# IREM DES PAYS DE LOIRE

Université de Nantes

Centre du Mans Université du Maine Rue O. Messiaen 72017 LE MANS

en collaboration avec la **Direction des Technologies Nouvelles** 

A CONSULTER SUR PLACE



# ENVIRONNEMENTS INTERACTIFS ET ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

ANNÉES 19951996



# IREM DES PAYS DE LOIRE

Université de Nantes

Centre du Mans Université du Maine Rue O. Messiaen 72017 LE MANS

en collaboration avec la **Di**rection des **Te**chnologies **N** ouvelles

A CONSULTER SUR PLACE

# ENVIRONNEMENTS INTERACTIFS ET ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

ANNÉES 19951996



# **SOMMAIRE**

Présentation du document II	3
1. Une aide interactive pour apprendre	5
1.1. Notre idée de l'aide	6
1.2. Des niveaux d'aide en ligne	6
2. Les trois supports papiers complémentaires	7
2.1. Présentation	8
2.2. Les fiches élèves	10
2.2.1. Choisir les actions successives pour résoudre une équation	10
2.2.2. Résoudre une équation avec des parenthèses	11
2.2.3. Transformer une équation	12
3. Le nouveau fonctionnement de la pile Equation	13
3.1. Le bouton "Développer"	14
3.2. Fonctionnement du bouton "Développer"	15
3.3. Les aides	17
3.4. Organi gramme général	22
3.5. Une session d'élève commentée	23
3.6. Un exemple de listing obtenu par un élève	26
4. Les perspectives	27

# **PRÉSENTATION**

D U

DOCUMENT II

Cette nouvelle année de fonctionnement de notre groupe nous a permis d'approfondir le travail des années scolaires antérieures présenté dans le document précédent référencé "Environnements interactifs et enseignement des mathématiques années 1994-1995".

Nous avons étés amenés à créer trois nouvelles fiches élèves et à réaliser un important travail de programmation pour enrichir la pile Equation avec le bouton "développer".

Nous avons également affiné notre analyse des aides en ligne possibles et nous en avons programmé quelques unes.

De nouvelles expérimentations en classe sont prévues en 1996-1997. L'observation des travaux des élèves devrait nous permettre de compléter l'assistance actuellement fournie.

UNE	AIDE	INTERA	CTIVE	POUR	APPR	RENDRE
UIII	AIDL					

# 1.1. Notre idée de l'aide.

Apprendre à résoudre les premières équations (pour les utiliser dans la résolution de problèmes) fait appel à une construction et à une utilisation de compétences multiples (cf notre document précédent : années 94-95).

Cet apprentissage oblige l'élève à utiliser les expressions littérales, alors que le plus

souvent, il maîtrise mal les règles qui les régissent.

Réussir à résoudre des équations va conforter et développer l'adresse à manipuler les expressions littérales, au lieu d'en faire un préalable absolu. Comme une nouvelle approche, un changement d'angle.

Nous avons étés amenés à penser notre aide à l'élève dans ce cadre d'un apprentissage non linéaire. Sur le papier, ou sur l'ordinateur, il y a des situations sur lesquelles il faut agir.

Observer et reconnaître une situation, choisir une action, évaluer l'effet. Enchaîner des actions vers un but. Faire des liens. Se familiariser avec un environnement complexe.

Aider sera suggérer un chemin en cas de blocage, et de plusieurs façons; ou bien forcer le passage d'obstacles particuliers qui nécessitent un effort de précision et de rigueur. Ce sera également présenter des situations de types différents, mais comportant toutes un langage commun complétement fixé qui implique des mises en relations.

Les échanges entre les élèves, aussi bien que les reformulations avec le professeur sont incontournables. Les situations que nous cherchons à construire ont pour but de favoriser au maximum l'interaction entre les personnes de la classe et les différents outils à utiliser, dans la

perspective d'un apprentissage déterminé.

# 1.2. Des niveaux d'aide en ligne.

Dans la pile équation, nous avons prévu trois niveaux d'aide.

L'aide de <u>niveau 1</u> ou "coup de pouce" est gérée par l'ordinateur qui intervient lorsque l'élève est bloqué devant son écran. Un message propose une direction, sans dire comment on y va (quelle action choisir). En cas de besoin de plus d'aide, le système indique ce que fait l'action escomptée, mais sans l'exécuter. Ce sera à l'élève d'agir.

Nous prévoyons de programmer également des interventions de la machine de ce même type en cas de difficulté à réaliser un bon cheminement (l'élève "tourne" en rond, ses actions

n'aboutissent pas), il n'y a pas de stratégie.

L'aide de <u>niveau 2</u> est plus liée au sens de ce qui se fait. Elle présente des situations différentes qui sortent du fonctionnement habituel de la pile. Les boutons sur lesquels on appuie pour rechercher de la solution disparaissent. On a changé de monde. On a changé de "cadre" pour passer en

graphique, tableur, pour utiliser des schémas de type géométrique.

Par exemple on fait varier la longueur de deux bâtons représentant les membres d'une équation pour "voir" l'effet de x qui "bouge". Ce procédé permet également de comprendre qu'on peut "enlever" 2x à chaque membre pour "isoler" x tout seul sur un bâton (le principe de la "balance", sous une autre forme). On a aussi la possibilité de donner des valeurs pour x dans un tableur grapheur jusqu'à obtenir l'égalité de deux expressions, les deux membres de l'équation (aspect fonctionnel).

Dans tous ces cas, le programme incite l'élève à agir, avec guidage, et il exécute ce qui est

demandé.

Nous pévoyons également, dans ce type d'aide de programmer des boîtes à dialogue qui interrogent l'élève.

L'aide de <u>niveau 3</u> est actuellement prévue sous le contrôle du professeur. On y accède par code. L'élève reçoit la résolution de son exercice ou peut demander la résolution complète d'un autre exercice de son choix. C'est la réponse à la question : "donnez-nous un exemple de résolution complète, ou comment résoudre l'équation suivante ...?"

# LES TROIS SUPPORTS PAPIERS COMPLÉMENTAIRES

# Présentation

Le travail effectué en classe de 4ème l'an dernier, tel qu'il a été décrit dans le rapport précédent, a favorisé pour la plupart des élèves une bonne maîtrise avec la résolution d'équations simples.

Cependant dans une troisième d'un collège où les élèves avaient effectué l'expérimentation alors qu'ils étaient en 4ème, deux difficultés sont réapparues.

- 1. Mauvais codage du problème : l'inconnue ne désigne pas un nombre bien identifié, et la mise en équation se fait mal.
- 2. Confusions de méthodes pour arriver à isoler l'inconnue. La méthode "d'équilibrage" travaillée en classe (ajouter, soustraire, multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre) se mélange avec celle que les élèves ont observée : "changer de membre en inversant le signe".

Par exemple pour passer de :

$$4x - 10.5 = x + 7.5$$
  
 $4x - x = 7.5 + 10.5$ 

Il est plus économique de dire :

"je fais passer -10, $\bar{5}$  à droite en mettant +10, $\bar{5}$  et x à gauche en mettant -x",

plutôt que :

"pour éliminer - 10,5 écrit à gauche, je dois ajouter 10,5 aux deux membres et pour éliminer x à droite ...".

Le mélange produit des idées du type "changer de place et ajouter toujours ", qui donne :

$$4x + x = 7.5 + 10.5$$

ou bien du type "plus d'un côté, c'est moins de l'autre" comme lorsque :

$$4x = 11$$
 donne  $x = 11 - 4$ .

La classe concernée a souhaité refaire les fiches. Seul le travail avec la fiche EQ4 (tableur) n'a pas été redonné, et les essais avec **la pile Equation** ont étés faits en cours dialogué, avec un seul ordinateur - tableau.

Deux heures de travail collectif et un travail à la maison important ont permis de mieux résoudre de petits problèmes se ramenant à une équation, et d'aborder les inéquations du premier degré à une inconnue.

Les trois fiches complémentaires EQ6, EQ7 et EQ8 ont été étudiées en classe en 1/2 heure, un mois et demi-plus tard. Leur but est de se refamiliariser avec le langage et des actions et avec leur effet, notamment lors de la présence de parenthèses. Cette activité bien réussie par la plupart des élèves va se poursuivre par la résolution de problèmes avec système de deux équations à deux inconnues, du premier degré.

# EQ 6 Choisir les actions successives pour résoudre une équation

En 4ème. 15 à 20 mn.

Les 5 boutons d'action pour agir sur une équation sont rappelés (avec la même disposition qu' à l'écran) : "ajouter ...", "soustraire ...", "multiplier par ...", "diviser par ..." et "réduire". La stratégie de résolution est donnée en clair.

L'élève doit nommer l'action à partir de son effet.

Il est souhaitable de proposer ce travail après un premier passage sur la pile Equation.

Travail individuel puis échanges possibles avec les voisins et correction.

# EQ 7 Résoudre une équation avec des parenthèses

En 4ème. 15 à 20 mn.

On rajoute 2 boutons aux 5 actions précédentes. "Développer ..." et "Supprimer ..." permettent d'obtenir des équations équivalentes sans parenthèses.

L'élève nomme à chaque étape l'action qui a été effectuée dans un exemple de résolution.

Travail individuel puis échanges possibles avec les voisins et correction.

Ce travail peut suivre EQ6 et précéder une utilisation de la nouvelle version de la pile Equation qui comporte ces deux actions.

# EO 8 Transformer une équation

En 4ème. 15 à 20 mn.

Reprise éventuelle en 3ème avant inéquations ou résolutions de systèmes.

On présente à nouveau les 7 actions dans 12 transformations indépendantes.

L'élève exécute la transformation décrite.

Ce travail permet de fixer l'attention sur des passages pertinents lors de résolutions sur le papier, ou sur des passages qui donnent lieu à des erreurs fréquentes.

# Choisir les actions successives pour résoudre une équation

Les 5 actions suivantes permettent de remplacer une équation par une autre équation qui a les mêmes solutions.



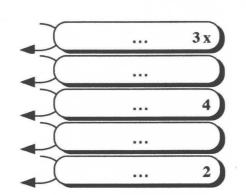
REDUIRE

MULTIPLIER PAR ...
DIVISER PAR ...

Pour résoudre une équation,

- tu la remplaces par des équations de plus en plus simples, en choisissant à chaque étape l'une des 5 actions,
  - tu cherches à isoler progressivement l'inconnue.
- 1. Ecris dans chaque cadre l'action qui permet de passer à la ligne suivante.

$$5x - 4 = 3x - 5$$
 $5x - 3x - 4 = -5$ 
 $2x - 4 = -5$ 
 $2x = -5 + 4$ 
 $2x = -1$ 
 $x = -0,5$ 



2. Une équation a été résolue ci-dessous. Complète les explications données.

Pour décrire les actions, tu écriras : j' ajoute, je soustrais, je multiplie, je divise ou je réduis.

$$1.2x + 0.4 = 0.7x + 0.5 + 0.6x$$

Je MULTIPLIE les deux membres par

$$12x + 4 = 7x + 5 + 6x$$

Je .... le deuxième membre.

$$12x + 4 = 13x + 5$$

Je ..... aux deux membres.

$$4 = 13x - 12x + 5$$

Je ..... le deuxième membre.

$$4 = x + 5$$

Je ..... aux deux membres.

Je **REDUIS** le premier membre.

$$-1 = x$$

# Résoudre une équation avec des parenthèses

Pour obtenir une nouvelle équation sans parenthèses, tu peux utiliser les 2 actions suivantes :

DEVELOPPER ...

les produits

(lorsqu'un nombre est multiplié par une somme ou par une différence)

SUPPRIMER ...

les parenthèses

(lorsqu'elles désignent une expression ajoutée ou soustraite ou un opposé à prendre).

# Une équation a été résolue ci-dessous.

Complète les explications données, en retrouvant à chaque étape l'action qui convient. Tu as le choix parmi les 7 actions possibles du tableau ci-dessous.

$$7(x-3) - 2(x-4) = -(4x+5)$$

Je ..... l'écriture de .....

$$7x - 21 - 2(x-4) = -(4x+5)$$

Je ..... l'écriture de .....

$$7x - 21 - (2x - 8) = -(4x + 5)$$

Je ..... les parenthèses dans ....

$$7x - 21 - (2x - 8) = -4x - 5$$

Je ..... les parenthèses dans .....

$$7x - 21 - 2x + 8 = -4x - 5$$

Je ..... le premier membre.

$$5x - 13 = -4x - 5$$

J' ..... aux deux membres, puis je réduis les deux membres.

$$9x - 13 = -5$$

J' .... aux deux membres.

$$9x = -5 + 13$$

Je .... le deuxième membre.

$$9x = 8$$

Je ..... les deux membres par .....

$$x = 8/9$$

Les 7 actions

je développe

je supprime

j' ajoute

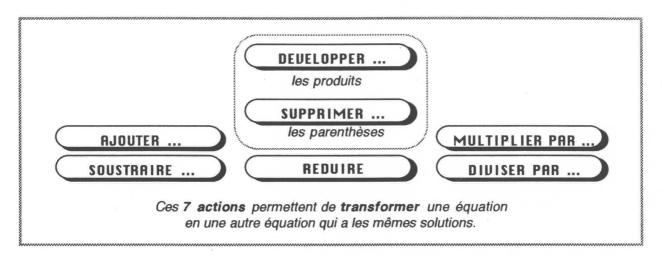
je soustrais

je multiplie

je divise

je réduis

# Transformer une équation



Dans chacun des cas suivants, écris la nouvelle équation que tu dois obtenir en effectuant l'action indiquée. Chacun des 12 exercices est indépendant des autres.

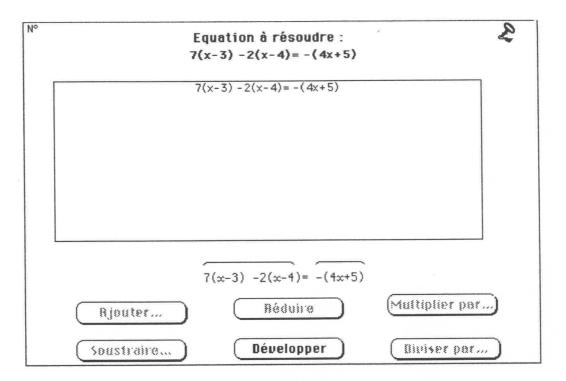
①	11x	=	Je divise les deux membres par 11
2	5x - 10	=	12x + 4,7 <b>J' ajoute</b> 10 aux deux membres
3	$4(x-3) + \underline{2(x-1)}$	=	15 - 2x <b>Je développe</b> l'écriture de 2(x-1)
4	$5(x-3) - 2(x-1) \dots$	=	5 - (2x+7) <b>Je développe</b> l'écriture de 2(x-1)
(5)	2x <u>- 2(2x-6)</u>	=	5(x-3) - 2(x-1) <b>Je développe</b> l'écriture de -2(2x-6)
<b>6</b> )	4x + (2x - 8) - 3x	=	6x + 7 <b>Je supprime</b> les parenthèses de (2x - 8)
<b>(7)</b>	- <u>(5x - 2)</u> + 6x	=	2x - 1 <b>Je supprime</b> les parenthèses de - $(5x - 2)$
8	-11 + x	=	8 - $(7x-1)$ <b>Je supprime</b> les parenthèses de $(7x-1)$
9)	9x + 4	=	-5x + 7 <b>Je soustrais</b> 4 aux deux membres
<b>(</b> 0)	-2,5 - 0,5x	=	5 - 3,5x <b>Je multiplie</b> les deux membres par 2
1	400x + 1500	=	2400 - 500x <b>Je divise</b> les deux membres par 100
(2)	4,5x + 7,2	=	5x - 3 + x - 1 <b>Je réduis</b> les deux membres

# LE NOUVEAU FONCTIONNEMENT DE LA PILE EQUATION

# 3.1. Le bouton "Développer".

À la suite d'expérimentations en 94/95, nous avons décidé pour enrichir la période d'apprentissage avec l'outil informatique "Équations" de doter cette pile du bouton "Développer".

Sur le plan ergonomique, nous l'avons placé au même niveau que le bouton "Réduire".



Nouvelle présentation de l'écran

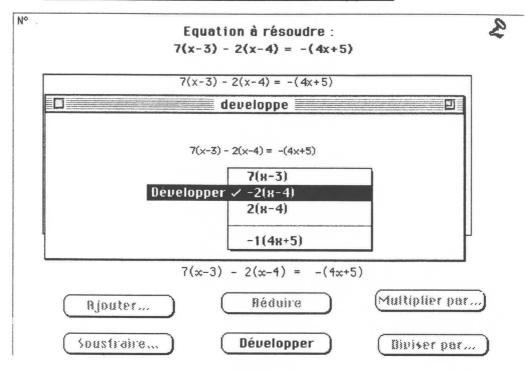
#### Remarques:

Si l'équation proposée à l'élève présente des parenthèses (avec des écritures de la forme a(bx + c)):

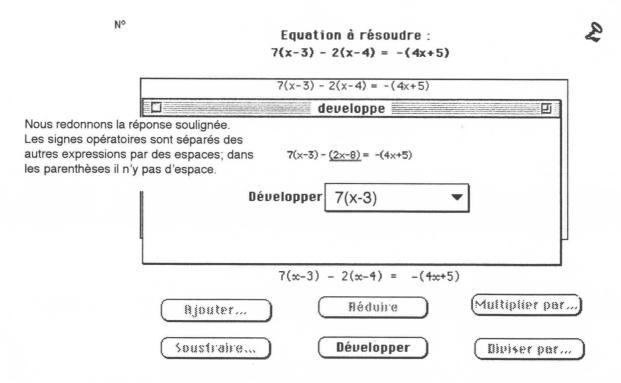
· Les boutons autres que "Développer" sont inactifs.

• Lorsque tous les développements possibles ont été demandés par l'élève et si des parenthèses subsistent (*Dans le cas présent, il restera -(4x+5)*), le bouton "Développer" est remplacé par un bouton "Sup. parenthèses".

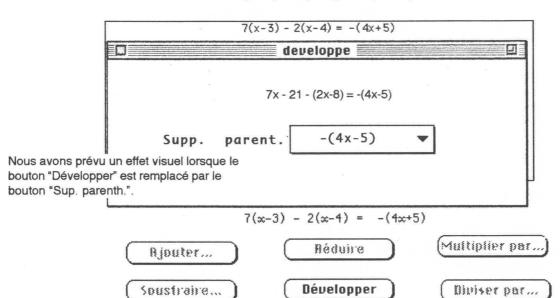
# 3.2. Fonctionnement du bouton "Développer".



On donne à l'élève la possibilité de choisir entre le développement de "2(x-4)" et de "-2(x-4)". Voyons ce que l'élève obtient comme réponse s'il a demandé le développement de 2(x-4).



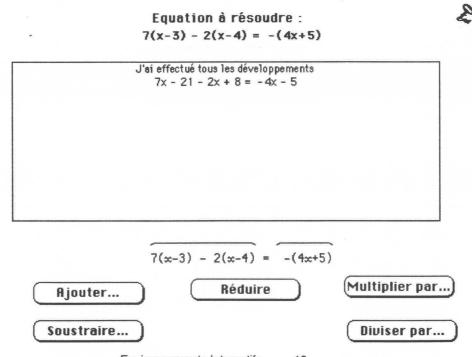
Dans le cas ci-dessus, lorsque l'élève appuiera sur le bouton **Développer**, il n'aura plus que le choix "7(x-3)" puisque les réécritures de - (2x-8) et -(4x+5) sont considérées comme des suppressions de parenthèses.



Le bouton "**Développer**" reste actif tant qu'il reste une possibilité de développement. Quand toutes les suppressions de parenthèses sont effectuées on revient à l'écran de départ.

#### Remarques:

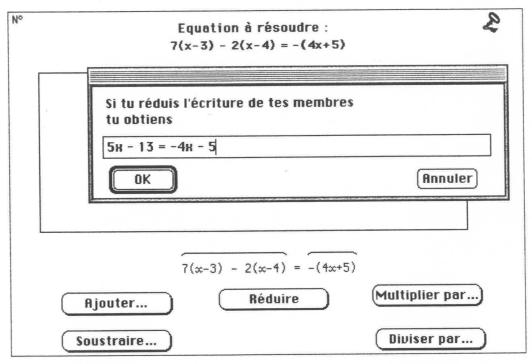
- À la demande de professeurs du groupe, il est possible de présenter à l'élève toute suppression de parenthèses comme l'effet d'un développement: par exemple
- -(4x-5) sera présenté comme le développement de -1(4x-5).
- Il sera possible aussi qu'un élève demande à l'ordinateur de tout développer, dans ce cas le logiciel interrogera l'élève sur quelques développements. Si l'élève se trompe un sous-écran d'aide lui sera proposé pour réviser ses connaissances.
- Le travail de développements se trouve dans une fenêtre flottante afin que l'élève puisse à tout moment relier l'expression donnée.



**Environnements Interactifs** 

#### 3.3. Les aides.

lci l'élève a demandé de l'aide: le logiciel lui signale qu'il peut réduire l'écriture de ses membres et lui donne le résultat de cette réduction.



#### Remarques:

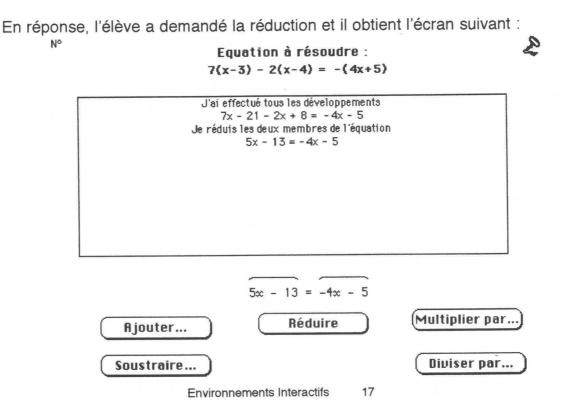
On prévoit ici deux aides possibles:

· Une aide du genre "je te conseille de réduire".

· Une aide qui explique ce qui se passera (celle qui est présentée ci-dessus).

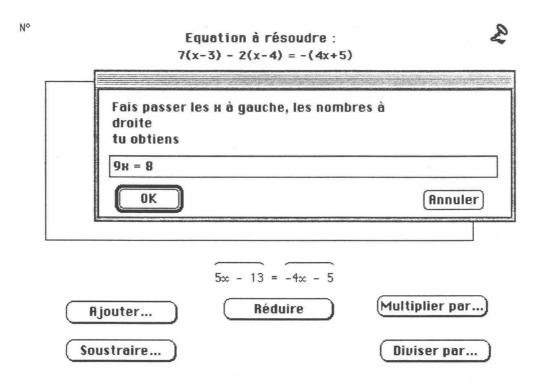
L'aide demandée est stockée en mémoire, elle sera fournie à l'élève dans le résumé de son travail à la fin de la session.

Le panneau d'aide est une palette mobile permettant de voir si nécessaire l'équation sur laquelle on travaille.



Si l'élève après la réduction demande à nouveau une aide, on peut lui proposer les possiblités suivantes :

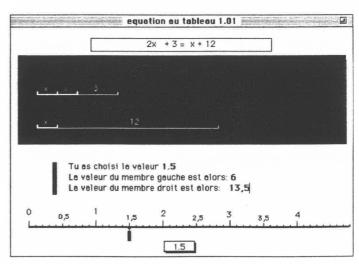
Aide de niveau 1: le logiciel lui conseille de "faire passer" les x d'un côté sans lui fournir de méthode mais en lui donnant la nouvelle équation à obtenir.



- Aide de niveau 1 "plus": Si l'élève ne "voit" pas ce qu'il faut faire, on lui propose alors d'ajouter 13 aux deux membres.
- Aide de niveau 2 : Si l'élève se trouve en face d'une équation du genre ax + b = cx + d (avec a, b,c,d positifs) on pourra lui fournir une aide du genre suivant :

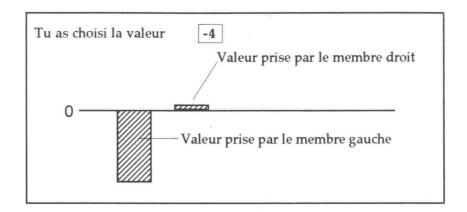
Exemple : 2x + 3 = x + 12

Cette forme d'aide a déjà été présentée dans le document 94/95.



Cette dernière présentation doit permettre à l'élève de voir qu'en soustrayant x aux deux membres, il peut obtenir la valeur de x par translation.

# Autres formes d'aides possibles sur le même sujet:



Tape une valeur entre -5 et 5 ->

x	5x - 13	-4x-15
- 1	-18	-11
0	-13	-15
-4	-33	1
1		

Dans cet environnement, une nouvelle aide peut être proposée à l'élève, du genre:

- Vous devez trouver une valeur de x pour laquelle 5x 13 = -4x 15
- · La valeur que vous cherchez se trouve entre -1 et 0.

#### Remarques:

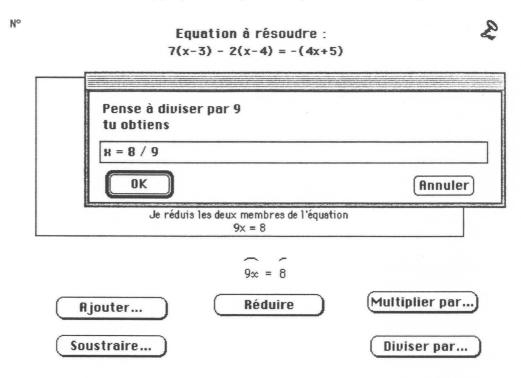
Dans ces différentes formes d'aide, nous présentons des changements de cadres afin de favoriser chez l'apprenant différentes visions de ce qu'est "Résoudre une équation".

Dans l'approche actuelle, nous avons proposons :

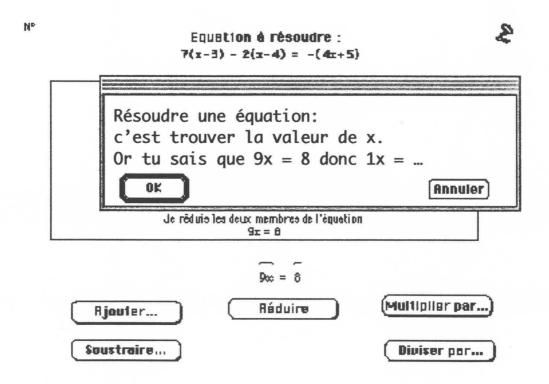
- des manipulations guidées de lettres et de nombres avec les actions de base,
- le schéma des bâtons pour donner l'idée de supprimer les x de l'un des membres,
- l'approche type tableur-grapheur pour suggérer la signification des deux membres : deux fonctions à "égaliser" en agissant sur la variable.

Lorsque sont proposées ces aides de niveau 1ou 2, Il y a toujours retour à la pile appelante.

Lorsque l'élève arrive à la dernière étape de la résolution, s'il demande de l'aide on lui fournit la fenêtre suivante (qui peut ne pas comporter le résultat).



On peut également lui proposer un message plus formateur du genre:



Dans certains cas on peut même prévoir une aide complète de niveau 3 *(à l'aide d'un code fourni par le professeur)*. Le logiciel fournit alors toutes les "étapes" de la recherche de la solution de l'équation.

$$7(x-3) - 2(x-4) = -(4x+5)$$

Je commence par supprimer les parenthèses

7x - 21 - 2x + 8 = - 4x - 5

Je réduis les écritures des 2 membres

5x - 13 = -4x - 5

Je fais passer les x à gauche et les nombres à droite

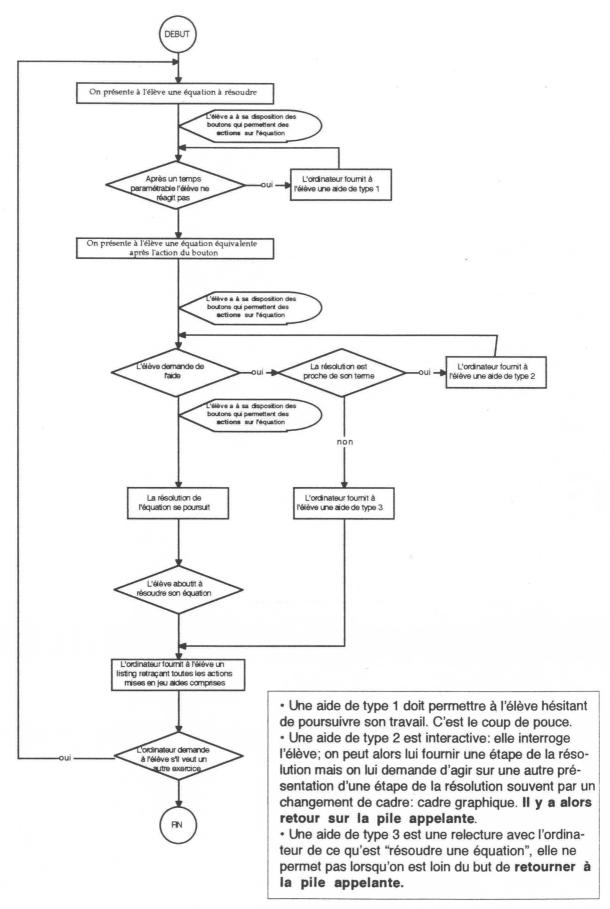
9x = 8

Je divise les 2 membres par 9

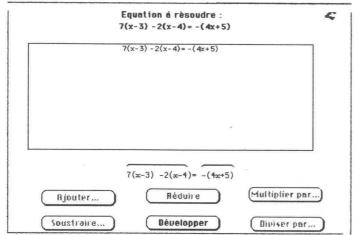
x = 8 / 9

On peut alors soit prévoir un retour à la pile de base, soit un exercice différent.

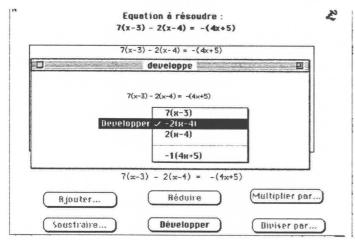
# 3.4 Organigramme général.



# 3.5. Une session d'élève commentée.

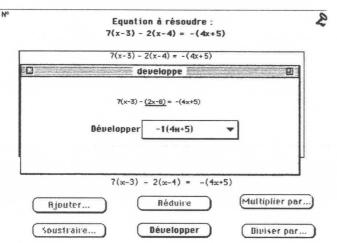


L'élève a devant lui une équation à résoudre. Seul le bouton **Développer** est actif.

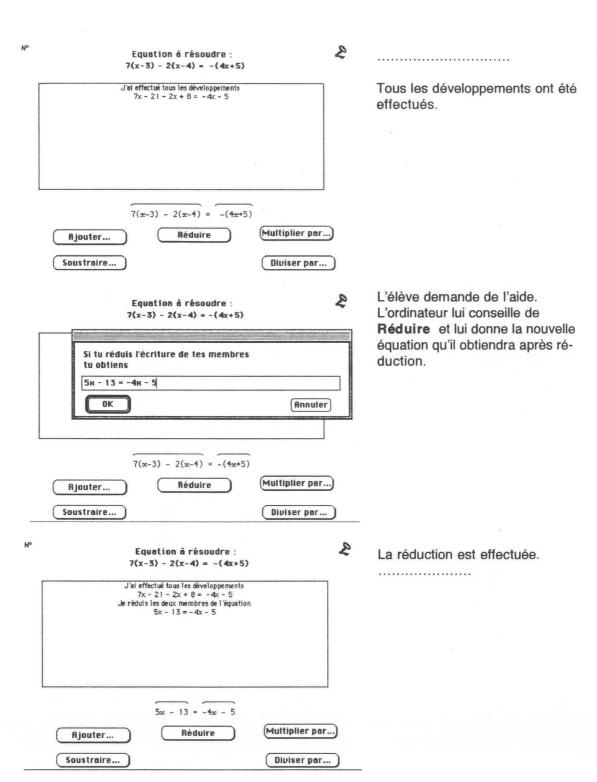


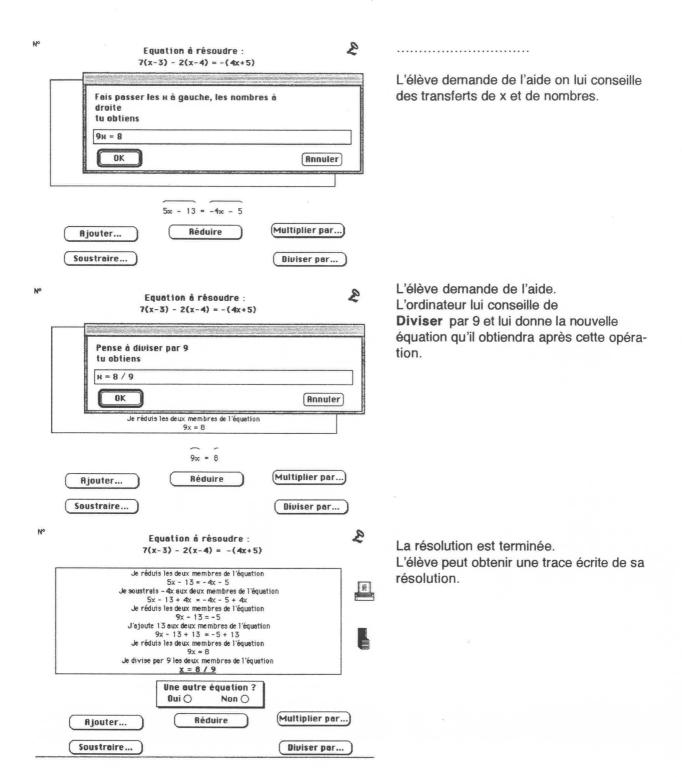
L'élève a appuyé sur le bouton **Développer**. Une nouvelle pile est active tant que des parenthèses vont subsister.

Si l'élève demande à l'ordinateur d'effectuer tous les développements, le logiciel va l'interroger.



Ici l'élève a demandé le développement de -1(4x+5) à la place de la suppression des parenthèses.





# 3.6 Un exemple de listing obtenu par un élève.

Équation proposée:

7(x-3) - 2(x-4) = -(4x+5)

Je développe les deux membres de l'équation:

7x - 21 - 2x + 8 = -4x - 5

Aide 1:

Il est conseillé de réduire les écritures des deux membres

Je réduis l'écriture des deux membres

5x - 13 = -4x - 5

Aide 2:

Tu dois obtenir la valeur de x, il faut placer les x d'un côté du signe "="

J'ajoute 13 aux deux membres

5x - 13 + 13 = -4x - 5 + 13

Je retranche -4x aux deux membres

5x - 13 + 13 + 4x = -4x - 5 + 13 + 4x

Je réduis l'écriture des deux membres

9x = 8

Aide 3:

Ton équation est de la forme ax = b donc il faut diviser les deux membres par a

Je divise les deux membres par 9

x = 8/9

# LES PERSPECTIVES

Nous devons compléter la mise au point des aides présentées ici et contrôler leur efficacité en classe.

Le fonctionnement du bouton "développer" doit également être testé par les élèves.

Nous prévoyons ultérieurement de réaliser dans la pile Equation un procédé qui observe ce que fait l'élève (un "mouchard") et qui peut réagir lorsque l'apprentissage se passe mal (cette notion est à clarifier).

Dans le domaine des premiers apprentissages du calcul littéral, nous souhaitons également aborder les deux points suivants:

les inéquations, (environnement voisin de celui nous décrivons pour les équations),
les équations des droites.

