origine.

Il est peut-être utile de préciser la justification du choix du "sens positif" donnée par Tait, toujours dans le même ouvrage :

" Pour déterminer la nature des rotations, j'ai regardé comme positif le sens dans lequel la terre tourne autour de son axe ou, si l'on veut, le sens dans lequel la terre tourne autour du soleil, par un observateur qui est placé dans l'hémisphère septentrional. Le sens de cette rotation est alors l'opposé du mouvement suivant lequel tournent les aiguilles d'une montre."

Nous ne pourrions terminer ce tour d'horizon sur le négatif et l'imaginaire sans nous arrêter un peu à une autre contribution de Hamilton : "Theory of Conjugate functions, or Algebraic couples ; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the science of Pure Time." En 1837, considérant que, au total, ce qui est important c'est la donnée du couple (a ; b) de nombres réels, il va étudier l'ensemble de ces couples, d'un point de vue purement formel. Il s'agit de munir cet ensemble de propriétés et d'opérations qui soient dérivées de celles des nombres réels.

En particulier il doit exister une addition et une multiplication qui doivent être commutatives, associatives, posséder un "élément neutre" (comme 0 pour l'addition et 1 pour la multiplication dans l'ensemble des nombres réels) ; la multiplication doit être distributive sur l'addition, et chaque couple doit posséder un "opposé" et un "inverse" (sauf peut-être le couple qui correspondra au 0 de l' addition des réels.)[5]

Hamilton établit ainsi que les opérations possibles seront les suivantes :

$(a ; b) + (a' ; b') = (a+a' ; b+b')$

$(a ; b) \times (a' ; b') = (aa' - bb' ; ab' + ba')$

[5]les mots "distributif" et "commutatif" ont été introduit par Servois en 1814, le mot associatif sera introduit par Hamilton en 1843.

Exercice :

1) Avec les opérations ainsi définies calculer :

$(2 ; 3) + (1 ; 4)$ $\quad$ $(1 ; 2) + (0 ; 3)$ $\quad$ $(-1 ; 4) + (1 ; 3)$

$(2 ; 3) \times (1 ; 4)$ $\quad$ $(1 ; 2) \times (0 ; 3)$ $\quad$ $(-1 ; 4) \times (1 ; 3)$

$(1 ; 0) \times (a ; 0)$ $\quad$ $(0 ; 1) \times (a ; 0)$ $\quad$ $(1 ; 0) \times (0 ; a)$

$(a ; 1) \times (0 ; a)$ où a est un réel.

2) Hamilton se pose la question suivante : existe-t-il un couple (a ; b) dont le "carré" soit (- 1 ; 0), c'est à dire tel que :

$(a ; b) \times (a ; b) = (-1 ; 0)$?

Déterminer si c'est possible, un tel couple.

3) Nous remarquons que $(1 ; 0) + (-1 ; 0) = (0 ; 0)$. Ces couples seront dits opposés.

Hamilton propose d'identifier le couple (1 ; 0) au réel 1 et d'une manière générale, le couple (a ; 0) au réel a.

(- 1 ; 0) est donc identifié à - 1. Ainsi, d'après la question 2), le couple (0 ; 1) a pour carré - 1. Il est donc logique d'identifier le couple (0 ; 1) à $\sqrt{-1}$ et donc le couple (0 ; - 1) à $-\sqrt{-1}$.

Le couple (0 ; b) est égal à $(b ; 0) \times (0 ; 1)$, donc on peut l'écrire, d'après la règle précédente : $b\sqrt{-1}$.

D'une manière générale, le couple (a ; b) qui est égal à $(a ; 0) + (0 ; b)$ sera donc identifié à $a+b\sqrt{-1}$.

L'ensemble des nombres complexes est donc identique à l'ensemble des couples de nombres réels muni des deux opérations définies par Hamilton.

Vérifier que $(a ; b) \times (a' ; b')$ s'identifie bien à $(a+ib)\times(a'+ib')$.

Éléments de corrigé :

a) (3 ; 7) b) (1 ; 5) c) (0 ; 7) d) (-10; 11) e) (-6 ; 3) f) (-13 ; 1) g) ((a ; 0)

h) (0; a) i) ((0; a) j) (-a ; 0)

2) (a ; b) x (a ; b) = (-1 ;0) donne : $a^2 - b^2 = -1$ et 2ab = 0. Donc a ou b est nul. Ce ne peut être b, sinon on aurait $a^2 = -1$ avec a réel. C'est donc a qui est nul et donc b = 1 ou - 1. Deux couples répondent à la question : (0 ; 1) et (0 ; - 1).

3) (a ; b) x (a ' ; b ') = (a a ' - b b ' ; a b ' + b a ') ;

et (a+ib) x (a ' + i b ') = a a ' - b b ' + i(a b ' + b a ').

Il y a donc bien identification.

Ainsi Hamilton écrira :

> "Dans la théorie des nombres "singuliers", le symbole $\sqrt{-1}$ est absurde, et note une extraction impossible, ou plutôt un nombre imaginaire ; mais dans la théorie des couples, le même symbole $\sqrt{-1}$ a un sens, et note une extraction possible, ou un couple réel, nommé (comme nous venons de le voir) la racine carrée principale du couple (- 1 ; 0). Dans cette dernière théorie, donc, au contraire de la précédente, le signe $\sqrt{-1}$ peut vraiment être employé ; et nous pourrions écrire, si nous le choisissions, pour n'importe quel couple $(a_1 ; a_2)$:
>
> $$(a_1 ; a_2) = a_1 + a_2\sqrt{-1}$$ "

Ces considérations sur les couples de nombres réels identifiés aux nombres complexes, et qui donc par leur représentation géométrique permettent de décrire le plan, mèneront Hamilton à la recherche des règles d'opérations sur les triplets de nombres réels, qui pourraient permettre de décrire l'espace à trois dimensions. Après de longues recherches, il découvrira qu'il faut, non pas des triplets, mais des quadruplets, et que la commutativité de la multiplication devra être abandonnée. Ces quadruplets seront appelé les quaternions, et comporteront une partie qui sera dénommée "vecteur".

C'est ainsi que commence une autre histoire, ou plutôt l'histoire continue, car ce lent chemin vers les vecteurs était perceptible depuis le début de ce dernier chapitre. Ce sera une prochaine promenade.

Celle que nous avons suivie ici, au pays des négatifs et des imaginaires, nous pose sans aucun doute cette question finale : qu'est ce qu'un nombre ?

Y- a t-il encore une "réalité" sous cet objet mathématique qui semble devenir de pur formalisme, élément d'un "ensemble", muni de "lois" (ou opérations), et de certaines propriétés ?

Laissons le dernier mot à Hankel, dans sa "Théorie du système des nombres complexes" de 1867 :

> "Le nombre n'est plus aujourd'hui une chose, une substance qui existerait en toute indépendance en dehors du sujet pensant ou des objets qui en sont l'occasion ; ce n'est plus un principe indépendant comme l'ont cru les pythagoriciens. La question de l'existence des nombres nous renvoie soit au sujet pensant, soit aux objets pensés dont les nombres présentent les relations. Le mathématicien tient pour impossible au sens strict cela seul qui est logiquement impossible, c'est à dire qui implique une contradiction. Il n'est pas besoin

de démontrer qu'on peut admettre des nombres impossibles en ce sens. Mais si les nombres considérés sont logiquement possibles, si leur concept est défini clairement et distinctement, s'il est donc libre de toute contradiction, la question ne peut plus être de savoir s'il y a dans le domaine du réel, dans ce qui est intuitif ou actuellement donné, un substrat pour ce nombre, s'il existe des objets qui puissent donner matière aux nombres en tant qu'ils sont relations intellectuelles d'un certain type."

Quelques repères chronologiques pour les chapitres I et II

Mathématiciens	Lettres-Arts-Sciences	Evénements historiques
Nicolas Chuquet (XVème s.) Luca Pacioli (1445-1514)	XVème s. Invention de l'imprimerie.	1453 : Prise de Constantinople par les Turcs : fin de l'Empire Byzantin. 1460 : Destruction de l'Observatoire de Samarcande : fin de la Science Arabe médiévale. 1492 : Christophe Colomb découvre l'Amérique.
Nicolo Tartaglia (1500-1557)	1502-1506 : Léonard de Vinci peint "La Joconde"	Guerres d'Italie : 1515 : Bataille de Marignan Victoire de François 1er
Gerolamo Cardano (1501-1576)		1525 : Bataille de Pavie Défaite de François 1er.
Rafael Bombelli (1526-1573)	1532 : Rabelais publie "Pantagruel".	1534-1535 : Jacques Cartier découvre le Canada.
François Viète (1540-1603)	1543 : Parution du traité de Copernic, base de l'astronomie moderne. 1580 : Première édition des "Essais" de Montaigne.	1562-1598 : Guerres de religion (1572 : massacre de la Saint-Barthélémy.)

Quelques repères chronologiques pour le chapitre III

Mathématiciens	Lettres-Arts-Sciences	Evénements historiques
René Descartes (1596-1650) Albert Girard (1595-1632)	1601 : Shakespeare : "Hamlet" 1604-1618 : Les trois lois de Kepler 1609 : Galilée perfectionne la lunette. 1632 : Procès de Galilée 1632 : Galilée : "Dialogue sur les deux principaux systèmes du monde". 1636 : Corneille : "Le Cid". 1637 : Descartes : "Discours de la Méthode". 1639 : Descartes : "La Géométrie". 1642 : Naissance de Newton et mort de Galilée.	1598 : Edit de Nantes. 1589-1610 : Règne de Henri IV 1617-1643 : Règne de Louis XIII 1627 : Siège de La Rochelle.

Quelques repères chronologiques pour les chapitres IV et V

Mathématiciens	Lettres-Arts-Sciences	Evénements historiques
Gottfried Leibniz (1646-1716)	1659 : Molière : "Les Précieuses Ridicules".	1661 : Début du règne personnel de Louis XIV.
	1677 : Fondation de l'Observatoire de Paris.	
		1685 : Révocation de l'Edit de Nantes.
Colin Mac Laurin (1698-1746)		
Leonhard Euler (1707-1783)	1707 : Denis Papin construit un bateau à vapeur.	
		1715 : Mort de Louis XIV.
	1721 : Montesquieu : "Les Lettres Persanes".	1715-1774 : Règne de Louis XV
	1735 : Mesure du méridien par La Condamine.	
	1747 : Franklin découvre le principe du paratonnerre.	
Pierre-Simon de Laplace (1749-1827)	1751 : Publication du premier volume de "L'Encyclopédie".	
Lazare Carnot (1753-1823)	1759 : Voltaire : "Candide"	
Sylvestre Lacroix (1765-1843)		1766 : Rattachement de la Lorraine à la France.
Jean-Robert Argand (1768-1822)	1770 : Lavoisier analyse la composition de l'air.	
		1774-1793 : Règne de Louis XVI.
Karl- Friedrich Gauss (1777-1855)	1785 : Traversée de la Manche par l'aéronaute Blanchard.	
Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)		1789 : Prise de la Bastille (14/07) Déclaration des Droits de l'Homme et du Citoyen (26/08)
William Hamilton (1805-1865)		1804-1814 : Le Premier Empire.
	1816 : Niepce réalise la première photographie.	1815-1824 : Règne de Louis XVIII.
	1822 : Champollion déchiffre les hiéroglyphes.	
		1824-1830 : Règne de Charles X
	1830 : Stendhal : "Le Rouge et le Noir".	1830 : Révolution de Juillet.
	1838 : Hugo : "Ruy Blas".	1830-1848 : Règne de Louis-Philippe.
	1840 : Obligation légale du système métrique en France.	
	1844 : Dumas : "Les Trois Mousquetaires".	1848 : Révolution de Février.
		1848-1851 : IIème République.

Biographies :

ALEMBERT Jean Le Rond d' (1717-1783) est né et mort à Paris. Ses débuts dans la vie furent plutôt difficiles : sa mère, la marquise de Tencin, l'abandonna à sa naissance sur les marches de l'église Saint Jean-le-Rond, d'où son surnom ; il fut élevé par la femme d'un vitrier jusqu'à l'âge de douze ans puis entra au Collège des Quatre Nations où il prit goût pour les mathématiques. Au sortir du collège il étudia le droit, fut tenté par la médecine mais son penchant pour les mathématiques fut le plus fort. Il entra à l' Académie des Sciences le 29 Mai 1741. Il publia en 1743 son *"Traité de Dynamique"*, collabora de 1751 à 1772 avec Diderot à l'élaboration de l' Encyclopédie dont il rédigea presque entièrement la partie mathématique et philosophique. Ses autres travaux mathématiques ont porté sur les nombres complexes et le calcul différentiel.

AL-KHWARISMI (780-850). On ne sait rien de précis sur la vie de ce mathématicien arabe né à Khwarismi (actuellement Khiva en Ouzbékistan). Son principal ouvrage, dont le titre arabe "*Hisâb al-jabr wa'l-muqqâbala*" signifie "Science de la transposition et de la réduction", traite de la résolution des équations du 2nd degré ; le mot "al-jabr" qui figure dans le titre a donné le mot "algèbre". Quant au nom d'Al-Khwarismi, il a donné le mot "algorithme".

AL-QALASADI (XV^{ème} s.). On ne sait pas grand-chose non plus de la vie de ce mathématicien arabe qui vécut à Grenade et mourut en 1486 exilé en Afrique. Son principal ouvrage s'intitule "*Dévoilement de la science de l'arithmétique*".

ARGAND Jean-Robert (1768-1822) est né à Genève et mort à Paris. Il fut célèbre pour avoir donné en 1806 une représentation géométrique plane des nombres complexes ; toutefois il n'était pas le premier à avoir cette idée puisque Caspar Wessel, mathématicien danois, avait fait paraître au Danemark un mémoire développant des idées similaires, mais il fallut attendre la version française de 1897 pour que ce mémoire soit diffusé. On doit aussi à Argand le terme de *module* d'un nombre complexe.

BOMBELLI Rafael (1526-1573) est né et mort à Bologne. Il publia en 1572, quelques années avant la mort de Cardan, une "*Algèbre*" qui contribua à la solution de l'équation cubique. Dans cet ouvrage apparaît la première étude véritable des nombres imaginaires ainsi qu'un symbolisme apparenté à celui de Nicolas Chuquet.

CARDANO Gerolamo (1501-1576). Cardano (Cardan en français) est né à Pavie en 1501. Il fait ses études à Padoue où il devient docteur en médecine en 1524. Médecin de renom, il exerce aussi ses dons d'astrologue et enseigne les mathématiques. Son "*Ars Magna*", de 1545, est le traité fondateur de l'algèbre au XVI^{ème} s. : il fournit le cadre pour la résolution des équations du 3ème et du 4ème degré après les travaux de Scipione del Ferro, de Tartaglia et de Ferrari. Toutefois Tartaglia l'accusa de lui avoir volé sa méthode de résolution des équations du 3ème degré.
G.Cardano meurt à Rome en 1576.

CARNOT Lazare-Nicholas-Marguerite (1753-1823) est né à Nolay en Bourgogne. Il fut avant tout un homme politique. Il fit ses études à l'Ecole Militaire de Mézières où il eut Monge pour professeur et commença, en 1773, une carrière d'ingénieur militaire. Pendant la Révolution il fut député à l'Assemblée et reçut le titre d' "Organisateur de la Victoire" pour son action lors de la victoire de Wattignies sur les Autrichiens en 1793. Il fut ministre de la Guerre sous l' Empire, ministre de l'Intérieur pendant les Cent-Jours et, lors du retour de Louis XVIII, il fut forcé de s'exiler à Magdebourg où il mourut en 1823. Ses travaux scientifiques portent sur la mécanique (*"Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement" 1803*) mais il est surtout célèbre par ses contributions à la géométrie (*"Géométrie de position" 1803*).

CAUCHY Augustin-Louis (1789-1857) est né à Paris. Très tôt il montra des dons pour les mathématiques et entra à l'Ecole Polytechnique à l'âge de 16 ans. Après un séjour de trois ans à Cherbourg en tant qu'ingénieur militaire il revient à Paris ayant déjà écrit deux mémoires sur les polyèdres et les fonctions symétriques. Dès 1816 ses travaux le mettent au premier rang et le posent en rival de Gauss, son aîné de douze ans. Monge ayant été chassé de l'Académie des Sciences pour raison politique, Cauchy est désigné pour lui succéder, ce qui lui vaudra l'hostilité de ses collègues. Il est ensuite nommé peu de temps après professeur à Polytechnique, au Collège de France et à la Sorbonne. Ardent royaliste et partisan des Bourbons il s'exile à Turin en 1830 et rejoint Charles X à Prague en 1833. De retour en France en 1838 avec le titre de baron, il enseigne dans divers établissements religieux puis, après la révolution de 1848, il est nommé professeur d'astronomie mathématique à la Faculté des Sciences. Cauchy manifesta jusqu'à sa mort une activité mathématique intense : son oeuvre occupe 27 gros volumes et touche à toutes les branches des mathématiques, incluant la mécanique et la physique. Il a fait faire d'immenses progrès à la théorie des déterminants et a introduit la rigueur en Analyse en développant le calcul différentiel et intégral sur la base du concept de limite.

CHUQUET Nicolas semble avoir vécu dans la deuxième partie du XV$^{\text{ème}}$ s. Né à Paris, docteur en médecine, il vécut à Lyon où il pratiqua la médecine. En 1484 il rédigea son célèbre ouvrage intitulé "*Triparty en la science des nombres*" qui ne fut publié qu'au XIX$^{\text{ème}}$ s. ; toutefois cet ouvrage était connu de quelques mathématiciens de l'époque. Dans ce livre N.Chuquet résout des équations et invente une notation pour les puissances et la racine carrée.

DESCARTES René (1596-1670) est né en Touraine et mort Stockholm. Il fut un des fondateurs de la biologie, un physicien de talent, un mathématicien et un des premiers grands philosophes modernes. A partir de 1628 il s'installa en Hollande pour pouvoir travailler en paix à son oeuvre scientifique et philosophique. Il publia en 1637 son "*Discours de la Méthode*" dont "*La Géométrie*", seul ouvrage de Descartes sur les mathématiques, est un appendice.

EULER Leonhard (1707-1783) est né à Bâle. Son père, pasteur calviniste d'un village voisin mais ancien élève de Bernoulli, l'initia aux mathématiques. Entré à l'Université de Bâle pour y étudier la théologie, Euler attira l'attention de Jean Bernoulli par ses aptitudes en mathématiques et devint l'ami de ses fils Nicolas, Daniel et Jean. Ceux-ci, établis à l'Académie de Saint-Pétersbourg le firent venir en Russie. Euler resta à Saint-Pétersbourg de 1727 à1741 puis se rendit à l'Académie de Berlin sur l'invitation du roi de Prusse où il resta jusqu'en 1766, date à laquelle Catherine II de Russie l'invita à revenir à Saint-Pétersbourg où il resta jusqu'à sa mort. Euler était doué d'une mémoire phénoménale, d'une intelligence aiguë et universelle et, bien qu'il fût devenu pratiquement aveugle en 1767, il continua de travailler jusqu'à sa mort. Il fut un mathématicien particulièrement fécond dans toutes les branches des mathématiques : théorie des nombres, analyse, nombres complexes, trigonométrie, équations différentielles, géométrie analytique et différentielle des courbes et des surfaces. C'est à lui que l'on doit l'usage des symboles e, π et i, la notation fonctionnelle fx, le symbole Σ pour indiquer la sommation.

FONTANA Nicolo dit TARTAGLIA (1500-1557). Bègue à la suite d'une blessure reçue dans son enfance lors de la prise de Brescia par les Français en 1512, il fut professeur de mathématiques dans de nombreuses villes d'Italie, entre autres Vérone et Venise où il mourut en 1557. Il fut un mathématicien talentueux qui s'illustra dans plusieurs branches des mathématiques (arithmétique, géométrie, algèbre). Il s'intéressa plus particulièrement à la résolution des équation du 3$^{\text{ème}}$ degré, ce qui l'engagea dans une controverse animée et sordide avec G.Cardano. Il semble que lui-même se soit approprié des résultats trouvés par Scipione del Ferro (1465-1526).

GAUSS Karl Friedrich (1777-1855) est né à Göttingen dans un milieu modeste et peu instruit. Ses professeurs surent reconnaître son génie précoce et l'aidèrent à poursuivre ses études. Il resta fidèle à la ville de Göttingen où il étudia, fonda et dirigea l'Observatoire, devint le Doyen de la Faculté, et mourut. Gauss fut un mathématicien génial - on le surnomma le "Prince des mathématiciens" - mais solitaire ; il publia peu et la découverte en 1898 de son journal mathématique, fort bref puisqu'il ne compte que dix-neuf pages, permit d'établir la date et l'authenticité de certains résultats. Ses travaux en mathématiques portèrent sur la théorie des nombres, les statistiques, l'élaboration d'une géométrie non-euclidienne. A partir de 1807 il se consacra davantage à l'astronomie et à la physique, domaines où ses contributions sont également riches et variées.

GIRARD Albert (1595-1632). Traducteur de Stevin et de Diophante, Girard fut très marqué par Viète et le rôle de la résolution des équations. Il fut le premier à manipuler les racines négatives et imaginaires des équations et énonça, sans preuve, le théorème fondamental de l'algèbre, après Roth en 1608, avant Descartes en 1637, et d'Alembert en 1749.

HAMILTON William (1805-1865) est né et mort à Dublin. Doué d'une précocité peu commune - il savait lire et écrire à trois ans, lisait le latin, le grec et l'hébreu à cinq ans et parlait plus d'une dizaine de langues étrangères à treize ans ! - il fit ses études au Trinity College de Dublin et obtint en 1827 le poste très prisé d'astronome royal d'Irlande. Ses travaux concernent l'optique, la dynamique, les équations de degré 5, les équations différentielles mais il est surtout célèbre pour sa théorie rigoureuse sur les nombres complexes considérés comme des couples de réels et par sa découverte des quaternions : c'est en se promenant le long du Royal Canal à Dublin le 16 Octobre 1843 qu'il découvrit une propriété importante pour l'élaboration de sa théorie et grava dans le bois du Brougham Bridge la formule $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. L'étude de ces nouveaux nombres conduira à l'élaboration du produit scalaire et du produit vectoriel.

HANKEL Hermann (1839-1873) est né à Halle. Il fit ses études à Leipzig puis passa une année à Göttingen auprès de Riemann, puis une année à Berlin où il rencontra Weierstrass et Kronecker. Après avoir obtenu son doctorat à Leipzig en 1862, il y fut professeur de 1867 à 1869 et enseigna ensuite à Tübingen de 1869 jusqu'à sa mort. Ses travaux mathématiques portent sur les nombres hypercomplexes et la théorie des nombres.

LACROIX Sylvestre (1765-1843) est né et mort à Paris. Il fut professeur à l'Université de Paris et son cours d'analyse fit référence pendant de nombreuses années. Il fut le premier à utiliser dans son *"Traité du calcul différentiel et du calcul intégral" (1797)* la notion de fonction qui est maintenant la nôtre et l'expression "géométrie analytique" pour désigner l'application de l'algèbre à la géométrie.

LAPLACE Pierre Simon de(1749-1827) est né à Beaumont-en-Auge en Normandie dans une famille de cultivateurs. Après des études à l'Université de Caen il se rendit à Paris où, grâce à l'appui de d'Alembert, il obtint un poste de professeur de mathématiques à l'Ecole Royale Militaire. Ses travaux scientifiques portent, à cette époque, sur la mécanique céleste et le calcul des probabilités. Sous la Révolution il fit partie de la Commission des Poids et Mesures. Avec ses amis et disciples Berthollet, Chaptal, Gay-Lussac, Dulong, il produisit d'importants travaux de physique mathématique. Laplace ne fut pas un pur mathématicien mais il utilisa toutes les ressources mathématiques, y compris le calcul des probabilités, pour expliquer les mystères de la mécanique céleste. Il mourut à Paris en 1827, cent ans après Newton.

LEIBNIZ Gottfried (1646-1716) est né à Leipzig où son père était professeur de philosophie morale à l'Université. Lui-même étudia la philosophie, le droit et la théologie et c'est lors d'un voyage en France où il rencontra Huygens que ce dernier l'encouragea à étudier les mathématiques. Au cours d'un voyage à Londres en 1673 il rencontra Newton qui le soupçonnera plus tard d'avoir lu son manuscrit sur la découverte du calcul différentiel et une grande querelle s'élèvera entre les deux mathématiciens sur la primauté de la découverte. Il fonda en 1700 l'Académie de Berlin. Leibniz fut un grand créateur de notations : le d pour la différenciation, la notation dy/dx, le symbole $\int$ pour l'intégrale, qui est le s de l'époque , première lettre du mot somme, le . pour la multiplication, le : pour la division. Il fut aussi le premier à utiliser le terme de *fonction*. Outre l'invention du calcul différentiel et intégral, on doit à Leibniz de nombreux travaux sur la logique, l'étude des suites et bien sûr la philosophie.

MACLAURIN Colin (1698-1746) est né à Kilmodan en Ecosse et mort à Edimbourg. Doué pour l'étude il entra à l'Université de Glasgow à l'âge de douze ans et s'initia aux mathématiques en assimilant les *"Eléments"* d'Euclide trouvés par hasard chez un ami. Il devint professeur de mathématiques à Aberdeen en 1717, rencontra Newton en 1719 et en devint un disciple fervent, s'attachant à populariser ses découvertes. A partir de 1725 il enseigna à l'Université d'Edimbourg.
Ses principales contributions mathématiques concernent l'analyse (*"Traité des fluxions" 1742*), l'algèbre (résolution des systèmes linéaires par les déterminants), la géométrie (*"Geometrica Organica" 1720*). Il a aussi reçu un prix de l'Académie des Sciences de Paris en 1724 pour un mémoire de physique.

PACIOLI Luca (1445-1517). Il fut instituteur à Venise puis professeur de mathématiques à Pérouse ; il séjourna successivement à Florence, Pise, Bologne et mourut à Rome en 1517. En 1494 il publie "*Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*", une compilation impressionnante des travaux antérieurs ainsi que des connaissances arithmétiques, algébriques, géométriques et commerciales de l'époque. Il était l'ami de Léonard de Vinci qui illustra de magnifiques figures son ouvrage "*De divina proportione*".

STEVIN Simon (1548-1620) est né à Bruges et mort à La Haye. Il fut d'abord comptable et son premier livre, paru à Anvers en 1582, porte sur les tables d'intérêts et leurs utilisations pratiques. Il enseigna les mathématiques, notamment au Prince d' Orange qui devint son protecteur. En 1585 parut un fameux petit livre de trente-six pages *"De Thiende"* (en français *"La Disme"*) dans lequel il définissait les nombres décimaux. Stévin s'illustra aussi en géométrie, trigonométrie, statique, hydrostatique, navigation, théorie des marées, géologie. Il fut l'un des plus grands mathématiciens du XVIème et le plus grand savant en mécanique de toute la période qui s'étend d' Archimède à Galilée.

TAIT Peter Guthrie (1831-1901) est né près d'Edimbourg en Ecosse. Il entre à l'Académie d'Edimbourg en 1841, un an après James Maxwell. Ils deviennent amis et l'entrée de Maxwell à l'Université d'Edimbourg est suivie un an plus tard en 1847 par celle de Tait. En 1852 il écrit son premier livre "Dynamique d'une particule" et en 1853 il découvre et se passionne pour la théorie des quaternions de Hamilton. En 1854 il devient professeur de mathématiques au Queen's College de Belfast en Irlande. Son intérêt pour les quaternions ne cesse de croître et une importante correspondance entre Hamilton et lui se développe : l'une des 50 lettres échangées entre les deux mathématiciens fait 96 pages ! En 1860 il est nommé à la chaire de Physique de l'Université d'Edimbourg. Tait resta à Edimbourg jusqu'à sa mort. Disciple enthousiaste d'Hamilton il fonda une société pour la diffusion de la théorie des quaternions et alla même jusqu'à mener une lutte farouche, et stérile, contre les autres méthodes vectorielles qui s'élaborèrent parallèlement. Sans avoir l'importance de Kelvin ou de Maxwell, Tait peut être néanmoins considéré comme l'un des grands scientifiques britanniques du XIXème.

TARTAGLIA voir FONTANA

VIETE François (1540-1603) né à Fontenay-le-comte, en Vendée, il fit des études de droit à Poitiers puis une carrière d'avocat, de conseiller au Parlement, puis devint Maître des requêtes de l'Hôtel du Roi de 1580 à 1584. Durant ses moments libres (entre 1564 et 1568, puis entre 1584 et 1589) il put réfléchir à ses grandes découvertes. Ses contributions mathématiques touchent les domaines de l'arithmétique, de la trigonométrie, de l'astronomie et surtout de l'algèbre. L'ouvrage qui rendit célèbre Viète fut son fameux traité d'algèbre "*In artem analyticam isagoge*", publié à Tours en 1591, dans lequel il codifie l'usage des lettres pour désigner les grandeurs : les voyelles pour les quantités inconnues, les consonnes pour les quantités connues.

Bibliographie :

Argand, J., *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, Paris, 1806.

Beman, W., W., *Un chapitre de l'histoire des mathématiques*, in L'enseignement mathématique, 1899.

Bombelli, R., *L'Algebra,* Bologne, 1572, ed. Bortolotti, Milan, Feltrinelli, 1966.

Bonnet, J., *La folie de Jérôme Cardan*, Les presses du Languedoc, 1991.

Cardan, J., *Ars magna sive de regulis algebraicis*, Nuremberg, 1545, trad., Witmer, T., R., New York, Dover, 1968.

Cardan, J., *Ma vie,* Paris, Belin, 1991.

Carnot, L., *Géométrie de position*, Paris, 1803.

Cassinet, J., et alii, *Equations du second degré*, Toulouse, IREM, 1979.

Cassinet, J., et alii, *Equations du troisième degré*, Toulouse, IREM, 1980.

Collette, J.-P., *Histoire des mathématiques*, 2 vol., Paris, Vuibert, 1973-1979.

Dahan-Dalmedico, A., Peiffer, J., *Une histoire des mathématiques*, Paris, Seuil, Points Sciences, S 49, 1986.

Dedron, L., Itard, J., *Mathématiques et mathématiciens*, Paris, Magnard, 1960.

Descartes, R., *La Géométrie*, Leyde, 1637, facsimle et trad., Smith, D., E., Latham, M., L. New York, Dover, 1954.

Euler, L., *Introduction à l'analyse infinitésimale*, 2 vol., 1748, trad., Labey, J., B., Paris, Bahelier, 1835.

Euler, L., *Opera omnia,* ser. 1, 29 vol., 1911-1956.

Gaud, D., et alii, *Travaux numériques en 4°*, Poitiers, IREM, 1988.

Girard, A., *Invention nouvelle en algèbre*, Amsterdam, 1629, extraits in Itard, Matériaux pour l'histoire des nombres complexes, Paris, APMEP, 1969.

Glaeser, G., *Epistémologie des nombres relatifs*, in Recherches en didactique des mathématiques, vol. 2. 3, Grenoble, La pensée sauvage,1981.

Itard, J., *Matériaux pour l'histoire des nombres complexes*, APMEP, n°2, 1969.

Lacroix, S., F., *Elémens d'algèbre à l'usage de l'école centrale des quatre nations*, 2° ed., Paris, Duprat, 1800.

Montucla, J., E., *Histoire des mathématiques*, 4 vol., Paris, Agasse, 1799-1802, rééd., Paris, Blanchard, 1968.

Mourey, C., V., *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires dédiée aux amis de l'évidence,* 1828, rééd. Dijon, IREM, 1992.

Musil, R., *Les désarrois de l'élève Törless*, trad., Jaccottet,P., Paris, Seuil, 1957.

Serres, M., (sous la direction de.), *Eléments d'histoire des sciences*, Paris, Bordas, 1989.

Stendhal, *Vie de Henry Brulard*, 1835, Paris, Gallimard, 1973.

Tait, P., G., *Traité des quaternions*, trad. Plarr, Paris, Gauthier-Villars, 1882.

Tartaglia, N., *Quesiti et inventioni diverse*, Venise, 1554, réimp;, ed. A., Masotti, Brescia, 1959.

Taton, R., *Histoire générale des sciences*, 4 vol., Paris, PUF, 1957-1964.

Autres références générales, éditées par la commission inter-IREM Histoire et épistémologie des mathématiques:

Mathématiques au fil des âges, Paris, Gauthier-Villars, 1987.

Histoire de problèmes, histoire des mathématiques, Paris, Ellipses, 1993.