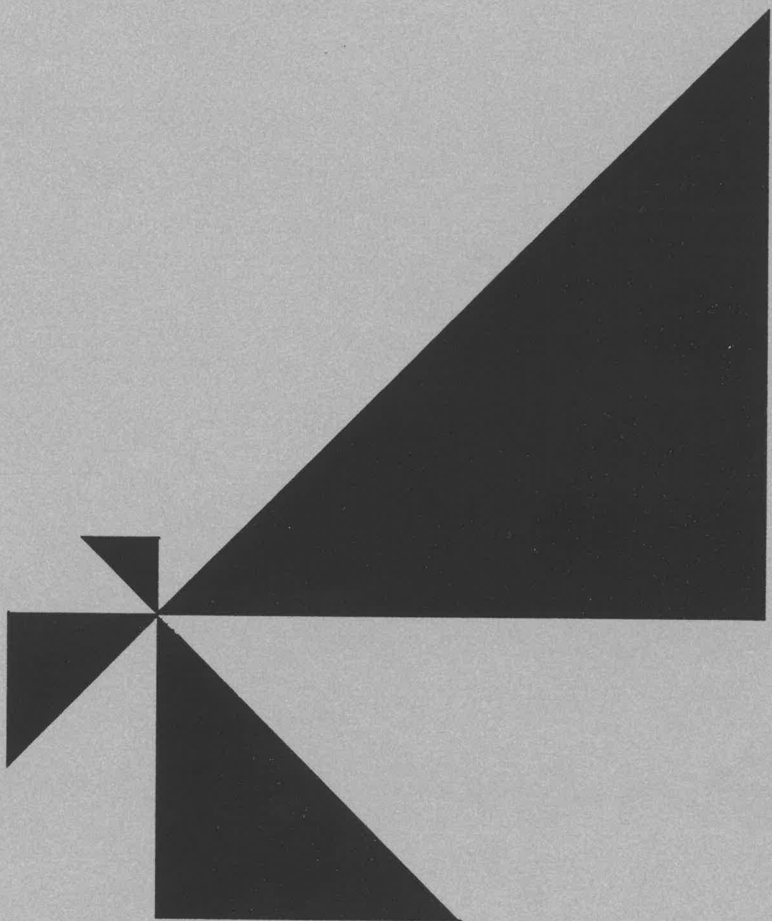
UNIVERSITE DE NANTES

C.T.E.U.

I.R.E.M. des Pays de la Loire

Exercices de Géométrie élémentaire



B. Truffault

A.M CHARBONNEL

Exercices de géométrie élémentaire

Sommaire

Enoncés

Ebauches de solutions

Avertissement

Ces exercices sont répartis en neuf séries correspondant aux chapitres du cours. Ce classement s'est imposé de lui-même, pour des raisons de commodité évidentes. Il convient d'en souligner le caractère parfois artificiel. En effet, il n'est pas rare qu'une même situation puisse se dénouer, de façon naturelle, par des voies relevant de plusieurs des rubriques proposées.

Les solutions sont tantôt esquissées, tantôt développées, selon des critères dont toute subjectivité n'est évidemment pas absente. Qu'il soit bien clair que leur intérêt est quasiment nul pour qui n'a pas, au préalable, cherché avec un minimum d'opiniâtreté.

@ Ce symbole renvoie à des indications proposées sous la rubrique "aides", placée à la fin de chacune des sections. Ce système est, en l'état actuel, plutôt rudimentaire. Il est perfectible.

Pour l'essentiel, notre propos fut de rendre facilement accessible, à des candidats au C.A.P.E.S., un assortiment de sujets, généralement classiques, qui ne sont plus proposés dans les manuels actuels – notamment pour ce qui concerne les isométries les similitudes, les coniques et la géométrie de l'espace – en les intégrant à un ensemble présentant un minimum de cohérence globale.

Ce fascicule reprend, en les complétant et les amendant, de façon notable, des documents antérieurs, parfois hétéroclites, réalisés, pour la plupart, au moyen d'un traitement de texte aujourd'hui périmé. Leur actualisation ayant nécessité une nouvelle frappe de tout ce qui est calcul et symboles mathématiques, il est fatal que cette première version comporte de nombreuses coquilles – merci, par avance, à tous ceux qui, conscients de la charge que représente une telle entreprise voudrons bien contribuer à l'amélioration des versions ultérieures.

Septembre 1995

Enoncés

I. Calcul vectoriel

I

Etant donné un cube, on en joint un sommet à tous ses autres. Déterminer la somme de tous les vecteurs ainsi définis.

II

Dans le plan on considère trois points A, B et C, soit I le milieu de BC.

1) Montrer que pour tout point M, on a :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AI}.$$

2) En déduire qu'il existe un unique point G du plan tel que

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

@ Quel est ce point si A, B et C ne sont pas alignés ?

III

@ Etant donné un triangle ABC, soit G son centre de gravité, on considère les trois points D, E et F, définis comme suit :

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\ ,\ \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\ ,\ \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Exprimer la somme :

$$\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF}.$$

IV

@ 1) Etant donnés deux segments AA′ et BB′, on note I et J leurs milieux respectifs. Montrer que :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{IJ}.$$

2) En déduire que si ABCD et A′B′C′D′ sont deux parallélogrammes quelconques – dans le plan ou l'espace – les milieux des segments AA′, BB′, CC′ et DD′ sont les sommets d'un parallélogramme – et de ce fait, ils sont dans un même plan.

@ 3) Cette propriété est-elle encore vraie si l'on considère les points qui divisent les quatre segments AA′, BB′, CC′ et DD′ dans un rapport algébrique donné ?

V

@ Etant donnés deux segments AC et BD, de milieux respectifs I et J et un nombre réel k, différent de -1, on considère les points M et N tels que :

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{BD},$$

Soit O le milieu de MN.

1) Justifier que :

$$\overrightarrow{IO} = k\overrightarrow{IJ}.$$

en déduire le lieu de O lorsque k varie.

2) Montrer que O, est également le milieu du segment PQ, où les points P et Q sont définis par :

$$\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AD} \text{ et } \overrightarrow{BQ} = k\overrightarrow{BC}.$$

Translations et homothéties du plan

VI

@ Soit Δ et Δ′ deux droites parallèles, D une droite qui les coupe, O et O′ deux points n'appartenant ni à Δ, ni à Δ′. Construire deux points M et M′ vérifiant les conditions suivantes :

- M appartient à Δ et M′ à Δ′,
- (MM′) est parallèle à D,
- les droites (OM) et (O′M′) sont parallèles.

VII

@ Dans le plan, étant donnés deux cercles $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ et une droite D, construire une droite Δ parallèle à D et qui coupe $\mathscr{C}$ en A et B, $\mathscr{C}'$ en A′ et B′ tels que :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}.$$

VIII

On considère un quadrilatère convexe ([1]) ABCD. Par un point M du côté AB, on mène les parallèles aux diagonales AC et BD. Elles coupent respectivement (BC) en en Q et et (AD) en N. La parallèle menée par N à (AC) coupe (CD) en P.

1) Montrer que MNPQ est un parallélogramme.

2) Quels sont les lieux des milieux de MN et PQ quand M décrit le segment AB ?

3) Quel est le lieu du centre O du parallélogramme MNPQ ?

IX

On considère un quadrilatère ABCD. La parallèle à (BC) qui passe par A coupe (BD) en I. La parallèle à (AD) qui passe par B coupe (AC) en J. Démontrer que (IJ) est parallèle à (CD).

X

Etant donnés deux points distincts O et O′, on note

$$h = \mathrm{H}(\mathrm{O}, \tfrac{1}{2}) \text{ et } h' = \mathrm{H}(\mathrm{O}', 2).$$

1) Montrer que $h' \circ h$ est une translation, en déterminer le vecteur.

2) Déterminer $h \circ h'$.

XI

Etant donnés deux points distincts O et O′, on note :

$$h = \mathrm{H}(\mathrm{O}, \tfrac{1}{3}) \text{ et, } h' = \mathrm{H}(\mathrm{O}', 2).$$

@ 1) Montrer $h' \circ h$ est une homothétie qu'on déterminera.

2) Déterminer $h' \circ h$.

1 Rien n'interdit d'envisager le cas des polygones non convexes.

XII

Etant donnés deux points A et B, soit O leur mileu et k un nombre réel donné, déterminer le lieu des points M, tels que :

@ (a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=k,$

(b) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB}=k.$

XIII

Etant donnés quatre points A, B, C et D d'un même plan et un réel nombre k, déterminer le lieu des points M, tels que :

@ (a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD},$

(b) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=k.$

XIV

@ 1) Etant donné un quadrilatère plan ou gauche ABCD, montrer que :

$$AB^2-BC^2+CD^2-DB^2=2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}.$$

En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que les diagonales AC et AD soient orthogonales.

@ 2) Formuler une conséquence remarquable :

- pour les tétraèdres dans l'espace
- pour les quadrangles, dans le plan.

XV

1) Etant donnés trois vecteurs, non nuls, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, de l'espace, montrer que si $\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{w}-\vec{u}$ et si $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}-\vec{v}$, alors $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}-\vec{w}$.

2) On considère un triangle ABC et une droite qui coupe BC en A', CA en B' et AB en C', soit H et H' les orthocentres respectifs des triangles ABC et AB'C'.

@ a) Montrer que $\overrightarrow{BC'}$ est orthogonal à $\overrightarrow{HH'}-\overrightarrow{CB'}$ et $\overrightarrow{CB'}$ est orthogonal à $\overrightarrow{HH'}-\overrightarrow{BC'}$. En déduire que $\overrightarrow{HH'}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BC'}-\overrightarrow{CB'}$.

b) Soit J et K les milieux de BB' et CC', exprimer $\overrightarrow{BC'}-\overrightarrow{CB'}$ en fonction de $\overrightarrow{JK}$. En tirer une conséquence pour les droites (HH') et (JK).

@ c) En déduire que, pour tout quadrilatère complet (cf. § 13), les orthocentres des quatre triangles qu'il détermine sont alignés et les milieux des trois diagonales sont respectivement alignés sur deux droites perpendiculaires.

Aides

II 2) On connaît le centre de gravité d'un triangle bien avant de savoir manipuler les vecteurs.

III Décomposer chacun des vecteurs en question afin d'appliquer le résultat de l'exercice précédent.

IV 1) Décomposer chacun des vecteurs en faisant apparaître les points I et J, si l'on s'y prend bien le résultat est immédiat.
3) On adapte ce qui est fait au points 1 et 2 à cette nouvelle situation.

V S'inspirer de l'exercice précédent.

VI & VII Une translation bien choisie conduit sans difficulté à la construction demandé. Penser à justifier le résultat obtenu. Dans les deux cas une discussion s'impose.

X Géométriquement, le résultat est évident.

XI Rechercher un point fixe, le prendre pour origine. L'interprétation géométrique permet de limiter les erreurs d'inattention.

XII C'est immédiat, dès qu'on pense à faire intervenir le milieu de AB.

XII Faire intervenir les milieux de AB et CD. Penser au cas particulier où ces points coïncident.

XIV 1) Penser, encore une fois, à l'identité remarquable $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.
2) Pour le tétraèdre, faire intervenir la notion d'arêtes opposées. Dans le plan on a sûrement entendu parler du "quadrangle orthocentrique, au moins une fois dans sa vie. Sinon, le contexte permet de donner un sens à ce terme si l'on veut bien s'en donner la peine.

XV 2) a) L'unique difficulté est reconnaître la situation traitée au le point 1.
b) Il existe six façons d'appliquer le résultat précédent, ce qui donne six paires de perpendiculaires. Certaines d'entre elles ont une droite en commun ...

II. Calcul barycentrique

I

1) On considère trois points non alignés A, B et C. Construire le barycentre de A, B, C affectés des coefficients –1, 1 et 1.

2) Dans le plan, on considère quatre points distincts A, B, C et D. Construire le barycentre de A, B, C, D affectés des coefficients 1, 2, 3, 4.

II

Montrer que les triangles ABC et A'B'C' ont le même centre de gravité si, et seulement si :

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}.$$

III

Etant donné un triangle ABC, soit A', B' et C' les points qui partagent ses trois côtés dans un même rapport donné, montrer que les deux triangles ABC et A'B'C' ont même centre de gravité.

IV

Etant donné un triangle ABC, soit M un point quelconque de son plan, on désigne par P, Q et R ses symétriques par rapport aux milieux des côtés BC, CA et AB. On note G et K les centres de gravité respectifs des triangles ABC et PQR.

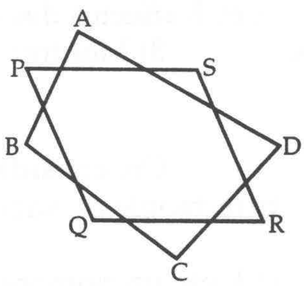
1) Montrer que $\overrightarrow{MK} = 2\overrightarrow{MG}$.

2) Montrer que les milieux des segments AP, BQ, et CR sont un même point L . Préciser les positions relatives des points M, G, K, L.

V

Parallélogramme de Wittenbauer

On considère un quadrilatère convexe ABCD. On partage chacun de ses côtés en trois segments égaux et l'on joint les points obtenus pour former un quadrilatère PQRS suivant le schéma ci-contre.



1) Montrer que PQRS est un parallélogramme.

@ 2) Soit O son centre, G le centre de gravité du quadrilatère ABCD et I le point d'intersection des diagonales AC et BD, préciser les positions relatives des points O, I et G.

VI

Etant donné un quadrilatère convexe déterminer le centre des masses du solide constitué, respectivement :

1) de quatre points de même masse situés aux sommets,

@ 2) d'une lame mince homogène matérialisant son intérieur [1].

---

1 On admettra que le centre des masses d'une lame triangulaire est l'isobarycentre des sommets.

VII

Etant donnés deux points A et B, de l'espace et trois nombres a, b, m, de somme non nulle, caractériser l'application f qui, à tout point M fait correspondre le barycentre M', des points A, B et M, affectés des coefficients a, b, m.

Points alignés – droites concourantes

VIII

Etant donné un triangle ABC, une droite Δ coupe (BC) en P, (CA) en Q et (AB) en R. On désigne par P' (resp. Q', R') le symétrique de P (resp. Q, R) par rapport au milieu de BC (resp. CA, AB)

Montrer que P', Q' et R' sont alignés.

IX

@ Montrer que les droites qui joignent les sommets d'un triangle aux points de contact du cercle inscrit avec le côté opposé sont concourantes en un point dont on exprimera les coordonnées barycentriques relativement à ABC.

X

Théorème de Desargues

On considère deux triangles ABC et A'B'C' situés dans un même plan. On suppose que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en un point O. On suppose en outre que (BC) et (B'C') se coupent en A", (CA) et (C'A') se coupent en B" et (AB) et (A'B') se coupent en A".

@ 1) Montrer qu'il existe six nombres réels α, α', β, β', γ et γ' tels que :

$$\begin{cases} \alpha\overrightarrow{OA} + \alpha'\overrightarrow{OA'} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \alpha + \alpha' = 1 \\ \beta\overrightarrow{OB} + \beta'\overrightarrow{OB'} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \beta + \beta' = 1 \\ \gamma\overrightarrow{OC} + \gamma'\overrightarrow{OC'} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \gamma + \gamma' = 1 \end{cases}$$

les nombres α, β et γ étant deux à deux distincts.

@ 2) Montrer que A" est le barycentre des points B et C affectés des coefficients β et $-\gamma$. Déterminer les barycentres de C et A affectés des coefficients γ et $-\alpha$, puis de A et B affectés des coefficients α et $-\beta$.

@ 3) Montrer que les points A", B" et C" sont alignés.

Application de la formule de Leibniz – variante

XI

On considère trois points A, B et C situés sur les trois arêtes d'un trièdre trirectangle de sommet O et tels que :

$$OA = OB = OC = a$$

et k est un nombre réel donné.

1) Déterminer le lieu des points M, de l'espace, tels que :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 - MO^2 = ka^2.$$

Pour quelle valeur de k le point O appartient-il à cet ensemble ?

2) Déterminer le lieu des points M de l'espace tels que :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 - 3MO^2 = ka^2.$$

À quelle condition A appartient-il à cet ensemble ?

XII

1) Etant donnés trois points A, B et C d'un axe orienté, on pose :

$$a = \overline{BC} \quad , \ b = \overline{CA} \quad \text{et} \quad c = \overline{AB}.$$

a) Montrer que, pour tout point M du plan, on a :

$$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

b) En déduire que :

$$a MA^2 + b MB^2 + c MC^2 + abc = 0. \ [1]$$

@ 2) Application : la bissectrice intérieure de l'angle A d'un triangle ABC coupe le côté opposé en D. Calculer la longueur AD en fonction de :

$$a = BC, \ b = CA \text{ et } c = AB.$$

XIII

Etant donnés n points $A_1, A_2, \dots, A_n$ de l'espace, n scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ et un vecteur unitaire, $\vec{u}$ on considère l'application f de $\mathscr{E}$ dans $\mathbf{R}$, définie par la relation ;

$$f(M) = \alpha_1(\overrightarrow{MA}_1 \cdot \vec{u})^2 + \alpha_2(\overrightarrow{MA}_2 \cdot \vec{u})^2 + \dots + \alpha_n(\overrightarrow{MA}_n \cdot \vec{u})^2.$$

On pose :

$$s = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n.$$

@ 1) Montrer que, si $s \neq 0$, on a :

$$f(M) = f(G) + s(\overrightarrow{MG} \cdot \vec{u})^2.$$

où G désigne le barycentre de $A_1, \dots, A_n$ affectés des coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

@ 2) Parmi les plans ayant une direction donnée, caractériser celui dont la somme des carrés des distances aux points A_i est minimum.

3) Etudier le cas où $s = 0$.

---

1 Appelée formule de Stewart, quand on l'exprime :

$$MA^2.\overline{BC} + MB^2.\overline{CA} + MC^2.\overline{AB} + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB} = 0$$

XIV

Cercle circonscrit et coordonnées barycentriques

Etant donné un triangle ABC, on note :

- $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ et p le demi-périmètre,
- O et R le centre et le rayon de son cercle circonscrit,
- I et r le centre et le rayon de son cercle inscrit,
- $\mathscr{A}$ son aire.

1) Montrer que :

(a) $$\mathscr{A} = \frac{abc}{4R} = pr,$$

(b) $$a = b\cos C + c\cos B,$$

@ (c) $$2\mathscr{A} = R(a\cos A + b\cos B + c\cos C),$$

@ (d) $$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}.$$

@ 2) Considérons un point quelconque M du plan, on note α, β, γ ses coordonnées barycentriques relatives à A, B, C. On pose

$$f(M) = \alpha MA^2 + \beta MA^2 + \gamma MA^2.$$

Exprimer $f(M)$ en fonction de $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$. En déduire :

a) l'équation du cercle circonscrit en coordonnées barycentriques,

b) la distance OI en fonction de r et R.

@ 3) Dans l'espace, étant donné un trièdre trirectangle de sommet S, on considère un cercle de centre I et de rayon r tangent à ses trois faces. Calculer la distance IS.

@ 4) On reprend les données du début, en supposant que M est un point intérieur au triangle ABC. On note P, Q, R ses projections orthogonales sur (BC), (CA) et (AB). Exprimer l'aire du triangle PQR (appelé triangle *podaire* de M) en fonction de $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$.

Quel est le point dont le triangle podaire est d'aire maximum ?

@ 4') Lever la restriction M intérieur au triangle. On retrouve ainsi un résultat classique, lequel ?

Aides

V 2) Exprimer $\overrightarrow{IP}$ comme combinaison de $\overrightarrow{IA}$ et de $\overrightarrow{IB}$ ...

VI 2) Cette demande a un rapport avec l'exercice précédent.

VII Si l'on écrit plus de quelques lignes, on s'est fourvoyé.

IX Les distances des points de contact aux sommets s'expriment :

$$p-a, p-b \text{ ou } p-c;$$

X 1) Le problème n'est pas l'existence de ces coefficients, c'est le fait qu'ils soient tous distincts.

2) Considérer le barycentre dont il est question. Il appartient à (BC), montrer qu'il appartient aussi à (B'C').

3) Une combinaison de vecteurs de même origine avec des coefficients dont la somme est nulle est idépendante de l'origine.

XII 2) On connait le rapport entre DB et DC – attention au changement de notation !

XIII 1) Du point de vue formel, tout se passe comme pour la fonction scalaire de Leibniz.

2) Choisir $\vec{u}$ normal aux plans et unitaire. La distance de A_i au plan qui passe par M s'exprime ...

XIV 1) (c) Découper le triangle à partir du centre du cercle circoncrit. Il y a deux cas à considérer suivant que les trois angles sont aigus ou pas.

(d) Combiner les relations (b) et ajouter ce qu'il faut pour voir apparaître

$$\cos A + \cos B + \cos C,$$

puis tenir compte de (a).

2) Combiner les expressions obtenues par la formule de Leibniz en prenant successivement pour origine A, B et C.

a) Exprimer la formule de Leibniz à partir de O.

b) Quels sont les coefficients barycentriques de I pour le repère A, B, C ?

3) Le cercle s'inscrit dans le triangle formé par les traces de son plan sur les faces du trièdre.

4) Exprimer la distance de M aux trois côtés du triangle au moyen des coordonnées barycentriques de ce point. Découper le triangle PQR en trois à partir de M, pour chcun de ces triangles, on connait un angle et les côtés adjacents ...

4') On pourra revenir sur ce point après l'étude du produit vectoriel. Voir notamment l'exercice IV-6.

III. Equations de droites et de plans

Nous ne pouvons que conseiller de reprendre systématiquement les exercices marqués (*) en modifiant les données numériques.

Le plan ou l'espace sera supposé rapporté à un repère – le cas échéant orthonormé – chaque fois que ce sera nécessaire. Déterminer les hypothèses minimales sous lesquelles une affirmation est vraie, ciest aussi, dans ce cadre, un point essentiel.

Equations de droites – équations de plans

I

(*) On considère le plan passant par les trois points suivants :

$$A:(1,-1,2)\ ,\ B:(2,1,-1)\ ,\ C:(-1,1,1).$$

Déterminer les équations cartésiennes de ses traces sur les faces du repère.

II

Exprimer une équation d'un plan défini par la donnée de ses traces sur les axes de coordonnéees – autrement dit, du plan qui passant les trois points de coordonnées :

$$(a,0,0)\ ,\ (0,b,0)\ ,\ (0,0,c)\ ?$$

III

(*) Vérifier que les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} 3x+2y+\ z=\ 1 \\ \ x+2y+3z=-1 \end{cases}$$

sont les équations cartésiennes d'une droite dont on écrira une présentation sous forme paramétrique.

IV

@ (*) Déterminer des équations cartésiennes d'une droite définie par les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x=\ 2-\ \lambda \\ y=\ 3+2\lambda \\ z=-1+3\lambda \end{cases}$$

V

Dans le plan on considère trois points définis par leurs coordonnées :

$$A:(1,1)\ ,\ B:(10,13)\ ,\ C:(13,6).$$

1) Déterminer les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC, ainsi que son rayon.

2) Déterminer les coordonnées de l'orthocentre de ABC.

@ 3) Déterminer les équations des bissectrices de l'angle en A.

VI

Les deux droites ayant respectivement pour équations :

$$x+y=2 \quad \text{et} \quad 9x-3y=4$$

sont deux hauteurs d'un triangle ABC dont le sommet A admet pour coordonnées $(3,1)$. Déterminer les coordonnées des sommets B et C.

VII

(*) On considère le plan P passant par les points de coordonnées :

$(1,2,2)$, $(2,1,1)$ et $(2,-3,-1)$

et la droite D passant par les points de coordonnées :

$(1,2,-1)$ et $(3,1,1)$.

1) Vérifier que P et D ne sont pas parallèles.

@ 2) On note (x,y,z) les coordonnées d'un point M quelconque. Déterminer les coordonnées des images de M par les transformations suivantes ([1]) :

- la projection sur P suivant la direction de D,
- la symétrie par rapport à P suivant la direction de D,
- la projection sur D suivant la direction de P,
- la symétrie par rapport à D suivant la direction de P.

VIII

(*) Même question, en remplaçant la droite D par la perpendiculaire à P passant par le point de coordonnées $(1,2,3)$.

Systèmes linéaires

IX

Résoudre des systèmes de deux équations à trois inconnues et de trois équations à deux inconnues dont on aura choisi les coefficients au hasard ([2]).

X

@ Ecrire les discussions sur l'existence des solutions des systèmes :

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases} \qquad \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \\ a''x + b''y = c'' \end{cases}$$ ([3]).

En donner une traduction géométrique.

XI

Problème des boeufs de Newton

75 boeufs ont mis 12 jours à brouter l'herbe d'un pré de 60 ares.

81 boeufs ont mis 15 jours à brouter l'herbe d'un pré de 72 ares.

Combien de boeufs un pré de 96 ares pourra-t-il nourrir pendant 18 jours ? ([4])

---

1 Comme il y a bien des façons de répondre à ces demandes, il est conseillé de ne pas se lancer à l'aveuglette dans les calculs.

2 Dans ce type de calcul les erreurs sont fréquentes. Penser à vérifier les résultats en substituant les solutions touvées dans les équations traitées.

3 Ces discussions n'ont rien d'objectivement difficile, mais leur rédaction peut, à juste titre, apparaître délicate pour qui manque d'entraînement, aussi convient-il de ne pas compliquer inutilement la tâche. C'est pourquoi, on pourra supposer que a est non nul et que les équations du second système ne sont pas deux à deux incompatibles.

4 On convient d'admettre que :
- la ration journalière de chaque animal est la même et reste constante,
- la quantité initiale d'herbe par are est la même dans tous les cas, ainsi que la quantité qui pousse par jour et par are.

Aides

IV L'élimination de λ donne la condition de compatibilité de ce système de trois équations à une inconnue. C'est la condition nécessaire et suffisante cherchée (cf. le cours).

V 3) Les bissectrices de deux droites étant les lieu des points équidistants de celles-ci, le recours aux équations normalisées règle la question.

Comment attribuer chacune des équations obtenues à l'une ou lautre des bissectrices ?

VII 2) Pour la projection sur P, il semble que le plus efficace soit de présenter le plan par une équation cartésienne et les projetantes par des équations paramétriques.

Pour la projection sur D, penser qu'un vecteur appartient à la direction de P si, et seulement si, ses coordonnées annulent la partie homogène de l'équation de P.

X Pour le système général de deux équations à trois inconnues penser que la proportionnalité de a, b, c et de a', b', c' s'exprime :

$$ab' - ba' = 0 \text{ et } bc' - cb' = 0.$$

Quelle est la négation de cette condition ?

Pour le système général de trois équations à deux inconnues, on peut commencer par traiter le système formé par les deux premières. S'il est compatible, ou bien il est équivalent à l'une des équations, ou bien il admet une solution unique.

IV. Produit vectoriel – produit mixte

Dans toute cette série, l'espace ou le plan est supposé orienté et rapporté à un repère orthonormé directe – chaque fois qu'il est question de coordonnées.

I

(*) On considère le tétraèdre de sommets :

$$A:(-1,2,3)\ ,\ B:(2,-5,2)\ ,\ C:(1,-3,7)\ ,\ D:(2,-1,-1).$$

@ Déterminer la distance du sommet A à la face BCD, ceci de deux façons différentes – au moins [1].

II

Distance de deux droites dans l'espace.

On considère deux droites non parallèles :

- D qui passe par le point A et admet pour vecteur directeur $\vec{u}$,
- D′ qui passe par le point B et admet pour vecteur directeur $\vec{v}$.

1) Montrer que la distance d des deux plans contenant l'une et parallèle à l'autre est la plus courte distance d'un point de D à un point de D′.

2) Montrer que :

$$d=\frac{\|\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}.$$

III

@ Dans l'espace orienté et rapporté à un repère orthonormé direct, quatre points A, B, C et D sont donnés par leurs coordonnées :

$$A\,;(0,3,1)\ ,\ B:(1,5,4)\ ,\ C:(1,0,3)\ ,\ D:(4,2,4).$$

On on note respectivement Δ et Δ' les droites (AB) et (CD).

1) Déterminer un vecteur $\vec{u}$ qui soit orthogonal à Δ et Δ'.

2) Déterminer l'équation du plan contenant Δ et parallèle à Δ'.

3) En déduire les coordonnées des pieds de la perpendiculaire commune à Δ et Δ'.

IV

Identité de Lagrange

@ 1) Etant donné six nombres quelconques : a, b, c, a', b' et c' montrer qu'on a toujours :

$$(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)=(aa'+bb'+cc')^2+(bc'-b'c)^2+(ca'-c'a)^2+(ab'-a'b)^2.$$

@ 2) Etant donné un triangle, déterminer le point de son intérieur dont la somme des carrés des distances aux trois côté soit minimum.

V

@ Démontrer les relations suivantes :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CB},$$

$$\overrightarrow{PB}\wedge\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PC}\wedge\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PA}\wedge\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}.$$

où A, B, C et P sont quatre points quelconques du plan. En donner une interprétation géométrique.

---

1 Les méthodes utilisées sont elles réellement différentes ?

VI

@ Exprimer, au moyen du produit vectoriel, les coordonnées barycentriques d'un point quelconque relativement à un repère donné (A, B, C) du plan.

VII

Démontrer la formule du *"double produit vectoriel"* :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u}\ ,\ \vec{w})\ ,\ \vec{v}) - (\vec{u}\ .\ \vec{v})\ .\ \vec{w}).$$

VIII

"Division vectorielle"

Etant donnés deux vecteurs non nuls $\vec{a}$ et $\vec{b}$, déterminer l'ensemble des vecteurs $\vec{x}$ tels que :

$$\vec{a} = \vec{b} \wedge \vec{x}\ .$$

IX

On considère quatre points A, B, C, et D de l'espace. Déterminer l'ensemble des points P tels que :

$$\overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} \wedge \overrightarrow{PD}.$$ [1]

X

@ Démontrer les relations suivantes :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) + \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) + \vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{0},$$
$$(\vec{u} \wedge \vec{v}\ ,\ \vec{v} \wedge \vec{w}\ ,\ \vec{w} \wedge \vec{u}) = (\vec{u}\ ,\ \vec{v}\ ,\ \vec{w})^2.$$

XI

On considère trois vecteurs non coplanaires $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ de l'espace orienté. On définit :

$$\vec{a}\,' = \frac{1}{(\vec{a}\ ,\ \vec{b}\ ,\ \vec{c})}\vec{b} \wedge \vec{c} \quad ,\ \vec{b}\,' = \frac{1}{(\vec{a}\ ,\ \vec{b}\ ,\ \vec{c})}\vec{c} \wedge \vec{a} \quad ,\ \vec{c}\,' = \frac{1}{(\vec{a}\ ,\ \vec{b}\ ,\ \vec{c})}\vec{a} \wedge \vec{b}\ .$$

1) Montrer que :

$$\vec{a}\ .\ \vec{a}\,' = \vec{b}\ .\ \vec{b}\,' = \vec{c}\ .\ \vec{c}\,' = 1,$$
$$\vec{a}\ .\ \vec{b}\,' = \vec{a}\ .\ \vec{c}\,' = \vec{b}\ .\ \vec{c}\,' = \vec{b}\ .\ \vec{a}\,' = \vec{c}\ .\ \vec{a}\,' = \vec{c}\ .\ \vec{b}\,' = 0$$

@ 2) Montrer que :

$$(\vec{a}\,'\ ,\ \vec{b}\,'\ ,\ \vec{c}\,') = \frac{1}{(\vec{a}\ ,\ \vec{b}\ ,\ \vec{c})}.$$

@ 3) Soit α, β et γ trois nombres donnés, montrer qu'il existe un vecteur $\vec{v}$, unique, tel que :

$$\vec{v}\ .\ \vec{a} = \alpha\ \ ,\ \ \vec{v}\ .\ \vec{b} = \beta\ \ ,\ \ \vec{v}\ .\ \vec{c} = \gamma.$$

@ 4) Montrer que :

$$\vec{a} = \frac{1}{(\vec{a}\,'\ ,\ \vec{b}\,'\ ,\ \vec{c}\,')}\vec{b}\,' \wedge \vec{c}\,'\ \ ,\ \vec{b} = \frac{1}{(\vec{a}\,'\ ,\ \vec{b}\,'\ ,\ \vec{c}\,')}\vec{c}\,' \wedge \vec{a}\,'\ \ ,\ \vec{c} = \frac{1}{(\vec{a}\,'\ ,\ \vec{b}\,'\ ,\ \vec{c}\,')}\vec{a}\,' \wedge \vec{b}\,'.$$

---

[1] On utilisera les acquis de l'exercice précédent.

Aides

I Le produit mixte exprime les volumes, le produit vectoriel donne les aires ... L'équation normalisée du plan (BCD) donne aussi le résultat. Il existe encore d'autres variantes.

III C'est effectivement fastidieux !

IV 1) Reconnaitre le module d'un produit scalaire et celui d'un produit vectoriel de deux vecteurs. Il est alors évident que cette relation est une forme travestie de :

$$\sin^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

2) Exprimer les distances d'un point aux côtés en fonction des coordonnées barycentriques et des longueurs a, b, c des côtés du triangle. L'identité de Lagrange donne le fil conducteur.

V Le jeu est toujours le même, il consiste à décomposer, judicieusement, des vecteurs en faisant apparaître des produits vectoriels dont certains s'annulent.

VI C'est une simple interprétation de l'exercice précédent.

VII Commencer par régler le cas où $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ont la même direction. Des considérations géométriques permettent de procéder au choix judicieux d'un repère dans un plan arbitraire dont la direction contient $\vec{u}$ et $\vec{v}$`. On peut alors obtenir l'égalité annoncée sans calcul fastidieux.

VIII On commence par remarquer qu'il n'existe de solution que si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux. On règle les cas particuliers de façon à exprimer $\vec{x}$ sous la forme d'une combinaison de $\vec{b}$ et de $\vec{a} \wedge \vec{b}$. On applique alors la formule du double produit vectoriel. On peut aussi raisonner de façon purement géométrique.

IX On transforme la condition, par les voies habituelles, de façon à ramener le problème à une division vectorielle, telle qu'elle est présentée dans l'exercice précédent.

X Il n'y a aucun piège, on applique la formule du double produit vectoriel et les propriétés classiques des produits vectoriel et mixte.

XI 2) On retrouve la deuxième relation de l'exercice précédent.

3) Si la solution existe, elle s'exprime comme combinaison de $\vec{a}'$, $\vec{b}'$, $\vec{c}'$ et elle vérifie ... , ce qui définit un vecteur ... qui convient effectivement.

4) La question précédente suggère la marche à suivre et renvoie au point 1.

V. Angles orientés et points cocycliques

I

Etant donné un triangle équilatéral ABC orienté dans le sens direct, inscrit dans un cercle Γ, soit M un point, autre que A et B, de l'arc AC du cercle Γ qui ne contient pas B, on considère le point I du segment MB tel que $MI = MA$.

1) Quelle est la nature du triangle MIA ?

2) Préciser les images des points B et I par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.En déduire que $MB = MA + MC$.

II

Etant donnés deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sécants en deux points A et B, un point M décrit $\mathscr{C}$, les droites (MA) et (MB) recoupent $\mathscr{C}'$ en P et Q.

@ 1) Montrer que l'angle (AP, AQ) est indépendant de M. En déduire que PQ a une longueur fixe et que le cercle circonscrit au triangle MPQ a un rayon constant.

2) Soit H le pied de la hauteur du triangle MPQ issue de P. Montrer que (PH, PA) est constant. En déduire que la droite (PH) Passe par un point fixe D situé sur $\mathscr{C}'$. Construire ce point.

Le quadrangle orthocentrique (1)

III

On considère un triangle ABC. Soit D son orthocentre et A′, B′, C′ les symétriques de ce point par rapport aux droites (BC), (CA) et (AB).

@ 1) Montrer que les points A′, B′ et C′ sont sur le cercle circonscrit au triangle ABC (2).

2) On suppose que le triangle ABC a ses angles aigus. Quelles sont les bissectrices intérieures du triangle A′B′C′ ?

Adapter ce qui précède au le cas où le triangle a un angle obtus.

IV

1) On considère un quadrangle, c'est-à-dire quatre points tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés – pris trois à trois, ils définissent donc quatre triangles.

@ a) Montrer que si l'un des sommets est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres, cette propriété est vraie pour tous les quatre.

Dans ces conditions on dit que les points forment un *quadrangle orthocentrique.*

@ b) Montrer que les cercles circonscrits aux quatre triangles déterminés par les sommets d'un quadrangle orthocentrique ont le même rayon.

2) Réciproquement, on considère trois cercles de même rayon, passant par un même point et sécants deux à deux.

@ a) Montrer que les quatre points d'intersection de ces cercles sont les symétriques de leurs centres par rapport à un point qu'on précisera.

b) Montrer que ces points sont les sommets d'un quadrangle orthocentrique.

---

1 Les exercices 8 et 9 de la série I relèvent aussi de ce thème.

2 On retiendra ce fait.

Droite de Simson et droite de Steiner

V

1) Etant donné un triangle ABC, on note Γ son cercle circonscrit. Soit M un point de son plan, on note P, Q et R ses projections orthogonales sur (BC), (CA) et (AB).

@ a) Montrer que les quatre points P, Q, C et M sont cocycliques, ainsi que les quatre points P, R, B et M. Montrer que :

$$(PQ\,,PR)=(MB\,,MC)-(AB,AC),$$

en déduire que les points P, Q, R sont alignés si, et seulement si, M appartient à Γ (1).

@ b) Soit M et M′ deux points de Γ, S et S′ leurs droites de Simson respectives. Montrer que :

$$(S\,,S')=-(AM\,,AM').$$

En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que les droites de Simson de deux points soient perpendiculaires.

@ 2) On considère quatre droites du plan deux à deux sécantes et telles que trois quelconques d'entre elles ne soient pas concourantes – elles déterminent quatre triangles. Montrer que leurs cercles circonscrits passent par un même point dont les projections sur les quatre droites données sont alignées.

VI

On rappelle que les symétriques de l'orthocentre d'un triangle par rapport aux côtés de celui-ci sont sur le cercle circonscrit. De plus dans la dernière question, on suppose connu le cercle des neuf points d'un triangle.

On considère un triangle ABC, soit soit H son orthocentre et Γ son cercle circonscrit. Etant donné un point quelconque M du plan, on désigne par A′, B′ et C′ ses symétriques par rapport à (BC), (CA) et (AB).

@ 1) Montrer que deux des points A′, B′ ou C′ sont alignés avec H si, et seulement si, le point M est sur Γ. En déduire que, dans ces conditions, A′, B′ et C′ sont alignés (2).

@ 2) a) Soit M un point de Γ, $\mathscr{S}$sa droite de steiner, montrer que :

$$(BC\,,\mathscr{S})=-(BC\,,H_aM).$$

En déduire que toute droite passant par H est la droite de Steiner d'un point de Γ, et d'un seul.

@ b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les droites de Steiner $\mathscr{S}$et $\mathscr{S}$ de deux points M et M′ soient perpendiculaires.

@ c) Dans ces conditions, déterminer le lieu du point d'intersection des droites de Simson de M et M′.

Le lemme de Miquel

VII

@ On considère huit points répartis sur quatre cercles, comme suit :

AA′BB′ , BB′CC′ , CC′DD′ , DD′AA′.

Montrer que A, B, C et D sont cocycliques ou alignés si, et seulement si, A′B′C′D′ le sont aussi.

---

1 La droite passant par ces points est alors appelée *droite de Simson* du point M.

2 La droite passant par ces points est alors appelée *droite de Steiner* du point M

Aides

II 1) Partager (AP, AQ) de façon à faire intervenir des points cocycliques.

III 1) Un angle droit n'a pas besoin d'être orienté car $-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, appliquer la relation de Chasles et tenir compte du fait que la réflexion inverse l'orientation.

2) Montrer qu'il revient au même de démontrer la propriété pour le triengle dont les sommets sont les pieds des hauteurs ([1]). Opérer un tri parmis les familles de points cocycliques. Si le calcul prend plus d'une demi-page, il conviendra de faire le ménage.

IV 1) a) On a déjà rencontré cette situation mais les démonstrations proposées dans la série I seraient déraisonnables dans ce contexte.

b) Les symétriques de l'orthocentre ...

2) a) Les points donnés et les centres des cercles sont les sommets de trois losanges. Ils déterminent ainsi trois parallélogrammes ayant le même centre.

V 1) a) On décompose (PQ, PR) via (PM), puis on tient compte des conditions de cocyclicité le résultat suit de façon quasi automatique.

b) Soit P_1 le point où (MP) recoupe Γ, montrer que (AP_1) est parallèle à S. L'apparition du signe moins découle d'une symétrie.

2) Le second point commun à deux des cercles a même droite de Simson par rapport à ceux-ci, on en déduit ...

VI 1) On peut, par exemple, décomposer (HB', HC') en passant par HA, remplacer M et H d'un côté par C′ et H_c, de l'autre par C′ et H_c. La conclusion suit presque directement.

2) a) & b) Au lieu de la droite de Steiner considérer sa symétrique par rapport à un côté. On notera le gain spectaculaire par rapport à la démonstration correspondante pour la droite de Simson.

c) On fait intervenir les parallèles aux droites de Steiner respectivement en M et M′, on voit apparaître un rectangle. On se souvient aussi qu'en préambule, il a été question du cercle des neuf points.

VII Parmi la foule des égalités d'angles qu'on pourrait exhiber, on retient celles qui font intervenir deux cordes communes à deux des cercles. C'est le cas de :

$$(AB, AA') = (BB', B'A') \pmod{\pi}$$

et des trois relations analogues. La relation de Chasles sert de guide.

---

1 Il est commode de l'appeler triangle *"orthique"*

VI. Isométries planes

I

1) Démontrer que le produit de trois symétries dont les axes sont concourants est une symétrie. Construire son axe.

2) Même question en remplaçant concourants par parallèles.

3) Construire un triangle ABC connaissant, successivement :

a) ses trois bissectrices intérieures,

b) les mdiatrice de ses trois côtés

II

Etant donnés un vecteur $\vec{v}$ et un point O, quel est le résultat de la composition des trois transformations suivantes :

- la translation de vecteur $\vec{v}$,
- la rotation de centre O et d'angle $\hat{A}$,
- la translation de vecteur $-\vec{v}$.

III

Démontrer que la composition de trois demi-tours donne un demi-tour. En construire le centre.

IV

Si d_1, d_2, d_3 sont trois demi-tours, montrer qu'on a :

$$d_1 \circ d_2 \circ d_3 = d_3 \circ d_2 \circ d_1.$$

V

@ Etant donnés trois points non alignés A, B et C, on considère les rotations :

- r_a de centre A et d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$,
- r_b de centre B et d'angle $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$,
- r_c de centre C et d'angle $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

Déterminer le produit $r_c \circ r_b \circ r_a$.

VI

Caractériser le produit de deux symétries-translations dont les axes sont perpendiculaires.

VII

Montrer que si s_1, s_2, s_3 sont trois symétries, alors $(s_1 \circ s_2 \circ s_3)^2$ est une translation.

VIII

@ 1) On considère un triangle ABC, on note :

- s_a, s_b, s_c les réflexions d'axes (BC), (CA), (AB),
- A', B', C' les pieds des hauteurs.

Montrer que $s_c o s_b o s_a$ est une symétrie translation. Déterminer sa forme réduite.

@ 2) En déduire que la composition de trois réflexions par rapport à des doites deux à deux sécantes donne une symétrie si, et seulement si, les axes sont concourants.

@ 3) En déduire aussi que l'orthocentre d'un triangle est le centre d'un cercle tangent aux trois côtés du triangle formé par les pieds de ses hauteurs.

@ 4) On imagine un billard triangulaire. La trajectoire d'une boule est une ligne brisée dont chaque sommet correspond à un rebond. On admet que les deux segments adjacents à chaque sommet sont portés par des droites symétriques par rapport à la bande sur laquelle à lieu le rebond.

Il existe de telles trajectoires qui se referment après un ou deux rebonds sur chacun des trois côtés, les décrire.

Existe-t-il d'autres possibilités de telles trajectoires fermées ?

IX

@ On considère deux droites D et D', perpendiculaires en un point O, soit A un point équidistant de D et D'. Deux cercles passant par O et A recoupent respectivement D en P et Q et D' en P' et Q'. Montrer que PQ = P'Q'.

X

@ Etant donnés deux points distincts A et A' :

1) déterminer le lieu des centres O des rotations r qui transforment A en A',

2) construire le point O connaissant l'angle α de r,

3) déterminer l'ensemble des images d'un point donné M par les rotations considérées.

XI

@ Etant donnée une rotation de centre O et d'angle α, on note M' l'image d'un point M, quelconque. Déterminer le lieu des point M, tels que l'une des conditions suivantes soit remplie :

- (MM') a une direction fixe,
- le segment MM' a une longueur donnée,
- (MM') passe par un point donné.

XII

On considère deux droites D et D', non parallèles, et un vecteur $\vec{v}$ donné.

1) Construire un point M de D et un point M' de D' tels que $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.

2) Même demande, en remplaçant les droites par des cercles.

XIII

@ 1) Construire un cercle tangent à deux cercles concentriques donnés et passant par un point donné.

@ 2) Contruire un triangle équilatéral (resp. rectangle isocèle) ayant ses trois sommets sur trois droites parallèles données.

@ 3) Construire un triangle équilatéral (resp. rectangle isocèle) ayant ses trois sommets sur les trois côtés d'un triangle donné.

XIV

@ Construire un carré dont deux côtés soient deux cordes de deux cercles concentriques donnés.

XV

Dans un plan on considère deux droites D et D′. On désigne par A et A′ deux points donnés, respectivement situés sur D et D′.

@ 1) Déterminer le lieu géométrique des centres des rotations qui transforment D en D′.

@ 2) Construire les centres de celles de ces rotations qui transforment A en A′.

@ 3) Il existe, en général, deux solutions ω et ω'. S'il en est ainsi, montrer que l'angle $(A\omega, A\omega')$ et le rapport $\frac{A\omega}{A\omega'}$ sont indépendants de A et A′.

XVI

Théorème des trois miroirs

@ 1) On considère deux déplacements d_1 et d_2. Montrer qu'il est en général possible de trouver trois symétries s_1, s_2 et s_3 telles que :

$$d_1 = s_3 \circ s_1 \quad \text{et} \quad d_2 = s_2 \circ s_3.$$

Que peut-on dire du déplacement $d_3 = s_2 \circ s_1$ lorsque le problème posé admet une solution ?

2) Etant données trois figures, directement égales F_1, F_2 et F_3, d'un même plan, démontrer qu'il existe, en général, trois symétries s_1, s_2 et s_3, telles que :

$$s_1(F_1) = s_2(F_2) = s_3(F_3).$$

XVII

Etant donné un triangle ABC orienté dans le sens direct, on construit sur ses côtés et à l'extérieur de celui-ci les trois carrés :

ABDE , BCIJ et ACFG.

@ 1) On pose $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AG}$. Montrer qu'il existe une isométrie qui transforme ABC en GA′A. En déduire que les droites (AA′) et (BC) sont perpendiculaires.

2) Montrer que les droites (BF) et (A′C) sont perpendiculaires, ainsi que (CD) et (BA′). En déduire que (AA′), (BF) et (CD) sont concourantes.

XVIII

Point de Fermat

Tous les triangles considérés sont orientés dans le sens direct.

Etant donné un triangle ABC qui a ses trois angles aigus, on considère les points A′, B′ et C′, tels que les triangles BA′C, CB′A et AC′B soient équilatéraux.

1) Montrer que les cercles circonscrits aux triangles BA′C, CB′A et AC′B passent par un même point F.

@ 2) Montrer que $AA' = BB'$ et $(AA', BB') = -\frac{\pi}{3} \pmod{\pi}$.

3) En déduire que les droites (AA′), (BB′) et (CC′) sont concourantes.

On suppose désormais que le point F est situé à l'intérieur du triangle donné ce qui, on l'admettra, à lieu si les angles du triangle ABC sont inférieurs à 120°.

@ 4) Montrer que :

$$FA + FB + FC = AA' = BB' = CC'.$$

@ 5) Montrer que si M est un point intérieur au triangle, la fonction :

$$M \mapsto MA + MB + MC$$

atteint son minimum en F.

XIX

@ On considère n points du plan.

1) Montrer que si n est impair, il existe un unique polygone à n sommets dont les n points donnés sont les milieux des côtés.

2) A quelle condition existe-t-il un tel polygone dans le cas où n est pair ?

XX

Théorème Hjemslev

@ 1) Etant donnée une isométrie f, on considère une droite D. Soit M un point quelconque de celle-ci et M′ son image par f, déterminer le lieu des milieux de MM′.

2) Montrer que si A, B et C sont trois points alignés de même que A′, B′ et C′ et si :

$$AB = A'B' \ , \ BC = B'C' \text{ et } CA = C'A'.$$

alors les milieux de AA′, BB′ et CC′ sont alignés ([1]).

XXI

Déterminer toutes les isométries qui laissent invariant un triangle équilatéral. Etudier la composition de ces transformations.

XXII

Etant donnés deux triangles équilatéraux ABC et MNP, orientés dans le sens direct, on désigne par f_1, f_2 et f_3 les déplacements qui transforment respectivement ABC en MNP, NPM et PMN.

1) Montrer que, si f_1, f_2 et f_3 sont des rotations, leurs centres sont alignés.

2) Que peut-on dire de f_2 et f_3 quand f_1 est une translation ?

1 ou confondus.

Aides

V En appliquant par deux fois la méthode exposée dans le cours, on est sûr d'arriver au résultat. On peut être plus astucieux.

VIII 1) On sait que l'axe d'une symétrie-translation est le lieu des milieux des couples point-image. On utilise deux points qui sont invariants par deux des réflexions, on n'a guère le choix.

2) Renvoie à l'exercice 1.

3) On considère les images successives d'une droite qui coupe (BC) ... Qui dit axe de symétrie de deux droites sécantes, dit – sauf exception – bissectrice.

4) Il s'agit d'un simple changement d'habillage.

IX On doit bien pouvoir exhiber une rotation qui transforme P en P′ et Q en Q′.

X & XI Analyser ce qui se passe concrètement. Toute indication ôterait tout intérêt à ces exercices.

XIII 1) On abandonne provisoirement la contrainte : "passant par un point donné". On sait construire de tels cercles. Les solutions – s'il en existe – s'en déduisent par rotation.

2) Ici, la situation est différente car il est évident que s'il existe une solution, il y en a une infinité. On distingue les trois sommets ABC, on passe de B à C par une ou des rotations de centre A bien déterminées. Le point C est donc commun à la droite qui lui est assigné et à l'image de celle, assignée à B, par la (ou les) rotation(s) en question.

3) Le principe reste le même, mais une discussion s'impose.

XIV Idem

XV 1) Les rotations conservant les distances, on n'a guère le choix. Il convient néanmoins d'être vigilant car il n'est pas dit que D et D′ sont sécantes.

2) Le cas général coule de source mais, ici encore, une discussion s'impose.

3) Le quadrilatère $A\omega A'\omega'$ est inscriptible et il admet un axe de symétrie.

XVI 1) Examiner les cas où, parmis les déplacements considérés, on compte zéro, une ou deux translations.

2) Préciser ce qu'on entend par "figures directement égales".

XVII 1) Utiliser la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$, autour du centre du caré ACFG.

XVIII 2) On peut utiliser, entre autres, la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

4) Considérer le chemin AFF′A′, où F′ désigne le transformé de F par la rotation suggérée ci-dessus.

5) Raisonner comme précédemment, en remplaçant F par M.

XIX On généralise ce qu'on connait pour les triangles et les quadrilatères. La composition de n demi-tours donne ... .

XX Si f est un antidéplacement, c'est immédiat. On peut toujours composer f avec la réfexion d'axe D ou D′ sans modifier l'effet sur D.

VII. Similitudes planes

Les similitudes indirectes étant d'un usage peu courant, il est en général sans inconvénient de dire similitude pour similitude directe. Cette omission est tout à fait justifiée lorsqu'il est question de la similitude de centre O, d'angle α et de rapport k.

Dans cette série, les indications sont réduites au strict minimum car beaucoup des arguments essentiels ont été développés antérieurement.

I

Etant donné un triangle ABC, soit M un point quelconque, on note P, Q et R ses symétriques par rapport aux milieux des côtés. Montrer que les segments AP, AQ et AR ont même milieu et préciser la position de ce point par rapport à M et au centre de gravité du triangle.

II

@ 1) Soit h_1 et h_2 homothéties de centres O_1 et O_2, de rapports k_1 et k_2. On note :

$$f = h_1 \circ h_2.$$

a) A quelle condition f est-elle une translation ?

b) A quelle condition f est-elle une homothétie ?

@ 2) Proposer une construction du centre de f dans le cas b, ci-dessus.

III

Un triangle ABC a ses deux sommets A et B fixes, le troisième parcourt un cercle de centre A. Déterminer le lieu des pieds des bissectrices de l'angle en A.

IV

Etant donnés deux points B et C, on considère les triangles ABC, tels que les médianes issues de B et C soient perpendiculaires.

1) Quel est le lieu de A ?

2) Montrer que $AB^2 + AC^2 = 5\ BC^2$.

3) Construire A connaissant la valeur de l'angle $\hat{A}$.

V

Etant donnés deux point distincts A et O, et un nombre α, $\alpha \neq 0 \pmod{\pi}$, on considère les triangles ABC dont O est le centre du cercle circonscrit et tels que :

$$(AB, AC) = \alpha \pmod{\pi}.$$

1) Déterminer les lieux de son centre de gravité G et de son orthocentre H.

2) Déterminer les lieux du point D tel que :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

et de l'orthocentre H_1 du triangle BCD.

3) Déterminer les lieux du centre de gravité G_1 et du centre O_1 du cercle circonscrit au triangle BCD.

VI

Inscrire dans un cercle donné un triangle directement semblable à un triangle donné, dans les cas suivants.

1) On ne pose aucune condition.

2) On donne un sommet sur le cercle,

3) On impose la direction d'un côté.

VII

@ On considère trois segments AA′, BB′ et CC′ de longueurs différentes et portés par des droites parallèles distinctes. On note :

- α le point d'intersection des droites (BC) et (B′C′),
- β le point d'intersection des droites (CA) et (C′A′),
- γ le point d'intersection des droites (AB) et (A′B′),
- α' le point d'intersection des droites (BC′) et (B′C),
- β' le point d'intersection des droites (CA′) et (C′A),
- γ' le point d'intersection des droites (AB′) et (A′B).

Démontrer que les points suivants sont respectivement alignés [1] :

• α, β, γ • α, β', γ' • α', β, γ' • α', β', γ.

Que devient cette propriété quand on supprime la condition sur les longueurs des segments donnés ?

VIII

On considère un rectangle ABA′B′, une droite D et un point O non situé sur D.

1) Déterminer le lieu des points Q, P′ et Q′ tels que PQP′Q′ soit un rectangle de centre O, directement semblable à ABA′B′ et dont le sommet P décrive D.

@ 2) En déduire qu'il est, en général, impossible d'inscrire dans un rectangle donné un rectangle qui lui soit semblable. Préciser les exceptions.

IX

Etant donnés deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, déterminer le lieux des centres des similitudes directes (respectivement indirectes) qui transforment $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$.

Construire le centre d'une telle similitude dont l'angle est donné.

X

@ Etant donnés trois points A_0, A_1 et A_2, montrer qu'il existe une similitude directe f, et une seule, telle que :

$$A_1 = f(A_0) \text{ et } A_2 = f(A_1).$$

La caractériser et construire son centre, s'il existe.

XI

@ Etant donné un triangle ABC, rectangle en A, on désigne par H le pied de la hauteur issue de A.

1) On considère la similitude directe qui transforme les points A et B respectivement en C et A. Quel est son centre, son rapport et son angle ?

Construire les itérés du point A par f.

2) Soit B′ le symétrique de B par rapport à H. Etudier la similitude directe qui transforme C en B′ en B et A.

XII

@ Etant donnés deux points distincts A et B, deux droites Δ et Δ', on note respectivement A′ B′ et A″ B″ les symétriques du segment AB par rapport à Δ et Δ'.

Quel est le centre de la similitude qui transforme A′ en B′ et A″ en B″ ?

XIII

@ Construire un triangle semblable à un triangle donné et dont les sommets soient situés sur trois droites parallèles données.

1 Autrement dit, ces six points sont les sommets d'un quadrilaère complet.

XIV

@ Etant donnée une similitude de centre O, on désigne par M un point quelconque et par M′ son image, déterminer le lieu du point M quand on impose l'une des conditions suivantes :

a) (MM′) a une direction donnée,
b) MM′ a une longueur donnée,
c) le cercle (OMM′) a un rayon donné,
d) (MM′) passe par un point donné,
e) le cercle (OMM′) passe un point donné, autre que O.

XV

Soit s une similitude directe ou indirecte, caractériser la transformation :

$$s \circ f \circ s^{-1},$$

si f est successivement :

a) la translation de vecteur $\overline{AB}$,
b) la rotation $R(O,\alpha)$,
c) l'homothétie $H(O,k)$,
d) la similitude $S(O,k,\alpha)$,
e) une symétrie d'axe Δ,
f) une symétrie-translation d'axe Δ et vecteur $\overline{AB}$.

XVI

Soit r la rotation $R(O,\alpha)$, soit h l'homothétie $H(\omega,k)$, caractériser les transformations suivantes :

$$r \circ h \circ r^{-1} \circ h^{-1} \text{ et } h \circ r \circ h^{-1} \circ r^{-1}.$$

A quelle condition une rotation et une homothétie sont elles permutables ?

XVII

Etant données la rotation $r = R(o,\alpha)$ et l'homothétie $h = H(\omega,k)$, construire les centres des deux similitudes suivantes :

$$f = h \circ r \text{ et } g = r \circ h \text{ [1]}.$$

XVIII

La similitude $s = S(O,k,\alpha)$ étant donnée, telle que $k \neq 1$ et $\alpha \neq 0 \pmod{2\pi}$, montrer qu'on peut la décomposer, d'une infinité de façons, en un produit $s = r \circ h$ où $r = R(o,\alpha)$, $h = H(\omega,k)$, l'un des points o ou ω pouvant être arbitrairement choisi.

Montrer que les points o sont les transformés des points ω par une similitude de centre O. En déterminer le rapport et l'angle.

XIX

On considère deux droites D et D′ qui se coupent en un point I. Une similitude directe f transforme D en D′. On note M′ l'image par f du point courant M de D.

1) Montrer que les cercles (IMM′) se recoupent en un point indépendant de M.

@ 2) Déterminer le lieu des points M″, tels que le triangle MM′M″ reste semblable à un triangle donné.

– / –

1 On pourra chercher à construire une figure directement semblable à celle formée par les points Σ, O et Ω et suivant le cas le point $r(\Omega)$ ou $h(\Omega)$.

@ 3) Etant donnés deux réels a et b, tels $a + b \neq 0$, déterminer le lieu du point M″, tel que :

$$a\overrightarrow{M''M} + b\overrightarrow{M''M'} = \vec{0}.$$

Soit k le rapport de la similitude donnée, montrer que pour :

$$\frac{a}{b} = \pm k,$$

on obtient deux droites perpendiculaires.

XX

On considère un triangle ABC, on note A′, B′ et C′ les milieux de ses côtés. Soit θ un nombre donné, les trois droites obtenues par rotation de (BC), (CA) et (AC) d'un même angle θ, respectivement autour de A′, B′ et C′, déterminent un triangle PQR.

@ 1) Montrer que PQR est le transformé de ABC par une similitude directe dont on présisera le centre, le rapport et l'angle.

2) Déterminer le lieu des points P, Q et R.

XXI

@ Etant donné un trangle ABC et trois points I, J, K ; on considère les triangles P Q R directement semblables à A B C et tels que (QR), (RP) et (PQ) passent respectivement par les points I, J, et K.

1) Montrer que les lieux géométriques des points P, Q et R sont trois cercles ayant un point commun O qui est centre de similitude pour deux triangles de la famille.

2) Déterminer le plus grand des triangles PQR.

3) Examiner le cas particulier où, les points I, J, K n'étant pas alignés, le triangle ABC est : IJK, JKI ou KIJ. Construire le point O dans chacun des trois cas.

XXII

@ Etant donné un triangle abc et trois points A, B et C, on considère les triangles PQR directement semblables à abc et dont les sommets P, Q et R appartiennent respectivement aux droites (BC), (CA) et (AB).

1) Montrer qu'il existe toujours de tels triangles.

2) Démontrer que les cercles circonscrits aux triangles AQR , BRP et CPQ ont un point commun O qui est le centre de similitude de deux triangles de la famille.

3) Construire le point O dans les deux cas suivants :

- abc est le triangle ABC lui-même
- abc est un triangle équilatéral.

XXIII

@ Etant donnés deux segments AB et A′B′, de longueurs différentes, on considère les points C, C′, B et B′ tels que :

$$\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = -\frac{\overline{C'A'}}{\overline{C'A}} = \frac{A'B'}{AB} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{DB'}}{\overline{DB}} = -\frac{\overline{D'B'}}{\overline{D'B}} = \frac{A'B'}{AB}$$

Montrer que les droites (CD) et (C′D′) sont perpendiculaires – pourvu qu'elles soient définies.

Aides

II 1) C'est très facile en utililisant les nombres complexes. Il n'empêche qu'il convient de savoir résoudre cette question en calculant sur les vecteurs, ne serait-ce que pour avoir une démonstration qui vaut pour l'espace.

2) On donnera les deux homothéties par leurs centres et un couple de points homologues. Ne pas exclure le cas où tout ou partie de ces points seraient alignés.

VII Les points en question sont les centres des homothéties qui transforment mutuellement les trois segments donnés. Toutes les clefs sont données dans le cours.

VIII 2) Penser que, de façon générale, si deux parallélogrammes sont tels que l'un s'inscrive dans l'autre, leurs centres coïncident.

VII Le cours propose deux méthodes, les rapprocher.

X & XI Ceci relève du jeu, en dire plus gâterait le plaisir.

XII La réponse doit tenir en quelques mots, sinon relire le § 33 du cours.

XIII & XIV On a réglé ce type questions en étudiant les isométries. On dispose désormais d'un argument supplémentaire – qu'on retrouvera constamment dans la suite – si la similitude qui transforme M en M′ et N en N′ a pour centre O, la similitude de centre O qui transforme M en N transforme aussi M′ en N′.

XV Le seul point délicat est celui où f est directe et s indirecte. Quelle en est la raison ?

XVII Appliquer la construction du § 33, en choisissant judicieusement le couples points-images.

XVIII Il est relativement plus facile de régler cette question en recourant aux nombres complexes. Cependant, il n'y a pas de miracle ... ! Il convient d'être vigilant.

XIX 2) & 3) S'il existe une similitude directe de centre O qui transforme $M_0M_0'M_0''$ en MM′M″, son centre est celui de f. ... Pour la dernière demande, penser à composer f avec une réflexion bien choisie ([1]) – on ne peut ignorer complètement les similitudes indirectes.

XX 1) Le centre de la similitude est le centre du cercle circonscrit à ABC.

XXI La situation est analogue à celle de l'exercice précédent, mais on la traite dans un esprit différent revoir, au besoin la note qui suit la série V et les ressorts de l'exercice 19.

XXII L'habillage est tout autre, mais la situation est essentiellement la même que celle de l'exercice 19.

XXIII Il existe une similitude indirecte qui transforme A en A′ et B en B′.

---

1 Ce travail serait incomplet, si l'on y ignorait totalement l'existence des similitudes indirectes.

VIII. Coniques

I

Quel est le lieu des symétriques d'un foyer d'une conique par rapport à ses tangentes ?

Quel est le lieu des projections d'un foyer d'une conique sur ses tangentes ?

II

@ Déterminer la ou les coniques dont on connaît soit [1] :

1 les foyers et une tangente,

2 un foyer, une tangente et son point de contact,

3 un foyer et trois tangentes;

4 un cercle directeur et deux tangentes.

III

Etant donnés un point F et un cercle ou une droite $\mathscr{C}$, ne passant pas par F, on considère un angle droit dont le sommet est sur $\mathscr{C}$ et un côté passe par F. Déterminer l'enveloppe de son second côté.

IV

Etant donnés un cercle Φ et un point P intérieur à celui-ci, déterminer le lieu du second foyer d'une conique à centre qui admet Φ pour cercle directeur et passe par P.

V

@ Montrer qu'une ellipse et une hyperbole qui ont les mêmes foyers se coupent, en quatre points et qu'en chacun de ceux-ci leurs tangentes sont perpendiculaires.

VI

Lignes orthoptiques [2]

@ 1) Construire les tangentes issues d'un point donné à une conique à centre donnée. Formuler et justifier une condition nécessaire et suffisante pour que les droites obtenues soient perpendiculaires.

@ 2) Montrer que le lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes perpendiculaires à une ellipse est un cercle dont on précisera le rayon. Cette propriété est aussi vraie pour une hyperbole, sous certaine condition, la préciser.

3) Adapter ce qui précède à la parabole.

---

1 Il peut s'agir de coniques à centre ou de paraboles. On admet qu'une conique est bien déterminée quand on dispose des éléments caractéristiques intervenant dans l'une des diverses définitions. Par exemple :

- pour une conique à centre, on connaît :
  - deux foyers et le cercle directeur associé à l'un d'eux ou un point de la courbe,
  - le centre les axes et les les nombres classiquement notés a et b,
  - …
- pour une parabole :
  - le foyer et la directrice ou la tangente au sommet,
  - l'axe le foyer et le paramètre,
  - …
- pour une conique anonyme :
  - un foyer, la directrice associée et l'excentricité ou un point ;

2 Lieu des points d'où l'on "voit" la courbe sous un angle droit.

VII

Théorèmes de Poncelet.

@ On considère une conique de foyers F et F′, deux tangentes issues d'un même point P, on note M et M′ les points de contact. Justifier les deux énoncés qui suivent.

Premier théorème de Poncelet : (FP) est une bissectrice des droites (FM) et (FM′).

Deuxième théorème de Poncelet : les deux tangentes ont les mêmes bissectrices que les droites (PF) et (PF′).

Les adapter à la parabole.

VIII

1) Etant donnée une ellipse $\mathscr{E}$ de foyers F et F′, de grand axe $2a$, on considère une droite D qui passe par F′ et coupe $\mathscr{E}$ aux points M et M′, soit P le point d'intersection, s'il existe, des tangentes en M et M′.

@ a) Montrer que :

$$PF^2 - PF'^2 = 4a^2.$$

b) En déduire le lieu de P quand D varie.

2) Adapter ce qui précède à l'hyperbole, puis à la parabole.

Ellipse

IX

Etant donnés deux droites perpendiculaires D, D′ et deux nombres positifs a et b, on considère les points A, B et M tels que :

- A soit sur D et B sur D′,
- $MA = a$, $MB = b$ et $AB = a + b$.

Déterminer le lieu du point M.

X

@ 1) Montrer que le lieu des milieux des cordes d'une ellipse ayant une direction donnée est un diamètre. Montrer que la direction donnée est aussi celle des tangentes à l'ellipse aux extrémités de ce diamètre.

@ 2) Montrer que si quatre tangentes à une même ellipse sont les côtés d'un parallélogramme, leurs points de contact sont les sommets d'un parallélogramme dont les côtés sont parallèles aux diagonales du premier.

@ 3) Montrer que si, de plus, le premier paralèllogramme est un rectangle, le périmètre du second est constant.

XI

Etant donné un parallélogramme, montrer qu'il existe une ellipse tangente à ses quatre côtés en leurs milieux. Donner la construction de son point courant et de sa tangente. En construire les axes.

Hyperbole

XII

@ Etant donnée une hyperbole, montrer que toute tangente détermine avec les asymptotes un triangle dont l'aire est constante.

XIII

@ Le plan étant rapporté à un repère orthonormé, on considère trois points A, B, C situés sur l'hyperbole équilatère d'équation $xy = k^2$.

1) Déterminer les coordonnées de l'orthocentre du triangle ABC et vérifier qu'il se trouve sur l'hyperbole considérée.

2) Montrer que les perpendiculaires aux côtés du triangle en leurs points d'intersection avec (Ox) (respectivement avec (Oy) sont concourantes.

XIV

@ On considère une hyperbole équilatère $\mathscr{H}$, soit A l'un des ses points et A' son symétrique par rapport au centre de $\mathscr{H}$. Montrer que le cercle de centre A qui passe par A' recoupe $\mathscr{H}$ en trois points qui sont les sommets d'un triangle équilatéral.

Parabole

XV

@ Construire les points communs à deux paraboles ayant pour foyer un même point donné et dont les directrices sont données.

XVI

@ Montrer que deux paraboles qui ont des axes parallèles et dont les paramètres sont différents sont homothétiques.

Construire leur centre d'homothétie et leurs tangentes communes.

XVII

@ Le plan étant rapporté à un repère orthonormé, soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$ et A un point donné de $\mathscr{P}$, on considère deux points M et N de $\mathscr{P}$ qui varient de façon telle que les droites (AM) et (AN) restent perpendiculaires.

1) Montrer que la droite (MN) passe par un point fixe I.

2) Déterminer le lieu de I quand A décrit $\mathscr{P}$.

XVIII

@ Etant données deux droites D et D', sécantes en I, on considère une similitude directe s qui transforme D en D' et dont le centre, noté F, est autre que I. On note M le point courant de D, M' son image par s et H la projection orthogonale de F sur (MM'). Montrer que que le lieu de H est la droite passant par les projections orthogonales A et A' de F sur D et D'. En déduire que (MM') enveloppe une parabole dont on précisera le foyer et la tangente au sommet.

XIX

Etant donné un triangle ABC et un point quelconque P, du plan, on note A', B' et C' ses projections sur les droites (BC), (CA) et (AB).

@ 1) Montrer, en utilisant les acquis de l'exercice précédent, que A', B' et C' sont alignés si, et seulement si, P appartient au cercle circonscrit à ABC.

@ 2) Déterminer l'ensemble des paraboles tangentes aux trois côtés de ABC. Montrer que leurs directrices passent par l'orthocentre.

On revient sur la définition par foyer et directrices.

XX

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé, on considère la conique d'excentricité e qui admet

• pour foyer l'origine,

• pour directrice la droite d'équation $x = \frac{p}{e} = d$.

@ 1) Déterminer au moyen de l'équation polaire de la conique, les coordonnées du point, s'il existe, où la tangente coupe la perpendiculaire en O au rayon vecteur.

3) En déduire une propriété remarquable des sécantes focales des coniques.

XXI

Problème de Halley

@ 1) Etant donnés trois points A, B et F, déterminer l'ensemble des directrices des coniques de foyer F, passant par A et B.

@ 2) Déterminer une conique donnée par un foyer et trois de ses points.

Aides

II - IV Une conique à centre est le lieu des centres des cercles passant par un foyer et tangent au cercle directeur centré à l'autre foyer. La construction géométrique associée à ce mode de génération donne la tangente.

Une parabole est le lieu des centres des cercles passant par le foyer et tangents à la directrice. Ici encore la tangente au point courant est obtenue en prime.

V C'est une relecture d'un exercice classique (cf. V-13-1).

VI 1) L'analyse repose toujours sur le même schéma, le problème se ramène à l'étude de l'intersection de deux cercles l'un donné, l'autre centré en un point donné et passant par un point donné.

A priori, la discussion fait intervenir deux conditions mais dans chacun des cas – ellipse ou hyperbole – l'une d'elles est toujours remplie.

2) Si P est le point commun à deux tangentes perpendiculaires, tenant compte des symétries, on aboutit à la conclusion que le triangle $FP\varphi$ est rectangle en P, où F ainsi que φ ont leur signification usuelle. On applique le théorème de Pythagore ...

VII On reprend les arguments de symétrie intervenant dans l'exercice précédent.

VIII 1) a) Dans ce cas, les cercles passant par F, centrés en M et M' sont tangents en F', le premier théorème de Poncelet montre que leur tangente commune passe par P, on applique le théorème de Pythagore à un triangle bien choisi ...

IX On introduit le point tel que $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{AM}$, on est alors en présence de plusieurs triangles homothétiques.

X 1) Le lieu des milieux des cordes d'un cercle qui ont une direction donnée admet une définition typiquement affine. Pour un cercle on obtient ...

2) Un cercle ne s'incrit pas dans n'importe quel parallélogramme !

3) Découle de ce qui a été établi à la question précédente.

XI Une affinité bien choisie transforme le parallélogramme en un carré ...

XII Utiliser l'équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes.

XIII Il faut parfois s'astreindre à calculer.

XIV On se place dans les conditions de l'exercice précédent, on forme l'équation du quatrième degré admettant pour racines les abscisses des quatre points communs aux deux courbes, l'une d'elle est connue. On calcule les coordonnées du centre de gravité des trois points communs, autres que A, au moyen des relations entre coefficients et racines de l'équation obtenue.

Il est possible de faire mieux en recourant aux nombres complexes.

XV Reformuler le problème, on aboutit à une application classique de l'homothétie.

XVI Commencer par montrer que de telles paraboles sont homothétiques. Les tangentes communes passent par le centre d'homothétie.

XVII Calculer !

XVIII Les ressorts sont ceux utilisés l'exercice VII-19. Le lieu cherché est l'image de D par une similitude de centre F.

XIX 1) Il s'agit d'une suite de l'exercice précédent. Si F est sur le cercle circonscrit, la similitude de centre F qui ransforme B en C transforme aussi ... Le point F est alors le foyer d'une parabole ... ses projections sur les côtés du triangle ...

Réciproquement, si les projections de F sur les côtés sont alignées, une certaine parabole de foyer F est tangente aux trois côtés. Ce point est alors le centre d'une certaine similitude. Il est alors classique de montrer que ce point se trouve bien sur le cercle en question.

2) Pour la première demande, on se contente de "tirer les marrons du feu". La seconde renvoie à un classique, la droite de Steiner. On montre, que la droite symétrique par rapport à l'un des côtés passe par le symétrique de l'orthocentre qui, on le sait, est sur le cercle circonscrit. Cette position est favorable à la mise en œuvre de considérations sur les angles.

XX Le rayon vecteur s'exprime $\overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}$. Il est classique que $(\vec{u})'$ est unitaire et orthogonal à $\vec{u}$. On exprime l'équation de la tagente relativement au le "repère mobile" $(O, \vec{u}, \vec{u}_1)$.

XXI 1) Faire intervenir les cercles de centre A et B qui passent par F. Le point de rencontre avec la directrice est le centre de l'une des homothéties qui tranforme l'un en l'autre. Penser au cas particulier où l'un de ces points n'existe pas.

2) Cette situation renvoie à l'exercice VII-7.

IX. L'espace

Incidence

I

@ 1) Montrer que par un point donné il passe une infinité de plans qui coupent deux plans donnés suivant deux droites parallèles.

2) Montrer que s'il existe un plan passant par un point donné coupant deux plans donnés suivant des droites parallèles, il en existe une infinité.

II

@ Montrer qu'il existe en général une droite unique qui passe par un point donné et s'appuie sur deux droites données. Dans quels cas il y a-t-il exception ?

III

@ Justifier les deux assertions qui suivent.

(b) Si trois plans son deux à deux sécants, ils ont un point commun unique ou ils sont parallèles à une même droite.

(a) Si trois droites **non coplanaires** sont deux à deux sécantes, elles sont concourantes.

IV

Combien peut-on définir de droites et de plans par la donnée de n points tels que quatre quelconques d'entre eux ne soient pas coplanaires ?

V

Etant donnés deux points A et B et une droite D, soit M un point quelconque de D, on note I et J les milieux de AM et de BM.

1) Déterminer les lieux des points I et J.

2) Déterminer le lieu du centre de gravité du triangle ABM.

3) Montrer que les médianes du triangle ABM restent dans des plans fixes.

VI

On considère deux droites D et D', sécantes en un point A, on note P leur plan, M et M' leurs points courants respectifs. Etant donné un point B, n'appartenant pas à P, soit N et N' les milieux de BM et BM', déterminer l'ensemble des droites (NN').

VII

On considère quatre droites concourantes et telles que trois quelconques d'entre elles ne soient pas coplanaires.

@ 1) Déterminer des plans qui les coupent suivant les sommets d'un parallélogramme.

@ 2) Déterminer **les** plans qui remplissent cette condition.

VIII

Théorème de Desargues

@ Deux triangles ABC et A'B'C' sont tels que (BC) et (B'C') se coupent en A'', (CA) et (C'A') se coupent en B'', (AB) et (A'B') se coupent en C''.

Montrer que si (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes A'' , B'' et C'' sont alignés.

On commencera par traiter le cas où les plans (ABC) et (A'B'C') sont distincts.

Propriétés métriques

IX

1) Déterminer l'ensemble des points de l'espace équidistants de trois points donnés.

2) Etant donné un tétraèdre, montrer qu'il existe une sphère, et une seule, qui passe par ses quatre sommets

X

Etant donné un cube, déterminer l'angle de deux diagonales, issues d'un même sommet, de deux faces adjacentes.

XI

@ Est-il possible de faire entrer un règle plate longue de 31 cm et large de 4 cm dans un boîte cubique ayant 20 cm d'arête ?

XII

On considère un carré ABCD et son image A'B'C'D' par projection orthogonale sur un plan donné.

1) Montrer que A'B'C'D' est un parallélogramme.

@ 2) Comment doit être placé le carré pour que A'B'C'D' soit respectivement :

- un rectangle ?
- un losange ?
- un carré ?

XIII

@ Construire la projection d'un cube sur un plan perpendiculaire à l'une de ses diagonales

XIV

@ Décrire la section d'un cube par un plan passant par son centre et perpendiculaire à l'une de ses diagonales.

XV

@ Etant donnés deux cercles de l'espace situés dans des plans distincts, montrer que s'ils ont deux points communs, il existe une sphère qui les contient tous les deux.

XVI

Montrer que deux sphères ayant un point en commun se coupent suivant un cercle ou sont tangentes.

XVII

Perpendiculaire commune à deux droites

@ 1) Montrer que si deux droites ne sont pas parallèles, il existe une droite, et une seule, qui les coupe à angle droit.

2) Soit D et D' deux droites non coplamanaires, on note A et B les pieds de leur perpendiculaire commune. Montrer que AB est la plus courte distance d'un point de D à un point de D'.

XVIII

@ Déterminer le rayon de la sphère circonscrit d'un d'un tétraèdre régulier – d'un cube – d'un octaèdre régulier, d'arête a.

Isométries

XIX

@ Etant donnés deux points distincts A et B :

1) Quelles sont les isométries involutives qui échangent A et B ?

2) Quelles sont les isométries qui échangent A et B ?

XX

@ A quelles conditions le produit de trois demi-tours est-il :

• l'application identique ? • un demi-tour ?

XXI

@ Quel peut être le produit de deux rotations dont les axes ne sont pas coplanaires ?

XXII

@ On considère quatre points A, B, A′ et B′, tels que :

$$AB = A'B' \text{ et } \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}.$$

1) Montrer que s'il existe une réflexion qui transforme A en A′ et B en B′, il existe une infinité de rotations qui transforment A en A′ et B en B′.

Que sait-on de leurs axes ?

2) Montrer que, dans le cas contraire, une telle rotation est unique.

XXIII

@ Etant donné un déplacement f et une translation t, de vecteur $\vec{u}$, non nul, montrer que :

$$f = t \circ f \circ t$$

si, et seulement si, f est un vissage d'angle π dont l'axe est orthogonal à $\vec{u}$.

XXIV

@ Etant donnés deux triangles ABC et A′B′C′, tels que :

$$AB = A'B' \ , BC = B'C' \text{ et } CA = C'A',$$

combien existe-t-il d'isométries qui transforment A en A′, B en B′ et C en C′ ?

XXV

Etant donné un tétraèdre régulier OABC, on note P, Q, R les milieux de AB, BC, CA et d_{OA}, etc. le demi-tour d'axe (OA) etc. . Etudier les transformations suivantes :

@ 1) $d_{OC} \circ d_{OB} \circ d_{OA}$,

@ 2) $d_{OC'} \circ d_{OB'} \circ d_{OA'}$.

Invariance sous l'action d'isométries

XXVI

@ Déterminer l'ensemble des déplacements, puis des isométries, laissant invariante la réunion de deux droites non coplanaires.

XXVII

@ Décrire l'ensemble des isométries laissant invariant un tétraèdre régulier.

XXVIII

1) On considère un cylindre oblique à directrice circulaire ([1]) noté Γ.

@ a) Montrer que par tout point de Γ, il passe deux cercles tracés sur cette surface et deux seulement.

@ b) Etudier les isométries laissant Γ invariant.

2) Adapter ce qui précède à un cône.

---

1 i.e. cette surface est la réunion des droites – les *génératrices* –, de direction donnée, qui s'appuient sur un cercle donné – la *directrice* – ces droites n'étant pas perpendiculaires au plan du cercle.

Aides

I 1) Les deux plans donnés peuvent être parallèles, auquel cas la propriété n'a rien d'exceptionnel. S'il sont sécants que sait-on de leur intersection ?

II Un point et deux droites définissent deux plans ayant un point commun ...

III Si ce sont des évidences, on doit pouvoir les expliciter – ce n'est pas aussi facile qu'il semble au premier abord.

VII Une droite coupe deux plans sécants selon des droites parallèles si, et seulement si, ...

1) Est alors presque immédiat.

2) ([1]) Penser aux diagonales d'un quadrilatère complet ou aux points diagonaux d'un quadrangle.

VIII Paradoxalement, c'est la figure à trois dimensions qui est la plus facile à traiter. Moyennant une adaptation mineure, on peut justifier en quelques mots une condition nécessaire et suffisante. Pour une figure plane, on compose deux perspectives entre son plan et un autre – judicieusement choisi.

XI Comme on voit mal comment prouvrer que c'est impossible, on n'a guère le choix. On présume que c'est possible d'une certaine façon – on le prouve.

XII Ce sont bien des conditions nécessaires et suffisantes qui sont demandées.

XIII Penser aux triangles de l'exercice 10, deux sont dans des plans parallèles au plan de projection. De plus, un centre de symétrie se conserve par projection.

XIV Rien n'interdit de s'appuyer sur l'exercice précédent.

XV Leurs axes se coupent – pourquoi ?

XVII On pourra procéder comme suit. On note D et D' les droites données, on considère le plan P, parallèle à D', qui contient D, soit Δ la projection orthogonale de D' sur P .

Analyse : Si A et B sont deux points respectivement situés sur D et D' et tels que (AB) soit perpendiculaire à D et D' alors ...

Synthèse : si B est le point d'intersection de D' et de Δ alors ...

XVIII Pour le cube la question se règle facilement. Pour les autres, si l'on si prend mal, ce travail peu devenir un vrai pensum. En inscrivant le tétraèdre ou l'octaèdre dans un cube, le résultat tombe immédiatement.

XIX On connait les formes réduites des isométries, il n'est donc pas très difficile de faire le tri. Cependant, la rédaction doit être soignée – attention aux fautes de logique !

XX La composition des demi-tours est traitée dans le cours.

XXI Décomposer les rotations en deux produits de demi–tours dont deux se simplifient lors de la composition globale – c'est possible.

---

1 Ici, le changement d'une lettre n'a rien d'anodin.

XXII Ici, c'est la décomposition des rotations en produit de deux réflexions qui permet de régler la question.

XXIII La condition imposée est équivalente à $t \circ f \circ t^{-1} = t^{-1}$.

XXIV Une isométrie qui laisse invariants trois points non alignés ...

XXV 1) Ce qui vaut pour l'exercice 18 est encore d'actualité.

2) L'axe de la rotation obtenue est évident, le reste l'est moins. Commencer par analyser l'effet de ces demi-tours sur les sommets du tétraèdre. Le choix d'un point particulier s'imposera de lui même – ou presque.

XXVI Il est commode de faire intervenir les parallèles, aux droites données, qui passent par le milieu des pieds de la perpendiculaire commune.

A un moment ou à un autre il conviendra de distinguer le cas où les droites données sont orthogonales.

XXVII L'analyse se réduit à compter les permutations des sommets.

Un tétraèdre admet-il des plans de symétrie ? Si oui, cela divise par deux le nombre des déplacements possibles. Pour le reste revoir éventuellement l'exercice 9.

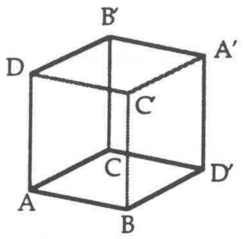
XXVIII 1) a) Une première famille de cercles est livrée par les données. Le cylindre admet au moins deux plans de symétrie évidents, l'un d'eux livre la seconde famille. Pour justifier qu'il n'existe pas d'autre cercle sur le cylindre, l'exercice 15 donne une idée.

b) Commencer par décrire celles qui laissent un point invariant.

Ebauches de solutions

I. Calcul vectoriel

I



Les sommets étant notés suivant le schéma ci-contre, on vérifie que ABA'B', ACA'C' et ADA'D' sont des parallélogrammes. On en déduit que :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{AA'}\ ,\ \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AA'}\ \text{et}\ \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD'}=\overrightarrow{AA'},$$

puis :

$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD'}=4\overrightarrow{AA'}.$$

II

1) Soit D le point tel que :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}.$$

On applique la relation de Chasles, il vient :

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}.$$

et comme :

$$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AI},$$

on a bien :

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{AI}.$$

2) Si le point G existe, la relation précédente devient :

$$\vec{0}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{AI}.$$

Ce qui montre que :

$$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}.$$

Réciproquement, le point ainsi défini est tel que :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AG}=-3\,.\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}.$$

et comme on a :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AI}$$

on en déduit que :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$$

Ce point est évidemment le centre de gravité du triangle ABC.

III

L'exercice précédent à montré que :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GF}&=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CF}\\&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})\\&=\vec{0}.\end{aligned}$$

IV

1) On a toujours :

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JB}\quad\text{et}\quad\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{A'I}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JB'}.$$

Les données se traduisant :

$$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IA'}=\vec{0}=\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JB'},$$

on a bien :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'B'}=2\overrightarrow{IJ}.$$

2) On note I, J, K et L les milieux de AA', BB', CC' et DD'. La relation ci-dessus s'applique aussi à CC' et DD', a donc :

$$2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'B'}\quad\text{et}\quad2\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{C'D'}$$

et comme :

$$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}\quad\text{et}\quad\overrightarrow{A'B'}=-\overrightarrow{C'D'},$$

on obtient :

$$\overrightarrow{IJ}=-\overrightarrow{KL}.$$

3) Si l'on a :

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{IA'}}=k=\frac{\overline{JB}}{\overline{JB'}},$$

alors :

$$\overrightarrow{IA}-k\overrightarrow{IA'}=\vec{0}\text{ et }\overrightarrow{JB}-k\overrightarrow{JB}=\vec{0}.$$

Il s'ensuit, comme au point 1, que :

$$\overrightarrow{AB}-k\overrightarrow{A'B'}=(1-k)\overrightarrow{IJ}.$$

Ensuite, on procède comme au point 2.

V

1) Comme au point 1) de l'exercice précédent, on obtient :

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{IJ}\quad\text{et}\quad\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}=2\overrightarrow{IO},$$

puis :

$$\overrightarrow{IO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN})=\frac{1}{2}(k\overrightarrow{AC}+k\overrightarrow{BD})=k\overrightarrow{IJ}.$$

On en déduit que le lieu de O est la droite (IJ).

2) Soit O' le milieu de PQ. Le résultat précédent s'applique en échageant les rôles de C et D. Il vient :

$$2\overrightarrow{IO'}=k\overrightarrow{IJ}.$$

On en déduit que $\overrightarrow{IO}=\overrightarrow{IO'}$, c'est-à-dire que O et O' coïncident.

VI

La translation parallèlement à D, qui transforme Δ en Δ', transforme la droite (OM) en la droite (O'M'). Si ω est l'image de O par cette translation, la droite (ωO') coupe Δ' en M'. La construction s'en déduit immédiatement.

La solution est uniquei O' n'appartient pas à la parallèle à Δ qui passe par ω. Si O' appartient à cette droite et si ω est distinct de O', il n'y a pas de solution. Si ω coïncide avec O', il y en a une infinité – préciser ...

VII

La translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ transforme $\mathscr{C}$ en le cercle $\mathscr{C}_1$, de même rayon, qui passe par A' et B'. Le centre O_1 de $\mathscr{C}_1$ est la projection orthogonale de O sur le diamètre de $\mathscr{C}_1$ perpendiculaire à Δ. Ce point est donc bien déterminé par les données de l'énoncé et le cercle $\mathscr{C}_1$ est l'image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{OO_1}$.

La solution est unique si les cercles $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}_1$ sont sécants ou tangents et, dans le cas contraire, il n'y a pas de solution.

VIII

1) On a :

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PD}}=\frac{\overline{NA}}{\overline{ND}}=\frac{\overline{MA}}{\overline{MD}}=\frac{\overline{QC}}{\overline{QB}}.$$

La droite (PQ) est donc parallèle à (BD).

2) Ainsi MN est l'image de BD par une homothétie de centre A. Le milieu R de MN décrit donc le segment qui joint A au milieu I de BD. De façon analogue, le milieu S de PQ décrit le segment CI.

3) La droite (RS) est parallèle à (AC) et le triangle IRS est l'image de IAC par une homothétie de centre I. Le milieu O, de RS, est l'image du milieu J de AC par cette homothétie et le lieu de O est le segment IJ.

IX

Soit O le point d'intersection des diagonales (AC) et (BD) (1). On a :

$$\frac{\overline{OI}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} \text{ et } \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}}=\frac{\overline{OJ}}{\overline{OA}}$$

On en déduit que :

$$\frac{\overline{OI}}{\overline{OD}}=\frac{\overline{OJ}}{\overline{OC}}.$$

La réciproque du théorème de thalès justifie la conclusion.

On peut également considérer les deux homothéties de centre O :

- h de rapport $\frac{\overline{OB}}{\overline{OD}}$,
- h' de rapport $\frac{\overline{OI}}{\overline{OB}}$,

On a :

$$h(D)=B \ , \ h'(B)=I \ , \ h'\circ h(D)=I,$$
$$h'(C)=A \ , \ h(A)=J \ , \ h\circ h'(C)=J.$$

Comme h et h' ont le même centre, elles commutent. Ainsi, la droite (IJ) apparaît comme l'image de (CD) par l'homothétie $h'\circ h=h\circ h'$.

1 On pourra envisager le cas où les diagonales sont parallèles.

X

Soit M un point quelconque, M′ son image par h et M″ l'image de M′ par h', Le point M′ étant le milieu commun de OM et de O′M″. Le quadrilatère OO′MM″ est donc un parallélogramme. On en déduit que :

$$h' \circ h = t_{-\overrightarrow{OO'}}.$$

On montre aussi facilement, que :

$$h \circ h' = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{OO'}}.$$

XI

Soit M un point quelconque, on note M′ son image de par h , M″ l'image de M′ par h' et O″ l'image de O par h' :

$$\overrightarrow{OM''} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M''} = \overrightarrow{OO'} + 2\overrightarrow{O'M'} = \overrightarrow{OO'} - 2\overrightarrow{OO'} + 2\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OO'} + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{OM}.$$

On en déduit, immédiatement que le point ω, tel que :

$$\overrightarrow{O\omega} = -3\overrightarrow{OO'}.$$

est le seul point invariant par $h' \circ h$, puis :

$$\overrightarrow{\omega M''} = \overrightarrow{OM''} - \overrightarrow{O\omega} = \tfrac{2}{3}\overrightarrow{\omega M}.$$

On a donc :

$$H(O',\tfrac{1}{3}) \circ H(O,2) = H(\omega,\tfrac{2}{3}) \text{ où } \overrightarrow{O\omega} = 2\overrightarrow{OO'}.$$

On montre de la même façon que :

$$H(O,2) \circ H(O',\tfrac{1}{3}) = H(\omega',\tfrac{2}{3}) \text{ où } \overrightarrow{O\omega'} = -\overrightarrow{OO'}.$$

XII

Soit O le milieu de AB, pour le (a) on écrit :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{MO}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})(\overrightarrow{MO}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})$$

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=OM^2-\frac{1}{4}AB^2.$$

La conclusion est alors immédiate. Pour le (b) on note H la projection de M sur la droite (AB), il vient :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{AB}.$$

Le reste coule de source.

XIII

a) Soit I le milieu de AB et J le milieu de CD. Comme ci-dessus, on a :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=IM^2-JM^2+\frac{1}{4}(AB^2-CD^2).$$

Soit H la projection orthogonale de M sur (IJ) et O le milieu de IJ, une relation classique donne

$$IM^2-JM^2=2\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{OH}.$$

On a donc :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{OH}+\frac{1}{4}(AB^2-CD^2)$$

On trouve ainsi une droite perpendiculaire à (IJ) – à moins que I et J ne coïncident,, auquel cas la condition est toujours vraie si $AB=CD$ et sinon toujours fausse.

b) On procède comme au a).

XIV

1) On a toujours :

$$AB^2-BC^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})$$

$$CD^2-DA^2=(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA})=\overrightarrow{CA}(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA})$$

On en déduit que :

$$AB^2-BC^2+CD^2-DA^2=\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})=\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{BD})=2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}).$$

Les diagonales AC et BD sont orthogonales si, et seulement si :

$$AB^2+CD^2=BC^2+DA^2.$$

autrement dit, si les sommes des carrés des côtés opposées sont égales.

2) Si ABCD est un tétraèdre, la propriété devient :

Les arêtes opposées AC et BD sont orthogonales si, et seulement si :

$$AB^2+CD^2=BC^2+DA^2.$$

Or, si deux des trois égalités :

$$AB^2+CD^2=BC^2+AD^2 \ , \ BC^2+AD^2=AC^2+BD^2 \ , \ AC^2+BD^2=AB^2+BD^2$$

est vérifiée, la troisième l'est aussi. Ce qui justifie les assertions suivantes.

Proposition : pour qu'un tétraèdre ait ses trois paires arêtes opposées orthogonales, il suffit que cette propriété soit vérifiée pour deux d'entre elles.

Proposition : pour qu'un quadrangle du plan soit orthocentrique, il suffit que l'un des ses sommets soit l'orthcentre du triangle formé par les trois autres.

XV

1) Par hypothèse, on a :

$$\vec{v}\,(\vec{w}-\vec{u})=0 \text{ et } \vec{w}(\vec{u}-\vec{v})=0,$$

ce qui se traduit :

$$\vec{v}\,.\,\vec{w}=\vec{v}\,.\,\vec{u} \text{ et } \vec{w}\,.\,\vec{u}=\vec{w}\,.\,\vec{v}.$$

Il résulte de la commutativité du produit scalaire que :

$$\vec{u}(\vec{v}-\vec{w})=0.$$

2) a) Comme (CH) et (B'H') sont perpendiculaires à (AB), il vient :

$$\overrightarrow{BC'}\,.\,\overrightarrow{HH'}=\overrightarrow{BC'}(\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{CB'}+\overrightarrow{B'H'})=\overrightarrow{BC'}\,.\,\overrightarrow{CB'}.$$

On en déduit la relation suivante :

$$\overrightarrow{BC'}(\overrightarrow{HH'}-\overrightarrow{CB'})=0.$$

Les sommets B et C jouant des rôles symétriques, on a aussi :

$$\overrightarrow{CB'}(\overrightarrow{HH'}-\overrightarrow{BC'})=0.$$

Ce qui, compte-tenu de du point 1, entraîne que :

$$\overrightarrow{HH'}(\overrightarrow{BC'}-\overrightarrow{CB'})=0.$$

b) On a :

$$\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{JK}+\overrightarrow{KC'} \text{ et } \overrightarrow{CB'}=\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{JB'}$$

et comme J et K sont les milieux de AA' et CC', on en déduit que :

$$\overrightarrow{BC'}-\overrightarrow{CB'}=2\overrightarrow{JK}.$$

Il résulte alors du point 2 que (HH') et (JK) sont perpendiculaires.

c) On note I le milieu de AA', H" l'orthocentre de A'BC' et H''' celui de A'B'C. On applique ce qui précède, successivement aux couples :

ABC et AB'C'	on obtient :	(HH')	perpendiculaire à	(JK)
ABC et A'BC''	–	(HH")	–	(IK)
ABC et A'B'C	–	(HH''')	–	(IJ)
AB'C' et A'BC'	–	(H'H")	–	(IJ)
A'BC' et A'B'C	–	(H"H''')	–	(JK)
A'B'C et AB'C'	–	(H'H''')	–	(IK)

Il s'ensuit que le droites :

(HH') et (H'H''') , (HH") et (H'H''') , (HH") et (H'H")

sont respectivement parallèles. Le deux premières conditions entraînent que le quadrilatère HH'H'''H" est un parallélogramme, et la troisièmes que ses diagonales sont parallèles. En conséquence, ses sommets sont alignés. On en conclut que les quatre orthocentres sont sur une même droite, puis que I, J et K sont sur une même droite perpendiculaire à celle-ci.

II. Calcul barycentrique

I

Pour ce type de constructions on a le choix, essentiellement, entre deux méthodes.

• Construire des sommes vectorielles, ici :

$$\overrightarrow{AG_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \ (^1) \text{ et } 10\overrightarrow{AG_2} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{AD}.$$

• utiliser l'associativité du barycentre et procéder par divisions successives de segments dans des rapports judicieusement choisis. Ainsi, dans le second exercice, on pourra procéder comme suit. On construit :

- I le barycentre des points A et D affectés des coefficients 1 et 4,
- J le barycentre des points B et C affectés des coefficients 2 et 3.

On aura ainsi :

$$5\overrightarrow{AI} = 4\overrightarrow{AD} \ , \ \overrightarrow{AI} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AD},$$

$$5\overrightarrow{BJ} = 3\overrightarrow{BC} \ , \ \overrightarrow{BJ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}.$$

Le point à construire est le barycentre de I et J affectés des coefficients 5 et 5, c'est-à-dire le milieu de IJ.

II

Soit G et G′ les centres de gravité des deux triangles, en additionant membre à membre les trois égalités suivantes :

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'} \ , \ \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'} \ , \ \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'},$$

on obtient :

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'} + 3\overrightarrow{GG'} = 3\overrightarrow{GG'}.$$

La condition nécessaire et suffisante demandée en découle immédiatement.

III

Par hypothèse, il existe un nombre réel k, tel que $k \neq 1$ et les points A′, B′, C′ sont les barycentres respectifs des points B et C, C et A, A et B affectés des coefficients 1 et $-k$. Soit G et G′ les centres de gravité des triangles ABC et A′B′C′, on a donc :

$$(1-k)\overrightarrow{GA'} = \overrightarrow{GB} - k\overrightarrow{GC} \ , \ (1-k)\overrightarrow{GB'} = \overrightarrow{GC} - k\overrightarrow{GA} \ , \ (1-k)\overrightarrow{GC'} = \overrightarrow{GA} - k\overrightarrow{GB}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}(1-k)3\overrightarrow{GG'} &= (1-k)(\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'})\\ &= \overrightarrow{GB} - k\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} - k\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} - k\overrightarrow{GB}\\ &= (1-k)(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})\\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

Comme $(1-k) \neq 0$, la conclusion en découle.

---

1 On notera que ce point est le quatrième sommet du parallélogramme construit sur les points A, B, C.

IV

On note A', B' et C' les milieux de BC, CA et AB.

1) On a, par définition :

$$\begin{aligned}3\overrightarrow{MK} &= \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MR}\\ &= 2(\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'})\\ &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\\ &= 6\overrightarrow{MG}\end{aligned}$$

2) Soit L le milieu de AP. On a :

$$2\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$$

Cette relation s'appliquant aussi bien aux milieux de BQ et de CR, ces points coïncident.

Enfin MGKL sont alignés puisque :

$$\overrightarrow{MK} = 2\overrightarrow{MG} \text{ et } \overrightarrow{ML} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MG}.$$

V

1) D'après la réciproque du théorème de Thalès, (PS) et (PQ) sont parallèles à (BD), (PQ) et (RS) sont parallèles à (AC)

2) On a :

$$\overrightarrow{IP} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \text{ , } \overrightarrow{IQ} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) \text{ , } \overrightarrow{IR} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}) \text{ , } \overrightarrow{IS} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IA}).$$

On en déduit que :

$$4\overrightarrow{IO} = \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{IR} + \overrightarrow{IS} = \frac{4}{3}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}) = \frac{4}{3} . 4\overrightarrow{IG}.$$

On peut alors conclure :

$$\overrightarrow{IO} = \frac{4}{3}\overrightarrow{IG}.$$

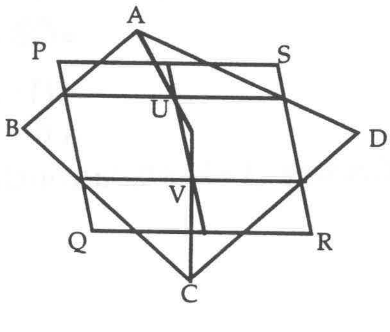
VI

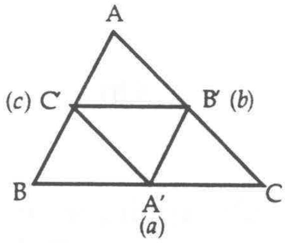
<u>Cas de quatre points</u> : ce qui est connu pour le tétraèdre vaut ici (cf. cours §9).

Si l'on note I, J, K, L les milieux de AB, BC, CD, DA, le point cherché est le milieu commun des droites (IK) et (JL). C'est aussi le milieu du segment qui joint les milieux des diagonales AD et BC.

<u>Cas d'une lame mince</u> : on commence par considérer un triangle. Chacune de ses médianes est un axe de symétrie oblique pour ce solide. Elle contient donc le centre des masses, ce qui montre que ce point est commun aux trois médianes.

Soit ABCD le quadrilatère donné, notons U et V les isobarycentres de A, B, D et de C, B, D. Le point cherché est barycentre de U et V, il se trouve donc sur la droite UV. Il est facile de vérifier que cette droite est un axe de symétrie oblique pour le parallélogramme de Wittenbauer PQRS. Elle passe donc par son centre. Tout ceci vaut aussi pour la droite qui joint les isobarycentres de A, B, C et de A, C, D. Ce qui montre que le centre des masses d'une lame quadrangulaire est situé au centre du parallélogramme de Wittenbauer de son pourtour.

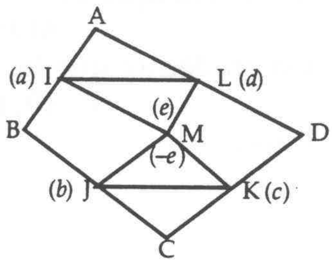




Remarque : on peut encore poser le problème pour le solide matérialisant le prérimètre du quadrilatère. Ici encore on commence par traiter le cas d'un triangle ABC, de côtés a, b et c.. Le centre des masses est le barycentre des milieux A', B', C' des côtés affectés de coefficients proportionnels aux longueurs a, b, c des côtés. Comme les côtés du triangle A'B'C' sont $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$. Le centre des masses est le centre du cercle inscrit dans le triangle médial A'B'C' (cf. cours § 13).

On considère le quadrilatère ABCD, matérialisé par ses côtés. Notons :

- I, J, K, L, M les milieux respectifs de AB, BC, CD, DA et BD,
- $a = \text{AB}$, $b = \text{CD}$, $c = \text{CD}$, $d = \text{DA}$ et $e = \text{BD}$.



Pour rechercher son centre des masses, il est possible de le remplacer par le sytème formé :

- des points
  - I, L et M, affectés des masses a, d et e
  - J, K et M, affectés des masses b, c et $-e$.

Il apparaît alors que la point cherché est sur la droite qui joint le centre du cercle inscrit dans le triangle IML au centre du cercle exinscrit dans l'angle M du triangle JKM. Le centre des masses est donc le point de concours des quatre droites qu'on peut définir de cette façon.

VII

- Si $a + b \neq 0$, on considère le point G, barycentre de A et B affectés des coefficients a et b. Du fait de l'associativité du barycentre, on a :

$$(a + b + m)\overrightarrow{\text{GM}'} = (a + b)\overrightarrow{\text{GG}} + m\,\overrightarrow{\text{GM}} = m\,\overrightarrow{\text{GM}}.$$

L'application f est donc l'homothétie, de centre G et de rapport $\frac{m}{a+b+m}$.

- si $a + b = 0$, m est non nul et l'on a :

$$m\,\overrightarrow{\text{MM}'} = a(\overrightarrow{\text{MA}} - \overrightarrow{\text{MB}}) + m\,\overrightarrow{\text{MM}} = a\overrightarrow{\text{BA}}$$

f est alors la translation de vecteur : $-\frac{a}{m}\overrightarrow{\text{AB}}$.

VIII

On a :

$$\frac{\overline{P'B}}{\overline{P'C}}=\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$$

On applique le théorème de Ménélaüs, dans le sens direct, à P, Q, R puis la réciproque à P′, Q′, R′.

IX

On note P, Q et R les points de contact du cercle inscrit avec (BC), (CA) et (AB). On pose :

$$a=\mathrm{BC} \;\;,\;\; b=\mathrm{CA} \;\;,\;\; c=\mathrm{AB} \;\text{ et } p=\frac{a+b+c}{2}$$

Il est classique de montrer que :

$$\mathrm{AQ}=\mathrm{AR}=p-a \;\;,\;\; \mathrm{BR}=\mathrm{BP}=p-b \;\text{ et }\; \mathrm{CP}=\mathrm{CQ}=p-c.$$

On en déduit que les points considérés admettent les coordonnées barycentriques :

$$\mathrm{P}:(0,p-c,p-b) \;\;,\;\; \mathrm{Q}:(p-c,0,p-a) \;\;,\;\; \mathrm{R}:(p-b,p-a,0)$$

Puis :

$$\mathrm{P}:(0,(p-a)(p-c),(p-a)(p-b)),$$
$$\mathrm{Q}:((p-b)(p-c),0,(p-a)(p-b)),$$
$$\mathrm{R}:((p-b)(p-c),(p-a)(p-c),0).$$

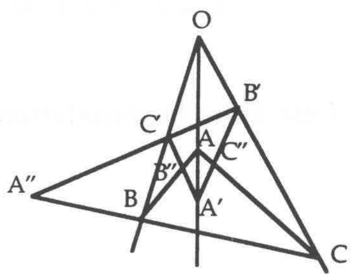
Ou, mieux :

$$\mathrm{P}:(0,\frac{1}{p-b},\frac{1}{p-c}) \;\;,\;\; \mathrm{Q}:(\frac{1}{p-a},0,\frac{1}{p-c}) \;\;,\;\; \mathrm{P}:(\frac{1}{p-a},\frac{1}{p-b},0).$$

Il résulte de l'associativité du barycentre que les droites (AP), (BQ) et (CR) concorent au point de coordànnées barycentriques :

$$(\frac{1}{p-a},\frac{1}{p-b},\frac{1}{p-c}).$$

X



1) Le texte ne précisant pas que A et A′ sont distincts, il convient de noter que si ces points étaient confondus, ils seraient aussi confondus avec B″ et C″ et le résultat final de l'exercice serait acquis. On suppose donc que A et A′ sont distincts de même que B et B′, C et C′. Dans ces conditions, tout point de la droite (AA′), en particulier le point O, comme barycentre de A et de A′. Comme il en va de même pour les droites (BB′) et (CC′), l'existence des six coefficients mentionnés dans l'énoncé est bien fondée.

Si, par exemple, $\alpha=\beta$, alors :

$$\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\alpha'\overrightarrow{\mathrm{OA}'} \;\text{ et }\; \alpha\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\alpha'\overrightarrow{\mathrm{OB}'}$$

et par suite on a :

$$\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\alpha'\overrightarrow{\mathrm{OB}'}+\alpha'\overrightarrow{\mathrm{OA}'}=-\alpha'\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}.$$

Les droites (AB) et (A′B′) sont alors parallèles ou encore que les points A et B ou A′ et B′ sont confondus. Ces éventualités étant exclues, on a bien $\alpha\neq\beta$. Les hypothèses n'étant pas modifiées si l'on permute les lettres A, B et C, on a en même temps prouvé que $\beta\neq\gamma$ et $\gamma\neq\alpha$.

2) Les nombres β et γ étant distincts, il est possible de considérer le barycentre de B et C affectés des coefficients b et $-c$. Soit G ce point, il vérifie :

$$(\beta-\gamma)\overrightarrow{OG}=\beta\overrightarrow{OB}-\gamma\overrightarrow{OC}$$

et comme on a :

$$\beta'-\gamma'=1-\beta-(1-\gamma)=-(\beta-\gamma)$$

la question précédente montre que :

$$(\beta'-\gamma')\overrightarrow{OG}=\beta'\overrightarrow{OB}''-\gamma'\overrightarrow{OC}',$$

G est donc aussi le barycentre de B′ et C′ affectés des coefficients β' et $-\gamma'$. Ce point est situé à la fois sur la droite (BC) et sur la droite (B′C′), c'est A″. La première assertion est alors démontrée, les deux autres en découlent compte-tenu de la symétrie des hypothèses.

3) Nous venons de montrer que :

$$\begin{cases}(\beta-\gamma)\overrightarrow{OA}'' = \beta\overrightarrow{OB} - \gamma\overrightarrow{OC}\\(\gamma-\alpha)\overrightarrow{OB}'' = \gamma\overrightarrow{OC} - \alpha\overrightarrow{OA}\\(\alpha-\beta)\overrightarrow{OC}'' = \alpha\overrightarrow{OA} - \beta\overrightarrow{OB}\end{cases}$$

Par addition membre à membre de ces relations, on obtient :

$$(\beta-\gamma)\overrightarrow{OA}'' + (\gamma-\alpha)\overrightarrow{OB}'' + (\alpha-\beta)\overrightarrow{OC}'' = \vec{0}.$$

La somme des coefficients du membre de gauche étant nulle, on sait que cette égalité reste vraie si l'on remplace O par un point quelconque. Pour A″ on obtient : Aucun des scalaires $\gamma-\alpha$ ou $\alpha-\beta$ n'étant nul, le point A″ est aligné avec B″ et C″.

XI

1) Soit G le barycentre des points A, B, C et O affectés des coefficients 1, 1, 1 et –1. On a :

$$2\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD},$$

G est donc le centre du cube construit sur les points A, B, C et D. On a donc :

$$GO = GA = GB = GC = a\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

La formule de Leibniz s'exprime :

$$MB^2 + MC^2 + MD^2 - MO^2 = 2MG^2 + 2OG^2 = 2MG^2 + \frac{3a^2}{2},$$

le lieu cherché est donc :

- si $k < \frac{3}{2}$, l'ensemble vide,
- si $k = \frac{3}{2}$, le point G,
- si $k > \frac{3}{2}$, la sphère de centre G et de rayon $a\frac{\sqrt{2k-3}}{2}$.

Le point B appartient à ce lieu si $k = 3$.

2) la somme des coefficients étant nulle, on sait que :

$$MB^2 + MC^2 + MD^2 - 3MO^2 = OB^2 + OC^2 + OD^2 + 2\overrightarrow{MO}\,.\,\vec{v},$$

où :

$$\vec{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OG}.$$

La condition devient :

$$2\overrightarrow{MO}\,.\,\vec{v} = (k-3)a^2.$$

Le lieu demandé est donc un plan parallèle à (BCD). Ce plan contient le point B si :

$$ka^2 = AA^2 + AB^2 + AC^2 - 3AO^2 = -a^2,$$

c'est-à-dire si $k = -1$.

XII

1) Cmme $a + b + c = 0$, le vecteur :

$$\vec{v} = a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$$

est indépendant du point M. On le détermine pour M = A, on obtient :

$$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = \overline{CA}\,.\,\overrightarrow{AB} + \overline{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \vec{0}.$$

2) Dans ces conditions, on a :

$$\begin{aligned} MA^2\overline{BC} + MB^2\overline{CA} + MC^2\overline{AB} &= AB^2\overline{CA} + AC^2\overline{AB} + \overrightarrow{MA}\,.\,\vec{v} \\ &= \overline{AB}\,.\,\overline{CA}(\overline{AB} - \overline{AC}) \\ &= -\overline{AB}\,.\,\overline{BC}\,.\,\overline{CA}. \end{aligned}$$

3) On applique la formule ci-dessus aux trois points alignés D, B, C pour M = A en tenant compte de la relation bien connue :

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\frac{c}{b}.$$

Ce qui donne :

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{BC}} = -\frac{c}{b+c} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{DC}}{\overline{BC}} = \frac{b}{b+c}.$$

On obtient ainsi :

$$AD^2\overline{BC} - \frac{c^2b}{b+c}\overline{BC} - \frac{b^2c}{b+c}\overline{BC} = -\frac{b}{(b+c)^2}BC^2\overline{BC}.$$

Ce qui donne :

$$AD^2 = \frac{bc[(b+c)^2 - a^2]}{(b+c)^2}.$$

On peut vérifier que cette expression prend la forme suivante :

$$AD^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2}\, p(p-a).$$

XIII

1) Tenant compte de la linéarité du produit scalaire, on a, pour $i = 1, \dots, n$:

$$[(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_i}) \cdot \vec{u}]^2 = (\overrightarrow{GA_i} \cdot \vec{u})^2 + 2(\overrightarrow{MG} \cdot \vec{u})(\overrightarrow{GA_i} \cdot \vec{u}) + (\overrightarrow{MG} \cdot \vec{u})^2$$

On effectue la combinaison, il vient :

$$\begin{aligned} f(M) &= \alpha_1(\overrightarrow{GA_1} \cdot \vec{u})^2 + \dots + \alpha_n(\overrightarrow{GA_n} \cdot \vec{u})^2 \\ &\quad + 2(\overrightarrow{MG} \cdot \vec{u})[\alpha_1(\overrightarrow{GA_1} \cdot \vec{u}) + \dots + \alpha_n(\overrightarrow{GA_n} \cdot \vec{u})] \\ &\quad + (\alpha_1 + \dots + \alpha_n)(\overrightarrow{MG} \cdot \vec{u})^2 \\ &= f(G) + 2(\overrightarrow{MG} \cdot \vec{u}) \cdot [(\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \dots + \alpha_n\overrightarrow{GA_n}) \cdot \vec{u}] + s(\overrightarrow{MG} \cdot \vec{u})^2 \end{aligned}$$

Or, on sait que :

$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \dots + \alpha_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0},$$

On a donc bien :

$$f(M) = f(G) + s(\overrightarrow{MG} \cdot \vec{u})^2.$$

2) L'expression $(\overrightarrow{MA_i} \cdot \vec{u})^2$ mesure le carré de la distance de A_i au plan orthogonale à $\vec{u}$ qui passe par M. On choisit $\vec{u}$ orthogonal à la direction donnée et tous les coefficients α_i égaux à 1. Dans ces conditions :

$$f(M) = f(G) + n(\overrightarrow{MG} \cdot \vec{u})^2.$$

$f(M)$ exprime la somme des carrés des distances des points A_i au plan de direction donnée qui passe par M. Comme $n(\overrightarrow{MG} \cdot \vec{u})^2$ est positif ou nul; cette expression prend sa valeur minimum si le produit scalaire $\overrightarrow{MG} \cdot \vec{u}$ est nul, c'est-à-dire si M appartient à la droite direction donnée qui passe par G.

3) Si $s = 0$, on remplace, dans le calcul du point 1, G par un point quelconque M′. Il vient:

$$f(M) = f(M') + 2(\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u})(\vec{v} \cdot \vec{u}),$$

où le vecteur :

$$\vec{v} = \alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \dots + \alpha_n\overrightarrow{MA_n}$$

est, on le sait, indépendant de M.

- Si $(\vec{v} \cdot \vec{u}) \neq \vec{0}$, les surfaces de niveau de f sont les plans orhogonaux à $\vec{u}$, $f(M)$ varie de $-\infty$ à plus $+\infty$ sur toute droite non orthogonale à $\vec{u}$.
- Si $(\vec{v} \cdot \vec{u}) = \vec{0}$, f est constante.

XIV

1) a) La première égalité s'obtient en rapprochant l'expression usuelle de l'aire sous la forme :

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}bc\sin A$$

de la loi des sinus qui donne :

$$\sin A=\frac{a}{2R}$$

On obtient :

$$\mathcal{A}=\frac{abc}{4R}.$$

Pour la seconde, on note que :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}&=\text{aire IBC}+\text{aire ICA}+\text{aire IAR}\\&=\frac{1}{2}(ar+br+cr)\\&=pr\end{aligned}$$

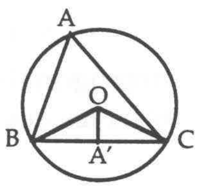
b) La loi des cosinus donne les deux égalités suivantes :

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

L'addition membre à membre puis la simplification donne bien :

$$a=b\cos C+c\cos B$$

c) Soit A′ le milieu du côté BC, si le triangle a ses trois angles aigus, on a :



$$\mathcal{A}=\text{aire OBC}+\text{aire OCA}+\text{aire OAB}.$$

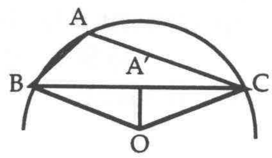
et comme $\widehat{BOC}=2A$, il vient :

$$\text{aire OBC}=\frac{1}{2}aR\cos A.$$

Il s'ensuit que :

$$2\mathcal{A}=R(a\cos A+b\cos B+c\cos C).$$

Si le triangle a un angle obtus, on peut toujours supposer que c'est au sommet A, on a alors :



$$\mathcal{A}=-\text{aire OBC}+\text{aire OCA}+\text{aire OAB}$$

et comme $\widehat{BOC}=2(\pi-A)$, l'aire du triangle OBC s'écrit :

$$\text{aire OBC}=\frac{1}{2}aR\cos(\pi-A)=-\frac{1}{2}aR\cos A.$$

La relation :

$$2\mathcal{A}=R(a\cos A+b\cos B+c\cos C)$$

est donc encore vérifiée.

c) On additionne membre à membre les relations (b) et une égalité triviale :

$$a=b\cos C+c\cos B$$
$$b=c\cos A+a\cos C$$
$$c=a\cos B+b\cos A$$
$$a\cos A+b\cos B+c\cos C=a\cos A+b\cos B+c\cos C$$

On tient compte de (c), il vient :

$$2p+2\frac{\mathcal{A}}{R}=2p(\cos A+\cos B+\cos C)$$

On remplace $\mathscr{A}$ par pr, on simplifie, on obtient :

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}.$$

3) On exprime la formule de Leibniz en A, B et C :

$$\left\{\begin{array}{lll} & \beta c^2 + \gamma b^2 = f(M) + (\alpha+\beta+\gamma)MA^2 & \quad\vert\ \alpha \\ \alpha c^2 & \quad + \gamma a^2 = f(M) + (\alpha+\beta+\gamma)MB^2 & \quad\vert\ \beta \\ \alpha b^2 + \beta a^2 & \quad = f(M) + (\alpha+\beta+\gamma)MC^2 & \quad\vert\ \gamma \end{array}\right.$$

On combine ces relations avec les coefficients indiqués, on simplifie par 2, il vient :

$$\beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2 + \alpha\beta c^2 = (\alpha+\beta+\gamma)f(M).$$

On en déduit que :

$$f(M) = \frac{\beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2 + \alpha\beta c^2}{\alpha+\beta+\gamma}$$

a) Pour le centre O du cercle circonscrit, on a

$$OA = OB = OC = R,$$

ce qui donne :

$$f(O) = (\alpha+\beta+\gamma)R^2.$$

On applique la formule de Leibniz :

$$f(O) = f(M) + (\alpha+\beta+\gamma)MO^2.$$

On tient compte du résultat précédent :

$$(\alpha+\beta+\gamma)R^2 = \frac{\beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2 + \alpha\beta c^2}{\alpha+\beta+\gamma} + (\alpha+\beta+\gamma)MO^2.$$

On en déduit que :

$$R^2 - OM^2 = \frac{\beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2 + \alpha\beta c^2}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que le point M, barycentre de A, B et C affectés des coefficients α, β et γ appartienne au cercle circonscrit est donc :

$$\beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2 + \alpha\beta c^2 = 0.$$

b) On se souvient que les coefficients barycentriques de I, relativement à A, B et C sont a, b et c. On a donc :

$$f(I) = aMA^2 + bMB^2 + cMC^2.$$

On a donc, en particulier :

$$f(I) = \frac{bca^2 + cab^2 + abc^2}{a+b+c} = abc \quad \text{et} \quad f(O) = 2pR^2.$$

On applique une nouvelle fois la formule de Leibniz :

$$f(O) = f(I) + 2pOI^2.$$

Ce qui donne :

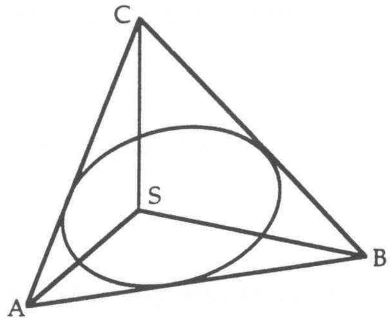
$$2pOI^2 = f(O) - f(I) = 2pR^2 - abc$$

Il découle de la formule (a) que :

$$abc = 4prR.$$

On a donc :

$$OI^2 = R^2 - 2rR. \qquad \text{(formule d'Euler)}$$



3) Notons A, B et C les points où le plan du cercle coupe les arêtes du trièdre. Il est clair que le cercle est inscrit dans le triangle ABC. On conserve donc les notations posées au début. Comme le trièdre considéré est trirectangle, on a :

$$SB^2 + SC^2 = a^2 \ , \ SC^2 + SA^2 = b^2 \ \text{ et } \ SA^2 + SB^2 = c.^2.$$

On additionne terme à terme deux de ces relations et en soustrait la troisième, puis on applique la loi des cosinus, on obtient successivement :

$$\begin{cases} 2SA^2 = b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos A \\ 2SB^2 = c^2 + a^2 - b^2 = 2ca \cos B \\ 2SC^2 = a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C \end{cases} \qquad \left| \begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array} \right.$$

Ce qui donne une expression de $f(S)$:

$$\begin{aligned} f(S) &= a\,SA^2 + aSB^2 + cSC^2 \\ &= abc(\cos A + \cos B + \cos C) \\ &= 4prR(1 + \frac{r}{R}) \\ &= 4pr(R + r) \end{aligned}$$

On applique encore la formule de Leibniz :

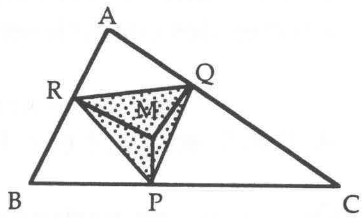
$$f(S) = f(I) + 2pSI^2.$$

Compte tenu de ce qui précède, on obtient :

$$2pSI^2 = 4pr(R + r) - f(I) = 4pr(R + r) - 4prR = 4pr^2.$$

On a donc :

$$SI = r\sqrt{2}\,.$$



4) On convient dorénavant que :

$$\alpha + \beta + \gamma = 1.$$

Les nombres suivants :

$$x = 2\frac{\alpha}{a}\mathscr{A} \ ; \ y = 2\frac{\beta}{b}\mathscr{A} \ ; \ z = 2\frac{\gamma}{c}\mathscr{A}$$

sont les distances de M aux trois côtés du triangle.

On note $\mathscr{S}(M)$ l'aire du triangle PQR. Ce nombre s'exprime :

$$\mathscr{S}(M) = \text{aire } MQR + \text{aire } MRP + \text{aire } MPQ.$$

Les angles QMR et A étant égaux ou supplémentaires, leurs sinus sont égaux. Il s'ensuit que :

$$\frac{\text{aire } MQR}{\mathscr{A}} = \frac{\frac{1}{2}yz \sin A}{\frac{1}{2}bc \sin A} = \frac{yz}{bc} = 4\frac{\beta\gamma}{b^2c^2}\mathscr{A}^2 = 4\frac{\beta\gamma}{b^2c^2}\left(\frac{abc}{4R}\right)^2$$

On a donc :

$$\frac{\text{aire } MQR}{\mathscr{A}} = \frac{a^2\beta\gamma}{4R^2}.$$

Ceci vaut pour les triangle MRP et MPQ. On a donc :

$$\text{aire } MQR = \frac{a^2\beta\gamma}{4R^2}\mathscr{A} \ , \ \text{aire } MRP = \frac{b^2\gamma\alpha}{4R^2}\mathscr{A} \ , \ \text{aire } MPQ = \frac{c^2\alpha\beta}{4R^2}\mathscr{A}.$$

On en déduit que :

$$\mathscr{S}(M) = \frac{a^2\beta\gamma + b^2\gamma\alpha + c^2\alpha\beta}{4R^2}\mathscr{A}.$$

Il découle du point 2 que :

$$\mathcal{S}(M) = \frac{R^2 - OM^2}{4R^2}\,\mathcal{A}.$$

Il apparaît alors que l'aire du triangle podaire atteint son maximum quand le point M est le centre du cercle circonscrit.

Remarque : le calcul précédent vaut si le point M est situé à l'extérieur du triangle. En effet, les signes de x, y et z reflètent fidèlement l'orientation des triangles MBC, MCA et MAB relativement à ABC. La formule :

$$\mathcal{S}(M) = \text{aire } MQR + \text{aire } MRP + \text{aire } MPQ.$$

reste valable. Elle traduit une propriété classique du produit vectoriel (cf. exercice IV -6) :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}.$$

On retrouve ainsi la propriété de définition de la droite de Simson (cf. exercice V- 5)

III. Equations de droites et de plans

Droites et plans

I

On détermine une équation du plan :

• soit en résolvant le système homogène suivant :

$$\begin{cases} u-v+2w-d=0 \\ 2u+v-\ \ w-d=0 \\ -u+v+\ \ w-d=0 \end{cases}$$

• soit en suivant la démarche exposée dans le cours. C'est-à-dire qu'on élimine λ et μ dans les équations paramétriques du plan considéré :

$$\begin{cases} x=\ \ 1+\ \ \lambda-2\mu \\ y=-1+2\lambda+2\mu \\ z=\ \ 2-3\lambda-\ \ \mu \end{cases} \quad \begin{cases} \dots \\ 2x-y=\ \ 3-6\mu \\ 3x+z=5\lambda-7\mu \end{cases} \quad \begin{cases} \dots \\ \dots \\ 4x+7y+6z=9 \end{cases}$$

On obtient les équations des traces sur les faces du repère en annulant successivement z, x et y, ce qui donne :

sur (xOy) : $4x+7z=9$, sur (yOz) : $7y+6z=9$, sur (zOx) : $4x+6z=9$.

II

Sous réserve que le produit abc soit non nul, l'équation du plan est :

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Si l'on a, par exemple, $a=0$ et $bc\neq 0$, l'équation devient $x=0$. Si deux des nombres a, b ou c sont nuls le plan n'est plus déterminé.

III

Une expression de la solution générale du système, sous forme paramétrique, fournit l'équation demandée. On obtient par exemple :

$x=1+\lambda$, $y=1-2\lambda$, $z=\lambda$ pour $\lambda\in\mathbf{R}$ [1].

IV

L'élimination de λ fait apparaître les conditions de compatibilité suivantes :

$$\begin{cases} 2x+\ \ y=7 \\ 3x+2x=5 \end{cases}$$

Ce sont des équations cartésiennes de la droite ainsi définie.

N. B. Pour les trois exercices suivant le repère est choisi orthonormé.

V

1) Le sytème linéaire formé par les équations des médiatrices a pour solution les coordonnées demandées.

$$\begin{cases} 9(x-\frac{11}{2})+12(y-7)=0 \\ 12(x-7)+\ \ 5(y-\frac{7}{2})=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x+\ \ 8y=89 \\ 24x+10y=203 \end{cases} \quad x=\frac{2367}{66}, y=\frac{153}{22}.$$

Le calcul du rayon du cercle circonscrit coule de source.

---

1 On notera que la droite vectorielle définie par le vecteur directeur, c'est-à-dire l'ensemble

$$\{\lambda(1\,,-2\,,1)|\lambda\in\mathcal{R}\}$$

est la solution du sytème homogène.

2) On procède de même avec les hauteurs issues de C et B :

$$\begin{cases} 9(x-13)+12(y-6)=0 \\ 12(x-10)+5(y-13)=0 \end{cases} \quad \text{on obtient } x=\frac{425}{33}\ ,\ y=\frac{67}{11}.$$

3) On détermine les équations des droites (AB) et (AC) :

$$\frac{x-1}{9}=\frac{y-1}{12} \quad \text{et} \quad \frac{x-1}{12}=\frac{y-1}{5}.$$

on les normalise :

$$\frac{4x-3y-1}{5}=0\ ,\ \frac{5x+12y+7}{13}=0.$$

Les équations des bissectrices de l'angle en A du triangle s'expriment alors :

$$\frac{4x-3y-1}{5}=\frac{5x+12y+7}{13} \quad \text{et} \quad \frac{4x-3y-1}{5}=-\frac{5x+12y+7}{13}$$

Ce qui donne :

$$9x+7y-16=0 \quad \text{et} \quad 7x-9y+2=0.$$

<u>Remarque</u> : on pourra évidemment distinguer la bissectrice intérieure de la bissectrice extérieure sur une figure. On pourra aussi substituer dans ces équations les coordonnées de B et C afin de comparer les signes des nombres obtenus. On constatera ainsi que les points B et C sont situés du même côté de la première droite et de part et d'autre de la seconde.

VI

Les équations des côtés passant par A s'expriment :

$$(x-3)-(y-1)=0 \quad \text{et} \quad 3(x-3)-2(y-1)=0,$$

puis

$$x-y=2 \quad \text{et} \quad 3x-2y=7.$$

Les coordonnées des sommets B et C sont les solutions des deux sytèmes suivants :

$$\begin{cases} x-\ y=2 \\ 2x+3y=-4 \end{cases}$$

à savoir :

$$\left(\frac{2}{5},-\frac{8}{5}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{9}{5},-\frac{4}{5}\right).$$

VII

1) On détermine l'équation de P, on obtient : $x-y+2z=3$.

Les coordonnées d'un vecteur directeur de D : $(2,-1,2)$ n'annulent pas la partie homogène de l'équation de P [1].

2) a) Soit (x_1,y_1,z_1) les coordonnées de la projection M_1 de M sur P suivant D. On a à la fois :

$$\begin{cases} x_1=x+2\lambda \\ y_1=y+\ \lambda \\ z_1=z+2\lambda \end{cases} \quad \text{et} \quad x_1-y_1+2z_1=3$$

ce qui donne :

$$\lambda=\frac{3-x+y-2z}{7}$$

---

1 De façon générale, la direction du plan d'équation $ux+vy+wz=d$ contient le $\vec{v}$, de coordonnées (a,b,c), si, et seulement si, pour un point arbitraire M_0 de P, le point M tel que $\overline{M_0M}=\vec{v}$ appartient à P. On montre facilement que ceci équivaut à la condition $ua+vb+wc=0$.

et par suite :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{7}(6+5x+2y-4z) \\ y_1 = \dfrac{1}{7}(-3+x+6y-2z) \\ y_1 = \dfrac{1}{7}(6-2x+2y+3z) \end{cases}$$

b) On obtient les coordonnées (x_2, y_2, z_2) du symétrique de M par rapport à P suivant D à partir de la relation $\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{MM_1}$. Ce qui donne :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{7}(12+3x+4y-8z) \\ y_1 = \dfrac{1}{7}(-6+2x+5y+4z) \\ z_1 = \dfrac{1}{7}(12-4x+4y-z) \end{cases}$$

c) Soit M_3 la projection de M sur D suivant P et (x_3, y_3, z_3) les coordonnées de ce point. Ces dernières vérifient à la fois :

$$\begin{cases} x_3 = \ \ 1+2\lambda \\ y_3 = \ \ 2-\ \lambda \\ z_3 = -1+2\lambda \end{cases} \quad \text{et} \quad (x_3-x)-(y_3-y)+(z_1-z)=0.$$

ce qui donne :

$$\lambda = \frac{3x-y+2z}{7}$$

et par suite :

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{1}{7}(13+2x-2y+4z) \\ x_1 = \dfrac{1}{7}(11-x+y-2z) \\ z_3 = \dfrac{1}{7}(-1+2x-2y+4z) \end{cases}$$

d) On obtient les coordonnées (x_4, y_4, z_4) du symétrique de M par rapport à D suivant P à partir de la relation :

$$\overrightarrow{OM_3} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM_4})$$

ou encore :

$$\overrightarrow{OM_4} = 2\overrightarrow{OM_3} - \overrightarrow{OM}.$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{7}(26-3x-4y+8z) \\ y_1 = \dfrac{1}{7}(22-2x-5y-4z) \\ z_1 = \dfrac{1}{7}(-1+4x-4y+z) \end{cases}$$

<u>Remarque</u> : à titre de vérification, on pourra s'assurer que :

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM_4} = 2\overrightarrow{OI},$$

où I est le point d'intersection de D et P.

VIII

On procède exactement comme ci-dessus, en remplaçant D par la droite d'équation paramétriques :

$$\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2-\lambda \\ z\ 3+2\lambda \end{cases}$$

Systèmes linéaires

IX

...

X

1) Soit à résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$$

Si $a\neq 0$ (1), on élimine le coefficient de x dans la seconde équation, ce qui donne le système équivalent :

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ (ab'-a'b)y+(ac'-a'c)z=ad'-a'd \end{cases}$$

- si $ab'-a'b\neq 0$ ou $ac'-a'c\neq 0$, on procède à l'élimination de y ou de z, la solution générale s'exprime alors en fonction d'un paramètre.
- sinon a, b et c sont proportionnels à a', b' et c' alors
  • ou bien $ad'-a'd\neq 0$ et le système est incompatible.
  • ou bien $ad'-a'd=0$ et le système est équivalent à la seule équation $ax+by+cz=d$. L'écriture de la solution générale fait alors intervenir deux paramètres.

Interprétation géométrique : les équations données définissent deux plans – sauf dans les cas où l'une d'elles serait contradictoire ou se réduirait à la condition triviale $0=0$.

- Dans le premier cas, ces plans sont sécants et la solution générale est la présentation sous forme paramétrique de leur intersection qui est une droite.
- Dans le second, ces plans sont parallèles. Ils coïncident si leurs quatre coefficients sont proportionnels, sinon, ils sont disjoints.

2) Soit à résoudre le système linéaire de trois équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \\ a''x+b''y=c'' \end{cases}$$

- si $ab'-a'b=0$ et si les deux premières équations sont compatibles, le sytème est équivalent aux deux équations :

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a''x+b''y=c'' \end{cases}$$

  • il admet une solution unique si $ab''-a''b\neq 0$,
  • il se réduit à la seule équation $ax+by=c$ si :

$$ab''-a''b=ac''-a''c=0.$$

  • sinon, il est incompatible.

1 La suggestion du texte vise à dispenser d'un préambule du style : si tous les coefficients des inconnues étaient étaient nuls, le système serait ou bien trivial si d et d' sont tous les deux nuls, ou bien contradictoire dans les cas contraire. Si l'on n'est pas dans ce cas, on peut toujours procéder à un changement de l'ordre des inconnues ou des équations de façon à avoir $a\neq 0$ — ouf !

- si $ab'-a'b\neq 0$, alors le système :

$$\begin{cases} ax+a'y=a'' \\ bx+b''y=b'' \end{cases}$$

admet une solution, elle est unique. Il existe alors λ et μ tels que :

$$a''=\lambda a+\mu a' \text{ et } b''=\lambda b+\mu b'$$

La transformation de ligne $L_3 \to L_3-\lambda L_2-\mu L_2$ donne la condition de compatibilité :

$$c''-\lambda c-\mu c'=0.$$

Réciproquement, s'il existe λ et μ tels que :

$$a''=\lambda a+\mu a' \text{ et } b''=\lambda b+\mu b'$$

le système se réduit à ses deux premières équations.

En résumé : un système de trois équations à deux inconnues est, en général, incompatible. Pour qu'il soit compatible, il faut que l'une des équations soit combinaison linéaire des deux autres qui, alors, forment un système équivalent au système donné.

Interprétation géométrique : si le système est compatible, on est en présence des équations de trois droites concourantes – éventuellement confondues.

On a en fait montré que si les deux droites d'équations

$$ax+by=c \text{ et } a'x+b'y=c'$$

sont sécantes (c'est-à-dire si $ab'-a'b\neq 0$) les droites qui passent par leur point commun ont pour équations :

$$(\lambda a+\mu a')x+(\lambda b+\mu b')y=\lambda c+\mu c' \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbf{R}.$$

Un tel ensemble s'appelle un *faisceau de droites.*

X

Soit :

- i le nombre de rations journalières par are au départ,
- p le nombre de rations journalières fournies par l'herbe qui pousse chaque jour sur un are,

On a :

$$\begin{cases} 60(i+12p)=75\times 12 \\ 72(i+15p)=81\times 15 \end{cases} \;;\; \begin{cases} i+12p=15 \\ i+15p=\dfrac{135}{8} \end{cases} \;;\; i=\frac{15}{2} \text{ et } p=\frac{5}{8}.$$

Soit n le nombre demandé, il vérifie :

$$18n=96\left(\frac{15}{2}+18\times\frac{5}{5}\right)$$

ce qui donne :

$$n=100.$$

IV. Produit vectoriel et produit mixte

Dans toute la suite, l'espace est orienté et rapporté à un repère orthonormé direct chaque fois qu'on est amené à calculer les coordonnées d'un produit vectoriel.

I

(i) La distance du point A au plan (BCD) s'exprime :

$$\frac{\|\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\|}{\|\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}\|} \qquad \text{“} \ldots = \frac{\text{volume du pavé}}{\text{aire de la face}} \text{”}$$

On obtient ainsi :

$$\frac{53}{\sqrt{26^2+3^2+4^2}} \approx 2.$$

(ii) On pourrait aussi écrire l'équation du plan (BCD), la normaliser, puis y substituer les coordonnées du point A.

On remarquera que lorsqu'on détermine l'équation du plan (BCD) par une méthode délimination, on obtient comme coefficients, les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}$ – à un facteur près.

(iii) Ces coefficients, on peut encore les obtenir directement en caractérisant un point M du plan par la propriété $(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}).\overrightarrow{BM}=0$, ce qui donne, après normalisation et substitution de A à M :

$$\frac{\|\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}\|}{\|\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}\|}$$

Or, on a :

$$(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}) = -(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}) = -(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}).$$

Il est à noter que les voies suivies ne sont pas essentiellement différentes. En effet, le déterminant apparaît comme une formule qui exprime, sous forme condensée, les résultats des caculs qu'on peut mener par les méthodes délimination.

II

On note H et K les pieds de la perpendiculaire commune à D et D′, M un point de D et N un point de D′. On a toujours :

$$MN^2 = (\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HK}+\overrightarrow{KN})^2 = MH^2+HK^2+KN^2+2\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{HK}+2\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{KN}+2\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{KN}$$

Or, on a par hypothèse :

$$\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{HK}.\overrightarrow{KN} = 0.$$

Il s'ensuit que :

$$MN^2 = HK^2 + (\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{KN})^2 \geq HK^2.$$

2) On se reporte à l'exercice précédent.

III

1) Puisque les vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CD} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

n'ont pas leurs coordonnées proportionnelles, leur produit vectoriel et plus généralement tout vecteur colinéaire répond à la demande. On calcule:

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{CD} = -4\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k}.$$

On choisit :

$$\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}.$$

2) Soit P, le plan parallèle à Δ qui contient D et Δ', P se caractérise comme étant le plan orthogonal à $\vec{u}$ et qui passe par A. On a donc :

$$M \in P \Leftrightarrow \vec{u} \,.\, \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow x - 2(y-3) + z - 1 = 0$$

Ce plan admet donc pour équation :

$$x - 2y + z = -5.$$

Soit $\vec{t}$ le vecteur de la translation qui transforme Δ' en sa projection orthogonale sur P. Ce vecteur est colinéaire à $\vec{u}$, il est donc bien déterminé par les conditions :

$$\vec{t} = \lambda\vec{u} \;\;,\;\; \overrightarrow{CC'} = \lambda\vec{u} \;\text{ et }\; C' \in P,$$

où λ est un scalaire. Les coordonnées (x, y, z) du point C′ vérifient donc à la fois :

$$x = 1 + \lambda \;\;,\;\; y = -2\lambda \;\;,\;\; z = 3 + \lambda \;\text{ et }\; x - 2y + z = -5.$$

Le calcul donne :

$$\vec{t} = -\frac{3}{2}\vec{u}.$$

On note H et H′ les pieds de la perpendiculaire commune respectivement sur Δ et Δ'. Le point H est caractérisé par les conditions suivantes :

$$\exists\lambda \in \mathbf{R} \;\; \overrightarrow{AH} = \lambda\overrightarrow{AB} \;\text{ et }\; \exists\mu \in \mathbf{R} \;\; \overrightarrow{CH} = \mu\overrightarrow{CD} - \vec{t},$$

C'est-à-dire :

$$\lambda = 1 + 3\mu - \frac{3}{2} \;\;,\;\; 3 + 2\lambda = 2\mu + 3 \;\;,\;\; 1 + 3\lambda = 3 + \mu - \frac{3}{2}.$$

Les scalaires λ et μ sont déterminés par le système :

$$\begin{cases} \lambda - 3\mu = \dfrac{1}{2} \\ \lambda - \;\mu = 0 \\ 3\lambda - \;\mu = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

qui est bien compatible et admet pour solution unique :

$$\lambda = \mu = \frac{1}{4}.$$

Ce qui donne :

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \;\text{ et }\; \overrightarrow{OH'} = \overrightarrow{OH} - \vec{t}.$$

Les coordonnées de H et H′ s'en déduisent immédiatement. On obtient :

$$H : \left(\frac{1}{4}, \frac{7}{2}, \frac{7}{4}\right) \;\text{ et }\; H' : \left(\frac{7}{4}, \frac{1}{2}, \frac{13}{4}\right).$$

IV

1) On considère les deux vecteurs suivants :

$$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \;\text{ et }\; \vec{v} = a'\vec{i} + b'\vec{j} + c'\vec{k}.$$

Soit α l'angle (géométrique) de leurs directions. On sait que :

$$\cos\alpha = \frac{\|\vec{u} \,.\, \vec{v}\|}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|} \;\text{ et }\; \sin\alpha = \frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}.$$

L'identité de Lagrange se déduit immédiatement de la relation :

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

2) Si a, b, c sont les longueurs des côtés d'un triangle et x, y, z les distances d'un point intérieur aux trois côtés, alors :

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}(ax+by+cz)$$

exprime l'aire du triangle. L'identité de lagrange s'exprime alors :

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=4\mathcal{A}^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2.$$

Ainsi, la somme $x^2+y^2+z^2$ est minimum si, et seulement si :

$$(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2=0.$$

C'est-à-dire :

$$bz-cy=cx-az=ay-bx=0.$$

Les distances x, y et z sont alors proportionnelles à a, b et c. Ce qui revient à dire que les coordonnées barycentriques du point en question sont proportionnelles à :

$$a^2 \quad , \quad b^2 \quad \text{et} \quad c^2$$

On retrouve ainsi le *point de Lemoine* (1). On sait même exprimer ce minimum en fonction de l'aire $\mathcal{A}$ et des trois côtés :

$$\frac{4\,\mathcal{A}^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

V

Pour tous points A, B et C de l'espace, on a :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\wedge(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}.$$

La seconde égalité s'en déduit et l'on a bien :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CB}$$

Pour tous points A, B, C et P de l'espace, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}&=(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA})\wedge(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA})\\&=\overrightarrow{PB}\wedge\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB}\wedge\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PA}\wedge\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PA}\wedge\overrightarrow{PA}\\&=\overrightarrow{PB}\wedge\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PC}\wedge\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PA}\wedge\overrightarrow{PB}\end{aligned}$$

Interprétation : on oriente le plan (ABC) en distinguant l'un des deux vecteurs unitaires qui lui sont orthogonaux, on le note $\vec{k}$. On aura alors :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\mathcal{A}\vec{k}$$

où $\mathcal{A}$ désigne l'aire algébrique du triangle orienté (A, B, C). Les premières égalités sont alors évidentes. On aura aussi :

$$\overrightarrow{PB}\wedge\overrightarrow{PC}=\alpha\vec{k} \quad , \quad \overrightarrow{PC}\wedge\overrightarrow{PA}=\beta\vec{k} \quad , \quad \overrightarrow{PA}\wedge\overrightarrow{PB}=\gamma\vec{k},$$

où les nombres α, β et γ sont les aires algébriques des triangles orientés :

(P, B, C) , (P, C, A) et (P, A, B).

La dernière formule exprime que :

$$\text{aire}(A,B,C)=\text{aire}(P,B,C)+\text{aire}(P,C,A)+\text{aire}(P,A,B).$$

VI

La question a été résolue à l'exercice précédent. On sait, en effet, que les coordonnées barycentriques de P dans le repère (A, B, C) sont proportionnelles aux aires algébriques des triangles orientés :

(P, B, C) , (P, C, A) et (P, A, B).

---

1 Ce point admet de nombreuses autres caractérisations. Ils constitue à lui seul un sujet d'étude auquel on pourrait consacrer plusieurs dizaines de pages.

VII

Si les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires, alors $\vec{u}(\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{0}$ et la formule est bien vérifiée. Dans le cas contraire, on peut choisir un repère orthonormé de l'espace tel que $\vec{i}$ et $\vec{j}$ soient respectivement colinéaires à $\vec{v}$ et $\vec{v} \wedge \vec{w}$. On aura ainsi :

$$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \ , \ \vec{v} = a'\vec{i} \text{ et } \vec{w} = a''\vec{i} + c''\vec{k}.$$

On peut alors mener le calcul qui suit.

$$\begin{aligned} \vec{u}(\vec{v} \wedge \vec{w}) &= (a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}) \wedge (-a'c''\vec{j}) \\ &= ca'c''\vec{i} - aa'c''\vec{k} \\ &= ca'c''\vec{i} - aa'c''\vec{k} + (aa'a'' - aa'a'')\vec{i} \\ &= a'(aa'' + cc'')\vec{i} - aa'(a''\vec{i} + c''\vec{k}) \\ &= (\vec{u}, \vec{w}).\ \vec{v}) - (\vec{u}.\ \vec{v}).\vec{w}) \end{aligned}$$

VIII

Cette "division vectorielle" est un exercice classique, mais il ne s'agit pas seulement d'un exercice d'école. En mécanique, il correspond au problème qu'on se pose quand on cherche où appliquer une force donnée, si l'on veut que son moment en un point donné soit un vecteur donné.

On convient de noter E l'ensemble des vecteurs et X l'ensemble des solutions.

Analyse : en premier lieu, il est clair que, pour que X soit non vide, il faut que les deux vecteurs donnés soient orthogonaux. On se donc dans ce cas, ainsi, $\vec{a}\,.\,\vec{b} = 0$.

On suppose que X est non vide, soit $\vec{x}$ l'un de ses éléments. on a :

$$\vec{a} = \vec{b} \wedge \vec{x}\,.$$

- Si $\vec{a} \wedge \vec{b} \neq \vec{0}$ alors $\vec{x}$, $\vec{b}$ et $\vec{a} \wedge \vec{b}$ sont des vecteurs orthogonaux à $\vec{a}$, il sont donc liés. Dans ce cas, $\vec{b}$ et $\vec{a} \wedge \vec{b}$ sont orthogonaux et non nuls, ils ne sont pas colinéaires. Il existe donc deux nombres réels α et β tels que :

$$\vec{x} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{a} \wedge \vec{b}.$$

Il s'ensuit que :

$$\vec{a} = \vec{b} \wedge \vec{x} = \vec{b} \wedge (\alpha\vec{b} + \beta\vec{a} \wedge \vec{b}) = \alpha\vec{b} \wedge \vec{b} + \beta\vec{b} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}).$$

On a évidemment $\vec{b} \wedge \vec{b} = \vec{0}$ et la formule du double produit vectoriel donne alors :

$$\vec{a} = \beta[(\vec{b}\,.\,\vec{b})\vec{a} - (\vec{b}\,.\,\vec{a})\vec{b}] = \beta\|\vec{b}\|^2\vec{a}.$$

Comme par hypothèse, on a $\vec{b}\,.\,\vec{a} = 0$ et $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont non nuls, il vient :

$$\beta = \frac{1}{\|\vec{b}\|^2}.$$

Le coefficient α reste, quant à lui, indéterminé ([1]).

- Si $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$, $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires, mais comme ils sont orthogonaux, l'un de ces deux vecteurs est nul et l'on a :
  - si $\vec{b} \neq \vec{0}$, alors $\vec{a} = \vec{0}$ et $\vec{x}$ est colinéaire à $\vec{b}$,
  - si $\vec{b} = \vec{0}$ et $\vec{a} \neq \vec{0}$ la situation est contradictoire,
  - si $\vec{a} = \vec{b} = 0$ la relation de départ est $\vec{0} = \vec{0} \wedge \vec{x}$. Cette condition est vérifée par tout vecteur.

1 Ce qui était prévisible

Synthèse :

- Si $\vec{b} \neq \vec{0}$, on considère un vecteur de la forme :

$$\alpha\vec{b} + \frac{1}{\|\vec{b}\|^2}\vec{a} \wedge \vec{b} .$$

Le calcul précédent montre qu'il est solution pourvu que $\vec{a} \, . \, \vec{b} = \vec{0}$.

- Si $\vec{b} = \vec{0}$, il découle de la définition du produit vectoriel que :
  - si $\vec{a} = \vec{0}$ alors $X = E$,
  - si $\vec{a} \neq \vec{0}$ alors $X = \varnothing$.

En résumé, l'ensemble des vecteurs $\vec{x}$ tels que $\vec{a} = \vec{b} \wedge \vec{x}$ est :

- $\left\{\alpha\vec{b} + \frac{1}{\|\vec{b}\|^2}\vec{a} \wedge \vec{b} \mid \alpha \in \mathbf{R}\right\}$ si $\vec{a} \, . \, \vec{b} = 0$ et $\vec{b} \neq \vec{0}$,
- vide si $\vec{a} \, . \, \vec{b} \neq \vec{0}$ ou bien, si $\vec{a} \neq \vec{0}$ et $\vec{b} = \vec{0}$,
- E si $\vec{a} = \vec{b} = \vec{0}$.

Remarque : on ne peut que conseiller de résoudre, aussi, ce problème par des considérations plus géométriques. On considère deux points A et B tels que :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b}.$$

Si M et N sont deux solutions, on a de façon évidente :

$$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{NA} \wedge \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

L'ensemble cherché est donc ou bien vide, ou bien c'est une droite parallèle à (AB). Le problème se réduit alors a rechercher dans un plan perpendiculaire à (AB) le point tel que ... on peut alors raisonner sur l'aire du triangle MAB ([1]).

IX

Pour tout point P de l'espace, on a :

$$\overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA} \wedge (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PC} \wedge \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{PC} \wedge \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC}) \wedge \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{PA} \wedge (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}) - \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} \end{aligned}$$

Ce qui prouve que :

$$\overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} \wedge \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}) \wedge \overrightarrow{AP}$$

L'exercice précédent donne la solution. Le lieu des point P tels que :

$$\overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} \wedge \overrightarrow{CD}$$

est :

- vide si les points A, B, C et D ne sont pas dans un même plan ou si ABDC est un parallélogramme au sens strict.
- l'espace tout entier si ABDC est un parallélogramme aplati,
- la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$, passant par le point P_0 tel que ... ([2])

---

1 On fait ainsi l'économie du double produit vectoriel. Il convient de savoir procéder par les deux méthodes.

2 Il ne semble pas exister de façon simple de localiser un point particulier de la droite obtenue.

X

La première relation découle directement de la formule du double produit vectoriel. Pour la seconde on procède au calcul qui suit :

$$\begin{aligned}(\vec{u}\wedge \vec{v}\ ,\ \vec{v}\wedge \vec{w}\ ,\ \vec{w}\wedge \vec{u}) &= [(\vec{u}\wedge \vec{v})\wedge(\vec{v}\wedge \vec{w})].(\vec{w}\wedge \vec{u})\\ &= [(\vec{u}\wedge \vec{v}).\,\vec{w}]\vec{v}-[((\vec{u}\wedge \vec{v}).\,\vec{v})\vec{w}].(\vec{w}\wedge \vec{u})\\ &= [(\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w})\vec{v}].(\vec{w}\wedge \vec{u})\\ &= (\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w})(\vec{v}.(\vec{w}\wedge \vec{u}))\\ &= (\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w})(\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w})\end{aligned}$$

XI

1) Il découle des définitions que :

$$\vec{a}\,.\,\vec{a}=\frac{1}{(\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c})}(\vec{a}\,.(\vec{b}\wedge\vec{c})=\frac{(\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c})}{(\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c})}=1.$$

Comme les données sont symétriques relativement à $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$, on a :

$$\vec{a}\,.\,\vec{a}\,'=\vec{b}\,.\,\vec{b}\,'=\vec{c}\,.\,\vec{c}\,'=1.$$

De plus, on a :

$$\vec{a}\,.\,\vec{b}\,'=\frac{1}{(\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c})}(\vec{a}\,.(\vec{c}\wedge\vec{a}))=0.$$

Il s'ensuit que :

$$\vec{a}\,.\,\vec{b}\,'=\vec{a}\,.\,\vec{c}\,'=\vec{b}\,.\,\vec{c}\,'=\vec{b}\,.\,\vec{a}\,'=\vec{c}\,.\,\vec{a}\,'=\vec{c}\,.\,\vec{a}\,'=0.$$

2) La relation :

$$(\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c})=\frac{1}{(\vec{a}\,',\vec{b}\,',\vec{c}\,')}$$

se déduit immédiatement de celle démontrée à l'exercice précédent.

3) On considère un vecteur $\vec{v}$ tel que :

$$\vec{v}\,.\,\vec{a}=\alpha\ ,\ \vec{v}\,.\,\vec{b}=\beta\ \text{ et }\ \vec{v}\,.\,\vec{c}=\gamma.$$

Comme le produit mixte $(\vec{a}\,',\vec{b}\,',\vec{c}\,')$ est non nul, il existe trois nombres x, y et z tels que :

$$\vec{v}=x\vec{a}\,'+y\vec{b}\,'+z\vec{c}\,'.$$

Les relations du point 1 montrent que :

$$\alpha=\vec{a}\,.\,\vec{v}=\vec{a}(x\vec{a}\,'+y\vec{b}\,'+z\vec{c}\,')=x\vec{a}\,.\,\vec{a}=x.$$

On a donc

$$\alpha=x\ ,\ \beta=y\ \text{ et }\ \gamma=z.$$

Réciproquement, le vecteur :

$$\vec{v}=\alpha\vec{a}\,'+\beta\vec{b}\,'+\gamma\vec{c}\,'.$$

vérifie bien les conditions attendues et l'analyse qui précède montre qu'il est unique.

4) On pose :

$$\vec{a}\,''=\frac{1}{(\vec{a}\,',\vec{b}\,',\vec{c}\,')}\vec{b}\,'\wedge\vec{c}\,'\ ,\ \vec{b}\,''=\frac{1}{(\vec{a}\,',\vec{b}\,',\vec{c}\,')}\vec{c}\,'\wedge\vec{a}\,'\ \text{ et }\ \vec{c}\,''=\frac{1}{(\vec{a}\,',\vec{b}\,',\vec{c}\,')}\vec{a}\,'\wedge\vec{c}\,'.$$

Comme $(\vec{a}\,',\vec{b}\,',\vec{c}\,')\neq 0$, le point 1 s'applique aux vecteurs $\vec{a}\,'$, $\vec{b}\,'$ et $\vec{c}\,'$. Il vient :

$$1=\vec{a}\,'.\,\vec{a}=\vec{a}\,'\vec{a}\,''\ ,\ 0=\vec{b}\,'.\,\vec{a}=\vec{b}\,'.\,\vec{a}\,''\ \text{ et }\ 0=\vec{c}\,'.\,\vec{a}=\vec{c}\,'.\,\vec{a}\,''.$$

Le point 3 montre que $\vec{a}\,''=\vec{a}$. Alors, compte-tenu de la symétrie des données, il est prouvé que :

$$\vec{a}\,''=\vec{a}\ ,\ \vec{b}\,''=\vec{b}\ \text{ et }\ \vec{c}\,''=\vec{c}\,.$$

V. Angles orientés et points cocycliques

I

1) On a :

$$(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})=(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\frac{\pi}{3}\ (\text{mod } 2\pi)$$

et comme MA = MI, le triangle MAI est équilatéral.

2) La rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ transforme B en C et I en M on a donc IM = BC. La relation annoncée s'ensuit immédiatement.

II

1) On applique la relation de Chasles, puis on tient compte des alignements de points, il vient :

$$(AP,AQ)=(AP,BQ)+(BQ,AQ)=(MA,MB)-(QA,QB)\ (\text{mod } \pi).$$

Les points A et B étant fixés et les points M et Q restant sur deux cercles donnés, les angles (MA, MB) et (QA, QB) sont tous deux indépendants de M. L'angle (AP, AQ) est donc constant.

Soit r' le rayon $\mathscr{C}'$, soit α tel que :

$$\alpha=(AP,AQ) \text{ et } 0\leq\alpha\leq\pi,$$

la "loi des sinus" montre que $PQ=2r'\sin\alpha$, cette longueur est donc constante. Soit R le rayon du cercle circonscrit au triangle MPQ, soit β tel que :

$$\beta=(MA,MB)=(MP,MQ) \quad\text{et}\quad 0\leq\beta\leq\pi,$$

comme on a $PQ=2R\sin\beta$, R est constant.

2) Le triangle MPH étant rectangle en H on a :

$$(PA,PH)=(PA,MB)+(MB,PH)=(MA,MB)+\frac{\pi}{2}\ (\text{mod } \pi)$$

et comme cet angle est constant, la droite (PH) recoupe le cercle $\mathscr{C}'$, en un point fixe D.

On peut préciser la position de D en remarquant, par exemple, que si M est à l'intersection M_0 de $\mathscr{C}$ et de la tangente à $\mathscr{C}'$ en A. Le point D apparaît alors comme l'intersection de $\mathscr{C}'$, avec la perpendiculaire abaissée de A sur la droite (M_0B).

III

1) Par hypothèse, on a :

$$(DB,AC)=(DB,DC)=\frac{\pi}{2}\ (\text{mod } \pi).$$

La relation de Chasles donne :

$$\begin{aligned}(DB,DC)&=(DB,AC)+(AC,AB)+(AB,DC)\\&=(AC,AB)\\&=-(AB,AC)\ (\text{mod } \pi).\end{aligned}$$

Comme A' et D sont symétriques par rapport à (BC) il vient :

$$(A'B,A'C)=-(DB,DC)\ (\text{mod } \pi),$$

puis :

$$(A'B,AC)=(AB,AC)\ (\text{mod } \pi).$$

Les quatre points A, B, C et A' sont donc sur un même cercle. Comme aucune hypothèse ne particularise le sommet A, on a justifié que A', B' et C' appartiennent au cercle circonscrit.

2) Soit P, Q et R les pieds des hauteurs du triangle ABC. Comme l'homothétie de centre H et rapport $\frac{1}{2}$ transforme A'B'C' en PQR, on démontre la propriété pour ce dernier triangle. Comme B, D, P et R sont cocycliques, on a :

$$(PR,PD)=(BR,BD) \pmod \pi.$$

On échange les rôles de B et C, il vient:

$$(PQ,PD)=(CQ,CD) \pmod \pi .$$

Les points B, C, Q et R étant eux aussi cocycliques, on a :

$$(BR,BQ)=(CR,CQ) \pmod \pi.$$

On rapproche ces trois égalités, en tenant compte des alignements de points, on obtient :

$$(PR,PD)=-(PQ,PD) \pmod \pi,$$

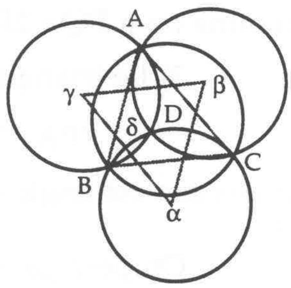
(AD) est donc bien l'une de bissectrices des droites (PR) et (PQ).

Cette propriété est vérifiée par les trois hauteurs, le point D apparaît ainsi comme le centre de l'un des cercles tangents aux trois côtés du triangle PQR.

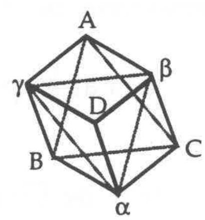
- Si le triangle ABC a ses trois angles aigus, le point H est intérieur aux trois angles du triangle PQR, il est donc le centre de son cercle inscrit.
- Si l'angle en A du triangle donné est obtus, D est le centre du cercle exinscrit dans l'angle P du triangle PQR.

IV

1) a) On considère un triangle ABC. Si le point D est son orthocentre, c'est que les droites (AB) et (AC) sont respectivement perpendidulaires à (DC) et (DB). Le point A est donc l'orthocentre du triangle BCD. Le choix de A n'ayant fait l'objet d'aucune hypothèse particulière, cette assertion est aussi vraie pour B et le triangle CDA, de même que pour C et le triangle DAB.



b) On considère un quadrangle orthocentrique ABCD, soit Γ_D le cercle circonscrit au triangle ABC. On sait que les symétriques de D par rapport aux trois côtés de ABC sont sur le cercle Γ_D. Il s'ensuit que D appartient aux trois cercles symétriques de Γ_D par rapport aux droites (BC), (CA) et (AB). Ainsi, les cercles circonscrits aux triangles (DBC), (DCA) et (DAB) sont les symétriques du cercle circonscrit au triangle ABC par rapport aux trois côtés de celui-ci. Ils ont donc bien tous les trois le même rayon que lui.



2) a) Soit D le point commun aux trois cercles donnés et A, B, C les seconds points d'intersection de ceux-ci pris deux à deux. On convient de noter α, β, γ, δ les centres respectifs des cercles (BCD), (CDA) (DAB) et (ABC). Les trois cercles donnés ayant le même rayon, il est clair que D est le centre du cercle circonscrit au triangle αβγ et que les trois quadrilatères :

$$D\beta A\gamma \ , \ D\gamma B\alpha \text{ et } D\alpha C\beta$$

sont des losanges. Il s'ensuit que les points A, B et C sont les symétriques de D par rapport à (βγ), (γα) et (αβ).

b) De plus, on note, en particulier, que :

- les droites (AD) et (βγ) sont perpendiculaires,
- $\overrightarrow{C\beta}=\overrightarrow{\alpha D}=\overrightarrow{B\gamma}$.

Les droites (BC) et (βγ) sont donc parallèles et (AD) est perpendiculaire à (BC). En d'autres termes, D est sur la hauteur issue de A du triangle ABC. La symétrie des hypothèses permet alors d'affirmer que D est l'orthocentre du triangle ABC.

Pour conclure, on note que $AC\alpha\gamma$, $BA\beta\alpha$ et $CB\gamma\beta$ sont trois parallélogrammes de même centre. Les deux quadrangles ABCD et $\alpha\beta\gamma\delta$ sont donc symétriques par rapport à ce point. La conclusion en découle.

Remarque : on peut avoir la curiosité de préciser ce centre de symétrie. Comme les points A, B, C sont les symétriques de D par rapport à $(\beta\gamma)$, $(\gamma\alpha)$,$(\alpha\beta)$, le triangle ABC est l'image du triangle médial de $\alpha\beta\gamma$ par l'homothétie $H(D,2)$. Celui-ci étant lui même le transformé de $\alpha\beta\gamma$ par l'homothétie $H(G,-\frac{1}{2})$, où G désigne le centre de gravité de $\alpha\beta\gamma$. Le triangle ABC est donc l'image de $\alpha\beta\gamma$ par la transformation $d = H(D,2) \circ H(G,-\frac{1}{2})$ qui est le demi-tour en question. Soit δ l'image de D par d, comme D est le centre du cercle circonscrit à $\alpha\beta\gamma$, δ est le centre du cercle circonscrit à ABC. Comme, D est aussi l'orthocentre de ce dernier, le centre de ce demi-tour est le centre du cercle des neuf points, commun aux huit triangles :

ABC, BCD, CDA, DAB et $\alpha\beta\gamma$, $\beta\gamma\delta$, $\gamma\delta\alpha$, $\delta\alpha\beta$.

V

1) a) Par hypothèse, les droites (PM) et (PC) sont perpendiculaires de même que (QM) et (QC), les points P, Q, C et M sont donc cocycliques. Il en va de même pour les points P, R, B et M. On a ainsi :

$$\begin{aligned}(PQ,PR) &= (PM,PR)-(PM,PQ)\\ &= (BM,BR)-(CM,CQ)\\ &= (MB,AB)-(MC,AC)\\ &= (MB,AB)-(AB,AC)+(AB,MC)\\ &= (MB,MC)-(AB,AC) \pmod{\pi}.\end{aligned}$$

On en déduit l'équivalence entre conditions suivantes :

- P, Q et R sont alignés,
- $(MB,MC) = (AB,AC) \pmod{\pi}$,
- M appartient à un point du cercle Γ.

b) Soit P_1 le point où (MP) recoupe Γ, les points A, C, M et P_1 étant cocycliques ainsi que M, C, P et Q, on a :

$$(P_1M,P_1A) = (CM,CA) = (CM,CQ) = (PM,PQ) \pmod{\pi}.$$

Il s'ensuit que :

$$(PM,P_1A) = (PM,PQ) \pmod{\pi}.$$

On a donc :

$$(AP_1,PQ) = 0 \pmod{\pi}.$$

Autrement dit, (AP_1) et D sont parallèles.

Soit P′ la projection orthogonale de M′ sur (BC) et P_1' le point où (M′P′) recoupe Γ, les droites (AP_1') et D′ sont aussi parallèles, on a donc :

$$(D,D') = (AP_1,AP_1') \pmod{\pi}.$$

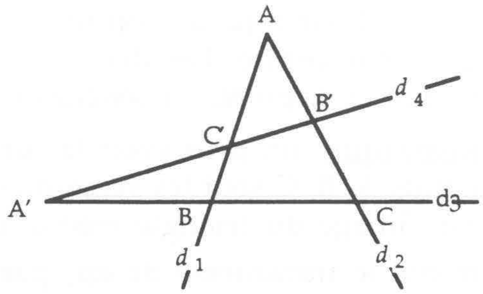
Or, MP_1 et $M'P_1'$ étant deux cordes parallèles de Γ, ces segments ont pour médiatrice commune le diamètre de Γ parallèle à (BC). On note A′ le symétrique de A par rapport à cette droite, on a :

$$(AP_1,AP_1') = -(A'M,A'M') = -(AM,AM') \pmod{\pi}.$$

Il s'ensuit que :

$$(D,D') = -(AM,AM') \pmod{\pi}.$$

En conséquence, étant donnés deux point du cercle circonscrit, leur droites de Simson sont perpendiculaires si, et seulement si, ils sont diamétralement opposés.



2) Les quatre droites données se coupent, deux à deux, en six points définis suivant la figure ci-contre. On considère les cercles circonscrits aux deux triangles ABC et AB'C'. On vérifie que s'ils étaient tangents en A, d_3 et d_4 seraient parallèles, ce qui est exclu. Ils sont donc sécants et se recoupent en un point ω. On note P, Q, R et S les projections de ω sur les droites d_1, d_2, d_3 et d_4. Les points P, Q et R (respectivement P, Q et S) sont alignés car ils définissent la droite de Simson de ω relative au triangle ABC (respectivement AB'C'). Les quatre points P, Q, R et S sont donc alignés. Les projections de ω sur les côtés des triangles A'BC' et A'B'C étant alignées, ce point est aussi sur les cercles circonscrits à ces triangles.

VI

1) On a :

$$(HB',HC')=(HA,HC')-(HA,HB') \pmod \pi.$$

On note H_b et H_c les symétriques de H, l'orthocentre de ABC, par rapport à (AC) et (AB), il vient :

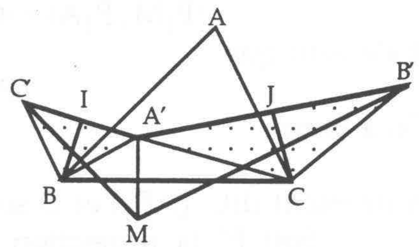
$$(HA,HC')=-(H_cA,H_cM) \text{ et } (HA,HC')=-(H_bA,H_bM)$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}(HB',HC') &= (H_bA,H_bM)-(H_cA,H_cP)\\ &= (MH_c,MH_b)-(AH_c,AH_b) \pmod \pi\end{aligned}$$

On en conclut que H est aligné avec B' et C' si, et seulement si, M appartient au cercle AH_bH_c, c'est à dire le cercle circonscrit à ABC. Dans ces conditions, A', B' et C' étant deux à deux alignés avec l'orthocentre, ils sont alignés.

<u>Parenthèse</u> : si A', B' et C' sont alignés alors M appartient au cercle circonscrit. Cette propriété découle immédiatement de son analogue pour la droite de Simson. Sa démonstration directe est possible mais devient laborieuse si l'on feint d'ignorer la décomposition des rotations en produit de réflexions. On anticipe donc sur un résultat connu – même s'il n'a pas encore été explicité dans ce cadre.



Soit I la projection de B sur (A'C'), comme A' est l'image de C' par la rotation d'angle 2(BA, BC) (mod 2π), on a :

$$(BI,BA')=(BA,BC) \pmod{\pi}.$$

De façon analogue, désignant par J la projection de C sur (A'B'), on a :

$$(CJ,CA')=(CA,CB) \pmod{\pi}.$$

Par ailleurs, on a :

$$(A'B',A'C')=(A'B',CJ)+(CJ,CA')+(A'C,A'B)+(BA',BI)+(BI,A'C') \pmod{\pi}.$$

Comme :

$$(A'B',CJ)=(BI,A'C')=\tfrac{\pi}{2} \pmod \pi,$$

il vient :

$$(A'B',A'C')=(CJ,CA')+(A'C,A'B)+(BA',BI) \pmod \pi.$$

On tient compte des relations obtenues plus haut et de la symétrie de M et A' par rapport à (BC), on obtient :

$$(A'B',A'C')=(CA,CB)+(PB,PC)+(BC,BA) \pmod \pi.$$

Ce qui donne :

$$(A'B',A'C')=(PB,PC)-(AB,AC) \pmod \pi.$$

et justife que A', B' et C' sont alignés si, et seulement si, M est sur le cercle circonscrit.

<u>On ferme la parenthèse</u>

2) a) La réflexion d'axe (BC) transforme la droite de Steiner de M en (MH_a). On a donc toujours :

$$(BC,\mathscr{S}) = -(BC, H_aM).$$

Etant donnée, une droite $\mathscr{S}$ passant par H, comme H et H_a sont symétriques par rapport à (BC), la droite Δ passant par H_a et telle que $(BC,\Delta) = -(BC,\mathscr{S})$ est la symétrique de $\mathscr{S}$ par rapport à (BC). Elle recoupe Γ au point M, dont le symétrique appartient à $\mathscr{S}$ qui, passant par H, est la droite de Steiner de M. Le cas où Δ est la tangente en H_a à Γ ne pose pas de difficulté particulière.

b) Il est alors clair que $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}$ sont perpendiculaires si, et seulement si, (H_aM) et (H_aM') le sont. Or, H_a appartenant à Γ, cette condition est remplie si, et seulement si, M et M′ sont diamétralement opposés sur Γ.

b) Etant donnés deux tels points, on note $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}$ leurs droites de Steiner. Soit D et D′ les parallèles à $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}$ qui passent la première par M et la seconde par M′. Comme alors D et D′ sont perpendiculaires ces droites se coupent en un point K de Γ. Ainsi, notant S et S′ les droites de Simson de M et M′, on a :

$$S = \mathscr{H}(M, \tfrac{1}{2})(\mathscr{S}) \text{ et } \mathscr{S} = \mathscr{H}(M', \tfrac{1}{2})(\mathscr{S})$$

Comme $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}$ se coupent en H, on a aussi :

$$S = \mathscr{H}(H, \tfrac{1}{2})(\mathscr{S}) \text{ et } S' = \mathscr{H}(H, \tfrac{1}{2})(\mathscr{S}).$$

Ce qui montre que le point d'intersection de S et S′ est l'image de K par l'homothétie de centre H et de rapport $\frac{1}{2}$. Ce point appartient donc au cercle des neuf points du triangle ABC.

Réciproquement, considérons un point K de Γ, soit J l'un des points où la médiatrice de (H_aK) coupe Γ, pour tout point M de Γ, on a :

$$(MI, MH_a) = -(MI, MK) \pmod{\pi}.$$

Si, de plus, (IM) est perpendiculaire à (BC) il vient :

$$(BC, MH_a) = -(BC, MK) \pmod{\pi}.$$

Il s'ensuit que (MK) est parallèle à la droite de Steiner de M.

Il est alors facile de conclure que l'ensemble étudié est le cercle des neuf points de ABC.

VIII

Il découle des hypothèses posées que :

$$(AB, AA') = (B'B, B'A') \pmod{\pi}$$
$$(BC, BB') = (C'C, C'B') \pmod{\pi}$$
$$(CD, CC') = (D'D, D'C') \pmod{\pi}$$
$$(DA, DD') = (A'A, A'D') \pmod{\pi}$$

On combine ces relations comme suit ([1]) :

$$(AB, AA') + (A'A, A'D') = (B'B, B'A') + (DA, DD') \pmod{\pi},$$
$$(CD, CC') + (C'C, C'B') = (D'D, D'C') + (BC, BB') \pmod{\pi}$$

On additionne membre à membre, on obtient :

$$(AB, A'D') + (CD, C'B') = (BC, B'A') + (DA, D'C') \pmod{\pi}.$$

On en déduit que :

$$(AB, AD) + (AD, A'D') + (CD, CB) + (CB, C'B') =$$
$$(BC, B'C') + (B'C', B'A') + (DA, D'A') + (D'A', D'C') \pmod{\pi}$$

On simplifie, on inverse deux des angles, on obtient :

$$(AB, AD) - (CB, CD) = (D'A', D'C') - (B'A', B'C') \pmod{\pi}.$$

La conclusion est alors immédiate.

---

1 Il n'y a pas de mystère, on enchaîne les termes suivant la relation de Chasles.

Note

Pour leur plus grande part, les calculs sur les angles orientés se déroulent de façon quasi automatique. Le reste ne sort pas toujours du chapeau de l'illusionniste – comme il le semble parfois. Il n'existe, évidemment, aucune méthode générale, qui dicte tous les choix. Il n'empêche qu'on retrouve constamment une situation type qu'il est bon de reconnaître dans ses variantes diverses. Donnons un exemple.

On considère un triangle ABC et trois points A', B', C' situés sur ses côtés. On a la proprité suivante :

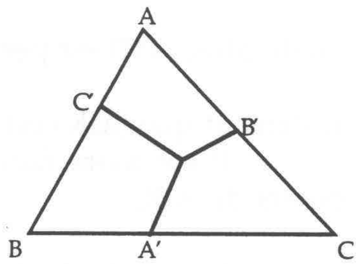
(#) les cercles circonscrits aux triangles

AB'C', A'BC' et A'B'C

se recoupent en un point unique.

<u>Démonstration</u> : soit P le point, commun aux cercles (A'BC') et (A'B'C), on vérifie que :

$$\begin{aligned}(PB', PC') &= (PB', AC) + (AC, AB) + (AB, PC')\\ &= (B'P, B'C) + (AC, AB) + (C'B, C'P)\\ &= (A'P, A'C) + (AB', AC') + (A'B, A'P)\\ &= (AB', AC') \pmod{\pi}\end{aligned}$$



Le calcul effectué pour la droite de Simson vaut ici. Il donne :

(##) $$(A'B', A'C') = (AB, AC) - (PB, PC) \pmod{\pi}.$$

On en déduit que, si P est le point commun aux cercles (AB'C'), (A'BC') et (A'B'C) :

(###) A', B' et C' sont alignés $\Leftrightarrow$ P appartient au cercle (ABC).

On peut ainsi généraliser la propriété de la droite de Simson aux points A', B' et C', définis comme suit. Etant donné un nombre α, non nul modulo π :

$$\alpha = (BC, MA') = (CA, MB') = (AB, MC') \pmod{\pi}.$$

Si les points A', B' et C' sont donnés, alignés, on retrouve la propriété des cercles circonscrits aux quatre triangles définis par un quadrilatère complet de passer par un même point (cf. exercice V-2 et cours §33).

On retrouvera couramment cette situation dans l'étude des similitudes (cf. exercices V-19 à 23). Par exemple, si les angles du triangle A'B'C' restent constants, il découle de la relation ## que P reste invariant. Ce point est alors le centre commun des similitudes directes qui transforment ces triangles les uns en les autres.

<u>Suggestion</u> : construire les points P, dont le triangle podaire, par rapport à ABC ([1]), soit équilatéral – ou plus généralement, semblable à un triangle donné.

Enfin, on ne peut manquer de signaler que tout ce qui vient d'être dit est contenu dans le lemme de Miquel. En effet, cette propriété reste vraie si l'un des points donnés disparaît, les cercles correspondants étant remplacés par deux droites ([2]). Ainsi considérant les familles de points :

cocycliques : AA'BB', BB'CC' ; alignés : CC'D(∞) , D(∞)AA',

Le lemme de Miquel s'énonce alors, schématiquement :

A, B, C et D sont cocycliques ou alignés ⇔ A', B' et C' sont alignés.

Cette propriété, appliquée à :

B'CPA' , PA'C'B , C'BA(∞) et A(∞)B'C',

devient :

B', P, C' et A sont cocycliques ⇔ A', B et C sont alignés,

on reconnait #.

On l'applique à :

BC'PA' , PA'CB' , CB'A(∞) et A(∞)BC',

elle donne :

B, P, C, A sont cocycliques ⇔ A', B', C' sont alignés,

on reconnait ###.

<u>Moralité</u> : un petit effort de synthèse réduit toutes ces considérations, apparament complexes, souvent confuses, à quelques idées simples.

---

1 Ses sommets sont les pieds des paerpendiculaires abaissées, de P, sur les côté de ABC.

2 On admet que le point en question est alors rejeté à l'infini. Pour justifier dans les formes ce point de vue, on se place dans le plan complété par un point à l'infini – unique – dont le modèle est donné par la sphère de Riemann – ce qui est une toute autre histoire.

VI. Isométries planes

I

On désigne par Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 les axes des symétries considérées.

1) Soit O le point de concours de Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 , on note Δ la droite passant par O et telle que :

$$(\Delta , \Delta_3) = \frac{1}{2}(\Delta_1 , \Delta_2) \ (\mathrm{mod}\ \pi).$$

On a :

$$s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1} = s_{\Delta_3} \circ s_{\Delta}$$

et par suite :

$$s_{\Delta_3} \circ s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1} = s_{\Delta_3} \circ s_{\Delta_3} \circ s_{\Delta} = s_{\Delta}.$$

La construction demandée coule de source.

2) Si Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 sont parallèles, on applique le même principe.

3) Un côté du triangle est invariant par le composé des symétries par rapport aux trois bissectrices prises dans un ordre bien choisi. Ce n'est pas l'axe de cette symétrie, c'est donc une droite perpendiculaire à celui-ci. Il y a donc une infinité de solutions.

Remarque : on pourrait imposer une condition supplémentaire, par exemple donner un sommet.

II

Soit r la rotation considérée, la transformation :

$$f = t_{\vec{v}} \circ r \circ t_{-\vec{v}}$$

est un déplacement d'angle α, c'est donc une rotation. Soit O le centre de r et O′ le point tel que $\overrightarrow{OO'} = \vec{v}$, il est immédiat que O′ est invariant par f. Cette transformationest donc la rotation de centre O′ et d'angle α.

III

Remarque : on pourrait résoudre cet exercice en utilisant des décompositions des demi-tours en produits de symétries dont les axes seront judicieusement choisis. Il est plus rapide de procéder comme suit.

Le produit de trois demi-tours est un déplacement tel que pour tous points A et B, on ait:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B''}) = \pi \ (\mathrm{mod}\ 2\pi).$$

C'est donc un demi-tour, son centre est le milieu du segment qui joint un point à son image. On choisit par exemple le centre du premier. On vérifie que le point obtenu est le quatrième sommet du parallélogramme construit sur les centres des trois demi-tours donnés.

IV

L'exercice précédent a montré que ce produit est involutif, on a donc :

$$\begin{aligned} d_1 \circ d_2 \circ d_3 &= (d_1 \circ d_2 \circ d_3)^{-1} \\ &= d_3^{-1} \circ d_2^{-1} \circ d_1^{-1} \\ &= d_3 \circ d_2 \circ d_1. \end{aligned}$$

V

Le produit $r_3 \circ r_2 \circ r_1$ est un déplacement d'angle :

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = \pi \pmod{2\pi}.$$

Il s'agit donc d'un demi-tour soit O son centre. Pour déterminer ce point, on remarque d'adord que la droite (AC) est invariante par cette transformation, elle contient donc ce point. Puis on considère les bissectrices intérieures D_1 , D_2 et D_3 des angles en A, B et C du triangle ABC. On a :

$$r_1 = s_{AB} \circ s_{D_1} \text{ et } r_2 = s_{D_2} \circ s_{AB}$$

et par suite :

$$r_2 \circ r_1 = s_{D_1} \circ s_{D_1}.$$

On convient de poser :

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \alpha \pmod{2\pi} \ , \ (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \beta \pmod{2\pi} \ , \ (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = \gamma \pmod{2\pi},$$

Le produit $r_2 \circ r_1$ est donc la rotation d'angle $\alpha + \beta$ autour du centre I du cercle inscrit dans le triangle ABC. Soit Δ la droite passant par I et telle que :

$$(\Delta, D_3) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \pmod{\pi}$$

on a :

$$r_2 \circ r_1 = s_{D3} \circ s_D.$$

On a aussi

$$r_3 = s_{AC} \circ s_{D3}$$

et par suite :

$$r_3 \circ r_2 \circ r_1 = s_{AC} \circ s_D.$$

On a enfin :

$$(\Delta, AC) = (\Delta, D_3) + (D_3, AC) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}\gamma \pmod{\pi},$$

$$(\Delta, AC) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.$$

Les droites Δ et (AC) sont perpendiculaires et comme Δ passe par I, leur intersection est le point de contact du cercle inscrit avec le côté AC. Ce point est le centre du demi-tour considéré.

Variante : on peut aussi rechercher le milieu du segment dont les extrémités sont un point abitraire et son image par le demi-tour en question. On considère le point $P = r_1^{-1}(B)$, on a :

$$r_3 \circ r_2 \circ r_1(P) = r_3 \circ r_2 \circ r_1 \circ r_1^{-1}(B) = r_3(B).$$

On oriente la droite (AC) de A vers C et on choisit pour origine A et l'on donne à a, b, c et p leur sens usuel. Les points

$$P \text{ et } r_3 \circ r_2 \circ r_1(P)$$

ont pour abscisses respectives c et $b - a$, leur milieu a donc pour abscisse :

$$\frac{1}{2}(b + c - a) = p - a .$$

On reconnaît alors le point de contact du cercle inscrit avec le côté AC.

VI

Les symétries-translations considérées ont pour formes réduites :

$$f = t \circ s_{\Delta} \text{ et } f' = t' \circ s_{\Delta'},$$

où t et t' sont des translations dont les directions respectives sont celles des droites Δ' et Δ. Les axes Δ et Δ' étant perpendiculaires, il existe deux droites D et D' respectivement parallèles à Δ' et Δ telles que :

$$t = s_{\Delta'} \circ s_{D} \text{ et } t' = s_{D'} \circ s_{\Delta}.$$

On aura donc :

$$f' \circ f = s_{D'} \circ s_{\Delta} \circ s_{\Delta'} \circ s_{\Delta'} \circ s_{D} \circ s_{\Delta} = s_{D'} \circ s_{\Delta} \circ s_{D} \circ s_{\Delta}.$$

Les symétries s_{Δ} et s_D sont permutables car leurs axes sont perpendiculaires, on a donc :

$$f' \circ f = s_{D'} \circ s_{D} \circ s_{\Delta} \circ s_{\Delta} = s_{D} \circ s_{D}.$$

Il s'agit d'un demi-tour dont le centre O se déduit du point d'intersection des axes Δ et Δ' par la translation de vecteur :

$$-\frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{v}')$$

où $\vec{v}$ et $\vec{v}\,'$ désignent les vecteurs de t et t'.

VII

L'application $f = s_1 \circ s_2 \circ s_3$ est un antidéplacement, c'est donc soit une symétrie et alors $f^2 = \mathrm{Id}$, soit une symétrie-translation et alors f^2 est une translation.

VIII

1) Soit A_1 le symétrique de A par rapport à (BC) et C_1 le symétrique de C par rapport à (AB). On pose $g = s_c \circ s_b \circ s_a$, g est un antidéplacement tel que :

$$g(A_1) = A \text{ et } g(C) = C_1.$$

Son axe passe donc par les milieux des segments AA_1 et CC_1. C'est donc la droite (A'C') qui joint les pieds des hauteurs issues des sommets A et C.

Soit $\vec{v}$ le vecteur tel que :

$$g = s_{(A'C')} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ s_{(A'C')},$$

$\vec{v}$ est la projection de $\overrightarrow{A_1A}$ sur la direction de (B'C'). On a donc $\vec{v} = 2\overrightarrow{A'K}$ où K est la projection de A sur (A'C'). On démontre que :

$$\|\vec{v}\| = 2c \sin A \sin B = \frac{abc}{2R^2}.$$

où R désigne le rayon du cercle circonscrit - on utilise le fait que B, A' C' et l'orthocentre sont des points cocycliques.

2) Si les axes sont concourants, on a un antidéplacement qui a un point fixe, c'est donc une symétrie. Dans le cas contraire, leurs axes sont les côtés d'un triangle et la relation ci-dessus prouve que leur produit est une symétrie-translation de vecteur non nul.

3) Les symétries considérées transforment successivement la droite (A'C') en (A'B'), (B'C') puis en elle même. Ceci prouve que les hauteurs d'un triangle sont des bissectrices du triangle dont les sommets sont les pieds des hauteurs de ABC – ou *triangle orthique*[1].

1 Nous le savions déjà par l'exercice V-3, mais ici la méthode est d'une élégance incontestable.

4) Soit $\alpha\beta\gamma$ une trajectoire de billard à trois côtés pour le triangle ABC, les symétries considérées plus haut transforment successivement la droite $(\gamma\alpha)$ en $(\alpha\beta)$, $(\beta\gamma)$, puis en elle-même. Or la seule droite globalement invarante par g est son axe (C'A'). Il y a donc une seule solution possible : le triangle orthique A'B'C' – encore appelé *triangle de lumière*. C' est effectivement une trajectoire de billard si le triangle donné a ses trois angles aigus.

Le problème des trajectoires à six côtés est réglé dès qu'on pense qu'une symétrie-translation, composée avec elle-même, donne une translation de vecteur non nul. En conséquence elle laisse invariantes les droites dirigées par son vecteur, et uniquement celles-ci. Il y a donc une infinité de solutions.

Enfin, il ne peut exister d'autres trajectoires fermées car les puissances successives d'une symétrie-translation sont

- soit des translations ayant toutes la même direction,
- soit des symétries-translations ayant toutes le même axe [1].

IX

Les points P et P' étant diamétralement opposés, les droites (AP) et (AP') sont perpendiculaires. Comme A est équidistant des deux droites données, il existe une rotation de centre A qui transforme D en D'. Elle est unique, son angle est $\pm\frac{\pi}{2}$, suivant le cas de figure. Comme elle transforme aussi (AP) en (AP'), P a pour image P'. Ceci s'applique à Q et Q'. On a donc bien $PQ = P'Q'$.

X

1) La réponse est évidemment la médiatrice de AA'.

2) Si H est le milieu de AA', on a :

$$(AA',AO) = (AA',HO) + (HO,AO) \pmod{\pi}$$

$$(AA',OA) = \frac{1}{2}(\pi - \alpha) \pmod{\pi}.$$

Le point O est donc à l'intersection de la médiatrice de AA' avec la droite Δ, passant par A et telle que $(AA',\Delta) = \frac{1}{2}(\pi - \alpha) \pmod{\pi}$, où α peut prendre toute valeur non nulle modulo 2π.

3) Soit M' l'image de M par une rotation r, quelconque, on a $M'A' = MA$. Le point M est donc sur le cercle de centre A' et de rayon AM. Réciproquement, pour tout point M' de ce cercle le déplacement (unique) qui transforme A en A' et M en M' est une rotation si :

$$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) \neq 0 \pmod{2\pi}.$$

Dans le cas contraire, c'est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$. Le lieu cherché est donc le cercle de centre A' de rayon AM privé du point P tel que $\overrightarrow{A'P} = \overrightarrow{AM}$.

---

[1] Pour une généralisation, voir la note située à la fin.

XI

Si $\alpha = 0 \pmod{2\pi}$, la question est sans objet. On suppose donc que $0 < \alpha < 2\pi$.

1) Soit M un point quelconque, on vérifie que :

$$(OM, MM') = \frac{1}{2}(\pi - \alpha) \pmod{\pi},$$

cet angle est donc indépendant de M. On en déduit que, si M_0 est un point arbitraire, on a toujours :

$$(M_0M_0', MM') = (OM_0, OM) \pmod{\pi}.$$

Ainsi, MM' a même direction que M_0M_0' si, et seulement si M est aligné avec O et M_0. Soit δ, une droite ayant la direction donnée, le lieu demandé est la droite D telle que $(D, \delta) = \frac{1}{2}(\pi + \alpha) \pmod{\pi}$.

2) Soit l la longueur donnée, on a toujours :

$$l = MM' = 2OM \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Le lieu demandé est le cercle de centre O et de rayon $r = \frac{l}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$.

3) Soit P le point donné, on note H le milieu de MM'. On a :

$$\begin{aligned}(MP, MM') &= (MO, MM') - (OM, MP) \pmod{\pi}\\ &= (MO, OH) + (OH, MM') - (OM, MP) \pmod{\pi}\\ &= \frac{1}{2}(\pi - \alpha) - (OM, MP) \pmod{\pi}\end{aligned}$$

Les points M et M' sont donc alignés avec P si, et seulement si :

$$(OM, MP) = \frac{1}{2}(\pi - \alpha) \pmod{\pi}$$

Le lieu cherché est, en général, un cercle passant par O et P. Exceptionnellement, c'est la droite (OP), si $\alpha = \pi$.

XII

1) Supposons le problème résolu. Le point M' étant l'image de M par la translation de vecteur $\vec{v}$, il est commun à D' et à la droite $\Delta = t_{\vec{v}}(D)$. Réciproquement, comme D et D' ne sont pas parallèles, ce point existe effectivement, il est unique. Son image par la translation de vecteur $-\vec{v}$ donne la solution. Le problème admet une solution, elle est unique.

2) Les points M et M' devant appartenir aux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, on fait intervenir le cercle Γ transformé de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $\vec{v}$. Suivant que $\mathscr{C}'$ et Γ ont zéro, un, deux points communs ou qu'ils se confondent, le problème admet zéro, une, deux ou une infinité de solutions.

XIII

1) Construction d'un cercle Γ tangent à deux cercles concentriques donnés $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ et passant par un point donné P.

Analyse : Il y a deux types de contacts possibles suivant que le plus petit des deux cercles donnés est intérieur ou extérieur à Γ. Dans les deux cas on note que Γ se déduit d'un cercle arbitraire – tangent à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ – par une rotation de centre O. Le point P est l'image par cette rotation de l'un des points d'intersection de Γ' avec le cercle de centre O passant par P.

La construction s'en déduit sans difficulté. On obtient quatre solutions quand P est intérieur à la couronne limitée par $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, il n'y a plus que deux solutions si P est sur $\mathscr{C}$ ou $\mathscr{C}'$ et aucune solution si P est situé à l'extérieur de la couronne en question.

2) Construction d'un triangle équilatéral ABC ayant ses sommets situés sur trois droites parallèles données D_A, D_B, D_C.

Analyse : on considère une solution. Il est clair que C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ ou $-\frac{\pi}{3}$ – suivant l'orientation donnée au triangle. Le point C est donc l'intersection de D_C et de la droite image de D_B par la rotation retenue. Construction et justification : on choisit A arbitrairement sur D_A, les images de D_B par les rotations de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$ coupent D_C en deux points C_1 et C_2, dont les images inverses, B_1 et B_2, déterminent, effectivement, deux solutions AB_1C_1 et AB_2C_2, symétriques par rapport à la perpendiculaire en A aux droites données.

Ce qui vaut, mutatis mutandi, pour un triangle rectangle isocèle.

3) Dans le cas où les droites D_A, D_B, D_C sont les côtés d'un triangle, l'analyse et la construction reprennent point par point ce qui précède. Cependant, il s'ajoute une discussion, esquissons la brièvement. Soit A un point arbitraire de D_A. La rotation de centre A et d'angle $\alpha = \pm\frac{\pi}{3}$ transforme D_B en D'_B. On a donc :

$$(D_C, D'_B) = (D_C, D_B) + (D_B, D'_B) = (D_C, D_B) + \alpha \pmod{\pi}.$$

Si l'on a :

$$0 = (D_C, D'_B.) = (D_C, D_B) + \alpha \pmod{\pi},$$

c'est-à-dire si :

$$(D_B, D_C) = \alpha = \pm\frac{\pi}{3} \pmod{\pi},$$

les droites $D'_B.$ et D_C sont, en général, parallèles et l'on perd une famille de solutions. Exceptionnellement ces droites sont confondues et l'on aura au contraire une infinité de solutions de sommet A – à préciser.

Le cas du triangle rectangle isocèle se règle de façon identique.

XIV

On peut s'inspirer des exercices précédents et utiliser une rotation d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$ dont le centre est un sommet du carré qui, s'il existe une solution, peut être arbitrairement choisi. La construction s'opère aussi bien en faisant tourner d'un quart de tour le grand ou le petit cercle autour d'un point arbitraire de l'autre.

On note R le rayon du grand cercle et r celui du petit. On a deux points d'intersection :

- dans le premier cas, si $R - r < R\sqrt{2} < R + r$,
- dans le second, si $R - r < r\sqrt{2} < R + r$,.

A chaque ligne l'une des inégalités est banale l'autre équivaut à :

$$R < r(1 + \sqrt{2}).$$

En conclusion on a :

- deux familles de solutions si $R < r(1 + \sqrt{2})$.,
- une famille si $R = r(1 + \sqrt{2})$.,
- aucune solution si $R > r(1 + \sqrt{2})$.

XV

1) Le centre d'une rotation qui transforme D en D' est équidistant de ces deux droites. Deux cas se présentent :

- ou bien D et D' sont parallèles et alors, tout point de leur parallèle équidistante est, effectivement, le centre d'un demi-tour qui les échange.
- ou bien D et D' sont sécantes et alors, tout point situé sur l'une de leurs bissectrices est aussi le centre d'une rotation qui transforme D en D'. Celle-ci est unique.

2) Les centres des rotations considérées sont aussi sur la médiatrice de AA'.

a) Si D et D' sont parallèles, on a un seul point qui est le milieu de AA'.

Remarque : dans ce cas, l'autre déplacement qui transforme D en D' et A en A' est la tranlation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

b) Si D et D' se coupent en O, la construction est en général banale et livre deux points ω et ω'. On vérifie facilement qu'ils répondent effectivement à la demande.

Il y a exception lorsque A et A' sont équidistants du point d'intersection de D et D'. Dans ce cas la médiatrice de AA' coïncide avec l'une des bissectrices qu'on note Δ. Comme une rotation de centre ω qui transforme D en D', se décompose en un produit de deux symétries $s_\delta \circ s_\Delta$, la droite D' ainsi que le point A' sont invariants par la symétrie d'axe δ. On a donc le choix entre :

- δ est la droite D' et le centre de rotation est le point d'intersection des deux droites données,
- δ est la perpendiculaire en A' à D' et le centre de rotation est le point d'intersection de cette droite avec Δ.

Il y a donc toujours deux solutions si les droites données sont sécantes.

3) Par hypothèse, on a :

$$(\omega A, \omega A') = (\omega' A, \omega' A') = (D, D') \pmod{\pi}.$$

Le quadrilatère $A\omega A'\omega'$ est donc inscriptible. De plus, comme $\omega A = \omega A'$ et $\omega' A = \omega' A'$, il est symétrique par rapport à $(\omega\omega')$. Ses angles en A et A' sont donc droits. Ainsi, on a toujours :

$$(A\omega, A\omega') = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$$

et, suivant le choix qu'on a fait entre les deux points obtenus :

$$\frac{A\omega}{A\omega'} = \tan\frac{\theta}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{A\omega'}{A\omega} = \tan\frac{\theta}{2},$$

où θ désigne la mesure de l'angle aigu formé par les deux droites.

XVI

1) Suivant les données, l'axe de s_3 peut être choisi comme étant :

- la droite qui joint les centres des deux rotations,
- la droite passant par le centre de la rotation et perpendiculaire à la direction de la translation,
- dans le cas où d_1 et d_2 sont des translations, ce choix n'est possible que si ces translations ont la même direction.

Dans tous les cas où le choix est possible, on a :

$$d_2 \circ d_1 = s_2 \circ s_3 \circ s_3 \circ s_1 = s_2 \circ s_1 = d_3.$$

2) Dire que F_1, F_2 et F_3 sont directement égales, c'est supposer l'existence de deux déplacements d_1 et d_2 tels que :

$$d_1(F_1) = F_3 = d_2(F_2).$$

Le point 1 montre que, si l'on n'est pas dans le cas d'exception signalé, il existe trois réflexions s_1, s_2 et s_3 telles que :

$$d_1 = s_3 \circ s_1 \quad , \quad d_2^{-1} = s_2 \circ s_3.$$

On pose :

$$s_1(F_1) = F,$$

il vient :

$$s_3(F_3) = s_3 \circ s_3 \circ s_1(F_1) = s_1(F_1) = F.$$

On a aussi

$$s_2(F_2) = s_2 \circ d_2^{-1}(F_3) = s_2 \circ s_2 \circ s_3(F_3) = s_3(F_3) = F.$$

On a donc bien :

$$F_1 = s_1(F) \quad , \quad F_2 = s_2(F) \quad , \quad F_3 = s_3(F).$$

XVII

1) La rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ autour du centre du carré ACFG transforme A en G et C en A. De plus, on a d'une part :

$$AB = AE = GA'$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) &= (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}) \pmod{2\pi} \\ &= (\overrightarrow{GF}, \overrightarrow{GA'}) + (\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GF}) \pmod{2\pi} \\ &= (\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GA'}) \pmod{2\pi}.\end{aligned}$$

L'image de B par cette rotation est donc le point A'. Ainsi (AA') étant l'image de (BC), ces deux droites sont perpendiculaires.

2) La rotation considérée transformant aussi F en C, (BF) et (A'C) sont perpendiculaires. Une réflexion arbitraire, inversant l'orientation, échange les rôles de B et C. On en déduit que les droites (CD) et (A'B). On a ainsi prouvé qu'elles sont aussi perpendiculaires.

Les droites (AA'), (BF) et (CD) sont les trois hauteurs du triangle A'BC, elles sont donc concourantes.

XVIII

1) Soit F le second point commun aux cercles circonscrits aux triangles ACB' et AC'B, on a :

$$(FB, FA) = (C'B, C'A) = \frac{\pi}{3} \pmod{\pi} \text{ et } (FA, FC) = (B'A, B'C) = \frac{\pi}{3} \pmod{\pi}.$$

Il s'ensuit que :

$$(FB, FC) = \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} = (A'B, A'C) \pmod{\pi}.$$

Le point F appartient donc aussi au cercle circonscrit au triangle BA'C ([1]).

2) La rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ transforme A en B' et A' en B. On a donc :

$$AA' = BB' \text{ et } (AA', BB') = -\frac{\pi}{3} \pmod{\pi}$$

3) Soit P le point où la droite (AA') recoupe le cercle circonscrit au triangle AC'B, ona :

$$(AA', BP) = (PA, PB) = -\frac{\pi}{3} \pmod{\pi}.$$

[1] C'est le *point de Fermat* du triangle ABC.

Il s'ensuit que :

$$(AA', BP) = (AA', BB') \pmod{\pi}.$$

Le point P est donc aussi sur la droite (BB'). Ainsi, on a :

$$(PA', PB) = -\frac{\pi}{2} \pmod{\pi},$$

P est situé sur le cercle circonscrit à BA'C, il s'agit donc de F.

Il est alors prouvé que la droite (AA') passe par F. Compte-tenu de la symétrie des données, cette propriété est vérifiée par les droites (BB') et (CC').

4) Soit F' l'image de F par la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{3}$, F' est situé sur la droite (BB') et tel que FA = F'B'. Le triangle CFF' est équilatéral donc FC = F'F et l'on a :

$$FA + FB + FC = F'B' + FB + F'F$$

Si le point F est situé à l'intérieur du triangle ABC, F' est situé sur le segment FB' et la deuxième somme est égale à BB'. Il s'ensuit que :

$$FA + FB + FC = AA' = BB' = CC'.$$

5) On considère un point M intérieur au triangle ABC, soit M' son image par la rotation considérée. Les arguments déjà utilisés montrent que :

$$MA = M'B' \text{ et } MC = MM'.$$

On a donc

$$MA + MB + MC = M'B' + MB + MM' = BM + MM' + M'B'.$$

Comme les extrémités de ce chemin sont fixées par les données, sa longueur est minimum si M et M' sont sur (BB'). Ceci suppose que M soit sur l'image inverse de cette droite par la rotation, à savoir (AA'). Dans ces conditions, ce point est en F.

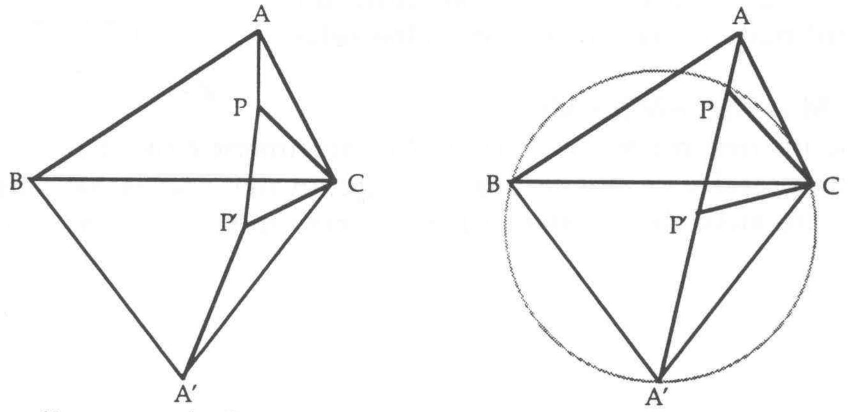
<u>Remarque</u> : ce problème est suffisamment intéressant pour justifer une digression. En effet, il est possible d'introduire la démarche par la dernière question. On procède comme suit.

On traite le cas où le triangle donné a ses trois angles aigus. On considère un point P, de son intérieur. Soit A' et P' les images de B et P par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On note que A' est le troisième sommet du triangle équilatéral de côté BC construit, à l'extérieur du triangle ABC. On a :

$$PB = P'A' \text{ et } PC = PP',$$

de sorte que :

$$AP + PP' + P'A' = PA + PB + PC.$$



La somme des distances de P aux trois points A, B et C est alors la longueur d'un chemin joignant deux points indépendants de P. Celle-ci est minimun si P et P' sont alignés avec A et A'.

Une conditon nécessaire pour que P réalise le minimum espéré est donc que ce point soit sur la droite (AA'). De plus, les points A, P et P' étant alignés. On doit donc avoir :

$$C\hat{P}B = C\hat{P}'A' = \pi - C\hat{P}'P = \frac{2\pi}{3}.$$

Le point P est donc le second point commun au cercle circonscrit au triangle équilatéral A'BC et à la droite (AA').

Réciproquement, comme le triangle ABC a ses angles aigus, ce point existe et il est bien tel que A, P, P' et A' soient alignés. Ce qui prouve l'existence et l'unicité du point P tel $PA + PB + PC$ soit minimum.

La démonstration qui précède reste inchangée si le triangle n'a pas d'angle supérieur à 120°. Dans le cas contraire – par exemple si $\hat{A} > 120°$ – l'arc du cercle BCA', lieu des points M tels que $B\hat{M}C = 120°$, est extérieur au triangle ABC. Dans ces conditions, les points construits sont alignés, certes, mais ils ne se présentent plus dans le bon ordre. En fait, dans ce dernier cas, le minimum est atteint en A.

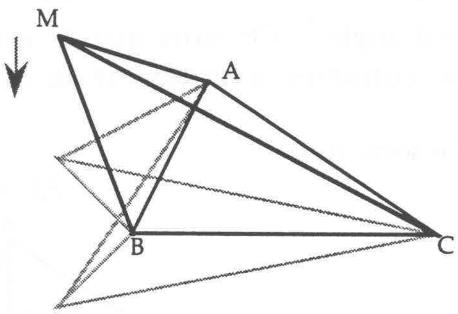
L'existence du point de Fermat donne une solution peu banale aux premières questions de l'exercice, tel qu'il était posé. On définit les points B' et C' de façon analogue à A'. Comme les sommets jouent des rôles symétriques, l'existence et l'unicité du point P permettent d'affirmer que **les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes** et que

$$\mathbf{AA' = BB' = CC'},$$

sans autre forme de procès.

Commentaire : l'analyse du problème d'un point de vue topologique permet d'affirmer que, dans tous les cas, le minimum existe et qu'il est nécessairement atteint en un point du fermé limité par les côtés. En effet, la somme $MA + MB + MC$ n'est pas minimale si on est à l'extérieur de la bande limitée par (BC) et sa parallèle passant par A.

Pour s'en convaincre, il suffit dans un cas de déplacer M vers la droite (BC), dans l'autre, de remplacer M par son symétrique par rapport à (BC). Le point cherché appartient à l'intersection des trois bandes analogues, c'est-à-dire lintérieur du triangle. Cet ensemble est un fermé borné, c'est donc un compact. La continuité de la distance entraîne celle de la fontion :



$$M \mapsto MA + MB + MC$$

qui admet donc un minimum sur celui-ci. Cet argument évite d'avoir à se torturer l'esprit pour comprendre ce qui se passe lorsqu'un des angles devient supérieur à 120°. Il nous assure aussi de l'existence d'un maximum sur ce même domaine ...

XIX

Un sommet d'un polygone est invariant par le produit des demi-tours ayant pour centres les milieux des côtés, pris dans l'ordre convenable. Or, la composition de n demi-tours donne un déplacement dont l'angle est $n\pi \pmod{2\pi}$. Il s'agit donc donc :

- un demi-tour si n est impair
- une translation si n est pair.

Soit d le produit des demi-tours ayant pour centres les n points donnés.

1) Si n est impair, d est un demi-tour, son centre est l'unique point qui convient.

2) Si n est pair, $n = 2p$, le problème n'aura de solution que si d est l'application identique et, dans ce cas il y a une infinité. Précision ce point.

Soit P_0 un point quelconque, on note :

$$P_1, P_2, \dots, P_{2p}$$

ses transformés successifs par les demi-tours ayant pour centres $M_1, M_2, \dots, M_{2p}$. On choisit une origine arbitraire O, il vient :

$$\left|\begin{array}{l} 2\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{OP_1} \\ 2\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} \\ 2\overrightarrow{OM_3} = \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3} \\ \dots\dots\dots\dots \\ 2\overrightarrow{OM_{2p}} = \overrightarrow{OP_{2p-1}} + \overrightarrow{OP_{2p}} \end{array}\right| \begin{array}{c} + \\ - \\ + \\ \dots \\ - \end{array}$$

On combine ces relations en alternant les signes, on obtient l'égalité suivante :

$$2(\overrightarrow{OM_1} + \dots + \overrightarrow{OM_{2p-1}}) - 2(\overrightarrow{OM_2} + \dots + \overrightarrow{OM_{2p}}) = -\overrightarrow{P_0P_{2p}}.$$

En conséquence, les points P_0 et P_{2p} coïncident si, et seulement si :

$$\overrightarrow{OM_1} + \dots + \overrightarrow{OM_{2p-1}} = \overrightarrow{OM_2} + \dots + \overrightarrow{OM_{2p}}.$$

Il apparaît ainsi que les points $M_1, M_2, \dots, M_{2p}$ sont les milieux des côté d'un polygone si, et seulement si, le centre de gravité des points de rang impair coïncide avec le centre de gravité des points de rang pair. Dans ce cas, un sommet peut être arbitrairement choisi.

XX

Ce résultat tombe immédiatemment quand on a vu que f et $f \circ s_D$ ont même effet sur D. On peut donc supposer que f est une isométrie indirecte, c'est-à-dire une symétrie ou une symétrie-translation. Notant son axe Δ, il est clair que que le lieu cherché est, généralement, Δ et qu'il se réduit à un point si $f \circ s_D$ est une réflexion et Δ est perpendiculaire à D

Le point 2 de l'énoncé est une reformulation du point 1 ([1]).

1 Présenté hors de ce contexte, il constituerait un exercice dont l'apparente banalité serait trompeuse.

XXI

On considère un triangle équilatéral ABC de centre O. Il est facile de vérifier qu'il est invariant par les isométries suivantes :

- l'application identique,
- les rotations $r_1 = R(O, \frac{2\pi}{3})$ et $r_2 = R(O, \frac{4\pi}{3}) = r_1^{-1}$,
- les symétries s_A, s_B et s_C d'axes (OA), (OB) et (OC).

Comme elles induisent les six permutations possibles des trois sommets, il ne peut pas y en avoir d'autres. Ces six isométries forment un groupe et se composent suivant la table ci-après.

	Id	r_1	r_2	s_A	s_B	s_C
Id	Id	r_1	r_2	s_A	s_B	s_C
r_1	r_1	r_2	Id	s_B	s_C	s_A
r_2	r_2	Id	r_1	s_C	s_A	s_B
s_A	s_A	s_C	s_B	Id	r_2	r_1
s_B	s_B	s_A	s_C	r_1	Id	r_2
s_C	s_C	s_B	s_A	r_2	r_1	Id

En outre, on pourra établir que ces transformations peuvent s'obtenir par composition des rotations par une symétrie qu'on peut choisir arbitrairement.

XXII

On note O le centre du triangle ABC et O' celui de MNP. Chacune des isométries considérées transforme le point O en O'.

- Si toutes les trois sont des rotations, leurs centres sont alignés sur la médiatrice de OO'.
- Si l'une est une translation, les deux autres sont des rotations dont les centres sont symétriques par rapport à la droite (OO').

Note sur les trajectoires de billard ou polygones de lumière

Les considérations de l'exercice 8 se généralisent à des polygones ayant un nombre quelconque de côtés. Ainsi, étant donné un polygone à n côtés $A_0A_1 \dots A_{n-1}$ ([1]), on note f l'isométrie obtenue par la composition des symétries d'axes $(A_{i-1}A_i)$ pour $i=1,\dots,n$.

- Si n est impair, f est un antidéplacement, il laisse donc une seule droite globalement invariante. Le problème des polygones de lumière admet alors une solution, et une seule.
- Si n est pair, $n=2p$, f est un déplacement d'angle :

$$\alpha = 2\sum_{k=1}^{p}(A_{2k-2}A_{2k-1}, A_{2k-1}A_{2k}) \text{ (mod. } 2\pi)$$

  • Si $\alpha \neq 0$ (mod π) il n'existe pas de droite globalement invariante par f. Il n'existe donc pas de polygone de lumière.
  • Si $\alpha = 0$ (mod π), f est soit une translation, soit un demi-tour. Toute droite gobalement invariante par f définit alors un polygone de lumière.

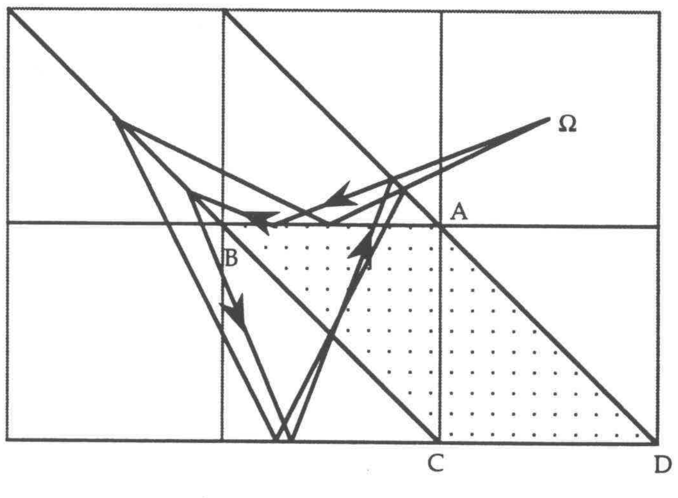
Afin de fixer les idées, regardons de plus près ce qui se passe pour $n=4$. On considère un quadrilatère ABCD, f est le produit des symétries d'axes (AB), (BC), (CD) et (DA). On a :

$$\alpha = 2[(AB, BC) + (CD, DA)] \text{ (mod. } 2\pi),$$

il n'existe de solution que dans les cas où $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$ (mod. 2π).

- Si $\alpha = 0$ (mod. 2π), le quadrilatère donné est inscriptible et l'application f est la translation de vecteur $\overrightarrow{BB'}$ où B' est l'image de B par la rotation de centre D et d'angle 2(DC, DA). Comme les points C, D et A ne sont pas alignés, B' est distinct de B, la direction de (A'D') est donc bien déterminée. Toute droite parallèle à (BB') étant invariante par f donne une solution.
- Si $\alpha = \pi$ (mod 2π), alors $(AB, BC) + (CD, DA = \frac{\pi}{2}$ (mod π), l'application f est un demi-tour et toute droite qui passe par le centre Ω, de f, donne une solution.

Afin de préciser concrètement la question, on peut illustrer ce propos dans un cas particulier comme celui du schéma ci-contre.



N.B. Les situations sont à peu près claires quand on se limite à des polygones de lumière qui se referment après un ou deux tours. Les études plus générales posent des problèmes d'ergodicité qui sont encore ouverts – y compris pour le triangle – mais ceci est une toute autre histoire.

1 On convient que $A_n = A_0, \dots$

VII. Similitudes planes

I

Le triangle PQR est l'image de ABC par le demi-tour

$$H(M,2) \circ H(G,\tfrac{1}{2})$$

où G désigne le centre de gravité de ABC. Le centre de ce demi-tour est le milieu des points G et H(M, 2)(G), c'est donc G.

II

1) On sait que $h_2 \circ h_1$ est une dilatation de rapport k_1k_2.

a) Si $k_2k_1 = 1$, c'est une translation dont le vecteur est donné par un point arbitraire, par exemple, O_1 et son image O'_1.

$$O'_1 = h_2 \circ h_1(O_1) = h_2(O_1)$$

$$\overrightarrow{O_1O'_1} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2O'_1} = \overrightarrow{O_1O_2} + k_2\overrightarrow{O_2O_1} = (1-k_2)\overrightarrow{O_1O_2}$$

b) Si $k_1k_2 \neq 1$, c'est une homothétie dont le centre est le point O tel que :

$$\overrightarrow{OO'_1} = k_2k_1\overrightarrow{OO_1},$$

où O'_1 désigne encore l'image de O_1 par $h_2 \circ h_1$. En appliquant, encore une fois, la relation de Chasles conduit au résultat :

$$\overrightarrow{O_1O} = \frac{1-k_2}{1-k_2k_1}\overrightarrow{O_1O_2}.$$

L'expression des homothéties au moyen des nombres complexes donne un moyen commode de mener à bien ces calculs de façon quasi automatique.

On choisit pour origine le centre de l'une de homothéties, par exemple O_1, les deux transformations sont alors décrites par les application :

$$h_1 : z \mapsto k_1z \quad \text{et} \quad h_1 : z \mapsto \omega_2 + k_2z(z-\omega_2).$$

La compositon des deux s'exprime :

$$h_2 \circ h_1 : z \mapsto k_2k_1z + (1-k_2)\omega_2.$$

- Si $k_2k_1 = 1$, cette application devient $z \mapsto z + (1-k_2)\omega_2$.
- Si $k_2k_1 \neq 1$, l'équation $z = k_2k_1z + (1-k_2)\omega_2$ admet pour solution :

$$\omega = \frac{1-k_2}{1-k_2k_1}\omega_2.$$

L'expression de $h_2 \circ h_1$ prend alors la forme : $z \mapsto \omega + k_1k_2z(z-\omega)$.

Dans les deux cas, l'interprétation est immédiate.

2) Il est naturel de donner les homothéties par leurs centres O_1, O_2 et un couple de points homologues pour chacune – respectivement (M_1, M'_1) et (M_2, M'_2).

a) Dans le premier cas la construction coule de source.

b) Dans le second, le centre de f est généralement donné par l'intersection de (O_1O_2) avec la droite qui joint un point arbitraire à son image, par exemple (M_1N) où $N = h_2(M'_1)$. Si M_1, M_2 et M'_2 sont alignés on a recours a une construction intermédiaire.

III

On note I le pied de la bissectrice intérieure et l'on pose :

$$k=\frac{AC}{AB}=-\frac{\overline{IC}}{\overline{IB}}.$$

Il vient :

$$\frac{\overline{BI}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{BI}}{\overline{BI}+\overline{IC}}=\frac{1}{1+k}$$

Le point I est donc l'image de C par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{1+k}$.

Pour le pied de la bissectrice extérieure on réserve le cas où le sommet B serait sur le cercle ($k=1$) et l'on remplace k par son opposé.

IV

Soit I′ le milieu de BC et G le centre de gravité du triangle, on pose :

$$BC=2r.$$

1) Le point G décrit le cercle de diamètre BC et le sommet A est l'image de G par l'homothétie de centre I et de rapport 3. Le lieu de A est donc le cercle de centre I et de rayon $3r$ - dont on exclut les points donnés.

2) On applique la formule dite de la médiane. Elle donne :

$$AB^2+AC^2=2AI'^2+\frac{BC^2}{2}=2(3\,r)^2+\frac{(2r)^2}{2}=20r^2=5.BC^2.$$

3) Le point A est commun au cercle de centre I, de rayon $3r$ et à l'un des arcs de cercle, lieux des points tels que $B\hat{A}C$ ait la valeur donnée – sa construction est classique. Ces lignes se coupent et livrent quatre solutions si :

$$3r\tan\frac{A}{2}<r \quad \text{i.e} \quad \tan\frac{A}{2}<\frac{1}{3} \quad \text{ou encore } \tan A<\frac{3}{4}.$$

S'il y a égalité, elles sont tangentes et donnent deux solutions. Sinon, il n'y a pas de solution.

V

On note Γ le cercle circonscrit, R son rayon et M le milieu de BC.

Comme $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})=2\alpha \pmod{2\pi}$, on a $(OM,OC)=\alpha \pmod{\pi}$ et ainsi :

$$OM=R|\cos\alpha|.$$

Le point M est donc sur le cercle γ, de centre O et de rayon $r=R\,|\cos\alpha\,|$.

Réciproquement, toute tangente à ce cercle, ne passant pas par A, coupe Γ en deux points B et C tels que :

$$(AB,AC)=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})=\alpha \pmod{\pi}.$$

1) Le lieu de M est γ – dont on exclut deux points de contact des tangentes issues de A. Le lieu γ_1 de G est le transformé de γ par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{2}{3}$.

Quant au lieu γ_2 de H, c'est l'image de γ_1 par l'homothétie de centre O et de rapport 3 (cf. la droite d'Euler). On vérifie que γ_2 est le cercle de centre A et de rayon :

$$2r=2R|\cos\alpha|.$$

2) On a évidemment $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AM}$. Ainsi, l'homothétie de centre A et de rapport 2 nous livre le lieu de D. C'est le cercle γ_3, de rayon $2r$ qui a pour centre le point M′, diamétralement opposé à A, sur Γ. Autrement dit, γ_3 est le symétrique de γ_2 par rapport à O.

L'orthocentre H_1 de BCD est le symétrique de H par rapport à M. En décomposant le demi-tour de centre M en un produit de deux symétries axiales, on voit apparaître H_1 comme étant le symétrique par rapport à la médiatrice de BC d'un point de Γ [1]. Le point H_1 est donc sur ce cercle. La réciproque n'offre pas de difficulté particulière.

c) Après avoir noté que :

$$\overrightarrow{AG_1} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{OO_1} = 2\overrightarrow{OM},$$

on obtient sans peine les lieux de G_1 et de O_1.

VI

On note ABC le triangle donné, $\mathscr{C}$ son cercle circonscrit et Γ le cercle donné. On utilise l'une des homothéties qui transforme $\mathscr{C}$ en Γ et on la compose, au besoin, avec une rotation.

VII

A chaque ligne les trois points considérés sont les centres de trois homothéties dont le produit est l'application identique. Ces points sont donc alignés.

Lorsque deux des segments ont la même longueur, l'une de ces homothéties est remplacée par une translation. Dans le cas où – par exemple – ABB'A' est un parallélogramme, les deux alignements où le point γ intervenait sont remplacés par la conclusion : les droites (αβ) et (α'β') sont parallèles aux droites (AB) et (A'B') .

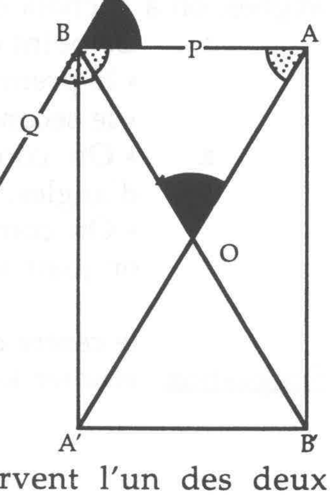
Quand les trois segments ont la même longueur, on peut toujours se ramener au cas où ABB'A', BCB'C' et CAC'A' et sont des parallélogrammes. La conclusion devient :

- (α'β') est parallèle à (AB) et (A'B').
- (β'γ') est parallèle à (BC) et (B'C'),
- (γ'α') est parallèle à (CA) et (C'A').

VIII

1) Le point Q décrit la droite transformée de D par la rotation de centre O et d'angle $(\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{B'B})$. Le demi-tour de centre O livre les lieux de P' et de Q'.

2) On suppose d'abord que **ABA'B' n'est pas un carré**. Soit O le centre de ABA'B', on considère un rectangle PQP'Q' de centre O, directement semblable à ABA'B'. Si P décrit la droite (AB), alors Q décrit la droite symétrique de (AB) par rapport à la diagonale (BB'). Ce point n'est sur la droite (AB) ou (A'B) que s'il coïncide avec B.



De façon générale, deux parallélogrammes tels que l'un soit inscrit dans l'autre, ont le même centre. De sorte que, s'il existe une similitude directe *s*, autre que l'application identique, qui transforme ABA'B' en PQP'Q', *s* admet pour centre O. Ce qui précède montre que si P appartient à (AB), Q ne peut appartenir à (AB') ou (B'A) que si ces points coïncident avec B ou A. Ce qui est sans intérêt. Les autres cas se ramènent au précédent en composant *s* avec les rotations ou réflexions qui conservent l'un des deux rectangles.

1 Les symétriques de l'orthocentre d'un triangle, par rapport à ses côtés …

Si **c'est un carré** qui est donné ([1]), il est facile de vérifier qu'il est toujours possible d'y inscrire un carré, en choisant un sommet de façon arbitraire.

En conclusion, il est impossible d'inscrire dans un rectangle donné, un rectangle qui lui soit semblable, exception faite s'il s'agit d'un carré, auquel cas tout point situé sur ses côtés est le sommet d'un caré inscrit.

IX

On note C et C′ les centres de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, r et r' leurs rayons. On considère une similitude qui transforme $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$, il est clair que son rapport est $\frac{r'}{r}$, son centre appartient donc au lieu des points M tels que

$$\frac{MC'}{MC} = \frac{r'}{r},$$

à savoir, le cercle de diamètre AB si A et B sont les points tels que :

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} = -\frac{\overline{BC'}}{\overline{BC}} = \frac{r'}{r}.$$

Pour tout point O de ce cercle, la similitude de centre O qui transforme C en C′, a pour rapport $\frac{r'}{r}$, elle transforme donc $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$.

L'angle α de la similitude étant donné,

- si $\alpha \neq 0 \pmod{2\pi}$, le centre de similitude est à l'intersection du cercle précédent et de l'arc de cercle, lieu des points tels que :

$$(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MC'}) = \alpha \text{ } (^2),$$

- si $\alpha = 0 \pmod{2\pi}$ le centre de similitude est le point A,
- si $\alpha = \pi \pmod{2\pi}$ le centre de similitude est le point B.

X

La similitude considérée est donnée par les deux couples de points homologues :

$$(A_0, A_1) \text{ et } (A_1, A_2),$$

on a donc immédiatement :

- son rapport : $\dfrac{A_1A_2}{A_1A_0}$ • son angle : $(\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_1A_2})$.

Pour en construire le centre, après avoir traité le cas où les trois points donnés sont alignés, on a le choix entre les deux méthodes exposées dans le cours.

1. Ce point est le second point commun aux deux cercles suivants :
   • le premier passant par A_0 et tangent en A_1 à (A_1A_2)
   • le second passant par A_2 et tangent en A_1 à (A_1A_0)
2. • On construit $A_3 = f(A_2)$, ce ce qui s'effectue au moyen de reports d'angles, respectant l'orientation.
   • On complète le parallélogramme $A_0A_1A_2B$ et son image $A_1A_2A_3B'$, on joint les points :
   $$A_1 \text{ à } B \text{ et , } A_2 \text{ à } (BA_0) \cap (B'A_1)$$
   le centre de f est à l'intersection de ces deux droites.

<u>Suggestion</u> : étudier le cas où le triangle $A_0A_1A_2$ est isocèle en A_0 ? ([3]).

---

1 Les lieux considérés au début sont alors les supports de ses côtés
2 Ce dernier se construit par l'intermédiaire de la tangente en C, c'est-à-dire la droite (Cx) telle que :

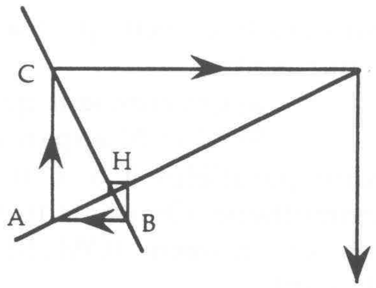
$$(Cx, CC') = \alpha.$$

3 Le rapprochement des deux figures ainsi obtenues met en évidence un concours de lignes un peu confus dans le cas général, mais qui, ici, n'a rien de banal.

XI

1) On vérifie que la similitude considérée admet :

- pour centre H,
- pour angle :



$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) + \pi \pmod{2\pi},$$

c'est-à-dire :

  - $-\frac{\pi}{2}$ si le triangle donné est orienté dans le sens direct,
  - $+\frac{\pi}{2}$ dans le cas contraire.

- pour rapport $\dfrac{AC}{AB} = \tan B$.

La construction se déroule de façon quasi automatique.

2) On utilise l'une des constructions proposées dans le cours, on est ici dans un cas où certains des points clefs viennent se confondre.

XII

On écarte le cas où les droites données seraient parallèles. On sait (cf. cours) que la similitude considérée a le même centre que celle qui transforme respectivement A′ en A″ et B′ en B″, c'est-à-dire la rotation produit des réflexions d'axes Δ et Δ'. La réponse est donc le point d'intersection de Δ et Δ'.

XIII

On remarque que si l'on dispose d'une solution, on en déduit une infinité d'autres par translations dans la direction des droites. On peut donc fixer arbitrairement l'un des sommets, par exemple A.

Notons *abc* le triangle donné, D_B et D_C les droites devant porter B et C, soit σ la similitude directe (resp. indirecte) de centre A, de rapport $\frac{ac}{ab}$ et d'angle $(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac})$. Considérons un triangle ABC vérifiant les conditions de l'énoncé.

- S'il est directement semblable à *abc* alors σ transforme B en C. Ce point est donc à l'intersection de la droite D_C avec l'image par σ de D_B.
- S'il est indirectement semblable à *abc*, on se ramène au cas précédent en composant σ avec la symétrie par rapport à la perpendiculaire aux droites données qui passe par A.

La construction en découle et livre deux familles de solutions.

Remarque : on a implicitement supposé que la correspondance entre les droites était donnée. Si l'on n'accepte pas cette restriction, on aura six familles de solutions si le triangle n'est pas isocèle. Deux d'entre elles coïncident si le triangle est isocèle. Il n'en reste plus que deux si le triangle est équilatéral.

On peut reprendre cet exercice en supprimant l'hypothèse du parallélisme des droites données – la discussion finale est alors laborieuse. On peut encore remplacer les droites par des cercles qu'on supposera concentriques – condition qui simplifie la discusssion.

XIV

Soit s la similitude donnée, on considère deux points quelconques M et N, transformés respectivement en M′ et N′ par s. Dans ce qui suit on notera σ la similitude directe qui transforme M en N et M′ en N′, nous savons qu'elle admet O pour centre.

a) On convient que la direction est donnée par une droite δ.

Si M et N appartiennent à l'ensemble en question, les droites (MM′) et (NN′) sont parallèles à δ. L'angle de la similitude σ est alors nul. Il s'agit donc d'une homothétie. On en déduit que M et N appartiennent à une même droite D qui passe par O. En outre, (OM, MM′) étant indépendant de M, il existe un nombre α, tel que D vérifie :

$$(D,\delta) = (OM, MM') = \alpha \pmod{\pi}.$$

Réciproquement, pour tout point M de D (autre que O), on a

$$(OM, MM') = \alpha = (D,\delta) \pmod{\pi}$$

ce qui montre que (MM′) est prarallèle à δ. Le lieu cherché est donc la droite D.

b) Si MM′ et NN′ ont même longueur, alors σ est une rotation, M et N sont donc sur un même cercle de centre O et de rayon r tel que :

$$\frac{r}{\sin\beta} = \frac{MM'}{|\sin\theta|},$$

où β et θ sont respectivement l'angle en M′ du triangle OMM′ et l'angle de la similitude – ils sont donnés avec s.

Réciproquement, soit d la longueur donnée, tout point M du cercle de centre O et de rayon :

$$r = d\frac{\sin\beta}{|\sin\theta|}$$

est bien tel que MM′ = d. Ce cercle est donc le lieu cherché.

c) On reprend, en les adaptant, les arguments du point précédent.

d) Le résultat est évident si s est une dilatation (translation ou homothétie). On écarte ce cas. Soit P le point donné, si (MM′) et (NN′) passent par P, alors :

$$(PM, PN) = (MM', NN') = (OM, ON) \pmod{\pi}$$

car O est le centre de σ. Les points O, P, M et N sont donc alignés ou cocycliques. Dans le premier cas on retrouverait M, M′, N, N′ sur une même droite, la similitude s serait alors une dilatation, c'est exclu. Les points O, P, M et N sont donc sur un même cercle Γ. On a de même :

$$(PM', PN') = (OM', ON') \pmod{\pi}$$

les points O, P, M′ et N′ sont donc cocycliques et P est sur le cercle Γ', transformé de Γ par s. Ainsi Γ contient l'image inverse P* de P par s. Les points M et N sont sur le cercle circonscrit au triangle OPP*.

Réciproquement, si M est sur ce cercle, on a :

$$(MO, MP) = (P^*O, P^*P) \pmod{\pi}$$

et par suite :

$$(OM, MP) = (OP^*, P^*P) \pmod{\pi}.$$

Comme les triangles OP*P et OMM′ sont directement semblables on a aussi :

$$(OP^*, P^*P) = (OM, MM') \pmod{\pi}.$$

Il s'ensuit que :

$$(OM, MP) = (OM, MM') \pmod{\pi}.$$

On a donc :

$$(MP, MM') = 0 \pmod{\pi}.$$

Les points M et M′ sont alignés avec P.

Le lieu recherché est le cercle circonscrit au triangle OPP*.

e) C'est une application directe du cours.

Remarque : on pourra chercher à résoudre ces exercices via les nombres complexes. On observera une simplification notable au points a et b. Pour le reste ...

XV

En premier lieu, on note que que :

- la transformation de f en $g = s \circ f \circ s^{-1}$ ne change pas le caractère direct ou indirect de f.
- si f et s sont toutes les deux directes, il est clair que g a le même angle que f.
- si f est directe et s indirecte, l'angle de g est l'opposé de celui de f.

Vérifions ce dernier point. On note θ l'angle de f. On considère deux points quelconques M et N. On pose :

$$M_1 = s^{-1}(M) \ , \ M' = s(M) \text{ et } N_1 = s^{-1}(N) \ , \ N' = s(N).$$

Il vient :

$$(\overrightarrow{M_1N_1}, \overrightarrow{f(M_1)f(N_1)}) = \theta \pmod{2\pi}$$

et comme s inverse l'orientation, on a :

$$(\overrightarrow{s(M_1)s(N_1)}, \overrightarrow{sf(M_1)sf(N_1)}) = -\theta \pmod{2\pi}.$$

Ce qui s'écrit encore :

$$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{g(M)g(N)}) = -\theta \pmod{2\pi}.$$

a) Si f est une translation, de vecteur $\overrightarrow{AB}$, $s \circ f \circ s^{-1}$ est aussi une translation. On pose :

$$A' = s(A) \text{ et } B' = s(B).$$

Dans ces conditions, ona :

$$s \circ f \circ s^{-1}(A') = s \circ f(A) = s(B) = B'.$$

Il s'agit donc de la translation de vecteur $\overrightarrow{A'B'}$.

b) c) d) $s \circ f \circ s^{-1}$ est de même nature que f, on vérifie immédiatement qu'elle admet pour centre $O' = s(O)$.

e) f) Si f est une isométrie indirecte, $s \circ f \circ s^{-1}$ l'est aussi.

- Si f est une symétrie d'axe Δ, on vérifie que tout point de $\Delta' = s(\Delta)$ est invariant par $s \circ f \circ s^{-1}$. On en conclut que cette transformation est la symétrie d'axe Δ'.
- Si f est une symétrie-translation, d'axe Δ de vecteur $\overrightarrow{AB}$, elle se décompose en le produit $f = s_\Delta \circ t_{\overrightarrow{AB}}$. On a alors :

  $$s \circ f \circ s^{-1} = s \circ s_\Delta \circ s^{-1} \circ s \circ t_{\overrightarrow{AB}} \circ s^{-1} = s_{\Delta'} \circ t_{\overrightarrow{A'B'}}$$

  où $A' = s(A)$ et $B' = s(B)$. La similitude $s \circ f \circ s^{-1}$ est donc la symétrie-translation d'axe $\Delta' = s(\Delta)$ et de vecteur $\overrightarrow{A'B'}$.

XVI

Les similitudes considérées sont évidemment directes, elles ont leur angle nul et leur rapport égal à 1, ce sont donc des translations.

Soit $\omega' = r(\omega)$, au vu de l'exercice précédent, on a :

$$r \circ h \circ r^{-1} \circ h^{-1} = \mathrm{H}(\omega', k) \circ \mathrm{H}(\omega, \tfrac{1}{k})$$

et le point :

$$\omega'' = (r \circ h \circ r^{-1} \circ h^{-1})(\omega) = \mathrm{H}(\omega', k)(\omega)$$

est tel que :

$$\overrightarrow{\omega'\omega''} = k\overrightarrow{\omega'\omega}$$

$$\overrightarrow{\omega\omega''} = \overrightarrow{\omega\omega'} + \overrightarrow{\omega'\omega''} = (1-k)\overrightarrow{\omega\omega'}.$$

La translation $r \circ h \circ r^{-1} \circ h^{-1}$ a donc pour vecteur $(1-k)\overrightarrow{\omega\omega'}$ et $h \circ r \circ h^{-1} \circ r^{-1}$ est son inverse.

On a $r \circ h = h \circ r$ si, et seulement si, $r \circ h \circ r^{-1} \circ h^{-1} = \mathrm{Id}$. Cette dernière condition équivaut à $k = 1$ ou ω coïncide avec ω'.

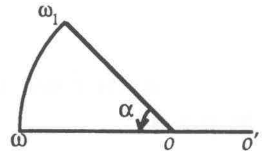
<u>Conclusion</u> : une rotation et une homothétie, distinctes de l'application identique, sont permutables si, et seulement si, elles ont le même centre.

XVII

Le problème est sans objet si $k=1$ ou si $\alpha = 0 \pmod{2\pi}$, on écarte ces cas.

a) Soit $\omega_1 = r^{-1}(\omega)$ et $o' = h(o)$, comme :

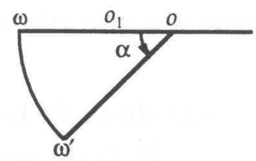
$$h \circ r(\omega_1) = h(\omega) = \omega \text{ et } h \circ r(o) = o',$$



le centre O de la similitude $h \circ r$ est le second point commun :
- au cercle circonscrit au triangle $o\omega\omega_1$
- au cercle passant par o' et tangent en o à $(o\omega_1)$.

b) Soit $\omega' = r(\omega)$ et $o_1 = h^{-1}(o)$, comme :

$$r \circ h(\omega) = r(\omega) = \omega' \text{ et } r \circ h(o_1) = r(o) = o,$$



le centre O′ de la similitude $r \circ h$ est le second point commun :
- au cercle circonscrit au triangle $o\omega\omega'$,
- au cercle passant par o_1 et tangent en o à $(o\omega_1)$.

XVIII

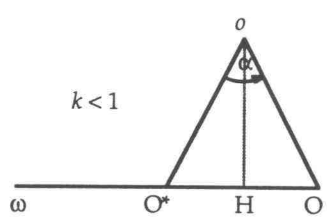
Il est clair que :
- si o est un point arbitraire, $s = r \circ (r^{-1} \circ s)$ et si $r^{-1} \circ s$ est une similitude de rapport k et d'angle nul, c'est-à-dire une homothétie ;
- si ω est un point arbitraire, $s = (s \circ h^{-1}) \circ h$ et $s \circ h^{-1}$ est une similitude de rapport 1 et d'angle α, c'est-à-dire une rotation.

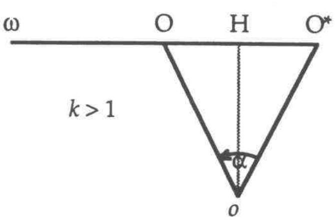
Le point ω étant donné, on pose $\mathrm{O}^* = h(\mathrm{O})$, alors $\mathrm{O} = r(\mathrm{O}^*)$. Soit H la projection de Ω sur $(\mathrm{O}\omega)$, on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OO}^*} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\omega\mathrm{O}^*} - \overrightarrow{\omega\mathrm{O}}) = \frac{1}{2}(k-1)\overrightarrow{\omega\mathrm{O}} \text{ et } \mathrm{OH} = \mathrm{O}o\,\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|.$$

On en déduit que :

$$\frac{\mathrm{O}o}{\mathrm{O}\omega} = \frac{|k-1|}{2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|} = \rho.$$





D'autre part, si l'on choisit α tel que $0 \leq \alpha < 2\pi$, on a (1) :

$$(\overrightarrow{O\omega}, \overrightarrow{Oo}) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\pi}{2} \pmod{2\pi}, \text{ si } k > 1 \\ \dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\pi}{2} \pmod{2\pi}, \text{ si } k < 1 \end{cases}$$

Conclusion : les points o (centres des rotations) sont les transformés des points ω (centres des homothéties) par la similitude de même centre O que la similitude donnée, de rapport $\rho = \frac{|k-1|}{2|\sin\frac{\alpha}{2}|}$ et d'angle $\frac{\alpha+\pi}{2}$ si $k > 1$ et $\frac{\alpha-\pi}{2}$ si $k < 1$.

Remarque : ici le recours aux nombres complexes se révèle nettement avantageux.

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé, d'origine O, on note u et v les affixes de ω et o. Les similitudes en question sont alors décrites par les expressions suivantes :

$$s : z \mapsto ke^{i\alpha}z$$
$$h : z \mapsto u + k(z-u)$$
$$r : z \mapsto v + e^{i\alpha}(z-v).$$

Posant :

$$r \circ h : z \mapsto z',$$

il vient :

$$z' = v + e^{i\alpha}[u + k(z-u) - v] = (1-k)e^{i\alpha}u + (1-e^{i\alpha})v + ke^{i\alpha}z.$$

On en déduit que :

$$s = r \circ h \iff (1-k)e^{i\alpha}u + (1-e^{i\alpha})v = 0$$

Comme $\alpha \neq 0 \pmod{2\pi}$, cette condition s'exprime :

$$v = (1-k)\frac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha}-1}u\,.$$

Il est alors clair que o est l'image de ω par une similitude de centre O. Pour en préciser l'angle et le rapport, il convient d'exprimer le module et l'argument du coefficient de u. Le calcul qui suit est classique :

$$\frac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha}-1} = e^{\frac{i\alpha}{2}}\frac{1}{e^{\frac{i\alpha}{2}} - e^{-\frac{i\alpha}{2}}} = e^{\frac{i\alpha}{2}}\frac{1}{2i\sin\frac{\alpha}{2}} = e^{i\frac{\alpha-\pi}{2}}\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

On en déduit que :

$$v = \frac{1-k}{2\sin\frac{\alpha}{2}}e^{i\frac{\alpha-\pi}{2}}u.$$

On choisit la détermination principale de α, ce qui permet d'avoir $\sin\frac{\alpha}{2} > 0$. Dans ces conditions, on obtient l'expression standard de :

$$v = \begin{cases} \dfrac{k-1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}e^{i\frac{\alpha+\pi}{2}}u \text{ si } k > 1 \\ \dfrac{1-k}{2\sin\frac{\alpha}{2}}e^{i\frac{\alpha-\pi}{2}}u \text{ si } k < 1 \end{cases}$$

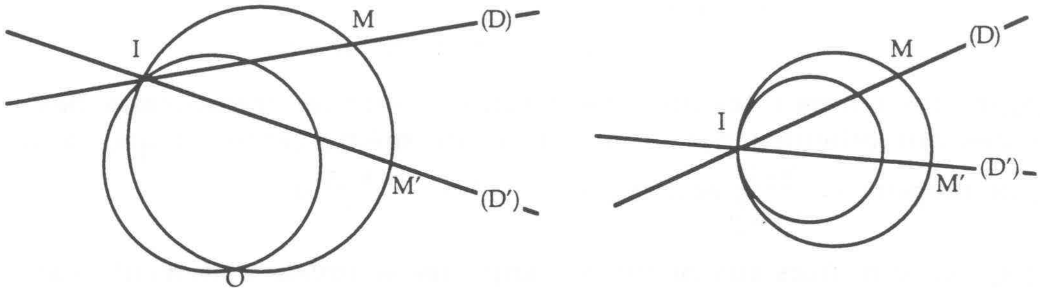
On retrouve ainsi le résultat précédent.

Remarque : on notera que dans les deux deux façon de procéder, il est indispensable de choisir une détermination de α.

1 Voir la note placée à la fin de la présente section.

XIX

(1) 1) On sait que les cercles (IMM′) se recoupent au centre de la similitude, on note ce point O, il se confond avec I si f est une homothétie.



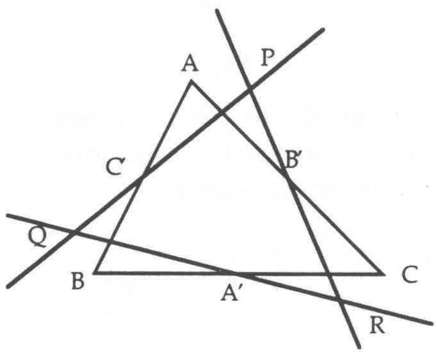
2) On considère un triangle particulier $M_0M_0'M_0''$ de la famille. La similitude directe qui transforme respectivement M_0 en M et M_0' en M′, transforme aussi M_0'' en M″. Or, elle a même centre que la similitude donnée. En conséquence, le lieu de M″ est la droite image de D par la similitude de centre O qui transforme M_0 en M_0''.

3) Le raisonnement précédent s'applique encore et livre une droite.

4) On vérifie que les droites correspondantes sont les axes de la similitude indirecte qui coïncide avec f sur D. Ces droites sont les parallèles aux bissectrices de D et D′ qui passent par O.

XX

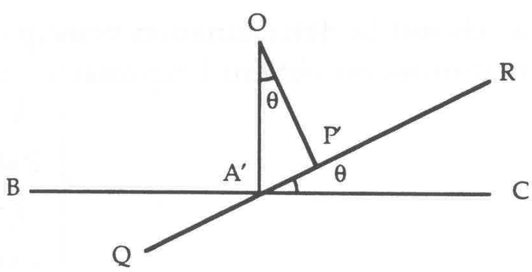
<u>Remarque préliminaire</u> : le changement de θ en $\theta+\pi$ ne modifiant pas les points P, Q, R et le cas où $\theta=\frac{\pi}{2}$ donnat des évidences, on peut supposer que $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$. Ce qui garantit que $\cos\theta\geq 0$.



1) Soit O le centre du cercle circonscrit à ABC, on note P′ sa projection sur la droite (PQ), on a :

$$(OA',OP')=\theta \quad \text{et} \quad \frac{OP'}{OA'}=\cos\theta.$$

Soit s la similitude de centre O, d'angle θ et de rapport $\cos\theta$, s transforme A′ en P′ et la droite (AB) en la perpendiculaire en P′ à (OP′), c'est-à-dire (PQ). Compte-tenu de la symétrie des hypothèses, on peut alors affirmer que le triangle PQR est l'image de ABC par s.



1 On notera qu'on pourrait introduire l'énoncé par : on considère une application affine de D sur D′ qui transforme M en M′, montrer qu'il existe une similitude qui …

2) Ce qui précède montre que :

$$(PC', PB') = (PQ, PR) = (AB, AC) = (AB', AC') \pmod{\pi}.$$

P est donc sur le cercle (AB'C'). Réciproquement, si P appartient à ce cercle, on pose $\theta = (B'A, B'P)$. Comme on a :

$$(PC', PB') = (AB', AC') \pmod{\pi},$$

il vient :

$$(AC', PC') = (B'A, B'P) \pmod{\pi}.$$

Le point P remplit les hypothèses. Il est clair que O est diamétralement opposé à A sur le cercle (AB'C'). Il est alors établi que les lieux cherchés sont les cercles (AB'C'), (BC'A') et (CA'B') et que ces trois ensembles ont en commun le point O.

XXI

1) On considère un triangle répondant aux conditions énoncées. Soit Γ_1 (resp. Γ_2, Γ_3) le cercle lieu des points M tels que :

$$(MJ, MK) = (AC, AB) \quad [\text{resp. } (MK, MI) = (BA, BC)\,,\ (MI, MJ) = (CB, CA)].$$

Les points P, Q et R sont respectivement situés sur Γ_1, Γ_2 et Γ_3. De plus, chacun de ces cercles doit contenir le centre O de la similitude qui transforme l'un dans l'autre deux triangles de la famille. Ils passent donc tous par ce point.

Réciproquement, Soit P un point de Γ_1, les droites (PK) et (PJ) recoupent respectivement Γ_2 en Q et Γ_3 en R, on a alors :

$$\begin{aligned}(IQ, IR) &= (QI, QK) + (PK, PJ) + (RJ, RI) \pmod{\pi}\\ &= (BC, BA) + (AB, AC) + (CA, CB) \pmod{\pi}\\ &= 0 \pmod{\pi}\end{aligned}$$

Les points I, Q et R sont donc alignés et le triangle PQR fait partie de la famille considérée.

2) On choisit un triangle arbitraire $P_0Q_0R_0$ – par exemple celui qu'on peut construire en menant par I, J et K les parallèles à (BC), (CA), et (AB). On considère un triangle PQR de la famille, soit s la similitude qui transforme $P_0Q_0R_0$ en PQR, soit θ l'angle de s. On note H_0 et H les projections de O, respectivement sur (P_0Q_0) et (PQ). On pose $(OH_0, OK) = \alpha \pmod{\pi}$. Il est clair que s transforme H_0 en H et qu'on a :

$$OH_0 = OK|\cos\alpha| \quad \text{et} \quad OH = OK|\cos(\theta - \alpha)|.$$

On peut ainsi exprimer le rapport de la similitude s :

$$\frac{OH}{OH_0} = \left|\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos\alpha}\right|.$$

Il est maximum pour $\theta = \alpha$, c'est-à-dire quand (OK) et (PQ) sont perpendiculaires. Compte-tenu de la symétrie des données, il est ainsi prouvé qu'il existe un triangle de la famille qui est plus grand que tous les autres, ses côtés sont perpendiculaires à (OI), (OJ) et (OK).

3) Si le triangle donné au départ est IJK lui-même, le triangle dont I, J et K sont les milieux des côtés appartient à la famille. Le point O est le centre de son cercle circonscrit et l'orthocentre de IJK [1].

Dans le cas où le rôle de ABC est joué par JKI. Les lieux des points P, Q et R considérés au début seront respectivement le cercle :

passant par	K	et tangent à	(IJ)	en	J,
–	I	–	(JK)	–	K,
–	J	–	(KI)	–	I.

1 Ici, c'est le triangle donné qui est le plus grand de la famille.

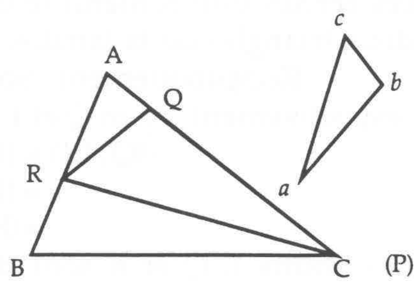
XXII

1) On peut toujours construire un triangle pqr directement semblable à abc et tel que q soit sur (CA), r sur (AB), l'homothétie de centre A qui transforme p en un point de (BC) livre une solution.

2) [1] On choisit arbitrairement un triangle $P_0Q_0R_0$ de la famille et l'on considère un triangle PQR quelconque. La similitude directe qui transforme $P_0Q_0R_0$ en PQR n'est pas une translation elle posssède donc un centre. Ce point, noté O, est aussi le centre de la similitude qui transforme P_0 en Q_0 et P en Q, il appartient donc au cercle (CPQ). Vu la symétrie des données, O est commun aux trois cercles (AQR) et (BRP) et (CPQ), ceci quel que soit le triangle considéré [2].

3) Si ABC tient lui-même le rôle de abc, le triangle dont les sommets sont les milieux des côtés de ABC fait partie de la famille. Le point O est alors le centre du cercle circonscrit à ABC.

Dans le cas où abc est équilatéral la construction s'opère sans peine à partir de la remarque de la première question.



Remarque : on peut ne pas se satisfaire de la construction obtenue à partir d'une position arbitraire, non précisée, du triangle PQR et chercher à caractériser le point O directement à partir des données. Pour cela, revenons au cas général. On peut considérer un triangle PQR dont un sommet coïncide avec A, B ou C. On peut, par exemple, envisager le cas où P vient en C. Le cercle (BRC) contient le point O, on a donc :

$$(OB\,,OC) = (RB\,,RC) = (RB\,,AC) + (AC\,,RC) = (AB\,,AC) + (CQ,CR) \pmod{\pi}.$$

Il est toujours possible de donner les triangles orientés dans le sens direct. On a alors :

$$(OB\,,OC) = \hat{A} + \hat{a} \pmod{\pi}.$$

Il apparaît ainsi que O vérifie :

$$(OB\,,OC) = \hat{A} + \hat{a} \pmod{\pi}\ ,\ (OC\,,OA) = \hat{B} + \hat{b} \pmod{\pi}\ ,\ (OA,OB) = \hat{C} + \hat{c} \pmod{\pi}.$$

XXIII

Ces points sont situés sur les deux axes de la similitude indirecte qui transforme A en A' et B en B'.

1 Le fait que les cercles passent par un même point peut se démontrer, soit directement, soit en analysant la situation décrite ici à la lumière de la propriété caractéristique du centre de similitude.

2 On appelle ce point centre permanent de similitude.

Note

A propos d'un point de l'exercice XVIII

De façon générale considérons un triangle ABC isocèle en A. Si l'on veut exprimer un angle orienté à la base en fonction de l'angle au sommet, on peut procéder comme suit. On a d'une part :

$$(BC\,,BA)=(BC\,,AH)+(AH,BA) \pmod{\pi}$$

et d'autre part :

$$2(AH\,,AB)=(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})=-(\overrightarrow{AB},,\overrightarrow{AC}) \pmod{\pi}.$$

Il s'ensuit que:

$$(BC\,,BA)=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB},,\overrightarrow{AC}) \pmod{\pi}.$$

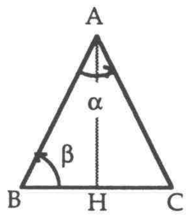
Ainsi, tout se passe sans problème si l'on peut se contenter d'un résultat à π près.

Il n'en va tout autrement si, comme dans l'exercice XVIII, on doit évaluer un angle de vecteurs. Le résultat précédent ouvre alors deux possibilités :

$$(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB},,\overrightarrow{AC}) \pmod{2\pi} \quad \text{ou} \quad (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})=-\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB},,\overrightarrow{AC}) \pmod{2\pi}$$

Pour trancher, on choisit une détermination des angles considérés et l'on tient compte du fait que l'angle à la base d'un triangle isocèle est nécessairement aigu. Ainsi, on peut choisir :

$$\alpha=(\overrightarrow{AB},,\overrightarrow{AC}) \text{ tel que } 0\leq\alpha<2\pi$$



et déterminer :

$$\beta=(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) \text{ tel que } \beta=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}+k\pi \text{ et } -\frac{\pi}{2}<\beta\leq\frac{\pi}{2}.$$

Il s'ensuit que :

$$-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\leq\frac{\pi}{2},$$

on a donc nécessairement :

$$\beta=(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})=\frac{\pi-\alpha}{2}.$$

Ce qui fait que :

$$\beta=(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})=\frac{\pi-\alpha}{2} \pmod{2\pi}.$$

<u>Remarque</u> : au delà du formalisme indispensable pour la rédaction des démonstrations, un tel résultat peut – en général – se "lire" sur une figure, il suffit de prendre la précaution d'orienter les angles dans le sens direct. L'usage des angles orientés permettra alors de donner la portée la plus générale à la démonstration qu'on aura élaborée dans le cas de figure le plus standard.

VIII. Coniques

I

S'il s'agit d'une conique à centre, les lieux en question sont le cercle directeur et le cercle principal centré à l'autre foyer. S'il s'agit d'une parabole, ce sont la directrice et la tangente au sommet.

II

1 Le symétrique l'un des foyers par rapport à la tangente donnée est sur le cercle principal centré à l'autre foyer. Il existe donc une solution, à moins que la droite donnée ne passe par l'un des points donnés, auquel cas la conique dégénère en la droite qui joint les deux points donnés.

2 On note F le point donné comme foyer, T la tangente et M son point de contact. Soit φ le symétrique de F par rapport à T, si F n'appartient pas à T :

- tout point de la droite $(M\varphi)$ est le second foyer d'une conique à centre qui est tangente en M à T.
- la perpendiculaire à $(M\varphi)$ en φ, est la directrice d'une parabole qui est tangente en M à T.

3 Soit F le point donné, ses symétriques par rapport aux droites données déterminent :

- s'il ne sont pas alignés, le cercle directeur centré à l'autre foyer d'une conique de foyer F, tangente aux trois droites.
- s'ils sont alignés, la directrice d'une parabole qui répond à l'attente.

4 Notons Φ le cercle donné et T, T' les deux droites données. Soit F le second foyer d'une conique répondant à l'attente, ses symétriques par rapport à T et T' appartiennent à Φ, F est donc commun aux cercles symétriques de Φ par rapport à ces deux droites. Si un tel point existe, il est effectivement le second foyer d'une conique admettant Φ pour cercle directeur et tangente à T et T'.

III

On note M le sommet et D le second côté de l'angle droit. Soit φ le symétrique de F par rapport à D, ce point étant l'image de M par l'homothétie de centre F et de rapport 2, il décrit, selon le cas, un cercle ou une droite qu'on note Φ .

1) Si $\mathscr{C}$ est un cercle, soit F' le centre de Φ, il est immédiat que D est la tangente à la conique de foyers F et F', admettant Φ pour cercle directeur, au point d'intersection de $(\varphi F')$ et de D. Réciproquement, toute tangente à cette conique, est de ce type.

2) Si $\mathscr{C}$ est une droite, D enveloppe la parabole de foyer F dont $\mathscr{C}$ est la tangente au sommet.

IV

La réponse est le cercle de centre P tangent à F dont on exclut le point de contact[1].

---

1 Il correspond à une conique dégénérée.

V

Un point commun à une ellipse et une hyperbole homofocales est le centre d'un cercle passant par un point donné et tangent à deux cercles concentriques donnés.

En chaque point obtenu, la bissectrice intérieure des rayons vecteurs est la tangente à l'hyperbole et la bissectrice extérieure la tangente à l'ellipse. Ces deux droites sont donc bien perpendiculaires.

VI

1) Etant donnée une conique à centre de foyers F et F', on note Φ son cercle directeur centré en F. On considère ses tangentes en deux points M et M' qu'on suppose sécantes en P. Soit φ et φ' les points de contact avec Φ des cercles passant par F', centrés en M et M'. Comme (PM) et (PM') sont les médiatrices de $F'\varphi$ et de $F'\varphi'$, on a :

$$P\varphi = PF' = P\varphi'.$$

Ce qui montre que les points φ et φ' sont communs à Φ et au cercle de centre P passant par F'. La construction qui s'en déduit est immédiate. Elle donne deux points distincts φ et φ' si les distances :

$$2a \ , \ PF \text{ et } PF'$$

sont les longueurs des côtés d'un triangle, c'est-à-dire si :

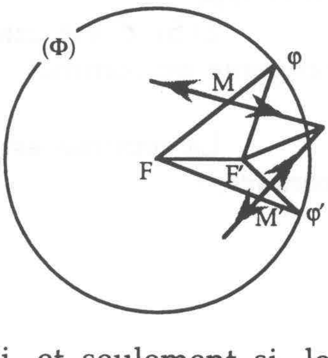
$$|PF - PF'| < 2a < PF + PF',$$

Il est immédiat de vérifier que les tangentes aux points correspondants de la conique passent par P. On a une seule solution si l'une des inégalités est remplacée par une égalité. Dans les autres cas il n'existe pas de solution.

Pour préciser cette discussion, il convient d'envisager la nature de la conique considérée.

- Si c'est une ellipse, on a :
  $$|PF - PF'| \leq FF' = 2c < 2a.$$
  L'inégalité de gauche est alors toujours vérifié. La condition d'existence de solutions s'exprime alors :
  $$2a \leq PF + PF'.$$
  Elle signifie que P est extérieur à l'ellipse et lui appartient s'il y a égalité.
- Si c'est une hyperbole, on a :
  $$2a < 2c = FF' \leq PF + PF'.$$
  C'est alors l'inégalité de droite qui est toujours vérifiée. La condition d'existence de solutions s'exprime alors :
  $$|PF - PF'| \leq 2a.$$
  Elle définit l'extérieur de l'hyperbole. Ici encore l'égalité a lieu si le point donné appartient à l'hyperbole.

2) Conservons les notations précédentes. Il découle des symétries que :



$$(PM, PM') = \frac{1}{2}(\overrightarrow{P\varphi}, \overrightarrow{P\varphi'}) = (P\varphi, PF) = (PF, P\varphi') \ (\text{mod } \pi)$$

En effet :

- (PM) et (PM') sont les médiatrices de $F'\varphi$ et $F'\varphi'$
- φ et φ' étant les points communs à Φ et au cercle centré en P qui passe par F', (PF) est la médiatrice de $(\varphi\varphi')$.

Les tangentes (PM) et (PM') sont donc perpendiculaires si, et seulement si, le triangle $FP\varphi$ est rectangle en P. La condition obtenue s'exprime :

$$F\varphi^2 = PF^2 + P\varphi^2.$$

Comme $F\varphi = 2a$ et $P\varphi = PF'$, elle est équivalente à :

$$4a^2 = PF^2 + PF'^2.$$

On applique la relation classique reliant côtés et médiane d'un triangle :

$$PF^2 + PF'^2 = OF^2 + OF'^2 + 2OP^2 = 2c^2 + 2OP^2.$$

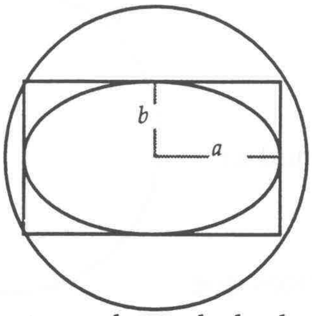
En conclusion, les tangentes (PM) et (PM') sont perpendiculaires si, et seulement si :

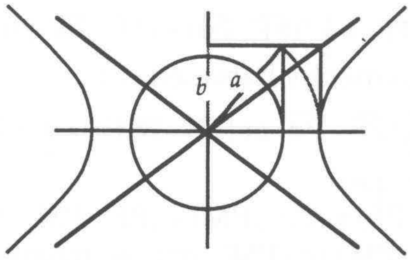
$$OP^2 = 2a^2 - c^2.$$

• Si la conique est une ellipse, cette condition s'exprime :

$$OP^2 = a^2 + b^2.$$

Le lieu cherché est le cercle de même centre que l'ellipse et de rayon $a^2 + b^2$.



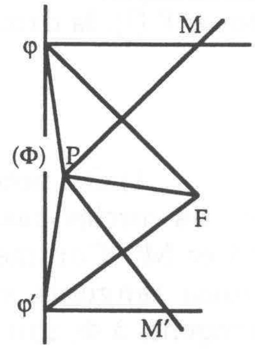


• Si c'est une hyperbole, la condition devient :

$$OP^2 = a^2 - b^2.$$

elle décrit un cercle si $a^2 > b^2$, l'origine si $a^2 = b^2$ et l'ensemble vide si $a^2 < b^2$. On pourra noter que la condition d'existence de ce cercle est que la pente des asymptotes soit, en valeur absolue, inférieure à 1, autrement dit, que l'hyperbole s'inscrive dans les angles aigus formés par ses asympototes – le cas limite étant celui de l'hyperbole équilatère.

3) Considérons maintenant une parabole et deux de ses tangentes issues d'un même point P. Des arguments analogues à ceux déjà utilisés montrent que :



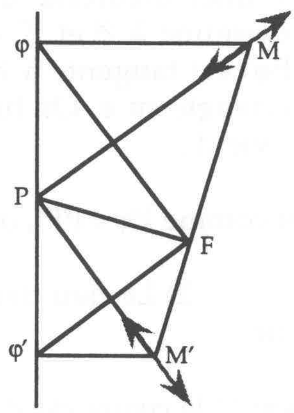
$$P\varphi = PF = P\varphi'.$$

Les points φ et φ' sont donc communs à la directrice et au cercle centré en P qui passe par F.

La construction est immédiate, elle livre deux solutions si la distance de P à la directrice est inférieure à PF – on dit alors que P est extérieur à la courbe – une solution si P appartient à la parabole et pas de solution dans les autres cas.

Il résulte des symétries que les tangentes sont perpendiculaires si, et seulement si, l'angle $\varphi P \varphi'$ est plat, c'est-à-dire si P appartient à la directrice.

Dans ce cas, (PF) est perpendiculaire à (FM) et (FM'), ce qui montre que la corde MM' passe par le foyer.

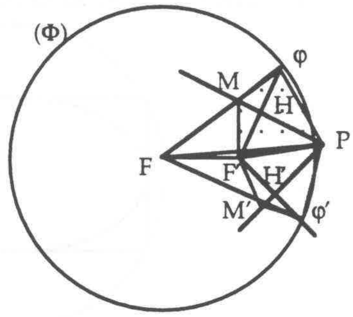


VII

Le premier théorème de Poncelet résulte de la propriété, déjà utilisée, que les points φ et φ' sont communs au cercle directeur centré en F et au cercle centré en P qui passe par F′ (cf. ex. 6-1). La droite (FP) est donc axe de symétrie des droites (FM) et (FM′).

On notera que (PF) est bissectrice intérieure de l'angle MFM′ si la conique est une ellipse. Pour une hyperbole (PF) est bissectrice intérieure ou extérieure selon que M et M′ appartiennent, où pas, à la même branche.

Comme (PF) est une bissectrice des droites (Pφ) et (Pφ'), on a :



$$(PF', PF) = \frac{1}{2}\left[(\overrightarrow{PF'}, \overrightarrow{P\varphi}) + (\overrightarrow{PF'}, \overrightarrow{P\varphi'})\right] \pmod{\pi}.$$

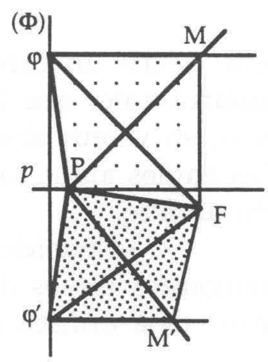
Il résulte des syméries habituelles que :

$$(PF', PM) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PF'}, \overrightarrow{P\varphi}) \text{ et } (PF', PM') = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PF'}, \overrightarrow{P\varphi'}) \pmod{\pi}$$

Ce qui montre que :

$$(PF', PF) = (PF', PM) + (PF', PM') \pmod{\pi}$$

et justifie que (PM) et (PM′) ont les mêmes bissectrices que (PF) et (PF′).

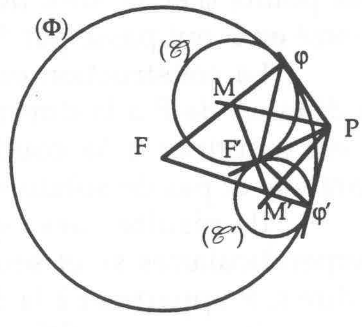


Le premier théorème de Poncelet vaut pour la parabole. Le second théorème de Poncelet vaut aussi , à condition d'entendre aussi par rayon-vecteur la parallèle à l'axe qui passe par P – ce qui est une convention classique.

Les démonstrations reprennent les mêmes

<u>Remarque</u> : on note que, dans tous les cas, si (MM′) passe par le foyer F [1], la droite (PF) est perpendiculaire à (MM′).

VIII



1) On note Φ le cercle directeur centré en F, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les cercles passant par F′ et centrés respectivement en M et M′. Comme la droite (MM′) passe par F′, il sont aussi tangents en ce point. Nous savons qu'ils sont tangents à Φ, soit φ et φ' les points de contact. Il résulte du premier théorème de Poncelet que (F′P) est la tangente commune à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ en F′. Il s'ensuit immédiatement que (Pφ) est tangente à $\mathscr{C}$ et Φ en φ. Ainsi, le triangle PFφ est rectangle en φ. On lui applique le théorème de Pythagore, il vient :

$$PF^2 - P\varphi^2 = 4a^2$$

et comme $P\varphi = PF'$, on a bien l'égalité attendue.

$$PF^2 - PF'^2 = 4a^2.$$

2) Le lieu demandé est la droite perpendiculaire à l'axe focal au point H tel que :

$$HF^2 - HF'^2 = 4a^2.$$

Soit O le centre de $\mathscr{E}$, on a :

$$\overline{HF} = \overline{OF} - \overline{OH} \ , \ \overline{HF'} = \overline{OF'} - \overline{OH'} \text{ et } \overline{OF} = -\overline{OF'}.$$

1 On parle alors de corde focale.

On en déduit que :

$$\overline{\mathrm{OF}'}\,.\,\overline{\mathrm{OH}} = a^2.$$

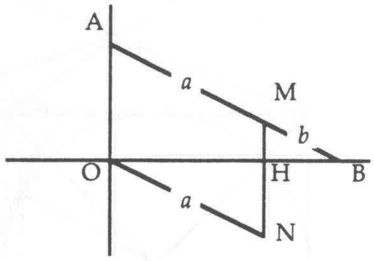
On a donc :

$$\mathrm{OH} = \frac{a^2}{c}.$$

On reconnaît la directrice associée au foyer F'.

3) Ce qui précède vaut pour l'hyperbole. Pour la parabole, on se reporte à l'exercice 6-3. Il est immédiat que F est aligné avec M et M' si, et seulement si, P appartient à la directrice.

IX



On note N le point tel que $\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et H la projection de M sur D'. Il est clair que M est sur la droite (AB) et que le lieu de N est le cercle de rayon a, centré en O. Comme on a :

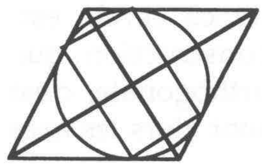
$$\frac{\overline{\mathrm{HM}}}{\overline{\mathrm{HN}}} = \frac{\overline{\mathrm{MB}}}{\overline{\mathrm{NO}}} = \frac{\overline{\mathrm{MB}}}{\overline{\mathrm{MA}}} = -\frac{b}{a},$$

le lieu cherché est l'ellipse image du cercle par l'affinité orthogonale d'axe D' parallèlement à D et de rapport $-\frac{b}{a}$.

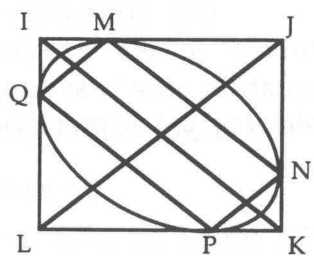
Remarque : l'application classique est la méthode dite "de la bande de papier" qui permet le tracé point par point d'une ellipse donnée par ses sommets.

X

1) Ces cordes considérées sont les images par affinité des cordes d'un cercle qui ont une direction donnée. Les milieux de ces dernières décrivent le diamètre perpendiculaire. En outre, les tangentes aux extrémités du diamètre obtenu sont parallèles aux cordes considérées. Or, l'affinité conserve milieu et parallélisme ... [1]



2) Un parallélogramme circonscrit à un cercle est un losange et les points de contact forment un rectangle dont les côtés sont parallèles aux diagonales du losange. La propriété attendue découle immédiatement de la conservation du parallélisme par les affinités.



3) Soit IJKL le parallélogramme formé par les tangentes données et M, N, P, Q les points de contact. On déduit du théorème de Thalès des relations de la forme :

$$\mathrm{MN} = \mathrm{PQ} = x\mathrm{IK} \text{ et } \mathrm{MQ} = \mathrm{NP} = (1-x)\mathrm{JL}.$$

Si, de plus, IJKL est un rectangle, IL et JK sont deux diamètres du cercle orthoptique, le périmètre en question est alors :

$$4\sqrt{a^2+b^2}.$$

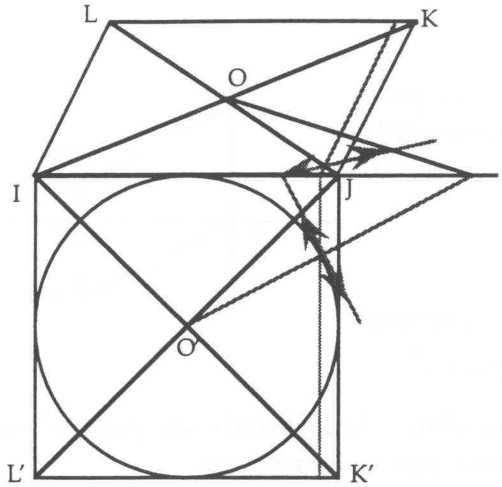
---

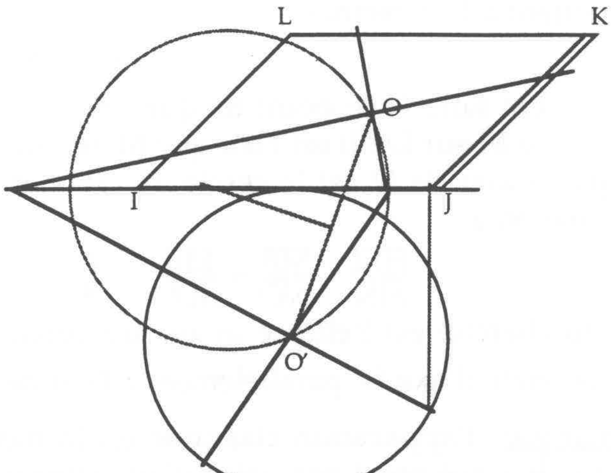
1 On définit ainsi, entre les diamètres d'une ellipse, une relation involutive appelée la conjugaison qui trouvera plus tard une interprétation plus générale.

XI

Soit IJKL le parallélogramme donné et $\mathscr{E}$ une telle ellipse, on considère le carré de côté IJK'L'. L'affinité d'axe (IJ) qui transforme L en L', transforme K en K' et $\mathscr{E}$ en le cercle $\mathscr{C}$ inscrit dans le carré. L'affinité inverse permet d'effectuer la construction demandée.

Remarque : dans la pratique, on s'aidera de la correspondance entre points déjà connus : centres, milieux des côtés ... et de la conservation du parallélisme, afin que les tracés occupent un espace raisonnable.





Les axes, de $\mathscr{E}$ sont deux diamètres perpendiculaires qui sont les images par l'affinité de deux diamètres perpendiculaires de $\mathscr{C}$. Leurs points communs avec l'axe de l'affinité sont donc, s'ils existent, deux points diamétralement opposés sur un cercle passant par les centres de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{E}$. Si l'affinité n'est pas orhogonale, le centre de ce cercle est le point d'intersection de (IJ) avec la médiatrice de OO'. La construction qui en découle livre effectivement les axes de $\mathscr{E}$. Si l'affinité est orthogonale, c'est que le parallélogramme donné est un rectangle, les axes de $\mathscr{E}$ en sont alors les axes de symétrie.

XII

On considère une hyperbole $\mathscr{H}$, rapportée à ses assymptotes elle admet pour équation $xy = 1$, sa tangente au point de coordonnées (x_0, y_0) admet pour équation :

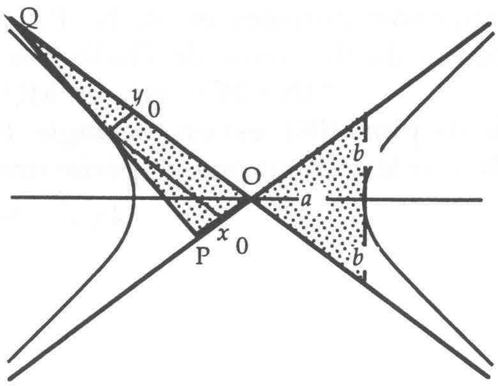
$$y - y_0 = -\frac{1}{x_0^2}(x - x_0)$$

Elle coupe les axes de coordonnées aux points de coordonnées :

$$\mathrm{P} : (0, 2y_0) \quad \text{et} \quad \mathrm{Q} : (2x_0, 0).$$

Le rapport entre l'aire du triangle OPQ et celui formé par les sommets du repère s'exprime :

$$2x_0 . 2y_0 = 4.$$



Il est bien constant. On peut l'évaluer en fonction des paramètres habituels en considérant le triangle formé par les asymptotes et la tangente en l'un des sommets. On obtients ab.

XIII

Soit a, b, c les abscisses de A, B, C, les équations des hauteurs issues de B et C s'écrivent à partir des relations :

$$(c-a)(x-b)+k^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)\left(y-\frac{k^2}{b}\right)=0$$

et

$$(b-a)(x-c)+k^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\left(y-\frac{k^2}{c}\right)=0.$$

Ces droites se coupent au point de coordonnées :

$$x=-\frac{k^4}{abc}\ ,\ y=-\frac{abc}{k^2}.$$

c'est-à-dire sur l'hyperbole considérée.

Remarque : comme il n'a été posé aucune hypothèse particulière sur a, b et c, on a montré que les hyperboles équilatères passant par les trois sommets d'un triangle passent aussi par son orthocentre..

2) La droite (BC) coupe les axes de coordonnées aux points α et α' dont l'abscisse et l'ordonnée sont respectivement :

$$b+c \quad \text{et} \quad \frac{k^2}{b}+\frac{k^2}{c}$$

La perpendiculaire à (BC) en α et les droites définies de façon analogue pour les autres côtés du triangle ont pour équations :

$$\begin{cases} bcx-k^2y=bc(b+c) \\ cax-k^2y=ca(c+a) \\ abx-k^2y=ab(a+b) \end{cases}$$

Elles concourent au point de coordonnées :

$$x=a+b+c\ ,\ y=\frac{abc}{k^2}.$$

Ces considérations s'appliquent en échangeant x et y et en remplaçant respectivement :

$$a\ ,b \text{ et } c \text{ par } \frac{k^2}{a},\ \frac{k^2}{b},\ \frac{k^2}{c}.$$

Elles montrent que les perpendiculaires aux côtés du triangles en leurs points d'intersection avec l'axe (Oy) concourent au point de coordonnées :

$$x=\frac{k^4}{abc} \quad \text{et} \quad y=k^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

XIV

Comme l'hyperbole est équilatère on peut choisir un repère orthonormé dont les axes de coordonnées sont les asymptotes de $\mathscr{H}$. Cette courbe admet alors pour équation :

$$xy=k^2.$$

Soit a l'abscisse de A, les coordonnées de A et de A' sont donc :

$$\left(a\ ,\frac{k^2}{a}\right) \quad \text{et} \quad \left(-a\ ,-\frac{k^2}{a}\right)$$

L'équation du cercle considéré s'exprime :

$$(x-a)^2+\left(y-\frac{k^2}{a}\right)^2=4\left(a^2+\frac{k^4}{a^2}\right).$$

Elle prend la forme suivante :

$$x^2+y^2-2ax-2\frac{k^2}{a}y-3\left(a^2+\frac{k^4}{a^2}\right)=0.$$

En remplaçant y par $\frac{k^2}{x}$, on obtient l'équation dont les racines sont les abscisses des points communs au cercle et à l'hyperbole :

$$x^4-2ax^3-3(a^2+\frac{k^4}{a^2})x^2-2\frac{k^4}{a}x+k^4=0.$$

Nous savons que cette équation admet quatre racines réelles ou imaginaires et que l'une d'elles est $-a$. Notons x_1, x_2, x_3, les trois autres. elles sont les racines de l'équation suivante :

$$x^3-3ax^2-3\frac{k^4}{a^2}x+\frac{k^4}{a}=0.$$

Les coordonnées du centre de gravité des points communs autres que A' s'expriment :

$$X=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3) \text{ et } Y==\frac{1}{3}(\frac{k^2}{x_1}+\frac{k^2}{x_2}+\frac{k^2}{x_3})=\frac{k^2}{3}\frac{x_1x_2+x_1x_2+x_2x_3}{x_1x_2x_3}$$

On les calcule via les relations classiques entre coefficients et racines d'une équation algébrique. On sait que :

$$s_1=x_1+x_2+x_3=3a \quad , \quad s_2=x_1x_2+x_1x_2+x_2x_3=-3\frac{k^4}{a^2} \quad , \quad s_3=x_1x_2x_3=-\frac{k^4}{a}.$$

Ce qui donne :

$$X=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)=a,$$

$$Y=\frac{k^2}{3}\frac{x_1x_2+x_1x_2+x_2x_3}{x_1x_2x_3}==\frac{k^2}{3}(-3\frac{4^2}{a^2})(-\frac{a}{k^4})=\frac{k^2}{a}.$$

Il apparaît ainsi que le centre de gravité du triangle considéré est le centre de son cercle circonscrit. Il s'agit donc d'un triangle équilatéral.

<u>Mieux</u> : on on obtient ce résultat plus rapidement en identifiant au corps des nombres complexes, le plan rapporté au repère orthonormé considéré. Notons z l'affixe du point courant, l'équation $xy=k$ devient :

$$z-\bar{z}^2=4ixy=4k^2i.$$

On note a l'affixe de A. On effectue un changement d'origine en posant $Z=z-a$, les équations du cercle et de l'hyperbole deviennent :

$$Z\bar{Z}=4a\bar{a} \quad \text{et} \quad (Z+a)^2-(\bar{Z}+\bar{a})^2=4k^2i.$$

On remplace dans la seconde $\bar{Z}$ par son expression en fonction de Z donnée par la première. On tient compte du fait que A est sur $\mathscr{H}$, ce qui se traduit $a^2-\bar{a}^2=4k^2i$. On obtient l'équation admettant pour racines les affixes des points communs. Elle s'écrit :

$$Z^4+2aZ^3-8a\bar{a}^2Z-16a^2\bar{a}^2=0.$$

Sachant que $-2a$ est racine, le membre de gauche se factorise comme suit :

$$(Z^4+2a)(Z^3-8a\bar{a}^2)=0.$$

Sous cette forme, il est immédiat que les trois racines autres que $-2a$ ont pour images les sommets d'un triangle équilatéral de centre A.

XV

Il s'agit de construire les cercles passant par un point donné (le foyer) et tangents à deux droites données (les directrices). On utilise un cercle auxiliaire tangent aux deux droites puis deux homothéties ou deux translations suivant que les droites sont sécantes ou parallèles. On écarte évidemment le cas où le point serait sur l'une des droites,

- si les droites données sont sécantes, il y a toujours deux solutions ;
- si elles sont parallèles, il y a deux solutions si le point donné est situé entre elles et pas de solution dans le cas contraire.

XVI

De façon générale, si l'on considère deux paraboles, $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ayant des directrices parallèles et qu'on note F et F' leurs foyers, H et H' les projections des foyers sur leur directrices respectives, l'unique similitude directe qui transforme F en F' et H en H' conserve la condition :

$$\text{“}\frac{FM}{mM}=1\text{”}.$$

elle transforme donc $\mathscr{P}$ en $\mathscr{P}'$.

Les paramètres étant différents, la similitude en question n'est pas une isométrie et comme les directrices sont parallèles c'est une homothétie. Les tangentes issues du centre d'homothétie, si elles existent, sont évidemment communes aux deux paraboles. Il ne peut pas en exister d'autre car une parabole admet une tangente, au plus, pour chaque direction. On est alors ramené à la situation traitée à l'exercice 6-3.

- Si le centre d'homothétie est extérieur à l'une, il est extérieur à l'autre et il y a deux solutions.
- Si le centre d'homothétie est intérieur à l'une, il est intérieur à l'autre et il n'y a pas de solution.
- Entre les deux, il y a le cas où le centre d'homothétie est un point commun aux deux paraboles, il y a alors une unique tangente commune.

XVII

1) Soit a et m et n les ordonnées des points A, M et N. Les droites (AN) et (MN) sont perpendiculaires, si et seulement si :

$$4p^2+(a+m)(a+n)=0\ .$$

La droite (MN) admet pour équation :

$$2px-(m+n)y+mn=0.$$

On tient compte de la relation précédente, il vient :

$$2p(x-\frac{a^2}{2p}-2p)-(m+n)(y+a)=0.$$

Ce qui prouve que cette droite passe par le point I de coordonnées :

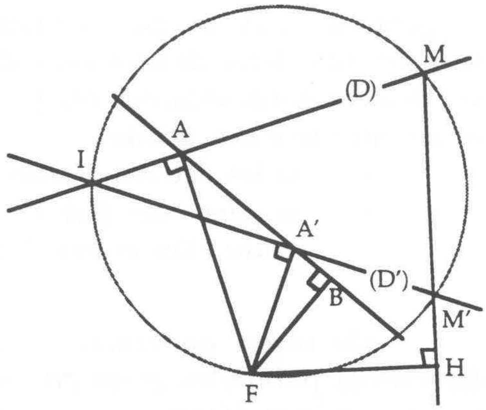
$$(\frac{a^2}{2p}+2p\,,-a).$$

2) Il est clair que la translation de vecteur $(2p\,,0)$ transforme en I le point symétrique de A par rapport à (Ox). Le lieu de I est donc la parabole d'équation :

$$y^2=2p(x-2p).$$

XVIII

On note A et A′ les projections de F sur D et D′ et B la projection de F sur (AA′). Comme s transforme A en A′ et M en M′, la similitude de centre F qui transforme A en M transforme A′ en M′, elle transforme donc aussi B en H. Il s'ensuit, toujours en vertu du même argument, que la similitude de centre F qui transforme A en B transforme aussi M en H. Le lieu de H est donc l'image de D par cette dernière transformation. C'est la droite perpendiculaire à (FB) en B, c'est-à-dire (AA′). On en déduit que (MM′) enveloppe la parabole de foyer F dont la tangente au sommet est la droite (AA′) (cf. exercice 3).



On note que cette parabole est tangente à D et à D′ respectivement en l'image inverse et l'image de I par s.

XIX

1) On note Γ le cercle circonscrit à ABC. Soit F un point de Γ, autre que les sommets, la similitude de centre F qui transforme B en C transforme la droite (AB) en la droite D′ passant par C et telle que :

$$(FB, BA) = (FC, D') \pmod{\pi}.$$

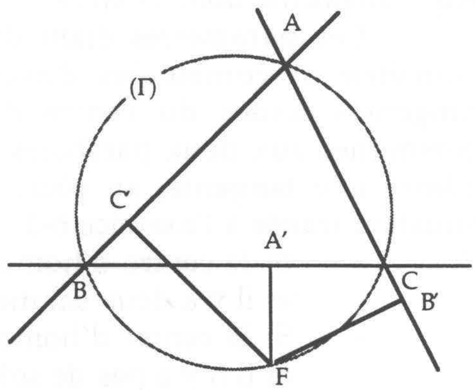
Comme F appartient à Γ, on a :

$$(BF, BA) = (CF, CA) \pmod{\pi}.$$

Ce qui montre que :

$$(CA, D') = (FC, D') - (CF, CA) = 0 \pmod{\pi}.$$

Comme D′ passe par C, il est établi que D′ = (AC).



Les acquis de l'exercice précédent montrent que A′, B′ et C′ sont alignés sur la tangente au sommet d'une parabole tangente aux trois côtés du triangle.

Réciproquement, si A′, B′ et C′ sont sont sur une droite Δ, les trois côtés du triangle sont tangents à la parabole de foyer F dont Δ est la tangente au sommet. Dans ces conditions, la similitude de centre F qui tranforme C′ en B′ transforme (AB) en (AC). Comme (BC) est tangente à la parabole, il résulte de l'exercice précédent que l'image de B par cette transformation est C. Il est alors classique que le centre de la similitiude appartient à Γ [1].

2) Ce qui précède établit que les paraboles tangentes aux trois côtés d'un triangle sont celles dont le foyer appartient au cercle circonscrit et la tangente au sommet est la droite de Simson de ce point. On exclut évidemment les sommets.

La tangente au sommet d'une telle parabole passe par les symétriques de F par rapport au trois côtés. Soit H l'orthocentre du triangle, montrer que cette droite passe par H équivaut à justifier que sa symétrique par rapport à (BC) passe par le symétrique de H par rapport à ce même axe, c'est-à-dire l'intersection de Γ avec la hauteur (AH), notons H_1 ce point.

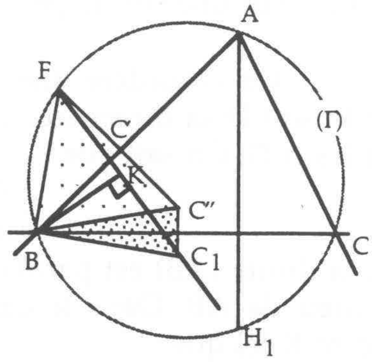
[1] On a ainsi établit la propriété de la droite de Simson de façon économique et peu banale (voir "les transformations du plan : chapitre 6 - exercices 5 et 6).

Soit C″ le symétrique de F par rapport à (AB) et C_1 le symétrique de C″ par rapport à (BC) et K le milieu de FC_1. Comme C_1 est l'image de F par la rotation de centre B et d'angle $2(BA, BC) \pmod{2\pi}$, (FK) est la médiatrice de FC_1, ce qui entraîne que :

$$(BF, BK) = (BA, BC) \pmod{\pi}$$

et justifie le début du calcul qui suit :

$$\begin{aligned}(FB, FC_1) &= (FB, BK) + (BK, FC_1) \pmod{\pi}\\ &= (BA, BC) + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}\\ &= (BA, BC) + (BC, AH) \pmod{\pi}\\ &= (AB, AH) \pmod{\pi}\\ &= (AB, AH_1) \pmod{\pi}\\ &= (FB, FH_1) \pmod{\pi}\end{aligned}$$



Ce qui montre que (FC_1) passe par H_1 et, comme on l'a mentionné, que la directrice passe par H.

XX

On utilise l'équation polaire de la conique suivant les conventions posée dans le cours. On utilise le "repère mobile" $(O, \vec{u}, \vec{u}_1)$, tel que :

$$\vec{u} = \cos\theta\ \vec{i} + \sin\theta\ \vec{j} \ \text{ et } \vec{u}_1 = (\vec{u})' = -\sin\theta\ \vec{i} + \cos\ \theta\ \vec{j}.$$

On désigne par M le point courant, on a $\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{u}$. Le vecteur dérivé s'exprime :

$$(\overrightarrow{OM})'(\theta) = \rho'\,\vec{u} + \rho\,\vec{u}_1.$$

Relativement au repère mobile, la tangente en M admet pour équations paramétriques :

$$X = \rho + \lambda\rho' \ \text{ et } \ Y = \lambda\rho.$$

Si la dérivée de ρ est non nulle, la tangente en M coupe la perpendiculaire en O au rayon-vecteur au point tel que $X = \rho + \lambda\rho' = 0$, dont l'ordonnée s'exprime donc :

$$Y = -\frac{\rho^2}{\rho'}.$$

On calcule cette expression :

$$-\frac{\rho'}{\rho^2} = \frac{d}{d\theta}\frac{1}{\rho} = \frac{d}{d\theta}\frac{1 + e\cos\theta}{p} = -\frac{\sin\theta}{d}.$$

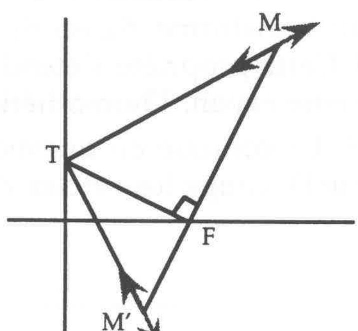
On obtient ainsi :

$$Y = \frac{-d}{\sin\theta}.$$

Dans le repère fixe, ce point a pour coordonnées $(-Y\sin\theta, Y\cos\theta)$ c'est-à-dire :

$$(d, -\frac{d}{\tan\theta}).$$

3) Il est clair que le point considéré est sur la directrice et qu'il est commun à la tangente au point M′ dont l'angle polaire est $\theta + \pi$. On a donc démontré le théorème qui suit.



<u>Théorème</u> : étant donnée une conique, soit F l'un de ses foyers, on considère une corde MM′ qui passe par F et n'est pas l'axe focal. Les tangentes en M et M′ se coupent sur la directrice associée à F au point P tel que les droites (PF) et (MM′) soient perpendiculaires.

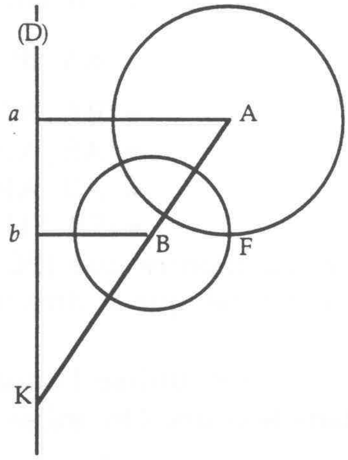
Comme on sait que la directrice est extérieure à la conique, par chacun de ses points il passe deux tangentes. On en déduit la variante qui suit.

<u>Théorème</u> : étant donnée une conique, soit F l'un de ses foyers, par tout point P de la directrice associée, il passe deux tangentes. Leurs points de contact sont alignés avec F sur une droite perpendiculaire à (PF).

XXI

On considère une conique de foyer F, passant par A et B, soit D sa directrice. On note a et b les projections de A et B sur D. On sait que :

$$\frac{FA}{aA} = \frac{FB}{bB} = e.$$



Si la droite (AB) est parallèle à D, on a $aA = bB$, F est alors le milieu de AB. Dans le cas contraire, (AB) coupe D en un point K tel que :

$$\frac{KB}{KA} = \frac{bB}{aA} = \frac{FB}{FA}$$

Notons $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$ les cercles centrés en A et B qui passent par F. La relation obtenue montre que K est le centre de l'une des homothéties qui transforme $\mathscr{C}_A$ en $\mathscr{C}_B$ [1]

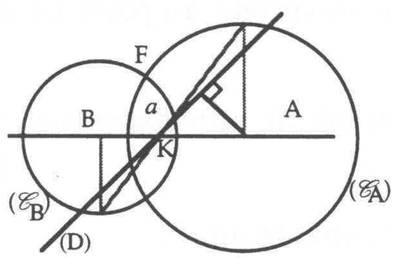
Réciproquement, soit K un tel point et D une droite passant par K, la relation précédente est vérifiée elle entraîne :

$$\frac{FA}{aA} = \frac{FB}{bB}.$$

Les points A et B sont alors sur une même conique de foyer F et de directrice D. Il convient, si $FA = FB$, d'ajouter que toute droite parallèle à (AB) est solution. Dans les deux cas on d'exclut celle des droites qui passe par F.

On peut préciser la nature de la conique en question. En effet si K est le centre de l'homothétie négative, A et B sont situés de part et d'autre de D, il est clair que :

$$aA \leq AK < FA$$



on est alors en présence d'une hyperbole [2]. Dans le cas contraire, on aura :

$$aA < FA \quad , \quad aA = FA \quad \text{ou} \quad aA > FA \quad ,$$

suivant que D coupe les cercles $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$, leur est tangente ou ne les rencontre pas. on est alors respectivement en présence d'une hyperbole, d'une parabole ou d'une ellipse.

En résumé, toute droite D, passant par le centre de l'une des homothéties qui transforme $\mathscr{C}_A$ en $\mathscr{C}_B$, est la directrice d'une conique de foyer F passant par A et B. Cette propriété s'étend aux droites parallèles à (AB), dans le cas où les cercles ont même rayon, l'homothétie positive est alors remplacée par la translation de vecteur $\overline{AB}$. La conique en question est une hyperbole, une parabole ou une ellipse suivant que D, coupe les cercles $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$, leur est tangente ou ne les rencontre pas.

---

1 On note, en passant, que (KF) est l'un des axes de symétrie de la réunion des droites (FA) et (FB), propriété qui se conserve si (AB) passe par F.

2 * De toutes façons, on sait que les hyperboles sont les seules coniques ayant de points situés de part et d'autre d'une directrice.

2) On considère trois points non alignés A, B et C et un point F distinct. On commence par examiner le cas où les distances FA, FB et FC sont différentes. On convient de noter :

- I (resp. I') le centre de l'homothétie positive (resp. négative) qui transforme $\mathscr{C}_B$ en $\mathscr{C}_C$,
- J (resp. J') le centre de l'homothétie positive (resp. négative) qui transforme $\mathscr{C}_C$ en $\mathscr{C}_A$,
- K (resp. K') le centre de l'homothétie positive (resp. négative) qui transforme $\mathscr{C}_A$ en $\mathscr{C}_B$,

En composant ces homothéties dans l'ordre :

$$\mathscr{C}_A \longrightarrow \mathscr{C}_B \longrightarrow \mathscr{C}_C \longrightarrow \mathscr{C}_A.$$

On obtient l'application identique si le nombre des homothéties négatives est pair et le demi tour de centre A dans le cas contraire. Ce qui montre qu'on a les alignements suivants :

IJK , IJ'K' , I'JK' , I'J'K [1].

Il existe donc quatre solutions, les trois dernières sont des hyperboles. Comme on l'a vu plus haut, la première est une hyperbole, une parabole ou une ellipse, suivant que la droite (IJK) coupe les trois cercles, en est une tangente commune ou ne rencontre aucun d'eux.

Si $FA \neq FB = FC$, le raisonnement précédent s'applique en remplaçant l'homothétie de centre K par la translation de vecteur $\overline{AB}$. La conclusion s'énonce alors :

- on a les alignements IJ'K' et I'JK'
- les droites (IJ) et (I'J') sont parallèles à (AB).

Si $FA = FB = FC$, on remplace les trois homothéties positives par les translations correspondantes. Les points I', J' et K' sont alors les milieux de BC, CA et AB. On obtient alors trois hyperboles et la solution dont la directrice a disparu est, évidemment, le cercle de centre F qui passe par A, B et C.

---

1 On retient cette propriété en la formulant : les centres des homothéties qui transforment deux à deux trois cercles donnés sont les sommmets d'un quadrilatère complet.

IX. L'espace

I

On note A le point donné et P, P′ les deux plan donnés.

1) De façon générale, si un plan, coupe P et P′ suivant deux droites parallèles D et D′, deux cas peuvent se présenter :

- P et P′ sont parallèles et alors tout plan qui coupe l'un recoupe l'autre et les intersections sont des droites parallèles ;
- P et P′ se coupent et alors leur intersection est une droite Δ, parallèle à D et D′.

Ainsi, dans le premier cas, tout plan passant par A, autre que celui qui est parallèle à P et P′ répond à la demande. Dans le second, tout plan contenant la parallèle à Δ, qui passe par A, convient, à deux exceptions près : les plans respectivement parallèles à P et à P′.

2) Soit Δ la droite parallèle aux intersections qui passe par A, tout plan, contenant Δ remplit la condition – les cas d'exception sont les mêmes que ci dessus.

II

On considère deux droites D, D′ et un point A. On écarte le cas sans intérêt où A serait sur D ou D′. On peut donc considérer les plans qui passent par A et contiennent respectivement D et D′. Comme ils ont un point commun, ou bien :

- il sont sécants, auquel cas leur intersection est la seule droite passant par A qui puisse s'appuyer sur D et D′ – cette condition est effectivement remplie si cette droite n'est parallèle ni à D, ni à D′ ;
- il se confondent et alors, il existe une infinité de solutions.

III

(a) L'intersection de deux des plans est une droite. Si elle coupe le troisième, c'est en un point, et un seul, qui est, de ce fait, le seul commun aux trois plans. Dans le cas contraire, ces droites sont sans point commun et comme elles sont deux à deux coplanaires, elles sont parallèles ([1]).

(b) Ces droites, n'étant pas coplanaires, définissent trois plans, deux à deux sécants, suivant des droites sécantes. Il découle de (a) que ces plans ont un point commun unique. Celui-ci est commun aux trois droites.

IV

Les nombres obtenus sont évidemment C_n^2 et C_n^3.

V

1) Les lieux de I et J sont les images de D par les homothéties de rapport $\frac{1}{2}$ ayant pour centres A et B.

2) Le lieu du centre de gravité du triangle ABM est l'image de D par l'homothétie de rapport $\frac{1}{3}$ dont le centre est le milieu de AB.

---

1 Un sytème de trois équations linéaires à trois inconnues admet, en général, une solution unique. Si tel n'est pas le cas, soit il n'y a aucune solution , soit il en existe une infinité.

3) Les trois médianes du triangle ABC ont en commun de passer par un point fixe : A, B ou le mileu de AB et de s'appuyer sur une droite fixe, le lieu du centre de gravité.

VI

Toute droite (NN') est l'images d'une droite (MM') par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$, elle est donc contenue dans le plan parallèle à P qui passe par le milieu I de AB. Réciproquement, si une droite de ce plan, ne passe pas par I, elle convient ; si elle passe par I, elle doit être parallèle à D ou D'.

VII

On rappelle qu'un plan coupe deux plans sécants selon des droites parallèles si, et seulement si, il est parallèle à leur intersection.

1) On note les droites données *a*, *b*, *c* et *d*, on en choisit deux, par exemple *a* et *b*, comme elles sont sécantes, elle définissent un plan qu'on note (*ab*). Les plans (*ab*) et (*cd*) sont sécants de même que (*ac*) et (*bd*). Les droites

$$\Delta = (ab) \cap (cd) \text{ et } \Delta' = (ac) \cap (bd)$$

sont distinctes – sinon le plan (*ab*), contenant *a* et Δ contiendrait aussi *c*, en contradiction avec l'hypothèse posée – elles définissent donc un plan P. Tout plan parallèle à P, au sens strict, coupe (*ab*) et (*cd*) (respectivement (*ac*) et (*bd*)) suivant deux droites parallèle à Δ (respectivement Δ'). Il répond donc à l'attente.

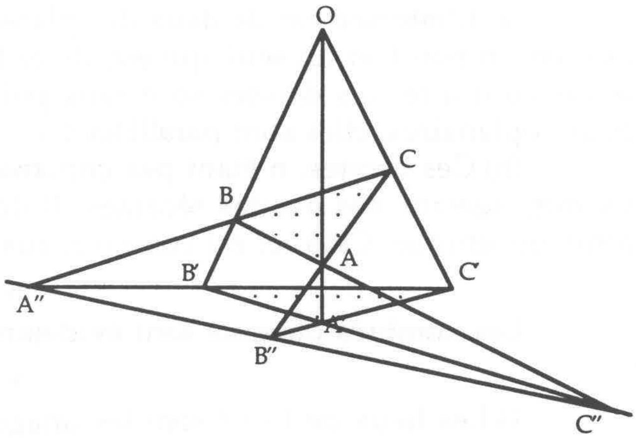
2) On note que les droites données définissent $C_4^2 = 6$ plans distincts, soit Π l'ensemble ainsi formé.

Si un plan est solution, il coupe, de deux façons, deux plans de Π, suivant des droites parallèles. Il est donc parallèle à leur intersection. Il est alors possible d'adapter les notations de façon à se trouver dans la situation décrite ci-dessus.

Réciproquement le point 1 a montré que chacun des choix possibles donne une direction dont les plans sont solutions.

Considérons un plan de Π, il contient deux des droites données, les deux qui restent déterminent le seul plan qu'il est possible de lui associer. Il existe donc $6 : 2 = 3$ possibilités. Ce qui définit trois **les** mble des solutions est constitué de tous les plans dont la direction est l'une d'elles.

VIII



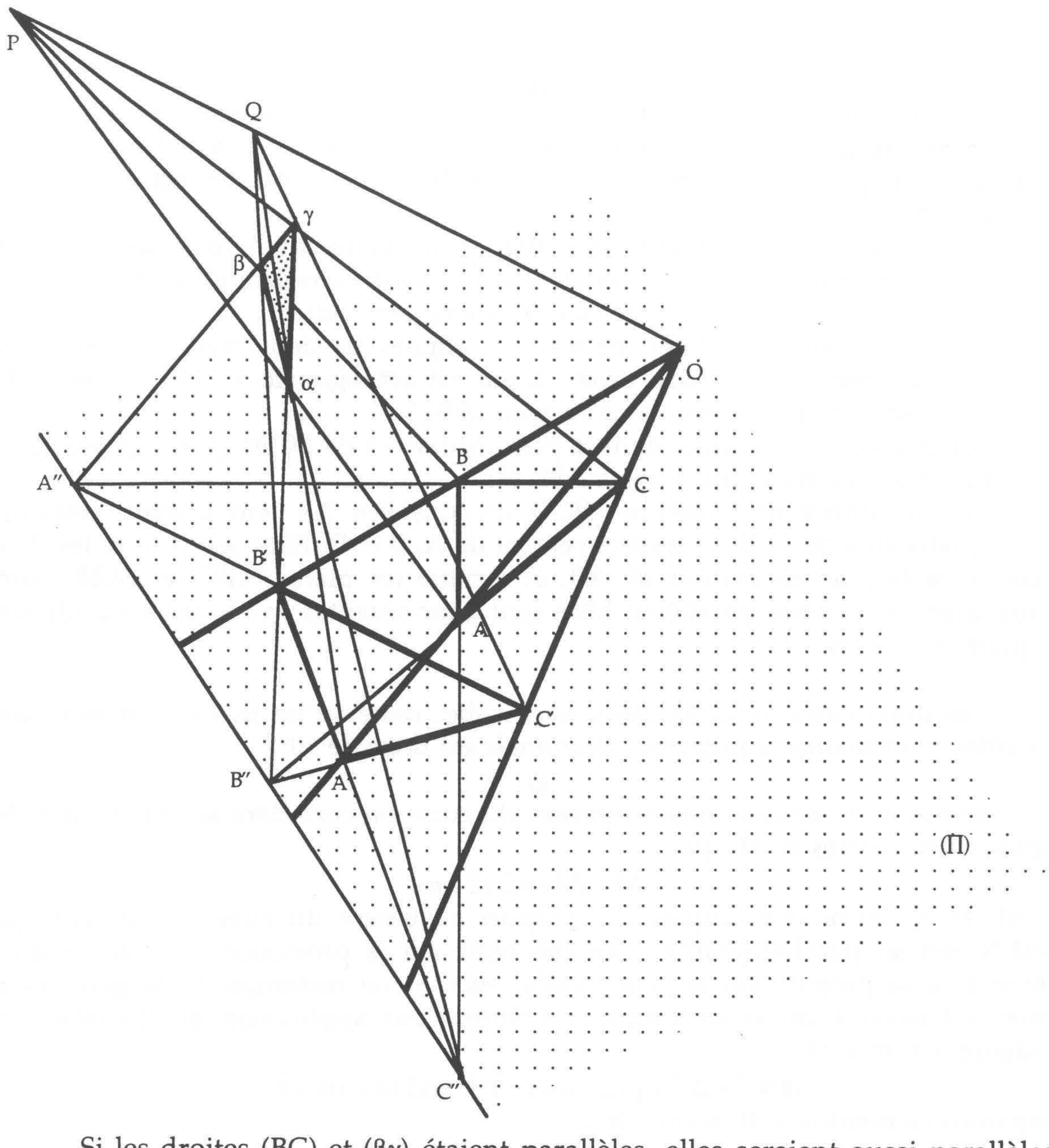
Dans le cas où les plans des deux triangles sont distincts, ils sont évidemment sécants. Les points A", B" et C" sont à l'intersection de ces deux plans.

Réciproquement, dans ce cas, le simple fait que ces points existent entraîne que les côtés homologues des triangles définisssent trois plans sécants deux à deux et a pour conséquence que les droites (AA'), (BB') et (BB') sont concourantes ou parallèles.

Si les deux triangles sont dans un même plan Π, on choisit arbitrairement un plan π qui coupe Π suivant la droite (B"C") et un point P extérieur à ces deux plans. La perspective de centre P de Π sur π transforme le triangle ABC en $\alpha\beta\gamma$.

---

1 Comme les six sommets d'un quadrangle défínssent trois diagonales qui sont toujours les sommets d'un vrai triangle.



Si les droites (BC) et (βγ) étaient parallèles, elles seraient aussi parallèles à (B″C″). Comme par hypothèse (BC) et (B′C′) sont sécantes, (B′C′) coupe (B″C″). On pourrait alors échanger les rôles des triangles ABC et A′B′C′, ce qui produirait une contradiction. Cette éventualité est donc exclue.

La réciproque ci-dessus s'applique aux triangles αβγ et (A′B′C′). Elle montre qu'ils sont en perspective d'un point Q de la droite (OP). Les côtés βγ et B′C′ sont dans un même plan. Ainsi, les droites (BC), (B′C′) et (βγ) sont deux à deux coplanaires. Elles sont donc concourantes ou parallèles. La deuxième éventualité est exclue par hypothèse.

En conclusion, les droites (BC), (B′C′) et (βγ) se coupent en un point commun aux plans Π et π. C'est-à-dire que A″ appartient à la droite (B″C″). Le théorème est alors démontré pour le plan.

Propriétés métriques

IX

1) Soit A, B et C trois points de l'espace, un point est équidistant de A, B et C si, et seulement si, il est équidistant de A et B et de A et C. C'est-à-dire si, et seulement si, il appartient aux plans médiateurs de AB et de AC. On est donc amené à envisager deux cas.

- Si les points A, B et C sont alignés, les plans médiateurs de AB et AC sont parallèles et il n'existe aucun point équidistant de A, B et C, à moins que deux d'entre eux ne soient confondus.
- Si les points A, B et C ne sont pas alignés, les deux plans médiateurs se coupent suivant une droite Δ qui est orthogonale à (AB) et (AC), elle est donc perpendiculaire au plan (ABC).

Ajoutons que Δ est aussi dans le plan médiateur de BC et qu'elle passe par le centre du cercle circonscrit au triangle ABC ([1]).

2) Etant donné un tétraèdre ABCD, on considère les deux droites, lieux des points équidistants de A, B, C, respectivement de A, B et D. Elles sont toutes les deux situées dans le plan médiateur de AB, et comme les plans (ABC) et (ABD) sont sécants, elles ne sont pas parallèles. Elles sont donc sécantes en un point équidistant des quatre sommets.

X

Les diagonales de deux faces d'un cube, issues d'un même sommet, sont deux côtés d'un triangle équilatéral. Leur angle est donc de 60°.

XI

Soit A et A' deux sommets opposés du cube, on considère les points M et N, situés sur deux arêtes et tels que :

$$AM = AN = 2\sqrt{2} \text{ cm}.$$

Soit M' et N' leurs symétriques par rapport au centre du cube. Il est clair que MNM'N' est un parallélogramme. Le théorème sur la projection d'un angle droit montre qu'il se projette sur le plan (AMN) suivant un rectangle. La largeur de ce dernier est aussi 4 cm et sa longueur s'obtient par application du théorème de Pythagore. On trouve :

$$MN'^2 = 20^2 + [\sqrt{2}(20 - 2\sqrt{2})]^2 = 1216 - 160\sqrt{2}.$$

Comparons ce nombre à $31^2 = 961$. On a :

$$MN'^2 - 31^2 = 1216 - 160\sqrt{2} - 961 = 255 - 160\sqrt{2} = 5(51 - 32\sqrt{2})$$

$$51^2 = 2061 \quad \text{et} \quad (32\sqrt{2})^2 = 2048$$

Il s'ensuit que :

$$MN'^2 - 31^2 > 0.$$

On a donc :

$$MN' > 31.$$

La règle peut effectivement tenir dans la boîte considérée.

1 Cette droite est appelée l'*axe du cercle*.

XIII

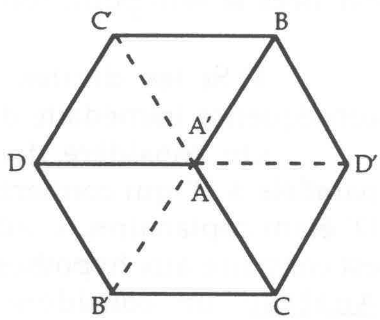
1) Toute projection conserve le parallélisme et le milieu. Chacun de ces deux arguments permet de conclure.

2) Un angle droit se projette orthogonalement sur un plan suivant un angle droit si, et seulement si, il a un côté parallèle au plan de projection.

- Appliquée à deux côtés consécutifs du carré, cette proposition montre que A'B'C'D' est un rectangle si, et seulement si, l'une des deux conditions suivantes est remplie :
  (AB) et (CD) sont parallèles au plan,
  (AC) et (BD) sont parallèles au plan.
- Appliquée aux diagonales du carré, cette proprosition montre que A'B'C'D' est un losange si, et seulement si, l'une des diagonales (AC) ou (BD) est parallèle à P.
- La conjonction des deux conditions ci-dessus, conduit à conclure que le carré se projette suivant un carré si, et seulement si, il est situé dans un plan parallèle au plan donné.

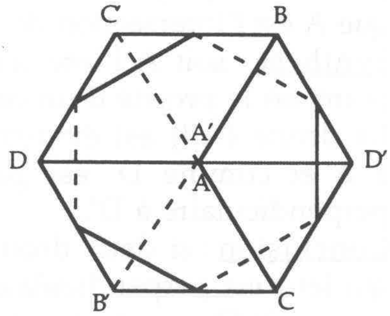
XIII

Soit A un sommet du cube, B, C, D les extrémités des trois arêtes qui lui sont adjacentes, on note A', B', C', D' les sommets respectivement opposés à A, B, C, D. Le triangle BCD et est équilatéral et son plan est perpendiculaire à la diagonale (AA') (cf. 10). Ils se projette donc sur le plan donné suivant un triangle équilatéral dont le centre est la projection commune de A et A'. La symétrie par rapport au centre du cube se conservant par projection, le polygone gauche BC'DB'CD' [1]est un hexagone régulier. On a ainsi déterminé les projections des huit sommets du cube. Il ne reste plus qu'à les joindre convenablement.



XIV

On garde les notations ci-dessus. Le Plan considéré est parallèle à (ABC) et (A'B'C'), il coupe les six arêtes qui ne contiennent ni A ni A' en leurs milieux. Ces points sont les sommets d'un hexagone régulier.



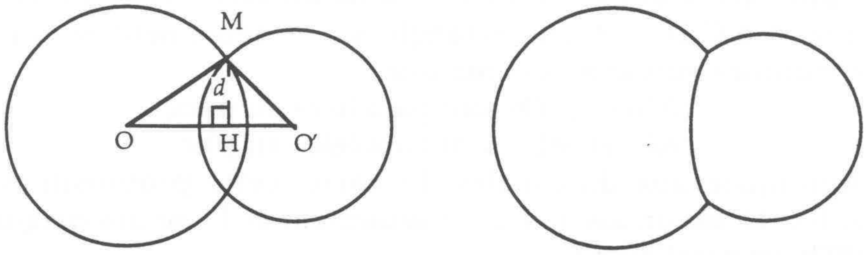
XV

Soit C et C' les deux cercles donnés, Δ et Δ' leurs axes, I et J leurs deux points communs. On sait que Δ et Δ' sont respectivement perpendiculaires à deux plans sécants, elles ne sont donc pas parallèles. De plus, comme elles sont contenues dans le plan médiateur de IJ, elles se coupent en un point O. La sphère de centre O et de rayon OI = OJ contient les deux cercles.

1 i.e. qui n'est pas plan.

XVI

Etant données deux sphères de centres O et O′, de rayons r et r' qui contiennent un même point A, soit H la projection orthogonale de A sur la droite (OO′) et d la distance de A à (OO′). Si M est un point commun aux deux sphères, les triangles OO′M et OO′A ont leurs côtés égaux.



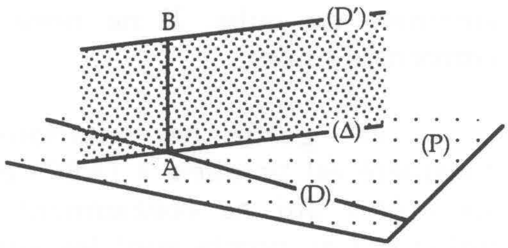
On en déduit que le M se projette sur (OO′) en H et que $HM = d$. Ce point est donc sur le cercle de centre H de rayon d, contenu dans le plan perpendiculaire en H à la droite (OO′). Réciproquement, tout point M du cercle ci-dessus est tel que $OM = r$ et $O'M = r'$, il est donc commun aux deux sphères.

Ce cercle se réduit évidemment à un point dans le cas où $OO' = AO + AO'$, A est alors le seul point communs au deux sphères.

XVII

1) Si les droites sont coplanaires, l'existence d'une telle droite est une conséquence immédaite de la caractérisation des droites perpendiculaires à un plan.

On considère donc deux droites non coplanaires D et D′, soit P le plan parallèle à D′ qui contient D et Δ la projection orthogonale D′ sur P. Notons que Δ et D′ étant coplanaires, si elles étaient parallèles alors D et D′ seraient parallèles, ce qui est contraire aux hypothèses. les droites Δ et D′ sont donc sécantes.



Analyse : on considère deux points A et B, respectivement situés sur D et D′, tels que (AB) soit perpendiculaire à D et D′. Comme D′ et Δ sont parallèles, (AB) est perpendiculaire à P. Le point B se projette sur P en A. Ce qui montre que A est l'intersection de Δ et de D′.

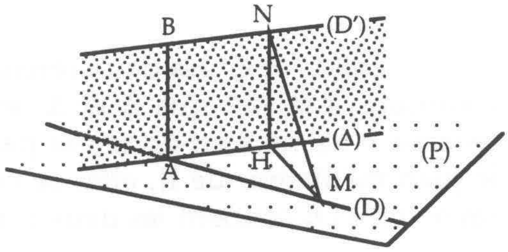
Synthèse : soit A l'intersection de D′ et de Δ, ce point est le projeté d'un certain point B de de D′. La droite (AB) est évidemment perpendiculaire à Δ et comme D′ est parallèle à Δ, (AB) est perpendiculaire à D′.

Conclusion : si deux droites ne sont pas parallèles il existe une droite, et une seule qui leur est perpendiculaire.

2) On garde les données et notations ci-dessus. On considère deux points, M sur D et N sur D′, soit H le projeté de N sur P. Comme le triangle MNH est rectangle en H, et ABNH est un rectangle, on a :

$$MN \leq HN + HM = AB + HM.$$

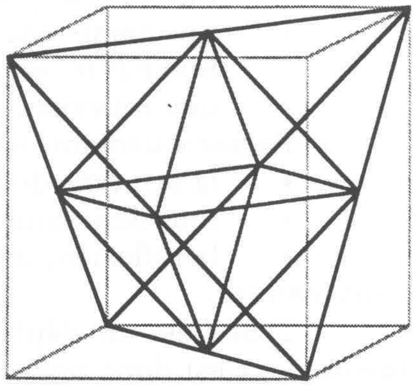
L'égalité $MN = AB$ est vérifiée si M est en A et N en M, et uniquement dans ce cas.



XVIII

On considère un cube d'arête a, soit O son centre. Deux arêtes opposées déterminent un rectangle de largeur a et de longueur $a\sqrt{2}$,. Celui-ci s'inscrit dans un cercle de centre O et de rayon $a\frac{\sqrt{3}}{2}$. Il est alors clair que les huit sommets du cube sont sur la sphère de,centre O et de rayon $a\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Pour le tétraèdre et l'octaèdre réguliers la réponse tombe immédiatemment quand on établit que :



- les diagonales non parallèles de deux faces opposées d'un cube d'arête c sont deux arêtes opposées d'un tétraèdre régulier d'arête $c\sqrt{2}$,
- les centres des douze faces d'un cube d'arête c sont les sommets d'un octaèdre régulier d'arête :

$$c\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On obtient ainsi le rayon de la sphère circonscrite :

– au tétraèdre : $a\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ – à l'octaèdre : $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

<u>Remarque</u> : : on peut encore noter que la sphère circonscrite à l'octaèdre est celle inscrite dans le cube.

XIX

Etant données deux points distincts A et B , on note leur milieu O et Π leur plan plan médiateur. On considère une isométrie *f*, qui échange A et B. Il est immédiat que O est un point fixe de *f* et que Π est un plan globablement invariant par *f*.

1) Si *f* est involutive, on sait que *f* peut être soit :

- une symétrie centrale, elle admet un unique point invariant, c'est O,*f* est donc la symétrie de centre O ;
- un demi-tour, son axe Δ, passe par O et (AB) étant une droite invariante, est perpendiculaire à Δ.
- une réflexion, son plan est P.

Réciproquement, il est évident que :

- la symétrie de centre O,
- tout demi-tour, dont l'axe Δ, est perpendiculaire en O à (AB),
- la réflexion, de plan P

conviennent.

2) Si *f* est un déplacement, il laisse O invariant, ce n'est pas l'application identique, c'est donc une rotation, dont l'axe Δ est l'ensemble des points invariants. Il s'ensuit que Δ passe par O. Comme tout point de cette droite est équidistant de A et B, c'est une perpendiculaire en O à (AB). On en conclut que *f* est le demi-tour d'axe Δ.

Si *f* est un antidépacement, comme il laisse un point invariant c'est une antirotation et alors ou bien :

- *f* est la symétrie de centre O
- *f* laisse invariant :
  - un plan et un seul, c'est Π ;
  - un point, et un seul, c'est O ;

  f est alors une antirotation de plan O d'axe (AB).

Ici encore la réciproque est évidente.

Conclusion : l'ensemble des isométries qui échangent deux points distincts A et B, de milieu O, est constitué :

- des demi-tours, dont l'axe est une perpendiculaire en O à (AB),
- des antirotations d'axe (AB), de centre O ([1]).

XX

On considère trois demi-tours d_1, d_2, d_3, d'axes Δ_1, Δ_2, Δ_3.

1) Si $d_1 \circ d_2 \circ d_3 = \mathrm{Id}$, alors $d_1 \circ d_2 = d_3$ est un demi-tour, cette condition est réalisée si, Δ_1 et Δ_2 sont perpendiculaires et alors, Δ_3 est perpendiculaire à Δ_1 et Δ_2. La réciproque est immédiate.

Conclusion : le produit de trois demi-tours est l'application identique si, et seulement si, leurs axes sont deux à deux perpendiculaires.

Remarque : si cette condition est remplie, ces trois demi-tours, réunis avec l'iapplication identique, forme un groupe de Klein.

2) Si $d_1 \circ d_2 \circ d_3$ est un demi-tour d, d'axe Δ, alors, $d_1 \circ d_2 = d \circ d_3$ est un déplacement. Si ce n'est pas l'application identique, son axe est bien défini et perpendiculaire à Δ_1, Δ_2, Δ_3 et Δ.

---

1 La symétrie de centre O, et la symétrie par rapport au plan médiateur entrent dans cette catégorie, l'angle de la première est nul et celui de la seconde est π.

Réciproquement, oublions d. Si Δ_1, Δ_2, Δ_3 sont perpendiculaires à une même droite D, Il existe :

- trois plans P_1, P_2, P_3, perpendiculaires à D,
- trois plans Π_1, Π_2, Π_3, contenant D,

tels que :

$$d_1 = s_{P_1} \circ s_{\Pi_1} \ , \ d_2 = s_{P_2} \circ s_{\Pi_2} \ , \ d_3 = s_{P_3} \circ s_{\Pi_3}.$$

Les plans "P" étant perpendiculaires aux plans "Π", les réflexions "s_P" et "s_Π" commutent les unes avec les autres ([1]) on a :

$$d_3 \circ d_2 \circ d_1 = (s_{P_3} \circ s_{P_2} \circ s_{P_1}) \circ (s_{\Pi_3} \circ s_{\Pi_2} \circ s_{\Pi_1})$$

Il est maintenant classique que :

- $s_{P_3} \circ s_{P_2} \circ s_{P_1}$ est une réflexion dont le plan est perpendiculaire à D,
- $s_{\Pi_3} \circ s_{\Pi_2} \circ s_{\Pi_1}$ est une réflexion dont le plan contient D.

On en déduit que $d_3 \circ d_2 \circ d_1$ est un demi-tour dont l'axe est perpendiculaire à D.

Conclusion : le produit de trois demi-tours est un demi-tour si, et seulement si, leur axes sont perpendiculaires à une même droite.

XXI

On considère deux rotations f et g,dont les axes Δ et Δ' ne sont pas coplanaires. Soit A et B les pieds de la perpendiculaire commune à ces deux droites.. On sait qu'il existe deux droites D' et D", respectivement perpendiculaires à Δ en A et à Δ' en B, et telles que :

$$f = d_{AB} \circ d_{D'} \quad \text{et} \quad g = d_{D''} \circ d_{AB}$$

On a donc :

$$g \circ f = d_{D''} \circ d_{D'}.$$

Supposons que D et D' soient coplanaires. Comme elles sont contenues :

- D' : dans le plan perpendiculaire à Δ en A,
- D" : dans le plan perpendiculaire à Δ' en B,

et comme les deux plans en question se coupent suivant (AB), on est dans l'un des cas suivant :

- D' et D" ont un point commun et celui-ci appartient à (AB),
- D' et D" sont parallèles et leur direction commune est celle de (AB).

Elle se confondent donc avec D. Ce qui n'est possible que si f et g sont l'application identique la demande serait alors vide de sens.

On en conclut que $g \circ f$ est un vissage – au sens strict.

Remarque : si l'on se souvient que la composition de deux demi-tours d'axes parallèles distincts donne une translation, on tire la conclusion suivante : le produit de deux rotations est une rotation, si et seulement si, leurs axes sont sécants ou se confondent.

---

1 Elles ne commutent pas entre elles.

XXII

1) Compte-tenu des hypothèses, l'un, au moins, des couples (A, A') et (B, B') est constitué de points distincts. On peut donc supposer $A \neq A'$. Soit P le plan médiateur de AA'. Comme s_P est la seule réflexion qui transforme A en A', elle transforme aussi B en B'. Les droites (AB) et (A'B') sont alors coplanaires. Si elles étaient parallèles, on aurait $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, ce qui est exclu. Ces droites sont donc sécantes en un point C qui appartient à P.

Soit r une rotation, autre que l'application identique, qui transforme A en A' et B en B', $s_P \circ r$ est un antidéplacement qui laisse A et B invariants, c'est donc une réflexion dont le plan contient la droite (AB). On en déduit que l'axe de r est une droite de P qui passe par C.

Réciproquement, soit D une droite de P, passant par C, le plan Π qui contient D et passe par A est bien défini. Il passe aussi par B. Dans ces conditions, $s_\Pi \circ s_P$ est une rotation qui remplit la condition.

2) Si une telle symétrie n'existe pas, B et B' sont distincts – sinon B appartiendrait à P. Si P et P' étaient parallèles, AA' et BB' seraient les bases d'un trapèze propre ou croisé qui, compte-tenu de la condition $A'B' = AB$, admettrait un axe de symétrie ou serait un parallèlogramme, en contradiction avec les conditions posées. Les plans P et P' se coupent donc suivant une droite qu'on note D.

Soit r la rotation d'axe D qui transforme A en A', on a :

$$r = s_\Pi \circ s_P,$$

où P est le plan médiateur de AA' et Π le plan qui contient D et A. Soit B'' l'image de B par s_P, on a :

$$A'B'' = AB = A'B'$$

Comme D est dans le plan médiateur de BB', pour tout point P de cette droite, on a :

$$PB'' = PB = PB'.$$

Ce qui montre que Π est le plan médiateur de B'B''. On en déduit que :

$$r(B) = (s_\Pi \circ s_P)(B) = s_\Pi(B'') = B'.$$

Dansil existe une rotation, et une seule, qui répond à l'attente.

Remarque : l'énoncé de cet exercice appelle un commentaire. Dans le but de faciliter la tâche de résolution, le rédacteur du texte à introduit la restriction $\overline{AB} \neq \overline{A'B'}$ et formulé deux questions. Si l'on ne retient que la demande globale, sous la forme suivante.

> Etant donnés quatre points A, B, A' et B' tels que :
> $$A \neq B \text{ et } AB = A'B',$$
> déterminer l'ensemble des rotations qui transforment A en A' et B en B'.

En l'accompagnant, éventuellement, d'une indication du style :
on distinguera deux cas suivant qu'il existe une réflexion qui ...
La solution devient.

Soit f une rotation qui répond à la demande, $s_P \circ f$ est un antidéplacement qui laisse A invariant, c'est donc une réflexion dont le plan, noté P', passe par A. Deux cas se présentent.

- 1. Si $B = s_P(B')$, pour tout plan P', qui contient (AB), le déplacement $s_{P'} \circ s_P$ répond à la demande, à condition que P et P' soient sécants, ce qui est toujours le cas si $\overline{AB} \neq \overline{A'B'}$.
- 2. Si $B'' = s_P(B')$ est différent de B, comme $s_P \circ f = s_{P'}$ on a $B'' = s_{P'}(B)$, P' est donc le plan médiateur de BB'' et alors $f = s_P \circ s_{P'}$.

<u>Conclusion</u>.

- S'il existe une réflexion de plan P qui transforme A en A' et B en B', toute droite intersection de P avec un plan passant par A et B est l'axe d'une rotation qui répond à la demande.
- Sinon, il existe une rotaiton, et une seule, qui répond à l'attente.

XXIII

La conditon $f = t \circ f \circ t$ est équivalente à la suivante :

$$f \circ t \circ f^{-1} = t^{-1}$$

On explicite la forme réduite de f :

$$f = r \circ \tau = \tau \circ r$$

Comme les translations commutent entre elles, on a :

$$t^{-1} = f \circ t \circ f^{-1} = r \circ \tau \circ t \circ \tau^{-1} \circ r^{-1} = r \circ t \circ r^{-1}.$$

Il est immédiat que $r \circ t \circ r^{-1}$ est la translation de vecteur $\vec{r}(\vec{u})$. Or la condition :

$$\vec{r}(\vec{u}) = -\vec{u}$$

est équivalente à r est est un demi tour dont l'axe est othogonal à $\vec{u}$.

XXIV

Soit t la translation qui transforme A en A', on note :

$$B_1 = t(B) \text{ et } C_1 = t(C).$$

On a donc :

$$A'B_1 = AB = A'B' \ , A'C_1 = AC = A'C' \text{ et } B_1C_1 = BC = B'C'.$$

Soit P le plan médiateur de B_1B' ou, si $B_1 = B'$, un plan arbitraire qui passe par A' et B'. On a donc $s_P(B_1) = B'$ et comme $A'B_1 = A'B'$, A' appartient à P et $s_P(A') = A'$. On note $s_P(C_1) = C_2$, il est clair que :

$$A'C_2 = A'C_1 = A'C' \text{ et } B'C_2 = B_1C_1 = B'C'.$$

Soit Q le plan médiateur de C_2C' ou, si $C_2 = C'$, le plan (A'B'C'). On a $s_Q(C_2) = C'$ et comme $A'C_2 = A'C'$ et $B'C_2 = B'C'$, A' et B' appartiennent à Q, on a $s_Q(A') = A'$ et $s_Q(B') = B'$.

Soit $f = s_Q \circ s_P \circ t$, f est un déplacement qui vérifie :

$$f(A) = A' \ , f(B) = B' \text{ et } f(C) = C'.$$

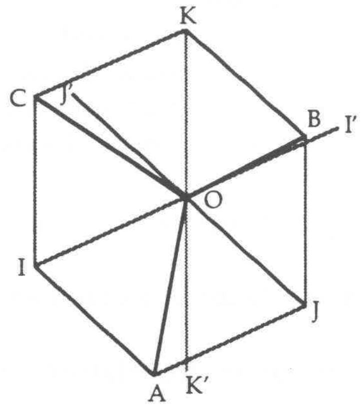
Soit g une isométrie qui répond à la demande, $f^{-1} \circ g$ laisse invariants les trois points non alignés A, B et C. Cette isométrie est donc soit l'application identique, soit la réflexion s, de plan (ABC). on a donc nécessairement :

$$g = f \text{ ou } g = f \circ s.$$

Il est évident que $f \circ s$ convient aussi.

Il existe donc un déplacement, un seul, et un antidéplacement, un seul, qui répondent à la demande.

XXV

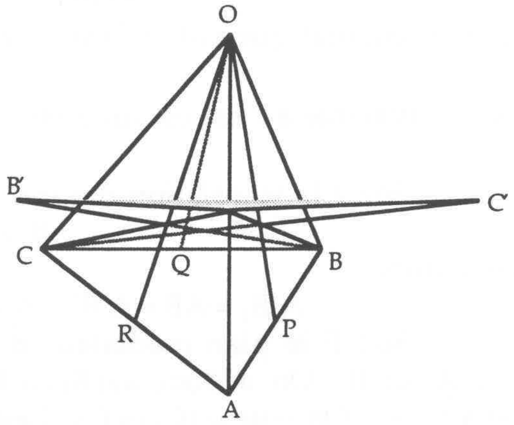


1) On se souvient que OA, OB et OC sont les diagonales de trois faces d'un cube (cf. exercice 18) qu'on note OIAJ, OJBK et OKCI. On note encore I', J' et K' les symétriques de I, J et K par rapport à O. On vérifie que I, J, K se transforment successivement comme suit :

$$\begin{array}{ccccccc} & d_{OA} & & d_{OB} & & d_{OC} & \\ I & & J & & K & & I \\ J & \mapsto & I & \mapsto & I' & \mapsto & K' \\ K & & K' & & J' & & J \end{array}$$

Ce qui montre que $d_{OC} \circ d_{OB} \circ d_{OA}$ est le quart de tour d'axe (AI) qui transforme K en J.

2) Il est immédiat que $d_{OR} \circ d_{OQ} \circ d_{OP}$ est une rotation d'axe (OA). Soit B' et C' les symétriques de B et C par rapport à leurs faces opposées respectives.

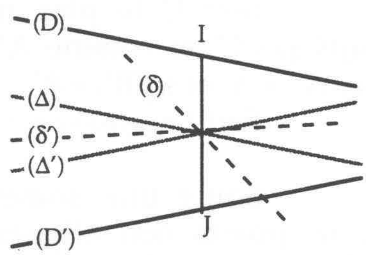


Il est facile de justifier que les images successives de C' sont les suivantes :

$$\begin{array}{ccccccc} & d_{OP} & & d_{OQ} & & d_{OR} & \\ C' & \mapsto & C & \mapsto & B & \mapsto & B' \end{array}$$

Comme tous ces points sont dans le plan médiateur de OA, l'angle de rotation correspond à trois fois l'angle dièdre du tétraèdre ([1]).

XXVI



Analyse : étant données deux droites D et D', non coplanaires, on note I et J les pieds de leur perpendiculaire commune, O le milieu de IJ. On note, enfin, Δ et Δ' les droites parallèles à D et D' passant par O. On considère un déplacement f qui conserve la réunion de D et D'. En se référant aux propriétés classiques des isométries, on montre successsivement que f laisse invariants :

- la droite (IJ) – du fait de son unicité (cf. exercice 17),
- l'ensemble {I, J} et donc le milieu O de IJ,
- la réunion de Δ et de Δ'.

En conséquence, f échange ou bien conserve Δ et Δ'. Ces droites étant sécantes, si f n'est pas l'application identique, elle peut être :

- dans tous les cas, un demi-tour dont l'axe est soit (IJ) soit l'une des bissectrices δ ou δ', des droites Δ et Δ',
- si D et D' sont orthogonales, un demi-tour d'axe Δ ou Δ'.

Synthèse : il est évident que les demi-tours d'axes (IJ), δ et δ' conviennent et que les deux autres sont à écarter.

Les déplacements laissant invariante la réunion de D et D' forment donc le groupe de Klein constitué par l'application identique et ces trois demi-tours dont les axes sont pependiculaires deux à deux.

Dans ces conditions, le nombre des antidéplacements qui conviennent ne peut être que zéro ou quatre.

---

1 Qu'il convient de savoir expliciter.

1. Si D et D′ ne sont pas orthogonales, les seuls antidéplacements conservant la réunion de Δ et Δ', s'obtiennent en composant la symétrie de centre O, avec les trois demi-tours intervenant plus haut On obtient ainsi les symétries par rapport aux trois plans définis par (IJ), Δ et Δ'. Aucune de ces quatres transformations ne convient.
2. Si D et D′ sont orthogonales, les réflexions dont le plan contient (IJ) et Δ ou Δ' conviennent à l'évidence. En les composant avec le demi-tour d'axe (IJ), on obtient les deux antirotations composées d'un quart de tour d'axe (IJ) et de la réflexion de plan ($\Delta\Delta'$).

En résumé : l'ensemble des déplacements conservant la réunion de deux droites non complanaires est, dans tous les cas, un groupe de Klein composé de trois demi-tours et de l'application identique.

L'ensemble des isométries correspondant se compose de huit éléments, si les droites considérées sont orthogonales. Dans le cas contraire, il coïncide avec le précédent.

XXVI

Analyse : considérons un tétraèdre régulier, on note G l'ensemble des isométries qui le laissent invariant et D le sous-groupe formé des déplacements de G. Comme un tétraèdre régulier est symétrique par rapport aux plans médiateurs de chacune de ses arêtes, l'ensemble considéré comporte des réflexions, soit s l'une d'elle. On vérifie que l'application de G dans lui-même :

$$f \mapsto s \circ f$$

est une bijection qui échange les déplacements et les antidéplacements, il s'ensuit que :

$$|G| = 2|D| \text{ (}^1\text{)}.$$

Toute isométrie de G permute les quatre sommets du tétraèdre. On en déduit que $|G| \leq 4! = 24$. Il s'ensuit que D compte, au plus, douze éléments.

Synthèse : une étude directe des symétries du tétraèdre régulier met en évidence son invariance par :

- les demi-tours dont l'axe passe par les milieux de deux arêtes opposées, on en compte trois ;
- les tiers de tour ayant pour axes les hauteurs, on en compte $2 \times 4 = 8$.

En complétant cette énumération par l'application identique, on compte :

$$1 + 3 + 8 = 12 \text{ déplacements de D.}$$

Cet inventaire de D est donc exhaustif.

On sait alors que les antidéplacements sont aussi au nombre de douze. Six de ces transformations sont les réflexions par rapport aux plans médiateurs des arêtes. Les six autres sont les antirotations obtenues comme suit. Soit IJ les milieux de deux arêtes opposées, on compose les quarts de tour d'axe (IJ) avec la réflexion par rapport au plan médiateur de IJ.

La structure de G est celle du groupe S_4, des permutations de quatre éléments.

---

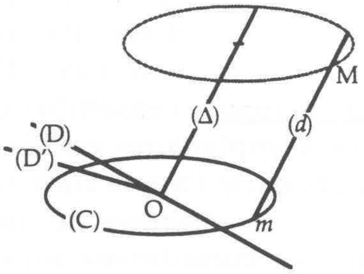
1 Cet argument vaut pour tout groupe fini d'isométries.

XXVII

Etant donné un cercle C, de centre O, situé dans un plan P et une droite Δ passant par O et non perpendicualire à P, on considère le cylindre Γ le qui admet C pour directrice et dont les génératrices sont parallèles à Δ. On note Π le plan perpendiculaire à Δ en O, D l'intersection de P et de Π, D' la perpendiculaire en O à Δ et D.

Existence, sur Γ, de deux familles de cercles

Soit M un point de Γ, *m* le point où la génératrice qui passe par M rencontre C, comme la translation qui transforme *m* en M conserve les génératrices, elle transforme C en un cercle C_M, tracé sur Γ. La symétrie par rapport au plan parallèle à Π qui passe par M conserve aussi les génératrices, elle transforme donc C_M en un cercle C'_M, tracé lui aussi sur Γ et qui passe évidemment par M. On désigne par $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les deux familles de cercles ainsi obtenues.



Remarque : on peut noter, au passage, que toute sphère centrée sur Δ qui contient un cercle d'une famille contient aussi un cercle de l'autre famille.

Les cercles de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont les seuls

Soit *c* un cercle de Γ, si son plan est parallèle à P, *c* est un cercle de $\mathscr{C}$. Sinon, il existe un plan parallèle à P qui le coupe en deux points A et B et donc un cercle C_1 de $\mathscr{C}$ qui passe par A et B. La sphère qui contient ces deux cercles (cf. exercice 15) contient aussi le cercle C'_1, transformé de C_1 par la réflexion dont le plan est perpendiculaire à D et passe par le centre de la sphère. Comme une génératrice ne peut couper une sphère en plus de deux points, le cercle considéré est nécessairement C'_1. Il appartient à $\mathscr{C}'$.

Etude des déplacements laissant invariants le cylindre

Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble des déplacements qui laissent Γ invariant et *f* un élément de $\mathscr{D}$, *f* conserve globalement la réunion des familles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ et comme Δ est le lieu des centres de ces cercles, cette droite est invariante par *f*. Si, de plus, *f* laisse invariant le point O, comme *f* conserve l'orthogonalité, *f* laisse invariante la droite D. Or, celle-ci se caractérise comme étant l'unique diamètre de C (resp. C') qui soit perpendiculaire à Δ. Le déplacement considéré est donc, nécessairement, l'un des demi-tours d'axe D, D' ou Δ. Ces transformations laissent effectivement invariant le cylindre. En effet, la première concervant C et la direction de Δ, transforme toute génératrice en une génératrice. Pour les deux autres, en les composant avec la réflexion de plan Π, on obtient, respectivement, la réflexion de plan (D'Δ) et la symétrie de centre O. Or, ces deux transformations laissant invariants ces mêmes éléments, conservent Γ.

Si *f* est un élément quelconque de $\mathscr{D}$ qui transforme O en O', on compose *f* avec la translation de vecteur $\overline{OO'}$ et l'on est ramené au cas étudié. Il apparaît alors que les éléments de $\mathscr{D}$ sont :

- les translations parallèlement aux génétratrices.
- le demi-tours d'axe Δ et, plus généralement, les vissages d'axe Δ et d'angle π,
- les demi-tours dont les axes sont les droites parallèles à D ou D' qui s'appuient sur Δ.

Anti-déplacements laissant invariants le cylindre

On obtient tous les anti-déplacements qui laissent le cylindre invariant en composant les déplacements de $\mathscr{D}$ avec, par exemple, la symétrie de centre O. Ces transformations sont :

- les symétries par rapport aux plans perpendiculaires à Δ,
- les symétries par rapport aux point de Δ,
- la réflexion dont le plan contient (ΔD),
- la réflexion dont le plan contient (Δ D')

et, plus gnéralement, les symétries-translations par rapport à ces deux plans, parallèlement à Δ.

2) Pour le cône, on suppose que le sommet n'est pas situé sur la perpendiculaire au plan du cercle directeur au centre de celui-ci. Les arguments sont essentiellement les mêmes, il suffit de remplacer les translations par les homothéties dont le centre est le sommet du cône. La question des déplacement se simplifie notablement. On pourra s'intéresser aux similitudes qui le laisent cette surface invariante.

Achevé d'imprimer sur les Presses de l'Université de nantes le 15 Mai 1996

Dépôt légal : 2ème trimestre 1996

Prix : 35 F

N° ISBN : 2-86300-024-1