Irem des pays de Loire
groupe d'angers
avec le concours de la MAFPEN de Nantes

SITUATIONS DE CLASSE

POUR

L'ENSEIGNEMENT

DU CALCUL LITTERAL

SOMMAIRE

INTRODUCTION

Les élèves en difficulté ne semblent pas donner sens à ce qu'ils font

Quand des enseignants de mathématiques en collège ou lycée se réunissent, leur première expression sur les difficultés rencontrées par leurs élèves en calcul littéral est à peu près la même :
Ils semblent faire "n'importe quoi" ! C'est comme si les calculs proposés n'avaient aucun sens pour eux. Pourtant ces calculs ont été longuement préparés en cours ; ils en ont fait un très grand nombre. A la fin du chapitre la plupart d'entre eux réussissait les exercices. Mais, à distance dans le temps ou quand la situation est un peu différente, ils se trompent de règle ou disent ne plus rien savoir. Ou encore ils font toujours les mêmes erreurs et vous disent que c'est " de l'étourderie " car ils connaissaient la règle.

Cette situation est particulièrement mal vécue à l'entrée en seconde car les élèves semblent avoir accumulé les difficultés.

La démarche en classe

La démarche habituelle dans la classe de collège, telle qu'on peut la déduire de la lecture des manuels comporte plusieurs temps :

Au départ, la notion nouvelle est présentée à partir d'activités qui visent à donner du sens : par exemple, la distributivité est présentée à partir des mesures d'aires de rectangles.

Ensuite, la règle est mise en forme et elle sert à des exercices d'application immédiate puis à des exercices " pour chercher ".

Dans la suite du travail, l'enseignant attend de l'élève qu'il justifie les calculs qu'il fait par l'utilisation d'une règle appropriée.

C'est là une logique de mathématicien. Force est de reconnaître que ce n'est pas celle de la plupart de nos élèves.

La tentation de mécanisation

La démarche de nos élèves ne s'inscrit pas dans la logique déductive. En particulier, ils répugnent à la recherche d'une règle au profit de mécanismes qui leur paraissent plus rapides.

Il arrive parfois que l'accent mis sur la recherche de mécanismes et leur apprentissage répété soit le fait des enseignants eux-mêmes. Beaucoup d'entre nous ont eu à faire avec ces classes à forte proportion d'élèves en difficulté où l'on tente de répondre aux problèmes par un travail très répétitif, espérant qu'à la longue ils sauront réussir les exercices types. Cette tendance est très typique des classes d'examen où l'urgence peut conduire à du travail "d'entraînement ".

Le fait que les résultats obtenus ne sont pas ceux que l'on souhaitait ne suffit pas à déstabiliser ces comportements.

Pour les enseignants, il y a souvent impossibilité à trouver une autre façon de conduire la classe.

De la part des élèves, les questions à se poser sont beaucoup plus nombreuses :

Quand on regarde attentivement le travail de certains élèves, on se rend compte que les comportements apparents cachent, en fait, des situations très complexes et parfois difficiles à comprendre.

Ils ne semblent pas chercher à relier ce qu'ils font à des règles connues. Ils se décident "au hasard" ou d'après une règle bizarre connue d'eux seuls ou, plus simplement, ils attendent la correction au tableau. Une fois cette correction donnée, ils copient le résultat sans chercher à savoir d'où il vient. S'ils ont trouvé un résultat, ils ne cherchent pas à le valider eux-mêmes. Bien plus, ils ont à coeur de faire disparaître le plus vite possible ce qui leur semble " faux " : voyez agir les forcenés de l'effaceur et du " blanco " ! Ils font ainsi disparaître tout résultat qui n'est pas rigoureusement identique à celui de la correction. Ils ne semblent pas penser que**, si le résultat pour un calcul donné est unique, il peut apparaître sous des formes différentes.** Ainsi, les écritures finales qui peuvent être différentes ne sont pas interprétées ou validées. Au mieux ils demandent " *moi, j'ai mis çà ; est-ce que c'est bon*?" sans écouter la justification qui leur est donnée: ils ne cherchent pas à se former une opinion personnelle mais à obtenir un jugement du professeur...

Face à ces comportements, le professeur commente la correction au tableau en explicitant point par point les règles de calcul employées. Mais nous devons constater que beaucoup d'élèves n'intègrent pas cette explication et que la même règle pourra être expliquée des dizaines de fois sans progrès apparent.

Parfois, l'élève qui semble demander une explication (*pourquoi mettez-vous* x^2 *là* ?) n'écoute pas la justification proposée et l'arrête d'un " *Si, si là j'ai compris* " qui ressemble plutôt à un "*Laissez-moi ne pas comprendre* ".

Soit celui qui a posé la question est déjà passé à autre chose soit il ne cherche pas à " traiter " l'information venant du professeur, convaincu qu'il est que le langage dans lequel cette information est donnée lui est étranger. Ou, plus gravement, il a depuis longtemps intégré l'idée que ce qui compte, c'est le résultat et donc il n'a que faire de la démarche qui a permis de l'obtenir.

Alors que faire pour sortir de cette situation démotivante pour l'enseignant et les élèves ?

C'est ce que nous avons tenté en analysant la construction du savoir et en proposant des situations pour favoriser cette construction chez nos élèves.

LE SAVOIR

EN

TROIS QUESTIONS

Notre première recherche a consisté à réfléchir à :

Ce qui donne sens pour l'élève

car nous savons tous pour l'avoir constaté dans nos classes que la logique du novice n'est pas du tout celle de l'expert. La justification d'un calcul par une règle est fondamentale en algèbre. Mais elle ne vaut que si celui qui en a besoin est capable de la trouver seul : la règle apportée par quelqu'un d'autre ne semble guère servir à l'apprentissage.

De plus, l'énoncé de la règle n'est certainement pas la seule façon de donner du sens à ce que l'on fait : nous avons déjà parlé, par exemple, d'illustrations géométriques.

En se mettant à l'écoute des élèves, il nous arrive de repérer des moments où, spontanément, des jeunes s'exclament " ***Ah! Ça y est, là, j'ai compris !*** **".**
En d'autres occasions, c'est nous, enseignants, qui, ayant écouté ce que nous disent les jeunes de leur façon de raisonner, avons d'un seul coup, l'impression de comprendre pourquoi ils ne comprenaient pas.

En relevant ces moments "d'illumination ", et en les analysant, on constate que les circonstances peuvent être très différentes ; en particulier, ce qui va aider à comprendre pour un élève n'est pas forcément convaincant pour son voisin : le sens donné à un travail peut grandement dépendre de la façon d'apprendre de chacun.

Trois questions pour donner du sens

Suivant la spécificité des personnes, suivant leur age, suivant leur degré d'avancée dans l'apprentissage, il nous a semblé que le calcul littéral pouvait prendre sens à partir de la réponse à l'une ou plusieurs des trois questions :

C'est quoi ?
Ça fonctionne comment ?
Ça sert à quoi ?

On répond à la question " **C'est quoi ?** " quand on identifie un type de calcul :
- C'est une équation produit.
- C'est un produit remarquable de la forme...
- C'est une multiplication dont le signe n'est pas écrit...

On répond à la question " **Ça fonctionne comment ?** "quand on peut donner la règle qui va permettre de mener à bien le calcul ou quand, au moins, on peut faire fonctionner un exemple de même type :

- on développe terme à terme...
- on peut se servir de telle formule...
- il faut utiliser la règle des signes de la multiplication...

On répond à la question " **Ça sert à quoi ?** " en mettant en relation le travail en cours avec un environnement plus large :

- nous allons utiliser ce que nous avons vu dans le chapitre précédent...
- les lois qui s'appliquent aux nombres entiers peuvent aussi fonctionner avec des fractions...

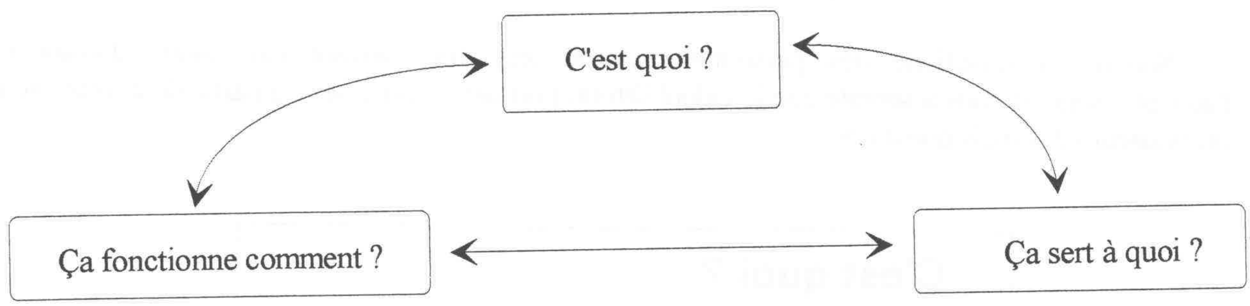
Ces questions ne semblent pas avoir le même statut dans la classe.
Les élèves posent souvent la troisième : " **Ça sert à quoi ?** " mais, sans beaucoup d'espoir d'obtenir une réponse ; ils expriment plus souvent leur conviction que ce qu'ils font ne sert à rien.

Les enseignants répondent volontiers à la seconde question : " **Ça fonctionne comment ?**", mais sans qu'elle se soit posée aux élèves. Ils n'ont alors que peu de chances que la réponse serve.

Quant à la première question " **C'est quoi ?**", elle fait rarement l'objet d'un réel travail pédagogique, convaincus que nous sommes de l'évidence de la réponse... Et pourtant...!

Nous faisons l'hypothèse que, pour un apprenti, le SENS va naître des réponses qui pourront être apportées aux trois questions envisagées et séparément et en articulation.

Pour les besoins de l'écriture, ces dimensions seront présentées successivement.
En fait, il faut les penser de manière triangulaire et en relation l'une avec l'autre.



Chaque entrée par une question correspond à des actions de l'enseignant, des propositions pour la classe. Le passage d'une question à l'autre permet de différencier les activités et de construire des remédiations.

Dans la suite, nous allons examiner chacune de ces façons de donner du sens en les illustrant d'outils pour la classe. Ils ont été élaborés par le groupe de recherche et essayés dans les classes. C'est au fil de ce travail que nous avons pu constater la fécondité du modèle triangulaire ci-dessus.

Donner du sens par la question : C'est quoi ?

1 - Reconnaître la nature d'un travail est une question complexe

Le premier problème qui se pose à l'apprenti en calcul littéral, c'est de reconnaître la nature du travail qu'on lui demande. Il peut disposer d'un certain nombre de règles ; s'il ne sait pas les relier au texte de l'exercice, elles lui seront inutiles. Nous ne traitons ici que les situations simples d'application où le travail demandé reste très proche de la situation d'apprentissage.

Il est très difficile, pour nous autres experts, de décoder comment notre intelligence résout ce type de problème. Car il s'agit bien d'une situation de résolution de problème.

Quand nous lisons un texte de Brevet des Collèges (Aix-Marseille 93) :

> *Recopier et compléter :*
> $25\,x^2 + 30x + 9 = (5x + ...)^2$
> *Résoudre alors l'équation :* $25x^2 + 30x = -9$

Nous saisissons en fait un grand nombre d'éléments :

- Nous lisons globalement le texte (en repérant le " recopier ").
- Nous reconnaissons une autre façon de poser la question " factoriser " (qui est la forme plus habituelle).
- Nous reconnaissons la formule utilisée
- Nous savons que le mot " alors " signifie que cette question fait suite à la précédente et doit donc l'utiliser.
- Nous " voyons venir " une équation produit et nous pensons à transformer.

$25x^2 + 30x = -9$ en

$25x^2 + 30x + 9 = 0$

(A partir de quelle règle de transformation des égalités ?)

Il y aurait, sans doute, bien d'autres éléments à faire intervenir ; et, de surcroît, ce ne sont pas les mêmes pour chaque personne !

Pourtant, ce problème est bien posé dans les " petites questions " des travaux numériques du brevet. Nous commençons à entrevoir tous les problèmes qui se poseront avec des questions de transfert plus lointain...

2 - Travail pédagogique autour du " C'est quoi ? "

Comment pouvons-nous aider nos élèves à apprendre à reconnaître la nature du travail qu'on leur demande ?

Nous avons bien conscience que tout apprentissage est toujours très global. Mais pour pouvoir agir, il nous faut séparer les problèmes. Une des entrées est la construction aussi précise que possible des " briques " élémentaires de savoir, construction qui met en relation étroite leur reconnaissance et leur fonctionnement.

Reprenons l'exemple ci-dessus :

$a^2 + b^2 + 2ab$: il faut pouvoir reconnaître et traiter un développement de ce type pour le factoriser.

Il est certain que la reconnaissance d'un tel exercice passe, pour nous, experts, par l'utilisation d'indices de surface c'est à dire de l'aspect même de l'écriture. Mais nous avons appris **à sélectionner automatiquement les indices pertinents** et, surtout, nous pouvons, en cas de besoin, nous référer à des règles fiables. C'est ce que les apprentis vont devoir exercer.

Cela passe par un grand nombre d'exercices de construction :

A quoi reconnaît-on un tel développement? Enoncer les critères de reconnaissance.

Les écritures $a^2 + 2ab + b^2$ et $a^2 + b^2 + 2ab$ représentent-elles le même objet ? Pourquoi ?

Quelles différences voyez-vous entre les écritures ?

$a^2 + b^2 + 2ab$ $\qquad$ $a^2 + b^2 - 2ab$ $\qquad$ $a^2 - b^2 + 2ab$ $\qquad$ *etc...*

Vous trouverez dans les fiches d'exercices proposées de très nombreux exemples inspirés par le souci de construire cette reconnaissance de l'objet mathématique traité.

Une fiche type présentant les produits remarquables en troisième se trouve en fin de ce chapitre (voir page 13)

3 - Repérer les " fausses règles "

Ce n'est qu'une longue construction de ce type qui pourra aider nos élèves à trouver les bons critères. Bien souvent, au contraire, ils se servent d'indices " à eux " qui ont paru corrects dans certains cas et auxquels ils se sont attachés.

Il y a un travail très intéressant pour le professeur à écouter les élèves expliquer leur idée. C'est souvent le seul moyen de comprendre ce qui se passe dans leur tête quand leurs productions sont tantôt correctes et tantôt fausses d'une manière qui pourrait paraître aléatoire.

Voici un exemple de dialogue avec une élève :

Virginie et le professeur :

P - *J'ai pensé qu'il fallait que nous prenions le temps de réfléchir ensemble car tu es gênée par des erreurs en calcul. Sais-tu à quel moment tu te trompes ? sur quel genre d'exercice ?*
V - *Oui, c'est quand il y a des " moins ".*
P - *Veux-tu travailler au tableau ? Ecris un exercice qui te pose problème.*
Virginie écrit (+3) - (-7)
P - *Que te dis-tu quand tu dois faire cet exercice ?*
V - *Je regarde s'il y a deux signes pareils et alors, il faut les changer* (elle montre de la main les deux signes " moins " de son calcul)
P - *Ecris le nouveau calcul.*
V - *Elle écrit :* (+3) + (+7)
P - *Comment ferais-tu le calcul* : (+5) - (+8) ?
V - *Là ça change pas.*
P - *Et* (+7) + (+2) ?

V - *Là, on change ; ça fait* (+7) - (-2)
P - *Et* (-9) - (+2) ?
V - *Euh !... On change... Non, on ne change pas quand les deux "pareils" sont au début.*

Les enseignants qui lisent ce dialogue auront bien reconnu leurs élèves. Bien sur, la règle inventée par Virginie :
"Je change le signe de l'opération et le signe du deuxième nombre quand ils sont identiques" ne lui permet pas de traiter correctement les calculs mais elle paraît bonne dans suffisamment de cas pour qu'elle ne la remette pas en cause ; elle se contente de dire que, parfois, elle " a faux " sans savoir pourquoi.

On peut, de surcroît faire l'hypothèse que, dans les débuts d'application de la règle de soustraction, le professeur a proposé beaucoup d'exercices de soustraction d'un nombre négatif, pensant que c'est surtout là que se posent les problèmes. Virginie a pu en déduire que sa règle marche " presque toujours ".

Il est bien évident que ce n'est que dans l'écoute attentive d'un élève que l'on peut connaître ce genre de représentation que nous aurions bien du mal à imaginer. Pourtant, c'est la seule manière de pouvoir aider cette élève. Les répétitions d'exercices, ainsi que l'énoncé d'une règle correcte dont elle ne tient pas compte ne lui permettront pas d'avancer.

Pour lutter contre ces erreurs, il est indispensable de **faire énoncer aux élèves les critères de reconnaissance dont ils se servent**. Ce n'est qu'à un niveau supérieur d'expertise qu'ils pourront se fier à ce qui pourra paraître de " l 'intuition " (car très raccourci mentalement) mais qui est en fait un savoir très construit qui est devenu automatisme. Il nous faut aider les élèves à sortir de cette illusion de l'intuition en leur apprenant à construire ce savoir. Il faut, pour cela, les convaincre qu'ils peuvent y accéder donc le formaliser.

C'est à partir de ces constats de difficultés énoncées par les élèves que nous avons bâti un grand nombre d'exercices visant à répondre à cette question :

" C 'est quoi? "

4 - Pour reconnaître le travail demandé, jouer sur la comparaison.

Il s'agit, particulièrement, de travailler sur la forme des écritures algébriques en faisant dire aux élèves à quoi ils reconnaissent ces formes. L'activité mentale essentielle est le travail de comparaison, la recherche des ressemblances et des différences.

C'est en écoutant ce qu'ils disent que le professeur découvrira beaucoup d'éléments permettant de comprendre la nature des confusions qui sont les leurs et éviter des erreurs prévisibles par un travail en amont. Ainsi nous pourrons, au fur et à mesure, inventer les exercices adaptés à un type de confusion précis pour convaincre les élèves de corriger leurs erreurs.

Une notion ne peut que rarement être vue dès le départ avec toute la variété des exemples qui pourraient permettre d'en appréhender toute la complexité. Mais au cours de l'année, au cours des années même, de nouveaux exemples deviendront accessibles et devront réinterroger la construction faite sur la notion. Des contre-exemples à la frange de la notion seront mis en relief chaque fois que possible. Une notion est toujours une construction dans le temps, il faut donc stimuler des activités de comparaison bien au-delà de la première approche d'une notion.

L'écoute des élèves et l'analyse des erreurs qu'ils commettent nous ont fait changer un type de fonctionnement qui était habituel dans nos classes et qui correspond bien à une logique de déroulement d'un cours : construire d'abord avec le plus de fiabilité possible une première notion avant de passer, dans un second temps à une autre qui est voisine.

Nous avons pu constater, sur de multiples exemples, que l'on gagne considérablement en savoir fiable en proposant directement aux élèves d'aborder en comparaison deux notions voisines.

Par exemple au lieu de travailler d'abord l'équation $a+x=b$
puis, quelque temps plus tard sur $a \times x = b$,
nous construisons ces deux types d'équations ensemble en jouant sur les ressemblances et les différences. On peut éviter beaucoup de confusions en fonctionnant dès le début de l'apprentissage autour des approches :

- C'est presque pareil mais...
- On reconnaît la différence à ...
- Ceci est du premier modèle, l'autre du second...
- Cette équation est différente, elle n'appartient ni au premier ni au second modèle.

Dans ce travail de reconnaissance de l'exercice à traiter, d'autres éléments entrent en jeu, comme, par exemple, la lecture des consignes, la forme particulière des questions posées dont nous savons tous combien les élèves en difficulté ne les prennent pas en compte. Là aussi, il y a des pistes d'exercices très intéressantes à explorer.

Nous verrons plus loin que ces approches sont très souvent articulées avec la question " Ça fonctionne comment ". C'est, par moments, une difficulté. C'est aussi une chance pour la construction de savoir fiable car les deux entrées s'aident mutuellement et, suivant leur forme d'intelligence personnelle, les élèves peuvent être plus intéressés par l'une ou l'autre approche.

Dans un premier temps ces pratiques peuvent paraître gourmandes en temps, cependant sur le long terme, elles se révèlent comme un gain de temps, ayant favorisé une construction de savoir efficace.

Un exemple de travail sur " C'est quoi ? "

Introduction des produits remarquables en classe de troisième.
Ce travail prend place au début du second trimestre. Les élèves ont longuement travaillé sur l'utilisation de la formule de développement double.

Objectifs :

- Construire la reconnaissance des formes des trois produits remarquables (travail en comparaison pour traiter à la source les risques de confusion entre les différentes formules).
- Continuer l'apprentissage de l'écriture d'une formule littérale pour rendre compte d'une forme générale identifiée.

Ce travail se déroule en équipe.

Consignes :

Vous voyez au tableau des expressions Vous disposez d'un jeu de petites étiquettes, des blanches et des vertes. *1) vous développez et simplifiez toutes les expressions proposées. Vous pouvez vous répartir le travail dans l'équipe mais, attention, vérifiez que le copain ne s'est pas trompé ! Vous écrivez chaque expression et son résultat développé et simplifié sur une étiquette blanche.* *2) Vous classez vos étiquettes en " familles "qui ont l'air de fonctionner de la même façon.* *3) pour chaque famille retenue, vous proposez une formule permettant de calculer plus vite le résultat final. Ecrivez la formule sur une étiquette verte.*

Tableau donné aux élèves :

$A = (x\text{-}5)(x\text{-}5)$ $B = (2a+1)(2a\text{-}1)$ $C = (x\text{-}3)(x+5)$ $D = (x+2)(x+2)$ $E = (5+b)^2$ $F = (x\text{-}5)(x+5)$	$G = (y+8)(y+8)$ $H = (x\text{-}1)(x\text{-}1)$ $I = (2x+1)(2x+1)$ $J = (x\text{-}7)(x+2)$ $K = (x+5)(x\text{-}5)$ $L = (x\text{-}8)^2$	$M = (x\text{-}1)^2$ $N = (x+2)(x\text{-}3)$ $O = (a\text{-}3)(a\text{-}3)$ $P = (x+1)(x+1)$ $Q = (y\text{-}2)(y\text{-}2)$ $R = (x+2)(x\text{-}2)$

NB : étant donnée la grande variété des critères à faire apparaître, il est très difficile de choisir les calculs proposés.
On s'est volontairement cantonné à un travail sur les entiers.

Travail du premier jour (35 mn)

Le travail de calcul est lent et difficile. Je suis appelée pour arbitrer des débats. Certains amènent des remarques générales : "*Tous les +/- vont ensemble*". *"On trouve forcément un 5x dans un sens et un autre 5x dans l'autre sens* "...

Problèmes de consignes:

- Est-ce qu'on peut mettre deux expressions sur la même étiquette ? Je rappelle le classement.
- Est-ce qu'il faut aussi écrire sur l'étiquette ce qu'on avait au départ ? Je fais réfléchir aux critères de classement possibles : le classement peut se faire en regardant à la fois le "départ" et "l'arrivée".
- Une équipe refuse de se servir des étiquettes : ce sont deux redoublants qui ont reconnu le thème, ils se rappellent plus ou moins les formules apprises par coeur mais ne savent pas les utiliser. Je les laisse travailler sur leur feuille en les invitant à refaire les calculs proposés pour voir comment s'utilise la formule (retrouver les expressions qui relèvent d'une formule). Ils parviendront à retrouver l'utilisation.

En fin de séance plusieurs équipes n'ont pas terminé les calculs. Ils réclament du temps pour finir. Nous décidons qu'ils se répartiront les derniers calculs à faire à la maison et que, le lendemain, ils disposeront de 5 mn pour vérifier.

Travail du 2ème jour (50 mn)

1) 5 mn pour accord sur les calculs.
2) J'affiche au tableau des étiquettes avec les résultats . Chaque équipe vérifie les siens ; je réponds à quelques demandes d'explication.
3) On classe et on cherche des formules.
4) Mise en commun au tableau. Classement des étiquettes tableau.

Classement le plus "serré" :

Tous les carrés $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$	Tous les +/- $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$	Les autres $(x + b)(x - c)$

Toutes les formules proposées sont correctes. Des expressions sont écrites aa ou $2xaxb$. Les propositions de réduction de l'écriture se font facilement (il y a toujours une équipe qui a réduit l'écriture).

Par contre un débat reste plus difficile : faut-il mettre des a ou des x ?

Classement le plus "large" :

$(x-8)^2$ $(x - a)^2$	$(x+2)^2$ $(x + a)^2$	$(2x+1)^2$ $(ax + b)^2$	$(x+2)(x-2)$ $(x + a)(x - a)$	$(2x+1)(2x-1)$ $(ax + b)(ax - b)$	$(x-3)(x+5)$

Le débat est long et âpre ! On retrouve le problème a ou x .Les partisans des formules réduites arrivent à faire admettre que $2x$ est " un bloc" . On teste les formules type $(A+B)^2$ pour reconnaître que cela fonctionne. Par contre je me sens tenue d' introduire les deux formules habituelles $(A+B)^2$ et $(A-B)^2$ alors que la classe semblait très bien s'en passer.

Il est intéressant, à partir de ce constat, de faire reconnaître qu'une formule choisie n'a pas une valeur de modèle universel. Elle est simplement reconnue comme utile par un groupe ou une personne à un moment donné de son apprentissage. Ainsi, il peut être intéressant (bien qu'un peu difficile à gérer) de laisser les élèves écrire des formules différentes suivant leur niveau personnel d'abstraction.

Donner du sens par la question : Ça fonctionne comment ?

Si chacun des pôles est traité séparément ce n'est pas pour rendre compte d'une dichotomie existante, mais bien pour la commodité de l'exposé. En effet, le calcul littéral est une activité complexe, et les différents pôles seront toujours, plus ou moins, en interaction.

De même qu'il faut identifier le problème, il faut aussi connaître les règles de fonctionnement. Pour acquérir ces règles de fonctionnement, il ne suffit pas de les apprendre par coeur, puis de les appliquer à des exercices répétitifs. Il est intéressant donc de choisir des activités qui vont permettre de **construire les règles de fonctionnement** dans leurs différents aspects.

Maîtriser le fonctionnement, c'est tout à la fois être capable d'expliquer ce que l'on fait, posséder des procédures de validation efficaces, pouvoir dire "*ça fonctionne comme...*" ou encore reconnaître dans une nouvelle situation qu'elle ne peut fonctionner que comme telle autre déjà rencontrée. On retiendra donc trois fonctions principales à maîtriser :

- Explication
- Reconnaissance d'un modèle
- Vérification

Mais il est clair que cette distinction n'est ni simple, ni chronologique. Il s'agit plutôt des différents schémas mentaux que doivent mettre en oeuvre les élèves, au sein d'une même activité, au travers de multiples allers et retours afin d'être efficaces. Toutefois des activités gagnent à être élaborées en privilégiant l'un ou l'autre des aspects ; elles jouent un rôle important dans la re-médiation. Avoir repéré que la difficulté de certains élèves relève plutôt d'un manque de procédures de validation que de la capacité à expliquer ce qu'ils font, permet à l'enseignant de mieux cibler ces activités de re-médiation, cela évitera de ré-expliquer ce qui serait du temps perdu ici.

Bien souvent **ce qui manque le plus aux élèves, c'est une bonne reconnaissance du contexte** dans lequel on peut appliquer la procédure : soit ils généralisent abusivement la forme à laquelle on l'applique, soit au contraire ils la restreignent exclusivement au contexte dans lequel ils l'ont déjà abordée.

Nous allons l'illustrer par l'utilisation de la distributivité.
Ils l'ont souvent rencontrée au travers du calcul numérique, par exemple pour le calcul mental :
$$11 \times 12 = 11 \times (10 + 2) = (11 \times 10) + (11 \times 2)$$
Ils ont noté une formule : $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$, puis ils l'ont exploitée dans le calcul littéral dans des tâches de développement. Cependant, certains élèves vont la généraliser sous la forme: $a \times (b \times c) = (a \times b) \times (a \times c)$.

Ce n'est pas qu'ils confondent l'addition et la multiplication, mais simplement qu'ils généralisent abusivement une règle, faute d'avoir clairement identifié ce qui la caractérisait. D'autres au contraire ne vont pas l'appliquer quand les nombres sont des fractions ou des racines carrées parce que, en classe, cela ne s'était pas encore rencontré !

Il est donc utile alors de bâtir des fiches d'activité mettant l'accent sur chacun des aspects qui suivent:

❑ Pour aider les élèves qui n'arrivent pas à expliquer on pourra proposer des activités visant **l'élaboration d'organigrammes, de programmes de calcul** ou toute autre symbolisation permettant de rendre compte à la fois de la globalité et de la chronologie d'une méthode. Une variété de représentations sera toujours préférable, les élèves ne rentrant pas tous dans les mêmes codifications. Le langage narratif : "J*e fais ça, puis ça*" est un mode à proposer, mais il ne convient pas à tous. Si l'on se réfère à la gestion mentale, il conviendra mieux à un élève auditif que visuel.

Dans le cahier d'évaluation de seconde, on trouve l'exercice suivant :

Etape 1	*Soit un nombre de départ que l'on nomme x*	x
Etape 2	*Prendre son double puis ajouter 3*	$2x + 3$
Etape 3	*Prendre le carré du résultat*	$(2x + 3)^2$
Etape 4	*Diviser le résultat obtenu par 2 puis retrancher 30*	$\frac{(2x+3)^2}{2} - 30$

Cet exercice pourra être prolongé, par l'activité "expressions faxées" (page ci-contre), inspirée des cahiers d'évaluation de seconde.

❑ Pour aider les élèves qui n'ont pas une bonne **reconnaissance du modèle**, on proposera des activités de tri, qui permettent de mettre en relation un grand nombre de contextes. L'objectif n'est pas de faire les calculs, mais seulement d'identifier ceux qui relèvent d'un même traitement. L'activité de tri gagnera toujours à être accompagnée d'un temps où les élèves puissent dire **à quoi on reconnaît que ces problèmes relèvent d'une même résolution et à quoi on reconnaît que tels autres n'en relèvent pas**. Si l'on se replace dans l'exemple de la distributivité, cela permettra que se disent : " *il y a un nombre ou une lettre devant les parenthèses, il y a une multiplication devant les parenthèses, il y a une addition à l'intérieur des parenthèses; ça sert à faire du calcul mental ou à développer des expressions; il peut y avoir des x des a et des b, des fractions, des racines carrées...*"

❑ Pour aider les élèves à élaborer des **procédures de validation**, on pourra proposer des fiches auto-correctives, et les inciter ainsi à rechercher leurs erreurs, et donc des stratégies pour les identifier et les corriger. L'utilisation de fiches auto-correctives nécessite un temps d'apprentissage en classe. Les élèves sont peu habitués et peu enclins à effectuer un travail dont ils connaissent la réponse et encore moins à rechercher pourquoi ils ne trouvent pas la réponse attendue. Beaucoup d'entre eux sont satisfaits d'avoir trouvé un résultat, même si ce n'est pas le bon ! Ce travail de validation va **permettre de passer de la recherche d'un résultat à l'explicitation d'une démarche.** Cette autonomie gagnée est d'importance, elle permet, entre autres, de travailler avec les exercices des manuels scolaires dont les réponses sont données.

On pourra aussi proposer des vérifications dans un autre cadre (cf exemples p.64) où un regard sur les représentations graphiques permet de valider la résolution d'équations). La calculatrice est un outil qui pourra se montrer très utile dans ce but.

EXPRESSIONS FAXEES

Consigne :

> *Tu dois permettre à ton voisin de recopier la même expression algébrique que celle que tu as sous les yeux en lui donnant toutes les étapes du calcul, comme dans le cahier d'évaluation de 2nde.*
> *Tous les échanges ne doivent se faire que par écrit, pas de gestes, ni de paroles !*
> *Quand ton voisin a également fini, vous pouvez comparer les expressions produites, avec celles que vous pensiez transmettre, et alors éventuellement modifier le message (par écrit).*

Expressions algébriques données aux élèves

Chaque élève dispose de l'une de ces six fiches :

$7-\dfrac{3}{4(x+1)^2}$ $(7x+5)^2-3$ $5-4x^2$ $1-\left(\dfrac{3}{7x}\right)^2$ $\dfrac{5}{4(x^2+1)}$	$8-2x^2$ $(5x+7)^2-3$ $1-\left(\dfrac{4}{8x}\right)^2$ $\dfrac{5}{8(x^2-3)}$ $13-\dfrac{2}{3(x+4)^2}$
$\dfrac{5}{3(x^2+4)}$ $(4x+2)^2-8$ $7-3x^2$ $13-\dfrac{4}{3(x+2)^2}$ $1-\left(\dfrac{4}{3x}\right)^2$	$1-\left(\dfrac{3}{7x}\right)^2$ $(5x+2)^2-4$ $7+\dfrac{2}{3(x+4)^2}$ $9-27x^2$ $\dfrac{4}{7(x^2+4)}$
$1-\left(\dfrac{4}{8x}\right)^2$ $\dfrac{5}{3(x^2+4)}$ $5-4x^2$ $7-\dfrac{2}{3(x+4)^2}$ $(8x+2)^2-7$	$9-27x^2$ $13+\dfrac{2}{3(x+4)^2}$ $\dfrac{5}{8(x^2-3)}$ $(7x+5)^2-3$ $1-\left(\dfrac{4}{3x}\right)^2$

Cette activité pourra être adaptée en sixième, en utilisant des expressions numériques.

JEU DE TRI

L'activité suivante se déroule en classe de quatrième :

Consigne :

Dans chaque groupe on portera son classement sur une affiche

Document élèves :

Quand la question posée est « écrire plus simplement », quels sont parmi ces textes ceux qui vous paraissent fonctionner de la même façon ?

Proposer un classement, et donner ce fonctionnement pour chaque groupe.

$A = 7x + 5x$	$B = \frac{3}{4} + \frac{7}{4}$	$C = x \times 5$
$D = 3 \times a + 5 \times b$	$E = 3 \times 9x$	$F = 7x \times 2$
$G = \sqrt{2} \times 3$	$H = 5\pi + 3\pi$	$I = a + 5a$
$J = 5\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$	$K = \frac{2}{17} + \frac{5}{17}$	$L = 2x \times 3x$
$M = -3a - 5a$	$N = 3 + \sqrt{2}$	$O = \frac{3}{4} \times \frac{7}{5}$
$P = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x^2$	$Q = 2 - 5x^2$	$R = -3y + 8y$

On peut constater dans ces exemples que, même si l'accent est mis autour de la question " Ça fonctionne comment ? ", elle amène au moins en partie à répondre à la question " Ça sert à quoi ?", puisque ce tri permet toujours d'identifier une large famille d'application. Mais ces activités de tri répondent tout autant à la question " C'est quoi ? ", puisqu'il s'agit avant tout de reconnaître et de décrire les objets mathématiques qui fonctionneront de façon semblable.

Même si, au départ, l'accent est mis sur l'une des trois questions, il est possible de faire savoir aux élèves la relation avec les autres en prolongeant le travail.

Donner du sens par la question : Ça sert à quoi ?

1. Les élèves se posent la question

Chacun d'entre nous, enseignants de collège ou de lycée sait bien comme l'absence d'utilité donnée à ce qu'ils font caractérise nos élèves en difficultés. Les plus hardis posent la question : " *A quoi ça va servir ce qu'on fait là Monsieur* ? "

La question semble recevable mais le ton sur lequel elle est posée est, souvent, fort irritant pour l'enseignant par tout ce qu'il suppose d'incrédulité a priori...

A côté d'eux, d'autres disent à mi-voix : " *Tout ça, ça sert à rien* !"

Quant aux élèves en échec, nous les entendons murmurer entre eux : *" Fais ce qu'il te dit et ne cherche pas à comprendre ; c'est nul* ". Ce qui, pour eux, exprime bien le non-sens de l'école.

Nous savons bien, par contre, que les élèves qui réussissent à l'école ont appris (souvent de leur famille) que le travail qu'ils font a du sens même si, provisoirement, ils ne peuvent pas le saisir.

Aider les élèves à donner du sens à ce qu'ils font, c'est donc une façon de lutter contre l'échec scolaire, c'est donner une motivation aux apprentissages que nous proposons. C'est aussi, pour nous enseignants, nous motiver car il est particulièrement démoralisant de se heurter sans cesse au non-sens.

2. Elargir le champ des réponses

On a déjà en partie répondu dans les chapitres précédents, à la recherche du sens des apprentissages. En entrant par les questions " C'est quoi ?" et " ça fonctionne comment ?", nous avons travaillé sur les structures : nous avons donné un **sens " interne"** au calcul littéral.

Il s'agit pour nous maintenant de rechercher des pistes pour **ouvrir à d'autres domaines** d'applications les apprentissages en cours. Les possibilités offertes sont très nombreuses et variées et c'est heureux.

❑ Les calculs littéraux peuvent permettre de résoudre des **problèmes de la vie courante**, par exemple. Les équations sont des outils très puissants face à des questions qui sont très complexes par une approche arithmétique.

Certains jeunes dont l'intelligence pratique est dominante peuvent se trouver bien de cette entrée par la vie courante. C'est, en particulier une des propositions fortes des classes technologiques où les apprentissages fondamentaux sont présentés comme mis au service de problèmes posés par la technologie.

❑ Les questions abordées en cours vont permettre d' aborder, un peu plus tard, des **problèmes complexes**. Par exemple : le travail des factorisations prend tout son sens quand on découvre qu'il permet de résoudre des équations du second degré jusqu'alors insolubles. Il est intéressant pour le professeur de se demander quand il pourra faire saisir à ses élèves cette mise en relation. Il est vrai qu'il est souvent difficile, en particulier au collège, de faire entrevoir aux élèves à quoi servira le travail en cours : nous jouons alors sur le crédit de confiance que nous avons pu créer.

Il est, par contre, possible, dans certains cas, de lancer un apprentissage par une situation problème qui vise à poser d'abord une question avant de rechercher les outils manquants pour la résoudre.

Par exemple : première approche des équations en quatrième.

Les élèves ont le souvenir d'avoir cherché, en cinquième, le nombre manquant dans une égalité mais aucun apprentissage de techniques de résolution n'a été proposé.

Question problème :

> *"Pierre et Marie se donnent un même nombre.*
>
> *Pierre multiplie le nombre par 3 et ajoute 8 au résultat.*
>
> *Marie multiplie le nombre par 5 et retranche 4 du résultat.*
>
> *Tous deux s'aperçoivent alors qu'ils ont obtenu le même nombre final.*
>
> *Pouvez-vous deviner le nombre dont ils sont partis?*
>
> *Quels calculs faites-vous pour le trouver ?*

Après cette première approche, il est possible de poser le même problème aboutissant à un nombre de plusieurs chiffres, puis non-entier, puis fractionnaire...Etc..

Ce n'est qu'à partir de ces activités que seront inventoriées des procédures de résolution.

Bien entendu, il faudra ensuite un travail d'automatisation de ces démarches de résolution. Mais on peut penser que les élèves leur donneront plus de sens que lorsque ces procédures sont présentées a priori sans qu'il soit possible de deviner à quoi elles serviront.

Dans le cas où la progression choisie travaille d'abord sur l'utilisation d'une formule pour pouvoir en disposer, le professeur pourra, dès que possible, mettre en relation cet outil avec les problèmes qu'il permet de résoudre.

En fait, l'une et l'autre entrée (situation problème et apprentissage automatique de la démarche de calcul) se succèdent et se complètent. Cela permet aux élèves différents de trouver l'entrée qu'ils préfèrent et de la mettre en relation avec l'autre, donnant ainsi le maximum de sens à ce qu'ils font. Cette question difficile de la place respective de la mécanisation et du sens est reprise plus loin dans ce livre.

❑ Les mathématiques sont aussi des instruments à la disposition des **autres sciences.** Il est très utile pour nous de savoir ce que les programmes de physique, biologie ou histoire utilisent pour entraîner nos élèves à faire ces mises en relation. Il y a là, d'abord, pour nous, une occasion de montrer aux élèves un intérêt des calculs qu'ils apprennent à faire en cours de mathématique. Au-delà, c'est la dimension de transfert des apprentissages que nous abordons. Bien souvent, on reproche aux élèves de ne pas appliquer les outils mathématiques. Ce n'est pas mauvaise volonté de leur part : ils ne reconnaissent pas les circonstances nouvelles, les problèmes d'aspect différent qui pourraient être résolus par les procédures apprises ailleurs. Il est particulièrement important pour nous de les entraîner à reconnaître ces situations, à changer de langage. Ils n'en deviendront capables que si nous le faisons avec eux, explicitement.

❑ A l'intérieur même du cours de mathématique, il est possible d'aider les élèves à trouver du sens en changeant **le cadre des travaux** : en géométrie quand on utilise des procédures de calcul... Les exemples sont nombreux et très fructueux, on peut citer la recherche de la longueur d'un côté d'un triangle rectangle, en utlisant le théorème de Pythagore ou le cosinus, en classe de quatrième. Encore faut-il y penser en construisant nos séquences de cours. Ces approches variées, outre qu'elles aident le transfert, permettent aussi de prendre en compte les différences personnelles entre les élèves.

Cette situation est un autre exemple de changement de cadre, il se déroule en 6ème ou en 5ème. C'est une situation problème, qui peut être proposé en sixième ou en cinquième.

Résoudre une équation :

Pierre choisit un nombre, il le multiplie par 12, il additionne 42 et au résultat obtenu, il soustrait le triple du nombre qu'il avait choisi au départ. Il obtient finalement 185.

Les élèves traduisent le problème avec une écriture algébrique :

$$\square \times 12 + 42 - (\square + \square + \square) = 185$$

D'autres traductions sont possibles :

$$\square \times 12 + 42 - 3 \times \square = 185 \quad \text{ou} \quad x \times 12 + 42 - 3 \times x = 185$$

Les élèves constatent la difficulté et après un moment, pour les aider, je leur propose une histoire qu'il devront schématiser :

Mon ami m'avait emmené dans un pays imaginaire, de l'autre côté de l'océan. C'était début juillet. Il faisait chaud et la lumière était très belle. Dans ce pays les maisons n'étaient pas comme chez nous : elles étaient très hautes, les immeubles étaient très, très hauts. Ils apparaissaient très étroits tellement ils étaient hauts.

Georges, c'était le nom de mon ami, a voulu me montrer le paysage que l'on voyait du dessus de son immeuble. Nous avons pris l'ascenseur, nous avons monté 12 étages. Il a voulu me faire essayer les escaliers pour nous élever de 42 mètres avant d'arriver à la terrasse sur le toit de son immeuble. Je n'ai pas été déçu. On apercevait des montagnes au loin, la vue était magnifique. Il m'a alors proposé un autre point de vue, trois étages plus bas. Là l'orientation n'était pas la même et nous pouvions apercevoir l'océan. Sur cette deuxième terrasse il me dit que 185 mètres nous séparaient du sol et il me suggéra de calculer la hauteur de chaque étage.

Alors chacun d'entre vous va calculer ce nombre et, pour que ce soit plus facile, on fera un schéma.

Et, quand l'imagination prend le pouvoir, pourquoi pas la table de multiplication en anglais ?

❑ D'une manière plus étroite, il est important, à l'intérieur du cours d'aider les élèves à repérer à quoi sert un savoir particulier. Par exemple: ce n'est pas parce qu'on vient d'apprendre la formule : $(a - b)^2$ qu'il faut l'appliquer au calcul de $(7 - 3)^2$... comme le font facilement un grand nombre d'élèves. En se posant la question " ça sert à quoi ? " il s'agit alors pour nous de sortir d'applications non réfléchies et sources d'erreurs.

❑ Mais le dernier sens, le seul qui garantisse une motivation qui ne s'arrêtera pas c'est le plaisir de jouer avec son intelligence. Nous savons bien ce que nous apporte l'envie de trouver et le bonheur du " *Eurêka* ! ". C'est à cela que nous invitons nos élèves. Les occasions de " **jouer les maths** " sont heureusement nombreuses et c'est le désir de l'enseignant de voir ses élèves s'affronter à une recherche et pouvoir dire " *J'ai trouvé* ! "

Nous avons été étonnés de l'intérêt que portaient des élèves à des activités de calcul littéral parce qu'elles étaient présentées sous forme ludique, comme par exemple avec le carré magique ci-dessous. L'investissement et le taux de réussite à cette activité ont été bien meilleurs que si les mêmes calculs avaient été présentés en lignes !

Consigne :

Compléter le carré magique ci-dessous, sachant que le produit de chaque ligne et de chaque colonne est toujours le même.

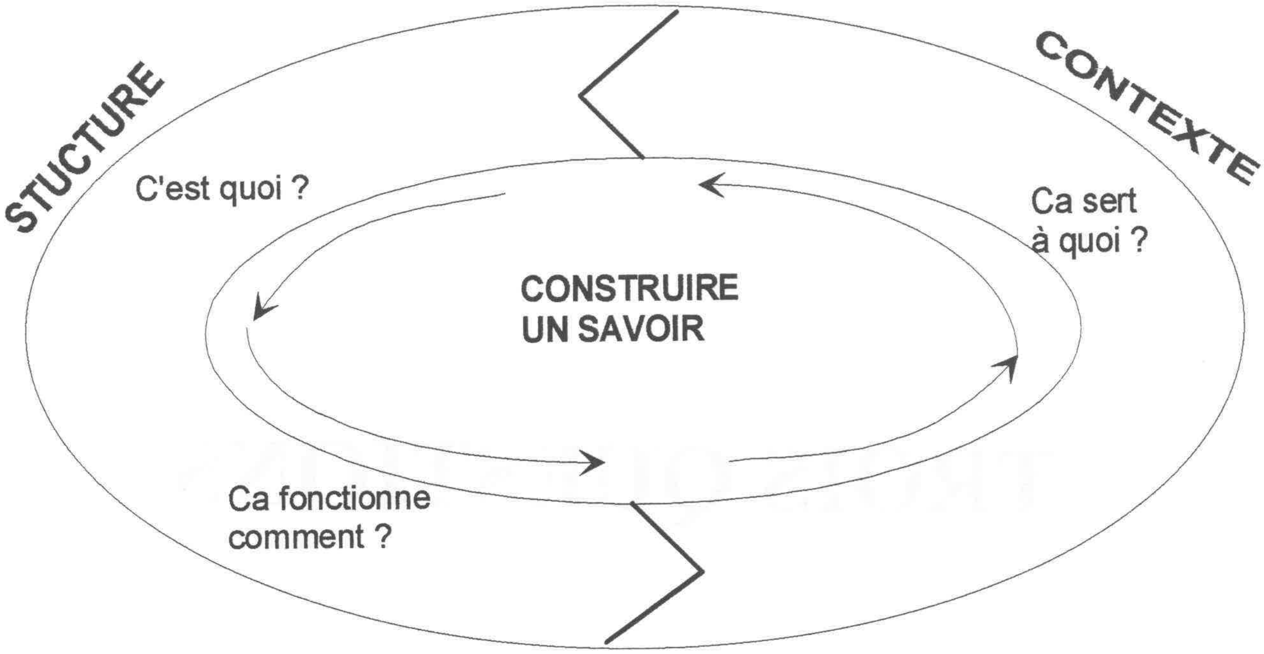
ab^4	$9a^4$	
	$3a^2b^3$	
	b^6	

Les manières très diverses de tenter de répondre à la question "ça sert à quoi ? " donnent une idée de la richesse de cette approche qui n'est pas entièrement développée.

Le chapitre suivant reprendra l'étude de cette question pour faire apparaître son rôle central dans le transfert des savoirs.

Cette variété d'approches va nous permettre "d'accrocher" des élèves très différents qui trouveront de l'intérêt à l'une ou l'autre entrée qui correspond le mieux à leur façon d'apprendre.

En résumé :



En conclusion :

Ce premier schéma, qui sera complété dans le chapitre suivant, situe nos trois questions. Deux d'entre elles sont plus sur le côté "structure", la troisième sur le côté "contexte". Mais ce qui est fondamental, c'est leur articulation, le fait qu'elles contribuent, chacune à sa façon, de manière indispensable à la construction du savoir.

Ce tissage très serré explique le côté parfois artificiel de leur séparation. Si le groupe de travail I.R.E.M. a maintenu ces trois questions, c'est parce que les participants ont constaté l'intérêt de cet outil pour la recherche didactique : il a permis d'interroger toutes les séquences de classes produites pour vérifier l'objectif auquel elles étaient particulièrement attachées. Il a appelé de nouvelles productions quand certains aspects du savoir paraissaient moins présents.

TROIS QUESTIONS

A

FAIRE VIVRE

DANS LA CLASSE

Nous venons de structurer le savoir mathématique à travers trois questions :

C'est quoi ?
Ça fonctionne comment ?
Ça sert à quoi ?

Les deux premières questions définissent le fonctionnement interne du savoir, sa structure propre. Ce sont celles que l'on se pose quand on envisage la définition de l'objet d'étude puis les exercices d'application.

La troisième question introduit un ordre de savoir complètement différent : ce sont les contextes, l'environnement dans lesquels cet objet est appelé à vivre.

Les enseignants le savent bien : autant il est pensable de travailler sur un objet de savoir en se centrant sur lui, autant il est difficile d'en assurer la disponibilité en transfert. Dès que la situation de travail change, dès que le temps a passé, les savoirs qui semblaient acquis disparaissent.

Dans la suite, nous allons envisager des fonctionnements qui, dans la classe, doivent permettre d'aider ce transfert.

Construire un savoir disponible en mémoire

Ces dernières années, de nombreux auteurs ont repris les données de la psychologie cognitive pour une approche pédagogique de la mémoire à long terme (voir bibliographie).

Il semble utile ici de rappeler rapidement la conception de la mémoire à long terme en :
" Mémoire épisodique "
" Mémoire sémantique ".

La mémoire épisodique, c'est celle que nous avons des " épisodes " de notre vie, quelque chose qui est arrivé dans notre histoire personnelle.

Par opposition, **la mémoire sémantique** stocke des objets plus ou moins détachés des circonstances dans lesquelles ils ont été rencontrés. C'est le cas, en particulier, des mots du langage courant qui deviennent disponibles rapidement quand on les recherche en mémoire. Bien entendu, c'est ce type d'entrée en mémoire que nous recherchons pour le langage algébrique.

Malheureusement, le plus souvent, nous avons en classe des dialogues du type : " *Comment, vous ne reconnaissez-pas*.......(complétez avec les objets mathématiques qui vous sont habituels !). *Pourtant vous l'avez vu dans le chapitre 6* ! "

Bien sur, ils l'ont " vu " mais c'est resté un épisode de leur histoire. D'ailleurs, quand on fait un appel à la mémoire de ces souvenirs égarés, c'est souvent à partir d'une recherche d'indices caractéristique de la mémoire épisodique : c'était dans un problème..., à propos d'un triangle rectangle..., vous étiez en travail sur fiche..., nous l'avons noté sur le classeur...etc...

Nous ressentons bien à quel point, pour la conduite de la classe, il est capital de dépasser ce stade du " jeu de piste dans la mémoire " pour : **rendre les apprentissages disponibles en mémoire sémantique**.

Pour un savoir transférable : décontextualiser

Pour réfléchir à une démarche favorisant l'acquisition de ces compétences, nous emprunterons à Philippe Meirieu la démarche qu'il propose (voir bibliographie).

La construction d'un savoir tranférable doit passer par l'articulation de trois activités mentales :

Contextualiser - décontextualiser - recontextualiser.

1. Contextualiser :

Les premières approches d'un concept sont inévitablement vécues dans un contexte.Pour faciliter la motivation à apprendre, il est nécessaire que ce contexte soit parlant pour les élèves : proche de ce qu'ils connaissent mais nouveau, présenté dans un langage facilement accessible, d'aspect souvent ludique... Les idées ne manquent pas qui permettent de réaliser ce que les programmes de mathématique présentent comme des " activités de découverte ". Il faudrait cependant réfléchir sur ce que recouvre ce terme d' " activités " dans un certain nombre de manuels : le contexte proposé est-il motivant ? Permettent-elles aux élèves d'être réellement " actifs " ? Sont-elles suffisamment ouvertes pour permettre d'explorer et de trouver par soi-même ? Il y a là un champ de recherche passionnant pour une équipe d'enseignants.

2. Décontextualiser :

Plus une activité est riche et motivante, plus elle risque d'être attachée à son contexte. Cet effet est encore renforcé par les manipulations qui entrent en mémoire de manière très contextuée. Vous pouvez ainsi entendre une classe à laquelle vous demandez : " *Que savez-vous des fonctions affines* ? " vous répondre avec unanimité : " *C'est un truc avec des ressorts* ! " parce que la première activité proposée a concerné l'étude de l'allongement des ressorts !

Il est donc impératif pour aider les élèves à construire des connaissances réutilisables de les entraîner à les détacher de leur contexte.

Là, nous entrons dans les mystères du fonctionnement cérébral. Certains élèves peuvent, avec très peu d'exemples, construire un objet mathématique détaché de son contexte : peut-être est-ce ce que nous appelons " capacité d'abstraction ". Mais, pour la plupart, il faudra pour y parvenir de nombreux exemples et, surtout, **une démarche volontaire de décontextualisation** :

- **Les exemples proposés sont analysés, comparés** (voir les fiches 67, 68, 69, 98, 101, 104)
- Les élèves sont surtout invités à **mettre en forme les idées retenues** :
" Cet exemple ressemble à celui-ci parce que..."
" Ces deux -là diffèrent en ceci..."
" C'est presque pareil sauf..."
- Enfin, ce travail est pensé dans **le temps** : c'est dans la remise en forme d'idées anciennes faisant travailler la mémoire à long terme avec de nouveaux exemples analysés que va se construire le savoir réutilisable car de plus en plus détaché du contexte dans lequel il a été appris.

En même temps, il faut pour l'enseignant garder en pensée l'articulation : contextualisation / décontextualisation

A vouloir trop vite détacher un objet de son contexte, on risque de construire du mécanisme dénué de sens. C'est par des retours nombreux sur des exemples très contextualisés (et ce, bien au-delà de la phase de découverte de la notion) que sera ré-interrogé le sens (voir le paragraphe : "articuler mécanisme et sens" page 32).

3. Recontextualiser :

C'est une dimension centrale de la question " ça sert à quoi ? " (cf. chapitre page 20)

Nous avons voulu marquer ainsi l'importance dans la construction du savoir de la reconnaissance des circonstances dans lesquelles on peut l'employer.

Là aussi, certains élèves se montrent très habiles alors que la plupart d'entre eux ne mettent pas en rapport un objet mathématique apparemment bien construit avec les nouvelles occasions de l'utiliser.

Pour les aider à construire ces compétences, nous pouvons agir sur plusieurs axes :

Rechercher les critères d'utilisation d'une formule :

Par exemple :

- Quand peut-on ou doit-on utiliser la formule $(a+b)(a-b)$?
- A quels indices reconnaît-on qu'elle est applicable ?

Il nous faudra approcher successivement puis en comparaison les exemples de plus en plus complexes avec les nouvelles questions qu'ils posent :

Exemples	Analyse
◆ $(x+3)(x-3)$	
◆ $(5x+3)(5x-3)$	Le monôme $5x$ est-il reconnu par les élèves comme pouvant " prendre la place" de " a " ?
◆ $(3+5x)(3-5x)$	Le monôme $5x$ est-il reconnu par les élèves comme pouvant " prendre la place" de " b " ?
◆ $(\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}-3)$	mais $\sqrt{2}$ est-il bien un nombre ???
◆ $[(x-3)-(2x+1)][(x-3)+(2x+1)]$	

C'est bien par la reconnaissance des critères explicités qu'ils arriveront à faire appel à la formule dans une situation nouvelle.

Il est intéressant de centrer un travail uniquement sur la reconnaissance des conditions d'utilisation, indépendamment de son application (" Entourez les exemples dans lesquels vous pourriez appliquer la formule..."). En n'ayant pas la préoccupation de faire le calcul, on décharge la mémoire de travail pour se centrer sur les critères de reconnaissance.

Au fur et à mesure de l'avancée de ce travail, on pourra aboutir à une formulation des conditions d'utilisation : " ***Je peux me servir de cette formule lorsque je reconnais***..."

Demander aux élèves d'inventer eux-mêmes des situations :

Des manuels proposent ce type d'exercice : "voilà un calcul; créez un problème qui sera résolu par ce calcul". C'est un travail plus habituel pour des situations relevant de l'arithmétique. Il peut être intéressant de l'appliquer au calcul algébrique. On est assuré ainsi de disposer de situations proches des élèves et écrites dans un langage qui leur est accessible (la " traduction " en langage correct d'une écriture approximative est en elle-même un exercice très riche).

Il est très utile d'apprendre aux élèves à se doter d'un " contexte personnel opérant " pour les situations qui perdent facilement sens pour eux. Par exemples :

- Je ne sais plus très bien transformer a - b = c...
  je pense 7 - 2 = 5 donc c'est bien b + c = a
- Une application affine, c'est comme " une carte d'abonnement plus un prix par cassette louée..."
- (+3) + (-5) fonctionne comme " je gagne 3 puis je perds 5..."

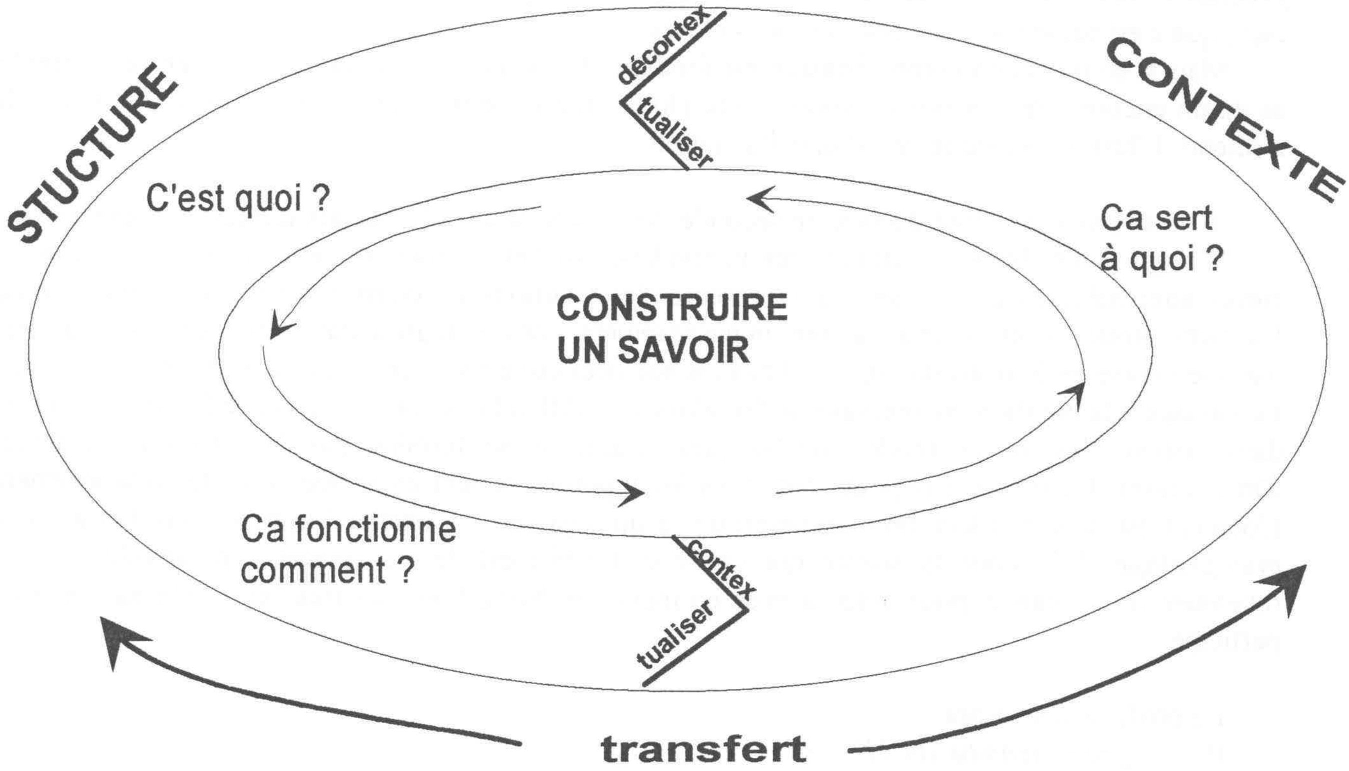
Ce qui est performant, c'est le fait d'**inventer soi-même un contexte quand le besoin s'en fait sentir**. L'appel à toute la classe pour trouver des idées variées permettant à chacun de choisir la meilleure pour lui, aide les élèves en difficultés à trouver des moyens de redonner du sens à ce qu'ils font.

Proposer de nombreuses situations de réutilisation d'une formule
Quand on est loin dans le temps du chapitre l'introduisant

Il est nécessaire d'aider les élèves à reconnaître comment on peut penser à la bonne formule. Le fait d'avoir mis au net des critères de reconnaissance est une aide évidente.

Il n'en reste pas moins que c'est un changement dans le fonctionnement de la progression, difficile à gérer pour les enseignants. Nous avons, nous aussi, tendance à travailler "chapitre par chapitre " sans toujours penser les problèmes de recherche qui permettront de réinvestir les outils. C'est pourtant une condition indispensable pour permettre le transfert.

Ainsi, le schéma du savoir peut-il être complété par la mise en place de ses articulations :



Mais pour qu'un transfert soit effectivement possible l'enseignant ne devra jamais oublier d'ancrer ce savoir dans le long terme

Pour un savoir transférable : se mettre en projet

Tout ce fonctionnement est destiné à aider l'élève à être actif, intellectuellement. C'est ce qui doit permettre qu'il sorte de classe en se disant : *"J'ai tout compris, c'est facile les exercices pour la prochaine fois"* ou même encore "*C'est pas la peine d'apprendre la leçon, je la sais déjà*". On sait bien, que c'est toujours le cas pour les bons élèves.

Mais si ce travail en compréhension est fondamental, il n'exclut pas que certains élèves sortent en se disant encore *" Je n'ai rien compris ! "* Ou plutôt en n'ayant pas saisi ce qu'il y avait à comprendre, à retenir. L'histoire suivante en est une illustration.

Cela se passe en début d'année de seconde, lors d'une séance de travaux dirigés, en demi-groupe.

Il s'agit d'introduire la notation des intervalles, crochets fermés, ouverts et bornes infinies. Les élèves sont habitués en troisième à représenter les solutions d'inéquations sur une droite graduée. L'activité proposée les invite à traduire un encadrement, par une représentation sur la droite graduée et par une phrase en français du type : " Tous les nombres compris entre a et b; a et b inclus ou exclus". Le passage à la notation en intervalle se fait alors sans difficulté, et la traduction se fait indifféremment dans chacun des autres modes symboliques. L'activité se termine par la résolution graphique d'inéquations. Ce travail a déjà été fait, mais les réponses étaient exprimées à l'aide d'encadrements. L'objectif est de varier leur représentation de "à quoi ça sert". Certains l'expriment en disant *" C'est plus pratique ! "*. Voilà la séance qui s'achève. Le but est de les amener à récapituler ce qu'ils retiennent de la séance, pour aider la mise en mémoire. Nora, bien que très "sage" n'a pas beaucoup participé.

Le professeur et Nora :
P : - « *Que retiens-tu du TD* ? »
N : - « *[-1; 3]* ». Elle cite l'intervalle solution du dernier exercice.
P : - « *Penses-tu que [-1; 3] pourra t'aider dans ton prochain devoir.* »
N : - « *Je ne sais pas !* »
P : - « *Cherche ce que tu pourrais retenir d'autre, qui pourrait servir pour d'autres jours.* »
N: - « *Je ne sais vraiment pas.* »
P : - « *Qui d'autre veut dire ce qu'il a retenu.* »
Le visage de Nora s'éclaire :
N: - « *Ça y est, j'ai compris, c'est les crochets, quand il y a égal ou pas égal et le huit* (elle dessine dans l'air avec sa main, le signe infini) *quand ça va au bout de la ligne* ! »

En effet, Nora vient seulement de comprendre, ce qu'il y avait à comprendre. Elle l'exprime avec toute la maladresse de son langage, mais c'est à ce moment là, que Nora s'est approprié la notation. C'est à ce moment là seulement qu'elle a réussi à créer les liens avec ses apprentissages antérieurs, qu'elle a mis du sens sur l'ensemble de la séance.

Pourtant l'objectif avait été annoncé et rappelé tout au long du déroulement. Nora ne savait pas, simplement ce qu'elle devait faire avec sa tête, elle ne parvenait pas à se projeter dans le futur, elle ne pouvait pas imaginer quand et à quoi ça servirait. Elle avait besoin qu'on lui dise de mettre dans sa tête et qu'on lui précise ce qu'il fallait retenir avec des mots qui soient les siens.

Il est donc important de prendre quelques minutes régulièrement pour faire le point, en fin ou en cours de séance :

Pour qu'ils se disent avec leurs mots ce qu'ils comprennent de ce qui a été fait
Pour qu'ils repèrent qu'il faut mettre en mémoire et quoi
Pour qu'ils se mettent en projet de ré-utilisation.

Pour un savoir transférable : articuler mécanisme et sens

Nous avons abordé déjà par certains aspects cette question centrale dans l'apprentissage du calcul littéral : quelle place faire à l'acquisition de mécanisme de calcul ?

Il est invraisemblable que l'on puisse devenir performant en calcul en étant obligé de recourir continuellement à des justifications.

Prenons l'exemple d'un développement simple : -3 $(a - 7)$

Pour résoudre ce problème, les données qu'il est nécessaire de retrouver dans sa mémoire sont très nombreuses et variées :

- L'écriture -3 est celle du nombre relatif négatif (-3) .
- L'absence de signe entre le nombre et la parenthèse est une écriture simplifiée de la multiplication (on peut supprimer le signe x devant une lettre ou une parenthèse).
- L'écriture a -7 est la simplification de l'écriture d'une addition $a + (-7)$.
- L'ensemble de cette écriture $(-3) \times (a + (-7))$ répond à la formule connue : $a(b + c)$ qui est utilisable pour répondre à la question posée : développer (le choix de cette formule se fait par la mise en relation de la reconnaissance de la forme écrite et du problème à résoudre).
- Le résultat du développement s'écrit : $a \times b + a \times c$
  Ce qui donne dans ce cas $(-3) \times a + (-3) \times (-7)$
- Il reste à simplifier l'écriture obtenue à partir de quelques régles:
  on simplifie l'écriture de la multiplication en supprimant le signe $\times$ devant une lettre
- Les parenthéses ne sont pas nécessaires autour du nombre -3 qui débute la ligne de calcul
- Le produit des deux nombres (-3) et (-7) est obtenu suivant la loi de multiplication bien connue...
- Le nombre obtenu étant (+21) l'addition + (+21) peut se simplifier en +21

En relisant cet ensemble de justifications on se demande si l'on ne rêve pas..
Comment peut-on gérer tout cela ?

Pourtant, il est non moins évident que le cerveau gère l'ensemble de ces règles. Que faisons-nous quand l'élève qui traite ce problème au tableau se trompe ? Nous lui demandons : " *Pourquoi écris-tu (-21)* ? " Et nous attendons de lui qu'il retrouve les justifications qui permettront de rectifier son erreur.

Nous mettons ainsi en évidence deux éléments d'analyse pour notre problème :

L'acquisition de mécanismes est indispensable si l'on veut être performant.
Derrière cette mécanisation continuent à exister les règles apprises petit à petit

1. La mécanisation est indispensable

Il est évident que le déroulement ci-dessus ne peut être vécu que dans des raccourcis qui permettent de soulager le travail du cerveau . La mémoire de travail est très limitée et ne peut gérer qu'un petit nombre de données : il faut donc synthétiser au maximum. Nous savons bien que, nous qui sommes des experts du calcul ci-dessus, nous écrivons " d'un seul coup " le résultat -3a + 21 sans avoir besoin d'intermédiaires apparents. C'est bien là le type de performance que nous visons pour nos élèves.

2. Les mécanismes ne construisent pas du sens

Nous avons tous de très nombreux exemples de ces élèves qui sont performants en fin de chapitre pour une règle donnée et qui ne sont pas capables de la réutiliser d'une manière fiable :

Ils paraissent avoir oublié un mois plus tard une régle qu'ils possédaient.

Ils ne mobilisent pas une règle connue pour un travail nouveau. Ils vous demandent "un exemple" et le reproduisent sept ou huit fois avec intérêt... Mais deux jours plus tard, il n'en reste pas trace.

Ils font " n'importe quoi " au brevet alors que les questions posées ont été traitées de nombreuses fois en classe. Devant la correction, ils s'écrient " *Ah! c'était çà? je savais !* ".

Tous les enseignants connaissent ces situations particulièrement désespérantes pour eux : nous nous sentons les Sisyphe du calcul : toujours à remonter une pierre qui toujours redescend la pente !

Il semble que la construction de ces éléments isolés de mécanisme ne permette pas de construire du savoir : ils restent des " pavés " isolés qui n'entrent pas en relation les uns avec les autres.

3. Ce qui donne du sens, c'est la mise en relation

Les savoirs ne se construisent pas en ajoutant une brique sur un mur déjà construit qui, par ailleurs, tiendrait déjà parfaitement.

Ils ne se construisent pas non plus en extrayant une connaissance reconnue comme " mauvaise " de la tête des élèves pour mettre à la place une " bonne " connaissance.

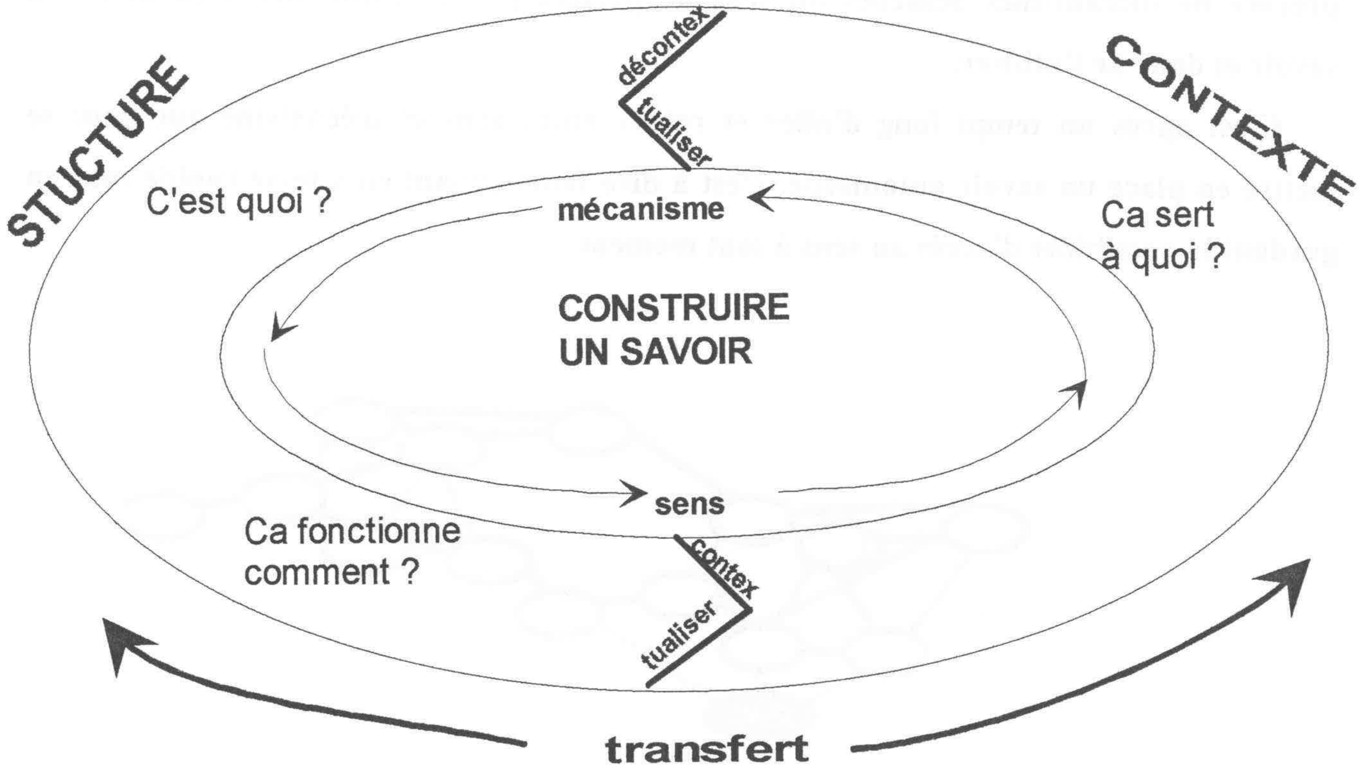
Pour rester dans le domaine de la métaphore, l'intelligence d'une personne est comme un "mobile" fait de multiples éléments reliés les uns aux autres par des baguettes ou des fils ténus. Une nouvelle connaissance ne peut être retenue que si on lui trouve un point où l'accrocher. Alors, son accrochage va déséquilibrer puis rééquilibrer l'ensemble de la construction. Peut-être faudra-t-il pour obtenir un équilibre nouveau éliminer certains des éléments qui existaient dans le modèle précédent et qui ne fonctionnent plus avec les nouvelles connaissances.

Cet effet " d'accrochage " est très reconnaissable dans nos classes. Isabelle grogne depuis tout un moment "*J'en ai marre, je comprends rien*". Le professeur lui re-décrit le déroulement du calcul point par point : en vain. A un moment il lui dit " *Ne reconnais-tu pas la ressemblance avec les exercices de développement du devoir* ?" Et Isabelle : " *Ah !!! alors c'est pareil ? il fallait le dire* !". Elle vient de trouver un point d'accroche pour cette connaissance. Ce qui lui manquait n'était pas de l'ordre du " çà fonctionne comment " comme le professeur l'avait d'abord pensé. Elle avait besoin de relier cette nouvelle connaissance à quelque chose de connu, de comprendre :

" C'est quoi ,"
"Ça ressemble à quoi ?".

Nous retrouvons ici l'entrée par les trois questions en fonctionnement triangulaire : "C'est quoi ?", " Ça fonctionne comment ? ", " Ça sert à quoi ? ". Le passage de l'une à l'autre peut permettre d'ouvrir des pistes à la réponse aux questions que "sentent " les élèves sans forcément parvenir à les exprimer.

Autour de la construction du savoir s'inscrit une circulation du sens au mécanisme et inversement. Mais il ne s'agit pas de "tourner en rond" ! Dans l'histoire d'une personne, cette relation entre sens et mécanisme évolue.



4. Une démarche pour passer du néophyte à l'expert

En suivant " l'axe du progrès " (cf. schéma ci-dessous), on passe par diverses étapes de l'apprentissage :

a) La première présentation de la notion nouvelle est un moment d'exploration (les activités) qui permet une approche dans différents domaines. Ce moment est généralement vécu dans les classes et aboutit à la formulation du concept nouveau.

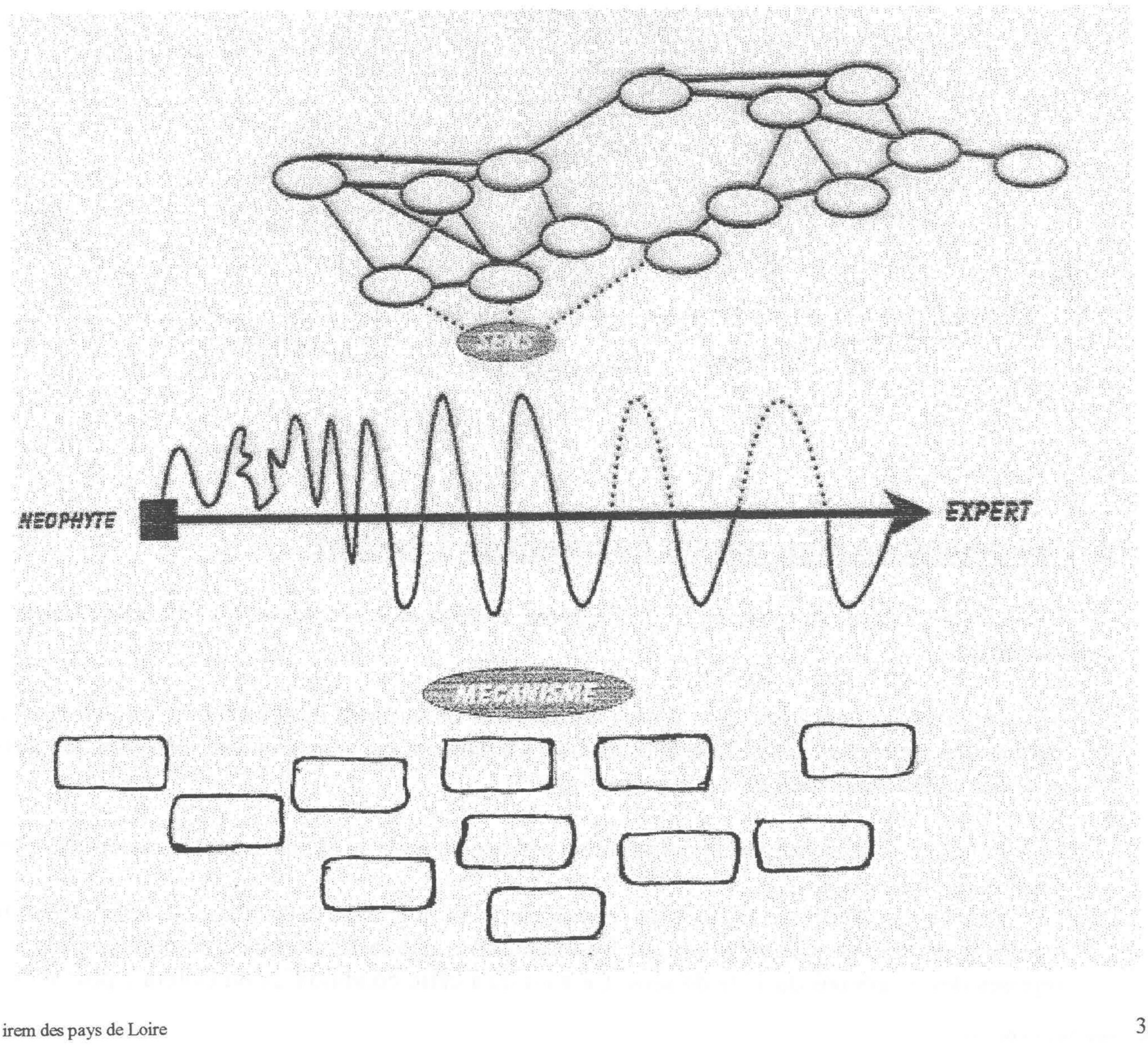
b) Ensuite, on peut envisager de passer à une période de mise en application du concept en vitesse de plus en plus rapide.

Mais ce qui doit rester à l'idée de l'enseignant c'est que, dans cette phase, le sens va être très vite oublié si l'on ne joue plus que sur les mécanismes. De là l'importance de refaire, à plusieurs reprises des incursions du côté de sens. Ce n'est qu'à cette condition qu'on évitera (peut-être!) le détachement de " briques de savoir " bien mécanisées mais qui, n'étant plus dotées de sens vont se perdre dans la mémoire sans être utilisables en transfert.

c) Quand arrive le moment d'une relative expertise, on peut alors fonctionner uniquement sur le mécanisme sachant que le sens est suffisamment construit pour qu'on puisse (en cas de besoin) y avoir recours d'une manière spontanée. Nous connaissons bien, sur des calculs où nous sommes "moins experts" ces moments de pilotage automatique suivis de pause où nous éprouvons le besoin de nous demander " *Voyons, j'en suis où ? Ai-je pensé à tel point, tel cas particulier ; je travaille mon brouillon pour repérer des élèments de la démarche...*"

Dans le calcul littéral, automatisme et sens sont indispensables. La mise en place précoce de mécanismes détachés du sens ne permet pas de construire réellement du savoir et donc de l'utiliser.

C'est après un temps long d'aller et retour entre sens et mécanisme que peut se mettre en place un savoir automatisé, c'est à dire fonctionnant en vitesse rapide tout en gardant la possibilité d'accès au sens à tout moment.



Des langages pour apprendre
Un langage à apprendre

1. L'acquisition du langage mathématique est nécessaire

Une question est cruciale dans l'enseignement du calcul littéral, c'est la place, le rôle et le statut du langage. En effet, il est nécessaire que les élèves s'approprient et maîtrisent du langage mathématique, qui **facilite ou simplifie** selon les cas ce que l'on peut avoir à dire ou à décrire. Ce langage apporte la précision du mot juste et permet la communication entre initiés.

Mais parce qu'il est un langage scientifique, chaque mot couvre un concept précis. Et il ne faudrait pas croire que parce qu'on connaît le mot, on maîtrise le **concept** qu'il désigne. Toute la difficulté est là !

Quand l'enseignant utilise trop vite du vocabulaire spécifique, il prend des risques. D'une part, celui de ne pas être compris : ces paroles ne sont que du bruit, une **langue étrangère** que l'élève n'entend pas. Mais il prend aussi le risque que les élèves s'approprient le mot, et l'investissent du sens usuel dans la vie courante (cf. "facteur commun" qui n'est qu'un postier bien ordinaire!) ou d'un sens **déformé**. Lorsque l'élève emploie le bon mot, **l'enseignant, entendant ce qu'il veut y entendre**, ne perçoit pas nécessairement le non-sens qu'il contient peut-être, la signification qu'il a pour l'élève.

C'est le cas de ces élèves qui simplifiant une fraction par 2 disent *« les 2 s'annulent »* et qui concluent sans hésiter que "ça fait zéro" quand *« tout se simplifie »* !

C'est aussi le cas de bien des élèves de quatrième ou troisième technologiques qui, comme la plupart des élèves en grande difficulté, ont une vision globale et peu analytique. Ils réclament *« vous faites un modèle comme la dernière fois »*. Ils restent incapables d'un exercice de transfert et semblent refuser d'utiliser le langage mathématique. Par exemple Ludovic en troisième techno, sait factoriser : $2x + 14$. Il dit *« Il y a un 2 à sortir »* mais il n'arrive jamais à trouver les mots : *« Je mets le 2 en facteur »* ou *« Je factorise 2 »*.

C'est au travers du langage mathématique dépouillé de sens que naissent les règles-élèves.
Si le sens du langage mathématique n'a pas été suffisamment construit, on verra de multiples interprétations s'exprimer dans les travaux des élèves. Pour mémoriser, de toute façon, ils traduisent ce qui pour eux est du jargon, dans leur langage propre.

2. Le langage des élèves au service de l'apprentissage

Il faut favoriser l'expression de l'élève au cours de l'apprentissage, c'est son langage qui seul peut nous permettre de vérifier ce qu'il comprend. C'est le seul qui permet à l'élève de construire du savoir qui prend sens et qu'il s'approprie réellement.

On peut pour cela mettre en place des travaux de recherche, de réflexion, ou d'entraide en **petits groupes**. En effet, dans ces petits groupes le langage sera nécessairement le leur. Il n'est pas rare qu'un élève qui n'avait pas compris soit illuminé par les explications de son copain !

C'est aussi parce que l'enseignant utilise lui même très souvent un langage familier, que les élèves oseront s'exprimer. S'exprimer, c'est répondre aux questions du professeur, mais c'est aussi oser poser des questions pour dire ce que l'on croit avoir compris ou non. Le langage commun doit être l'outil de **communication dans la classe**.

Ce langage a sa place sur le **cahier de cours**, il est le langage qui doit expliquer et donner sens aux formules et autres « jargons » mathématiques.

Ce langage commun n'est pas un but, il est seulement le moyen de permettre aux élèves d'approcher progressivement et efficacement le langage mathématique.

On incitera donc toujours les élèves à faire évoluer leurs formulations vers le langage social, et à s'approprier petit à petit des termes mathématiques, ou la façon de dire de l'enseignant. Par exemple si un élève dit, lors d'une résolution d'équation : « *Je passe le 2 de l'autre côté* », on l'invitera plutôt, suivant la situation, à dire : « *Je divise par 2 chaque côté* » ou « *je soustrais 2 de chaque côté* ». Lui montrer que ce qu'il dit ne permet pas de distinguer deux situations très différentes ! On pourra aussi proposer « *on divise par 2 chaque membre* » ou encore « *on multiplie par l'inverse...* »

3. Valoriser tous les langages

Mais quand on dit langage, il faut l'entendre au sens large. Pas seulement une langue articulée et composée de mots, mais aussi toute autre forme de communication. Ce peuvent être des schématisations, plus ou moins codées, plus ou moins figuratives, mais ce peut être aussi, une expression plus corporelle (ce que sont les doigts de la main quand on apprend à compter). Une façon de valoriser ces types de langages plus ou moins symboliques, c'est d'inciter les élèves à les utiliser pour se représenter un problème, quand ils travaillent **au brouillon.** En comparant différents brouillons d'élèves on les aide à prendre conscience de la variété des représentations possibles. Il peut être judicieux d'inviter les élèves qui ont des difficultés et qui ont souvent des représentations très figuratives et peu symboliques à s'approprier une **représentation qu'ils trouvent parlante pour eux**. On utilisera une grande variété de représentations pendant le cours et on sollicitera les élèves pour qu'ils l'enrichissent des leurs.

C'est quand on aura la certitude que la compréhension est correcte que l'on pourra inviter l'élève à **s'approprier les mots mathématiques** pour en parler.

On prendra toutefois soin de s'assurer régulièrement du sens que recouvrent ces mots en sollicitant des traductions fréquentes entre langage mathématique et langage usuel.

L'institutionnalisation

1. Une synthèse négociée et individualisée

Au fur et à mesure de l'apprentissage se pose le problème de l'écriture d'une trace écrite (cahier, fiches).

Les élèves amenés à participer à l'élaboration d'un résumé vont négocier avant d'être en accord avec une formulation. Ils font lors de cette négociation un travail riche et constructif qui contribue à faire évoluer leur langage ; c'est une voie d'accès au langage mathématique. Pendant l'apprentissage, la trace écrite peut être individualisée (proposition de deux mises en forme voisines, chacun choisissant la sienne, etc...) Cela sous entend que l'enseignant vérifie que les écrits moins conventionnels sont opérationnels et ne comportent pas d'erreurs.

Par rapport à un livre, l'avantage du texte écrit en classe est qu'il est construit **avec nos élèves et pour eux**. La mise en forme tient compte de l'état actuel de leurs compétences et du langage dans lequel ils peuvent les traduire. L'enseignant veillera à la correction de ce qui est écrit, même si ce n'est pas parfait, ni conventionnel.

Reprenons l'exemple des factorisations.
A l'issue de leur travail, les élèves sont invités à fabriquer une fiche (émanation de la classe et de notes personnelles). Dans ce cas la fiche élève ainsi constituée sera plus performante que celle qu'aurait pu proposer le professeur. L'élève y reviendra plus naturellement et, d'ailleurs, ne propose-t-il pas après quelques semaines une classification plus ramassée, mais plus efficace ?

Dans tous les cas, c'est un bon signe de voir un élève s'occuper de son cahier de cours, (mise en page, annotations...), s'en servir pour vérifier, pour chercher. Pour ceux qui ne s'en serviraient pas, il est sûrement nécessaire de proposer des activités d'entraînement à son utilisation.

2. Pour aider l'attention et la mise en mémoire : la copie décalée

Comment aider les élèves (en particulier des sixièmes) à savoir apprendre une leçon ?. Les problèmes qui se posent sont multiples:

- Prendre en compte leur manière de dire, ce qui rend difficile l'apprentissage à partir du livre (trop impersonnel).
- Obtenir sur le classeur de leçon une mise au propre fiable pour éviter qu'ils n'apprennent quelque chose de faux .
- Les aider à découvrir leur façon d'apprendre la plus performante et à en expérimenter d'autres.
- Les entraîner à vérifier qu'ils ont bien appris en ayant un moyen de contrôle.

Voici une démarche qui peut permettre d'avancer sur certains de ces problèmes. Elle est inspirée par les travaux de Gestion Mentale.:

Récit de fonctionnement dans une classe de sixième

En fin de séquence d'apprentissage, quand une notion semble bien acquise, on prend le classeur de leçon.

1° temps :

La page de classeur étant préparée (titre) , tout le monde pose son crayon.

Consigne :

> *"Nous allons écrire ce qu'il faudra retenir de la notion que nous venons d'apprendre. Ce sera la leçon pour la prochaine fois. Vous devez vérifier que ce que l'on écrit correspond bien à ce que vous avez compris. "*

2° temps :

Qu'allons nous noter ? Dessin, texte schéma... Chacun propose ; on discute, on améliore les propositions. On justifie le choix d'une formule par rapport à une autre.

3° temps :

> *" Vous allez devoir mettre en mémoire ce texte pour être capables de le retrouver seuls quand j'aurai caché le tableau.*
> *Vous pouvez utiliser votre mémoire " à images " ou votre mémoire à faire " du son "...*
> *Revoyez le tableau ; je vais ensuite le redire."*
> *" Maintenant chacun met en mémoire à sa façon".*

(Quelques minutes de silence absolu qui peuvent être prolongées si quelqu'un le demande).

4° temps :

Je cache le tableau (volet ou écran ou affiche...).
Chacun note, de mémoire, ce qu'il a retenu.

5°temps :

Le professeur a le temps d'aller voir les élèves qu'il sait en difficultés.
On redécouvre le tableau. Chacun compare avec son travail. On peut demander si ce que l'on a écrit est correct quand cela ne semble pas identique. Ceux qui s'aperçoivent qu'ils avaient oublié quelque chose sont invités à le remettre tout de suite dans leur tête.

6°temps :

On note sur le cahier de texte : apprendre la leçon n°....

On a avantage à compléter par un dialogue pédagogique :

- *Comment as-tu fait pour faire entrer les choses dans ta tête ?*
- *Comment sais-tu que tu as bien appris ?*
- *Que dois-tu faire à la maison ?*
- *Comment vérifier que tu sais ?*

Cette méthode permet d'entraîner les élèves à l'attention et à la mémorisation. Grande a été ma surprise de constater que le texte écrit sur les classeurs était très fiable, y compris pour l'orthographe : alors qu'en copiant directement au tableau, les élèves ne mettent aucune attention, oublient des mots...ils sont obligés par la mise en mémoire de donner du sens à ce qu'ils écrivent.

Ce fonctionnement apporte d'autres avantages :

- ❑Ils comprennent ce que veut dire " être attentif ". La très grande concentration du moment d'apprentissage le démontre.
- ❑ La mise en mémoire devient un jeu intellectuel. Rares sont les élèves qui n'ont pas envie de démontrer qu'ils ont été capables de tout retrouver.
- ❑ Beaucoup d'élèves découvrent assez vite qu'ils n'ont " presque" plus besoin d'apprendre à la maison puisqu'ils savent déjà en sortant de classe. C'est bien là un des secrets des "bons" qu'on voudrait leur apprendre.

Bien entendu, cette pratique ne peut être vécue uniquement ponctuellement. Elle s'inscrit dans une démarche régulière et continuée. Elle est d'autant plus efficace qu'elle est utilisée par plusieurs professeurs de la classe.

Ce fonctionnement est particulièrement utile en sixième. Il peut être à réactiver avec des élèves plus agés. En particulier, leur faire saisir que, même si le texte de la leçon n'est pas caché, l'objectif est bien de l'entrer en mémoire en l'écrivant.

3. Un ancrage dans le long terme

La trace écrite est évolutive dans le temps, en même temps que le savoir se transforme, et que le concept évolue. Elle pourra rassurer un élève fragile, qui a oublié, mais aussi stimuler l'élève plus assuré, sensible à sa progression.

Le cahier ou les fiches font mémoire, c'est le parcours de l'élève sur plusieurs années. C'est un travail sur le long terme.

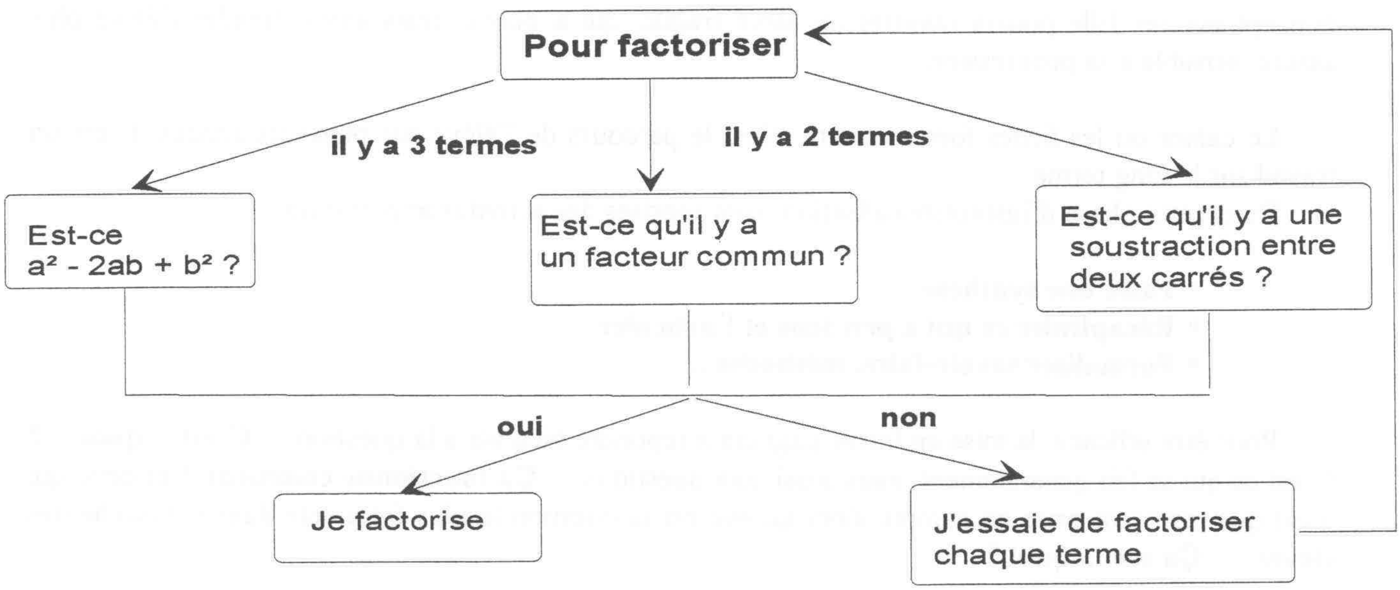
Dans cette phase d'institutionnalisation, sont reprises des activités importantes :

- **Faire une synthèse**
- **Récapituler ce qui a pris sens et l'articuler**
- **Formaliser savoir-faire, méthodes ...**

Pour être efficace, la mise en forme gagnera à répondre bien sûr à la question **C'est quoi ?** C'est ce qui se fait généralement, mais aussi aux questions **Ça fonctionne comment ?** et celle qui n'est que rarement prise en compte alors qu'elle est la question la plus fréquente dans la bouche des élèves : **Ça sert à quoi ?**

Voici une fiche de cours réalisée à l'issue du travail sur les factorisations, par un élève de seconde.

Ce que je vois	exemples formes factorisables	règle de factorisation	forme factorisée	remarques
un nombre est facteur commun x est un facteur commun il y a un facteur commun	$6+12x$ $5x^2-4x$ $(3-x)(x+1)-2x(3-x)$ $(2x+1)^2-5x\,(2x+1)$	**ab + ac = a (b+ c)** **ab - ac = a (b- c)**	$6(\ 1+2x\ )$ $x\ (\ 5x-4\ )$ $(3-x)\ [(x+1)-2x)]$ $(2x+1)[(2x+1)-5x]$	*S'il n'y a pas le b ou le c il faut mettre* **1** *Il ne faut pas changer l'ordre dans les crochets*
Je vois une soustraction entre deux carrés	x^2-9 $7-x^2$ $1-4x^2$ $(x+3)^2-(2x+5)^2$	$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$	$(x-3)(x+3)$ $(\sqrt{7}+x)(\sqrt{7}-x)$ $(1-2x)(1+2x)$ $[(x+3)-(2x+5)]\ [(x+3)+(2x+5)]$	$\neq 1-(4x)^2$ *Après il faut réduire dans les parenthèses et les crochets*
Je vois trois termes et il n'y a pas de facteurs communs	x^2+6x+9 $9x^2-12x+4$	$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$	$(x+3)^2$ $(3x-2)^2$	*Il faut vérifier le* « 2ab » *car* x^2-5x+9 *ne se factorise pas !*
un des termes est factorisable Dans chaque terme il y a des facteurs opposés	$(x^2-25)+7(x+5)$ $(4x-1)-9x(1-4x)$		$(x+5)\ [(x-5)+7]$ $(4x-1)\ [\ 1+9x\ ]$	$x^2-25=(x-5)(x+5)$ $1-4x=-(4x-1)$



Ça sert pour les équations et les inéquations de degré 2 ou plus, pour chercher des antécédents, pour trouver la forme canonique, pour étudier le signe d'une expression ....

LES CONCEPTS

SPECIFIQUES

DU

CALCUL LITTERAL

Dans l'approche du calcul littéral, les élèves rencontent un très grand nombre de difficultés, pas toujours faciles à comprendre pour le pédagogue. En partant de l'analyse de ce qui se vit dans la classe, en écoutant ce que les élèves peuvent dire de leurs erreurs, il ressort que le type de travail mathématique abordé ici est très particulier. Il utilise, en effet, des concepts spécifiques qui méritent d'être étudiés de plus près pour aider à la compréhension des problèmes et donc à la remédiation. Le premier à voir, parce qu'il occupe une place centrale, est le concept de " formule littérale ".

Le travail qui suit fait référence à la théorie de construction des savoirs que l'on retrouve dans le chapitre " les référents théoriques ".

La formule

1. La formule et le niveau d'abstraction

Dans une démarche de construction d'un concept, il faut pouvoir mettre en relation trois élèments: les exemples, les critères permettant de les définir et le nom donné au concept, " l'étiquette " qui permettra d'en parler (ici, l'écriture de la formule).

Sur l'exemple qui suit on peut analyser comment se présentent ces trois éléments.

Exemple : la formule de distributivité simple.

Les exemples du concept vont être d'abord numériques : $5 \times (8 + 3) = 5 \times 8 + 5 \times 3$

Ces exemples sont généralement introduits dans des situations variées : vérification numérique ; aires de rectangles ; situations concrètes... Dans un deuxième temps, les exemples contiennent une lettre : $7 \times (a + 2) = 7 \times a + 7 \times 2$.

Là viennent interférer les difficultés liées à la lettre et qui sont abordées par ailleurs.

Le travail mental demandé aux élèves est de comparer ces calculs (entre eux et avec d'autres différents) pour repérer ce qu'il y a de semblable dans leur fonctionnement.

Les critères de reconnaissance du concept posent des problèmes importants de formulation. Il faudrait pouvoir énoncer une phrase du type : "le produit d'un nombre par une somme est égal à la somme des produits de ce nombre par chacun des termes de la somme initiale ". Inutile de disserter longuement sur les difficultés d'une telle phrase pour un élève de collège (et même de lycée).

L'enseignant va donc devoir prendre le temps de laisser aux élèves le soin d'exprimer ce qu'ils reconnaissent avec leurs mots, en perfectionnant petit à petit l'expression qui en découle. Il est très important de laisser jouer ce moment, capital pour l'apprentissage. Si on le supprime, en raison de sa difficulté, on ne permet pas aux élèves de formuler ce qu'ils apprennent donc de donner du sens à cet apprentissage. Si on propose aux élèves la mémorisation d'une phrase correcte (telle celle citée ci-dessus) on risque d'avoir une répétition de perroquets alignant (éventuellement dans le désordre) des mots dénués de sens.

L'étiquette du concept arrive enfin : ce qui en tient lieu pour une formule, c'est son écriture littérale :

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

Lors des premiers apprentissages littéraux (en cinquième et quatrième) , une telle écriture est difficile. C'est pourquoi il est important que cette proposition d'écriture fasse suite aux premiers temps d'approche du concept : la reconnaissance des exemples et l'expression des critères retenus.

Avec les débutants, on pourra faciliter l'apprentissage par l'utilisation provisoire d'une " formule " du type :

$$\square \times (\mathrm{O} + \Delta) = \square \times \mathrm{O} + \square \times \Delta$$

Celle-ci permet de mettre à distance les problèmes de la lettre. En offrant une écriture dans laquelle on peut " mettre " des nombres à l'intérieur du rond ou du carré,elle donne aux élèves une image concrète du passage de la lettre à l'exemple numérique.

Avec des élèves plus aguerris (à partir de la troisième), on peut utiliser l'entrée dans une formule par l'expression littérale de celle-ci. Pour autant, un apprentissage fiable ne sera construit que lorsque se seront joués les deux autres temps : mise en place d'exemples et expression des critères de reconnaissance.

Ce seul exemple permet d'éclairer les difficultés très grandes posées par la construction d'une formule. On pourrait refaire le même travail de décodage pour les autres .

2. Une formule, c'est deux concepts

Nous sommes parfois surpris, dans nos classes par la difficulté qu'ont les élèves à utiliser " à l'envers " une formule qui vient d'être utilisée dans le sens direct. L'entrée par la conceptualisation donne des éléments de lecture de ces difficultés :

Reprenons l'exemple ci-dessus de la formule de distributivité.
Pour utiliser le sens

$$\boxed{a \times (b + c) \quad \text{devient} \quad a \times b + a \times c}$$

Il faut gérer :

- la question posée qui est " développer ".
- les critères de reconnaissance de forme:
  Le texte donne le produit d'un nombre par une somme.
  Il peut apparaître sous la forme : $(a + b) \times c$
- les exemples variés :
  Si les premiers exemples sont très proches de la formule, ensuite ils se compliquent.
  Par exemple,l'une des lettres peut représenter un monôme comme dans :
  $3a \times (5b + 7)$
  puis plus tard un binôme...

Pour utiliser le sens

$$\boxed{a \times b + a \times c \quad \text{devient} \quad a \times (b+c)}$$

Il faut gérer :

- la question posée qui est : " factoriser"
- les critères de reconnaissance de la forme :
  On a la somme de deux produits
  Dans chacun de ces produits existe un facteur commun;
- les exemples variés :
  Le facteur commun n'est pas toujours apparent : $14 + 21a$
  Le facteur commun peut être un monôme : $6a^2b + 3ab^2$
  puis un binôme...

On comprend en étudiant ces deux concepts que, vu leurs différences ,les élèves aient plus de facilité à les traiter de manière distincte et donc à écrire(au moins dans un premier temps) deux "étiquettes" différentes :

$$a \times (b+c) \rightarrow a \times b + a \times c$$
$$a \times b + a \times c \rightarrow a \times (b+c)$$

Alors que la symétrie de l'égalité ne nous pose pas de problème pour passer d'une utilisation de la formule à l'autre, l'usage fait par les élèves d'une flèche remplaçant le signe = est bien l'indice de cette non-symétrie ressentie par eux.

Il apparaît ici que les critères de reconnaissance d'une formule comprennent non seulement la forme algébrique (le " c'est quoi ? ") mais aussi le " ça fonctionne comment ? "et le " ça sert à quoi? " qui sont complètement différents suivant le sens choisi.

Au delà de ces spécificités (en particulier, le choix du " sens " de fonctionnement), la formule soulève d'autres obstacles qui vont être étudiés dans les paragraphes qui suivent.

Le signe égal

1. Des représentations qui font obstacle

= est un séparateur :

En arithmétique, et donc pendant tout le primaire, le signe égal est essentiellement utilisé pour exprimer le résultat final d'un calcul. Le signe égal signifie donc pour les enfants du primaire " **Cela donne** ". L'écriture fréquente d'une succession d'égalités sur une même ligne, tend à renforcer cette première représentation.

Ce " Cela donne " pourrait être symbolisé par une flèche «⟶» qui indiquerait " **là, c'est la suite du calcul ".** C'est ce qui amène certains enfants à finalement écrire des calculs du type :
$2 \times 5 + 3 - 7 = 10 + 3 = 13 - 7 = 6$ le signe égal n'est plus qu'un **séparateur** dans une succession d'étapes de calculs partiels.

Les exercices à trous usuels 25 - ... = 10 ne permettent pas de bousculer cette représentation. En effet l'enfant ce dit " *25 moins quoi **donne** 10* "

L'élève de primaire rencontre aussi le signe égal dans des premières formules de périmètre, par exemple P = $2 \times L + 2 \times l$. Là encore l'idée qui se construit sur le signe n'est pas efficace en calcul littéral, en effet les enfants traduisent dans leur tête par " *Pour calculer le périmètre **il faut** ...* ". Le signe = est plutôt interprété comme « **:** » c'est-à-dire qu'ils voient " **P** : $2 \times L + 2 \times l$ " le signe égal est **l'annonciateur d'une indication**, d'une information.

Ces représentations sur le sens du signe = sont très prégnantes. Une enquête que nous avons réalisée sur 200 élèves de troisièmes diverses, nous a montré que un peu plus de 60% de ces élèves avaient encore ces représentations.

Une égalité est toujours vraie

De même , la fréquentation que les élèves ont eu du signe =, les a amenés à penser que quand on écrit une égalité, ça veut dire que c'est toujours vrai.

Les élèves perçoivent difficilement la différence qu'il y a entre l'égalité $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ et l'équation $(x + 1)^2 = 4$. Ils ne savent que penser de $1+ a = 1 + b$ par exemple. Cest ce qui ressort du test passé dans les classes de troisièmes. Les élèves conçoivent mal qu'une égalité puisse n'être que quelques fois vraie !

Que penser d'une égalité qui ne serait jamais vraie : le professeur a fait une erreur, c'est un non sens. En effet, par exemple dans $0x = 0$, l'élève peut reconnaître la règle "quand on multiplie par zéro, ça fait zéro", alors que $0x = 1$, c'est vraiment n'importe quoi !

2. Des démarches qui font obstacles

Les élèves arrivent donc jusqu'en classe de quatrième, sans que les situations où ils ont rencontré ce signe égal aient pu modifier leurs représentations. Ils auront peut être fait un peu de calcul littéral en cinquième au travers d'exercices du type :

- Simplifier « $2x + 5x$ »
- Développer « $3(x+5)$ »

Le signe égal n'est encore qu'un " Cela donne ".

En quatrième, ils vont devoir apprendre à résoudre les premières équations :
Ils vont voir, parce qu'on essaie de commencer par des choses simples :

$$3x - 5 = 7$$
$$3x = 7 + 5$$
$$x = \frac{12}{3}$$
$$x = 4$$

L'enseignant expliquera peut-être le principe de la transposition
L'élève lit dans sa tête « $3x$ -5 donne 7et $3x$ donne 7+5 ; $3x$ donne 12/3 ; ... »
Il a l'impression de comprendre, il résume ce que le professeur a dit *" Il faut passer les nombres de l'autre côté en changeant le signe "*. Il ne sait pas ou il ne sait plus pourquoi, mais ça lui est égal, puisque s'il fait ça, il aura des bonnes notes ! Il commence à construire du non sens.

Quand le professeur propose plus tard :
$3x - 5 = 7 + x$, là, il ne comprend plus ; ce n'est plus pareil du tout : " *Qu'est ce que cela peut signifier* « $3x$ -5 donne 7+ x ? " . L'absence de sens construit l'incitera à tenter de mettre en oeuvre son seul point de repère, la règle d'action qu'il s'est construite : " *On passe les nombres de l'autre côté en changeant de signes* ". Si rien ne se passe, s'il fait partie de ces élèves qui ne se représentent pas le x comme un nombre, bientôt il écrira ce que le professeur appellera " *n'importe quoi* ".

3. Vers les équations

On voit que le passage au signe égal dans l'équation n'est pas simple :
Pour que l'élève comprenne les équations, en admettant que chaque terme en soi ait déjà un sens pour lui, il faut qu'il conçoive :

- **Que le signe égal exprime que ces deux expressions doivent donner un même résultat**
- **Que l'on veut trouver toutes les valeurs possibles**
- **Que d'une ligne à l'autre ce sont les mêmes valeurs de x qui vont satisfaire l'égalité.**

Il faut favoriser la construction du sens du signe égal comme "balance"...

Pour que la représentation du signe égal soit efficace, l'élève doit considérer la symétrie et la transitivité comme des propriétés évidentes et naturelles de l'égalité. On peut être certain que le sens est mal construit quand par exemple, un élève qui aboutit à : $2 = x$ ne conclut pas sans hésiter que : $x = 2$. Et pourtant ils sont nombreux ceux à qui cette transformation pose problème.

Il pourrait être intéressant dès le début de la sixième, d'inciter les élèves à compléter des égalités du type :

$2 \times 5 = \ldots + 3$

$2 \times \ldots\ldots + 1 = 3 \times \ldots - 3$

$\dfrac{3}{} = \ldots + 1$

...

$5 \times \ldots\ldots = 0 \times \ldots\ldots$

En procédant par essais-erreurs l'enfant, se construit peu à peu l'idée "de chaque côté du = ça doit faire la même chose, ça ne marche pas pour tous les nombres mais seulement quelques-uns"

On pourra aussi leur proposer d'inventer des histoires pour donner du sens aux expressions et trouver ainsi des manipulations pour les transformer .

L'activité de la page 22, où l'imaginaire vient au secours du sens en est un très bon exemple.

Ce type d'activité prépare aussi à savoir vérifier qu'un nombre est solution d'une équation.

On gagnera à faire durer cette pratique d'essai-erreur jusqu'en quatrième. En effet si l'on a pas encore donné de méthode et que l'on demande "trouver le nombre x tel que $2\,x = 6$, les élèves trouvent sans difficultés que x vaut 3. Alors que s'ils sont très vite outillés de méthodes de résolutions, on verra des réponses aberrantes telles que $x = -3$ ou $x = \dfrac{2}{6}$ ou encore $x = 4$!

Il est donc indispensable d'aider les élèves à se construire une représentation efficace du signe égal avant de les doter de techniques de manipulations autour du signe égal.

La lettre

Pour nos élèves,un des obstacles du calcul littéral, est le passage du nombre (qu'il soit entier, décimal, fractionnaire ou relatif) écrit avec des chiffres, au nombre représenté par une lettre. Elle peut aussi bien être a, b, c ou m, n, t ou x, y, z que π, α, i, θ, etc... avec tout ce que cela comporte de secrets.

Un deuxième obstacle est la manipulation de ces lettres et des règles de calcul bien spécifiques qui sont du domaine de l'algèbre.

1. Quand rencontrons-nous la lettre au travers des programmes du collège ?

programme	nos commentaires	obstacles
En 6ème : Substitution de valeurs numériques à des lettres dans une formule. Initiation à la résolution d'équations : Trouver dans une situation numérique simple le nombre à ajouter à (ou à retrancher à ou par lequel multiplier) un nombre donné pour obtenir un résultat donné.	On passe là de la lettre au nombre et on reste dans le domaine des grandeurs (longueurs, aires, volumes) La désignation du nombre manquant est une nécessité dans ces différentes activités et on peut rester dans le domaine de l'arithmétique.	**les lettres ont des rôles variés** Les lettres désignent les unités : *ℓ, m, kg* Les lettres désignent des points et des longueurs : AB Le nombre manquant est plutôt désigné par .... ou ☐
En 5ème : Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition traduite par l'identité $k \times (a+b) = k \times a + k \times b$ les commentaires précisent à cet égard : « la comparaison avec sa formulation en français... pourra être l'occasion de montrer un intérêt (en économie et précision) de l'écriture symbolique. « Initiation aux équations : Trouver dans une situation numérique simple le nombre par lequel diviser un nombre donné pour obtenir un résultat donné. Tester une égalité	On passe du nombre à la lettre pour généraliser une loi, pour avoir une écriture symbolique. La lettre apparaît comme un simplificateur dans la communication.	Passage trop rapide à la convention qui supprime le signe × et de a + (-b) à a - b La lettre désigne un nombre relatif (-a) pose problème La plupart des problèmes peut se résoudre sans faire appel aux équations
En 4ème « Le calcul littéral sera introduit avec prudence en veillant à ce que les élèves puissent toujours donner du sens aux activités entreprises dans ce cadre » Réduire des écritures littérales Développement d'expressions telle que (a+b) (c+d) Effet de l'addition et de la multiplication sur l'ordre Equation de 1er degré à une inconnue Résolution de problèmes	Passage dans le monde de la lettre On calcule avec des lettres en suivant des règles propres à l'algèbre. Il y a passage à la symbolisation et on ne se raccroche plus à une situation concrète. La lettre permet de faire le lien (dans les deux sens) entre le monde très contextualisé des grandeurs et le monde de l'abstraction mathématique.	Le statut des différentes lettres : a et x ne jouent pas le même rôle Les conventions se multiplient Suppression des × Priorité des calculs L'obstacle majeur est le passage à la résolution de ax + b = cx + d

En 3ème Factorisation Systèmes d'équations Résolution de problèmes Equations de droites, fonctions affines	Nouvelle notion de correspondance entre grandeurs ou seulement entre nombres abstraits	Introduction de $y = ax + b$ où toutes les lettres n'ont pas le même statut.

2. Les obstacles

Dès le primaire, les élèves rencontrent des lettres en mathématique. La lettre n'est à ce moment là qu'une étiquette, une abréviation : le l désigne la largeur du rectangle, le c le côté du carré, le m le mètre... En sixième cette représentation va se juxtaposer avec les lettres qui servent en géométrie, A (AB) AB... **Pour l'élève la lettre désigne un objet.**

Premier obstacle : la lettre est un objet

A l'entrée en 4ème, dans le cadre de la réduction d'écriture, quelle signification donner à l'écriture 5m + 3m ? ,Dans la tête de l'apprenant, comment se fait la distinction subtile entre :

- 5 mètres et 3 mètres qui est une « opération » sur des grandeurs que l'on compte, après avoir défini une unité (ici le mètre) et qui peut aussi bien être représenté par 5m et 300cm et qui donne 8m ou 8 mètres ou encore 800 cm !

- La somme des deux nombres «abstraits » 5m et 3m, qui, en fait, sont $3 \times m$ et $5 \times m$; l'un produit de 5 et du nombre m et l'autre produit de 3 et du même nombre m.

Et ces nombres, dans notre cas précis, peuvent se traduire par : (m+m+m+m+m+)+(m+m+m) et devenir $8 \times m$ ou encore 8m.

Et que devient la représentation de l'élève quand il voit $1{,}2m + \sqrt{2}\,m$?

Quelle conséquences pour notre enseignement ?

- Doit-on bannir l'explication parlante : 3a + 2a = 5a c'est comme 3 abricots + 5abricots, ça fait 8 abricots ! (Quel est le mystère du « ça fait » ?)

- Doit-on rester plus longtemps sur l'écriture passerelle 3a +2a = (3+2) a = 5a ?

Cela prépare pour en seconde : $3\vec{u} + 2\vec{u} = (3+2)\vec{u}$

Second obstacle : le nombre relatif

Les élèves sont habitués à rencontrer les différentes lettres dans des situations précises. Par exemple, ils s'entraînent à résoudre des équations dont l'inconnue est x. Le jour où, dans un problème, ils ont à trouver la valeur de a ou de m tel que... ils ne reconnaissent pas qu'ils ont affaire à une équation et hésitent à appliquer les règles qu'ils connaissent.

Le x dans les développements ou les factorisations est identifié comme étant une inconnue à déterminer.

Troisième obstacle : les conventions

La lettre désigne le nombre relatif et englobe le signe. Le passage du signe - : « opposé de » au signe -, signe opératoire de a + opp(b) = a +(-b) = a - b s'il se fait trop vite sera identifié par les élèves comme une convention où l'on peut supprimer les signes +. La confusion est alors totale quand on aborde la convention de suppression des signes $\times$!

Il semble donc nécessaire, dans chaque situation où il y a évolution de l'écriture, de garder l'écriture première assez longtemps. Ce sont les élèves qui peuvent savoir le moment où chacun est prêt à faire évoluer son écriture sans perdre le sens de ce qu'il écrit.

Quatrième obstacle : le statut de la lettre

Quand on regarde toutes les situations où sont présentes les lettres, on peut s'interroger non seulement sur leur rôle mais aussi sur leur statut.

- Une variable

  Dans de nombreux exercices, on retrouve le x qui représente un nombre quelconque qui n'est autre qu'une variable. Ainsi :

  Développer et réduire l'expression : $(4x + 3)(2x - 7) - 5(2x - 7)$

  Factoriser l'expression : $(4x + 3)(2x - 7) - 5(2x - 7)$

  Cette variable peut disparaître au profit d'une valeur qui lui est attribuée :

  Donner la valeur numérique de $8x^2 - 32x - 20$ pour $x = \sqrt{2}$

  On retrouvera plutôt les a et b dans d'autres cas, notamment dans les identités remarquables telle $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ égalités vraies quelles que soient les valeurs attribuées aux deux variables indépendantes a et b.

  Le problème pour l'élève est d'identifier les situations où il peut remplacer la lettre par une valeur.

- Une inconnue

  La lettre représente un nombre qui manque et que l'on cherche, l'inconnue :

  Résoudre l'équation $2(2x - 7)(3x + 1) = 0$

  Quelles valeurs peut-on donner à la variable pour que telle égalité ou telle inégalité soit vraie ?

  Peut-on avoir $(a+b)^2 = a^2 + b^2$?

- Un paramètre

  Lorsque l'on aborde les équations de droites dans le plan, plusieurs lettres apparaissent et ne tiennent pas le même rôle.

  L'écriture : « $y = mx + p$ » ou « $y = ax + b$ » est ainsi un obstacle. Les difficultés conceptuelles s'accumulent au travers de ces écritures symboliques.

  $(x\ ;\ y)$ représente un couple de nombres, coordonnées, dans un repère fixé, d'un point de la droite d'équation $y = mx + p$

  m et p sont les coefficients et chacun a un rôle précis.

  Et puis cela se complique puisque les uns ou les autres, suivant le problème donné, peuvent être donnés ou inconnus !

- Le sens est dans le contexte

  Toute lettre remplace implicitement un nombre et tient un statut de variable, sans que l'on ait systématiquement à la faire varier.

  Seul, le contexte amène à savoir quels sont les différents objets par lesquels on aura à les remplacer.

  Donne-t-on la même signification à « $x = 2$ » à la fin de la résolution d'une équation et à la droite d'équation : $x = 2$?

3. Rôle de la lettre dans la résolution de problème

Dans la résolution de problème, la lettre fait le lien, dans les deux sens, entre le monde très contextualisé des grandeurs avec « les nombres de.. » et le monde abstrait des nombres (tout court !). avec leurs règles propres. Ces derniers permettent de mener, hors contexte, des calculs et de trouver des solutions aux problèmes. Il faudra alors re-traduire ces résultats, vérifier leur vraisemblance, en les re-contextualisant par un retour au problème posé.

Le résultat

Nous sommes très souvent confrontés au doute et à la perplexité de nos élèves devant leurs résultats.

Pour ceux qui ne sont pas sûrs de leurs méthodes, nous les entendons dire:
« *ce n'est pas possible* », « *ça ne tombe pas juste* », « *le nombre est trop grand* », « *c'est trop long* », « *ça ne se simplifie pas assez* ».... preuves qu'ils ont une attente, il semble qu'ils se soient fait des idées du « bon résultat » au fil des exercices et des années, selon leurs critères propres et qu'ils ne savent pas les faire évoluer en parallèle avec le cours qui s'enrichit de notions nouvelles. Pour d'autres, c'est un moment de réflexion et de vérification; des phrases analogues sont le signe d'un bon esprit critique. D'ailleurs, nous mêmes les interpellons sur la vraisemblance des résultats.

1. Qu'est-ce qu'un résultat ?

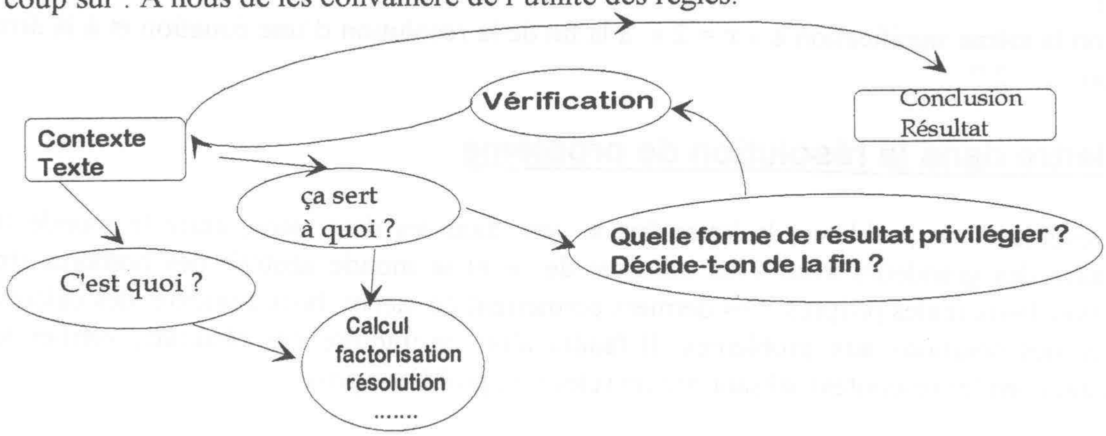
Cette question en suscite d'autres quand au texte de l'exercice

- Que demande t-on ?
  - { calculer
  - { exprimer
  - { déterminer
  - { résoudre
  - { démontrer que

- Qu'attend-on ?
  - une valeur exacte
  - une valeur approchée
  - une réponse réduite, simplifiée: si les conventions de simplification ont été fixées dans la classe, les réponses du type $\frac{2}{6}$, $-2x + 3 - 5x$ sont-elles acceptées comme résultat?
- Quels indices donne-t-on aux élèves?
- Le contexte est-il suffisamment précisé?
- Quelle est la place de l'implicite?

On peut dire que le résultat correspond à une fin, mais alors comment savoir que c'est fini ?

Dans un grand nombre de cas, l'usage des calculatrices permet des vérifications. Leur diversité et leur technologie ne permettent, pas malgré tout, aux élèves en difficultés de compenser leur handicap à coup sûr . A nous de les convaincre de l'utilité des règles.



2. Le poids des naturels

Les enfants commencent à compter avec les entiers naturels. Les premières notions, et non des moindres, s'établissent dans cet ensemble (sens de l'addition, de la multiplication, les premières expériences de géométrie -calculs d'aires - et les premières situations de problèmes). De plus, pendant longtemps, dans ce contexte riche, les nombres entiers ne donnent naissance qu'à des nombres entiers..... jusqu'au jour de la division.

D'ailleurs ces nombres étant bien connus, nous utilisons largement ce capital lorsque nous introduisons une notion nouvelle. Ils permettent dans un premier temps de ne pas disperser les efforts. Leur emploi met nos élèves en confiance et ils s'y raccrochent souvent. Il faut toutefois leur proposer des exercices de transition vers les autres ensembles.

Le problème lié aux nombres est dû au fait que les entiers ne sont pas de la même nature que les réels et en particulier c'est le passage du discontinu au continu qui fait obstacle.

De plus la seule nature des nombres ne suffit pas à expliquer toutes les difficultés, la forme des problèmes joue aussi un rôle important.

Ces ruptures sont bien plus ressenties par les élèves fragiles et elles ont des conséquences multiples sur les résultats.

3. Avec les décimaux, les rationnels et les réels

Les décimaux sont cependant bien acceptés. Ce sont les rois de la calculatrice et très souvent des valeurs approchées. Ils sont très utilisés dans les autres matières et... « au moins avec eux on voit combien ça fait »

Souvent dans les calculs élèves, ils viennent incognito remplacer les fractions, π, ... et les élèves qui agissent ainsi ont alors **l'illusion de la valeur exacte** puisque la manipulation a eu lieu en amont.

Il est difficile de convaincre ceux qui connaissent mal les règles de calcul dans $\mathbb{Q}$ de renoncer à cette pratique, ils questionnent souvent « ça sert à quoi ? ».

Les racines carrées permettent plus facilement de convaincre de l'intérêt de la valeur exacte : $(\sqrt{3})^2 = 3$.

Ainsi la pratique des calculs dans les différents ensembles de nombres et la qualité de la maîtrise des règles retentissent sur la forme du résultat.

L'exigence d'un résultat, sous forme de valeur exacte, est un obstacle majeur pour beaucoup d'élèves.

- Ils manipulent plus aisément les nombres décimaux donc les valeurs approchées.
- Ils ne se font aucune représentation de ces nombres, tels que $\sqrt{3}$ ou 2/3... Ils n'ont donc pas d'ordre de grandeur disponible en mémoire, c'est un obstacle pour la validation d'un résultat.

Bien sûr, se pose le problème de ce que l'on évalue.

4. Avec les lettres

C'est plus complexe. Leur présence est assez bien admise dans les résultats de factorisation, de développement, mais trouver un périmètre de 2a + b ! est-ce encore un résultat ? Nous entendons souvent la remarque: « *Ce n'est pas un résultat, ce n'est pas un nombre* !»

Nous retrouvons dans ce contexte, toute l'importance à accorder au sens.

Accepter un résultat sous forme littérale révèle les capacités d'abstraction de l'élève.

5. Quand le résultat est donné dans la question

C'est le fameux « **Montrer que** ... », avec son exploitation dans la suite d'un problème. Il s'agit d'une situation doublement difficile à gérer pour nos élèves : répondre d'une part et penser à réinvestir d'autre part.

D'habitude le contrat est de trouver et de donner une réponse correcte. Ici la réponse est donnée ; y-a-t-il rupture de contrat ? De nombreux repères sont bousculés. Les questions « C'est quoi? », « Ça sert à quoi ? », « Ça fonctionne comment ? » sont d'actualité. Ici la notion précédente de résultat est dépassée, la réponse s'exprime différemment. La formulation « *Montrer que* .. »renvoie à la notion d'*égalité*. (équivalence, transitivité, un exemple ne suffit pas à valider)

En fait il y a deux sortes de situation :

1° situation

Des questions du type « Montrer que *f(x)*=..... » où les verbes d'action (dériver, transformer, et vérifier) ont été éludés. Mais l'élève entraîné peut reconnaître l'action à réaliser et les différentes étapes qui lui permettront de trouver le résultat attendu.

2° situation

Des questions du type « Montrer que pour $x \in]2, +\infty[$ $\dfrac{2x-1}{x-2} = 2 + \dfrac{3}{x-2}$ » qui s'ouvrent sur une pluralité de démarche, des équivalences successives pouvant être proposées. Le choix de la démarche est alors beaucoup plus complexe.

Ensuite comment utiliser cette question ?

Quand ils n'ont pas bien su répondre à la question, les élèves ont souvent tendance à s'arrêter et n'osent pas réinvestir un résultat qui leur est pourtant donné. Remarquons que cela nécessite une implication personnelle de leur part « *Je n'ai pas trouvé, mais j'utilise la donnée du texte* .... ». Le lien d'une question à l'autre est en cours d'apprentissage, en lycée.

Derrière le mot RESULTAT, il y a des conventions multiples qui entrent en jeu. c'est donc un point important qui mérite une attention particulière et qui est constamment à actualiser.

LE PROFESSEUR

UN MEDIATEUR

AU MOMENT DE LA PREPARATION

1. Tenir compte de ce qu'ils savent déjà

Il est souhaitable qu'une activité soit soigneusement pensée et préparée par l'enseignant. C'est de cette préparation que dépend la qualité de la médiation. C'est en effet à ce moment là que l'enseignant fait des choix : choix du document, choix de la situation de classe, choix du temps qu'il souhaite laisser aux élèves en recherche : le temps qu'il veut y consacrer dans sa progression.

Nous allons l'illustrer dans l'exemple suivant :

Nous sommes dans une classe de seconde, en début d'année et il s'agit de réviser les factorisations avant d'aborder les résolutions d'équations.

L'enseignant souhaite que l'activité permette de révéler ce que les élèves savent encore sur le sujet, il veut valoriser leurs acquis antérieurs et dépister leurs difficultés éventuelles sans qu'elles soient vécues comme un échec. Pour cela il choisit de privilégier l'expression des élèves et les échanges entre eux.

Le travail en petits groupes apparaît alors comme la situation idéale pour permettre ces échanges.. Ce sera l'occasion pour eux de mieux se connaître, d'apprendre à travailler ensemble et d'enrichir l'activité de leur diversité.

Le choix est fait de solliciter leur créativité et de développer leur capacité de reconnaissance d'expressions littérales plutôt que de les « entraîner sur des exercices plus techniques ». Un temps long sera laissé à cette activité afin de permettre au plus grand nombre d'aboutir, le professeur souhaitant bâtir la synthèse sur la base des travaux produits par les élèves.

Consignes

- Voir feuille polycopiée remise aux élèves page 60
- Remettre un travail écrit par petit groupe

Description de la séance

- *<u>1° séance</u> :*

Une heure (classe en demi-groupes).Les élèves travaillent par quatre. Venant de nombreux collèges, ils ne se connaissent pas encore. Les groupes de quatre sont hétérogènes.

Après un moment de surprise, ils se mettent en recherche et demandent au professeur de contrôler les premières propositions.

Certains groupes proposent alors des expressions factorisées construites à l'identique. Il faut des encouragements pour **qu'ils se risquent** à plus de diversité et s'engagent vraiment.

Finalement, on fait une mise en commun avant de commencer le paragraphe 2. La confiance est établie.

Les groupes progressent de façons très diverses. Tous abordent 3 mais peu commencent 6.

- *2° séance* :

Pour tirer parti de ce travail, il était souhaitable de faire un compte-rendu en commun, à partir des travaux des élèves : montage des différentes contributions-rétroprojecteur, choix des exemples retenus pour illustrer chaque thème, formulation commune, chaque élève pouvant compléter.

Intérêt de cette activité

Les élèves sont motivés par l'aspect « inventer ». La première surprise étant passée, ils se trouvent vite des compétences et sont actifs. Cette activité est source de discussion.

- Inventer, classer sont des activités qui obligent l'élève à s'investir personnellement, à clarifier ses idées (c'est différent d'une simple résolution d'exercice).
- Cette activité permet une révision adaptée à chacun.
- Le professeur discerne mieux la maturité des élèves face à l'écriture littérale.

Cette activité a permis de **dépister un obstacle** inattendu. Lors de la 1° séance, au cours de la mise en commun concernant I°, les élèves ne sont pas satisfaits par les deux grands groupes « formes factorisées » et « formes non factorisées ».

Il s'ensuit une discussion sur la **différence de sens entre factorisable et factorisée**.

Ils expliquent : « *Pourquoi 2 (x +1)+ x(x +1) ne peut-il être rangé avec les formes factorisées, alors que dans notre tête on le voit comme (2+ x)(x +1)?* »

Très vite vient l'idée d'un groupe « formes factorisables ». C'est un grand soulagement pour les élèves qui, dans les cas évidents, voyaient la factorisation dans leur tête et la considéraient comme effective. Maintenant la distinction se fait!

Cela permet alors de re-préciser la notion de forme factorisée.

Il est important de souligner que ce langage formel n'a pas été apporté a priori. S'il est introduit à ce moment là, c'est qu'une difficulté émergeait de l'activité et que ce vocabulaire en facilitait la compréhension. Il répond alors **au besoin** de clarification des élèves et comme tel, il est immédiatement investi d'un sens correct.

Tout au long de l'activité, par contre c'est le langage élève qui est privilégié. C'est de la richesse de leurs échanges et des expériences vécues par chacun, au sein de l'activité, qu'est née la nécessité d'un langage formel qui pouvait être compris de tous.

Bien entendu, les élèves connaissaient déjà les vocables « forme factorisée » et « forme factorisable », mais ils n'y associaient pas pour autant l'idée correcte. Ce qui a débloqué la situation, c'est qu'ils puissent verbaliser ce qu'ils pensaient : « *Dans ma tête, 2(x+1)+ x(x+1), c'est pareil que (2+ x)(x+1)* ».

Lors des exercices qui ont suivi (6) il y a eu moins de fautes qu'à l'ordinaire. La vigilance étant moins sollicitée par la factorisation elle-même s'est alors bien exercée sur le calcul algébrique.

Il semble bien dans ce cas que l'obstacle qui s'est révélé, ait été franchi par la majorité des élèves de la classe.

Dans la suite du cours, il y a eu une bonne répercussion sur les résolutions d'équations.

THEME : FACTORISATIONS

I. Inventer des expressions factorisées, puis des expressions non factorisées.

Question :

- ❐ Des expressions non factorisées sont-elles toujours des formes développées ?
- ❐ Citez des contre-exemples et conclure.

- ❐ Comment reconnaissez-vous à coup sûr une expression factorisée ?

2. Inventer des expressions que vous savez factoriser.

3. Quand on vous dit « factorisez cette expression », vous vous dites :

- Je pense à chercher un facteur commun.
- Je pense à ....
- ....

4. Quand il s'agit de factoriser :

ce que je sais bien faire en général	Les situations où je faisais des erreurs

5. Factoriser ça sert à quoi ?
Dans quelle(s) situation(s) avez-vous utilisé des factorisations ?

6. Factorisez (au maximum) les expressions suivantes, quand c'est possible :

$$A = (x+6)^2 - 2(x+1)(x+6)$$
$$B = 16x^2 - 49$$
$$C = 4x^2(x+3) - 2x(x+3)$$
$$D = 9x^2 - 12x + 4$$
$$E = (5+x)(a-3x) + (3x-4)(x-4)$$
$$F = \frac{x^2}{16} - \frac{49}{25}$$
$$G = (4x-8)(1-2x) - (9x-18)(5-x)$$
$$H = (6x-1)^2 - 4x^2$$
$$I = (3x+7)^2 + 18x + 42 + (9x^2 - 49)$$

Quelques réponses d'élèves (issues du travail écrit à la fin de la 1° séance)

1° Question

Expressions factorisées

¤ $5(x+3)$; $(2x+3)(3x+2)$; $(5x-2)(3x^2+1)$ ...

¤¤ $(x+5+3)^2$; $7x(3-2)$; $9(5x+3y+1)$; $x[(5-6)+(7x3)]$; $(x+25+9)$...

Expressions non factorisées

¤ $3x+12x^2+18x^3$; $(8+3x)(6x+5)-(8+3x)(5x+3)$; $2x+14$; $36x^2-9$;

¤¤ $25+36+x^2$; $9y^2+3x+6$; $(7x-x)+11x^2$; $(5x-6x)+(7x \text{ x } 3x)$;

Je reconnais à coup sur une expression factorisée

- On ne peut plus trouver de facteur commun, elle se présente comme un produit de facteurs ou avec un exposant: $(X+2)^2$

- Produit de facteurs (3 groupes)

- C'est une expression factorisée à son maximum

- On regarde la dernière opération, il faut que ce soit un produit.

- Pas de réponse (3 autres groupes).

2° Question

Des expressions que vous savez factoriser

¤ $(5+x)(1-2x)+(5+x)(x-4)$

¤ $(4x-8)(4-3x)+(3x-4)(9-7x)$

¤ $(9x-8)(2x+12)+(18x-16)(3x+1)$

¤ $(3x+2)(7x-4)+(3x+2)$

¤ $16x^2+1-8x$

¤ $36x^2-9$

¤ $12-4x^2$

Partie délicate pour de nombreux groupes. Les exemples cités sont issus des travaux de quelques groupes seulement.

5° Question

Ca sert à quoi?

- Factoriser sert à simplifier une expression pour faciliter certains exercices.(un groupe)

- Ca sert à réduire les expressions. (Un groupe)

2. Préparer en tenant compte d'obstacles repérés

Parfois la difficulté est connue par l'enseignant du fait de son expérience antérieure ou est repérée par l'observation de travaux d'élèves. Il s'agit dans ce cas d'élaborer une activité qui permette aux élèves d'identifier l'obstacle et de se construire des repères pour ne plus se tromper.

L'activité suivante en est une illustration :
En classe de seconde, les élèves effectuent des simplifications abusives lors de la résolution d'équations, par exemple dans $x^2 = (2x-3)^2$, ils suppriment les carrés ou dans $x(x+2) = x(2x-3)$, ils simplifient par x...

Les discours habituels du type « *On ne peut pas simplifier par zéro* » ne parlent pas aux élèves qui commettent cette erreur. Il fallait donc inventer une nouvelle situation pour les aider à comprendre ce qui se passe quand ils font ce type de simplification.

L'idée est de sortir du langage algébrique, de s'appuyer sur la représentation graphique et de favoriser les allers et retours entre ces deux langages. Les élèves ont déjà étudié les fonctions usuelles.

Consignes

- voir feuille polycopiée remise aux élèves page 64
- En groupe résoudre le I - tous les résultats et graphiques seront reportés sur le transparent fourni.

Description

Il s'agit d'un module de deux heures dans lequel ont été regroupés les élèves qui avaient déjà commis ce type d'erreur. L'activité devra être entièrement traitée dans ce cadre horaire puisque le reste de la classe n'est pas concerné.

Dans un premier temps, en petits groupes, les élèves répondent au Ia) b) et c). Leurs graphiques et leurs conclusions sont reportés sur transparent. A l'issue du c), les groupes ayant commis l'erreur de simplification sont invités à représenter graphiquement f1(x) = 2x +3 et g1(x) = x puis à confronter leur résolution avec les deux graphiques produits.

Ce travail est suivi d'une mise en commun au rétroprojecteur. Elle permet aux élèves de formuler collectivement leur conclusion.

Le d) est alors résolu en groupes. Il permet de dépasser le cadre du simple exemple et de s'approprier la démarche. Les élèves sont ensuite invités à s'auto-évaluer en résolvant les équations proposées au II. Cela amène les élèves à s'interroger sur leur méthode de résolution. En effet ces élèves, pensant posséder une bonne méthode, refusaient de ramener le second membre à zéro puis de factoriser le premier membre. Certains reviendront à cette méthode, alors que quelques autres préféreront fonctionner avec la règle « Avec deux carrés, il y a deux solutions opposées ».

Intérêt de cette activité

Les élèves n'ont aucune difficulté pour aborder l'activité. La structure en petits groupes évite que quelqu'un ne reste bloqué, des explications se font spontanément entre les élèves.

L'intérêt majeur réside toutefois, dans le « déclic » qui se produit dans la tête des élèves, au moment où ils confrontent leurs résolutions et les deux représentations graphiques, l'une avec deux paraboles et l'autre avec deux droites. En effet ils comprennent pourquoi ce qu'ils faisaient était incorrect. Par la suite, ces représentations graphiques joueront un rôle mnémotechnique important dans la reconnaissance de ce problème.

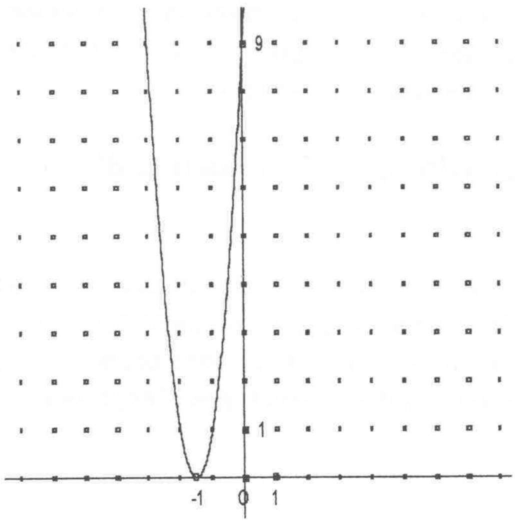
De plus cette compétence qui vise l'association de la résolution d'équations avec la recherche des points d'intersection de deux courbes est, en soi, un acquis fondamental. Leurs calculettes graphiques leur permettent des réalisations rapides pour estimer le nombre de solutions d'une équation et leur ordre de grandeur.

Cette association du langage algébrique et des représentations graphiques participe à la construction du sens des équations.

MODULE : « EQUATIONS DU SECOND DEGRE »

I. Dans le repère ci-dessous, on a tracé la courbe représentative de la fonction f, définie par

$f(x) = (2x + 3)^2$



a) Dans le même repère, tracer la courbe représentative de la fonction g, définie par : $g(x) = x^2$

b) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$

c) Résoudre par le calcul l'équation : $(2x + 3)^2 = x^2$

d) Résoudre graphiquement $x^2 = 4$, puis par le calcul. Vérifier la réponse.

II. Résoudre les équations suivantes :

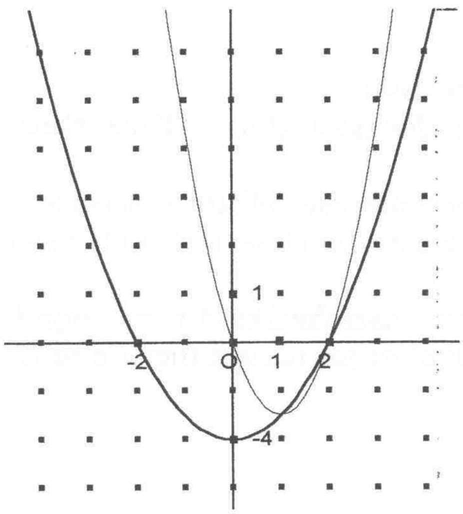
a) $4x^2 = 5$

b) $(3x - 7)^2 = 9$

c) $(8x + 1)^2 = (5 - x)^2$

d) $x^2 = (5 - 2x)^2$

III. Dans le repère ci-dessous on a tracé les courbes représentatives C_f et C_g respectivement des fonctions f et g définies par : $f(x) = x^2 - 4$ $\quad$ $g(x) = 3x^2 - 6$



a) Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$

b) Résoudre graphiquement $x + 2 = 3x$

c) Résoudre par le calcul $f(x) = g(x)$

— C_f

— C_g

3. RESISTER AU DESIR DE DONNER DES RECETTES

Si l'on veut aider l'élève à acquérir des connaissances durables et réutilisables, mieux vaut lui permettre de donner du sens à ce qu'il fait, **le laisser se construire son savoir**. Les demandes de recettes sont exprimées fortement par les élèves car elles ont un côté sécurisant. C'est bien plus rassurant d'appliquer une règle, de faire comme dans l'exemple que vient de montrer le professeur. Chercher une activité nouvelle, dont on ne perçoit pas nécessairement, a priori, tous les tenants et aboutissants et qui va solliciter une activité intellectuelle plus importante, est exigeant.

Le plus important est de fournir à l'élève une activité qui lui permettra d'élaborer ses propres repères.

Au travers de l'exemple qui va suivre, nous allons pouvoir découvrir une activité qui avait cette finalité. Nous pourrons constater l'écart entre les recettes, les formules que se donnent les élèves et celles qu'aurait probablement fournies l'enseignant. Les formulations des élèves sont plurielles, dans leurs formes plus ou moins schématiques, plus ou moins abstraites et dans leurs types d'expression.

Objectif et contexte de l'activité:

Cette activité se situe en classe de seconde, après un travail de reconnaissance de formes factorisées, formes factorisables, formes développées. L'objectif est de permettre aux élèves de reconnaître a priori le type de résolution à mettre en oeuvre. Cela doit leur permettre d'acquérir une attitude réflexive face à une résolution d'équation.

Consigne

Classer, sans les résoudre les équations en fonction du type de résolution à employer. Vous préciserez, à quoi celles d'une même famille peuvent être identifiées.

Description des séances :

1ère séance - 1h -

Cette activité prend place sur un temps de module donc en demi-classe

Les élèves sont répartis en petits groupes de quatre. Ils disposent chacun d'une planche d'étiquettes. (Cf page 67, 68)

Après un temps de réflexion individuelle, ils doivent réaliser un classement collectif argumenté. Le professeur circule dans les groupes et les aide à exprimer leurs critères de classement. Cela revient souvent à donner un titre à la famille.

A l'issue de cette séance tous les groupes ont reconnu les principales familles et y ont rangé les équations les plus classiques. Mais ils ont tous des équations qu'ils n'ont pas réussi à trier. Ce ne sont pas les mêmes d'un groupe à l'autre.

2ème séance - 1h -

Deux alternatives ont été expérimentées :

- Mise en commun des différents classements proposés par les groupes. Le débat permet de dégager quelques classifications non pertinentes ou erronées et permet pour certains de découvrir une famille à laquelle ils n'avaient pas pensé. Puis les élèves retournent en groupes pour achever leur classement.

- Un débat est mis en place pour effectuer une sélection de titres parmi ceux élaborés dans les groupes, une classification collective est alors effectuée au tableau.

3ème séance - 1h -

Rédaction d'un cours personnalisé à partir de ce travail de classement(cf page 41).

Intérêt de cette activité

Pour les élèves

Les élèves s'investissent rapidement dans l'activité de recherche qui amène un questionnement riche au sein des groupes. Ils sont restés marqués par cette activité, parce qu'ils n'avaient pas besoin de résoudre ni même d'écrire. Ils ont pu côtoyer beaucoup d'équations d'un seul coup et cela leur a permis de différencier beaucoup d'équations. Une élève dit ***« je sais maintenant comment regarder une équation »***. Les élèves ont conscience d'avoir compris quelque chose qui n'était pas si facile.

Pour la classe

Cette activité laisse une large place à l'initiative des élèves. Les erreurs permettent des débats intéressants au sein des groupes et développent l'esprit critique de tous. Chacun peut progresser à sa façon dans la classification. On remarque que les familles sont d'autant plus nombreuses que les élèves sont en difficulté sur les équations. La réduction des catégories sera un indice de progression en calcul littéral.

Cette activité reste ouverte et évolutive. En effet de nouveaux cas rencontrés ultérieurement peuvent amener l'élève à définir de nouvelles familles ou, au contraire, à éprouver le besoin de regrouper plusieurs familles en une seule.

Par conséquent le bilan de cette activité fournit une base intéressante pour construire un cours adapté à la classe, voire à chacun. Cette trace mise en forme, présente l'avantage de rendre les élèves autonomes par rapport à la résolution d'équations. Ils sont alors capables de rechercher à quel type d'équation ils ont à faire et d'y associer un type de résolution pertinent.

Grâce à cette activité, les élèves vont rencontrer beaucoup d'équations posant généralement des difficultés à leur niveau. Alors qu'elles sont source d'échecs en devoir, ici ils les abordent de façon positive et constructive, voire même de façon ludique. Certains éprouvent du plaisir à relever le défi de tout classer, d'autres sont heureux d'exprimer ainsi la compréhension qu'ils ont tirée de l'activité.

La deuxième planche, page 68, peut permettre un prolongement, soit par un travail à la maison, soit par un travail en classe à un autre moment de l'année. enfin la troisième planche peut permettre une activité du même type en collège avec des classes de troisièmes.

Découper les étiquettes, puis les classer en fonction du type de résolution à utiliser.

1 $x^2-16=0$	2 $4(3x-5)=0$	3 $x^2+4=0$
4 $4-y^2=0$	5 $x^2-6x+9=0$	6 $2t+3=5-t$
7 $4x(2x-7)=0$	8 $4z^2=4$	9 $3x^2-5x+1=0$
10 $a^2+2a=1$	11 $a^2+2a=0$	12 $(x+1)(x+3)=x(x+1)$
13 $x^2-7x=x^2-5x+3$	14 $(2x-7)^2=25$	15 $(3x-5)^2=0$
16 $(y+1)^2-4=0$	17 $3-2(a+4)=5(5+a)$	18 $x^2-7=0$
19 $3x+8=3x-5$	20 $\frac{4x-3}{5}-x=\frac{x+2}{15}$	21 $\frac{1}{4}x^2-\frac{4}{9}=0$
22 $x^2-1=(x-1)(x-1)$	23 $4a^2=-6$	24 $2a+4=2(a+4)$
25 $2x+3-7x(2x+3)=0$	26 $3a(a-1/2)=(a-1/2)(1-a)$	27 $(y+2)^2-4(y+2)=0$

Découper les étiquettes, puis les classer en fonction du type de résolution à utiliser.

1 $x^2-16 = 3(x+4)$	2 $4\,x^2(3x-5) = 0$	3 $x3 + 4x^2-5x = 0$
4 $4 - (2y-3)^2 = 0$	5 $x^2 - 6x + 9 - 2(x+3) = 0$	6 $t(2t + 3) = 5t - t^2$
7 $4x^2 - (2x-7)^2 = 0$	8 $4z^2-1 = 1 - z$	9 $3(x^2 -5x) + (x-5)^2 = 0$
10 $a^2 - 2a = 3(2 - a)$	11 $6a^2 + 2a = 5a(3a + 2)$	12 $(x + 1)(x + 3) = 5x + 5$
13 $x^2 - 7x = x^2 - 5x$	14 $(2x - 7)^2 - (5-x)^2 = 0$	15 $(3x - 5)^2 - 1 = 0$
16 $(y + 1)^2 - 4(2y-1)^2 = 0$	17 $2(a+4)^2 = 5(7 + a)^2$	18 $(x-7)^2 + 5 = 0$
19 $x^2-4 - 9(x-2)^2 = 0$	20 $9(x-5)^2 - 4(2x+3)^2 = 0$	21 $25(x^2-8x+16) = 0$
22 $2x^2+3x - 7x(2x + 3) = 0$	23 $-9(2z + 3)^2 = 4$	24 $(y+2)^2 - 4y - 8 = 0$

Et pour le collège

1 $x + 4 = -5$	2 $2x + 3 = 4$	3 $\frac{1}{2}x = \frac{1}{3}$
4 $4x = -5$	5 $5a + 1 = 0$	6 $-7t = -4$
7 $\sin 30° = AH : 5$	8 $3x = 0$	9 $(3x + 1)(5x - 3) = 0$
10 $2x + 3 = 5x - 7$	11 $\frac{3}{x} = 5$	12 $x(3x + 2) = 0$
13 $-6t + 4 = 8t - 5$	14 $(x + 7)(-3x + 1) = 0$	15 $\frac{x+1}{2} = \frac{7x+3}{5}$
16 $5x(2x + 3) = 6(2x + 3)$	17 $x^2 + 3x + 1 = 0$	18 $(\frac{1}{2}x - 3)(x + 1) = 0$
19 $-3x + 1 = 0$	20 $a + 7 = 0$	21 $x^2 = 4$
22 $-9 + x = -8$	23 $\cos 45° = \frac{15}{BC}$	24 $3x^2 - 5x - 2 = 0$
25 $BC^2 = 64$	26 $x^3 - 7x^2 + 3x = -6$	27 $(4a + 5)(7a - 1) = 0$

Les classifications des élèves

Autour de a^2 et b^2

Dans les groupes les plus en difficulté, certains ont classé dans un premier temps ensemble $x^2-16=0$ et $x^2+4=0$ ainsi que les équations 4, 18, 21. Mais ils n'ont pas rangé avec $4z^2=4$ ou $(y+1)^2-4=0$ ou encore $(y+1)^2-4 = 0$ ou la 27.

Après des débats acharnés ils garderont quatre familles $a^2-b^2=0$; $a^2= b^2$; $a^2+b^2=0$; $a^2=-b^2$ et auront finalement associé correctement toutes les équations qui s'y rattachaient. Sur ces mêmes équations d'autres groupes n'ont que deux familles « se ramène à a^2-b^2 » et « se ramène à a^2+b^2 ».

Une autre classification est venue interférer sur celle-ci avec le problème du zéro par exemple l'équation 15 : $(3x-5)^2=0$. Certains l'ont rangé avec $a^2= b^2$ alors que d'autres font une nouvelle famille $(a+b)^2 =0$ où ils classent également $x^2-6x+9=0$.

Donc finalement, à ce niveau là, certains élèves avaient cinq catégories et d'autres deux seulement.

Autour des fractions

Il reste notable aussi que dans quelques groupes les équations présentant des fractions ont été classées d'emblée dans une catégorie à part. Les fractions sont considérées comme une telle difficulté de résolution qu'elles ne peuvent sûrement pas se résoudre comme les autres!

Autour des facteurs communs

Là encore des différences se font sentir. Certains vont classer ensemble les équations déjà factorisées et celles où un facteur commun peut-être factorisé, alors que d'autres les sépareront et les sépareront également de ce qui se présente sous une forme du type ab=ac et ab-ac=0.

Certains auront du mal à reconnaître que $4(3x-5)=0$ est plutôt du premier degré et la classeront avec les formes déjà factorisées.

Autour du premier degré :

Dans les groupes faibles, on sépare celles qui sont clairement du premier degré comme la 2 la 6, la 19 ou la 24 des équations qui peuvent se ramener à du premier degré mais qui apparaissent comme du second degré par exemple la 13 : $x^2-7x = x^2-5x+3$.

Equations impossibles à résoudre

On trouve dans cette catégorie, des équations qu'ils ne peuvent évidemment pas résoudre avec leurs outils de début de seconde comme $3x^2-5x+1=0$ mais certains y ont mis celles qui ont des fractions et d'autres celles qui n'ont pas de solutions comme $x^2+4=0$.

Le cours devra donc tenir compte de cette différence de perception des élèves qui est bien entendu très fortement lié à leur niveau d'abstraction par rapport au calcul littéral.

Evaluation :

On a pu constater, à l'issue de ce travail et de son suivi, que les élèves avaient moins de réticences vis-à-vis des équations. Leur réussite dans la résolution d'équations est améliorée bien qu'ils n'aient pas résolu individuellement de grandes quantités d'équations.

4. PREVOIR DES CONSIGNES POUR FACILITER LA RECHERCHE

Beaucoup d'élèves considèrent encore les mathématiques comme un produit fini qui a traversé l'histoire et qui est transmis de générations en générations sous sa forme la plus parfaite. Ils oublient volontiers ou ne savent pas encore que la connaissance mathématique a connu bien des balbutiements et des hésitations, avant de devenir la construction logique qu'on est en mesure de présenter dans un cours magistral. Quand on pose un problème à résoudre à nos élèves, ils cherchent à copier le maître et souhaitent présenter un travail fini dans lequel la dernière ligne mentionne la solution. Regardez les chercher : ils abandonnent successivement toutes les fausses pistes, toutes les démarches qui n'aboutissent pas, sans savoir que ces démarches portent parfois en elles la solution ou qu'elles procurent des outils indispensables à l'élaboration de la connaissance. A travers ces comportements, au demeurant bien naturels, les idées qui germent dans la tête des élèves sont intéressantes. Un des outils pédagogiques les plus formateurs en la matière reste le problème ouvert, à condition toutefois de permettre aux élèves de ne pas rester "secs" et de leur donner des consignes de travail propres à les engager dans la recherche sans les décourager. La tâche à accomplir restera humaine et permettra à chaque élève d'adopter la méthode qui lui convient le mieux pour l'élaboration de la solution.

Récit d'une expérience pédagogique

Organisation de la classe

11 groupes de 3 élèves, dans une classe de seconde de 33.

Texte du problème à chercher :
Résoudre l'équation : $x^2 - 2x - 3 = 0$

Consignes

Il y a plusieurs méthodes pour trouver la solution. Je ne vous demande pas de trouver la solution, mais de mettre en évidence les différentes méthodes. Vous allez donc écrire sur une feuille toutes les idées que vous avez, même si vous pensez qu'elles ne peuvent pas aboutir. A la fin de l'heure, je ramasserai une feuille par groupe. Je regarderai attentivement les démarches que vous avez eues et on débattra de vos idées lors d'une prochaine séance.

Réactions des élèves

Les élèves ont laissé libre cours à leur imagination. Il ont essayé de trouver des solutions par tâtonnement, tenté de factoriser, de diviser, de résoudre graphiquement. Toutes les idées exprimées ont abouti à la mise en place de la solution, par différents procédés, lors du débat qui a occupé deux autres heures du cours.

Idées des élèves

Première idée :

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$x^2 = 2x + 3$

Lors du débat, certains élèves ont reconnu dans x^2 l'équation d'une parabole et dans $2x + 3$ l'équation d'une droite. On a formalisé la découverte en écrivant que les solutions de l'équation étaient les abscisses des points d'intersection de la parabole d'équation $y = x^2$ et de la droite d'équation :

$y = 2x + 3$, puis on a tracé les deux courbes.

Deuxième idée :

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$x(x-2) = 3$

$x - 2 = \dfrac{3}{x}$

$\dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{x}$

Lors du débat, nombre d'élèves ont reconnu dans $\dfrac{1}{x}$, l'équation de l'hyperbole et dans $\dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3}$ l'équation d'une droite. Une nouvelle fois , on a formalisé et on a construit les deux courbes.

Troisième idée :

Un groupe d'élèves avait proposé le tableau de valeurs :

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	5	0	-3	-4	-3	0	5

et construit la parabole d'équation $y = x^2 - 2x - 3$

On a débattu pour savoir à quoi pouvait servir de tracer cette courbe dans la résolution de l'équation : $x^2 - 2x - 3 = 0$. Puis on a formalisé les solutions de l'équation comme les abscisses des points d'intersection de la parabole et de l'axe des abscisses.

Quatrième idée :

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$x^2 - 2x + 1 - 4 = 0$

$(x - 1)^2 - 4 = 0$

$x - 1 = \sqrt{4} = 2$

$x = 3$

Le débat a été long ; beaucoup d'élèves ne comprenaient pas pourquoi on écrivait la deuxième ligne et comment on pouvait avoir une pareille idée. Bien peu d'élèves étaient en mesure de constater l'erreur commise à la cinquième ligne et pourtant, tout le monde était insatisfait car il manquait la solution -1, qu'on avait trouvée par les méthodes de résolution précédentes. La méthode qui paraissait la plus satisfaisante pour un professeur de mathématiques semblait le moins combler les élèves. N'était-ce pas naturel finalement, puisque l'étude de la forme canonique fait l'objet du programme de première. Mais quelle avancée vers la connaissance, malgré tout !

Cinquième idée :

Par tâtonnement, un groupe d'élèves avait trouvé la factorisation de $x^2 - 2x - 3$ et appliqué le théorème : un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.

A partir des résultats élaborés dans la quatrième idée, on a formalisé la factorisation de $x^2 - 2x - 3$

Sixième idée :

Un groupe d'élèves avait écrit :

Si $x = 3$, $3^2 - 2 \times 3 - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$ donc la solution de l'équation est 3.

Ainsi a-t-on pu évoquer ce qu'est la recherche d'une racine évidente, en l'occurence 3, comment elle aboutit à la factorisation de $x - 3$ et comment on peut trouver le deuxième facteur qui intervient dans la factorisation de $x^2 - 2x - 3$.

Conclusion de l'expérience :

1. Aucun groupe d'élève n'avait abouti à la solution. Qu'aurait donné un tel travail si les élèves avaient élaboré la solution tout seul ? Quel souvenir conserveraient-ils de la recherche d'un tel problème ? Dans cette circonstance, la consigne de travail a bien joué le rôle fondamental qui lui est dévolu : permettre aux élèves de cerner la tâche qu'ils devaient accomplir et fixer l'objectif pédagogique de la recherche d'un tel problème. A ce titre, elle est aussi essentielle que l'énoncé du problème et ne doit pas être négligée.

2 . Les méthodes de résolution sont nombreuses et diverses. Chaque élève a pu appéhender sa ou ses méthodes de résolution. Les méthodes graphiques ont permis aux élèves bloqués par les factorisations habituelles de découvrir un autre mode de résolution efficace et tangible. Les meilleurs élèves sont déjà mis sur la voie du discriminant et de la racine évidente, qui feront l'objet d'une étude plus approfondie en classe de première.

3. On trouve, dans un problème comme celui-là, les moyens de réinvestir les connaissances acquises en cours de seconde sur les paraboles, les hyperboles et d'utiliser les produits remarquables sous une forme plus originale.

DANS LA CLASSE

1. L'enseignant est un organisateur

L'enseignant dans sa classe est tout d'abord **un organisateur**. En effet, c'est lui qui va **définir la façon dont on va travailler**. Est-ce un travail collectif ou individualisé ou encore une activité en petits groupes ? Ces petits groupes sont-ils constitués par affinités ou sont-ils fixés par l'enseignant ? C'est lui qui précise les étapes éventuelles du travail, qui **explique comment la séance va se dérouler** et quels en sont **les objectifs.**

Il définit donc le cadre de travail pour que chacun puisse s'impliquer pleinement.

C'est également de la clarté et de la précision des consignes qu'il donne que dépend en grande partie le bon déroulement des activités.

Il se soucie également de prévoir du temps pour que les élèves puissent faire une première mise en mémoire. Il prend en compte la dimension de la mémorisation dans le court terme aussi bien que dans le long terme.

<u>En conclusion</u> :

Cette préparation soigneuse de l'organisation joue un rôle déterminant dans le déroulement de la séquence. Elle dégage l'enseignant de bien des interventions visant l'ordre et la discipline dans la classe.

2. L'enseignant est disponible

L'organisation matérielle est essentielle. Elle contribue à lui permettre de jouer son rôle de **médiateur** au sein de la classe. En effet l'enseignant est médiateur pour le groupe classe mais beaucoup plus encore pour chaque élève en particulier, quand il sent que cela s'avère nécessaire.

Il faut pouvoir s'arrêter et mener un dialogue individualisé avec chacun de ceux qui en font la demande.

Il est donc nécessaire que l'enseignant ait prévu dans son organisation la possibilité d'être disponible pour que de tels entretiens pédagogiques puissent avoir lieu. Il peut avoir mis la classe en travail individuel ou en travail autonome par binômes ou en groupes plus importants, l'essentiel étant que l'activité ne nécessite pas une intervention fréquente de l'enseignant.

Un exemple

Nous allons l'illustrer par un exemple. La séance se situe lors d'un module en classe de seconde. Dans ce groupe ont été réunis des élèves qui présentaient des difficultés dans des factorisations ou résolutions d'équations : **ils semblaient confondre a^2-b^2 et $(a-b)^2$.**

Deux activités de tri ou de reconnaissance d'identités remarquables sont proposées aux élèves qui travaillent dans un premier temps individuellement. Puis, par deux, ils confrontent leurs réponses. S'il y a divergence sur leurs réponses, ils doivent se mettre d'accord sur un choix argumenté. Certains développent, d'autres essaient avec une valeur ou encore avec plusieurs valeurs.

En guise d'évaluation de la séance je leur propose de résoudre trois équations nécessitant une factorisation. La première était : $\mathbf{(x^2-25)\ -3(x-5) = 0}$.

Je les regarde faire en circulant derrière eux. Charlotte a écrit : $\mathbf{(x-5)(x-5)\ -3(x-5) = 0}$. Je m'arrête auprès d'elle et engage le dialogue :

- Explique-moi, pourquoi tu as écrit ça.
- Ah, parce que ce n'est pas ça !
Charlotte rectifie aussitôt son signe et écrit donc : $(x+5)(x-5)\ -3\ (x-5) = 0$
- Pourquoi as-tu changé ?
- Je ne sais pas. Ce n'est pas ça ?
- Qu'est ce qui t'a fait penser que ça faisait $(x-5)(x-5)$?
Sans aucune hésitation, elle répond :
- C'est parce qu'il y a des parenthèses.
Charlotte me montre la feuille où elle a trié les expressions : tous les a^2-b^2, n'ont pas de parenthèses et tous les $(a-b)^2$ ont des parenthèses.
- Regarde mieux, est-ce que (x^2-25) est vraiment pareil à ceux là ? je lui désigne la colonne $(a-b)^2$.
*- Ah non ! Le carré il n'est pas en dehors ici. **Ça y est j'ai compris.***

En effet, jamais Charlotte ne s'est plus trompée par la suite.

En posant des questions à l'élève, l'enseignant l'aide à expliciter ce qui s'est passé dans sa tête et l'a conduit à une erreur.

Le dialogue individualisé peut débloquer des erreurs persistantes.

3. Laisser l'élève aller au bout de son erreur

Le titre du paragraphe peut paraître curieux à un professeur de mathématiques dont la mission est, d'abord, de faire percevoir et de démontrer à ses élèves des notions mathématiquement correctes et, ensuite, de valider les résultats et les raisonnements justes. L'époque n'est pas si lointaine où il était interdit à un professeur de laisser subsister une erreur au tableau et où le maître devait rectifier, sur-le-champ, les phrases des élèves qui pouvaient être fausses ou ambiguës. Cela n'empêchait pas les élèves d'avoir leurs propres représentations des concepts et d'inventer des méthodes ou des théorèmes fiables dans une proportion très élevée.

Depuis peu de temps, on a montré le rôle fondamental qu'avaient l'erreur et le traitement de l'erreur dans les processus d'apprentissage. Déceler l'erreur, l'analyser pour la traiter, affiner les représentations mentales des élèves pour parvenir au concept lui-même, relèvent naturellement du rôle pédagogique qu'a chaque professeur devant sa classe et devant chaque élève.

Ce travail n'est pas si aisé car les élèves qui nous sont confiés pendant une année ne sont pas des novices. Ils ont un passé fait de bons ou de mauvais résultats, d'incompréhensions, d'assimilations plus ou moins correctes, de blocages psychologiques conscients ou inconscients. Dans la présentation d'un exercice, d'un problème ou d'un cours, ils retiendront ce qui leur paraît être le plus simple pour eux-mêmes : la méthode qu'ils comprennent ou qu'ils savent d'emblée mettre en oeuvre, le théorème le plus facile à utiliser ou le plus couramment employé.

Il faudra que nos élèves éprouvent vraiment la nécessité de changer leur démarche pour ne plus opposer de résistance et accepter de se laisser convaincre.

Dire ou redire à un élève que sa méthode est peu efficace ne sert à rien, s'il n'en a pas vu, lui-même, les limites. Le professeur n'a donc plus qu'à laisser l'élève aller jusqu'au bout de son erreur, en mettant en place différents dispositifs de prise de conscience de l'erreur par l'élève lui-même. L'exemple de Germain, élève d'une classe de seconde de 35 élèves, illustre les propos qui viennent d'être tenus.

L'exemple de Germain

On avait travaillé sur les hyperboles. En partant de l'hyperbole d'équation $y=\frac{1}{x}$, on avait construit des hyperboles par translations de vecteurs divers : $\vec{u}(1,-2)$; $\vec{v}(-3,2)$; $\vec{w}(-1,-5)$; $\vec{a}(2,3)$. A ma demande, les élèves avaient ensuite trouvé les équations de ces différentes hyperboles et avaient compris comment on pouvait construire directement des hyperboles à partir de leurs équations : il suffisait de repérer le centre de symétrie, de tracer les asymptotes et de construire ensuite l'hyperbole d'équation $y=\frac{1}{x}$ dans ce nouveau repère. Cette façon de procéder me réjouissait car elle permettait d'éviter les nombreuses erreurs de calculs que pouvaient faire les élèves dans la construction de l'hyperbole point par point. Par ailleurs, il semblait que ce procédé leur permettait de gagner du temps méthode, sauf Germain qui s'entêtait à construire l'hyperbole point par point. Ses camarades avaient tenté de lui expliquer qu'il se compliquait la vie. Je lui avais demandé pourquoi il procédait de la sorte et il avait répondu qu'il préférait faire ainsi car il était plus sûr de lui.

C'est vrai d'ailleurs qu'il arrivait à construire des hyperboles aussi belles que celles de ses camarades, jusqu'au jour où.... il n'a pas vraiment obtenu une hyperbole (voir annexe). C'était au contrôle où on lui demandait de construire l'hyperbole d'équation : $y = -1 + \frac{1}{x-2}$. Il a calculé ses points, comme d'habitude, mais une erreur du calcul de y pour x = 2 l'a amené à une absurdité qu'il n'a pas su rectifier, peut-être par manque de temps, plus sûrement parce qu'il n'avait jamais vraiment fait attention à la forme réelle d'une hyperbole.

Au moment de la correction, j'ai mis les élèves en binômes d'élèves complémentaires, c'est à dire qui n'avaient pas fait les mêmes erreurs aux mêmes endroits. J'ai suivi du coin de l'oeil le binôme de Germain, en me disant que son camarade aurait fort à faire pour tenter de lui expliquer une méthode que Germain n'avait, jusqu'ici, jamais voulu adopter. Le dialogue semblait bien engagé et au bout d'un bon quart d'heure, je me suis décidé à aller voir où ils en étaient. Germain avait accepté la translation, le centre de symétrie, les asymptotes et la construction de l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$.

J'ai résisté à la tentation de le mettre une nouvelle fois à l'épreuve et de lui demander de construire, illico, une nouvelle hyperbole. Il m'a semblé préférable d'engager le dialogue avec lui :
- *Quelle est la méthode que tu préfères ?*
- *Celle que m'a expliquée Teddy*
- *Mais tu as changé d'avis par rapport aux travaux qu'on avait faits en classe. Pourquoi ?*
- *Parce que cette méthode là est plus sûre. J'ai moins de chance de me tromper dans les calculs.*
- *Pourquoi ne l'as-tu pas adoptée avant ?*
- *Parce qu'il fallait passer par les translations... Je n'ai jamais aimé les translations, parce que je trouve que les vecteurs, c'est compliqué.*
- *Et maintenant, tu es prêt à les utiliser ?*
- *Oui, maintenant, j'ai compris.*

Et c'est vrai que, par la suite, Germain a fait toutes ses hyperboles et toutes ses paraboles correctement, même pendant les contrôles.

Analyse de la démarche de Germain

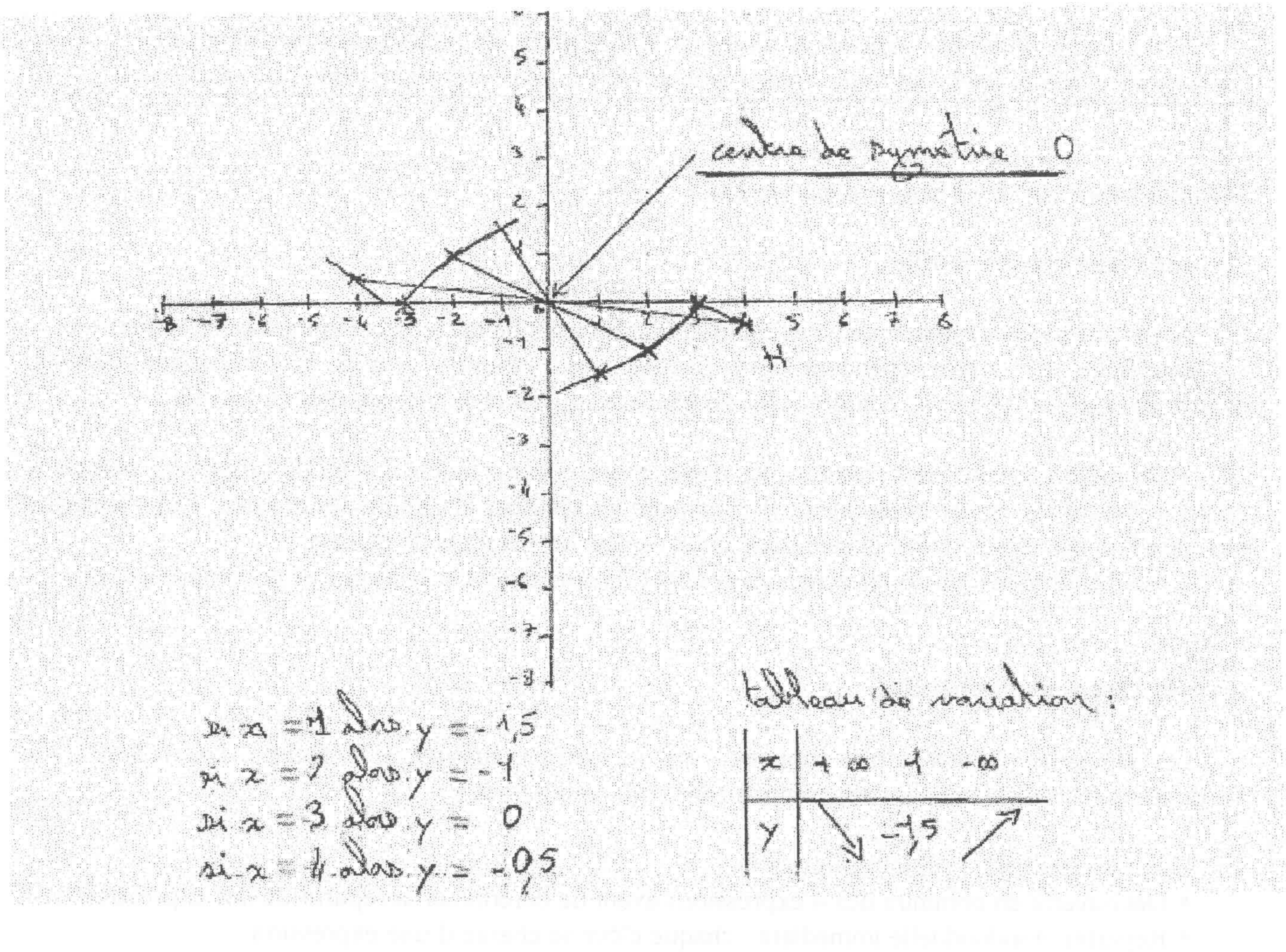
❑ Tous les discours et toutes les mises en garde qu'on pouvait faire à Germain n'auraient su le persuader tant que sa méthode, sécurisante pour lui, montrait une réelle efficacité. A l'évocation de la translation, il s'était de nouveau bloqué contre un outil qu'il n'avait jamais su maîtriser et il avait essayé d'échapper à une méthode qui, selon lui, le mènerait à l'échec.

❑ Germain s'est laissé convaincre le jour où sa méthode a échoué. Il est regrettable que ce soit arrivé le jour du contrôle. Mais pouvait-il en être autrement ? Lorsque Germain a construit des hyperboles en classe, il était toujours entouré de deux camarades; En bavardant avec eux (ce qui est toujours permis en cours, parce qu'on fait un travail de groupe ou parce qu'on a la possibilité de comparer ses résultats avec les résultats des voisins) il avait donc le moyen de choisir des points adéquats et d'engager des procédures de contrôle de ses calculs. C'est le jour où il s'est retrouvé seul devant sa feuille qu'il a mesuré l'inconvénient de faire de tels calculs. C'est aussi à ce moment là qu'il a réalisé l'avantage de mettre en oeuvre une autre méthode.

❑ Germain a enfin accepté de dépasser son aversion pour les translations... et du même coup, les translations et les vecteurs ont pris du sens pour lui. N'est ce pas une étape fondamentale dans la représentation mentale que l'élève se fait des vecteurs ?

Germain n'est pas un cas particulier, la majorité des élèves en difficulté s'accroche à la méthode qu'ils connaissent, quand bien même elle serait peu fiable pour des problèmes de calcul. Apprendre, comprendre une nouvelle méthode leur semble un effort inutile et déraisonnable : moins je connais de méthodes, mieux c'est, car je ne risque pas de les mélanger, j'ai moins peur de ne plus m'en souvenir. C'est pourquoi **il est indispensable que leur méthode soit mise en défaut** pour qu'ils aient le désir d'en regarder une autre.

Copie de Germain :



4. L'échange dans la construction du savoir

Le récit d'expérience qui suit illustre la place que tient le travail de groupe dans la construction d'un savoir. Alors, le professeur n'est plus le dispensateur de connaissances ; il est là pour faciliter l'échange entre élèves, le **conflit socio-cognitif** qui va faire que le savoir se construit avec et par les autres.

Organisation de la classe

5 groupes de 4 et 1 groupe de 2 élèves.
Les tables sont groupées par 2 et disposées perpendiculairement au tableau.

Consigne

"Vous êtes 6 équipes, chacun va inventer une expression factorisée et la développer. Vous l'échangerez ensuite avec une autre équipe et vous devrez retrouver cette expression factorisée."

Déroulement de la séquence de travail

- Avant l'échange des feuilles

Après une phase d'étonnement très réduite, l'acceptation de la tâche est immédiate et entière.
Une élève, K., montre cependant son inquiétude à son groupe .- *« .je ne sais même pas comment trouver le résultat, alors... ».* Malgré cela elle garde le sourire et se met aussitôt au travail.

Pour valider les premiers résultats, les élèves montrent leur feuille à celui du groupe qui semble le mieux posséder les capacités requises. Il commente les résultats et indique les erreurs. Dans plusieurs groupes, l'un des élèves utilise la calculette pour vérifier les résultats de chacun.
Entre les groupes, quelques échanges se font : ils concernent la consigne et sa compréhension.

- Après l'échange des feuilles

Les élèves se montrent très motivés - ils se mettent aussitôt à la tâche. La recherche de l'expression factorisée initiale s'apparente à celle d'un code secret !

Selon les groupes, l'organisation varie :
- Découverte en commun des 4 expressions avant de déterminer la répartition des expressions
- Répartition individuelle immédiate : chaque élève se charge d'une expression.

Des échanges nombreux ont alors lieu entre les élèves des différents groupes : *"Alors, tu l'as trouvé le mien ? "*

Chaque groupe procède implicitement de la même façon :
Les résultats individuels sont validés par l'ensemble des chercheurs avant d'être retournés à leur propriétaire.

Les échanges entre "forts et moins forts" sont fréquents. Les premiers donnent une explication aux seconds ou reçoivent leurs hypothèses de recherche.
- les dernières expressions rebelles font l'objet d'une recherche en commun.
- le professeur se glisse dans le groupe pour orienter la réflexion.

Analyse

La relation entre le professeur et l'élève

Les rapports "verticaux" du type professeur-élèves s'estompent rapidement au profit de rapports "horizontaux" entre les membres du groupe. Il en résulte automatiquement une situation qui, non seulement, permet mais instaurela parole. Si les rapports de type vertical privilégient la parole du professeur et canalisent étroitement celle de l'apprenant, on s'aperçoit qu'à l'inverse, les rapports de type "horizontaux" font disparaître la parole du professeur pour laisser place à celle de l'apprenant. D'autre part, la parole ne s'adresse plus à l'ensemble de la classe, mais à un nombre restreint de personnes élève-élève(s) élève(s)-professeur dans une situation de communication.

Le professeur a pour fonction de donner un cadre à l'effort de recherche et de guider les élèves tout au long de celle-ci quand le besoin se fait sentir. Il ne représente plus le seul accès possible au savoir. Il ne « s'interpose » pas entre l'apprenant et le savoir. Il n'est pas médiateur entre l'élève et son savoir mais entre l'élève et son **besoin** d'apprendre.

La relation de l'élève au groupe

Il est remarquable de constater qu'au cours de cette séance, les élèves se sont peu adressé directement au professeur. Les besoins qu'ils ont exprimés ont trouvé satisfaction à l'intérieur des relations entre élèves. Ces besoins concernaient:

- La compréhension de la consigne . l'élève qui a besoin d'un complément d'information n'hésite pas à questionner pour l'obtenir. La banalisation de l'échange sécurise.
- La répartition des tâches - elle s'opère dans un esprit de cohésion du groupe et le souci de l'efficacité.
- La validation du résultat -. un (ou deux) élèves dans chaque groupe se met à la disposition des autres, plus en difficulté ou simplement moins sûrs d'eux-mêmes, pour confirmer ou infirmer les résultats obtenus.

Le travail de groupe semble d'autre part favoriser la motivation de l'élève au travail. Le « challenge » entre groupes agit comme un puissant ressort. De plus, il donne un sens à l'effort collectif en y inscrivant l'effort individuel.

Les échanges observés, de type horizontal, indiquent un rapport d'égalité entre les apprenants et une relation d'entraide dans un climat sécurisant.

Dans une situation de cours, la tâche donnée par le professeur entretient la responsabilisation de chaque élève pour cette tâche. Mais ici, l'appartenance au groupe dilue l'angoisse éventuelle que chacun peut ressentir face à cette obligation de résultat. L'élève ne se retrouve pas seul devant le professeur. L'obligation de résultat est d'autre part contractée envers son propre groupe et envers le groupe expéditeur.

Ainsi, pour réussir, il est nécessaire à chacun de rompre momentanément sa solitude d'apprenant pour mettre en place une stratégie d'ouverture en direction du groupe.

=> Ce travail de groupe a débouché sur une obligation d'échange entre apprenants.
=> Les échanges ont nécessité un autre outil, le langage.

La relation de l'élève à la construction de son savoir

A observer les élèves inter-agir pour comparer et améliorer leur stratégie d'apprentissage, on constate que le langage est exploité dans toute la richesse de ses fonctions de communication, d'information et d'expression.

Ce qui retient particulièrement l'attention ici est le fait que l'outil langage intervienne principalement pour exprimer la difficulté ressentie par l'apprenant. En effet, celle-là ne peut être communiquée que si elle est suffisamment explicitée, que si elle parvient à rendre compte avec précision du cheminement de la compréhension qui est en train de se construire. Un effort semblable doit être produit par celui qui répond à la demande d'aide. Il s'agit pour lui d'oraliser sa propre méthode d'apprentissage dans une situation réelle de communication. En d'autres termes, l'utilisation du langage oblige l'apprenant à démonter, à mettre à plat et à offrir la « construction » qu'il veut mettre en oeuvre, pour la comprendre et pouvoir la poursuivre.

CONCLUSION

Cette séance de travail en groupe a obligé les apprenants à communiquer.
Les stratégies individuelles d'apprentissage ont été formulées, pour être discutées et échangées.

Ainsi :

- **Par l'échange, le groupe est intervenu pour contribuer à l'effort individuel;**
- **Par l'échange, le langage a joué un rôle prépondérant dans la construction du savoir;**
- **Par l'échange, le professeur a proposé une médiation entre l'élève et son besoin d'apprendre**

CONCLUSION

...Pour ne pas conclure mais ouvrir des portes :

Bien des adultes vous le diront :

" *Pour moi, les mathématiques, ça allait gentiment ; jusqu'au jour où on a commencé à mettre des lettres . Alors là, j'ai complètement perdu pied ! Et je n'ai plus jamais accroché. Rien n'avait plus de sens* ! "

C'est ce passage périlleux que sont en train de vivre nos élèves de collège. Alors prenons le temps de les accompagner, inventons des manières de travailler différentes pour qu'ils en sortent avec l'idée que le calcul littéral, c' est possible pour eux. C'est un outil fantastique pour résoudre des problèmes ; c'est aussi un monde nouveau dont ils devront apprendre les lois.

Pour qu'ils acceptent de s'engager, de persévérer dans ce travail nouveau, il faut que les erreurs qu'ils vont commettre ne leur apparaissent pas comme un échec global. Cela passe par une compréhension fine de la nature de l'erreur. Or, nous avons la conviction qu'ils sont logiques :

Non, ils ne font pas " n'importe quoi ".

Mais leur logique à eux n'est pas celle d'un expert : ils essayent de se débrouiller avec leur savoir pour donner du sens à des situations très complexes. Si on leur laisse la parole, s'ils se sentent autorisés à s'expliquer, ils savent bien dire " ce qui se passe dans leur tête ".

Nous pointons leurs erreurs mais ils sont les seuls à pouvoir analyser les obstacles qu'ils rencontrent. Encore faut-il, pour cela, qu'ils se sentent autorisés à

chercher,
essayer,
se tromper,
se corriger,
essayer à nouveau...

en un mot : apprendre

Cela demande du temps, beaucoup de temps et un accompagnement de médiation proche. C'est en les écoutant, en travaillant avec eux sur ces opinions qu'ils se forment qu'on peut les aider, petit à petit, à avancer dans un savoir de plus en plus construit.

Ce savoir articulant les trois entrées :

C'est quoi ?
Ça fonctionne comment ?
Ça sert à quoi ?

nous pouvons le mettre à leur portée.

Des activités variées et inventives sont là pour les aider à repérer et à passer les obstacles .Elles fournissent des situations de classe intéressantes pour des élèves très divers. Plus les propositions sont différentes, plus on a de chance d'accrocher chaque jeune dans ses particularités, et plus on a de facilité à répondre à l'hétérogénéité des classes.

Travailler en équipe d'enseignants sur cette construction des savoirs, c'est aussi, pour nous comme pour nos élèves, se sentir autorisés à essayer, à chercher, peut-être à se tromper pour mieux repartir. Nos diversités forment un riche réservoir d'idées, fortement dynamisé et valorisé dans le travail en groupe. L'élaboration de séquences à essayer dans la classe et à analyser avec une équipe est un mode de travail qui permet, à la fois, de multiplier les idées et de se sentir en sécurité, de sortir de la solitude stérilisante qui peut frapper les enseignants.

C'est à cette construction de votre savoir pour aider à la construction de celui de vos élèves que nous espérons vous avoir appelés.

Nous avons pris plaisir à travailler ensemble et à entendre, parfois, nos élèves dire " *Ah ! je crois que je comprends* ! ".

La recherche est ouverte ; il y a beaucoup de pistes à explorer.

DES EXEMPLES

" Du nombre à la lettre " en passant par des activités mentales

Niveau : 6ème

Question : C'est quoi ?

Objectif de l'enseignant :

Donner du sens aux écritures arithmétiques
Familiariser avec le vocabulaire des opérations

Activités mentales :

Traduire d'un langage à un autre
Se donner une image mentale

Document élève :

1) Traduire les écritures mathématiques par une phrase en français

en utilisant les mots SOMME - DIFFERENCE - PRODUIT

$12 + 27{,}2$

$33 - 15{,}7$

$57{,}3 \times 11{,}2$

$(50- 12) \times 3$

$43 + (37 \times 2)$

2) Traduire un texte par une écriture mathématique

La somme de 9 et du produit de5 et 2

Le produit de la somme de 5 et 7 par 3

La différence des produits de 11 par 7 et 9 par 3

3) Traduire un texte par une égalité mathématique :

Un nombre augmenté de 4 donne 21

J'ai trouvé 25 en ajoutant 16 à un nombre

Un nombre ôté de 29 donne 15

Un nombre diminué de 7 donne 16

Jean a mis 17 s à parcourir le 100 m et a mis 3s de plus que Pierre

Calcul mental

Niveau : 5ème

Question : Ça fonctionne comment ?

Objectif de l'enseignant : Préparer à la factorisation et au développement

Activités mentales : Mémorisation, attention, argumentation

Déroulement :

1- Présenter d'abord un exemple : « $12 \times 7 + 12 \times 3$ » demander les outils ou les méthodes que l'on peut utiliser « *Comment allez-vous vous y prendre ?* » proposer des méthodes et insister sur la nécessité de s'écouter les uns les autres ....

2- Le professeur dicte trois fois le premier exercice, les élèves sont attentifs et mémorisent ou traitent l'exercice sans écrire et sans parler .

3- Le professeur laisse un temps de pause de 20 secondes.

4 - Le professeur donne le signal d 'écriture.

5- On corrige, on échange (comparaison des méthodes, leurs avantages, leurs inconvénients, la rapidité d'exécution ....)

Calculer le plus rapidement possible :

$48 \times 14 + 48 \times 6$
$97 \times 97 + 3 \times 97$
$8,3 \times 13 - 8,3 \times 3$
$19,5 \times 85,5 + 14,5 \times 19,5$
15×98
$(100 - 1) \times 51$
111×28

Trouver par quel plus grand nombre est divisible chaque somme et chaque différence sans les effectuer

$15 + 27$
$261 - 108$
$24 + 42 + 54$
$84 + 7$

Trouver un nombre

Niveau : fin de 5ème ou 4ème

Questions : Ça fonctionne comment ? Ça sert à quoi ?

Pré-acquis :

Conventions d'écriture
Priorité des opérations

Objectif de l'enseignant :

Résoudre des équations

Activités mentales :

Donner du sens à une équation
Schématiser, contextualiser
Vérifier un résultat
Appliquer un programme de calcul

Document élève :

1) Marc a choisi un nombre noté par le carré: ❑. Il a fait les opérations marquées ci-dessous:
$(\square + 7) \times 3 + 2\times \square$ Il a trouvé 271.
Peux-tu calculer le nombre que Marc avait choisi au départ ? (Tu peux faire un schéma pour t'aider)

2) Marcel, avec les opérations ci-dessous, a trouvé 127.
$(\Delta + 8) \times 2 + \Delta = 127$
Calcule le nombre Δ.

3) Peux trouver les nombres x, y, z, tels que : $(x + 9) \times 4 + 3 \times x = 1687$
$(3 + y) - 2y + 9 = 265$
$3 \times z + (z + 8) \times 2 - 41 = 305$

4) Pierre et Marie ont choisi le même nombre ; ils ont fait des calculs différents mais ont trouvé le même résultat :
Pierre : $(\square + 5)\times 4 + 7$ Marie : $\square \times 7$
Peux-tu calculer le nombre ❑ qu'ils avaient choisi au départ et le résultat de leurs opérations ?

5) Comme à l'exercice 4), calcule les nombres Δ, x, y et ❑, pour que Pierre et Marie trouvent le même résultat.

Pierre : $(\Delta + 2) \times 8$ Marie : $\Delta \times 3 + 47$
Pierre : $(x + 7) \times 10 + 5$ Marie : $x \times 2 \times 7$
Pierre : $(\square + 25{,}2) \times 10 - 172{,}5$ Marie : $3 \times \square \times 5$
Pierre : $512 + 14 \times (y - 7)$ Marie : $9y\times 2 + 15$
Pierre : $2{,}4 + 8 (\square - 12)$ Marie : $(9\times\square - 3) \times 2 + 15$

LES EQUATIONS

Niveau : 4ème

Question : Ça sert à quoi ?

Pré-acquis :

Calculer la valeur numérique d'une expression sachant que x a pour valeur .....
Réduire des expressions du type $4x + 3x$, $5x-2x+1$, ...

Objectif de l'enseignant :

Première approche des équations du type : $ax + b = cx + d$.
Commencer à trouver une stratégie de résolution.

Activités mentales :

Rechercher, conjecturer, essayer, vérifier

Déroulement :

Travail par équipe de 5

Consigne : *Vous préciserez dans chaque cas la stratégie utilisée .*
Vous n'oublierez pas de vérifier que la réponse proposée convient.

Exercice 1

Michel pense à un entier. Il le multiplie par 6 puis ajoute 52.
Pierre pense au même nombre. Il le multiplie par 8 puis enlève 12. Ils trouvent le même résultat. Quel est ce nombre ?

Exercice 2

Jacques et François pensent à un nombre. François multiplie par 5 le nombre et ajoute 6. A 40, Jacques enlève 5 fois le nombre.
Ils trouvent le même résultat.Quel est ce nombre ?

Exercice 3

Anthony pense à un nombre. Il le multiplie par 3
Manuella pense au même nombre. Elle le multiplie par 5 et retranche 242
Ils trouvent le même résultat. Quel est ce nombre ?

Exercice 4

Antoine pense à un nombre. Il ajoute $\frac{3}{4}$ et trouve $\frac{7}{2}$. Quel est ce nombre ?

Exercice 5

Jean pense à un nombre. Il enlève $\frac{7}{2}$ et trouve $\frac{8}{3}$. Quel est ce nombre ?

Exercice 6

Le double de x est $-\frac{5}{3}$. Quel est ce nombre ?

Calculs d'aires

Niveau : 5ème et 4ème

Question : Ça sert à quoi ?

Objectif de l'enseignant : Découvrir les différentes formules de distributivité

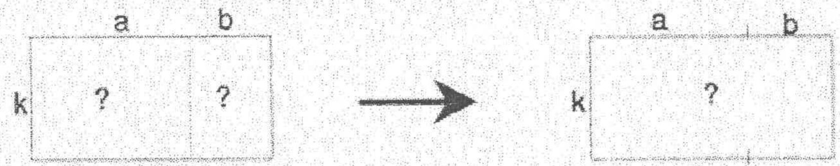
Activités mentales :

Traduire une situation géométrique dans un langage arithmétique
Représenter une situation par une formule

Consigne : *Ecrire le calcul qui convient pour déterminer chacune des aires marquées d'un* **?**
De l'égalité des aires, déduire une formule.

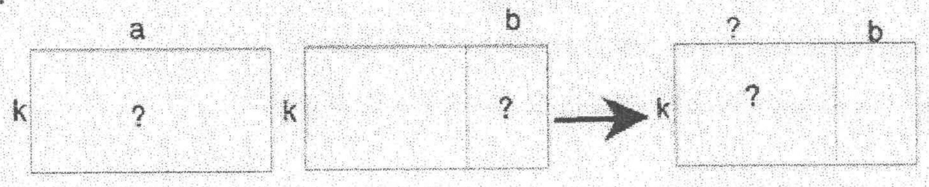
**Expressions égales
calculs d'aires**

1.



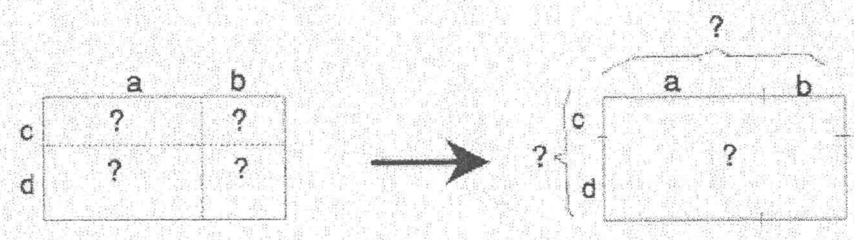
Donc =

2.



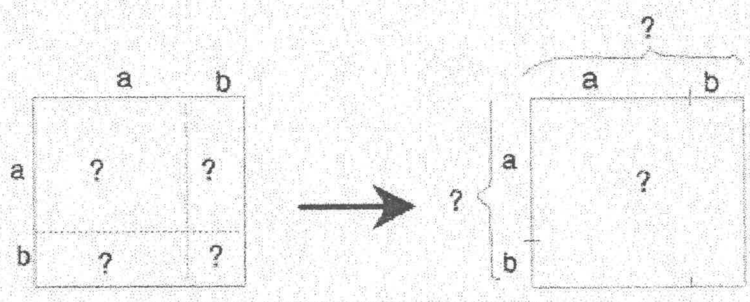
Donc =

3.



Donc =

4.



Donc =

Du français aux maths

Niveau : fin de 5ème ou 4ème

Questions : C'est quoi ? Ça fonctionne comment ?

Objectif de l'enseignant :

Utiliser le vocabulaire des opérations, les langages arithmétiques, les conventions et priorités de calcul

Activités mentales : Changer de langage

Document élève :

1) Traduis chacune des 5 phrases suivantes par une suite de calculs en une seule ligne

Indique l'ordre des opérations.

Effectue les calculs.

a) Le produit de 4 par la somme de 5 et de 3

b) Le produit de la différence entre 21 et 8 par 5

c) Le quotient du produit de 6 par la différence entre 15 et 7par 3

d) Le quotient de 48 par le différence de 2 et de la somme de 6 et 3

2) Traduis chacune des suites de calculs suivantes par une phrase

Indique l'ordre des opérations.

Effectue les calculs.

a) $(5 + 6) \times 5$ b) $8 \times (3+9)$

c) $\dfrac{5}{(4-3) \times 2}$ d) $\dfrac{(4-3) \times 2}{5}$

LES INEQUATIONS

Niveau : 4ème

Question : C'est quoi ?

Objectif de l'enseignant :

Introduire les segments, demi-droites sur la droite des réels.
Résoudre des inéquations du premier degré.

Activités mentales :

Imaginer
Se faire des représentations imagée
Dégager une règle de l'expérience
Appliquer une règle

Déroulement :

1) DEFINITION D'UN ENSEMBLE:

a) A l'aide des « oui - non »
Le professeur a choisi un ensemble de nombres. A la question : « Ce nombre appartient-il à cet ensemble ? » il répond par oui ou par non.

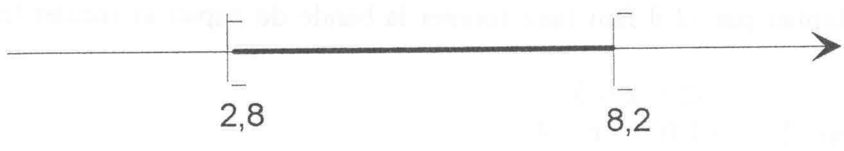
OUI	NON
3 ; 5 ; 8 ; 7,5 ; 4,7; 2,9 ; 2,8 ; 8,1 ; 8,15 ; 8,1999	-10; 1000; 10^9 10 , 9; -2 ; 0 ; 2 ; 2,5 ; 2,7; 2,7999 ; 8,2 ; 8,21

Oralement, le professeur précise qu'il a choisi tous les nombres compris entre 2,8 et 8,2 , que 2,8 est un oui, mais que 8,2 est un non. On constate que cet ensemble ne contient pas de plus petit élément

b) A l'aide d'une phrase :
On a défini l'ensemble des nombres compris entre 2,8 et 8,2 , 2,8 inclus et 8,2 exclu.

c) A l'aide d'une expression mathématique :
On a défini l'ensemble des nombres x tels que : $2{,}8 \leq x < 8{,}2$

d) A l'aide d'une représentation géométrique :



2) APPLICATION A UN PROBLEME :

Marie choisi des nombres x tels que $-2 < x \leq 5$. Elle les multiplie par 4 et au résultat additionne 9. Peut-on prévoir un encadrement de ses résultats ?
Certains élèves devinent et essaient d'expliquer aux autres qu'on peut, avec -2 et 5, faire les mêmes opérations qu'avec x. On obtient ainsi : $1 < 4x + 9 \leq 29$

3) REGLES POUVANT ETRE UTILISEES

(Visualisation avec le rétro-projecteur)

Sur le tableau est dessiné un axe. (Je l'avais dessiné vertical comme un therrnomètre.)
Sur le rétro-projecteur est placé une bande de papier qui fait de l'ombre sur l'axe entre -2 et 5.
Le professeur veut représenter.ainsi l'ensemble des nombres x tels que $-2< x <5$

Première règle:
En bougeant la bande de papier il fait descendre l'ombre de 6 unités. On obtient : $-8< x -6 <-1$
On admet la règle suivante:

Règle 1 : On conserve une inégalité losqu'on additionne ou soustrait un même nombre à chaque membre de l'inégalité.

Règle 1 : Si $a < b$ alors $a + c < b + c$

Deuxième règle:
Pour agrandir l'ombre, revenue entre -2 et 5, les élèves suggèrent de reculer le rétroprojecteur. Ce que l'on fait et, en règlant la hauteur, on obtient l'ombre entre -4 et 1 0.
On avait : $-2 < x < 5$.
On a obtenu : $-4 <2 x < 10$.
On admet la règle suivante:

Règle 2 : On conserve une inégalité losqu'on multiplie ou divise chaque membre de l'inégalité par un même nombre strictement positif.

Troisième règle:

Le professeur rappelle que prendre l'opposé d'un nombre revient à le multiplier par -1.
L'ombre étant revenue entre -2 et 5, le professeur pose une pointe de compas sur la bande de papier au point qui a une ombre au zéro. Il fait faire à la bande de papier une rotation de 180° autour de ce point. Il obtient l'ombre entre 5 et 2. Les élèves sont un peu étonnés, il refait l'opération plusieurs fois et assez lentement.

On avait : $-2 < x < 5$.
On a obtenu : $-5 < - x < 2$.

On admet que, si on veut multiplier par -2 il faut faire toumer la bande de papier et reculer le rétro-projecteur.
A partir de : $-2 < x < 5$.
on obtiendrait en multipliant par -2 : $- 1 0 < - x < 4$.

On admet la règle suivante :

Règle 3 : On change le sens d'une inégalité lorsqu'on multiplie ou divise chaque membre de l'inégalité par un même nombre strictement négatif.

Règle3 : Si $a<b$ et si $c<0$, alors $a\times c > b\times c$

4) PREMIER TYPE D'EXERCICES -

Marie choisit des nombres qui satisfont à l'inégalité suivante. En faisant l'opération indiquée qu'obtient-on ? Ecrire l'opérateur qui convient.

$x < 5$ $3x$.........	$x < -8$ $x - 6$........	$x < 4$ $-5x$.........
$x + 12 < 7$ x......	$-6x < 15$ x......	$4x < -16$ x......

5) CORRIGER LES EXERCICES DE MARC

Dans chaque exercice suivant, à partir de la première inégalité, Marc a déduit la deuxième. A-t-il eu raison ?

Si oui, justifier la réponse avec une règle.Ecrire l'opérateur qui permet de passer de la première ligne à la deuxième.

Sinon, modifier la deuxième ligne pour que la déduction soit exacte. Justifier la réponse avec une règle.

Ecrire l'opérateur qui permet de passer de la première ligne à cette nouvelle deuxième ligne.

$3x > 12$ $x > 9$	$x > 7$ $x - 9 > -2$	$-x > 6$ $x < -6$
$-5 < -4x < 12$ $-3 < x < 2,5$	$x < 7$ $3x - 8 < 13$	$9 - 5x > -11$ $x < 4$
$x > 3$ $x - 10 < -10$	$-3 < x < 6$ $12 < 3(x + 7) < 39$	$-13 < -5x + 2 < 22$ $-4 < x < 3$

Coder et résoudre des problèmes

Niveau : 4ème techno

Question : Ça sert à quoi ?

Objectif de l'enseignant :

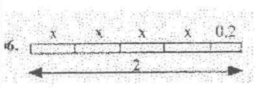
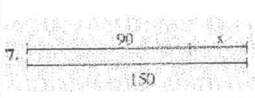
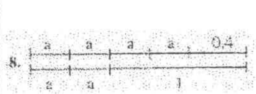
Introduire les équations à partir de leur utilité pour résoudre des problèmes

Mettre au point une stratégie de résolution

Activités mentales :

Conjecturer, imaginer, généraliser

Documents élèves:

Les données du Problème	Ecris la question à poser	Entoure les codages qui correspondent au problème	Indique ce que désignent les lettres	Résous le problème à ta façon
1. On a reporté la longueur du bâton 3 fois. On a obtenu 1,20 m.		3 x 1,2 = b 3b = 1,2 3 + b +1,2 3 + 1,2 = b 3 - 1,2 =b		
2. J'achète 5 kg de pommes et 2 kg de bananes à 19 F le kilo. Je paie 98 F.		2p + 19 = 98 5p + 38 = 98 5p + 2 x 19 = 98 *5 + p + 2 +19*		
3. 5 kg de pommes et un ananas à 12F coûtent 36 F.		5 + p + 12 + 36 5 + p = 36 -5p + 12 = 36 5p x 12 = 36		
4. Une mère et sa fille ont 52 ans à elles deux. Quand sa fille est née, la mère avait 22 ans.		52 = 22 + f 52 = m + f 52 = f + (22 +f) m = f + 22		
5. En ajoutant 2 à un nombre que j'ai multiplié par 4, je trouve 30.		4 + 2 + n = 30 4(2 + n) 2 + 4n = 30 4n + 2 = 30		
		4x + 0,2 = 2 4 + x = 0,2 4 + x + 0,2 = 2 x + x + x + x + 0,2 =2		
		150 - 90 = x 150 = 90 + x 150 + x = 90 150 = 90 - x		
		1 + 2a = 4a + 0,4 a + a + a + a = 0,4 **6a** = 1,4 1 = 2a + 0,4		

Résoudre des problèmes

Question : Ça fonctionne comment ?

Un élève a résolu les problèmes 1 *à* 5 de la fiche précédente : *"Coder et résoudre des problèmes "*, en écrivant des égalités qui comportent toutes la lettre **x** dont il faut trouver la valeur.

Il avait ordonné ses phrases pour indiquer clairement sa façon de résoudre chacun des problèmes 1 à 5.

Toutes les phrases qu'il avait écrites pour résoudre les 5 problèmes ont été mélangées.

On te demande de retrouver les phrases correspondant à chacun des problèmes et de les ranger dans le bon ordre.

Voici les 26 phrases :

$52 - 22 = 2x$
$x = 0{,}4$
$x = 24/5$
$2x = 30$
$5x + 12 = 36$
$x = 28/4$
$52 = x + 22 + x$
$x = 7$
$4x + 2 = 30$
$x = 15$
$5x = 60$
$x = 30$
$4x = 28$
$52 = x + (22 + x)$
$3x = 1{,}2$
$x = 60/5$
$5x = 36 - 12$
$5x + 2 \times 19 = 98$
$x = 1{,}2 : 3$
$x = 4{,}8$
$5x = 98 - 38$
$52 = 2x + 22$
$5x + 38 = 98$
$x = 12$
$4x = 30 - 2$
$5x = 24$

Range les 26 phrases dans les 5 rectangles
(1 rectangle par problème).

Reconnaître les solutions des équations

Niveau : 4ème techno

Question : Ça fonctionne comment ?

Objectif de l'enseignant : Mettre au point une stratégie de résolution

Activités mentales : Conjecturer, vérifier

Documents élèves:

1. Qu'est-ce qu'une équation ?
C'est une forme codée d'un **problème** utilisant le signe =
On cherche un ou plusieurs nombres pour que cette égalité soit vraie.
Les nombres à trouver sont généralement désignés par des lettres (les **inconnues).**
2. Qu'est-ce que résoudre une équation ?
C'est trouver le ou les nombres à mettre à la place de l'inconnue ou des inconnues pour que l'égalité obtenue soit vraie.
Chaque nombre convenable est une **solution** de l'équation.
3. Exemple
Problème : *Quel nombre faut-il mettre dans le carré pour obtenir une égalité (vraie) ?*

$$4 \times \square - 7 = 5$$

Equation : $4x - 7 = 5$
La **solution** de l'équation est **3**

On écrit plus simplement:
$4x - 7 = 5$ pour $x = 3$

1. On te demande de retrouver les solutions de chacune des 6 équations ci-dessous parmi les nombres suivants : -2,1 12 3 -3,1 9,3

(1) $x - 3 = 9$ pour x = ...
(2) $4x - 3 = x + 24{,}9$ pour x = ...
(3) $4x = 12$ pour x = ...
(4) $-6x = 18{,}6$ pour x = ...
(5) $9x + 3 = -15{,}9$ pour x = ...

Pour justifier ton choix, *complète* d'abord le tableau suivant puis *colorie* les cases qui permettent de trouver les solutions.

x	$x - 3$	$-x + 5$	$4x$	$-6x$	$9x + 3$	$4x - 3$	$x + 24{,}9$
-2,1							
12							
3							
-3,1							
9,3							

2. Trouve les solutions des équations suivantes :
$x + 7 = 9$ pour x = ...
$x - 4{,}5 = 6{,}2$ pour x = ...
$12x = 60$ pour x = ...
$3x + 5 = 4x$ pour x = ...

Trouver des solutions avec un tableur.

Pré-requis : Les élèves ont déjà travaillé sur ordinateur

1. Résolution de l'équation $-3{,}5x - 7{,}2 + 0{,}5x = -2x - 9 + x$

Pour réaliser cette tâche, tu devras appliquer les consignes suivantes.

- *Ouvrir* le document EQ4 avec ClarisWorks;
- *Afficher les outils* dans le menu *Ecran*
- *Sélectionner* l'outil Tableur;
- *Sélectionner la cellule A2 puis entrer une nouvelle valeur pour x* dans cette cellule. Le tableur calcule les deux membres en B2 et C2. Le arapheur montre les résultats. Tu dois trouver x pour que les valeurs des deux membres soient égales.

2. Résolutions des équations :

(1) $0{,}5 + 5x = -1\ 1{,}5 - x$

(2) $x - 10 + 0{,}5x = x + 4 - 3{,}5x$

Tu utiliseras la méthode précédente pour chaque équation.

Commence par écrire le premier membre de l'équation en B 1 et le deuxième membre en C 1 en texte normal.

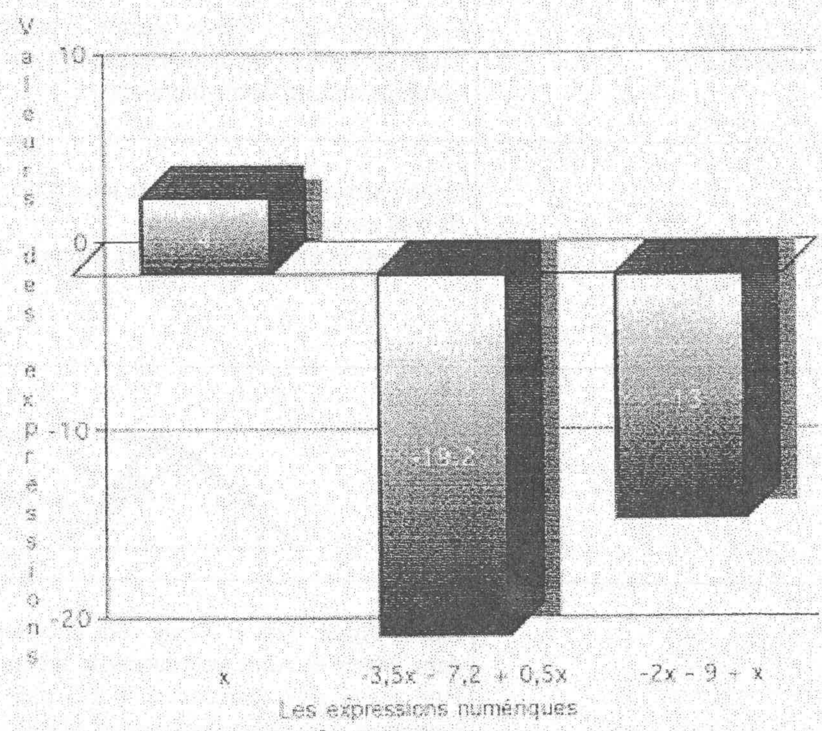
Puis tu coderas les formules de calcul en B2 et C2 en corrigeant les précédentes.

Enfin tu essaieras des valeurs pour x en A2, jusqu'à l'égalisation des deux membres.

	A	B	C
1	x	-3,5x - 7,2 + 0,5x	-2x - 9 + x
2	4	-19,2	-13

On veut trouver une valeur de x pour que

-3,5x - 7,2 + 0,5x = -2x - 9 + x



Des problèmes

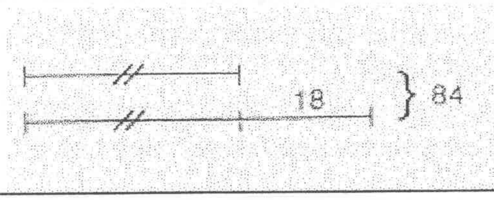
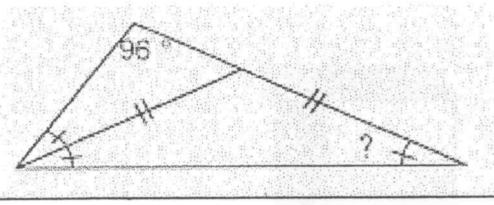
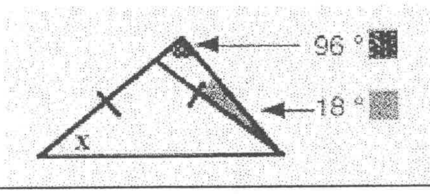
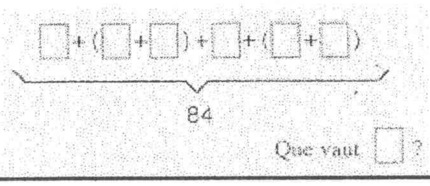
Niveau : milieu de 5ème et début de 4ème

Question : C'est quoi ?

Objectif de l'enseignant : Mettre un problème en équation

Activités mentales : Analyser un texte, un schéma

Consigne : Associer les situations qui se traduisent par la même équation

1 Vincent a deux fois plus de billes que Pierre, et ils en ont 84 ensemble. Combien en a Pierre ?	2. Trouver x tel que : $2x + 18 = 84$
3. On sait que le demi-périmètre d'un rectangle est de 84 mètres, et que sa longueur est le double de sa largeur. Quelle est la largeur de rectangle ?	4. 
5. Jean a deux fois moins de billes que Marc. Pierre en a autant que Jean et Eric en a autant que Marc. Au total, ils en ont 84. Combien Jean a-t-il de billes ?	6. Un champ a la forme d'un trapèze rectangle. Son aire est de 84 hm², et sa hauteur fait 4 hm. Les mesures des bases (en hm) sont les nombres x et $9x$. Trouver x.
7. $x + 2x = 84$ $x = ?$	8. Aurélie, marc et Pierre ont 84 F à eux trois. Aurélie et Marc ont la même somme. Pierre possède 18 F. Combien possède Aurélie ?
9. $(a + 2 \times a) \times 2 = 84$ Quelle est la valeur de a ?	10. Une classe de 21 élèves décide d'offrir un cadeau d'une valeur de 84 F à l'un de leur camarade de classe. Combien chacun devra-il donner ?
11. 	12. Quatre arbres ont été plantés le long d'une allée de 84 mètres. Ils sont espacés régulièrement. Quelle est la distance entre deux arbres ?
13. $20x = 84$	14. 
15. 	16. Marie, Anne, Paul et Pierre font une course de relais de 84 dam. Marie et Anne parcourent la même longueur. Pierre et Paul à eux deux parcourent 9 fois plus que la somme des longueurs parcourues par Anne et Marie. Quelle longueur a parcourue Marie ?

OPPOSE - INVERSE

Niveau : 2nde

Question : C'est quoi ?

Objectif de l'enseignant :

Enraciner les définitions en travaillant sur les deux notions en comparaison.
Faire élaborer par les élèves des critères leur permettant de dissocier les deux notions.
Travailler sur des écritures différentes d'un nombre (fractions, écritures décimales, écritures simplifiées ou non...)
Vérifier la différenciation entre valeur exacte et valeur approchée.

Activités mentales :

Imaginer
Dégager une règle de l'expérience

Déroulement :

- Prévoir un temps de recherche individuel puis travail en petits groupes.
- Prévoir un temps de synthèse.

Document élèves :

1) Compléter le tableau, en donnant plusieurs écritures pour chacun des nombres.

Exemple : 5 s'écrit aussi $\frac{10}{2}$, ...;l'opposé de 5 est -5qui s'écrit aussi $-\frac{10}{2}$, ...;l'inverse de 5est $\frac{1}{5}$ qui s'écrit aussi 0,2 .

NOMBRE	OPPOSE	INVERSE	commentaire
-7,5			
$\frac{3}{4}$			
$5-\frac{1}{3}$			
$\frac{\sqrt{2}}{2}$			
$1+\sqrt{2}$			
1- a			
x^2			
$\frac{1}{2}+x$			
$-\pi$			
$-(2+\sqrt{5})$			
- a			
$\frac{2}{3+a};(a \neq -3)$			

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$		
10^{-3}		

2) QUESTIONS

- Comment peut-on reconnaître que deux nombres sont opposés?
- Comment peut-on reconnaître que deux nombres sont inverses?

3) Corriger le tableau suivant (deux types de fautes ont été commises : erreur de calcul, utilisation erronée de valeur approchée).

NOMBRE	OPPOSE	INVERSE
3	-3	0,3333
$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}-2$	$2+\sqrt{3}$
a^2-a	$a(1-a)$	$\frac{1}{a^2-a}$
5×10^{-2}	-0,05	500
$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}; (a\neq 0 \ et\ b\neq 0)$	$-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$	$\frac{ab}{a+b}$
2π	-6,283185307	0,1591549431

identités remarquables

Niveau : 2nde

Question : C'est quoi ?

Objectif de l'enseignant :

Reconaître et associer des expressions algébriques égales
Ne pas confondre les différentes identités remarquables

Activités mentales :

Analyser une écriture
Comparer deux écritures voisines
Appliquer une formule

Document élève :

Ranger les expressions suivantes dans les quatre colonnes du tableau ci-dessous

$(5x - 2)(5x - 2)$	$(4x + 1)(4x - 1)$	$(5x + 1)^2$
$(3x + 1)^2$	$(7x + 2)(6x - 1)$	$(7x + 1)(7x + 1)$
$(9x - 5)^2$	$(5x + 7)(5x - 7)$	$(3x - 1)(3x + 2)$
$(8x + 1)^2$	$(x^2 - 9)$	$(x - 1)(x + 1)$
$(4x - 1)(4x - 1)$	$(x + 1)(x + 1)$	$(25 - 4x^2)$
$x^2 - 25$	$(x - 7)^2$	$(2x - 1)(2x + 1)$

$a^2 - 2ab + b^2$	$a^2 - b^2$	$a^2 + 2ab + b^2$	$ad + ac + bc + bd$

Formes factorisées et développées

Niveau : 2nde

Question : C'est quoi ? Ça sert à quoi ?

Objectif de l'enseignant :

Reconaître forme développée et forme factorisée
Identifier termes et facteurs
Préparer la résolution des équations du second degré

Activités mentales :

Reconnaître une écriture
Transformer une écriture
Analyser et choisir une écriture

Déroulement :

Recherche individuelle pour la colonne « type » puis travail à deux.

Document élève :

a) Compléter le tableau (dans la colonne type, indiquer F ou D ou A, s'il s'agit d'une forme factorisée, développée ou d'une autre forme)

expressions	type	forme développée	degré	forme factorisée	nombre de facteurs	autres formes
$a(x)=3x^2+15x$						
$b(x)=(x-3)(2x+5)$						
$c(x)=x - 3(2x+5)$						
$d(x)=25x^2 - 4$						
$e(t)=t^2 - 6t + 9$						
$f(t)=5t^2 - 4t + 3$						
$g(u)=(u+1)^2 + 49$						
$h(x) = x^2 - 14$						
$i(x)= 12 + (3 - x)^2$						
$j(x)= (3x - 5)^2$						
$k(x)=(2x-7)^2-5(2x-7)$						
$l(x)=5x^3-7x^2-5x+7$						
$m(x)=(3x-5)(3x+5)$						
$n(x)=(5x+3)^2(x-1)$						

b) Pour les calculs suivants, indiquer la forme la plus pratique :
$b(3)$; $b(0)$; $g(-1)$; $g(0)$; $k(1)$; $k(7/2)$
Pour résoudre les équations suivantes, indiquer la forme la plus pratique :
$k(x) = 0$; $i(x) = 12$; $l(x) = 0$; $h(x) = 0$

Inégalités

Niveau : 2nde

Question : Ça fonctionne comment ?

Objectif de l'enseignant :

Faciliter et préparer à l'utilisation de tableaux de signes pour la résolution d'équations produits ou quotients

Activités mentales :

Changer de langage
Analyser un exemple

Déroulement :

Prévoir un temps de recherche individuel puis confrontation avec le voisin.
Prévoir un temps de synthèse.

Document élève

Compléter le tableau en vous inspirant de l'exemple de la première ligne :

$3x - 6 < 0$	$3x$ - 6 est un nombre négatif	$3x$ - 6 est un nombre de signe -	$3x-6$ - 0 + → x 2	$x \in]-\infty;2]$
$-2x + 3 > 0$				
$5 - x < 0$				
	$4x$ - 2 est un nombre positif			
		7 - $3x$ est un nombre de signe -		
			$6-2x$ + 0 - → x 3	

Autour des équations

Niveau : 2nde

Question : Ça fonctionne comment ?

Objectif de l'enseignant :

Reconnaître les différents types d'équations utilisés en seconde
Reconnaître et lever les obstacles habituels
Agir sur les erreurs

Activités mentales :

Imaginer
Mémoriser les cas critiques

Déroulement :

- Prévoir un temps de recherche individuel puis confrontation avec le voisin.
- Prévoir un temps de synthèse.

Document élèves :

1/	$2x(x+3)-(x+1)(x+3)=0$	**2/**	$(2x-3)=5x^2$
3/	$(3x-5)^2-4=0$	**4/**	$4x^2+1=0$
5/	$(2x-1)^2=-9$	**6/**	$(4x+1)+5x(4x+1)=0$
7/	$2(4-7x)=x(4-7x)$	**8/**	$5(x+1)^2-(x+2)(x+1)=0$
9/	$(4+5x)^2=(1-x)(4+5x)$	**10/**	$x+3=(x+3)^2$
11/	$x(x-7)+x=0$	**12/**	$x(2x+3)=4x$

a) Souligner en rouge les équations qui n'ont pas de solutions ($S=\varnothing$)

b) Souligner en vert les équations qui utiliseront la factorisation de a^2-b^2

c) Souligner en bleu les équations qui utiliseront une factorisation avec un facteur commun

d) Parmi ces équations relever celles qui nécessiteront d'introduire un **1** .

A quoi les reconnaissez-vous ? Comment pouvez-vous vérifier vos résultats ?

e) Résoudre celles sur lesquelles vous faites souvent des erreurs.

BIBLIOGRAPHIE

Jean-Pierre Astolfi : " L'école pour apprendre " - ESF - 1992
" L'erreur,un outil pour enseigner " - ESF - 1997

Britt-Mari Barth : " L'apprentissage de l'abstraction " - Retz - 1987
" Le savoir en construction " - Retz - 1993

Cécile Delannoy : " Une mémoire pour apprendre " - CNDP ; Hachette éducation - 1994

Antoine de la Garanderie : "Pédagogie des moyens d'apprendre " - Centurion - 1989

Philippe Meirieu : " L'école, mode d'emploi " - ESF - 1985
" Itinéraire des pédagogies de groupe " - Chronique sociale - 1989
" Outils pour apprendre en groupe " - Chronique sociale - 1989
Cassette vidéo : " Apprendre à apprendre : illusion ou réalité? "
Association Apprendre 16 quai Claude Bernard , 69 007 Lyon;

Jean-François Richard : " Les activités mentales " - Armand Colin - 1990

La pédagogie : une encyclopédie pour aujourd'hui - sous la direction de Jean Houssaye - ESF - 1993

Cahiers Pédagogiques : Apprendre (1) - n° 280
Apprendre (2) - n° 281
Apprendre (3) - n° 288
Les représentations mentales - n° 312
Une personne, l'élève - n° 324
Aider à travailler, aider à apprendre - n° 336

Avec la participation de :

Avedissian Danièle

Blouin Daniel

Boissinot Martine

Boulais Pascale

Boulais Thierry

Bucquen Annie

Centieu Monique

Even Marie-Hélène

Guillot Jean-Louis

Lopez Eliane

Lubet Annette

Martin Catherine

Matheron Danièle

Métayer Michel

Métayer Odile

Minard Nicole

Morand Jacqueline

Paquet Claude

Peuch Antoine

Renault Corinne

Riedweg Charlie

Saunier Hélène

Vest Danièle

TITRE : Situations de classe pour l'enseignement du calcul littéral

I.R.E.M. des Pays de La Loire

AUTEURS : Groupe d'Angers

NIVEAU : De la sixième à la seconde

PUBLIC CONCERNÉ : Professeurs de collèges et de lycées

DATE : Décembre 1997

MOTS CLÉS : Calcul littéral – vocabulaire mathématique – raisonnement – équations – erreurs.

RÉSUMÉ :
Ce fascicule propose une réflexion sur les places respectives des automatismes et du sens dans l'élaboration du calcul littéral, ainsi qu'une analyse des difficultés qui lui sont inhérentes.
Sont abordées les questions sur le rôle du langage, les traces écrites à conserver lors de l'apprentissage et la place de la mémorisation.
Sont proposés de nombreux exercices directement exploitables dans les classes, de la sixième à la seconde.

Format : A4 Nombre de pages : 113 Prix : 35 F