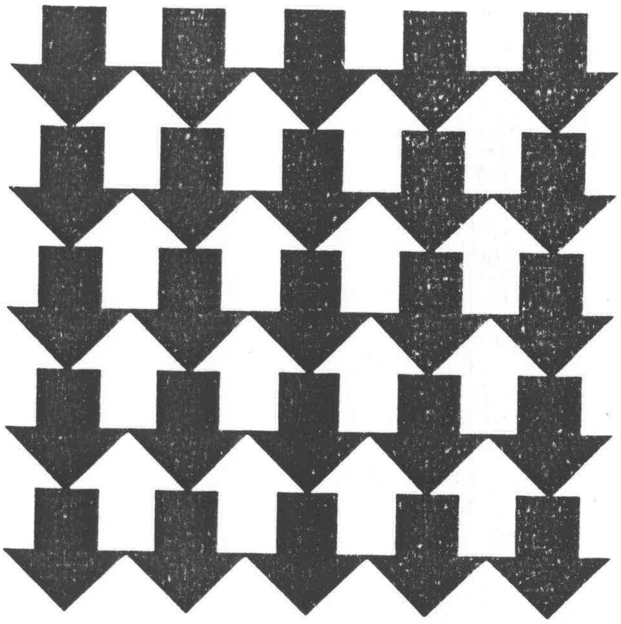
UNIVERSITE DE NANTES

C.T.E.U.

I.R.E.M. des Pays de la Loire

Cours
de
Géométrie élémentaire



B. Truffault & A. Vogel

Nouvelle édition revue et corrigée le 15 septembre 1997

Cours de géométrie élémentaire

Annie Vogel nous a quittés récemment. Qu'on permette à celui des deux qui reste de rendre à sa mémoire, précisément à cette place, un hommage chargé d'émotion, en souvenir d'un long passé commun de galériens du télé-enseignement et de l'algèbre-géométrie.

Juillet 1995

B. Truffault & A. Vogel

Sommaire

Préambule

Ce fascicule est publié à l'intention des candidats, ou futurs candidats au C.A.P.E.S. . Son objet n'est pas de faire autorité mais de susciter, alimenter et soutenir un travail de synthèse – personnel. Ainsi, A l'exception de certains points, en nombre limité, ce cours expose des notions classiques dont l'apprentissage s'étale de la seconde à la terminale. L'essentiel de son contenu est donc, a priori, familier au lecteur. Or, cette familiarité, même, est un piège car elle conduit à sous-estimer certaines difficultés – en matière de logique, notamment.

Pour être cohérente, la démarche doit être complète. C'est pourquoi on reprend les choses au début, c'est le prix à payer pour opérer une synthèse entre les points de vue successifs qu'on a eu sur une même question. C'est pourquoi, aussi, on prend parfois un peu de distance par rapport aux programmes des lycées, tout en respectant les tendances et points de vue qui prévalent, actuellement.

Au départ, nous nous appuyons des connaissances élémentaires essentiellement :

- les propriétés caractéristiques du parallélogramme,
- le théorème de Thalès,

sans nous préoccuper de leur statut initial. Il convient, cependant, de s'accorder sur les définitions fondamentales et les propriétés qui joueront un rôle fondateur. C'est l'objet de la la section numérotée 0.

§ 0 Les notions premières

On suppose connues les définitions et propriétés les plus élémentaires concernant, dans le plan, la **symétrie centrale** et la **symétrie orthogonale par rapport à une droite** – encore appelée *réflexion*. On admet les règles d'incidence entre droites et plans de l'espace usuel qui sera noté $\mathscr{E}$.

*** Le parallélogramme**

Définition : un *parallélogramme* est un quadrilatère dont les côtés sont deux à deux parallèles.

(0-1) Proposition : pour un quadrilatère, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) c'est un parallélogramme,

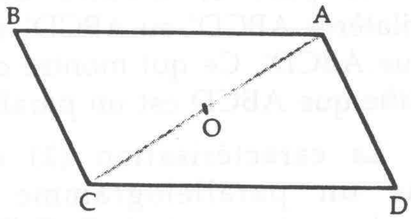
(2) ses diagonales ont le même milieu,

Si, de plus, le quadrilatère est **convexe**, (1) et (2) sont équivalentes à :

(3) il a deux côtés parallèles et de même longueur,

(4) les côtés opposés sont égaux deux à deux.

Démonstration : étant donné un parallélogramme ABCD, on désigne par O le milieu de la diagonale AC. La symétrie de centre O transforme A en C et la droite (AB) en sa parallèle qui passe par C, c'est-à-dire la (CD). De même, elle transforme la droite (BC) en (AD). Le point B étant commun à (AB) et (BC), a pour image le point commun à (CD) et (AD) qui est D. Ce qui justifie que O est aussi le milieu de BD.



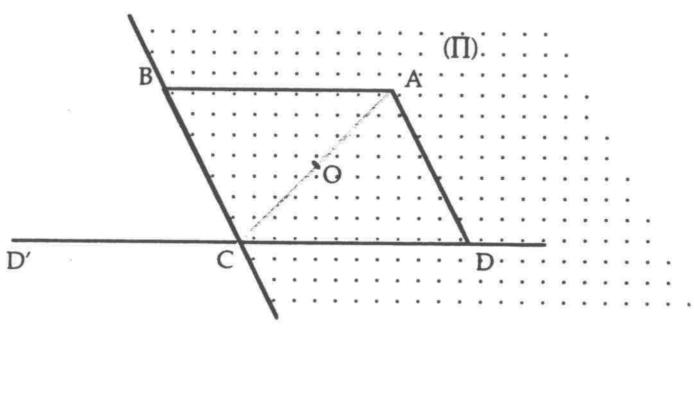
Réciproquement, considérons un quadrilatère ABCD dont les diagonales AC et BD ont pour mileu commun le point O. La symétrie de centre O transforme A en C et B en D. La droite (AB) a donc pour image la droite (CD). Ces deux droites sont donc parallèles. De même, les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

Les assertions (1) et (2) sont donc bien équivalentes.

Du fait de l'invariance du parallélogramme par la symétrie centrale, il est clair que :

$$(1) \Rightarrow (3) \text{ et } (1) \Rightarrow (4).$$

Réciproquement, soit ABCD un quadrilatère convexe dont les côtés AB et CD sont parallèles et de même longueur, on note O le milieu de AC. La symétrie de centre O transforme A en C et (AB) en sa parallèle qui passe par C, c'est-à-dire (CD).



On note Π le demi-plan, bordé par (BC), qui contient A. Comme ABCD est convexe, D appartient à Π. Comme O est le milieu de AB, ce point appartient aussi à Π. On note provisoirement D_1 le symétrique de B par rapport à O, ce point appartient aussi à Π. Or, il appartient à (CD) et vérifie :

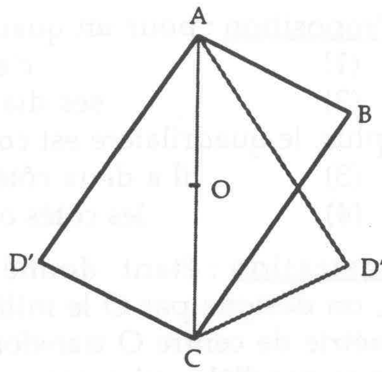
$$AD_1 = AB = CD,$$

Il coïncide donc soit avec D, soit avec son symétrique D′ par rapport à C. Un seul de ces deux points appartient à Π, c'est D. Ce qui justifie que D est le symétrique de B par rapport à O. Ainsi, O étant le milieu commun de AC et BD, ABCD est un parallélogramme.

On considère, maintenant, un quadrilatère convexe ABCD, tel que :

$$AB = CD \text{ et } AD = BC.$$

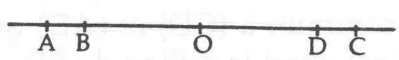
On suppose que A, B et C ne sont pas alignés. La parallèle à (BC) qui passe par A et la parallèle à (AB) qui passe par C se coupent en D′. Le quadrilatère ABCD′ est alors un parallèlogramme, il est donc convexe. En outre, il vérifie :



$$AD' = BC = AD \text{ et } CD' = AB = CD.$$

Le point D coïncide donc soit avec D′, soit avec son symétrique D'_1 par rapport à (AC). Comme D′ et D'_1 sont situés de part et d'autre de (AC), un seul des quadrilatères ABCD′ ou $ABCD'_1$ est convexe, ce ne peut être que ABCD′. Ce qui montre que D coïncide avec D′. et justifie que ABCD est un parallélogramme. ◅

N.B. La caractérisation (2) conduit à considérer comme un parallèlogramme toute configuration formée de quatre points A, B, C, D, alignés et tels que les segments AC et BD aient le même milieu.

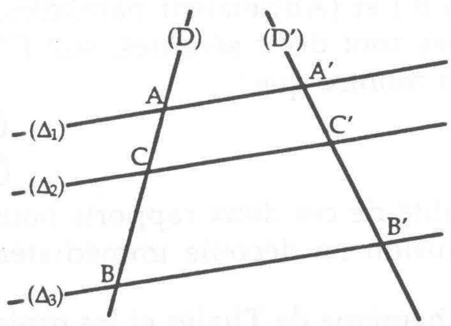


*** Le théorème de Thalès et les projections – dans le plan**

On rappelle les théorèmes suivants.

(0-2) <u>Théorème de Thalès</u> : si deux droites D et D′ coupent trois droites parallèles Δ_1, Δ_2, Δ_3 respectivement en A, B, C et A′, B′, C′, alors on a :

$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}.$$



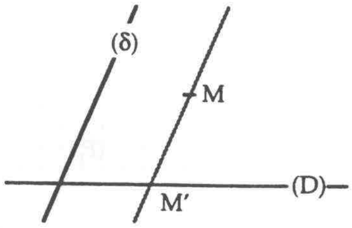
N. B. On a implicitement supposé que Δ_1 et Δ_2 sont distinctes.

(0-3) <u>Réciproque du théorème de Thalès</u> : on considère deux droites D et D′, trois points A, B, C de D et trois points A′, B′, C′ de D′. Si les droites (AA′) et (BB′) sont parallèles et si, de plus :

$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}.$$

alors (CC′) est parallèle à (AA′) et (BB′).

<u>Définition</u> : étant données deux droites du plan D et δ, non parallèles, on appelle *projection* sur D, *parallèlement* à δ, l'application qui, à tout point M du plan, associe le point M′, intersection de D avec la parallèle à δ passant par M.



On peut alors énoncer le théorème de Thalès comme suit.

(0-4) <u>Théorème</u> : la projection d'une droite sur une autre, parallèlement à une direction donnée, respecte les rapports de mesures algébriques – entre points alignés.

*** Exemple d'application : le théorème de Ménélaüs**

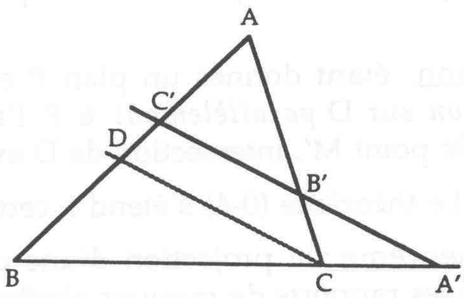
(0-5) <u>Théorème de Ménélaüs</u> : on considère un triangle ABC et trois points A′, B′ et C′ distincts des sommets et situés respectivement sur les droites (BC), (CA) et (AB).

Les points A′, B′ et C′ sont alignés si, et seulement si :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\cdot\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\cdot\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=1.$$

<u>Démonstration</u> : si A′, B′ et C′ sont alignés, on peut considérer la projection sur la droite (AB) parallèlement à la droite contenant ces points, soit D l'image de C. La propriété (0-4) entraîne que :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}=\frac{\overline{C'B}}{\overline{C'D}}\quad\text{et}\quad\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}=\frac{\overline{C'D}}{\overline{C'A}}.$$



Le produit membre à membre de ces deux égalités donne :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\cdot\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}=\frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}}=1.$$

La condition avancée est donc nécessaire pour que A′, B′ et C′ soient alignés.

Réciproquement la relation de l'énoncé entraîne que :

$$\frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}.$$

Si (A'B') et (AB) étaient parallèles, la valeur de ce rapport serait 1, c'est exclu. Ces droites sont donc sécantes, soit C" leur point commun. L'application du théorème direct montre que :

$$\frac{\overline{C''B}}{\overline{C''A}} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}.$$

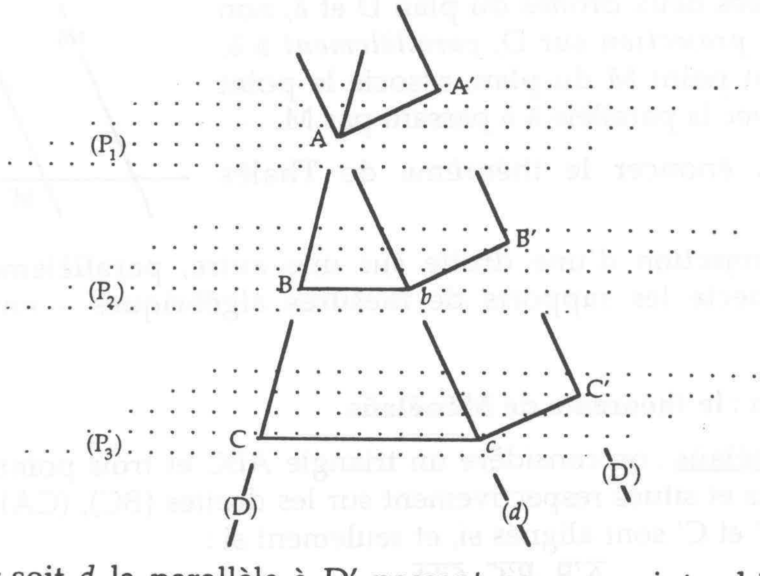
L'égalité de ces deux rapports nous assure que les points C" et C ne font qu'un. La conclusion en découle immédiatement. ◁

*** Le théorème de Thalès et les projections – dans l'espace**

Le théorème de thalès s'étend à l'espace comme suit.

(0-6) Théorème : si deux droites D et D' coupent trois plans parallèles P_1, P_2, P_3 respectivement en A, B, C et A', B', C' alors on a :

$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}.$$



Démonstration : soit *d* la parallèle à D' passant par un point arbitraire de D, par exemple A, cette droite coupe P_2 et P_3 en *b* et *c*. Les droites D et *d* d'une part, *d* et D' d'autre part, étant coplanaires, on peut appliquer le théorème de Thalès pour le plan. ◁

Définition : étant donnés un plan P et une droite D, non parallèle à P, on appelle *projection* sur D *parallèlement* à P l'application qui, à tout point M de l'espace, associe le point M', intersection de D avec le plan parallèle à P passant par M.

Le théorème (0-4) s'étend à cette situation.

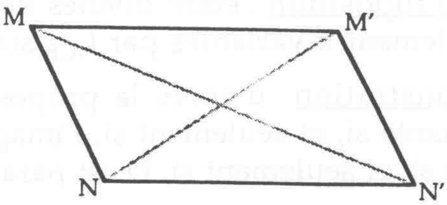
(0-7) Théorème : la projection d'une droite sur une autre parallèlement à un plan respecte les rapports de mesures algébriques – entre points alignés.

Chapitre I. Introduction au calcul vectoriel

La structure vectorielle attachée à l'espace géométrique usuel apparaît, ici, comme une traduction algébrique de propriétés élémentaires des translations et des homothéties.

§ 1. La translation

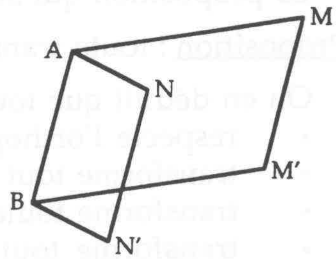
* Définitions et premières propriétés



Définition : on apelle *translation* toute application de $\mathscr{E}$ dans lui-même, telle que pour tous points M et N, d'images M' et N', le quadrilatère MNN'M' soit un parallélogramme ou – ce qui est équivalent – telle que MN' et NM' aient le même milieu.

(1-1) Proposition : étant donnés deux points A et B de $\mathscr{E}$, il existe une translation de $\mathscr{E}$, et une seule, qui transforme A en B.

Démonstration : une telle translation, si elle existe, transforme un point quelconque M de $\mathscr{E}$ en M', tel que ABM'M soit un parallélogramme. Le point M' est donc bien déterminé par la donnée de A, B, pour tout M.



Réciproquement, la condition précédente définit une application t de $\mathscr{E}$ dans lui-même. Soit M et N deux points quelconques de $\mathscr{E}$, M' et N' leurs images par t, les segments MM' et NN' sont parallèles à AB, vérifient :

$$MM' = AB = NN',$$

et sont orientés dans le même sens que AB. Le quadrilatère MNN'M' est donc un parallélogramme et t est une translation. ◅

Convention : A et B étant deux points donnés, on note $t_{A,B}$ la translation qui transforme A en B.

(1-2) Proposition : pour tous couples (A , B) et (C , D) de $\mathscr{E}$, on a $t_{A,B} = t_{C,D}$ si, et seulement si, le quadrilatère ABDC est un parallélogramme.

Démonstration : si $t_{A,B} = t_{C,D}$, alors $t_{A,B}(C) = D$, le quadrilatère ABDC est alors un parallélogramme. Réciproquement, si ABDC est un parallélogramme, on a $t_{A,B}(C) = D$ et la proposition précédente montre que $t_{A,B} = t_{C,D}$. ◅

*** Propriétés géométriques des translations**

(1-3) <u>Proposition</u> : toute translation transforme toute droite en une droite parallèle.

<u>Démonstration</u> : étant donnée une translation, on considère une droite D quelconque et un point arbitraire A de D. On note B son image par la translation et D′ la parallèle à D qui passe par B.

Si M′ est l'image d'un point M de D, alors ABM′M est un parallélogramme. Ainsi, (BM′) est la parallèle à (AM) qui passe par B, c'est-à-dire D′. Ce qui établit que M′ appartient à D′.

Réciproquement, soit P′ un point quelconque de D′ et P le point tel que ABP′P soit un parallélogramme, P appartient à D et son image par $t_{A,B}$ est P′. En conséquence, D′ est l'image de D par la translation donnée. ◅

(1-4) <u>Proposition</u> : étant donnés deux points A et B de $\mathscr{E}$ distincts, les droites de $\mathscr{E}$ globalement invariantes par $t_{A,B}$ sont les parallèles à (AB).

<u>Démonstration</u> : d'après la proposition précédente, une droite D est globalement invariante si, et seulement si, l'image d'un point de D est un autre point de D, c'est-à-dire si, et seulement si, D est parallèle à (AB). ◅

(1-5) <u>Proposition</u> : l'image d'un plan par une translation est un plan parallèle.

Si A et B sont deux points distincts de $\mathscr{E}$, les plans globalement invariants par $t_{A,B}$ sont les plans parallèles à (AB).

<u>Démonstration</u> : calquée sur les démonstrations des propositions (1-3) et (1-4). ◅

La proposition qui suit est une conséquence immédiate de la définition.

(1-6) <u>Proposition</u> : toute translation conserve les distances.

On en déduit que toute translation

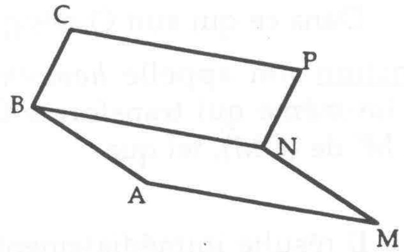
- respecte l'orthogonalité,
- transforme tout cercle en un cercle de même rayon,
- transforme toute sphère en une sphère de même rayon,
- transforme tout triangle en un triangle égal et en respecte les points remarquables.

*** Composition de translations**

(1-7) <u>Proposition</u> : la composition de deux translations donne une translation.

<u>Démonstration</u> : étant données deux translations t et t', on considère un point arbiraire A de $\mathscr{E}$, on note B son image par t et C l'image de B par t'. D'après la proposition (1-1), on a :

$$t = t_{A,B} \ \text{ et } \ t' = t_{B,C} \,.$$



Soit M un point quelconque de $\mathscr{E}$, on note N son image par t et P l'image de N par t'. Les quadrilatères ABNM et BCPN sont, par définition, des parallélogrammes. Les segments AM, BN et CP sont donc parallèles, de même longueur et de même sens. Il s'ensuit que ACPM est un parallélogramme et l'application composée $t' \circ t$ est une translation. De plus, C est l'image de A par $t' \circ t$ et la proposition (1-1) montre que $t' \circ t$ est la translation $t_{A,C}$. ◅

On vérifie aisément les propriétés qui suivent.

(1-8) <u>Proposition</u>.

1) Pour tout point A de $\mathscr{E}$, $t_{A,A}$ est l'application identique.
2) Pour points A, B, C de $\mathscr{E}$, on a :

$$t_{B,C} \circ t_{A,B} = t_{A,C} = t_{A,B} \circ t_{B,C}.$$

3) Pour tous points A et B de $\mathscr{E}$:

$$t_{B,A} \circ t_{A,B} = t_{A,B} \circ t_{B,A}$$

est l'application identique.

Ainsi, la composition des translations est une opération commutative et toute translation est une application bijective.

§2. L'homothétie

Dans ce qui suit O désigne un point de $\mathscr{E}$ et k un nombre réel **non nul.**

Définition : on appelle *homothétie* de *centre* O et de *rapport* k, l'application de $\mathscr{E}$ dans lui-même qui transforme O en lui-même et tout point M, distinct de O, en le point M′ de (OM), tel que :

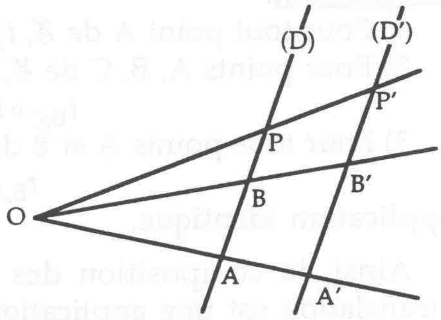
$$\overline{OM'} = k\,.\,\overline{OM}.$$

Il résulte immédiatement de cette définition que cette application :

- est l'application identique de $\mathscr{E}$ si $k=1$,
- admet O pour unique point invariant si $k \neq 1$,
- est bijective et admet pour application réciproque l'homothétie de même centre et de rapport $\frac{1}{k}$.

(2-1) Proposition : toute homothétie transforme toute droite en une droite parallèle.

Démonstration : on considère une homothétie h, de centre O et de rapport k. Comme il est clair que toute droite passant par O est globalement invariante, on considère une droite D quelconque, ne passant pas par O, un point A de D et A′ son image par h. Soit D′ la parallèle à D passant par A′, B un autre point de D et B′ son image, on a :



$$\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = k.$$

D'après la réciproque (0-3) du théorème de Thalès, B′ appartient à D′.

Réciproquement, soit P′ un point quelconque de D′ et P le point de (OP′) tel que :

$$\overline{OP} = \frac{1}{k}\overline{OP'}.$$

Si P′ coïncide avec O, il en va de même pour P. Dans le cas contraire, la réciproque du théorème de Thalès montre que le point P, ainsi défini, appartient à D. Or P′ est, par définiton, l'image de P par h. En conséquence, l'homothétie h transforme D en D′. ◅

(2-2) Proposition : les droites globalement invariantes par une homothétie de rapport différent de 1 sont toutes les droites passant par son centre.

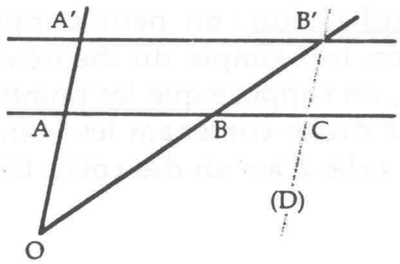
(2-3) Proposition : l'image par une homothétie de tout plan est un plan parallèle.

Démonstration : on reprend, point par point, la démonstration de (2-1). ◅

(2-4) Proposition : les plans globalement invariants par une homothétie de rapport différent de 1 sont tous les plans passant par son centre.

(2-5) Théorème : pour tous points A et B de $\mathscr{E}$ et pour toute homothétie, de rapport k, qui transforme A en A′ et B en B′, on a :

$$\overline{A'B'} = k\overline{AB}.$$



Démonstration : si A et B ne sont pas alignés avec le centre O, on considère la droite D parallèle à (OA) qui passe par B'. Elle coupe la droite (AB) en C. Le théorème de Thalès montre que :

$$k = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}.$$

Ainsi, on a :

$$\overline{AC} = k\overline{AB}.$$

Comme (A'B') est la transformée de (AB), ces deux droites sont parallèles à (AB) et AA'B'C est un parallélogramme. On en déduit que :

$$\overline{A'B'} = \overline{AC} = k\overline{AB}.$$

Si les points O, A et B sont alignés, on a, par définition :

$$\overline{A'B'} = \overline{OB'} - \overline{OA'} = k\overline{OB} - k\overline{OA} = k(\overline{OB} - \overline{OA}) = k\overline{AB}.$$

La démonstration est alors complète. ◅

(2-6) Corollaire : l'homothétie conserve les rapports de distances.

Démonstration : si une homothétie de rapport k transforme quatre points donnés A, B, C et D en A', B', C' et D', nous savons que :

$$\overline{A'B'} = k\overline{AB} \text{ et } \overline{C'D'} = k\overline{CD}.$$

Il s'ensuit que, dans tous les cas où CD est non nul, on a :

$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}$$ ◅

On en déduit, de façon immédiate que :

- l'homothétie conserve le parallélisme et l'orthogonalité.
- l'image d'un cercle – respectivement d'une sphère – de rayon R, est un cercle – respectivement une sphère – de rayon $|k|$R.

Dans la pratique, le théorème (2-5) sera souvent utilisé sous l'une des formes qui suivent.

(2-7) Théorème : étant donnés cinq points A, B, C, B', C' tels que A, B et B' d'une part, A, C et C' d'autre part, soient alignés, si les droites (BC) et (B'C') sont parallèles, alors on a :

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}.$$

Démonstration : la première égalité découle du théorème de Thalès. Pour démontrer la seconde, on considère l'homothétie de centre A et de rapport :

$$k = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}}.$$

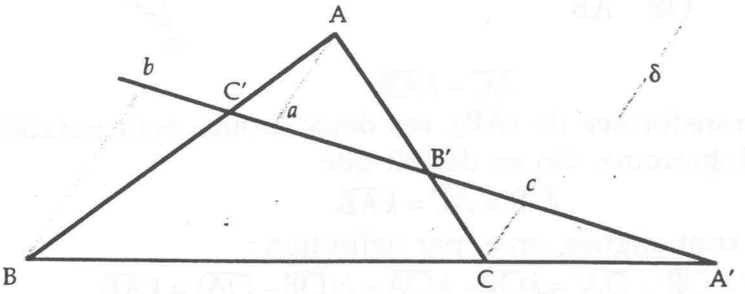
Elle transforme évidemment B en B' et C en C'. Le théorème précédent montre que :

$$\overline{B'C'} = k\overline{BC}.$$

Ce qui achève la démonstration. ◅

(2-8) Corollaire : le segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et sa longueur est la moitié de celle de celui-ci.

* <u>Application</u> : on peut s'appuyer sur ce théorème pour proposer une démonstration très simple du théorème de Ménélaüs. Les données étant celles utilisées en (0-5), on suppose que les points A', B' et C' sont alignés. On considère une projection sur la droite contenant les points A', B' et C', suivant une direction arbitraire δ – qui n'est celle d'aucun des côtés. On note a, b et c les images des sommets A, B et C.



Le théorème qui précède montre que :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}=\frac{\overline{Bb}}{\overline{Cc}},\ \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}=\frac{\overline{Cc}}{\overline{Aa}}\ \text{et}\ \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=\frac{\overline{Aa}}{\overline{Bb}}.$$

Le produit membre à membre de ces trois égalités donne immédiatement :

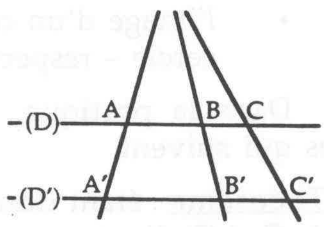
$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\cdot\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\cdot\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=1.$$

Pour la réciproque on procède comme en (0-5). ◅

On obtient aussi très facilement la propriété classque des perpectives entre droites.

(2-9) <u>Théorème</u> : on considère deux droites parallèles D et D', trois points A, B et C de D et trois points A', B' et C' de D'. Les droites (AA'), (BB') et (CC') sont **concourantes ou parallèles** si, et seulement si :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}},$$



<u>Démonstration</u> : il existe une homothétie ou une translation qui transforme A et B en A' et B', selon que (AA') et (BB') sont sécantes ou parallèles, soit f cette transformation.

Si (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles f tranforme C en C' et l'égalité est immédiate.

Si L'égalité est vérifiée f tranforme C en C' et il est clair que (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles. ◅

§ 3. Les vecteurs

Une translation est caractérisée par la donnée d'un point et de son image. Un tel couple n'est évidemment pas unique, ce qui nous conduit à poser la définition qui suit.

Définition : on appelle *vecteur* l'ensemble des couples de points définissant une même translation.

Convention : si A et B sont deux points de $\mathscr{E}$, on note $\overrightarrow{AB}$ le vecteur associé à la translation $t_{A,B}$ qui transforme A en B et, pour tout vecteur $\vec{v}$, on note $t_{\vec{v}}$ la translation correspondante.

*** Premières propriétés**

Étant donnés quatre points A, B, C, D de $\mathscr{E}$, la définition ci-dessus se traduit :

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow t_{A,B}=t_{C,D}$$

et les deux assertions qui suivent sont des conséquences immédiates de (1-2) et (1-1).

(3-1) Proposition : soit A, B, C, D quatre points de $\mathscr{E}$, on a :

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \text{ABDC est un parallélogramme.}$$

(3-2) Proposition : soit O un point de $\mathscr{E}$, pour tout vecteur $\vec{v}$, il existe un point A de $\mathscr{E}$, et un seul, tel que $\vec{v}=\overrightarrow{OA}$.

Définition : l'application identique est une translation, le vecteur qui lui est associé appelé le *vecteur nul*, on le note $\vec{0}$.

La proposition qui suit reformule cette définition.

(3-3) Proposition : pour tous points A et B de $\mathscr{E}$, on a :

$$\overrightarrow{AB}=\vec{0} \Leftrightarrow A=B.$$

*** Convention**

Soit Δ une droite (respectivement un plan) de $\mathscr{E}$, on note V l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ pour M et N appartenant à Δ. Il découle immédiatement de la définition ci-dessus et de la proposition 1-3 ou 1-5 que V est commun à toutes les droites (respectivement tous les plans) qui sont parallèles à Δ. Il est donc naturel d'appeller V la *direction* de Δ.

On note qu'une droite D est parallèle à un plan P si, et seulement si, la direction de D est contenue dans celle de P.

*** L'addition des vecteurs**

Définition : on appelle somme de deux vecteurs donnés $\bar{u}$ et $\bar{v}$, le vecteur associé à la translation $t_{\bar{v}} \circ t_{\bar{u}}$. On le note $\bar{u} + \bar{v}$.

(3-4) Théorème : pour tous vecteurs $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, on a :

(1) $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$, (*commutativité* de la somme)

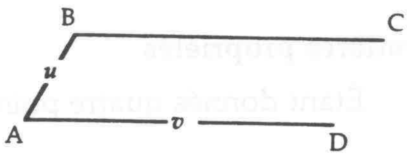
(2) $\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$, (*associativité* de la somme)

(3) $\bar{u} + \bar{0} = \bar{u}$, ($\bar{0}$ est *élément neutre* pour l'addition)

(4) Pour tout vecteur $\bar{u}$, il existe un vecteur, et un seul, noté $(-\bar{u})$ tel que :
$\bar{u} + (-\bar{u}) = \bar{0}$. ($-\bar{u}$ est l'*opposé* de $\bar{u}$)

Démonstration : on considère un point A de $\mathscr{E}$, soit B et D ses images par les translations $t_{\bar{u}}$ et $t_{\bar{v}}$, C l'image de B par $t_{\bar{v}}$. On a :

$$t_{A,D} = t_{B,C} = t_{\bar{v}},$$



le quadrilatère ADCB est donc un parallélogramme. On en déduit que :

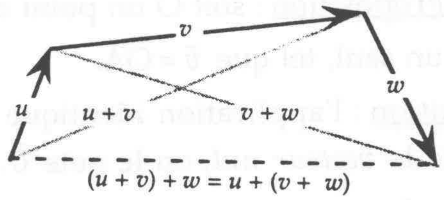
$$t_{A,B} = t_{D,C} = t_{\bar{u}}$$

et C est l'image de A par les translations :

$$t_{\bar{u}} \circ t_{\bar{v}} \text{ et } t_{\bar{v}} \circ t_{\bar{u}}$$

qui, de ce fait, sont égales (cf. 1-1).

La deuxième propriété résulte de l'associativité de la composition des applications, elle peut s'illustrer par le schéma ci-contre.



La troisième assertion est évidente.

Enfin, si $\bar{u}$ est un vecteur quelconque, on considère deux points A et B, tels que $\overrightarrow{AB} = \bar{u}$. Il est clair que l'unique translation qui, composée avec $t_{\bar{u}}$, laisse A invariant, est $t_{B,A}$. Ce qui prouve la quatrième assertion. ◅

L'énoncé qui suit est une traduction immédiate de la définition de la somme de deux vecteurs.

(3-5) Théorème : pour tous points A, B, C de $\mathscr{E}$, on a :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}. \quad \textit{(Relation de Chasles)}$$

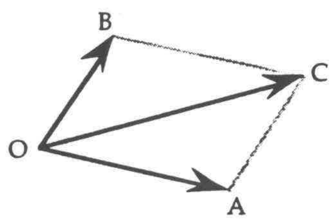
(3-6) Corollaire : pour tous points O, A, B de $\mathscr{E}$, on a :

$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA},$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

La translation $t_{O,B}$ transforme le point A en C, le quatrième sommet du parallélogramme OACB, de sorte que :

$$t_{O,B} \circ t_{O,A} = t_{O,C}.$$



Il découle immédiatement de la définition de la somme de deux vecteurs que:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}.$$

On retrouve ainsi la *"règle du parallélogramme"* qui a, en particulier, pour conséquence que si A et B sont deux points donnés, de milieu M, pour tout point O, on a :

$$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$

*** La multiplication par les scalaires**

(3-7) Proposition : étant donnés un vecteur $\vec{u}$ et un nombre réel k, on considère trois points A, B et C, alignés et tels que :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}.$$

Le vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$, ainsi défini, ne dépend que du vecteur $\vec{v}$ et de k.

Démonstration : soit A′ et B′ deux autres points de $\mathscr{E}$, tels que :

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} = \vec{u},$$

on leur associe le point C′ défini comme ci-dessus. Si A et B coïncident, on a :

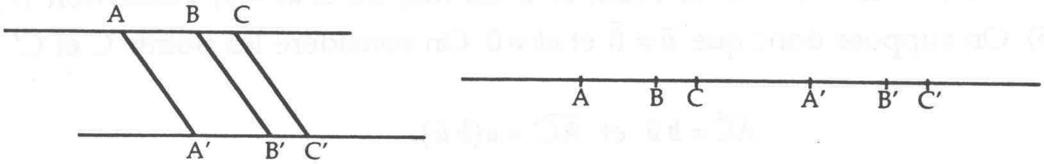
$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} = \vec{0},$$

le point A′ se confond alors avec B′ ainsi que C′ et l'on a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'} = \vec{0}$. On suppose donc que A et B sont distincts. Le quadrilatère ABB′A′ est alors un parallélogramme. Les droites (AB) et (A′B′) étant parallèles, on a :

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}.$$

Il s'ensuit que :

$$\overline{AC} = k\overline{AB} = k\overline{A'B'} = \overline{A'C'}.$$



Le quadrilatère ACC′A′ est aussi un parallélogramme. On a donc bien :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}. \quad ◅$$

Convention : dans ces conditions, il devient légitime de noter :

$$\vec{v} = k\,\vec{u}.$$

Définition : l'opération, ainsi définie, est appelé *multiplication* du vecteur $\vec{u}$ par le *scalaire* λ.

(3-8) Théorème : soit O un point de $\mathscr{E}$ et k un nombre réel non nul, on considère deux points A et B de $\mathscr{E}$, A′ et B′ leurs images par l'homothétie de centre O de rapport k. Alors on a :

$$\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}.$$

Démonstration : il s'agit d'une une conséquence immédiate de (2-5) et de (3-7). ◅

(3-9) <u>Théorème</u> : pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous nombres a et b, on a :

(5) $$0\,\vec{u} = \vec{0} \quad \text{et} \quad a\,\vec{0} = \vec{0},$$

(6) $$1\,\vec{u} = \vec{u},$$

(7) $$a(b\,\vec{u}) = (ab)\,\vec{u},$$

(8) $$(a+b)\,\vec{u} = a\,\vec{u} + b\,\vec{u},$$

(9) $$a(\vec{u} + \vec{v}) = a\,\vec{u} + a\,\vec{v}.$$

<u>Démonstration</u> : on considère un vecteur quelconque $\vec{u}$ et deux points A et B tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

(5) Le point C, tel que $\overrightarrow{AC} = 0\,\vec{u}$, vérifie :

$$\overrightarrow{AC} = 0\overrightarrow{AB} = 0.$$

Il coïncide avec A. On a donc bien :

$$0\,\vec{u} = \vec{0}.$$

Soit a un nombre réel quelconque, si $\vec{u} = \vec{0}$, A et B coïncident et le point C tel que $\overrightarrow{AC} = a\overrightarrow{AB}$ est confondu avec A et B. Ce qui fait que $\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. On a donc bien :

$$a\,\vec{0} = \vec{0}.$$

(6) Le point C, tel que $\overrightarrow{AC} = 1\,\vec{u}$, est aligné avec A et B. Il est tel que :

$$\overrightarrow{AC} = 1\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}.$$

Il se confond donc avec B et l'on a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$, ce qui donne bien :

$$1\,\vec{u} = \vec{u}.$$

(7) Soit a et b deux nombres réels, si $\vec{u}$ est nul, ou si $ab = 0$, l'assertion (7) se déduit de (5). On suppose donc que $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $ab \neq 0$. On considère les points C et C′ tels que :

$$\overrightarrow{AC} = b\,\vec{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC'} = a(b\,\vec{u}).$$

On a donc :

$$\overrightarrow{AC} = b\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC'} = a\overrightarrow{AC}.$$

Ainsi, C et C′ appartiennent à la droite (AB) et vérifient :

$$\overline{AC} = b\overline{AB} \quad \text{et} \quad \overline{AC'} = a\overline{AC}$$

Compte-tenu de l'associativité de la multiplication des nombres réels, il vient :

$$\overline{AC'} = a(b\overline{AB}) = (ab)\overline{AB}.$$

On en déduit que :

$$\overrightarrow{AC'} = (ab)\overrightarrow{AB}.$$

On a donc bien :

$$a(b\,\vec{u}) = (ab)\,\vec{u}.$$

(8) Il est clair que l'assertion (8) se déduit de (5) si $\vec{u} = \vec{0}$. On suppose donc que $\vec{u}$ est non nul. On considère les points C , C′ et C″, tels que :

$$\overrightarrow{AC} = a\,\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{AC'} = b\,\vec{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC''} = (a+b)\,\vec{u}.$$

Ainsi, C, C′ et C″ appartiennent à la droite (AB) et vérifient :

$$\overline{AC} = a\overline{AB}\ ,\ \overline{AC'} = b\overline{AB} \quad \text{et} \quad \overline{AC''} = (a+b)\overline{AB}.$$

Compte-tenu de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition des nombres réels, il vient :

$$\overline{AC} + \overline{AC'} = a\overline{AB} + b\overline{AB} = (a+b)\overline{AB} = \overline{AC''}.$$

Il s'ensuit que :

$$\frac{1}{2}(\overline{AC}+\overline{AC'})=\frac{1}{2}\overline{AC''}.$$

Ainsi, les segments CC′ et AC″ ont le même milieu. On a donc :

$$\overrightarrow{AC''}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC'}.$$

Ce qui prouve que :

$$(a+b)\vec{u}=a\vec{u}+b\vec{u}.$$

(9) On considère maintenant deux vecteurs quelconques $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et un nombre réel a. Si l'un des vecteurs est nul ou si $a=0$, la conclusion est immédiate. On écarte ces cas, on choisit arbitrairement un point O et l'on note A, B, C et A′, B′, C′ les points tels que :

$$\overrightarrow{OA}=\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{OB}=\vec{v}\ ,\ \overrightarrow{OC}=\vec{u}+\vec{v},$$

$$\overrightarrow{OA'}=a\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{OB'}=a\vec{v}\ ,\ \overrightarrow{OC'}=a(\vec{u}+\vec{v}).$$

Les points O, A et A′ sont alignés, ainsi que O, B et B′ de même que O, C et C′. De plus, on a :

$$\overline{OA'}=a\overline{OA}\ ,\ \overline{OB'}=a\overline{OB}\ \text{et}\ \overline{OC'}=a\overline{OC}.$$

Ainsi, A, B′ et C′ sont les images respectives de A, B et C par l'homothétie de centre O et de rapport a. Le quadrilatère OACB étant un parallélogramme, OA′B′C′ l'est aussi. Il s'ensuit que :

$$\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}.$$

On a donc bien :

$$a(\vec{u}+\vec{v})=a\vec{u}+a\vec{v}.$$

La démonstration est alors complète. ◅

*** Espaces vectoriels et espaces affines**

L'ensemble des vecteurs de $\mathscr{E}$ se trouve, à présent, doté d'une structure algébrique dont les propriétés fondamentales sont énoncées dans les théorèmes (3-4) et (3-9). On donne le nom d'*espace vectoriel réel* à tout ensemble muni d'une addition et d'une multiplication par un nombre réel vérifiant les mêmes propriétés (1)-(9).

Exemples : l'ensemble des fonctions réelles définies sur un intervalle, muni des opérations usuelles, est un espace vectoriel réel. Plus généralement, l'ensemble des applications d'un ensemble dans **R** est muni d'une structure d'espace vectoriel. C'est, par exemple, le cas de $\mathbf{R}^n$, l'ensemble des applications de $\{1,2,\ldots,n\}$ dans **R**.

De façon générale, On appelle *espace affine* tout ensemble, associé à un espace vectoriel, comme c'est le cas pour le plan ou l'espace de la géométrie usuelle. Plus précisement on dira que $\mathscr{E}$ est un *espace affine* s'il existe un espace vectoriel E et une application :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{E}\times\mathscr{E} & \longrightarrow & E \\ (A,B) & \mapsto & \overrightarrow{AB} \end{array}$$

telle que :

(10) pour tous points A, B, C de $\mathscr{E}$, on ait la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC},$$

(11) pour tout point A de $\mathscr{E}$ et pour tout vecteur $\vec{u}$ de E, il existe un point B de $\mathscr{E}$, et un seul, tel que

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u}.$$

Dans ces conditions on dit que E est l'*espace vectoriel associé* à $\mathscr{E}$ ou, plus simplement, que E est la *direction* de $\mathscr{E}$.

Ajoutons que si l'on choisit un point arbitraire O d'un espace affine $\mathscr{E}$, dont la direction est E, l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{E} & \longrightarrow & E \\ M & \mapsto & \overrightarrow{OM} \end{array}$$

est une bijection qui, dans la pratique, permet d'identifier l'espace affine à sa direction.

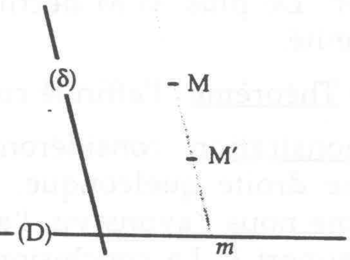
En outre, on remarquera que tout espace vectoriel E est un espace affine. Il suffit pour cela d'associer à tout couple (x,y), de $E\times E$, le vecteur $y-x$.

Ces notions permettent la mise en œuvre en géométrie des concepts développés en algèbre linéaire. On peut ainsi de passer du point de vue "naïf" qui est le nôtre ici – et le restera – à des conceptions plus abstraites, construites de façon formelle, qu'on trouvera exposées par ailleurs (1).

1 Sous le titre de "Compléments de géométrie ..."

§ 4. L'affinité

*** Dans le plan**



Définition : étant données deux droites sécantes D et δ, du plan et un nombre réel k, on appelle *affinité* d'*axe* D, de *direction* δ, de *rapport* k, l'application qui, à tout point M du plan associe le point M', défini comme suit. Si m désigne l'image de M par la projection sur D parallèlement à δ, M' est le point tel que :

$$\overrightarrow{mM'} = k\overrightarrow{mM}.$$

Remarques.

1) Si $k = 0$, on retrouve la projection sur D, parallèlement à δ et si $k = 1$, on est en présence de l'application identique du plan.

2) Si $k = -1$, on parlera plutôt de *symétrie* d'axe D, de direction δ. Si, de plus, δ est perpendiculaire à D, on retrouve la réflexion d'axe D.

Les propriétés qui suivent sont immédiates.

(4-1) Proposition : on considère une affinité f de rapport k.

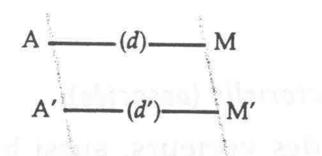
1) Si $k \neq 1$, l'axe de f est l'ensemble des points invariants par f.

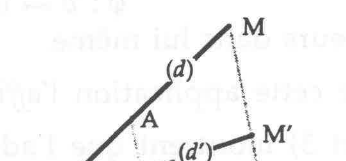
2) Si $k \neq 0$, f est bijective et son application réciproque est l'affinité ayant même axe, même direction et pour rapport $\frac{1}{k}$.

(4-2) Proposition : l'image d'une droite, par une affinité, de rapport non nul, est une droite.

Démonstration : considérons une affinité f, d'axe D de direction δ, de rapport k et une droite d. Si d coïncide avec D, la conclusion est évidente. Elle est immédiate si si d est parallèle à δ. En effet, dans ce cas, d coupe D en un point a et f coïncide, sur d, avec l'homothétie de rapport de centre a et de rapport k. On suppose donc que d est distincte de D et n'est pas parallèle à δ.

Soit A un point arbitraire de d n'appartenant pas à D, On note A' son image par f et a sa projection sur D, parallèlement à δ. On désigne par M le point courant de d, soit M' son image par f et m sa projection sur D parallèlement à δ.





On a toujours :

$$\frac{\overline{mM'}}{\overline{mM}} = \frac{\overline{aA'}}{\overline{aA}} = k.$$

Si d est parallèle à D, on note d' la parallèle à D et d qui passe par A'. La réciproque du théorème de thalès montre que M' appartient à d'. De plus quand M décrit D, M' décrit d'. Cette droite est donc l'image de d par f.

Si d et D sont sécantes en O, on note d' la droite (A'O). La relation précédente montre que l'homothétie de centre O qui transforme A en M, transforme aussi A' en M'. De plus, si M décrit d, M' décrit d'. Cette droite est donc l'image de d par l'affinité. ◁

(4-3) Théorème : l'affinité conserve les rapports de distances entre points alignés.

Démonstration : considérons une affinité d'axe D de direction δ et de rapport k. Soit d une droite quelconque. Si d est parallèle à δ, elle coupe D en un point m et, comme nous l'avons vu, l'affinité coïncide, sur d, avec l'homothétie de centre m et de rapport k. La conclusion est alors donnée par la proposition (2-5). Dans le cas contraire, c'est, au vu de la proposition précédente, une conséquence immédiate du théorème de Thalès. ◁

*** Affinité vectorielle**

(4-4) Théorème : on désigne par A, B, C, D, O cinq points quelconques du plan, par A', B', C', D', O' leurs images par une affinité donnée et par a un nombre réel quelconque.

1) Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$.

2) Si $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ alors $\overrightarrow{O'A'} + \overrightarrow{O'B'} = \overrightarrow{O'C'}$.

3) Si $a\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$ alors $a\overrightarrow{O'A'} = \overrightarrow{O'B'}$.

Démonstration : si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors les quatre points A, B, C, D sont les sommets d'un parallélogramme. Comme l'affinité respecte le milieu, les quatre points A', B', D', C' sont aussi les sommets d'un parallélogramme et l'on a bien :

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}.$$

La deuxième assertion se démontre de manière analogue et la troisième n'est qu'une variante de la proposition (4-3). ◁

Le point 1) de la proposition précédente montre que toute affinité définit une application :

$$\varphi : \vec{v} \mapsto \vec{v}'$$

de l'ensemble des vecteurs dans lui même.

Définition : on appelle cette application l'*affinité vectorielle* (*associée*).

Les points 2) et 3) montrent que l'addition des vecteurs, aussi bien que la multiplication par un scalaire sont stables relativement à celle-ci. En d'autres termes, on a toujours :

$$\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}),$$
$$\varphi(a\,\vec{u}) = a\varphi(\vec{u}).$$

De façon générale, toute application qui remplit ces conditions est dite *linéaire*.

Remarques.

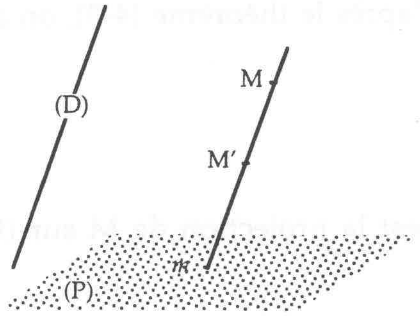
1) Il est facile de vérifier que φ reste inchangée quand on remplace l'axe de l'affinité par une droite parallèle, si l'on conserve la direction.

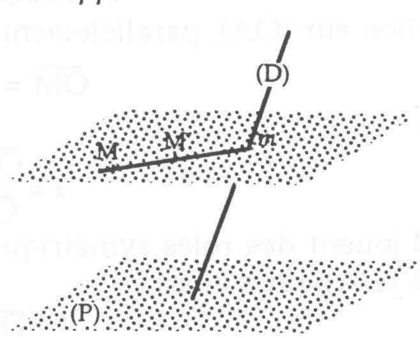
2) Ce qui précède s'applique, en particulier, aux projections et symétries. On parlera donc de *projection vectorielle* et de *symétrie vectorielle*.

*** Dans l'espace**

La notion d'affinité se généralise à l'espace dans les conditions suivantes. Étant donnés une droite D et un plan P, sécants et un nombre réel k, on définit de façon analogue :

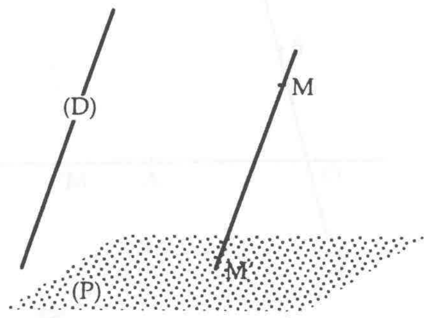
- l'*affinité* de *plan* P, de *direction* D et de *rapport* k,
- l'*affinité* d'*axe* D, de *direction* P et de *rapport* k.

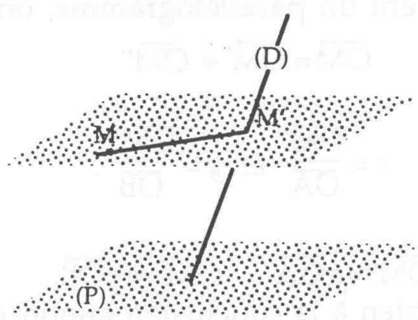




Les théorèmes (4-3) et (4-4) s'appliquent à ces transformations. Les démonstrations sont, dans chaque cas, de même nature que dans le plan. Les propriétés ainsi obtenues s'appliquent encore à :

- la *projection* sur un plan *parallèlement* à une *droite*,
- la *projection* sur une droite *parallèlement* à un *plan*.





§ 5. Repères

* Repères du plan

(5-1) Théorème : dans le plan, étant donnés trois points non alignés O, A, B, pour tout point M, il existe un couple unique de nombres réels $(x\,,y)$ tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{OA} + y\,\overrightarrow{OB}.$$

Démonstration : montrons que, si le couple $(x\,,y)$ existe, il est unique. Soit M un point tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB},$$

et M′ sa projection sur (OA), parallèlement à (OB), d'après le théorème (4-3), on a :

$$\overrightarrow{OM'} = x\overrightarrow{OA},$$

il s'ensuit que :

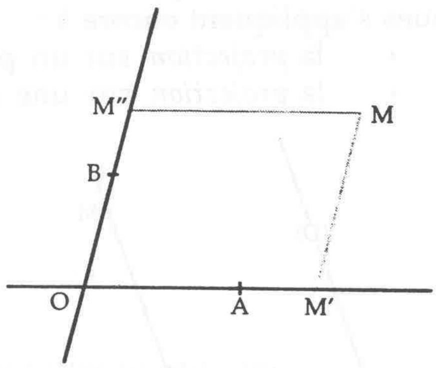
$$x = \frac{\overline{OM'}}{\overline{OA}}.$$

Comme A et B jouent des rôles symétriques, si M″ est la projection de M sur (OB), parallèlement à (OA), on a aussi :

$$y = \frac{\overline{OM''}}{\overline{OB}}.$$

Reste à prouver qu'un tel couple existe bien. Soit M un point quelconque, on note M′ et M″ ses projections respectives sur (OA) parallèlement à (OB) et sur (OB) parallèlement à (OA). Les quatre points OM′MM″ forment un parallélogramme, on a donc :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{OM''}.$$



Posons :

$$x = \frac{\overline{OM'}}{\overline{OA}} \text{ et } y = \frac{\overline{OM''}}{\overline{OB}}.$$

Il vient :

$$\overrightarrow{OM'} = x\overrightarrow{OA} \quad , \quad \overrightarrow{OM''} = y\overrightarrow{OB},$$

ce qui conduit bien à la conclusion annoncée. ◅

Il est alors naturel de poser la définition suit.

Définition : on appelle *repère* d'un plan tout triplet ordonné de points **non alignés** de celui-ci.

Définition : dans les conditions du théorème ci-dessus, les nombres réels x et y s'appellent *coordonnées cartésiennes* du point M, relativement au repère $(O\,,A\,,B)$. On précise leurs rôles respectifs en nommant x l'*abscisse* et y l'*ordonnée* de M.

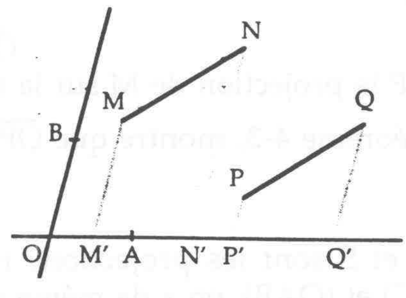
(5-2) Proposition : soit $\vec{u}$ un vecteur du plan, si M et N sont deux points du plan tels que $\overrightarrow{MN} = \vec{u}$, de coordonnées respectives (x, y) et (x', y') dans un repère donné, les nombres $x' - x$ et $y' - y$ sont indépendants des points M et N.

Définition : ces deux nombres sont appelés *coordonnées du vecteur* $\vec{u}$ dans le repère considéré.

Démonstration : soit P et Q deux autres points du plan tels que

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ},$$

(x_1, y_1) et (x_1', y_1') leurs coordonnées respectives relatives au repère donné, noté (O, A, B). On désigne par M′, N′, P′, Q′ les projections de M, N, P, Q sur (OA) parallèlement à la (OB). Par hypothèse, on a $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$, le théorème (4-4) montre que $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{P'Q'}$, ce qui donne :



$$\overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OQ'} - \overrightarrow{OP'}.$$

Il s'ensuit que :

$$x'\overrightarrow{OA} - x\overrightarrow{OA} = x_1'\overrightarrow{OA} - x_1\overrightarrow{OA}$$
$$(x' - x)\overrightarrow{OA} = (x_1' - x_1)\overrightarrow{OA}.$$

On a donc :

$$x' - x = x_1' - x_1.$$

Comme A et B jouent des rôles symétriques, on a aussi prouvé que :

$$y' - y = y_1' - y_1. \qquad \triangleleft$$

(5-3) Proposition : le plan étant rapporté à un repère donné (O, A, B) si (x, y) et (x', y') désignent les coordonnées respectives de vecteurs quelconques $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors :

$\vec{u} + \vec{v}$ admet pour coordonnées $(x + x', y + y')$.

Si, de plus, a désigne un réel quelconque :

$a\vec{u}$ admet pour coordonnées (ax, ay).

Démonstration : ces deux résultats se déduisent aussi du théorème (4-4). $\triangleleft$

*** Repères de l'espace**

(5-4) Théorème : étant donnés quatre points O, A, B, C, non coplanaires soit, pour tout point M de $\mathscr{E}$, il existe un unique triplet (x, y, z) de nombres réels tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{OA} + y\,\overrightarrow{OB} + z\,\overrightarrow{OC}.$$

Démonstration : montrons l'unicité d'un tel triplet. On considère un point M tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}.$$

Soit P la projection de M sur la (OA) parallèlement au plan (OBC). Adapté à l'espace, le théorème 4-3, montre que $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA}$ et par suite :

$$x = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}}.$$

Si R et S sont les projections respectives de M sur (OB) et (OC), parallèlement à (OAC) et (OAB), on a de même :

$$y = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OB}} \text{ et } z = \frac{\overline{OR}}{\overline{OC}}.$$

Pour justifier l'existence de ce triplet, on considère un point quelconque M, soit P, Q et R ses projections, respectivement sur (OA), (OB), (OC), parallèlement à (OBC), (OAC) et (OAB). On pose :

$$x = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} \text{ , } y = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OB}} \text{ et } z = \frac{\overline{OR}}{\overline{OC}}.$$

On a ainsi, comme pour le plan :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA}A + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}.$$ ◅

Définition : on appelle *repère de l'espace* tout quadruplet de points non coplanaires.

Définition : dans les conditions du théorème ci-dessus, les nombres x, y, z s'appellent les *coordonnées* de M relativement au repère (O , A , B , C). On appelle encore respectivement x, y et z : *l'abscisse*, *l'ordonnée* et la *cote* de M relatives à ce repère.

On définit les coordonnées d'un vecteur de l'espace, pour un repère donné, de la même façon que dans le plan. La proposition (5-3) se généralise sans peine à l'espace.

*** Repères orthonormés**

Définition : une unité de longueur étant choisie pour le plan ou l'espace, un *repère orthonormé* est la donnée :

- pour le *plan*, de trois points (O , I , J) tels que :
  - OI = OJ = 1,
  - les droites (OI) et (OJ) soient perpendiculaires.
- pour l'*espace*, de quatre points (O , I , J , K) tels que :
  - OI = OJ = OK = 1,
  - les trois droites (OI), (OJ) et (OK) forment un trièdre trirectangle.

Cette définition trouvera sa justification dans les pages qui suivent.

§ 6. Le produit scalaire

On convient, désormais, que toutes **les mesures algébriques sont définies par rapport à des repères unitaires**, de sorte que, pour tous points alignés O, A et B, le produit $\overline{OA}\,.\,\overline{OB}$ reste invariant ([1]).

*** Définition et propriétés de base**

On considère deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et trois points O, A, B de $\mathscr{E}$, tels que :

$$\overrightarrow{OA} = \vec{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OB} = \vec{v}.$$

Soit D une droite contenant O et A et H la projection orthogonale de B sur D.

(6-1) <u>Lemme</u> : le produit $\overline{OA}\,.\,\overline{OH}$ ne dépend que des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

<u>Définition</u> : on appelle ce nombre le *produit scalaire* des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On le note :

$$\vec{u}\,.\,\vec{v}.$$

<u>Démonstration</u> : si $\vec{u} = \vec{0}$, on a toujours $\overline{OA}\,.\,\overline{OH} = 0$, on suppose donc $\vec{u} \neq \vec{0}$. Les points O et A sont donc distincts. Soit O', A', B' trois points de $\mathscr{E}$ tels que :

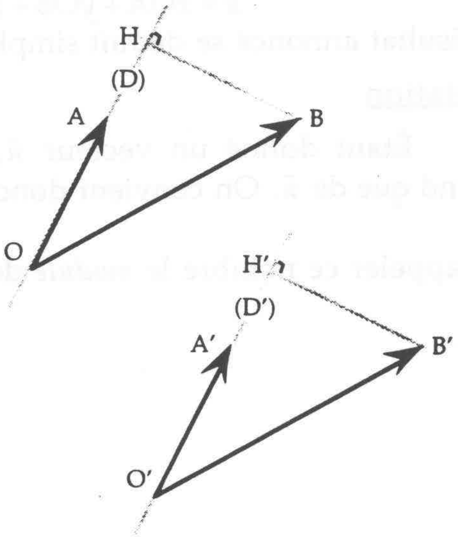
$$\overrightarrow{O'A'} = \vec{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{O'B'} = \vec{v}.$$

Les quatre points OAA'O' forment un parallélogramme. Ainsi, A' est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$. De même, B' est l'image de B par cette transformation. Comme la translation respecte l'orthogonalité, H' est l'image de H par cette translation. On a donc :

$$\overline{OA} = \overline{O'A'} \quad \text{et} \quad \overline{OH} = \overline{O'H'},$$

il s'ensuit que :

$$\overline{OA}\,.\,\overline{OH} = \overline{O'A'}\,.\,\overline{O'H'} \qquad \triangleleft$$

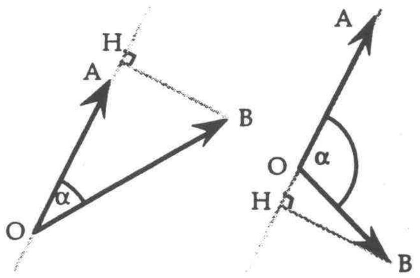


(6-2) <u>Proposition</u> : soit O, A, B trois points distincts de $\mathscr{E}$ et α la mesure de l'angle géométrique $A\hat{O}B$ (i. e. $0 \leq \alpha \leq \pi$). On a toujours :

$$(1) \qquad \overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OB} = OA\,.\,OB\,.\cos\alpha.$$

<u>Démonstration</u> : soit H la projection orthogonale de B sur (OA), selon que l'angle $A\hat{O}B$ est aigu ou obtus, le segment OH a la même orientation que OA ou bien l'orientation opposée. Ainsi, $\overline{OA}\,.\,\overline{OH}$ a le même signe que $\cos\alpha$. On a donc bien :

$$\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OB} = \overline{OA}\,.\,\overline{OH} = OA\,.\,OB\,.\cos\alpha. \qquad \triangleleft$$



1 On entend par là que ce nombre reste indépendant du choix d'un repère pour la droite en question,

(6-3) Théorème : pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et pour tout nombre réel a, on a :

(2) $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{v}\,.\,\vec{u}$

(3) $\vec{u}\,.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{u}\,.\,\vec{w}$ et $(\vec{u}+\vec{v})\,.\,\vec{w} = \vec{u}\,.\,\vec{w} + \vec{v}\,.\,\vec{w}$,

(4) $(a\vec{u})\,.\,\vec{v} = \vec{u}\,.(a\vec{v}) = a(\vec{u}\,.\,\vec{v})$.

Démonstration : la première assertion se déduit de la proposition précédente, les suivantes découlent immédiatement du théorème 4-3 et de sa généralisation à l'espace. ◅

*** Expression du produit scalaire relativement à un repère orthonormé**

(6-4) Théorème : soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées (x, y, z) et $(x', y', z')'$ pour un repère orthonormé (O, A, B, C) donné ; on a toujours :

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

Démonstration : il est immédiat que :

$$\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}\,.\,\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}\,.\,\overrightarrow{OC} = 1 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB}\,.\,\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC}\,.\,\overrightarrow{OA} = 0.$$

Comme, par définition, on a :

$$\vec{u} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} \quad \text{et} \quad \vec{v} = x'\overrightarrow{OA} + y'\overrightarrow{OB} + z'\overrightarrow{OC}.$$

Le résultat annoncé se déduit simplement de (3) et (4). ◅

* Notation

Étant donné un vecteur $\vec{u}$, il est clair que si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, la longueur AB ne dépend que de $\vec{u}$. On convient donc de noter :

$$\|\vec{u}\| = AB.$$

et d'appeler ce nombre le *module* de $\vec{u}$ ou la *norme* de $\vec{u}$. On a de façon évidente :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\,.\,\vec{u}}\,.$$

§ 7. Premières applications du produit scalaire

*** Relations métriques du triangle**

On considère un triangle ABC. On a tout d'abord :

$$\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB},$$

On retient cette relation plus aisément sous la forme qui suit, où, suivant l'usage, on pose :

$$a = BC\ ,\ b = CA\ ,\ c = AB.$$

(7-1) "<u>Loi des cosinus</u>" $\quad \boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.}$

Il est classique d'en déduire, via $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$, les deux relations suivantes, où p désigne le demi-périmètre :

(7-2) $$\sin A = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc}.$$

(7-3) <u>Formule de Héron</u> : **aire ABC** $\boldsymbol{= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$.

On note A' le milieu de BC, il vient :

$$2(AB^2 + AC^2) = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 + (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2 = 4\ AA'^2 + CB^2.$$

On pose $m_a = AA'$, cette relation devient :

$$2(b^2 + c^2) = 4m_a^2 + a^2.$$

Elle permet d'exprimer la longueur de la médiane AA' en fonction de côtés :

(7-4) "<u>Formule de la médiane</u>"

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

On a enfin :

$$AC^2 - AB^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) = 2\,\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AA'} = 2\,\overline{BC}.\overline{HA'},$$

où H désigne le pied de la hauteur issue de A. On obtient ainsi la relation :

(7-5) $$\boldsymbol{b^2 - c^2 = 2\,\overline{BC}.\overline{HA'}}.$$

Cette dernière se complète en termes de lieu géométrique :

(7-6) <u>Théorème</u> : étant donnés deux points distincts A et B et un nombre réel k, le lieu des points M de $\mathscr{E}$, tels que :

$$MA^2 - MB^2 = k,$$

est le plan perpendiculaire à (AH) qui passe par le point I de (AB), tel que :

$$\overline{OI} = \frac{k}{2\overline{AB}}'$$

où O désigne le milieu de AB.

*** Dans l'espace, projection d'un angle droit**

On se place dans l'espace à trois dimensions. Le théorème qui suit est d'un recours constant dans les exercices de géométrie dans l'espace comportant des données métriques. La projection en question est orthogonale sur un plan donné.

(7-7) Théorème

1) Si un angle droit a un côté parallèle au plan de projection, alors il se projette suivant un angle droit.

2) Si un angle a un côté parallèle au plan de projection et s'il se projette suivant un angle droit, alors il est droit.

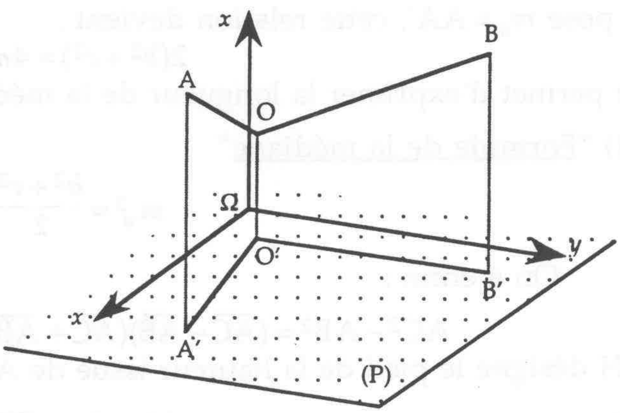
3) Si un angle droit se projette suivant un angle droit, alors l'un de ses côtés est parallèle au plan de projection.

On peut encore réunir ces trois énoncés en un seul.

(7-7') Si, relativement à un plan, un angle vérifie deux parmi les trois propriétés ci-dessous alors, il vérifie la troisième :

(1) être droit,
(2) se projeter suivant un angle droit,
(3) avoir un côté parallèle au plan.

Démonstration : étant donnés trois points O, A, B, non alignés et un plan P, on note O′, A′, B′ les images de O, A, C par la projection orthogonale sur P. on suppose que ce trois points sont distincts, sinon la question qui nous intéresse, concernant l'angle $A\hat{O}B$, ne se poserait pas. On choisit un repère orthonormé de P, dont l'axe des ordonnées est parallèle à (O′B′), on le complète pour former un repère orthonormé de de $\mathscr{E}$. Dans ces conditions, les coordonnées des différents vecteurs qui vont intervenir s'expriment comme suit :



$$\overrightarrow{O'A'} : (a, a', 0) \ , \ \overrightarrow{OA} : (a, a', a'')$$
$$\overrightarrow{O'B'} : (0, b', 0) \ , \ \overrightarrow{OB} : (0, b', b'')$$

Les conditions énoncées se traduisent :

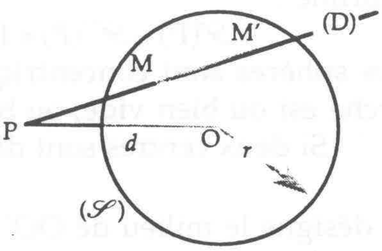
(1) : $a'b' + a''b'' = 0,$
(2) : $a'b' = 0,$
(3) : $a''b'' = 0.$

Il est alors évident que si deux de ces relations sont vérifiées, la troisième l'est aussi. ◁

*** Puissance d'un point par rapport à une sphère – plan radical**

1) Définition.

Dans l'espace, on considère une sphère $\mathscr{S}$, de centre O et de rayon r, un point P et l'on note $d = \mathrm{OP}$. Soit D une droite passant par P et $\vec{u}$ un vecteur unitaire de sa direction, pour tout point M de D, il existe un unique réel λ tel que $\overrightarrow{\mathrm{PM}} = \lambda\vec{u}$. On a ainsi :



$$\mathrm{OM}^2 = (\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PM}})^2 = (\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \lambda\vec{u})^2 = \lambda^2 + 2\lambda\overrightarrow{\mathrm{OP}}\,.\,\vec{u} + \mathrm{OP}^2.$$

Le point M appartient à $\mathscr{S}$ si, et seulement si :

$$r^2 = \mathrm{OM}^2 = \lambda^2 + 2\lambda\overrightarrow{\mathrm{OP}}\,.\,\vec{u} + d^2,$$

c'est-à-dire, si λ est racine de l'équation du second degré :

$$x^2 + 2(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\,.\,\vec{u})x + d^2 - r^2 = 0.$$

Le produit des racines est $d^2 - r^2$. En conséquence, si la droite coupe $\mathscr{S}$ en deux points M et M', on a :

$$\overline{\mathrm{PM}}\,.\,\overline{\mathrm{PM}'} = \overrightarrow{\mathrm{PM}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{PM}'} = \lambda\vec{u}\,.\,\lambda'\vec{u} = \lambda\lambda' = d^2 - r^2.$$

Ce qui justifie l'énoncé qui suit.

(7-8) Théorème : avec les conventions posées, pour toute droite qui passe par P et coupe $\mathscr{S}$ en M et M', on a :

$$\overline{\mathbf{PM}}\,.\,\overline{\mathbf{PM}'} = \boldsymbol{d^2 - r^2}.$$

Définition : on appelle ce nombre la *puissance* de P par rapport à $\mathscr{S}$. On le note $\mathscr{S}$(P).

b) Expression analytique de la puissance d'un point par rapport à une sphère

Aux données ci-dessus, on ajoute un repère orthonormé (O, I, J, K). On note (x, y, z) les coordonnées du point courant M et (a, b, c) les coordonnées du centre O de $\mathscr{S}$. On a ainsi :

$$\mathrm{OM}^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (y-c)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2.$$

Le point M appartient à $\mathscr{S}$ si, et seulement si :

$$0 = \mathrm{OM}^2 - r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - r^2.$$

On obtient ainsi, l'*équation cartésienne* de la sphère :

(7-9)
$$\boldsymbol{\mathscr{S}(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + \delta = 0,}$$
où
$$\delta = a^2 + b + c^2 - r^2.$$

On considère un point P de coordonnées (x_0, y_0, z_0). Nous savons que

$$d^2 = \mathrm{OP}^2 = x_0{}^2 + y_0{}^2 + z_0{}^2 - 2ax_0 - 2by_0 - 2cz_0 + a^2 + b^2 + c^2.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\mathscr{S}(\mathrm{P}) &= d^2 - r^2\\ &= x_0{}^2 + y_0{}^2 + z_0{}^2 - 2ax_0 - 2by_0 - 2cz_0 + a^2 + b^2 + c^2 - r^2\\ &= \mathscr{S}(x_0, y_0, z_0)\end{aligned}$$

La puissance du point P de coordonnées (x_0, y_0, z_0), par rapport à la sphère d'équation $\mathscr{S}(x, y, z) = 0$, s'exprime :

$$\mathscr{S}(\mathrm{P}) = \mathscr{S}(x_0, y_0, z_0).$$

Remarque : on voit immédiatement que la condition :

- $\mathscr{S}(x, y, z) > 0$ caractérise les points situés à l'*extérieur* de la sphère,
- $\mathscr{S}(x, y, z) < 0$ caractérise les points situés à l'*intérieur* de la sphère.

c) Plan radical de deux sphères

Considérons deux sphères $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$, de centres O et O′, de rayons r et r'. On recherche le lieu des points qui ont même puissance par rapport à $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$.

La différence des puissances d'un point P par rapport à ces deux sphères s'exprime :

$$\mathscr{S}(\mathrm{P}) - \mathscr{S}'(\mathrm{P}) = \mathrm{PO}^2 - r^2 - (\mathrm{PO}'^2 - r'^2) = \mathrm{PO}^2 - \mathrm{PO}'^2 - (r^2 - r'^2).$$

Si les sphères sont concentriques, cette expression est constante. Dans ce cas le lieu cherché est ou bien vide, ou bien c'est l'espace tout entier.

Si deux centres sont distincts, on a (cf. 7-5) :

$$\mathrm{PO}^2 - \mathrm{PO}'^2 = 2\overline{\mathrm{OO}'}\,.\,\overline{\mathrm{IH}},$$

où I désigne le milieu de OO′ et H la projection orthogonale de P sur la droite (OO′). Il s'ensuit que :

$$\mathscr{S}'(\mathrm{P}) - \mathscr{S}(\mathrm{P}) = 2\overline{\mathrm{OO}'}\,.\,\overline{\mathrm{IH}} - (r^2 - r'^2).$$

Le lieu des points ayant même puissance par rapport aux deux sphères considérées est donc le plan perpendiculaire à la droite (OO′), au point H tel que :

$$\overline{\mathrm{IH}} = \frac{r^2 - r'^2}{2\overline{\mathrm{OO}'}}.$$

Ce plan est appelé *plan radical* de $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$. Son équation cartésienne s'obtient sous la forme :

$$\mathscr{S}(x, y, z) - \mathscr{S}'(x, y, z) = 0.$$

Remarque : tout ce qui précède vaut dans le plan pour les cercles, il suffit d'annuler la troisème coordonnée dans les expressions analytiques.

Chapitre II. Le barycentre

§ 8. Définition et propriétés fondamentales

(8-1) Lemme : étant donnés :

- n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de $\mathscr{E}$,
- n nombres réels $a_1, \ldots, a_n$,

à tout point O de $\mathscr{E}$, on associe le vecteur suivant :

$$\vec{v} = a_1\overrightarrow{OA_1} + \ldots + a_n\overrightarrow{OA_n}.$$

1. Si $a_1 + \ldots + a_n = 0$, $\vec{v}$ est indépendant de O.
2. Si $a_1 + \ldots + a_n = 1$, le point G, tel que $\overrightarrow{OG} = \vec{v}$ est indépendant de O.

Démonstration : soit O et O′ deux points de $\mathscr{E}$, on pose :

$$\vec{v} = a_1\overrightarrow{OA_1} + \ldots + a_n\overrightarrow{OA_n} \quad \text{et} \quad \vec{v}\,' = a_1\overrightarrow{O'A_1} + \ldots + a_n\overrightarrow{O'A_n}.$$

On a :

$$\vec{v} - \vec{v}\,' = a_1(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{O'A_1}) + \ldots + a_n(\overrightarrow{OA_n} - \overrightarrow{O'A_n})$$

D'après la relation de Chasles, pour $i = 1$ à $i = n$, on a :

$$\overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A_i}.$$

Il s'ensuit que :

$$\vec{v} - \vec{v}\,' = (a_1 + \ldots + a_n)\overrightarrow{OO'}.$$

Si $a_1 + \ldots + a_n = 0$, on a toujours :

$$\vec{v} = \vec{v}\,'.$$

Si $a_1 + \ldots + a_n = 1$, on a :

$$\vec{v} - \vec{v}\,' = \overrightarrow{OO'}.$$

Soit G et G′, les points tels que :

$$\overrightarrow{OG} = \vec{v} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{O'G'} = \vec{v}\,',$$

la relation de Chasles, justifie que :

$$\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'G'} = \overrightarrow{OO'} - (\vec{v} - \vec{v}\,') = \vec{0}.$$

Ce qui établit que G est indépendant de O. ◅

(8-2) Propriété caractérisitique : étant donnés :

- n points $A_1, \ldots, A_n$ de $\mathscr{E}$,
- n nombres réels $a_1, \ldots, a_n$, **de somme non nulle,**

il existe un point G, et un seul, tel que :

$$a_1\overrightarrow{GA_1} + a_2\overrightarrow{GA_2} + \ldots + a_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0}.$$

Démonstration : on applique le point 2 du lemme, en prenant pour origine G et pour coefficients :

$$\frac{a_1}{a_1 + \ldots + a_n}, \ldots, \frac{a_n}{a_1 + \ldots + a_n}$$

◅

<u>Définition</u> : le point G, ainsi défini, s'appelle le *barycentre* de $A_1, \dots, A_n$ *affectés des coefficients* $a_1, \dots, a_n$.

N.B. On retiendra que, dans les conditions ci-dessus, le barycentre G de $A_1, \dots, A_n$, affectés des coefficients $a_1, \dots, a_n$ se caractérise, indifféremment, par l'une des trois propriétés suivantes :

(1) $$a_1\overrightarrow{GA_1} + a_2\overrightarrow{GA_2} + \dots + a_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0},$$

(2) Pour tout point O de $\mathscr{E}$:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{a_1 + \dots + a_n}(a_1\overrightarrow{OA_1} + \dots + a_n\overrightarrow{OA_n}),$$

(3) Pour tout point O de $\mathscr{E}$:

$$(a_1 + \dots + a_n)\overrightarrow{OG} = a_1\overrightarrow{OA_1} + \dots + a_n\overrightarrow{OA_n}.$$

(8-3) <u>Proposition</u> : un barycentre reste inchangé si l'on remplace les coefficients par des nombres proportionnels.

<u>Démonstration</u> : soit G le barycentre des points $A_1, \dots, A_n$ affectés des coefficients $a_1, \dots, a_n$, par définition, on a :

$$a_1\overrightarrow{GA_1} + a_2\overrightarrow{GA_2} + \dots + a_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0},$$

On en déduit que, pour tout nombre réel k, on a :

$$(ka_1)\overrightarrow{GA_1} + (ka_2)\overrightarrow{GA_2} + \dots + (ka_n)\overrightarrow{GA_n} = \vec{0},$$

Si k est non nul, la somme :

$$ka_1 + \dots + ka_n = k(a_1 + \dots + a_n)$$

est non nulle et l'égalité vectorielle ci-dessus montre que G est aussi le barycentre des points $A_1, \dots, A_n$ affectés des coefficients $ka_1, \dots, ka_n$. ◅

(8-4) <u>Théorème</u> : *associativité du barycentre*

Le barycentre de n points ne change pas si l'on remplace une partie d'entre eux par leur barycentre avec les mêmes coefficients – s'il existe – et affecté de la somme de ceux-ci.

<u>Démonstration</u> : soit G le barycentre des points $A_1, \dots, A_n$ affectés des coefficients $a_1, \dots, a_n$, si $a_1 + \dots + a_p \neq 0$, on peut définir le barycentre H des points $A_1, \dots, A_p$ affectés des coefficients $a_1, \dots, a_p$. On a donc, à la fois :

$$a_1\overrightarrow{GA_1} + \dots + a_p\overrightarrow{GA_p} + a_{p+1}\overrightarrow{GA_{p+1}} + \dots + a_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$$

et :

$$a_1\overrightarrow{GA_1} + \dots + a_p\overrightarrow{GA_p} = (a_1 + \dots + a_p)\overrightarrow{GH}.$$

Il s'ensuit que :

$$(a_1 + \dots + a_p)\overrightarrow{GH} + a_{p+1}\overrightarrow{GA_{p+1}} + \dots + a_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0}.$$

Or, cette relation caractérise le barycentre G des points $H, A_{p+1}, \dots, A_n$ affectés des coefficients $(a_1 + \dots + a_p), a_{p+1}, \dots, a_n$. ◅

<u>Remarque</u> : à la place de :

barycentre de $A_1, \dots, A_n$ *affectés des coefficients* $a_1, \dots, a_n$,

on dit souvent :

barycentre du *système pondéré* $(A_1, a_1), (A_2, a_1), \dots, (A_n, a_n)$.

*** Expression des coordonnées du barycentre**

(8-5) <u>Proposition</u> : l'espace étant rapporté à un repère, on considère n points de $\mathscr{E}$: $A_1, \dots, A_n$ donnés par leurs coordonnées :

$$(x_1, y_1, z_1), \dots, (x_n, y_n, z_n)$$

et n nombres réels $a_1, \dots, a_n$, de somme non nulle. Le barycentre de $A_1, \dots, A_n$ affectés des coefficients $a_1, \dots, a_n$ admet pour coordonnées :

$$x = \frac{a_1x_1 + \dots + a_nx_n}{a_1 + \dots + a_n}, \quad y = \frac{a_1y_1 + \dots + a_ny_n}{a_1 + \dots + a_n}, \quad z = \frac{a_1z_1 + \dots + a_nz_n}{a_1 + \dots + a_n}.$$

<u>Démonstration</u> : comme :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{a_1\overrightarrow{OA_1} + \dots + a_n\overrightarrow{OA_n}}{a_1 + \dots + a_n},$$

on obtient les formules annoncées, pàr projection sur axes de coordonnées. ◅

*** Conservation du barycentre**

(8-6) <u>Théorème</u> : toute translation, homothétie ou affinité de $\mathscr{E}$, respecte le barycentre.

<u>Démonstration</u> : soit f une telle transformation et G le barycentre de n points, $A_1, \dots, A_n$, de $\mathscr{E}$ affecté des coefficients $a_1, \dots, a_n$. On convient de noter G' et $A'_1, \dots, A'_n$ les transformés de ces points par f.

- Si f est une translation ou une homothétie, il existe un nombre réel λ, telque :

  $$\overrightarrow{G'A_i} = \lambda\overrightarrow{GA_i}, \text{ pour } i = 1, \dots, n.$$

  On a donc :

  $$a_1\overrightarrow{G'A'_1} + \dots + a_n\overrightarrow{G'A'_n} = \lambda(a_1\overrightarrow{GA_1} + a_2\overrightarrow{GA_2} + \dots + a_n\overrightarrow{GA_n}) = \lambda\vec{0} = \vec{0}.$$

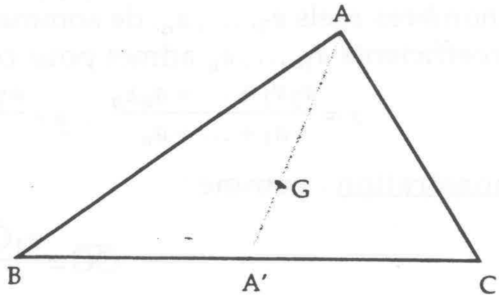
- Si f est une affinité, notant φ l'affinité vectorielle associée, il découle de la proposition 4-4 que :

  $$\begin{aligned} a_1\overrightarrow{G'A'_1} + \dots + a_n\overrightarrow{G'A'_n} &= a_1\varphi(\overrightarrow{GA_1}) + \dots + a_n\Delta(\overrightarrow{GA_n}) \\ &= \varphi(a_1\overrightarrow{GA_1} + a_2\overrightarrow{GA_2} + \dots + a_n\overrightarrow{GA_n}) \\ &= \varphi(\vec{0}) \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

Dans tous les cas envisagés, G' est le barycentre des images des points considérés avec les mêmes coefficients que ceux qui définissent G. ◅

§ 9 Illustration : isobarycentre de trois points – de quatre points

*** Le centre de gravité d'un triangle**



On considère trois points non alignés A, B, C, soit G le barycentre de A, B, C affectés de coefficients égaux et soit A' le barycentre de B et C affectés de coefficients égaux (A' est évidemment le milieu de BC). D'après la propriété d'associativité du barycentre, on a :

$$\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA'} = \vec{0}.$$

Le point G est donc sur la médiane (AA') du triangle le point tel que :

$$\frac{\overline{GA}}{\overline{GA'}} = 2.$$

ou, ce qui revient au même :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}.$$

Comme on n'a posé aucune hypothèse particulière, on a aussi montré que :

$$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'} \text{ et } \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}.$$

où B' et C' désignent les milieux des côtés AC et AB.

Le barycentre cherché est donc à l'intersection des trois médianes du triangle. Ce point est appelé le *centre de gravité* du triangle. Il se caractérise par la relation :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Il est tel que, pour tout point M de $\mathscr{E}$, on a :

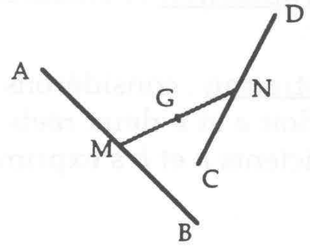
$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$$

<u>Remarque</u> : ce point est effectivement le centre de gravité du solide formé par trois points matériels de même masse situés aux sommets du triangle. C'est aussi le centre des masses d'une lame homogène matérialisant son intérieur.

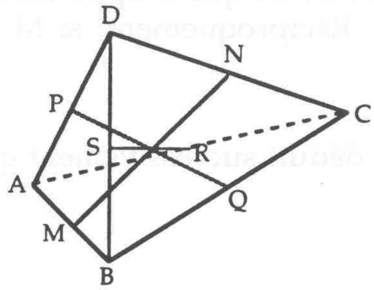
*** Le centre de gravité d'un tétraèdre**

On considère quatre points A, B, C, D de $\mathscr{E}$. Soit G le barycentre de ceux-ci affectés de coefficients égaux.

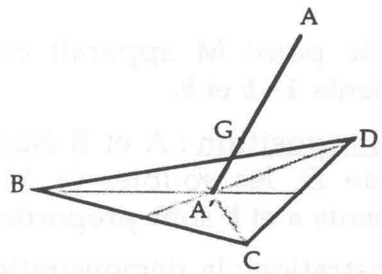
1) Le barycentre de A et B (resp. C et D) affectés de coefficients égaux est leur milieu M (resp. N). Le point G cherché est donc le barycentre des points M et N affectés des coefficients 2 et 2. C'est donc le milieu de MN.



Comme aucune hypothèse ne particularise l'un des point A, B, C ou D, il est aussi prouvé que G est le milieu des segments PQ et RS où les points P, Q, R et S sont les milieux respectifs de AD, BC, AC et BD. On a ainsi démontré que les segments joignant les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre concourent en leur milieu.



2) On peut également déterminer G, en remplaçant les trois points B, C, D par leur centre de gravité A' affecté du coefficient 3. On obtient alors la relation :



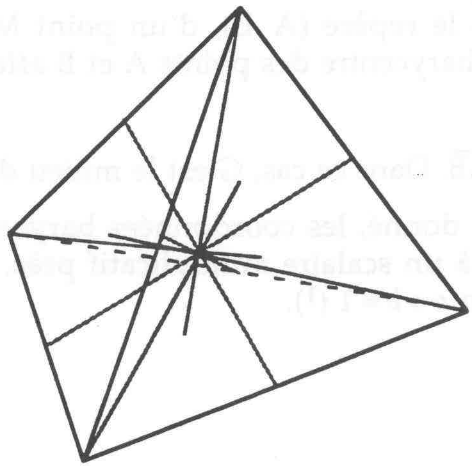
$$\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GA'}=\vec{0}.$$

On en déduit que :

$$\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AA'}.$$

Le point G appartient donc au segment joignant le sommet A au centre de gravité de la face opposée. Ce qui établit que les segments joignant un sommet d'un tétraèdre au centre de gravité de la face opposée concourent au point G situé aux trois quarts de chacun de ceux-ci à partir des sommets.

On a ainsi mis en évidence le concours de sept droites remarquables.



§ 10. Les barycentres de deux points

(10-1) Proposition : l'ensemble des barycentres deux points distincts est la droite qui les joint.

Démonstration : considérons deux points distincts A et B, de $\mathscr{E}$.

Soit a et b deux réels de somme non nulle, le barycentre G de A et B affectés de coefficients a et b s'exprime :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}.$$

Ce qui montre que G appartient à la droite (AB).

Réciproquement, si M est un point de (AB), il existe un nombre réel b tel que :

$$\overrightarrow{AM} = b\overrightarrow{AB}.$$

On en déduit successivement que :

$$\overrightarrow{AM} = b(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}),$$

$$(1-b)\overrightarrow{AM} = b\overrightarrow{MB},$$

$$(1-b)\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = \vec{0}.$$

Ainsi, le point M apparaît comme étant le barycentre de A et B affectés des coefficients $1-b$ et b. ◅

(10-2) Proposition : A et B étant deux points distincts d'une droite D, si M est un point de D, les couples $(a\,,b)$ tels que M soit le barycentre A et B affectés de coefficients a et b sont proportionnels.

Démonstration : la démonstration précédente montre que si $(\alpha\,,\beta)$ est un couple qui convient, alors :

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta} = (1-b) \quad \text{et} \quad \frac{\beta}{\alpha+\beta} = b. \quad ◅$$

Dans la pratique, il est commode de poser la définition qui suit

Définition : étant donnés deux points A et B distincts d'une droite D, on appelle *coordonnées barycentriques*, dans le repère (A , B), d'un point M de D, tout couple nombres $(a\,,b)$ tels que, M soit le barycentre des points A et B affectés des coefficients a et b.

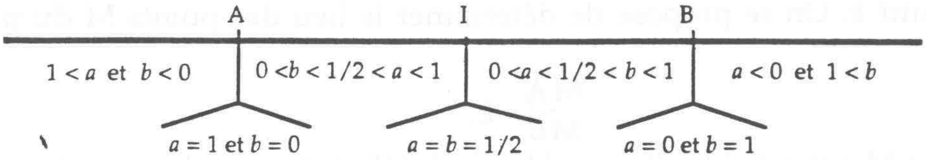
Remarque : si $a = b$ alors $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AB}$. Dans ce cas, G est le milieu du segment AB.

N.B. Relativement à un repère donné, les coordonnées barycentriques $(a\,,b)$, d'un point, sont évidemment définies à un scalaire multiplicatif près. On peut en assurer l'unicité en imposant la condition $a + b = 1$ ([1]).

---

1 Imposer cette convention de façon systématique présenterait plus d'inconvénients que d'avantages.

En adoptant cette convention le point de coordonnées barycentriques a et $b = 1 - a$, dans le repère (A, B), vient se placer par rapport aux points A et B, suivant le schéma ci-dessous.



*** Barycentre et rapport de longueurs**

Soit A et B deux points distincts d'une droite D et M un point de D. Si M est distinct de B, on peut considérer le rapport

$$k = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}.$$

On a ainsi

$$\overline{MA} = k\overline{MB}$$

ou encore

$$\overline{MA} - k\overline{MB} = 0.$$

Le point M apparaît donc comme étant le barycentre de A et B affectés des coefficients 1 et $-k$ ou, ce qui revient au même, comme le point qui admet :

$$a = 1 \text{ et } b = -k$$

pour coordonnées barycentriques dans le repère (A, B).

Réciproquement, si M est donné comme étant le point de coordonnées barycentriques (a, b), on a :

$$a\overline{MA} + b\overline{MB} = 0.$$

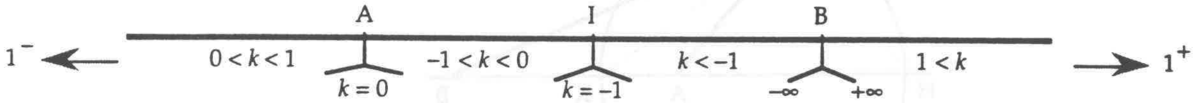
et par suite

$$k = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\frac{b}{a}.$$

On retrouve ainsi l'unicité du réel k, tel que :

$$k \neq 1 \text{ et } k = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}.$$

Le point qui divise le segment AB dans le rapport k, vient, suivant les valeurs de k, se placer sur la droite (AB) selon le schéma ci-dessous.



*** Un exemple d'application : les cercles d'Appolonius**

Étant donnés deux points distincts, A et B, d'un plan et un nombre réel strictement positif k. On se propose de déterminer le lieu des points M du plan tels que :

$$\frac{MA}{MB} = k.$$

Un point M appartient à l'ensemble ainsi défini si, et seulement si, on a :

$$MA^2 - k^2\, MB^2 = 0.$$

Ce qui équivaut encore à :

$$(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) = \vec{0}.$$

Si $\boldsymbol{k = 1}$, il vient :

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA} \text{ et } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{MI}$$

où I désigne le milieu de AB. On a donc :

$$\overrightarrow{MI}\,.\,\overrightarrow{BA} = 0$$

ou – ce qui est équivalent – le point M se projette orthogonalement en I sur la droite (AB). On retrouve ainsi la médiatrice de AB.

Si $\boldsymbol{k \neq 1}$ (autrement dit si $1 - k \neq 0$), le barycentre de A et B affectés des coefficients 1 et $-k$ existe, on le note H. On note aussi K le barycentre de A et B affectés des coefficients 1 et k. On a ainsi :

$$\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB} = (1-k)\overrightarrow{MH} \text{ et } \overrightarrow{MA} + k\,\overrightarrow{MB} = (1+k)\overrightarrow{MK}.$$

Il s'ensuit que :

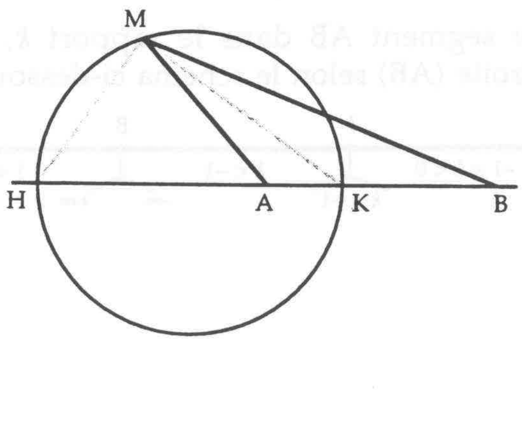
$$(1-k)(1+k)\overrightarrow{MH}\,.\,\overrightarrow{MK} = 0.$$

Ce qui équivaut à :

$$\overrightarrow{MH}\,.\,\overrightarrow{MK} = 0,$$

ou encore au fait que l'angle $H\hat{M}K$ est droit.

L'ensemble des points du plan, tels que $\frac{MA}{MB} = k$ est donc, si $k \neq 1$, le cercle de diamètre HK, où H et K sont les points qui divisent le segment AB dans les rapports k et $-k$.



§ 11. Les barycentres de trois points

(11-1) Proposition : le plan déterminé par trois points non alignés est l'ensemble de leurs barycentres.

Démonstration : étant donnés trois points non alignés A, B, C, on note leur plan P.

Si a, b et c sont trois réels de somme non nulle, le barycentre G de A, B et C, affectés de coefficients a, b et c s'exprime :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{a+b+c}(b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC})$$

D'après la définition de la somme de deux vecteurs et de la multiplication d'un vecteur par un nombre réel, il est clair que le point G appartient à P.

Réciproquement, si M est un point de P, il existe deux nombres réels x et y, tels que :

$$\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}.$$

On en déduit successivement :

$$\overrightarrow{AM} = x\,(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) + y\,(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}),$$

$$(1-x-y)\,\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{MC},$$

$$(1-x-y)\,\overrightarrow{MA} + x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

Ce qui établit que M est le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients

$1-x-y$, x et y. ◅

(11-2) Proposition : A, B et C étant trois points non alignés d'un plan P, si M est un point de P, les triplets (a,b,c) tels que M soit le barycentre A, B et C affectés de coefficients a, b et c sont proportionnels.

Démonstration : dans la démonstration précédente, le couple (x,y) est formé des coordonnées de M dans le repère (A,B,C), il est donc unique. On en déduit que si (α,β,γ) est un triplet qui convient, alors :

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma} = (1-x-y)\,,\ \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma} = x \text{ et } \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma} = y.$$ ◅

Définition : étant donnés trois points A, B, C, non alignés d'un plan P, on appelle *coordonnées barycentriques*, dans le repère (A,B,C), d'un point M de P, tout triplet nombres (a,b,c) tels que, M soit le barycentre des points A, B et C, affectés des coefficients a, b et c.

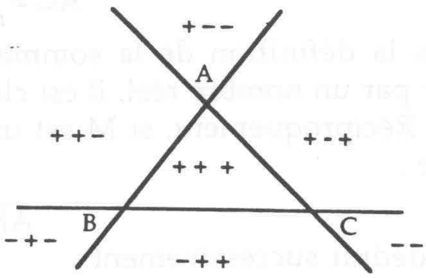
Remarque : relativement à un repère donné, les coordonnées barycentriques (a,b,c), d'un point, sont évidemment définies à un scalaire multiplicatif près. On peut en assurer l'unicité en imposant la condition $a+b+c=1$.

§ 12. Détermination de coordonnées barycentriques dans le plan

Dans tout ce qui suit, ABC est un triangle donné et M désigne un point de son plan qui n'est situé sur aucune des droites (BC), (CA) ou (AB). On note α, β, γ les coordonnées barycentriques de M relatives à ABC. On a donc $\alpha\beta\gamma \neq 0$.

*** Interprétation en termes d'aires**

On définit l'*aire algébrique* du triangle MBC comme étant son aire géométrique affectée du signe "+" s'il a même orientation que le triangle ABC et du signe "−" dans le cas contraire. On définit de même l'aire algébrique des triangles MCA et MAB. Ainsi, selon que M appartient à l'une des sept régions du plan délimitées par les côtés du triangle ABC, les signes affectés aux aires des triangles MBC, MCA, MAB obéissent à la règle schématisée ci-contre.



Si $\beta+\gamma \neq 0$, on peut considérer le barycentre de B et C affectés des coefficients β et γ, on le note A'. L'associativité du barycentre permet d'affirmer que :

$$\alpha\overrightarrow{MA} + (\beta+\gamma)\overrightarrow{MA'} = \vec{0}.$$

Il s'ensuit que :

$$\alpha(\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'A}) + (\beta+\gamma)\,\overrightarrow{MA'} = \vec{0},$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)\,\overrightarrow{MA'} = \alpha\overrightarrow{AA'}.$$

On en déduit la relation suivante :

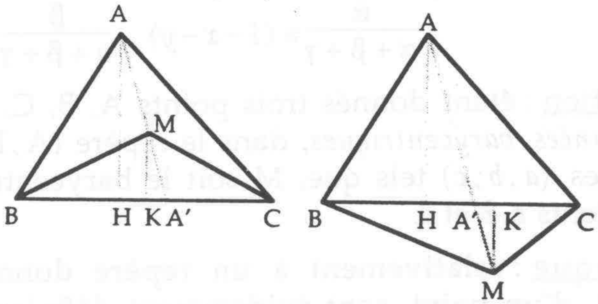
$$\frac{\overline{MA'}}{\overline{AA'}} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Notons H et K les projections orthogonales de A et M sur (BC). On a évidemment :

$$\frac{\text{aire MBC}}{\text{aire ABC}} = \frac{\frac{1}{2}BC\,.\,\overline{MK}}{\frac{1}{2}BC\,.\,\overline{AH}} = \frac{\overline{MK}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{MA'}}{\overline{AA'}} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

On en déduit que :

$$\frac{\text{aire MBC}}{\alpha} = \frac{\text{aire ABC}}{\alpha+\beta+\gamma}$$



Si l'on a aussi, $\gamma+\alpha \neq 0$ et $\alpha+\beta \neq 0$, ces considérations, s'appliquent aussi bien aux triangles MCA et MAB. Elles montrent que :

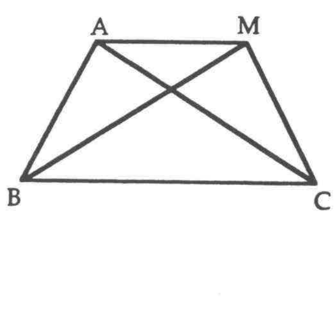
$$\frac{\text{aire MBC}}{\alpha} = \frac{\text{aire MCA}}{\beta} = \frac{\text{aire MAB}}{\gamma}.$$

Si $\beta+\gamma=0$, a :

$$\alpha\overrightarrow{AM} = \beta\overrightarrow{AB} - \beta\overrightarrow{AC} = \beta\overrightarrow{CB}$$

La droite (AM) est alors parallèle à (BC) et l'on vérifie que :

$$\frac{\text{aire MBC}}{\alpha} = \frac{\text{aire MCA}}{\beta} = \frac{\text{aire MAB}}{-\beta}.$$



Ainsi, on a démontré la proposition qui suit.

(12-1) <u>Proposition</u> : les aires algébriques des triangles MBC, MCA et MAB forment un système de coordonnées barycentriques de M.

On dispose alors d'un moyen très efficace de déterminer des coordonnées barycentriques.

<u>Exemples</u>.

1) <u>Le centre du cercle inscrit</u>

Étant donné un triangle ABC, on note, suivant l'usage :

$$a = \mathrm{BC} \;\;,\;\; b = \mathrm{CA} \;\text{ et } c = \mathrm{AB}.$$

Soit I le centre et r le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC. Comme I est un point intérieur au triangle, les aires algébriques des triangles IBC, ICA, IAB sont positives. On a ainsi :

$$\text{aire IBC} = \frac{1}{2}ar \;\;,\;\; \text{aire ICA} = \frac{1}{2}br \;\text{ et }\; \text{aire IAB} = \frac{1}{2}cr.$$

Ce qui justifie que :

$$a\;,b\;,c$$

sont des coordonnées barycentriques du centre du cercle inscrit.

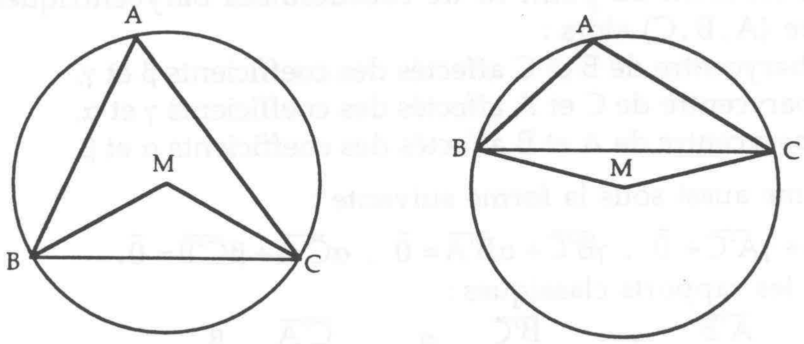
Un calcul analogue montrerait que les nombres

$$-a\;\;,\;b\;\;,\;c$$

sont des coordonnées barycentriques du centre du cercle exinscrit dans l'angle A etc.

2) <u>Le centre du cercle circonscrit</u>.

Soit M le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.



L'aire algébrique du triangle MBC est positive ou négative suivant que l'angle $\mathrm{B\hat{A}C}$ est aigu ou obtus. Si cet angle est aigu, on a :

$$\mathrm{B\hat{M}C} = 2\mathrm{B\hat{A}C} = 2\hat{\mathrm{A}}$$

et dans le cas contraire :

$$\mathrm{B\hat{M}C} = 2\pi - 2\mathrm{B\hat{A}C} = 2\pi - 2\hat{\mathrm{A}}.$$

D'autre part, l'aire géométrique du triangle BMC est égale à :

$$\frac{1}{2}\mathrm{R}^2 \sin \mathrm{B\hat{M}C},$$

où R désigne le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC. Dans tous les cas, l'aire algébrique du triangle MBC s'exprime :

$$\frac{1}{2}\mathrm{R}^2 \sin 2\mathrm{A}.$$

Il en résulte que :

$$\sin 2\mathrm{A} \;\;, \sin 2\mathrm{B} \;\;,\;\; \sin 2\mathrm{C}.$$

est un système de coordonnées barycentriques du centre du cercle circonscrit.

*** Interprétation en termes de rapports de longueurs**

On revient sur calcul effectué au début en changeant de point de vue.

Si $\beta+\gamma\neq 0$, le point A′, barycentre de B et C, affectés des coefficients β et γ, vérifie :

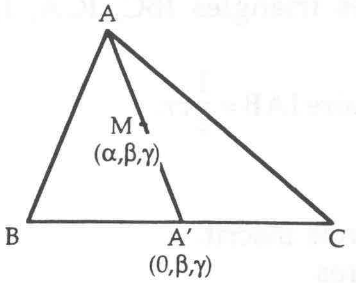
$$\alpha\overrightarrow{MA}+(\beta+\gamma)\,\overrightarrow{MA'}=\vec{0}.$$

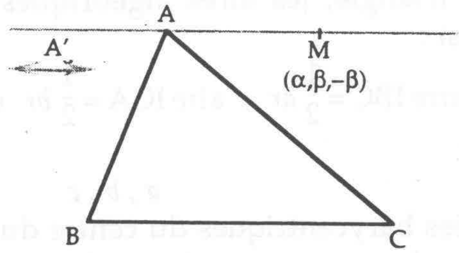
Il appartient donc à (AM). Ainsi, A′ est à l'intersection des droites (AM) et (BC).

Si $\beta+\gamma=0$, comme $\alpha\neq 0$, on a :

$$\overrightarrow{AM}=\frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{CB}.$$

et comme $\beta\neq 0$, la droite (AM) est parallèle à (BC).





On a donc, en particulier prouvé la proposition qui suit.

(12-2) <u>Proposition</u> : pour tout triangle ABC et tous points A′, B′ et C′, situés respectivement sur les droites (BC), (CA), (AB) et distincts des sommets, si les droites (AA′), (BB′) et (CC′) sont coucourent au point M de coordonnées barycentriques (α,β,c) relativement au repère (A, B, C) alors :

- A′ est le barycentre de B et C affectés des coefficients β et γ,
- B′ est le barycentre de C et A affectés des coefficients γ et α,
- C′ est le barycentre de A et B affectés des coefficients α et β.

Ce qui s'éxprime aussi sous la forme suivante :

$$\beta\overrightarrow{A'B}+\gamma\overrightarrow{A'C}+\vec{0}\ \ ,\ \gamma\overrightarrow{B'C}+\alpha\overrightarrow{B'A}=\vec{0}\ \ ,\ \alpha\overrightarrow{C'A}+\beta\overrightarrow{C'B}=\vec{0}.$$

ou encore en utilisant les rapports classiques :

$$p=\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}=-\frac{\gamma}{\alpha}\ ,\ q=\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}=-\frac{\alpha}{\beta}\ ,\ r=\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=-\frac{\beta}{\gamma}.$$

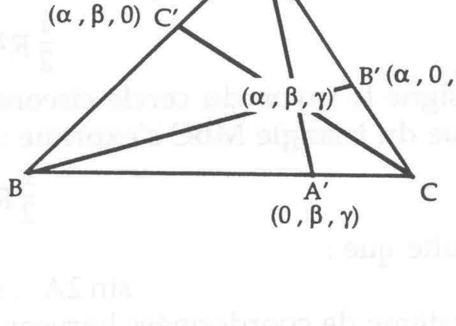
Notons que, dans ces conditions, on a :

$$pqr=-1.$$

Inversement, si l'on connaît des coordonnées barycentriques de A′, B′ et C′ sous la forme :

$$A':(0,\beta,\gamma)\ ,\ B':(\alpha,0,\gamma)\ ,\ C':(\alpha,\beta,0)$$

On réserve provisoirement le cas où $\alpha+\beta+\gamma=0$, de façon à considérer le point M, barycentre de A, B, C affectés des coefficients α, β, γ. Il découle de la propriété d'associativité que M est aussi le barycentre de A et A′, affectés des coefficients α et $\beta+\gamma$. Ce point est donc situé sur la droite (AA′).



Le même argument justifie que M est situé sur les droites (BB′) et (CC′). Il est alors clair que les droites (AA′), (BB′) et (CC′) concourent au point de coordonnées barycentriques (α, β, γ).

Si $\alpha+\beta+\gamma=0$, le vecteur :

$$\vec{v}=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}$$

est, on le sait, indépendant de M. on a donc, en particulier :

$$\vec{v}=\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}=\gamma\overrightarrow{BC}+\alpha\overrightarrow{BA}=\alpha\overrightarrow{CA}+\beta\overrightarrow{CB}.$$

Ce qui montre que :

$$(\beta+\gamma)\overrightarrow{AA'}=(\gamma+\alpha)\overrightarrow{BB'}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{CC'}.$$

Les droites (AA′), (BB′) et (CC′) sont alors parallèles.

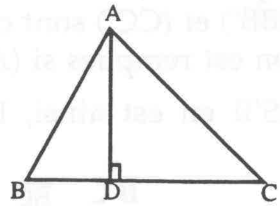
Remarque : bien que ces résultats soient utilisés dans la section suivante, il n'est pas souhaitable de leur donner, ici, sous cette forme, un statut de théorème. C'est le principe de la démarche qu'il convient de retenir, afin de savoir la mettre en œuvre sur des cas d'espèce.

Exemple : les coordonnées barycentriques de l'orthocentre d'un triangle ABC.

Si un triangle est rectangle son orthocentre est le sommet de l'angle droit. La question est alors sans intérêt, on écarte ce cas.

Soit D le pied de la hauteur issue de A, on a :

$$DB\,.\,|\tan B| = AD = DC\,.\,|\tan C|.$$



Or, D est intérieur au segment BC si $\hat{B}$ et $\hat{C}$ sont aigus, $\tan B$ et $\tan C$ sont alors positifs. Ce point est extérieur à BC si l'un de ces angles est obtus, auquel cas l'un de ces nombres est positif et l'autre est négatif. Ce qui montre que D est le barycentre de B et C, affectés des coefficients $\tan B$ et $\tan C$. On en déduit que les pieds des trois hauteurs ont pour coordonnées barycentriques :

$$(0, \tan B, \tan C)\ ,\ (\tan A, 0, \tan C)\ ,\ (\tan A, \tan B, 0).$$

Nous savons alors que :

$$(\tan A, \tan B, \tan C)$$

est un système de coordonnées barycentriques de l'orthocentre.

Considérons maitenant le cas général où l'on connaît les rapports :

$$p=\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\ ,\ q=\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\ ,\ r=\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}.$$

Il est clair que pour que les droites (AA′), (BB′) et (CC′) soient concourantes, il est nécessaire que :

$$pqr=-1$$

S'il en est ainsi, il est facile d'ajuster les coordonnées barycentriques comme suit :

$$\left\{\begin{array}{l} A' : (0, 1, -p) \\ B' : (-q, 0, 1) \\ C' : (1, -r, 0) \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} -r \\ (-r)(-p) \\ 1 \end{array}\right.$$

de façon à se trouver dans le cas précédent :

$$\left\{\begin{array}{l} A' : (0, -r, pr) \\ B' : (1, 0, pr) \\ C' : (1, -r, 0) \end{array}\right.$$

§ 13. Le théorème de Céva et le théorème de Ménélaüs

(13-1) Théorème de Céva.

Étant donnés un triangle ABC et trois points A', B', C', situés respectivement sur les droites (BC), (CA), (AB), dont aucun ne coïncide avec l'un des sommets.

Les droites (AA'), (BB') et (CC') sont **concourantes ou parallèles** si, et seulement si :

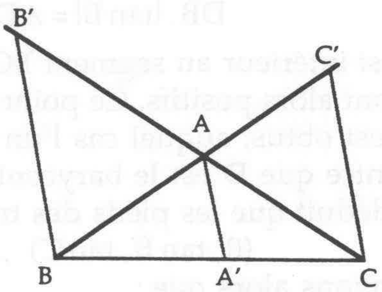
$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\cdot\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\cdot\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=-1.$$

Démonstration : on considère un triangle ABC et trois points A', B', C' respectivement situés sur ses côtés (BC), (CA), (AB) et distincts des sommets. Nous savons que si les droites (AA'), (BB') et (CC') sont coucourantes alors :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\cdot\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\cdot\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=-1.$$

Réciproquement, nous avons montré que si cette relation est vérifiée, les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles. Il reste donc à justifier que cette condition est remplies si (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles.

S'il en est ainsi, le théorème de Thalès justifie que :



$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{BA'}} \text{ et } \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=\frac{\overline{CA'}}{\overline{CB}}.$$

Il s'ensuit que :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\cdot\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\cdot\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\cdot\frac{\overline{BC}}{\overline{BA'}}\cdot\frac{\overline{CA'}}{\overline{CB}}=-1. \quad \triangleleft$$

Remarque : la démonstration que nous venons de proposer n'est évidemment pas la seule possible. Il est classique de démontrer le théorème direct en appliquant le théorème de Ménélaüs au triangle AA'C et la transversale (BB'), puis au triangle AA'B et la transversale (CC').

*** Le théorème de Ménélaüs.**

Revenons sur le théorème de Ménélaüs dans ce contexte. Rappelons en l'énoncé.

(13-2) Théorème de Ménélaüs : on considère un triangle ABC et trois points A', B' et C' situés respectivement sur les droites (BC), (CA), (AB), tous distincts des sommets.

Les points A', B' et C' sont alignés si, et seulement si, on a :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\cdot\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\cdot\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=1.$$

<u>Démonstration</u> : comme B′ et C′ sont distincts des sommets, on peut choisir trois nombres α, β et γ tels que :

- C′ soit le barycentre de A et B affectés des coefficients α et β,
- B′ soit le barycentre de A et C affectés des coefficients α et γ.

Comme alors :

$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -\frac{\alpha}{\gamma} \text{ et } \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -\frac{\beta}{\alpha},$$

Si l'on avait $\beta = \gamma$, alors la condition de l'énoncé entraînerait que :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = 1,$$

ce qui est impossible. On peut donc considérer le barycentre de B et C affectés des coefficients β et −γ. Soit G ce point, il vérifie :

$$(\beta - \gamma)\ \overrightarrow{AG} = \beta\overrightarrow{AB} - \gamma\overrightarrow{AC}.$$

Tenant compte de la définition de α, β, γ, on a :

$$(\alpha + \beta)\overrightarrow{AC'} = \beta\overrightarrow{AB} \text{ et } (\alpha + \gamma)\ \overrightarrow{AB'} = \gamma\ \overrightarrow{AC}.$$

On en déduit que :

$$(\beta - \gamma)\ \overrightarrow{AG} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{AC'} - (\alpha + \gamma)\ \overrightarrow{AB'}.$$

Ce qui montre que G est un barycentre de B′ et C′. Ce point est donc sur la droite (B′C′). Comme, par défintion, il est aussi sur (BC) il est alors prouvé que, A′ est aligné avec B′ et C′ si, et seulement si, il coïncide avec G.

Cette dernière condition s'exprime :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C'}} = \frac{\gamma}{\beta}.$$

Or, α, β et γ sont, par définition, tels que :

$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -\frac{\alpha}{\gamma} \text{ et } \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Il est alors démontré que A′ est aligné avec B′ et C′ si, et seulement si :

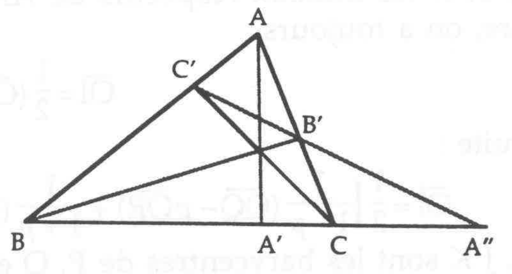
$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1.$$

◁

<u>Remarque</u> : le rapprochement de ces deux importants théorèmes montre que, dans la figure ci-contre, on a :

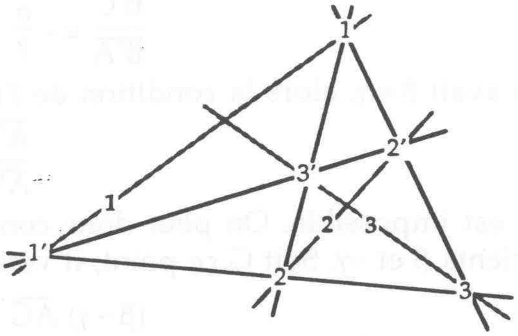
$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\frac{\overline{A''B}}{\overline{A''C}}.$$

On dit alors que les points B, C, A′, A″ forment une *division harmonique*.



*** Application : la droite de Newton d'un quadrilatère complet**

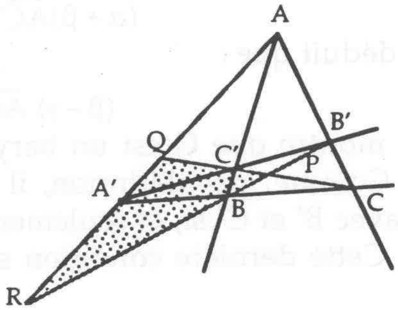
On appelle *quadrilatère complet* toute figure formée de quatre droites deux à deux sécantes – ses *côtés* – et telles que trois quelconques d'entre elles ne soient pas concourantes.



Celles-ci se coupent en $\frac{4\times 3}{2} = 6$ points – les *sommets*. Chacun d'eux est adjacent à deux côtés, les deux autres définissent le sommet qui lui est *opposé*.

On appelle *diagonales* les droites (ou, suivant le contexte, les segments) qui joignent deux sommets opposés. On en compte trois.

Montrons que les milieux des diagonales d'un quadrilatère complet sont alignés.



On considère un quadrilatère complet et l'on adopte les notations portées sur le schéma ci-contre. Elles rendent compte de la relation d'opposition entre les sommets. Si deux des diagonales sont parallèles, la propriété avancée est un exercice élémentaire classique sur le trapèze. Sinon, les sommets du triangle, formé par les diagonales, consituent un repère (P, Q, R), du plan. On note p, q et r, les rapports dans lesquels les points A, B et C divisent respectivement les côtés du triangle PQR. Tenant compte de la remarque précédente, les sommets du quadrilatère complet sont alors les barycentres de P, Q et R affectés des coefficients suivants :

$$\begin{array}{lll} A : (0,1,-p) & , & A' : (0,1,p) \\ B : (-q,0,1) & , & B' : (\beta,0,q) \\ C : (1,-r,0) & , & C' : (1,r,0) \end{array}$$

Les sommets A', B' et C' étant alignés, le théorème de Ménélaüs entraîne que :

$$-pqr = 1.$$

Soit I, J et K les milieux respectifs de AA', BB' et CC'. On désigne par O un point arbitraire, on a toujours :

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA'})$$

et par suite :

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-p}(\overrightarrow{OQ} - p\overrightarrow{OR}) + \frac{1}{1+p}(\overrightarrow{OQ} + p\overrightarrow{OR})\right] = \frac{1}{1-p^2}(\overrightarrow{OQ} - p^2\overrightarrow{OR}).$$

Ainsi, I, J K sont les barycentres de P, Q et R affectés respectivement des coefficients suivants :

$$I : (0,1,-p^2) \ , \ J : (-q^2,0,1) \ , \ K : (1,-r^2,0)$$

On a vu que $pqr = -1$, on a donc :

$$p^2q^2r^2 = 1.$$

Le théorème de Ménélaüs montre alors que ces points sont alignés.

§ 14. La formule de Leibniz

Étant donnés n points $A_1, \dots, A_n$ de $\mathscr{E}$ et n nombres réels $a_1, \dots, a_n$, on considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{L} : E & \longrightarrow & \mathbf{R}^+ \\ M & \mapsto & a_1 MA_1^2 + \dots + a_n MA_n^2 \end{array}$$

qu'on appelle la *fonction scalaire de Leibniz*, On compare les valeur prises par celle-ci en deux points M et M', de $\mathscr{E}$. Tenant compte de :

$$MA_i^2 = (\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'A_i})^2 = \overrightarrow{MM'}^2 + 2\overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{M'A_i} + \overrightarrow{M'A_i}^2,$$

pour $i = 1$ à $i = n$, il vient :

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(M) &= a_1 MA_1^2 + \dots + a_n MA_n^2 \\ &= (a_1 + \dots + a_n) MM'^2 + 2a_1 \overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{M'A_1} + \dots + 2a_n \overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{MA_n} + a_1 M'A_1^2 + \dots + a_n M'A_n^2 \\ &= (a_1 + \dots + a_n) MM'^2 + 2\overrightarrow{MM'} \cdot (a_1 \overrightarrow{M'A_1} + \dots + a_n \overrightarrow{M'A_n}) + a_1 M'A_1^2 + \dots + a_n M'A_n^2. \end{aligned}$$

Deux cas sont à envisager.

- Si $a_1 + \dots + a_n = 0$, le vecteur :
$$\bar{v} = a_1 \overrightarrow{M'A_1} + \dots + a_n \overrightarrow{M'A_n}$$
est indépendant de M' (cf. 8-1). On a alors :
$$\mathscr{L}(M) = \mathscr{L}(M') + 2\,\overrightarrow{MM'} \cdot \bar{v}.$$
- Si $a_1 + \dots + a_n \neq 0$, le barycentre G des points $A_1, \dots, A_n$, affectés des coefficients $a_1, \dots, a_n$ est bien défini et l'on obtient, pour $M' = G$, la relation suivante.
$$\mathscr{L}(M) = \mathscr{L}(G) + (a_1 + \dots + a_n) MG^2.$$

(14-1) <u>Théorème</u> : on considère n points $A_1, \dots, A_n$ de $\mathscr{E}$ et n nombres réels $a_1, \dots, a_n$.

1) Si $a_1 + \dots + a_n = 0$, notant :

$$\bar{v} = a_1 \overrightarrow{MA_1} + \dots + a_n \overrightarrow{MA_n}$$

pour tous point M et M', on a :

$$a_1 M'A_1^2 + \dots + a_n M'A_n^2 = a_1 MA_1^2 + \dots + a_n MA_n^2 - 2\,\overrightarrow{MM'} \cdot \bar{v}.$$

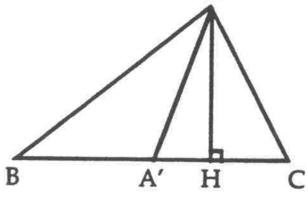
2) Si $a_1 + \dots + a_n \neq 0$, G désignant le barycentre de $A_1, \dots, A_n$, affectés des coefficients $a_1, \dots, a_n$, pour tout point M :

$$a_1 MA_1^2 + \dots + a_n MA_n^2 = a_1 GA_1^2 + \dots + a_n GA_n^2 + (a_1 + \dots + a_n) MG^2.$$

Cette dernière relation est appelée la *formule de Leibniz*.

*** Exemples d'application**

1) On considère un triangle ABC, on désigne par A' le milieu de BC et par H le pied de la hauteur issue de A.



a) On affecte B et C de coefficients égaux à 1, la formule de Leibniz s'exprime :

$$AB^2 + AC^2 = (1+1)AA'^2 + A'B^2 + A'C^2.$$

On retrouve ainsi la "formule la médiane" :

$$AA'^2 = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2) - \frac{1}{4}BC^2.$$

b) On affecte B et C des coefficients 1 et -1, il vient :

$$\vec{v} = 1\,\overrightarrow{BB} - 1\,\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB}.$$

La formule ci-dessus s'écrit :

$$AB^2 - AC^2 = A'B^2 - A'C^2 + 2\overrightarrow{AA'}\,.\,\vec{v}.$$

On retrouve ainsi la relation classique :

$$AB^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{AA'}.\,\overrightarrow{CB} = 2\,\overrightarrow{A'H}.\,\overrightarrow{BC}.$$

2) <u>Lieu des points M tels que</u> :

$$a_1 MA_1^2 + \ldots + a_n MA_n^2 = k,$$

où $A_1, \ldots, A_n$ sont des points donnés et $a_1, \ldots, a_n$ et k sont des nombres réels donnés. Ici encore, deux cas sont à envisager.

- Si $a_1 + \ldots + a_n = 0$:
  - Si $\vec{v} \neq \vec{0}$, désignant par O un point arbitraire, la condition devient
$$k = \mathscr{L}(M) = \mathscr{L}(O) - 2\,\overrightarrow{OM}\,.\,\vec{v}.$$
$$\overrightarrow{OM}\,.\,\vec{v} = \frac{1}{2}(\mathscr{L}(O) - k).$$
  L'ensemble en question est alors un plan orthogonal à $\vec{v}$.
  - Si $\vec{v} = \vec{0}$, la valeur de l'expression $a_1 MA_1^2 + \ldots + a_n MA_n^2$ est indépendante du point M. Le lieu cherché est alors, suivant la valeur de k, tout l'espace $\mathscr{E}$, ou l'ensemble vide.
- Si $a_1 + \ldots + a_n \neq 0$, la condition s'exprime :
$$k = \mathscr{L}(G) + (a_1 + \ldots + a_n)MG^2,$$
  puis :
$$MG^2 = \frac{k - a_1 GA_1^2 + \ldots + a_n GA_n^2}{a_1 + \ldots + a_n}.$$
  selon les données, le lieu cherché est alors soit :
  - l'ensemble vide,
  - le point G,
  - une sphère de centre G.

Chapitre III. Équations de droites et équations de plans

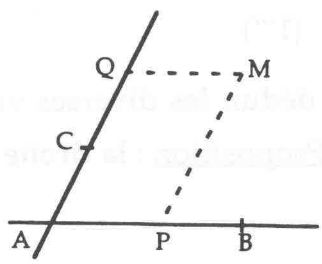
§ 15. Présentations paramétriques des droites et des plans

Rappelons brièvement le principe du repérage d'un point.

- Sur une droite D : étant donné un couple (A, B) de points distincts, tout point M de D est associé à un nombre unique λ tel que :

(1) $$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}.$$

- Dans un plan P : étant donné un triplet (A, B, C) de points non alignés, tout point M de P est associé à un unique couple de nombres (λ, μ) tel que :



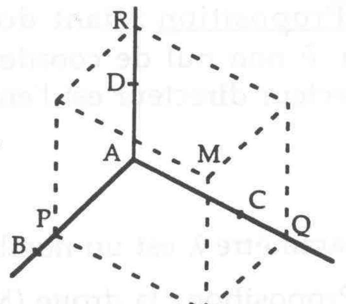
(2) $$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}.$$

Les points P et Q tels que :

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AQ} = \mu \overrightarrow{AC}$$

sont les projections de M respectivement sur (AB) parallèlement à (AC) et sur (AC) parallèlement à (AB).

- Dans l'espace : étant donné un quadruplet de points non coplanaires (A, B, C, D), tout point M est associé à un unique triplet de nombres (λ, μ, ν) tel que :



(3) $$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC} + \nu \overrightarrow{AD}.$$

Les points P, Q et R, tels que :

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AQ} = \mu \overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{AR} = \nu \overrightarrow{AD}.$$

sont les projections de M respectivement sur (AB) parallèlement à (ACD), sur (AC) parallèlement à (ADB) et sur (AD) parallèlement à (ABC)

On convient que l'espace est rapporté à un repère noté (O, I, J, K) et l'on note :

$$\vec{i} = \overrightarrow{OI}\ ,\ \vec{j} = \overrightarrow{OJ}\ ,\ \vec{k} = \overrightarrow{OK}.$$

Dans ces conditions, tout point M est bien défini par ses coordonnées, c'est-à-dire le triplet (x, y, z) de nombres tels que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

De même, tout vecteur $\vec{v}$ pouvant se présenter de façon unique sous la forme :

$$\vec{v} = \overrightarrow{OM},$$

sera bien donné par les coordonnées (x, y, z) du point M ainsi défini.

*** Présentations paramétriques d'une droite**

Soit D une droite définie par la donnée des coordonnées de deux de ses points M_0, M_1 et M_2, distincts :

$$M_0 : (x_0, y_0, z_0) \quad , \quad M_1 : (x_1, y_1, z_1).$$

Soit M un point quelconque de D, relativement au repère (M_0, M_1), la relation (1) s'exprime :

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda \overrightarrow{M_0M_1} \text{ où } \lambda \in \mathbf{R}.$$

et prend l'une des formes suivantes :

(1') $$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \lambda \overrightarrow{M_0M_1} \qquad \text{où } \lambda \in \mathbf{R}.$$

(1'') $$\overrightarrow{OM} = (1-\lambda)\overrightarrow{OM_0} + \lambda \overrightarrow{OM_1} \qquad \text{où } \lambda \in \mathbf{R}.$$

La dernière, présente la droite D comme l'ensemble des barycentres des points M_0 et M_1. On peut lui préférer la forme homogène équivalente qui suit :

(1''') $$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{\alpha+\beta}(\alpha\overrightarrow{OM_0} + \beta\overrightarrow{OM_1}) \quad \text{où } \alpha \in \mathbf{R},\ \beta \in \mathbf{R} \text{ et } \alpha+\beta \neq 0.$$

On en déduit les diverses variantes de la présentation paramétrique d'une droite.

(15-1) <u>Proposition</u> : la droite (M_0M_1) est l'ensemble des points de coordonnées :

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + \lambda(y_1 - y_0) \\ z = z_0 + \lambda(z_1 - z_0) \end{cases}$$

où le paramètre λ est un nombre réel quelconque.

On est naturellement conduit à remplacer la donnée de l'un des points par celle d'un vecteur directeur de la droite. On obtient alors la proposition qui suit.

(15-2) <u>Proposition</u> : étant donnés un point M_0 de coordonnées (x_0, y_0, z_0) et un vecteur $\vec{v}$ non nul de coordonnées (a, b, c), la droite qui passe par M_0 et admet $\vec{v}$ pour vecteur directeur est l'ensemble des points de coordonnées :

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$$

où le paramètre λ est un nombre réel quelconque.

(15-3) <u>Proposition</u> : la droite (M_0M_1) est l'ensemble des points de coordonnées :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\alpha+\beta}(\alpha x_0 + \beta x_1) \\[2ex] y = \dfrac{1}{\alpha+\beta}(\alpha y_0 + \beta y_1) \\[2ex] z = \dfrac{1}{\alpha+\beta}(\alpha z_0 + \beta z_1) \end{cases}$$

où les paramètres α et β sont deux nombres réels quelconques de somme non nulle.

<u>Remarque</u> : ces trois propositions s'appliquent au plan repéré par $(0, \vec{i}, \vec{j})$ en annulant toutes les cotes.

*** Présentations paramétriques d'un plan**

Soit P un plan défini par la donnée des coordonnées de trois de ses points M_0, M_1 et M_2, distincts :

$$M_0 : (x_0, y_0, z_0)\ ,\ M_1 : (x_1, y_1, z_1)\ ,\ M_2 : (x_2, y_2, z_2).$$

Soit M un point quelconque de D, relativement au repère (M_0, M_1, M_2), la relation (2) s'exprime :

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda\overrightarrow{M_0M_1} + \mu\overrightarrow{M_0M_2} \text{ où } \lambda \in \mathbf{R} \text{ et } \mu \in \mathbf{R}$$

et prend l'une des formes suivantes :

(1') $$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \lambda\overrightarrow{M_0M_1} + \mu\overrightarrow{M_0M_2} \quad \text{où } \lambda \in \mathbf{R} \text{ et } \mu \in \mathbf{R}.$$

(1'') $$\overrightarrow{OM} = (1-\lambda-\mu)\overrightarrow{OM_0} + \lambda\overrightarrow{OM_1} + \mu\overrightarrow{OM_2} \quad \text{où } \lambda \in \mathbf{R} \text{ et } \mu \in \mathbf{R}..$$

La dernière, présente P comme l'ensemble des barycentres des points M_0, M_1 et M_2. Elle prend aussi la forme suivante :

(1''') $$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{\alpha+\beta+\gamma}(\alpha\overrightarrow{OM_0} + \beta\overrightarrow{OM_1} + \gamma\overrightarrow{OM_2}) \\ \text{où } \alpha \in \mathbf{R},\ \beta \in \mathbf{R}\ ,\ \gamma \in \mathbf{R} \text{ et } \alpha+\beta+\gamma \neq 0 \end{cases}$$

On en déduit les diverses variantes de la présentation paramétrique d'un plan.

(15-4) <u>Proposition</u> : le plan $(M_0M_1M_2)$ est l'ensemble des points de coordonnées :

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) + \lambda(x_2 - x_0) \\ y = y_0 + \lambda(y_1 - y_0) + \mu(y_2 - y_0) \\ z = z_0 + \lambda(z_1 - z_0) + \mu(z_2 - z_0) \end{cases}$$

où les paramètres λ et μ sont deux nombres réels quelconques.

On est naturellement conduit à remplacer la donnée de deux des points par celle de deux vecteurs non colinéaires. On obtient alors la proposition qui suit.

(15-5) <u>Proposition</u> : étant donnés un point M_0 de coordonnées (x_0, y_0, z_0) et deux vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$, non colinéaires, donnés par leurs coordonnées (a_1, b_1, c_1), et (a_2, b_2, c_2), le plan qui passe par M_0, dont la direction est définie par $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$, est l'ensemble des points de coordonnées :

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a_1 + \mu a_2 \\ y = y_0 + \lambda b_1 + \mu b_2 \\ z = z_0 + \lambda c_1 + \mu c_2 \end{cases}$$

où les paramètres λ et μ sont deux nombres réels quelconques.

N.B. Le fait que les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ ne soient pas colinéaires s'exprime par la condition :

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0 \quad \text{ou} \quad a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0.$$

(15-6) Le plan $(M_0M_1M_2)$ est l'ensemble des points de coordonnées :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\alpha+\beta+\gamma}(\alpha x_0 + \beta x_1 + \gamma x_2) \\ y = \dfrac{1}{\alpha+\beta+\gamma}(\alpha y_0 + \beta y_1 + \gamma y_2) \\ z = \dfrac{1}{\alpha+\beta+\gamma}(\alpha z_0 + \beta z_1 + \gamma z_2) \end{cases}$$

où les paramètres α, β et γ sont trois nombres réels de somme non nulle.

§ 16. La droite dans le plan

* Equations cartésiennes des droites [1]

Le plan étant rapporté à un repère, on considère une droite (D) donnée par ses équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \end{cases}$$

où a et b ne sont pas tous les deux nuls.

Un point de coordonnées (x, y) appartient à D si, et seulement si, ces deux équations de l'inconnue λ ont une solution commune. Cette condition peut s'écrire :

$$\mathrm{M} \in \mathrm{D} \Leftrightarrow bx - ay = bx_0 - ay_0.$$

Le membre de droite est une équation linéaire à deux inconnues x et y, dont les coefficients ne sont pas simultanément nuls.

Réciproquement, considérons une équation quelconque de la forme :

$$ux + vy = w.$$

Si $u = v = 0$, on est en présence soit de la condition triviale "$0 = 0$", soit de la condition contradictoire "$0 = w$ et $w \neq 0$". On écarte cette éventualité, ce qui nous conduit à envisager deux possibilités.

- Si v est nul, les solutions sont tous les couples $(\frac{w}{u}, y)$ où y est un réel quelconque. Cest-à-dire que les solutions définissent les points d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées.
- Si v est non nul, l'équation se résout en y sous la forme suivante :

$$y = \frac{w}{v} - \frac{u}{v}x$$

Les solutions sont donc tous les couples (x, y) tels que :

$$\begin{cases} x = 0 + \lambda 1 \\ y = \dfrac{w}{v} - \lambda \dfrac{u}{v} \end{cases}$$

où λ est un nombre réel quelconque. On reconnaît l'équation paramétrique de la droite :

- passant par le point de coordonnées $(0, \frac{w}{v})$,
- dont la direction est celle du vecteur de coordonnées $(1, -\frac{u}{v})$.

Dans les deux cas, la relation $ux + vy = w$ est donc une condition nécessaire et suffisante pour que le point de coordonnées (x, y) soit sur D.

<u>Définition</u> : dans ces conditions, on dira que $ux + vy = w$ est une *équation cartésienne* de D.

En résumé, on a démontré le théorème qui suit.

(16-1) <u>Théorème</u> : toute droite admet une équation de la forme $ux + vy = w$.

Toute relation $ux + vy = w$, dont les coefficients u et v ne sont pas tous deux nuls, est l'équation cartésienne d'une droite.

---

1 Si nous rappelons ici des résultats élémentaires, relatifs à la présentation de la droite sous forme implicite, c'est à seule fin de les replacer dans le présent contexte.

*** Interprétation métrique de l'équation cartésienne d'une droite**

On suppose que le repère choisi est orthonormé et l'on considère une droite D, donnée par l'équation :

$$ax + by = c.$$

Soit M_0 un point de D, ses coordonnées (x_0, y_0) vérifient la relation :

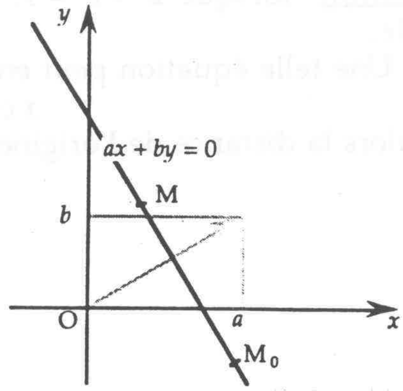
$$ax_0 + by_0 = c.$$

On peut donc présenter l'équation de D sous la forme :

$$ax + by = ax_0 + by_0,$$

ou encore :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$



Notons $\vec{v}$ le vecteur de coordonnées (a, b), M le point point courant du plan et (x, y) ses coordonnées. La relation précédente exprime la condition :

$$\vec{v} \,.\, \overrightarrow{M_0M} = 0$$

qui établit que le vecteur $\overrightarrow{M_0M}$ est orthogonal à $\vec{v}$. On en déduit le théorème qui suit.

(16-2) <u>Théorème</u> : si le plan est rapporté à un repère orthonormé, le vecteur non nul de coordonnées (a, b) est orthogonal à toute droite d'équation cartésienne :

$$ax + by = c.$$

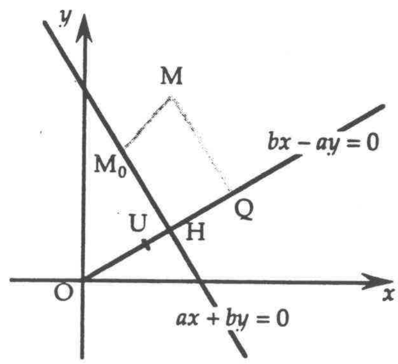
*** Distance d'un point à une droite**

Le repère étant toujours orthonormé, on considère :

- la droite D d'équation $ax + by = c$,
- un point arbitraire M_0 de D, dont les coordonnées sont (x_0, y_0),
- un point quelconque M de coordonnées (X, Y).

Soit U le point tel que $\overrightarrow{OU}$ soit un vecteur unitaire orthogonal à D. C'est-à-dire que :

$$\overrightarrow{OU} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(a\vec{i} + b\vec{j})$$



On note H la projection orthogonale de l'origine sur D et Q la projection orthogonale de M sur la droite (OU). On oriente la droite (OU) de O vers U. On a ainsi :

$$\overline{HQ} = 1 \,.\, \overline{HQ} = \overline{OU} \,.\, \overline{HQ} = \overrightarrow{OU} \,.\, \overrightarrow{M_0M}.$$

Comme M_0 est sur D, on a $ax_0 + by_0 = c$, et par suite :

$$\overline{HQ} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}[a(X - x_0) + b(Y - y_0)] = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(aX + bY - c)$$

On reconnaît, dans la dernière parenthèse, l'expression obtenue en substituant les coordonnées (X, Y) du point M dans l'équation de D, écrite sous la forme :

$$ax + by - c = 0.$$

Oublions l'orientation de la droite (OU), ce résultat nous donne l'assertion qui suit.

(16-3) <u>Théorème</u> : la distance du point de coordonnées (X, Y) à la droite d'équation $ax + by = c$ s'exprime :

$$\frac{|aX + bY - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

<u>Convention</u> : lorsque $a^2 + b^2 = 1$, on dira que l'équation de droite $ax + by - c = 0$ est *normale*.

Une telle équation peut encore s'écrire sous la forme :

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha + p = 0,$$

$|p|$ est alors la distance de l'origine à la droite ainsi définie.

§ 17. Systèmes d'équations linéaires – élimination de Gauss

On dit qu'une équation algébrique est linéaire lorsqu'elle est du premier degré. Elle est alors de la forme suivante

(L) $$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b.$$

où $x_1, \dots, x_n$ sont les inconnues et $a_1, \dots, a_n$ et b sont des coefficients réels.

Un *système linéaire* est la conjonction d'un certain nombre d'équations linéaires des mêmes inconnues.

La donnée d'un système linéaire se présente en général sous la forme suivante :

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 3x+2y=2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x+3y+5z=1 \\ 3x+2y+\ \ z=2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x+3y=1 \\ 3x+2y=2 \\ x+\ \ y=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x+3y+5z=1 \\ 3x+2y+\ \ z=2 \\ x+\ \ y+\ \ z=1 \end{cases}.$$

*** Systèmes échelonnés**

Considérons les systèmes suivants

$$(1) \quad \begin{cases} x+y+2z=-1 \\ \quad\ \ y+3z=\ \ 1 \\ \qquad\quad\ z=\ \ 2 \end{cases} \qquad\qquad (2) \quad \begin{cases} x+y-z+t=2 \\ \quad\ \ y\qquad +t=0 \\ \qquad\quad z+t=1 \end{cases}.$$

On peut les résoudre immédiatement par substitutions successives. On obtient pour le premier :

$$z=2\ ,\ y=1-3\times 2=-5\ ,\ x=-1+5-2\times 2=0,$$

ce qui livre l'unique solution :

$$(0,-5,2).$$

Pour le second système on procède à un calcul analogue en laissant l'une des inconnues indéterminée. On obtient la *"solution générale"* sous forme paramétrique :

$$x=3-t\ ,\ y=-t\ ,\ z=1-t \text{ où } t\in\mathbf{R}.$$

On peut aussi exprimer l'ensemble des solutions sous la forme :

$$S=\{(3-t,-t,1-t,t) | t\in\mathbf{R}\}.$$

Les deux systèmes linéaires que nous venons de considérer ont en commun leur forme dite *échelonnée.* Il n'est pas indispensable de donner, ici, à ce terme une définition explicite. On peut se satisfaire de l'image suivante. Une colonne est associée à chaque inconnue. Chaque colonne repose sur une marche d'un escalier qui descend de gauche à droite. Notons qu'une une même marche peut porter plusieurs colonnes. Cette forme échelonnée autorise dans tous les cas la résolution "de bas en haut" par des substitutions successives.

*** Les opérations élémentaires sur les lignes**

Définition : deux systèmes linéaires, ayant un même nombre d'inconnues, sont dit *équivalents* s'ils ont même ensemble de solutions.

(17-1) Proposition : les opérations suivantes transforment un système linéaire en un système équivalent :

(i) l'échange de deux lignes,

(ii) la multiplication de tous les coefficients d'une ligne par un même facteur non nul,

(iii) l'addition à tous les coefficients d'une ligne de leurs homologues pris dans une autre ligne arbitrairement choisie.

Pour (i) et (ii) c'est immédiat, pour (iii), la démonstration n'est qu'une corvée d'écriture dont nous nous dispensons.

Définition : les opérations (i), (ii) et (iii) sont appelées les *transformations élémentaires*.

Notation : il est commode de décrire ces opérations sous la forme suivante :

(i) $L_i \leftrightarrow L_j$,

(ii) $L_i \rightarrow \lambda L_i$,

(iii) $L_i \rightarrow L_i + L_j$,

où, naturellement, le symbole L_i représente la i-ème ligne.

*** Méthode d'élimination de Gauss**

Il s'agit, partant d'un système linéaire donné, de construire une suite de systèmes équivalents, de façon à obtenir un système échelonné. Pour cela on utilise à chaque pas des combinaisons simples d'opérations élémentaires. Examinons deux exemples.

Exemple 1 : on résout le système suivant :

$$\begin{cases} 5x+2y+z=12 \\ 5x-6y+2z=-1 \\ -4x+2y+z=3 \end{cases}$$

Le premier coefficient de la première équation étant non nul, on peut le choisir comme *"pivot"* de l'élimination de x dans la deuxième et la troisième équation. On procède, pour cela, aux combinaisons de transformations élémentaires symbolisées par :

$$L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \text{ et } L_3 \rightarrow 5L_3 + 4L_1.$$

On obtient ainsi le système équivalent :

$$\begin{cases} 5x+2y+z=12 \\ -8y+z=-13 \\ 18y+9z=63 \end{cases}$$

On poursuit le calcul, en éliminant le coefficient de y dans la dernière ligne, au moyen de l'opération : $L_3 \rightarrow 4L_3 + 9L_2$. On obtient alors :

$$\begin{cases} 5x+2y+z=12 \\ -8y+z=-13 \\ 45z=135 \end{cases}$$

Ce système est échelonné, il se résout immédiatement et livre la solution cherchée :

$$x=1\ ,\ y=2\ ,\ z=3\ .$$

Remarques.

1) Chacun, s'il le désire, peut rendre ces opérations mécaniques en pensant à des produits en croix.

2) Dans la la pratique, on évite de recopier les lignes dont on sait qu'elles ne seront plus modifiées. On repère leur forme définitive par un moyen quelconque afin de faciliter le bilan final – on souligne, on encadre, on change de couleur d'encre ou, comme ici, on utilise des caractères gras.

Exemple 2 : dans le système suivant m représente un paramètre.

$$\begin{cases} x+\ y-\ z-t=\ 0 \\ x+3y \qquad\quad = 2 \\ \qquad\quad z+\ t\ =\ 1 \\ 2x+4y-\ z-t=m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{2y+z+t=\ 2} \\ \quad z+t=\ 1 \\ 2y+z+t=m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{z+t=1} \\ \quad \mathbf{0=m-2} \end{cases}$$

Le système donné est équivalent au système échelonné ci-dessous :

$$\begin{cases} x+y\ -z-\ t=2 \\ \quad 2y+z+t=2 \\ \qquad\quad z+t=1 \\ \qquad\quad 0=m-2 \end{cases}$$

- Si $m \neq 2$, la dernière condition est contradictoire. On dit alors que le système donné est *incompatible.*
- Si $m=2$, la dernière équation est la condition triviale "$0=0$", on la laisse de côté. On procède à la résolution en donnant à t une valeur abitraire. On obtient ainsi :

$$x=y=\frac{1}{2}\ ,\ z=1-t \text{ pour } t\in \mathbf{R}.$$

Désignant par S l'ensemble des solutions on aura en conclusion :

- si $m\neq 2$, $S=\varnothing$,
- si $m=2$, $S=\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1-t\right) \mid t\in \mathbf{R}\right\}$.

Dans ces conditions, on dit que $m=2$ est la *condition de compatibilité* du système.

Ces deux exemples nous offrent un échantillon de toutes les possibilités. Un système d'équations linéaires peut, suivant les cas :

- n'admettre aucune solution, on dit alors qu'il est *incompatible,*
- admettre une solution unique,
- admettre une infinité de solutions.

En résumé

La méthode de Gauss pour résoudre un système d'équations linéaires se déroule comme suit.

- On choisit un "pivot d'élimination", en général, le premier coefficient non nul de la première inconnue.
- L'équation correspondante est mise en première position du système transformé.
- On procède aux opérations de lignes qui éliminent les autres coefficients de la colonne du pivot.
- On recommence les opérations décrites ci-dessus pour le système obtenu en laissant de côté la ligne du pivot précédent,

... ceci tant qu'il reste au moins deux lignes à traiter.

On aboutit ainsi à un système échelonné qui, s'il est compatible, pourra avoir suivant les cas :

- une solution unique,
- un ensemble de solutions qu'il est possible de présenter en exprimant certaines inconnues – qu'on dit *principales* – en fonction des autres. Dans l'expression de la solutions, le statut de ces dernières est alors celui de paramètres prenant toute valeur réelle.

<u>Remarque</u> : nous n'avons considéré que des nombres réels pour ne pas disperser l'attention. Il est facile de se rendre compte que tout ceci vaut pour tout corps, en particulier pour celui des nombres complexes.

§ 18. Le plan dans l'espace

* Équation cartésienned'un plan

Nous reprenons ici strictement la démarche suivie à la section 2 en nous plaçant dans l'espace à trois dimensions rapporté à un repère. On considère un plan P donné sous forme paramétrique par les équations :

$$(1)\qquad \begin{cases} x-x_0=\lambda a+\mu a' \\ y-y_0=\lambda b+\mu b' \\ z-z_0=\lambda c+\mu c' \end{cases}$$

Pour un point M donné par ses coordonnées (x,y,z), les équations ci-dessus forment un système linéaire de trois équations à deux inconnues λ et μ, les lettres x, y et z jouant provisoirement un rôle de paramètres. Il est clair qu'on a :

$$M \in P \iff (1) \text{ est compatible.}$$

La méthode de Gauss va nous conduire à une condition équivalente en forme d'équation linéaire.

Une permutation éventuelle de λ et μ ou des coordonnées peut toujours nous ramener au cas où $a \neq 0$. On choisit a pour pivot, afin d'éliminer λ dans les deux dernières équations. Celles-ci deviennent respectivement :

$$\begin{cases} a(y-y_0)-b(x-x_0)=\mu(a'b-a'b) \\ a(z-z_0)-c(x-x_0)=\mu(a'c-a'c) \end{cases}$$

Comme, par hypothèse, les coefficients a, b, c et a', b', c' ne sont pas proportionnels, on est sûr que l'un, au moins, des coefficients de μ n'est pas nul. Il est alors possible de procéder à l'élimination de μ dans l'une des deux équations qui prendra la forme suivante :

$$u(x-x_0)+v(y-y_0)+w(z-z_0)=0,$$

où les coefficients u, v, w sont des nombres réels indépendants de x, y, z. On obtient ainsi la condition de compatibilité du système sous la forme :

$$ux+vy+wz=d.$$

En conclusion nous avons établi que pour tout plan P, il existe des nombres réels u, v, w et d tels que, pour tout point M de coordonnées (x,y,z) on ait :

$$M \in P \iff ux+vy+wz=d.$$

Ajoutons que u, v, w ne sont pas tous nuls car la condition M appartient à P ne peut être équivalente

- ni à la condition contradictoire "$0=d$ et $d\neq 0$",
- ni à la condition triviale "$0=0$".

Réciproquement, on considère l'équation :

$$ux+vy+wz=d,$$

dont les coefficients u, v, w ne sont pas tous les trois nuls. On peut toujours supposer que $u\neq 0$, alors la solution générale s'exprime :

$$\begin{cases} x=\frac{1}{u}(d-\lambda v-\mu w) \\ y= \quad \lambda.1+\mu.0 \\ z= \quad \lambda.0+\mu.1 \end{cases}$$

On reconnait les équations paramétriques du plan qui passe par le point de coordonnées $(\frac{d}{u},0,0)$ et dont la direction est définie par les vecteurs de coordonnées :

$$(-\tfrac{v}{u},1,0) \text{ et } (-\tfrac{w}{u},0,1).$$

Ainsi, nous avons démontré le résultat qui suit.

(18-1) Théorème.

1) Tout plan admet une équation cartésienne de la forme :

$$ux + vy + wz = d.$$

2) Toute équation $ux + vy + wz = d$, dont les coefficients u, v, w ne sont pas tous les trois nuls est l'équation cartésienne d'un plan.

*** Interprétation métrique**

Les démonstrations de la section 2, concernant la droite dans le plan, s'adaptent immédiatement à l'espace et donnent les deux propositions qui suivent.

(18-2) Proposition : l'espace étant rapporté à un repère orthonormé, un vecteur non nul de coordonnées (a, b, c) est orthogonal à tout plan d'équation :

$$ax + by + cz = d.$$

(18-3) Proposition : la distance du point de coordonnées (X, Y, Z) au plan d'équation :

$$ax + by + cz - d = 0$$

est égale à :

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} |ax + by + cz = d \,|.$$

Ici encore, l'équation $ax + by + cz - d = 0$ est dite *normalisée*, si $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Chapitre IV. Géométrie orientée

§19. Aires et volumes algébriques

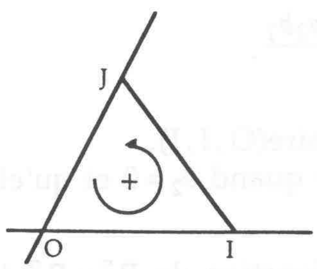
Le plan est rapporté à un repère (O, I, J).

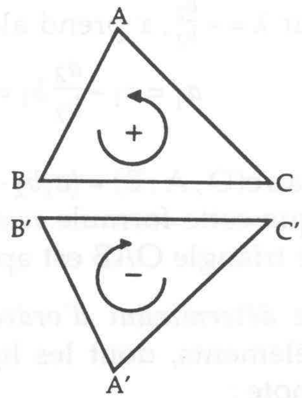
*** Aire algébrique**

On considère un triangle orienté (A,B,C). On définit son *aire algébrique* comme étant son aire géométrique affectée du signe.

" + " si les triangles (A,B,C) et (O,I,J) ont la même orientation.

" − " dans le cas contraire.





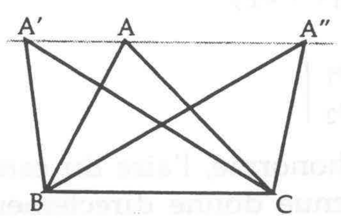
N.B. Un triangle aplati n'a pas plus d'orientation que 0 n'a de signe.

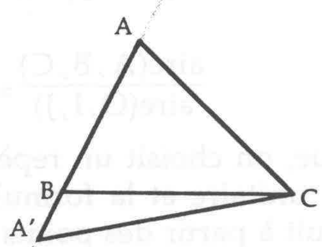
Nous allons voir qu'il est facile d'exprimer le rapport des aires algébriques des triangles orientés (A, B, C) et (O, I, J), en fonction des coordonnées de A, B et C. Il suffit pour cela de s'appuyer sur les deux propriétés élémentaires ci-dessous.

On considère deux triangles, ayant un côté commun, ABC et A'BC.

(1) Si (AA') est parallèle à (BC), alors :

$$\text{aire}(A', B, C) = \text{aire}(A, B, C).$$





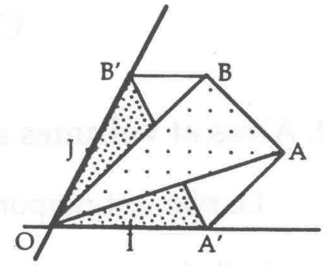
(2) Si A' est aligné avec les sommets A et B, alors :

$$\frac{\text{aire}(A', B, C)}{\text{aire}(A, B, C)} = \frac{\overline{BA'}}{\overline{BA}}.$$

Une translation ne modifiant ni l'aire, ni l'orientation d'un triangle, on peut, sans nuire en rien à la généralité du propos, se limiter à ne considérer que des triangles ayant un sommet à l'origine du repère.

Soit (O, A, B) un triangle orienté, donné par les coordonnées des sommets A et B, respectivement (a_1, a_2) et (b_1, b_2). Nous supposons que B n'est pas sur la droite (OI), c'est à dire que $b_2 \neq 0$.

On note A' la projection de A sur (OI) parallèlement à (OB), et B' la projection de B sur (OJ) parallèlement à (OI). La propriété (1) se traduit immédiatement par les deux égalités :



$$\text{aire}(O, A, B) = \text{aire}(O, A', B) = \text{aire}(O, A', B').$$

On applique (2) il vient, en notant a_1' l'abscisse de A' :

$$\text{aire}(O, A', B') = a_1' . \text{aire}(O, I, B') = a_1' . b_2 . \text{aire}(O, I, J).$$

On arrive ainsi à la relation :

$$\text{aire}(O, A', B') = a_1' . b_2 . \text{aire}(O, I, J).$$

On calcule a_1' en utilisant les équations paramétriques de la droite qui passe par A et admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{OB}$:

$$\begin{cases} x = a_1 + \lambda b_1 \\ y = a_2 + \lambda b_2 \end{cases}$$

Si $b_2 \neq 0$, y s'annule pour $\lambda = -\frac{a_2}{b_2}$, x prend alors pour valeur :

$$a_1' = a_1 - \frac{a_2}{b_2} b_1 = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{b_2}.$$

On obtient ainsi :

$$\text{aire}(O, A, B) = (a_1 b_2 - a_2 b_1) . \text{aire}(O, I, J).$$

On vérifie sans peine que cette formule reste vraie quand $b_2 = 0$ et qu'elle s'applique encore dans le cas où le triangle OAB est aplati.

Définition : on appelle *déterminant d'ordre 2* la fonction de $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ qui, à tout tableau à quatre éléments, dont les lignes sont notées (a, b) et (c, d) associe le nombre $ad - bc$, qu'on note :

$$ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

La formule précédente donnera, pour un triangle quelconque, après translation éventuelle, la proposition qui suit.

(19-1) Théorème : le plan étant rapporté au repère (O, I, J), on considère trois points A, B, C tels que :

$$\overrightarrow{CA} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CB} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j}$$

On a :

$$\frac{\text{aire}(A, B, C)}{\text{aire}(O, I, J)} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Dans la pratique, on choisit un repère orthonormé, l'aire du carré construit sur le repère est alors unitaire et la formule obtenue donne directement l'aire du parallélogramme contruit à partir des points A, B, C.

(19-2) Théorème : le plan étant rapporté à un repère orthonormé, on considère un parallélogramme ABCD, tel que :

$$\overrightarrow{AB} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BC} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j}.$$

Alors on a :

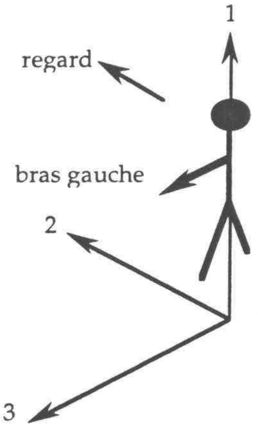
$$\text{aire}(A, B, C, D) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

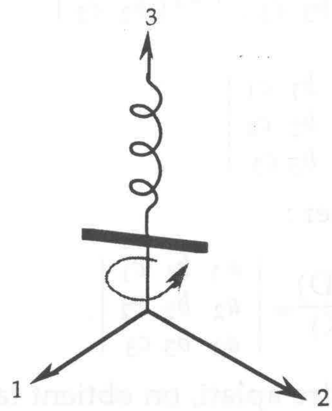
Démonstration : le résultat est la conséquence immédiate du théorème précédent. car on a :

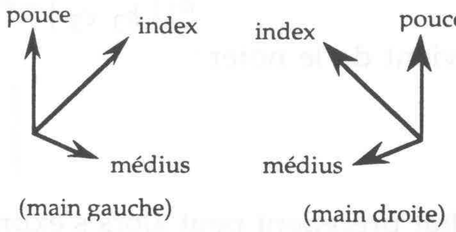
$$\text{aire}(A,B,C,D) = 2\,\text{aire}(A,B,C) \quad \text{et} \quad 1 = 2\,\text{aire}(O,I,J). \qquad \lhd$$

*** Volume algébrique**

Nous supposons connu du lecteur l'un des "trucs" classiques qui permettent de comparer les orientations de deux repères de l'espace : bonhomme d'Ampère, tire-bouchon de Maxwell, trois doigts : pouce-index-médius de la main droite ou gauche, …







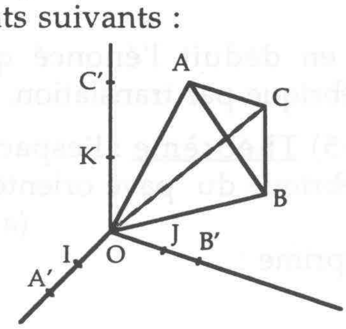
On considère un repère quelconque (A,B,C,D) de l'espace. Nous pouvons définir le *volume algébrique* du tétraèdre orienté qui lui est associé, comme étant son volume géométrique affecté du signe "+" ou "−", suivant que le repère considéré admet la même orientation que le repère de référence (O,I,J,K) ou l'orientation opposée. On note ce nombre $\text{vol}(A,B,C,D)$.

La démarche suivie dans le plan s'adapte facilement à l'espace. Nous laissons au lecteur le soin d'ajuster la formulation de (1) et (2), de considérer trois points définis par leurs coordonnées :

$$A : (a_1, a_2, a_3) \;,\; B : (b_1, b_2, b_3) \;,\; C : (c_1, c_2, c_3),$$

de prendre les précautions nécessaires afin de définir les points suivants :

- A' la projection de A sur (OI) parallèlement au plan (OBC)
- B' la projection de B sur (OJ) parallèlement au plan (OA'C)
- C' la projection de C sur (OK) parallèlement au plan (OA'B'), autrement dit, parallèlement au plan (OIJ).



On note :

$$a_1' \text{ l'abscisse de } A' \text{ et } b_2' \text{ l'ordonnée de } B'.$$

On a donc l'égalité suivante :

$$\text{vol}(O,A,B,C) = c_3 b_2' a_1' \,.\, \text{vol}(O,I,J,K).$$

On calcule a_1' et b_2' en utilisant des équations paramétriques convenablement choisies, on obtient ainsi :

$$a_1' = \frac{a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)}{b_2c_3 - b_3c_2} \quad \text{et} \quad b_2' = \frac{b_2c_3 - b_3c_2}{c_3}.$$

On a donc :

$$\frac{\mathrm{vol}(A,B,C,D)}{\mathrm{vol}(O,I,J,K)} = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1).$$

On pose alors la définition qui suit.

Définition : on appelle *déterminant d'ordre* 3 l'application de $\mathbf{R}^{3\times 3}$ dans $\mathbf{R}$ qui, à tout tableau de nombres dont les lignes sont notées

$$(a_i, b_i, c_i) \text{ pour } i = 1, 2, 3,$$

fait correspondre le nombre suivant

$$a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

Celui-ci s'exprime encore :

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

On convient de le noter :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Le résultat précédent peut alors s'exprimer :

(19-3)
$$\frac{\mathrm{vol}(A,B,C,D)}{\mathrm{vol}(O,I,J,K)} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

En considérant le cas d'un tétraèdre aplati, on obtient la proposition qui suit.

(19-4) Proposition : l'origine O est dans le plan (ABC) si, et seulement si,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Nous supposons maintenant que le repère (O,I,J,K) est **orthonormé.** Le pavé P qui admet O, A, B, C pour sommets est orienté par la donnée de (O,A,B,C), il aura pour volume algébrique :

$$\mathrm{vol}(P) = 6 \,.\, \mathrm{vol}(O,A,B,C),$$

on a aussi :

$$1 = 6.\mathrm{vol}(O,I,J,K).$$

On en déduit l'énoncé qui suit en tenant compte de l'invariance du volume algébrique par translation.

(19-5) Théorème : l'espace étant rapporté à un repère orthonormé, le volume algébrique du pavé orienté P défini par les trois vecteurs de coordonnées :

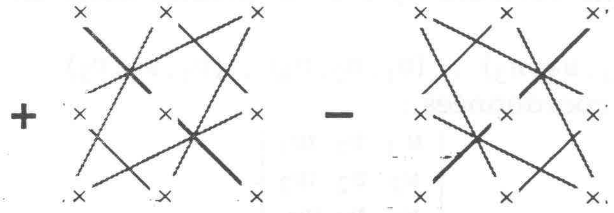
$$(a_1, a_2, a_3) \ , \ (b_1, b_2, b_3) \ , \ (c_1, c_2, c_3)$$

s'exprime :

$$\mathrm{vol}(P) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

*** Propriétés du déterminant d'ordre 3**

<u>Règle de Sarrus</u> : on retrouve sans effort la formule donnant le développement d'un déterminant si l'on retient qu'elle comporte six termes, dont les signes sont distribués selon le schéma ci-dessous :



On remarquera, en outre, que l'expression d'un déterminant, telle qu'elle est donnée dans la définition, change de signe, si l'on échange les positions de deux des lettres a, b, c ou de deux des indices 1, 2, 3.

(19-6) <u>Proposition</u> : un échange de deux colonnes (resp. de deux lignes) change la valeur d'un déterminant en son opposée.

On remarquera qu'il existe un développement, analogue à celui donné dans la définition, pour chaque ligne et pour chaque colonne. Les signes des trois termes de chacun de ces six développements sont attribués suivant le shéma ci-dessous.

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

La forme commune de ces expressions nous donne la propriété ci-après.

(19-7) <u>Proposition</u> : le déterminant est une fonction linéaire relativement à chaque ligne et à chaque colonne.

Ceci veut dire qu'on a, par exemple pour la première colonne, d'une part :

$$\begin{vmatrix} a_1+a'_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+a'_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+a'_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_1 & b_1 & c_1 \\ a'_2 & b_2 & c_2 \\ a'_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

et d'autre part :

$$\begin{vmatrix} \lambda a_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda a_2 & b_2 & c_2 \\ \lambda a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Nous conclurons cette section en notant que la proposition (19-4) peut encore se formuler comme suit.

(19-8) <u>Théorème</u> : l'espace étant rapporté à un repère, on considère trois points non alignés M_0, M_1, M_2 de coordonnées respectives (x_i, y_i, z_i) pour $i = 0, 1, 2$ et un point quelconque M de coordonnées (x, y, z).

M est un point du plan $(M_0M_1M_2)$ si, et seulement si :

$$\begin{vmatrix} x_1-x_0 & x_2-x_0 & x-x_0 \\ y_1-y_0 & y_2-y_0 & y-y_0 \\ z_1-z_0 & z_2-z_0 & z-z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

On retrouve ainsi, donnée par une formule, l'équation cartésienne du plan qui passe par les trois points donnés.

§ 20. Produit mixte et produit vectoriel

*** Déterminant de trois vecteurs**

On considère trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ donnés dans un certain repère par leurs coordonnées :

$$(u_1, u_2, u_3) \ , \ (v_1, v_2, v_3) \ , \ (v_1, v_2, v_3).$$

Le déterminant de leurs coordonnées :

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

dépend autant de la donnée du repère que de celle des vecteurs eux mêmes. En revanche, si l'on impose systématiquement aux repères d'être orthonormés et d'avoir tous une même orientation, ce déterminant devient une fonction des seuls vecteurs. En effet, il représente alors le volume algébrique de tout pavé qui aurait pour sommets des points A, B, C, D tels que :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} \ , \ \overrightarrow{AC} = \vec{v} \ , \ \overrightarrow{AD} = \vec{w}.$$

On est alors conduit à **orienter l'espace**, c'est-à-dire qu'on distingue l'une des deux orientations possibles pour un repère. La convention usuelle appelle *positive* ou *directe* l'orientation associée à trois doigts de la main droite, pris dans l'ordre :

pouce-index-médius.

Dans toute la suite, le repère de référence sera systématiquement supposé **orthonormé direct.**

<u>Définition</u> : dans ces conditions, le déterminant ci-dessus est appelé le *produit mixte* des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et noté :

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

Les propriétés algébriques du produit mixte sont la traduction de celles du déterminant, considéré comme une fonction à trois arguments vectoriels. On retiendra tout particulièrement ce qui suit.

(20-1) <u>Théorème</u> : pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :

(1) $\qquad -(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}) = (\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}) = (\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}),$

(2) $\qquad (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}).$

De plus, le produit mixte est une fonction linéaire de chacun de ses arguments.

*** Le produit vectoriel**

(20-2) Lemme : étant donnés deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, il existe un vecteur $\vec{p}$, unique tel que pour tout $\vec{x}$ on ait :

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}) = \vec{p} \,.\, \vec{x}.$$

Définition : le vecteur, ainsi défini, est appelé le *produit vectoriel* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On le note :

$$\vec{p} = \vec{u} \wedge \vec{v}.$$

Démonstration : on suppose que $\vec{p}$ existe; on note $(u_1 ; u_2, u_3)$, (v_1, v_2, v_3), (p_1, p_2, p_3) les coordonnées respectives de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{p}$, relatives au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, qu'on suppose toujours orthonormé direct. On remplace $\vec{x}$ successivement par $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, dans la condition de l'énoncé, on obtient :

$$\begin{cases} p_1 = \vec{p} \,.\, \vec{i} = u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ p_2 = \vec{p} \,.\, \vec{j} = u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ p_3 = \vec{p} \,.\, \vec{k} = u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{cases}.$$

En conséquence $\vec{p}$ est donné par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \vec{p} &= (u_2 v_3 - u_3 v_2)\,\vec{i} - (u_1 v_3 - u_3 v_1)\,\vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\,\vec{k}. \\ &= \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & v_2 \\ u_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}. \end{aligned}$$

Réciproquement, considérons le vecteur ainsi défini. L'expression du produit scalaire :

$$\vec{p} \,.\, \vec{x} = x_1 \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} u_1 & v_2 \\ u_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

est le développement, suivant la troisième colonne, du déterminant qui exprime le produit mixte de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{x}$, à savoir :

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x_1 \\ u_2 & v_2 & x_2 \\ u_3 & v_3 & x_3 \end{vmatrix} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}).$$

L'existence et l'unicité de $\vec{p}$ sont alors bien établies. ◅

De cette démonstration, on retient l'expression du produit vectoriel de deux vecteurs donnés par leurs coordonnées, on la rappelle dans l'énoncé qui suit.

(20-3) Théorème : l'espace étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3), on a :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)\,\vec{i} - (u_1 v_3 - u_3 v_1)\,\vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\,\vec{k}.$$

Remarque : un moyen commode pour retenir cette expression est de la regarder comme le développement du "déterminant" suivant :

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & \vec{i} \\ u_2 & v_2 & \vec{j} \\ u_3 & v_3 & \vec{k} \end{vmatrix} \quad (^1)$$

(20-4) Propriétés algébriques du produit vectoriel : pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et pour tous réels λ et μ, on a :

(1) $$\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$$

(2) $$(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) \wedge \vec{w} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{w}) + \mu(\vec{v} \wedge \vec{w})$$

(3) $$\vec{u}(\lambda \vec{v} + \mu \vec{w}) = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) + \mu(\vec{u} \wedge \vec{w})$$

On résume ceci en disant que le produit vectoriel est antisymétrique et bilinéaire.

! N.B. le produit vectoriel n'est pas associatif, on pourra à titre d'exercice démontrer la formule dite du *double produit vectoriel* :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \,.\, \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \,.\, \vec{v})\,\vec{w}.$$

On attendra cependant d'avoir pris connaissance des points 1) et 2) de l'énoncé essentiel qui suit.

(20-5) Théorème : propriétés géométriques du produit vectoriel.

1) Le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est nul si, et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2) Si $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq 0$, alors :

a) $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$,

b) $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ est l'aire de tout parallélogramme ABDC tel que :

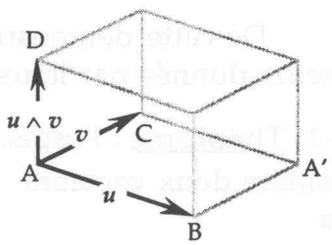
$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} \text{ et } \overrightarrow{AC} = \vec{v},$$

c) pour tout point Ω, $(\Omega, \vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est un repère d'orientation directe.

Démonstration : la définition aussi bien que l'expression des coordonnées d'un produit vectoriel justifient le point 1) de façon immédiate.

Le point 2-a) se déduit de la définition et du point 1, comme suit:

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \,.\, \vec{u} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u} \wedge \vec{u}) \,.\, \vec{v} = \vec{0}.$$



La clef du 2-b) est donnée par la formule bien connue :

"Volume d'un pavé = aire de la base × hauteur"

On considère quatre points A, B, C, D tels que :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u}, \ \overrightarrow{AC} = \vec{v}, \ \overrightarrow{AD} = \vec{u} \wedge \vec{v}.$$

Le point 2-a) montre que $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ est la hauteur relative à la face ABA'C. On peut alors conduire le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} \wedge \vec{v}) . (\vec{u} \wedge \vec{v}) \\ &= (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}) \\ &= \text{volume du pavé} \\ &= \text{aire(ABCA')}. \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|. \end{aligned}$$

---

1 ! Il va sans dire que **cette formule n'a**, littéralement, **aucun sens** et qu'il ne s'agit là que d'un moyen mnémotechnique.

Comme on a supposé : $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$, on a bien :

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \text{aire}(ABA'C).$$

Enfin, comme on a montré, en passant, que le produit mixte $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est positif et le point 2-c) est aussi justifié. ◅

Du point 2-b) on tire la propriété suivante.

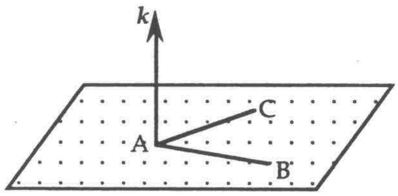
(20-6) <u>Corollaire</u> : étant donnés trois points distincts A, B et C, on note $\alpha = B\hat{A}C$. On a toujours :

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\| . \sin\alpha.$$

<u>Remarque</u> : lorsqu'on sait manipuler les angles orientés la formule ci-dessus se précise comme suit.

Si les points A, B et C de la proposition ci-dessus sont dans un plan, orienté par la donnée d'un vecteur unitaire normal $\vec{k}$ – ce qui est toujours possible – alors on a :

$$\frac{\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| . \|\overrightarrow{AC}\|} = \sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) . \vec{k}.$$



Cette dernière formule peut s'écrire sous la forme purement vectorielle qui suit :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\| . \sin(\vec{u}, \vec{v}) . \vec{k}.$$

Ceci vaut sous la seule hypothèse que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ appartiennent à la direction d'un plan orienté par la donnée d'un vecteur unitaire $\vec{k}$, normal à celui-ci.

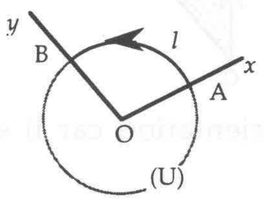
Chapitre V. Les angles orientés

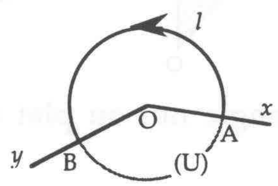
§ 21. Angle orienté de deux demi-droites, angle de vecteurs

Dans toute ce chapitre, le **plan est orienté,** ce qui signifie qu'on dispose d'une convention qui affecte à tout repère l'attribut *direct* ou *indirect*, selon son orientation.

*** Mesure d'un angle orienté de demi-droites**

Étant données deux demi-droites de même origine (Ox) et (Oy), on note U le cercle de centre O et de rayon 1, A et B les points où les demi-droites (Ox) et (Oy) recontrent celui-ci. Le plan étant orienté, soit l la longueur de l'arc limité par A et B qu'on parcourt de A vers B, dans le sens direct.





Dans ces conditions, considérons un chemin quelconque allant de A à B, en suivant le cercle, soit L sa longueur :

- si le sens de parcours est direct, on a :
$$L = l + 2k\pi \quad \text{où } k \in \mathbf{N}\,;$$
- si le sens de de parcours est indirect, on a :
$$L = 2\pi - l + 2k\pi \quad \text{où } k \in \mathbf{N},$$
on affecte alors ce nombre du signe moins, ce qui donne :
$$-(2\pi - l + 2k\pi) = l - 2(k-1)\pi.$$

Avec cette convention, tout chemin, *orienté*, parcourant le cercle de A à B, admet pour mesure :

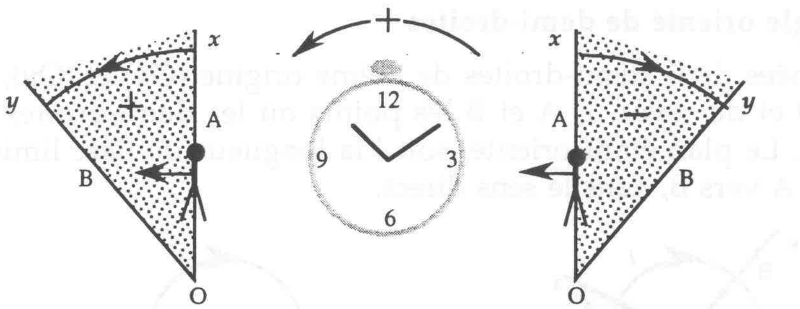
$$l + 2k\pi \quad \text{où } k \in \mathbf{Z}.$$

<u>Définition</u> : tout nombre ainsi défini est noté $(Ox\,,Oy)$ et on l'appelle *mesure de l'angle orienté* (de (Ox) vers (Oy)).

<u>Conventions</u> : si α est une valeur particulière de ce nombre, on note :
$$(Ox\,,Oy) = \alpha \pmod{2\pi}.$$
et on lit : "$(Ox\,,Oy)$ égale α modulo 2π".

*** Orientation d'un angle**

Afin de faire bien clairement le lien entre mesure de l'angle géométrique et mesure du même angle orienté, rappelons brièvement qu'orienter un angle, c'est en distinguer les côtés. Le plan étant orienté, si l'angle considéré n'est ni nul, ni plat, on peut donner un signe son orientation. On procède comme suit. Étant données deux demi-droites, de même origine, (Ox) et (Oy), on choisit arbitrairement deux points, distincts de O, A sur (Ox) et B sur (Oy). Ces points n'étant pas alignés constituent un repère (O, A, B), du plan, dont l'orientation est indépendante du choix de A et B. C'est celle-ci que, naturellement, on affecte à l'angle orienté de (Ox) vers (Oy).



Notons qu'un angle nul ou plat n'a pas d'orientation car il est impossible d'en définir l'intérieur.

Dans ces conditions, l'énoncé qui suit découle immédiatement de la définition posée.

(21-1) <u>Proposition</u> : étant données deux demi-droites de même origine (Ox) et (Oy) :

1) si l'angle qu'elles forment n'est ni nul ni plat :

- $(Ox, Oy) = x\hat{O}y \pmod{2\pi}$ si l'angle est orienté dans le sens direct,
- $(Ox, Oy) = -x\hat{O}y \pmod{2\pi}$ si l'angle est orienté dans le sens indirect ;

2) $(Ox, Oy) = 0 \pmod{2\pi}$ si, et seulement si, $x\hat{O}y = 0$,
$(Ox, Oy) = \pi \pmod{2\pi}$ si, et seulement si, $x\hat{O}y = \pi$.

*** Règles de calcul et premières propriétés**

Ce qui suit nous garantit que cette façon de mesurer les angles se prêtera bien aux manipulations algébriques en liaison avec les propriétés géométriques (1).

(21-2) <u>Proposition</u> : si (Ox), (Oy) et (Oz) sont trois demi-droites de même origine, on a toujours :

(1) $(Ox, Oz) = (Ox, Oy) + (Oy, Oz) \pmod{2\pi}$, (relation de Chasles)

(2) $(Oy, Ox) = -(Ox, Oy) \pmod{2\pi}$,

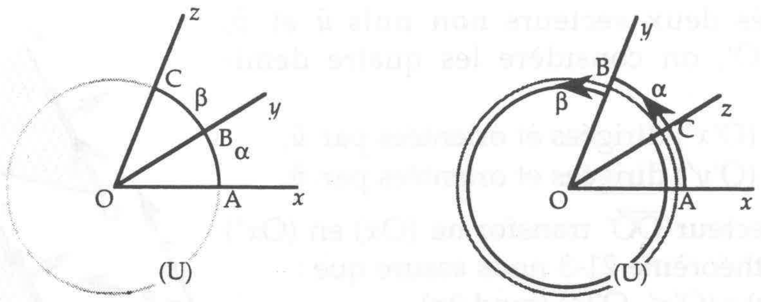
(3) $(Oy, Oz) = (Ox, Oz) - (Ox, Oy) \pmod{2\pi}$.

<u>Démonstration</u> : on note A, B et C les points d'intersection du cercle U de centre O et de rayon 1 avec les demi-droites (Ox), (Oy) et (Oz). On parcourt U, dans le sens direct, de A à B suivant un arc de longueur α, puis de B à C suivant un arc de longueur β.

1 Ajoutons qu'elle permet aussi au sinus, et au cosinus de passer du statut de "lignes trigonométriques" exprimant des relations métriques des triangles rectangles, à celui de "fonctions circulaires" – avec tout le bénéfice qu'on connaît, autant du point de vue théorique que pratique.

On a donc, par définition :

$$(Ox\,,Oy) = \alpha \pmod{2\pi} \text{ et } (Oy\,,Oz) = \beta \pmod{2\pi}.$$



La juxtaposition de ces arcs constitue un chemin de sens direct, de A à C, de longueur $\alpha + \beta$. Comme on compte à 2π près, quel que soit le cas de figure, on a :

$$(Ox\,,Oz) = \alpha + \beta \pmod{2\pi}.$$

C'est-à-dire que :

$$(Ox\,,Oz) = (Ox\,,Oy) + (Oy\,,Oz) \pmod{2\pi}.$$

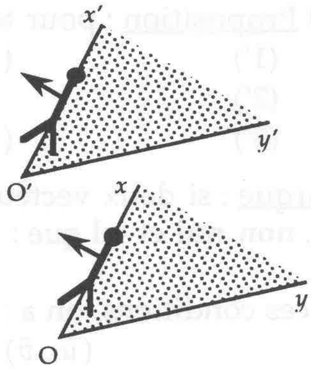
Si (Oz) coïncide avec (Ox), on a :

$$(Ox\,,Oy) = -(Oy\,,Ox) \pmod{2\pi}.$$

La troisième relation se déduit immédiatement des deux autres. ◅

(21-3) <u>Théorème</u> : toute translation conserve la mesure de tout angle orienté de demi-droites.

<u>Démonstration</u> : considérons deux demi-droites (Ox) et (Oy), une translation donnée transforme O en O′, (Ox) en (Ox') et (Oy) en (Oy'). On sait que :



$$x\hat{O}y = x'\hat{O}'y'.$$

Si ce nombre est différent de O où π, l'orientation relative de (Ox') et (Oy') est la même que celle de (Ox) et (Oy). Dans le cas contraire, on a soit :

$$(Ox\,,Oy) = 0 = (O'x'\,,O'y') \pmod{2\pi},$$

soit :

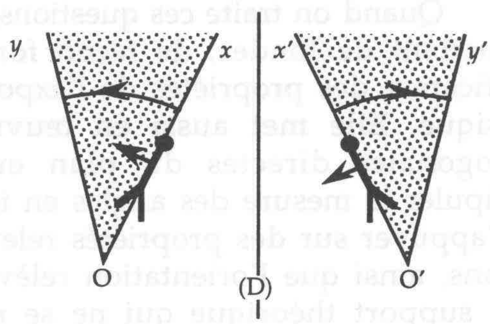
$$(Ox\,,Oy) = \pi = (O'x'\,,O'y') \pmod{2\pi}.$$

On a donc toujours :

$$(O'x'\,,O'y') = (Ox\,,Oy) \pmod{2\pi}.$$ ◅

(21-4) <u>Théorème</u> : toute réflexion transforme la mesure de tout angle orienté de demi-droites en son opposée.

<u>Démonstration</u> : toute réflexion conservant les angles géométriques et inversant les sens de parcours sur les cercles ([1]), il découle de la définition même qu'elle change la mesure des angles orientés de demi-droites en son opposée. ◅



<u>Remarque</u> : si l'on trouve ces arguments peu convaincants, rien n'interdit de rapporter l'espace à un repère bien choisi et d'exploiter la remarque qui clôture la section 20 !

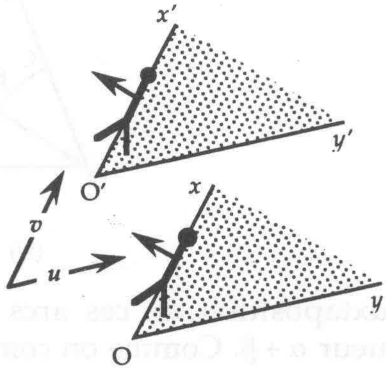
---

1 On dit couramment quela symétrie inverse l'orientation.

*** Angle de vecteurs**

Étant donnés deux vecteurs **non nuls** $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux points O et O′, on considère les quatre demi-droites suivantes :

- (Ox) et (O′x') dirigées et orientées par $\vec{u}$,
- (Oy) et (O′y') dirigées et orientées par $\vec{v}$.



La translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$ transforme (Ox) en (Ox') et (Oy) en (Oy'). Le théorème 21-3 nous assure que :

$$(Ox\,,Oy) = (O'x'\,,O'y') \pmod{2\pi}.$$

Ainsi $(Ox\,,Oy)$ est bien définie par la seule donnée des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, indépendamment de O. Ce fait assure la cohérence de la définition qui suit.

Définition : étant donnés deux vecteurs **non nuls** $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on appelle *mesure de l'angle orienté* de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ et l'on note $(\vec{u}\,,\vec{v})$, l'angle de deux demi-droites qui ont même direction, même sens que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et dont l'origine commune est un point arbitraire.

Les propriétés des angles de vecteurs s'obtiennent par simple transposition de ce qu'on sait des angles orientés de demi-droites.

(21-5) Proposition : pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, on a :

(1′) $$(\vec{u}\,,\vec{w}) = (\vec{u}\,,\vec{v}) + (\vec{v}\,,\vec{w}) \pmod{2\pi},$$ (relation de Chasles)

(2′) $$(\vec{v}\,,\vec{u}) = -(\vec{u}\,,\vec{v}) \pmod{2\pi},$$

(3′) $$(\vec{u}\,,\vec{v}) = (\vec{w}\,,\vec{v}) - (\vec{w}\,,\vec{u}) \pmod{2\pi}.$$

Remarque : si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, **non nuls**, sont colinéaires il existe un nombre réel λ, **non nul** et tel que :

$$\vec{v} = \lambda\vec{u}.$$

Dans ces conditions, on a :

$$(\vec{u}\,,\vec{v}) = 0 \pmod{2\pi} \text{ si, et seulement si, } \lambda > 0,$$
$$(\vec{u}\,,\vec{v}) = \pi \pmod{2\pi} \text{ si, et seulement si, } \lambda < 0.$$

(21-6) Théorème : toute translation conserve les angles orientés de vecteurs.

(21-7) Théorème : toute réflexion transforme la mesure de tout angle de vecteurs en son opposée.

N.B. Quand on traite ces questions, on doit rester conscient que l'unique méthode permettant de fonder, de façon formelle, la mesure des angles requiert, via la justification des propriétés de l'exponentielle complexe, tout l'arsenal de l'analyse classique. Elle met aussi en œuvre le groupe $SO_2(\mathbf{R})$, des transformations orthogonales directes du plan euclidien orienté. Comme on doit pouvoir manipuler la mesure des angles en ignorant tout de ces ingrédients, il est légitime de s'appuyer sur des propriétés relevant de l'empirisme. La mesure des angles en radians, ainsi que l'orientation relèvent de ce concept, tant qu'on ne dispose pas d'un support théorique qui ne se maîtrise raisonnablement qu'au niveau de la licence.

§ 22. Angle orienté de deux droites

(22-1) Lemme : étant données deux droites D et D′, soit :

- $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ deux vecteurs non nuls de D,
- $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ deux vecteurs non nuls de D′,

dans ces conditions, on a :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}', \vec{v}') \pmod{2\pi} \text{ ou } (\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}', \vec{v}') + \pi \pmod{2\pi}.$$

Démonstration : il découle immédiatement des hypothèses que :

$$(\vec{u}, \vec{u}') = 0 \pmod{2\pi} \text{ ou } (\vec{u}, \vec{u}') = \pi \pmod{2\pi},$$
$$(\vec{v}, \vec{v}') = 0 \pmod{2\pi} \text{ ou } (\vec{v}, \vec{v}') = \pi \pmod{2\pi}.$$

La relation de chasles justifie que :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{u}') + (\vec{u}', \vec{v}') + (\vec{v}', \vec{v}) \pmod{2\pi}.$$

Il s'ensuit bien que :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}', \vec{v}') \pmod{2\pi} \text{ ou } (\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}', \vec{v}') + \pi \pmod{2\pi}. \quad \lhd$$

Cette propriété assure la cohérence de la définition qui suit.

Définition : dans les conditions ci-dessus, on appelle *mesure de l'angle orienté* de D et D′ et l'on note (D, D′) tout nombre égal à une mesure de l'angle orienté des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, **à π près**.

Ainsi on a toujours :

$$(D, D') = (\vec{u}, \vec{v}) \pmod{2\pi} \text{ ou } (D, D') = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi \pmod{2\pi}.$$

Il est donc bien clair que la mesure de l'angle orienté de deux droites est un nombre défini à addition près d'un multiple entier de π et que la proposition (21-5), sur les angles de vecteurs, s'applique aux angles de droites moyennant un simple changement de notations.

(22-2) Proposition : pour toutes droites D, D′ et D″ du plan, on a :

(1) $(D, D'') = (D, D') + (D', D'') \pmod{\pi}$, (relation de Chasles)

(2) $(D', D) = -(D, D') \pmod{\pi}$,

(3) $(D, D') = (D'', D') - (D'', D) \pmod{\pi}$.

Remarque : pour toutes droites D et D′ du plan, on a :

- $(D, D') = 0 \pmod{\pi}$ si, et seulement si, D et D′ sont parallèles.
- $(D, D') = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ si, et seulement si, D et D′ sont perpendiculaires.

*** Bissectrices.**

(22-3) Proposition : étant données deux demi-droites de même origine, (Ox) et (Oy), il existe deux demi-droites (Oz) et (Oz′), telles que :

$$(Oz, Ox) = -(Oz, Oy) \text{ et } (Oz', Ox) = -(Oz', Oy).$$

Elles ont la même direction et sont de sens opposés.

Définition : ces deux demi-droites sont appelées les *axes bissecteurs* de l'angle $x\hat{O}y$. Leur réunion en forme la *bissectrice*.

Démonstration : soit (Oz) une demi-droite d'origine O, on note α une mesure de l'angle (Ox, Oy) et β une mesure de l'angle (Ox, Oz). Comme :

$$(Ox, Oz) + (Oz, Oy) = (Ox, Oy),$$

la condition $(Oz, Ox) = -(Oz, Oy)$ est vérifiée si, et seulement si, il existe un entier relatif n tel que :

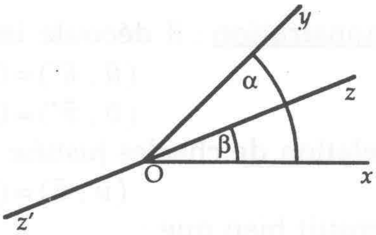
$$2\beta = \alpha + 2n\pi.$$

Cette condition équivaut à :

$$\beta = \frac{\alpha}{2} \pmod{2\pi} \quad \text{ou} \quad \beta = \frac{\alpha}{2} + \pi \pmod{2\pi}.$$

Elle définit les deux demi-droites (Oz) et (Oz′) telles que :

$$(Ox, Oz) = \frac{\alpha}{2} \pmod{2\pi} \quad \text{et} \quad (Ox, Oz') = \frac{\alpha}{2} + \pi \pmod{2\pi}.$$



On a ainsi :

$$(Oz, Oz') = \pi \pmod{2\pi}.$$

Ces deux demi-droites ont donc la même direction et elles sont de sens opposés. ◅

(22-4) Proposition : pour toutes droites D et D′, sécantes en un point O du plan, il existe deux droites Δ et Δ' passant par O et telles que :

$$(\Delta, D') = -(\Delta, D) \quad \text{et} \quad (\Delta', D') = -(\Delta', D).$$

Elles sont perpendiculaires.

Définition : les droites Δ et Δ' sont appelées les *bissectrices* de D et D′.

Démonstration : on considère une droite Δ qui passe par O. On note α une mesure de (D, D') et β une mesure de (D, Δ). Comme :

$$(D, \Delta) + (\Delta, D') = (D, D'),$$

la condition $(\Delta, D) = -(\Delta, D')$ est vérifiée si, et seulement si, il existe un entier relatif n tel que :

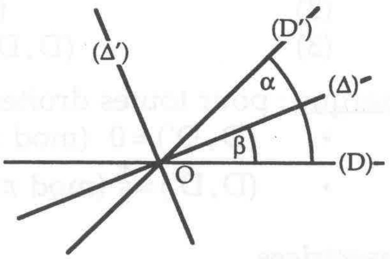
$$2\beta = \alpha + n\pi.$$

Cette relation équivaut à :

$$\beta = \frac{\alpha}{2} + n\frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.$$

Elle définit les deux droites Δ et Δ' telles que :

$$(D, \Delta) = \frac{\alpha}{2} \pmod{\pi} \quad \text{et} \quad (D, \Delta') = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.$$



On a en outre :

$$(\Delta, \Delta') = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi},$$

les deux droites obtenues sont donc perpendiculaires. ◅

! Comme la mesure d'un angle orienté est définie à un multiple entier de 2π ou de π près, Lorsqu'on doit diviser la mesure d'un angle, il prudent d'expliciter ces $2k\pi$ ou $k\pi$ dans les expressions. Cette précaution permet de calculer sur des réels ce qui est plus aisé que de manipuler des classes de nombres.

Convention : il est parfois indispensable de caractériser une valeur particulière d'un angle. Il est alors commode privilégier les mesures les plus courantes. Ainsi, on parlera de *détermination principale* pour désigner la mesure α d'un angle telle que :

- $-\pi < \alpha \leq \pi$ dans le cas des angles de vecteurs,
- $-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ dans le cas des angles de droites.

§23. Points cocycliques

(23-1) <u>Lemme</u> : si A, B, M sont trois points d'un cercle de centre O, on a toujours :

$$(MA\,,MB)=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})\ (\text{mod }\pi).$$

<u>Démonstration</u> : on note D et D′ les bissectrices des angles :

$$M\hat{O}A \text{ et } M\hat{O}B.$$

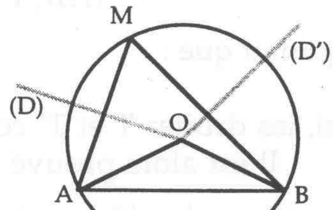
D'après la proposition (22-3), on a :

$$(OM\,,D)=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA})\ (\text{mod }\pi)\ \text{ et }\ (OM\,,D')=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OB})\ (\text{mod }\pi).$$

On en déduit que:

$$(D\,,D')=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OB})-\frac{1}{2}(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})\ (\text{mod }\pi).$$

Comme D est aussi la médiatrice de MA, elle est perpendiculaire à (MA), de même D′ est perpendiculaire à (MB). On a ainsi :



$$\begin{aligned}(MA\,,MB)&=(MA\,,D)+(D\,,D')+(D'\,,MB)\\&=\frac{\pi}{2}+(D\,,D')+\frac{\pi}{2}\ \ (\text{mod }\pi).\end{aligned}$$

On en conclut que :

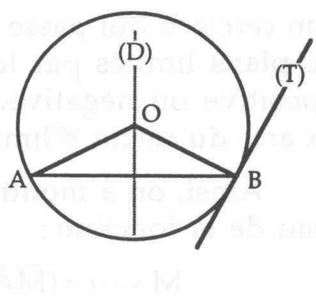
$$(MA,MB)=(D\,,D')=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})\ (\text{mod }\pi).\qquad \triangleleft$$

(23-2) <u>Lemme</u> : étant donnés deux points A et B d'un cercle de centre O, si T est la tangente en B au cercle, on a :

$$(AB\,,T)=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})\ \ (\text{mod }\pi).$$

<u>Démonstration</u> : on note D la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.
On a tout d'abord :

$$(D\,,OB)=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})\ (\text{mod }\pi).$$



Comme D est aussi la médiatrice de AB et T est la tangente en B, on a :

$$(OB\,,T)=(AB\,,D)=\frac{\pi}{2}\ \ (\text{mod }\pi).$$

Il s'ensuit que :

$$(AB\,,T)=(AB\,,D)+(D\,,OB)+(OB\,,T)=(D\,,OB)=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})\ \ (\text{mod }\pi).$$

on a donc bien :

$$(AB,T)=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})\ \ (\text{mod }\pi).\qquad \triangleleft$$

<u>Remarque</u> : la proposition ci-dessus peut être regardée comme un cas limite du théorème précédent, si l'on admet que la tangente en B au cercle est la position limite de la sécante (MB), lorsque M vient se confondre avec B.

(23-3) <u>Théorème</u> : étant donnés deux points distincts A et B du plan et un nombre réel α, non nul modulo π, le lieu des points M du plan tels que :

$$(MA\,,MB) = \alpha \pmod{\pi}$$

est un cercle qui passe par A et B.

<u>Démonstration</u> : soit T la droite passant par B et telle que :

$$(AB\,,T) = \alpha \pmod{\pi}.$$

Il existe un cercle $\mathscr{C}$ passant par A et B et tangent en B à T, il est unique. La proposition qui précède montre que tout point de $\mathscr{C}$ appartient au lieu défini dans l'énoncé.

Réciproquement, soit M un point du plan tel que :

$$(MA,MB) = \alpha \pmod{\pi},$$

comme α est non nul modulo π, les trois points M, A, B ne sont pas alignés, ils déterminent donc un cercle $\mathscr{C}'$, soit O' son centre et T' sa tangente en B. On a toujours :

$$(AB\,,T') = \frac{1}{2}(\overrightarrow{O'A}\,,\overrightarrow{O'B}) = (MA\,,MB) = \alpha \pmod{\pi}.$$

Ce qui fait que :

$$(AB\,,T') = (AB\,,T) \pmod{\pi}.$$

Ainsi, les droites T et T' coïncident, les cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont donc confondus.

Il est alors prouvé que le lieu cherché est $\mathscr{C}$. ◅

<u>Remarque</u> : la démonstration du théorème fournit aussi les éléments pour la construction géométrique du centre du cercle en question.

(23-4) <u>Corollaire</u> : étant donnés deux points A et B distincts et un nombre réel α tel que $\alpha \neq 0 \pmod{\pi}$, le lieu des points M du plan tels que :

$$(\overrightarrow{MA}\,,\overrightarrow{MB}) = \alpha \pmod{2\pi}$$

est un arc de cercle limité par A et B.

<u>Démonstration</u> : le théorème précédent montre que l'ensemble des points M tel que :

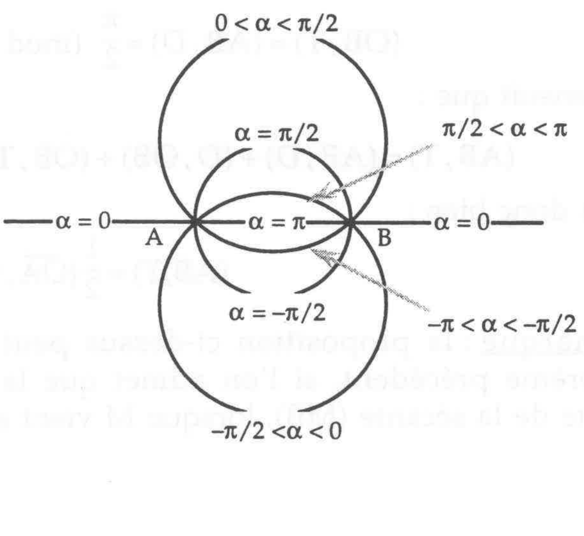
$$(MA\,,MB) = \alpha \pmod{\pi},$$

est un cercle $\mathscr{C}$ qui passe par A et B. Or, selon que M appartient à l'un ou l'autre des demi-plans limités par la droite (AB), la détermination principale α, de (MA , MB) est positive ou négative. Suivant la valeur de α, le lieu cherché est donc l'un des deux arcs du cercle $\mathscr{C}$ limités par A et B. ◅

Ainsi, on a montré que les lignes de niveau de la fonction :

$$M \mapsto \alpha = (\overrightarrow{MA}\,,\overrightarrow{MB})$$

sont les arcs de cercles d'extémités A et B, auquels il convient d'ajouter le segment AB et son complémentaire à la droite (AB). Leur disposition, lorsque a varie de $-\pi$ à π, est schématisée ci-contre.



<u>Remarque</u> : étant donnés deux points distincts A et B, le lieu des points M tels que $(MA\,,MB) = 0 \pmod{\pi}$ est la droite (AB).

(23-5) <u>Théorème</u> : quatre points A, B, C, D, distincts et non alignés, sont cocycliques si, et seulement si :

$$(CA, CB) = (DA, DB) \pmod{\pi}.$$

<u>Démonstration</u> : d'après le lemme 23-1, la condition est nécessaire. Elle est suffisante d'après le théorème 23-3. ◅

<u>Remarque</u> : quatre points distincts A, B, C, D sont alignés si et seulement si :

$$(CA, CB) = (DA, DB) = 0 \pmod{\pi}.$$

(23-6) <u>Théorème</u> : étant donné un triangle ABC, une droite Δ passant par C, est tangente au cercle circonscrit à ABC si, et seulement si :

$$(BC, \Delta) = (AB, AC) \pmod{\pi}.$$

<u>Démonstration</u> : d'après les lemme 23-1 et 23-2, la condition est nécessaire. La démonstration du théorème 23-3 montre qu'elle est suffisante. ◅

Chapitre VI. Les isométries planes

On se place dans un plan arbitraire qu'on appelle "le plan". On le suppose orienté, lorsque cette hypothèse s'impose – en fait, chaque fois qu'on évalue la mesure d'un angle orienté par un nombre réel donné.

§ 24. Définition – exemples

Définition : on appelle *isométrie plane* toute application du plan dans lui-même qui conserve la distance, c'est-à-dire telle que, pour tous points M et N d'images respectives M' et N', on ait

$$M'N' = MN.$$

Dans toute la suite, on parlera le plus souvent d'isométrie sans préciser "plane".

(24-1) Proposition : La composition de deux isométries donne une isométrie.

Démonstration : ceci découle immédiatement de la définition. ◅

Exexemples :

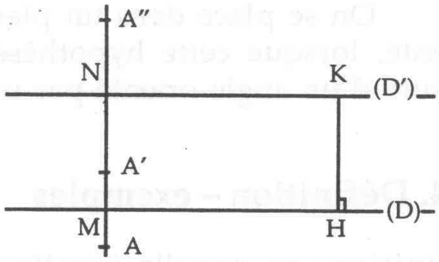
- l'application identique du plan sur lui-même,
- toute translation,
- toute symétrie par rapport à un point,
- toute symétrie orthogonale par rapport à une droite,
- toute application obtenue par composition de ces transformations,

est une isométrie. Ainsi, au départ, la notion d'isométries n'est pas totalement étrangére.

§ 25. Composition de deux réflexions

*** Cas où les axes sont parallèles**

Étant données deux droites parallèles D et D′, on considère un point quelconque A du plan, soit A′ son symétrique par rapport à D et A″ le symétrique de A′ par rapport à D′. On note M et N les milieux respectifs de AA′ et de A′A″. On a :



$$\overrightarrow{AA'} = 2\,\overrightarrow{MA'} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{A'N}.$$

Il s'ensuit que :

$$\overrightarrow{AA''} = 2\,\overrightarrow{MN}$$

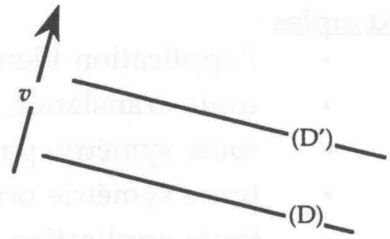
On peut choisir abitrairement un point H de D et noter K sa projection orthogonale sur D′, on aura toujours :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{HK}.$$

L'application composée $s_{D'} \circ s_D$ est donc la translation de vecteur $2\overrightarrow{HK}$.

(25-1) <u>Proposition</u> : la composition de deux réflexions dont les axes sont parallèles donne une translation.

Réciproquement, on considère une translation de vecteur $\vec{v}$ et l'on choisit arbitrairement une droite D perpendiculaire à la direction de $\vec{v}$, soit D′ son image par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\,\vec{v}$. On a montré que :



$$s_{D'} \circ s_D = t_{\vec{v}}\,.$$

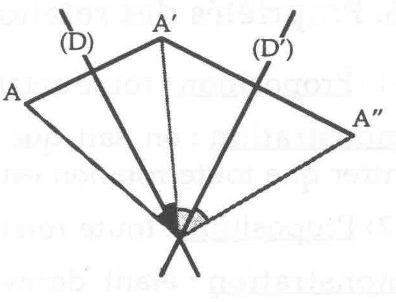
On a donc justifié l'assertion qui suit.

(25-2) <u>Théorème</u> : la translation de vecteur $\vec{v}$ est le produit de deux réflexions dont les axes – dans l'ordre D et D′ – sont orthogonaux à $\vec{v}$. L'une de ces droites est arbitraire, l'autre est déterminée par la condition :

$$D' = t_{\frac{1}{2}\vec{v}}(D).$$

N.B. Le fait que l'axe d'une des symétries en question puisse être choisi arbitrairement jouera un rôle essentiel dans la suite.

*** Cas où les axes sont sécants**



Considérons deux réflexions dont les axes D et D' sont deux droites, données, sécantes en O. Ce point est invariant par chacune des deux symétries, il est donc laissé fixe par l'application composée $s_{D'} \circ s_D$.

Soit A un point distinct de O, on note A' son symétrique par rapport à D et A'' le symétrique de A' par rapport à D'. On a, d'une part :

$$OA = OA' = OA'',$$

d'autre part :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = 2(D, OA') \pmod{2\pi} \text{ et } (\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OA''}) = 2(OA', D') \pmod{2\pi},$$

d'où il vient :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = 2(D, D') \pmod{2\pi}.$$

Ces deux constatations nous conduisent à poser la définition qui suit.

<u>Définition</u> : étant donné un point O du plan orienté et un nombre réel θ, on appelle *rotation* de *centre* O d'*angle* θ et l'on note $R(O, \theta)$, l'application du plan dans lui même qui laisse le point O invariant et transforme tout point M, distinct de O, en le point M' tel que :

$$OM = OM' \text{ et } (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta \pmod{2\pi}.$$

On peut alors formuler simplement le résultat acquis.

(25-3) <u>Proposition</u> : la composition de deux symétries par rapport à des droites sécantes donne une rotation.

Réciproquement, considérons une rotation de centre O et d'angle θ, soit D et D' deux droites passant par O et telles que :

$$(D, D') = \frac{\theta}{2} \pmod{\pi}.$$

On a montré que :

$$s_{D'} \circ s_D = R(O, \theta),$$

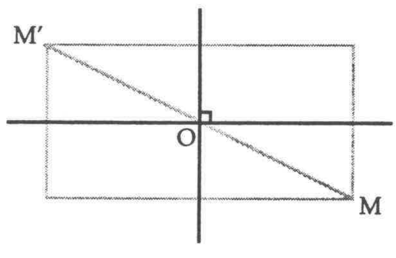
ce qui justifie l'assertion suivante.

(25-4) <u>Théorème</u> : la rotation de centre O et d'angle θ est le produit des réflexions dont les axes – dans l'ordre D et D' – passent par O. L'une de ces droites est arbitraire, l'autre est déterminée par la condition :

$$(D, D') = \frac{\theta}{2} \pmod{(\pi)}.$$

N.B. Ici encore, le fait que l'axe d'une des symétries en question puisse être choisi arbitrairement est essentiel.

<u>Exemple</u> : soit O un point du plan, la rotation de centre O et d'angle π, c'est-à-dire la symétrie par rapport au point O (ou demi-tour de centre O), est le produit de deux symétries par rapport à deux droites perpendiculaires passant par O.



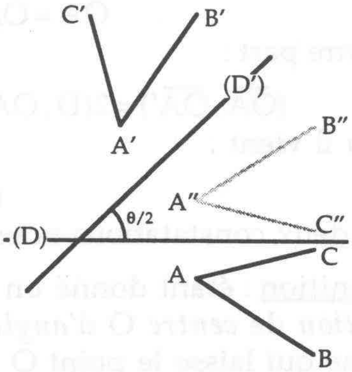
Notons qu'ici, la composition est commutative. Il est facile de montrer que c'est le seul cas où cette propriété est vérifiée.

§ 26. Propriétés des rotations

(26-1) <u>Proposition</u> : toute rotation est une isométrie.

<u>Démonstration</u> : on sait que toute réflexion est une isométrie et nous venons de montrer que toute rotation est le produit de deux symétries. ◅

(26-2) <u>Proposition</u> : toute rotation conserve toute mesure d'angle.



<u>Démonstration</u> : étant donnée une rotation de centre O d'angle θ, on désigne respectivement par A, B, C et A', B', C' trois points du plan et leurs images par R(O, θ). On considère deux droites D et D' passant par O et telles que :

$$s_{D'} \circ s_D = R(O, \theta),$$

soit A'', B'', C'' les images de A, B et C par la symétrie d'axe D. Dans ces conditions, d'après le théorème (21-4), on a :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -(\overrightarrow{A''B''}, \overrightarrow{A''C''}) \pmod{2\pi}$$

$$(\overrightarrow{A''B''}, \overrightarrow{A''C''}) = -(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) \pmod{2\pi}.$$

Ce qui justifie la conclusion. ◅

(26-3) <u>Théorème</u> : pour tous points A et B distincts et leurs images respectives A' et B' par une rotation d'angle θ, on a :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta \pmod{2\pi}.$$

<u>Démonstration</u> : soit O le centre de la rotation considérée, si l'un des points A ou B est confondu avec O, le résultat est donné par la définition elle même. Dans le cas contraire, on a :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) + (\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{A'B'}) \pmod{2\pi}.$$

La proposition précédente montre que :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{OA'}) = -(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{A'B'}) \pmod{2\pi}.$$

On en déduit que :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \theta \pmod{2\pi}.$$ ◅

<u>Remarque</u> : pour toute droite D du plan et son image D' par la rotation R(O, θ), on a :

$$(D, D') = \theta \pmod{\pi}.$$

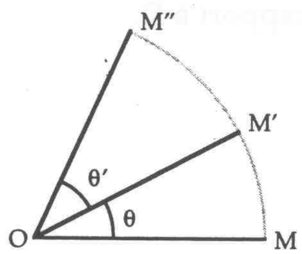
*** Composition de rotations de même centre**

(26-4) <u>Proposition</u> : pour deux rotations de **même centre** O, $R(O,\theta)$ et $R(O,\theta')$, on a toujours :

$$R(O,\theta') \circ R(O,\theta) = R(O,\theta+\theta').$$

Cette opération est commutative.

<u>Démonstration</u> : le centre commun est fixe par l'application $R(O,\theta') \circ R(O,\theta)$. Soit M un point du plan distinct de O, on note M′ l'image de M par la rotation $R(O,\theta)$ et M″ l'image de M′ par la rotation $R(O,\theta')$.On a d'une part :



$$OM = OM' \text{ et } (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}) = \theta \pmod{2\pi},$$

d'autre part :

$$OM' = OM'' \text{ et } (\overrightarrow{OM'},\overrightarrow{OM''}) = \theta' \pmod{2\pi}.$$

Ill est alors immédiat que :

$$OM = OM'' \text{ et } (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM''}) = \theta+\theta' \pmod{2\pi}.$$

Le point M″ est donc l'image de M par la rotation de centre O d'angle $\theta+\theta'$ et l'on a bien :

$$R(O,\theta') \circ R(O,\theta) = R(O,\theta+\theta')$$

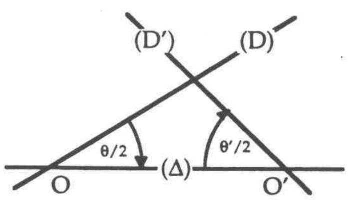
On a aussi :

$$R(O,\theta) \circ R(O,\theta') = R(O,\theta'+\theta) = R(O,\theta+\theta').$$

La composition de deux rotations de même centre est donc une opération commutative. ◅

*** Composition de rotations dont les centres sont distincts**

Étant données deux rotations $R(O,\theta)$ et $R(O',\theta')$ de centres distincts, on note Δ la droite (OO′). On considère les droites D et D′ passant respectivement par O et O′ et telles que :



$$(D,\Delta) = \frac{\theta}{2} \pmod{\pi} \text{ et } (\Delta,D') = \frac{\theta'}{2} \pmod{\pi}.$$

On a ainsi :

$$R(O,\theta) = s_\Delta \circ s_D \text{ et } R(O',\theta') = s_{D'} \circ s_\Delta.$$

Comme la composition des applications est associative, on a :

$$R(O',\theta') \circ R(O,\theta) = (s_{D'} \circ s_\Delta) \circ (s_\Delta \circ s_D) = s_{D'} \circ (s_\Delta \circ s_\Delta) \circ s_D.$$

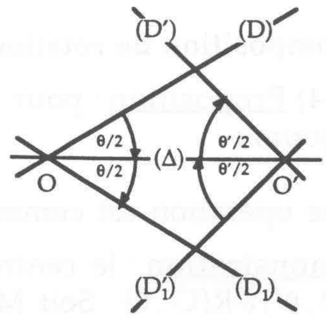
Or, $s_\Delta \circ s_\Delta$ est l'application identique, on a donc :

$$R(O',\theta') \circ R(O,\theta) = s_{D'} \circ s_D.$$

Dans la section précédente, on a montré que la composition de ces deux symétries donne une translation ou une rotation. On a de plus :

$$(D,D') = (D,\Delta) + (\Delta,D') = \frac{\theta+\theta'}{2} \pmod{\pi}.$$

Si $\theta+\theta' = 0 \pmod{2\pi}$, les droites D et D′ sont parallèles et la composition des deux rotations donne une translation. Dans le cas contraire, on obtient une rotation d'angle $\theta+\theta'$.



Remarque : en règle générale, la composition des rotations n'est pas une opération commutative. Pour déterminer l'application composée :

$$R(O,\theta)\circ R(O',\theta'),$$

comme dans la démonstration précédente, on introduit les droites D_1 et D_1' symétriques de D et D' par rapport à Δ. Le centre de cette rotation est alors le symétrique du précédent, par rapport à D.

§ 27. Propriétés des isométries

(27-1) Proposition : toute isométrie qui laisse invariants trois points non alignés, est l'application identique.

Démonstration : on considère une isométrie f, laissant fixes trois points non alignés A, B, C. Soit M un point quelconque et M′ son image par f, comme f est une isométrie, on a toujours :

$$AM = AM' \quad , \quad BM = BM' \quad \text{et } CM = CM'.$$

Si M était différent de M′, A, B et C devraient appartenir à la médiatrice de MM′. C'est exclu. On a donc toujours M′ = M. ◅

(27-2) Proposition : toute isométrie qui laisse invariants deux points distincts A et B, est soit l'application identique, soit la réflexion d'axe (AB).

Démonstration : soit f une telle isométrie, si f n'est pas l'application identique, il existe un point M, non aligné avec A et B, dont l'image M′ par f est différente de M. Soit D la médiatrice de MM′, comme ci-dessus A et B appartiennent à D, l'application $s_D \circ f$ est une isométrie, elle laisse invariants A, B et M, la proposition précédente montre que c'est l'application identique. Il s'ensuit que :

$$s_D = s_D \circ \mathrm{Id} = s_D \circ s_D \circ f = \mathrm{Id} \circ f = f.$$ ◅

(27-3) Proposition : toute isométrie qui laisse invariant un point, et un seul, est une rotation.

Démonstration : soit f une telle isométrie, A son point fixe, B un point arbitraire, autre que A et B′ l'image de B par f, on note D la médiatrice de BB′ – cette droite est bien définie car B et B′ sont distincts. L'application $s_D \circ f$ est une isométrie, elle laisse A et B invariants. Comme f n'admet qu'un point fixe, ce n'est pas une réflexion, on a donc $s_D \circ f \neq \mathrm{Id}$, la proposition précédente montre alors que cette application est une réflexion dont l'axe D′ est distinct de D. On a donc :

$$s_D \circ f \neq s_{D'}.$$

Il s'ensuit que :

$$f = s_{D'} \circ s_D.$$

Comme f admet un point fixe, ce n'est pas une translation, c'est donc une rotation. ◅

(27-4) Théorème : toute isométrie du plan se décompose en un produit d'au plus trois réflexions.

Démonstration : soit f une isométrie, si f admet au moins un point fixe, les deux propositions qui précèdent montrent que la propriété énoncée est vraie. On suppose donc que f est sans point fixe et l'on considère un point arbitraire A, soit A′ son image par f et D la médiatrice de AA′ – cette droite est bien définie car A et A′ sont distincts. L'application $s_D \circ f$ est une isométrie, elle laisse invariant A, ce qui précède montre cette application est soit l'application identique, soit le produit d'une ou deux réflexions. La conclusion en découle comme dans les démonstrations précédentes. ◅

Les propriétés qui suivent découlent immédiatement de ce fait et des propriétés d'invariance par réflexion, déjà établies.

(27-5) Corollaire.

1) Toute isométrie est une application bijective et son application réciproque est une isométrie.

2) L'image de toute droite par une isométrie est une droite.

3) Toute isométrie conserve le barycentre.

(27-6) Corollaire : toute isométrie f induit sur l'ensemble des vecteurs du plan une application $\vec{f}$ telle que pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tout réels λ et μ, on ait :

$$\vec{f}(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})=\lambda(\vec{u})+\mu\vec{f}(\vec{v}).$$

(27-7) Corollaire : une isométrie donnée conserve la mesure tout angle orienté ou la change en son opposée.

Démonstration : on a vu qu'une réflexion transforme tout angle orienté en un angle de mesure opposée. On est donc bien dans l'un de ces deux cas, suivant que l'isométrie considérée se décompose en un nombre pair ou impair de symétries. ◅

§ 28 Formes réduites

Compte-tenu de ce qui précède immédiatement, il est naturel d'introduire la distinction qui suit.

Définition : on appelle :

- *déplacement* ou *isométrie directe* toute isométrie qui conserve les angles,
- *antidéplacement* ou *isométrie indirecte*, toute isométrie qui transforme les angles en leurs opposés.

(28-1) Proposition : tout déplacement qui admet deux points invariants distincts est l'application identique.

Démonstration : comme un déplacement conserve les angles, c'est le produit d'un nombre pair de réflexions – donc de deux. La proposition 27-2 montre que s'il admet deux points invariants, c'est l'application identique. ◅

(28-2) Théorème : tout déplacement plan, autre que l'application identique, est une rotation ou une translation suivant qu'il admet un point fixe, ou qu'il n'en admet pas.

Démonstration : un déplacement étant le produit de deux reflexions, cette conclusion découle des propositions (25-1) et (25-2). ◅

(28-3) Théorème.

1) Tout antidéplacement qui admet un point fixe est une réflexion.

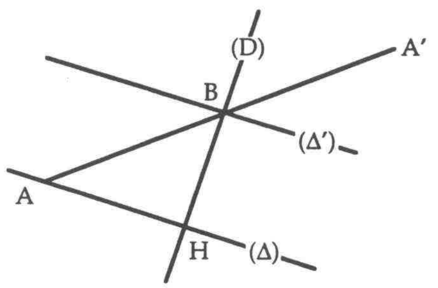
2) Tout antidéplacement sans point fixe est le produit d'une symétrie par rapport à une droite et d'une translation, de vecteur non nul, parallèle à l'axe de la symétrie – ceci dans un ordre indifférent.

Démonstration.

1) Étant donné un antidéplacement f du plan ayant un point fixe A, il résulte de la proposition 27-3 qu'il en admet au moins un deuxième, puis de 27-2 que c'est une réflexion.

2) Étant donné un antidéplacement sans point fixe, on considère un point arbitraire A, soit A' son image par f, B le milieu de AA' et d la symétrie de centre B. L'isométrie $d \circ f$ est un antidéplacement qui laisse A invariant. Le point précédent montre que c'est une symétrie dont l'axe Δ passe par A. On considère alors les droites suivantes:

- Δ' la parallèle à Δ qui passe par B,
- D la perpendiculaire à Δ et Δ' qui passe par B.



Comme les droites Δ' et D sont perpendiculaires et passent par B, on a :

$$d = s_{\Delta'} \circ s_D$$

et par suite :

$$s_{\Delta'} \circ s_D \circ f = d \circ f = s_{\Delta}.$$

On en déduit successivement :

$$s_D \circ f = s_{\Delta'} \circ s_\Delta,$$
$$f = s_D \circ (s_{\Delta'} \circ s_\Delta).$$

Les droites D et D′ étant parallèles, $s_{\Delta'} \circ s_\Delta$ est la translation de vecteur $\vec{v} = 2\overrightarrow{HB}$, où H désigne la projection orthogonale de B sur D. On a donc :

$$f = s_D \circ t_{\vec{v}}\ .$$

Les droites Δ et Δ′ étant perpendiculaires à D, on a :

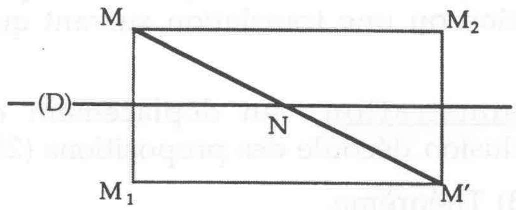
$$s_D \circ s_\Delta = s_\Delta \circ s_D \quad \text{et} \quad s_D \circ s_{\Delta'} = s_{\Delta'} \circ s_D.$$

Il s'ensuit que :

$$f = s_D \circ s_{\Delta'} \circ s_\Delta = s_{\Delta'} \circ s_D \circ s_\Delta = s_{\Delta'} \circ s_\Delta \circ s_D$$
$$f = t_{\vec{v}} \circ s_D\ .$$

L'antidéplacement f est donc bien le résultat de la composition de la réflexion d'axe D et d'une translation de vecteur parallèle à D, cette opération est commutative. ◁

(28-4)<u>Proposition</u> : un antidéplacement sans point fixe laisse globalement invariante une droite unique. Celle-ci est l'ensemble des milieux des segments joignant chaque point du plan à son image.



<u>Démonstration</u> : on conserve les données ci-dessus. Comme $\vec{v}$ est parallèle à D, cette droite est globalement invariante par $t_{\vec{v}}$ et aussi par f, car $f = s_D \circ t_{\vec{v}}$. Soit M un point quelconque, M′ son image par f , on pose :

$$M_1 = s_D(M) \text{ et } M_2 = t_{\vec{v}}(M).$$

On a à la fois :

$$M_2 = t_{\vec{v}}(M) \quad \text{et} \quad t_{\vec{v}}(M_1) = M'.$$

Le quadrilatère $MM_1M'M_2$ est donc un parallélogramme. De plus, comme il admet (D) pour axe de symétrie, c'est un rectangle. Le milieu de MM′ en est le centre, il est donc situé sur (D). Réciproquement, tout point de D est le centre d'un tel rectangle et, de ce fait, il est le milieu d'un segment MM′ tel que $M' = f(M)$.

Réciproquement, si Δ est une droite invariante, pour tout point M de Δ admet pour image un point M′ de Δ. Le milieu de MM′ appartient donc à Δ. Cette droite coïncide avec D. ◁

<u>Définition</u> : un antidéplacement sans point fixe est appelé *symétrie-translation*, ou encore *symétrie glissée*. L'unique droite globalement par une telle transformation est appelé son *axe*.

§ 29. Action des isométries sur le plan.

*** Groupes de transformations.**

Nous savons que :

- la composition de deux isométries donne une isométrie,
- l'application identique est une isométrie,
- l'application réciproque d'une isométrie est une isométrie.

Ces trois propriétés se retrouvent pour les sous-ensembles suivants des transformations du plan :

- l'ensemble des translations,
- l'ensemble des rotations de centre O donné,
- l'ensemble des déplacements.

On résume ces propriétés en disant que chacun d'eux est un :

groupe de transformations du plan.

N.B. Les deux premières propriétés ne sont plus vérifiées par les antidéplacements qui, de ce fait, ne forment pas un groupe.

Nous pouvons préciser l'action de ces transformations sur le plan en montrant qu'une isométrie est entièrement déterminée par la donnée de deux points, de leurs images et de sa nature – déplacement ou antidéplacement.

(29-1) <u>Proposition</u> : étant donnés deux points distincts A et B, pour tous points A′ et B′, tels que :

$$AB = A'B',$$

il existe un déplacement et un antidéplacement du plan, uniques, qui transforment A en A′ et B en B′.

<u>Démonstration</u> : considérons des isométries f et g, telles que :

$$f(A) = g(A) = A' \text{ et } f(B) = g(B) = B'.$$

L'application $f^{-1} \circ g$ est une isométrie. Elle laisse invariants les deux points distincts A et B. C'est donc soit l'application identique, soit la réflexion s, d'axe (AB). On a donc :

$$f^{-1} \circ g = \mathrm{Id} \text{ ou bien } f^{-1} \circ g = s$$

et par suite :

$$g = f \circ f^{-1} \circ g = f \text{ ou bien } g = f \circ f^{-1} \circ g = f \circ s.$$

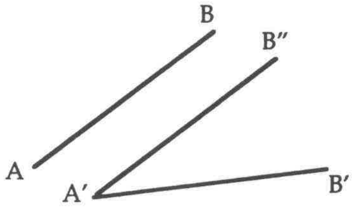
On en conclut que :

$$g = f \text{ ou } g = f \circ s.$$

Il existe donc au plus un déplacement et un antidéplacement qui transforment A en A′ et B en B′.

Montrons que ces deux isométries existent effectivement. On considère la translation t de vecteur $\overrightarrow{AA'}$, elle transforme B en B″ et l'on a :

$$A'B'' = AB = A'B'.$$



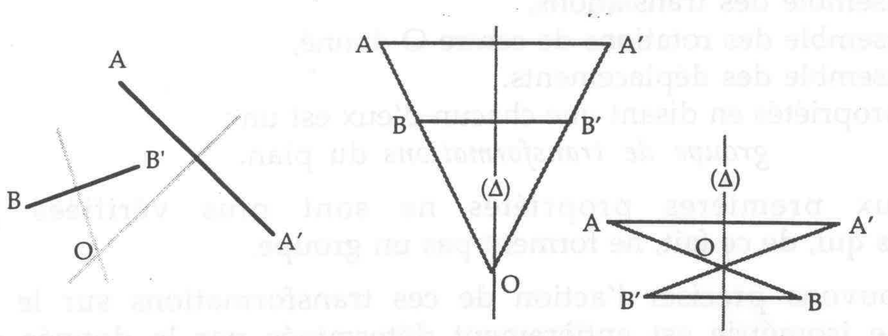
La rotation r, de centre A′ et d'angle $(\overrightarrow{A'B''}, \overrightarrow{A'B'})$ transforme donc B″ en B′. Soit D la médiatrice de B′B″ si B′ et B″ sont distincts ou la droite (A′B′) dans le cas contraire.

Le déplacement $r \circ t$ ainsi que l'antidéplacement $s_D \circ t$ transforment tous les deux A en A′ et B en B′. La démonstration est alors complète. ◅

*** Construction du centre d'une rotation définie par deux points et leurs images.**

Étant donnés quatre points A, B, A', B' tels que $AB = A'B' \neq 0$, on considère l'unique déplacement f qui transforme A en A' et B en B'.

- Si $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$, f est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.
- Si $\overrightarrow{A'B'} \neq \overrightarrow{AB}$, f est une rotation d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$. Il est alors très facile d'en construire le centre. En effet,
  - si A est confondu avec A', ce point est évidemment le centre de la rotation, il en va de même pour B s'il se confond avec B'.
  - si $A \neq A'$ et $B \neq B'$, le centre de f est un point commun aux médiatrices de AA' de BB'.



Si ces deux droites sont distinctes, la question est réglée. Sinon, elles sont une même droite Δ, axe d'une réflexion qui transforme A en A' et B en B'. Il est alors immédiat que :

$$f = s_{\Delta} \circ s_{(AB)}.$$

Comme $\overrightarrow{A'B'} \neq \overrightarrow{AB}$, Δ et (AB) ne sont pas parallèles, le centre cherché est alors l'intersection de ces droites. C'est aussi le point commun à (AB) et (A'B').

<u>Remarque</u> : une rotation étant aussi une similitude, les considérations de la section suivante livrent des caractérisations moins évidentes du centre d'une rotation donnée de cette façon.

Nous laissons à chacun le soin de déterminer l'axe et le vecteur de l'antidéplacement (symétrie ou symétrie-translation) qui transforme A en A' et B en B'.

Chapitre VII. Les similitudes planes

§30. Rappels et compléments sur l'homothétie

Étant donnés un point O du plan et un nombre réel λ, **non nul**, on se souvient que l'*homothétie* de centre O et de rapport λ est l'application du plan sur lui même qui à tout point M, associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda\ \overrightarrow{OM}.$$

On convient de noter cette transformation $H(O,\lambda)$.

On dit qu'une homothétie est *positive* ou *négative* suivant que son rapport est positif ou négatif.

On vérifie sans peine les propriétés élémentaires qui suivent.

(30-1) Proposition.

1) Le centre d'une homothétie de rapport $\lambda \neq 1$ est son seul point invariant.

2) Étant données deux homothéties de même centre, on a toujours :

$$H(O,\lambda) \circ H(O,\lambda') = H(O,\lambda\lambda') = H(O,\lambda') \circ H(O,\lambda)$$

et ce produit est commutatif.

2) Toute homothétie est une application bijective et l'on a :

$$H(O,\lambda)^{-1} = H(O,\tfrac{1}{\lambda}).$$

Comme de plus, l'application identique peut être considérée comme une homothétie de centre O et de rapport 1, on en déduit la proposition qui suit.

(30-2) Proposition : les homothéties de même centre forment un groupe commutatif.

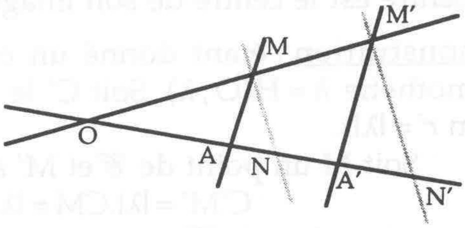
On se souvient que si M et N sont deux points quelconques du plan et si M', N' désignent leurs images par une homothétie de rapport λ, on a toujours :

$$\overrightarrow{M'N'} = \lambda\overrightarrow{MN}$$

et qu'une homothétie transforme toute droite en une droite parallèle. Cette propriété permet de construire aisément l'image d'un point quelconque par une homothétie donnée par :

- son centre 0,
- un couple (A, A') de points homologues.

Nous laissons à chacun le soin de décrire et justifier les tracés à effectuer pour parvenir à cette fin.



(30-3) <u>Proposition</u> : on considère quatre points A, B, A′ et B′ tels que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ soient colinéaires. Si $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$, il existe homothétie, et une seule, qui transforme A en A′ et B en B′.

<u>Démonstration</u> : si une telle homothétie existe, son rapport λ est tel que :

$$\overrightarrow{A'B'} = \lambda\overrightarrow{AB}$$

et son centre O vérifie :

$$\overrightarrow{OA'} = \lambda\overrightarrow{OA}$$

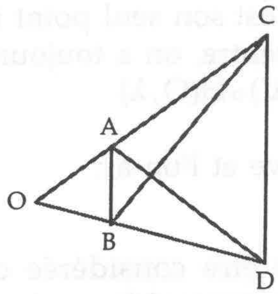
Les hypothèses posées justifient que λ est bien défini, non nul, comme il est aussi différent de 1, O est le barycentre de A et A′ affecté des coefficients 1 et $-\lambda$.

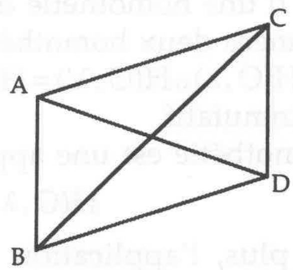
L'homothétie, ainsi définie, transforme évidemment A en A′ et comme :

$$\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B'} = \lambda\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{OB},$$

elle transforme aussi B en B′. ◅

(30-4) <u>Corollaire</u> : étant donnés quatre points A, B, C et D, si les droites (AB) et (CD) sont parallèles et si $AB \neq CD$, il existe deux homothéties qui transforment la paire $\{A, B\}$ en $\{C, D\}$.





<u>Remarque</u> : dans le cas où $AB = CD$, l'une de ces homothéties est un demi-tour. L'autre est remplacée par une translation.

(30-5) <u>Proposition</u> : toute homothétie conserve la mesure des angles orientés.

<u>Démonstration</u> : pour les homothéties positives, c'est une conséquence immédiate de la définition des angles de vecteurs. Comme toute homothétie négative se décompose en produit d'une homothétie positive et d'une symétrie par rapport au centre d'homothétie, l'assertion avancée est vraie dans tous les cas. ◅

(30-6)<u>Proposition</u> : toute homothétie transforme un cercle en un cercle et l'image de son centre est le centre de son image.

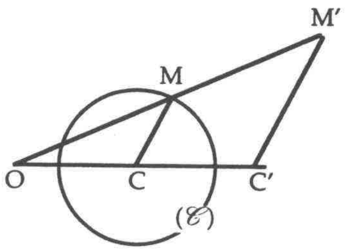
<u>Démonstration</u> : étant donné un cercle $\mathscr{C}$ de centre C et de rayon r, on considère l'homothétie $h = H(O, \lambda)$. Soit C′ le transformé de C et $\mathscr{C}'$ le cercle de centre C′ et de rayon $r' = |\lambda| r$.

Soit M un point de $\mathscr{C}$ et M′ son image par h, on a :

$$C'M' = |\lambda|.CM = |\lambda| r = r',$$

M appartient donc à $\mathscr{C}'$ et par suite :

$$h(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{C}'.$$



Réciproquement, ce qui précède nous permet aussi d'affirmer que :

$$h^{-1}(\mathscr{C}') \subseteq \mathscr{C}, \text{ puis } \mathscr{C}' = h \circ h^{-1}(\mathscr{C}') \subseteq h(\mathscr{C}).$$

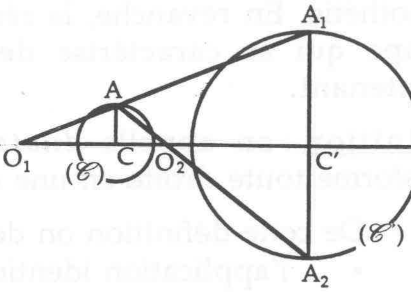
On en conclut que $h(\mathscr{C}) = \mathscr{C}'$. ◅

(30-7) <u>Proposition</u> : étant donnés deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de rayons inégaux, il existe deux homothéties qui transforment $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$.

<u>Démonstration</u> : soit r et r' les rayons respectifs de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, C et C′ leurs centres, on considère un point arbitraire A de $\mathscr{C}$, on note A_1 et A_2 les points où la droite parallèle à (CA), passant par C′, coupe $\mathscr{C}'$.

Si $\mathscr{C}'$ est l'image de $\mathscr{C}$ par une homothétie h, on a nécessairement :

$$h(C) = C' \text{ et } h(A) = A_1 \text{ ou } h(A) = A_2 .$$



Le corollaire (30-4) montre l'existence de deux homothéties h_1 et h_2 telles que :

$$h_1(C) = C' \text{ et } h_1(A) = A_1,$$
$$h_2(C) = C' \text{ et } h_2(A) = A_2.$$

La proposition précédente nous assure, alors qu'on a :

$$h_1(\mathscr{C}) = \mathscr{C}' = h_2(\mathscr{C}). \quad \triangleleft$$

<u>Remarque</u> : il est facile de vérifier que les homothéties respectent les contacts entre cercles et droites. On en déduit une construction particulièrement commode des tangentes communes à deux cercles donnés. La retrouver ... et la justifier.

Notons enfin que les homothéties respectent les contacts entre cercles.

§ 31. Les dilatations

Les homothéties ne forment pas un groupe de transformations du plan. En effet, nous savons, par exemple, que la composition de deux homothéties de rapport –1 ayant des centres distincts – i.e. deux demi-tours – est une translation et non une homothétie. En revanche, la réunion des homothéties et des translations forme un groupe qui se caractérise de façon fort simple, comme nous allons le voir maintenant.

Définition : on appelle *dilatation* toute bijection du plan sur lui-même, qui transforme toute droite en une droite parallèle.

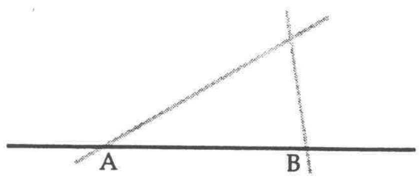
De cette définition on déduit immédiatement que :

- l'application identique du plan est une dilatation,
- la composition de deux dilatations donne une dilatation,
- l'inverse d'une dilatation est une dilatation.

Ainsi les dilatations forment un groupe qui contient les homothéties et les translations.

(31-1) Proposition : toute dilatation qui laisse invariants deux points distincts est l'application identique.

Démonstration : soit f une dilatation qui laisse invariants deux points distincts A et B, toute droite passant par A ou B est donc invariante. Ainsi, tout point du plan, extérieur à la droite (AB), est l'intersection de deux droites invariantes, il est donc invariant. Cette propriété s'étend immédiatement aux points de la droite (AB).



◅

(31-2) Proposition : toute dilatation est une homothétie ou une translation.

Démonstration : soit f une dilatation. On considère deux points distincts A et B, on note A', B' leurs images par f. Comme f est une dilatation, il existe un scalaire λ, tel que :

$$\overrightarrow{A'B'} = \lambda\overrightarrow{AB}.$$

- Si $\lambda \neq 1$ il existe une homothétie g qui transforme A en A' et B en B'.
- Si $\lambda = 1$ la translation g qui transforme A en A' transforme aussi B en B'.

Dans les deux cas, l'application composée :

$$g^{-1} \circ f$$

est une dilatation, elle laisse A et B invariants, on a donc :

$$g^{-1} \circ f = \mathrm{Id}.$$

On en conclut que f et g sont égales. La dilatation f est donc, selon le cas, une homothétie ou une translation. ◅

Remarque : ainsi, le groupe des dilatations apparaît comme la réunion du groupe des translations avec tous les groupes d'homothéties ayant même centre. Ceci justifie qu'on appelle aussi cet ensemble le *groupe des homothéties-translations* (1).

1 En revanche, parler des dilations en termes d'homothéties-translations est peu satisfaisant. En effet, cette expression semble suggérer l'existence de transformations hybrides et reflète plutôt mal la réalité que nous venons de décrire.

Dans la pratique, il est commode de pouvoir se référer aux propositions qui suivent. Leurs démonstrations sont évidentes.

(31-3) <u>Proposition</u> : soit h et h' deux homothéties de centres O et O', distincts :

- si $h' \circ h$ est une homothétie, son centre est aligné avec O et O',
- si $h' \circ h$ est une translation, son vecteur est non nul et colinéaire à (OO').

(31-4) <u>Corollaire</u> : on considère trois dilatations f, g et h, autres que l'application identique et telles que $h \circ g \circ f$ soit l'application identique.

- Si les trois sont des homothéties, leurs centres sont alignés.
- Si deux d'entre elles sont des homothéties de centres O et O' et la troisième est une translation de vecteur $\vec{v}$, alors $\overrightarrow{OO'}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
- Si deux sont des translations la troisième est aussi une translation.

<u>Applications</u>.

1. Étant donnés quatres points alignés A, A', B, B' tels AA'≠BB', les distances AA' et BB' étant non nulles, construire le centre de l'homothétie qui transforme A en A' et B en B'.

On choisit arbitrairement deux points C et D d'une droite parallèle à (AB) la construction des centres des homothéties f et g, telles que :

$$f(A)=C \;,\; f(C)=A' \text{ et } g(B)=D \;,\; g(D)=B'$$

est évidente et comme il est clair que $g \circ f$ est l'homothétie considérée, le centre de celle-ci est aligné avec les deux autres.

2. On propose une $(n+1)^e$ démonstration du théorème de Ménélaüs.

Les données et notations étant les mêmes qu'en 0-5, on considère les homothéties f, g et h dont les centres et les rapports sont respectivement :

$$A' \text{ et } \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \;,\; B' \text{ et } \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \;,\; C' \text{ et } \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}.$$

L'application $F = f \circ g \circ h$ est une dilatation qui laisse B invariant et admet pour rapport :

$$k = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$$

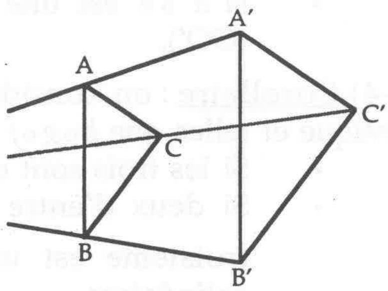
En conséquence :

- Si A', B' et C' sont sur une même droite Δ, et si l'on suppose $k \neq 1$, F est une homothétie dont le centre appartient à Δ et comme B, n'appartient pas à cette droite, F est l'application identique. Cette contradiction justifie que $k=1$.
- Si $k=1$, F est une translation, elle laisse un point invariant, c'est donc l'application identique et alors les centres A', B' et C' sont alignés.

*** Une forme affine du théorème de Desargues.**

(31-5) Théorème : si deux triangles ABC et A′B′C′ ont leurs côtés homologues parallèles, alors les droites (AA′), (BB′) et (CC′) sont concourantes ou parallèles.

Démonstration : l'unique dilatation qui transforme A en A′ et B en B′, transforme les droites (AC) et (BC) en leurs parallèles respectives passant par A′ et B′. Ces droites se coupent en C′, ce point est donc l'image de C.



Dans ces conditions, suivant que cette dilatation est une homothétie ou une translation, les droites (AA′), (BB′) et (CC′) sont concourantes ou parallèles. ⊲

Suggestion : énoncer et démontrer une réciproque du théorème précédent.

Signalons, pour conclure, que le théorème de Desargues est, sous l'une ou l'autre de ses nombreuses variantes, l'un des ingrédients obligatoires de toute présentation axiomatique de la géométrie.

§ 32. Définition et classification des similitudes

Définition : on appelle *similitude* (plane) toute application du plan dans lui-même telle que, le rapport des distances de deux points quelconques et de leurs images soit constant.

En d'autres termes, f est une similitude, s'il existe un nombre strictement positif k, tel que, pour tous points M et N, leurs images respectives M' et N' par f vérifient :

$$M'N' = kMN.$$

Ce nombre est appelé le *rapport* de (la) similitude.

Il est clair que les isométries sont les similitudes de rapport 1 et qu'une homothétie de rapport λ est une similitude de rapport $|\lambda|$.

(32-1) Proposition.

1) La composition de deux similitudes de rapports h et k est une similitude de rapport hk.

2) Toute similitude est une bijection et l'application réciproque d'une similitude de rapport k est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$.

3) Toute similitude conserve le barycentre.

Démonstration : le point 1) est une conséquence immédiate de la définition. Pour justifier les points 2) et 3), on considère une similitude f de rapport k, on la compose avec une homothétie h de centre arbitraire et de rapport $\frac{1}{k}$, on obtient une similitude g de rapport 1, c'est-à-dire une isométrie. On a donc

$$g = h \circ f$$

et par suite

$$f = h^{-1} \circ g .$$

Nous savons que l'isométrie g et l'homothétie h^{-1} sont des bijections et conservent le barycentre. Il en va donc de même de leur application composée f. Le fait que f^{-1} soit une similitude de rapport $\frac{1}{k}$ coule de source. ◅

Comme l'application identique est une similitude, les points 1) et 2) se résument dans l'assertion qui suit.

(32-2) Proposition : les similitudes planes forment un groupe.

*** Similitudes directes et indirectes**

Étant donnée une similitude f de rapport k, nous avons vu qu'elle se décompose sous la forme :

$$f = h \circ g,$$

où h est une homothétie de rapport k et g est une isométrie. Comme l'homothétie conserve les angles, la similitude $f = h \circ g$:

- conserve les angles si g est un déplacement,
- les change en leurs opposés si g est un antidéplacement.

Ceci justifie l'assertion ci-après et garantit la cohérence de la définition qui la suit.

(32-3) Proposition : toute similitude conserve la mesure de tout angle orienté ou la change en son opposée.

Définition : on dira d'une similitude, qu'elle est *directe* ou *indirecte* suivant qu'elle conserve ou non l'orientation.

(32-4) Proposition : étant donnés deux couples de points distincts (A,B) et (A',B'), il existe une similitude directe (resp. indirecte), unique, qui transforme A en A' et B en B'.

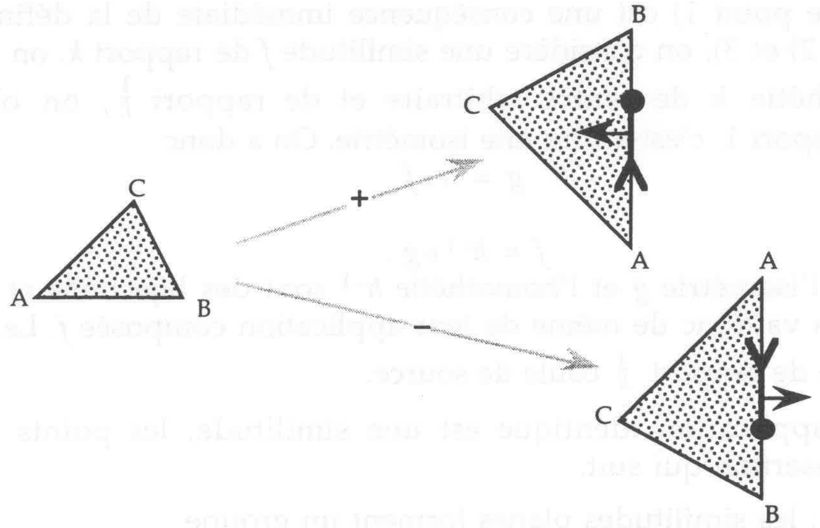
Démonstration : on peu, toujours par composition d'une homothétie et d'un déplacement (resp. un anti-déplacement), définir une similitude f directe (resp. indirecte) qui transforme A en A' et B en B'. Soit f et g deux telles similitudes. L'application :

$$g^{-1} \circ f$$

est une similitude, elle laisse invariants deux points distincts, elle a donc pour rapport 1. Il s'ensuit que $g^{-1} \circ f$ est l'application identique ou une symétrie. ◁

L'énoncé qui suit en est une conséquence immédiate.

(32-5) Proposition : étant donnés deux triangles semblables ABC et A'B'C', il existe une similitude unique qui transforme A en A', B en B' et C en C'. Cette similitude est directe, ou indirecte, suivant que les triangles considérés ont la même orientation ou des orientations opposées.

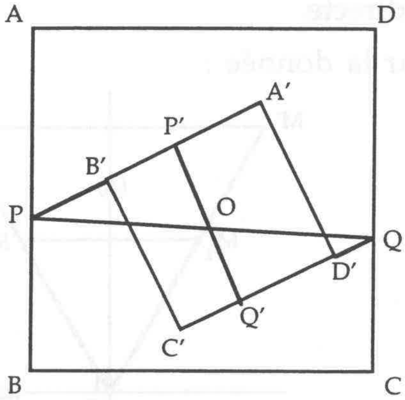


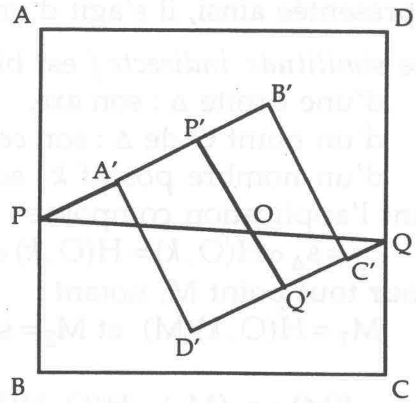
*** Formes réduites des similitudes**

(32-6) Proposition : toute similitude dont le rapport est différent de 1, admet un point invariant, et un seul.

Définition : ce point invariant est appelé le *centre* de (la) similitude.

Démonstration : soit f une similitude de rapport k, $k \neq 1$, si f est une dilatation, alors f est une homothétie et la question est réglée. On suppose donc que f n'est pas une dilatation. Il existe alors une droite, qui n'est pas transformée par f en une droite parallèle. Soit A et B deux points de celle-ci, on considère un parallèlogramme : ABCD – par exemple un carré – et son image par f : A'B'C'D'.





Les côtés homologues se coupent :

- (A B) et (A'B') en P
- (C D) et (C'D') en Q

On désigne par P' et Q' les images respectives de P et Q par f. Les droites (A'B') et (C'D') étant parallèles, si les droites (PQ) et (P'Q') n'étaient pas sécantes, les points P, Q, Q' et P' seraient les sommets d'un parallèlogramme. On aurait alors PQ = P'Q', ce qui contredirait l'hypothèse $k \neq 1$. Les droites (PQ) et (P'Q') se coupent donc en un point O, tel que :

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OQ'}}.$$

Ce qui prouve que ce point coïncide avec son image par f. L'unicité est évidente du fait que $k \neq 1$. ◅

Soit f une similitude de centre O et de rapport k, en composant f avec l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{k}$, on obtient une isométrie qui admet O pour point invariant. Il s'agit donc :

- d'une rotation si f est une similitude directe,
- d'une symétrie si f est une similitude indirecte.

On en déduit immédiatement .

(32-7) Théorème.

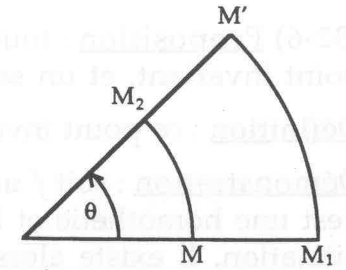
1) Toute similitude directe est le produit d'une rotation et d'une homothétie de **même centre**.

2) Toute similitude indirecte est le produit d'une réflexion et d'une homothétie, dont le centre appartient à l'axe de .

Dans les deux cas il s'agit d'un produit commutatif.

Ainsi une **similitude directe** f est bien définie par la donnée :

- d'un point O : son *centre,*
- d'un nombre positif k : son *rapport,*
- d'un nombre θ défini modulo 2π : son *angle,*



comme étant l'application composée :

$$f = R(O,\theta) \circ H(O,k) = H(O,k) \circ R(O,\theta).$$

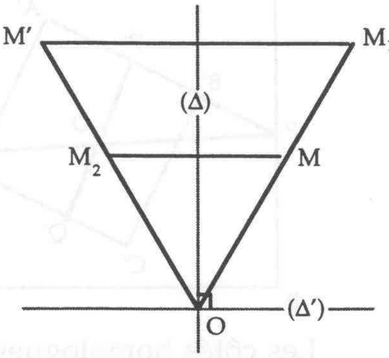
En effet, pour tout point M, on a :
si $M_1 = H(M)$ alors $M' = R(M_1)$ et si $M_2 = R(M)$ alors :

$$M' = H(M_2).$$

Remarque : il est commode de noter la similitude définie par ces données $S(O,k,\theta)$ et de parler de "la similitude de centre O, de rapport k et d'angle θ". Il est clair, en effet, que, présentée ainsi, il s'agit d'une similitude directe.

Une *similitude indirecte* f est bien définie par la donnée :

- d'une droite Δ : son *axe,*
- d'un point O de Δ : son *centre,*
- d'un nombre positif k : son *rapport,*



comme étant l'application composée :

$$f = s_\Delta \circ H(O,k) = H(O,k) \circ s_\Delta.$$

En effet, pour tout point M, notant :

$$M_1 = H(O,k)(M) \text{ et } M_2 = s_\Delta(M)$$

on a :

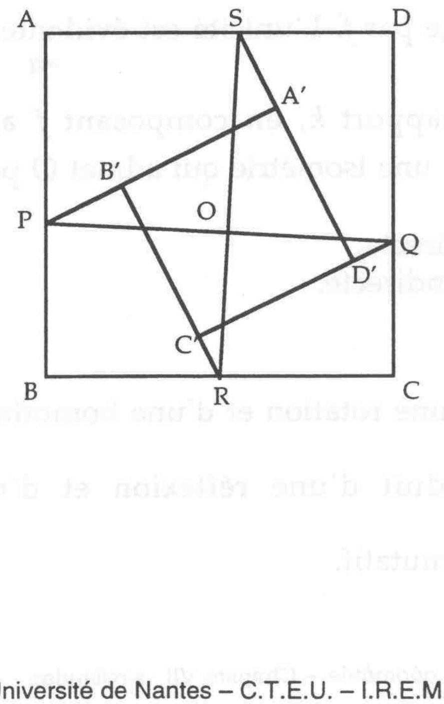
$$f(M) = s_\Delta(M_1) = H(O,k)(M_2)$$

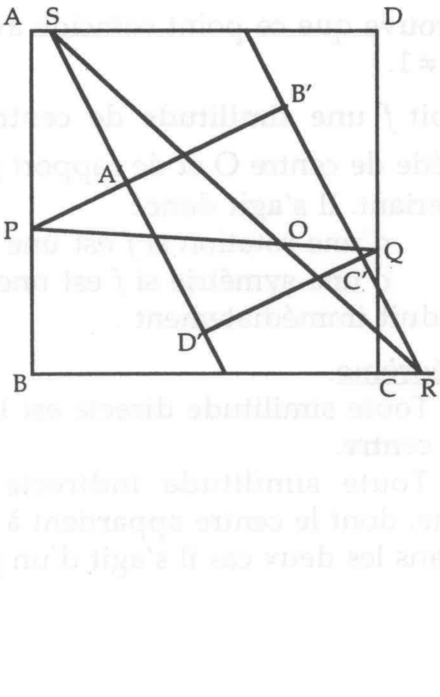
En outre, notant Δ' la droite perpendiculaire en O à Δ,
on a aussi :

$$f = S_{\Delta'} \circ H(O,-k) = H(O,-k) \circ S_{\Delta'}.$$

On parlera alors de "la similitude de centre O, de rapport k et d'axe Δ (ou Δ')". Il est clair, en effet, que, présentée ainsi, il s'agit d'une similitude indirecte.

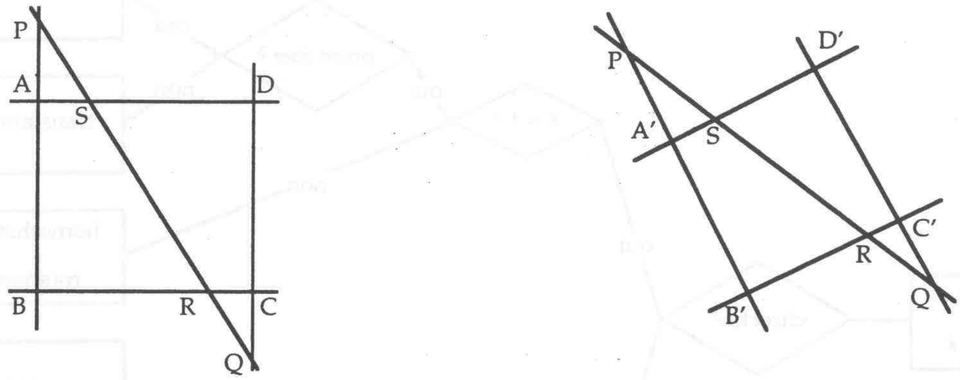
Remarque : la démonstration de la proposition (32-6) fournit en prime un procédé de construction géométrique du centre de similitude. On définit les points R et S de façon analogue à P et Q. Le centre de la similitude est aussi bien sur la droite (RS) que sur la droite (PQ).





Il convient de s'assurer que ces droites sont effectivement sécantes. On sait déjà qu'elles contiennent le centre de la similitude, elles ont donc au moins un point commun. Pour montrer qu'elles ne sont pas confondues, on suppose qu'elles coïncident, nous aurions alors à la fois :

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{PS}}{\overline{PR}} \text{ et } \frac{\overline{PA'}}{\overline{PB'}}=\frac{\overline{PS}}{\overline{PR}}$$

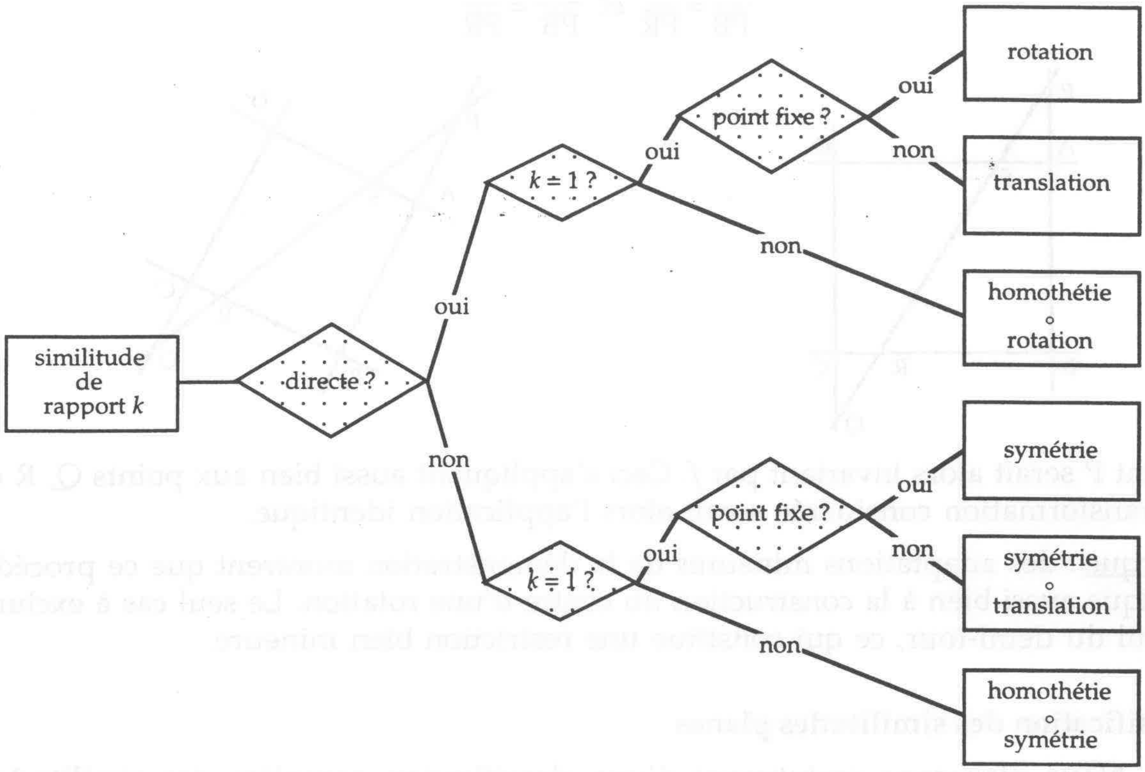


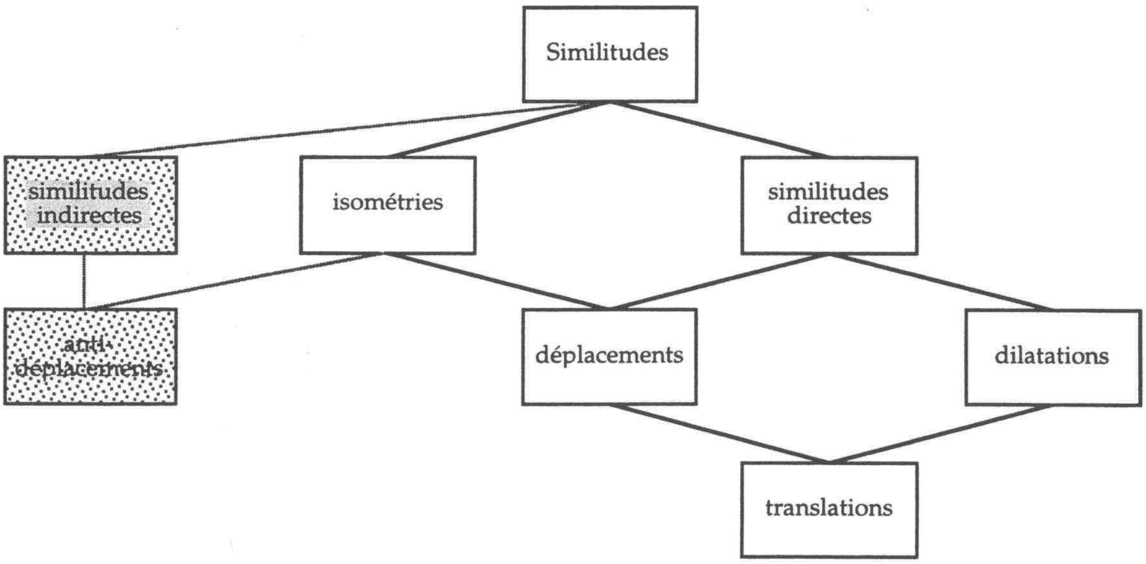
Le point P serait alors invariant par f. Ceci s'appliquant aussi bien aux points Q, R et S, la transformation considérée serait alors l'application identique.

Remarque : des adaptations mineures de la démonstration montrent que ce procédé s'applique aussi bien à la construction du centre d'une rotation. Le seul cas à exclure est celui du demi-tour, ce qui constitue une restriction bien mineure.

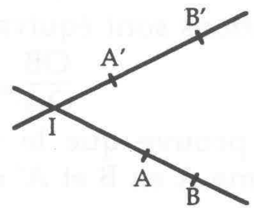
*** Classification des similitudes planes**

Nous disposons maintenant d'une classification complète des similitudes qui est présentée, page suivante, sous forme d'organigramme suivi d'un schéma qui décrit la hiérarchie des groupes de transformations du plan que nous avons rencontrés – sont aussi mentionnés deux ensembles de transformations indirectes, qui eux ne constituent pas des groupes.


similitude
de
rapport k
directe ?
oui
non
$k = 1$?
oui
non
point fixe ?
oui
non
rotation
translation
homothétie
o
rotation
$k = 1$?
oui
non
point fixe ?
oui
non
symétrie
symétrie
o
translation
homothétie
o
symétrie


Similitudes
similitudes
indirectes
isométries
similitudes
directes
anti-
déplacements
déplacements
dilatations
translations

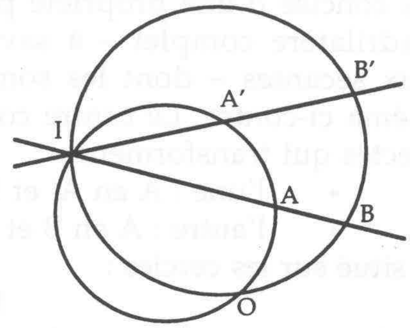
§ 33. Propriété caractéristique du centre de similitude directe



Soit f une similitude directe définie par la donnée de deux couples de points homologues, distincts, (A,A′) et (B,B′). Si les droites (AB) et (A′B′) sont parallèles, f est alors une dilatation et nous n'avons rien à ajouter. Nous supposons donc que les droites (AB) et (A′B′) se coupent au point I.

Nous savons que f admet :

- pour rapport $k = \dfrac{A'B'}{AB}$,
- pour angle $\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$.



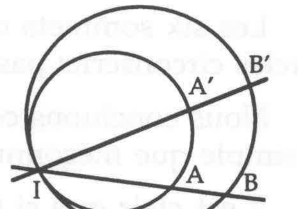
Nous savons aussi qu'elle admet un centre O. Comme ce point vérifie à la fois :

$$(OA, OA') = (OB, OB') = (IA, IA') = \theta \pmod{\pi},$$

il est commun aux cercles circonscrits aux triangles IAA′ et IBB′.

Si le point O coïncide avec I, on a :

$$\frac{\overline{IA'}}{\overline{IA}} = \frac{\overline{IB'}}{\overline{IB}}$$



et par suite :

$$\frac{\overline{IB}}{\overline{IA}} = \frac{\overline{IB'}}{\overline{IA'}}.$$

Les deux cercles se correspondent par une homothétie de centre I, ils sont alors tangents en I.

Nous laissons à chacun le soin de passer en revue les cas particuliers où l'un des points considérés vient coïncider avec I. Dans ces conditions, l'un ou l'autre des cercles sera tangent à l'une des droites (AB) ou (A′B′). On aura alors prouvé la l'assertion qui suit.

(33-1) <u>Théorème</u> : étant donnés deux couples de points (A,A′) et (B,B′), tels que les droites (AB) et (A′B′) soient sécantes en I. La similitude directe qui transforme A en A′ et B en B′, a pour centre le second point commun aux cercles (IAA′) et (IBB′).

<u>Remarque</u> : l'énoncé général s'applique aux cas particuliers, si l'on convient de considérer le point de contact d'un cercle avec une tangente comme un point double, ce qui se justifie parfaitement du point de vue algébrique.

Il nous reste à ajouter une dernière propriété. Elle est de première importance sur le plan pratique car elle fournit la clef pour résoudre de nombreux problèmes – parmi les plus intéressants.

(33-2) <u>Proposition</u> : étant donnés quatre points A, A′, B et B′ qui ne sont pas les sommets d'un parallélogramme, les deux similitudes directes, qui transforment :

- la première A en A′ et B en B′,
- la seconde A en B et A′ en B′,

ont le même centre.

<u>Démonstration</u> : la similitude directe qui transforme A en A′ et B en B′ n'est pas une translation. Elle admet donc un centre. Soit O ce point, il vérifie :

$$\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB} \text{ et } (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'})=(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OB'}) \pmod{2\pi}.$$

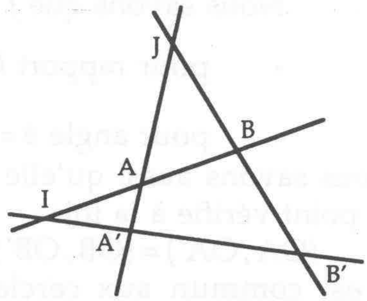
Ces relations sont équivalentes à :

$$\frac{OB}{OA}=\frac{OB'}{OA'} \text{ et } (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB'}) \pmod{2\pi}.$$

Ce qui prouve que le point O est aussi le centre de la similitude directe qui transforme A en B et A′ en B′.

<u>Application</u> : cette propriété donne une démonstration très concise d'une propriété peu banale. On considère un quadrilatère complet – à savoir : quatre droites deux à deux sécantes – dont les sommets sont notés suivant le schéma ci-contre. Le centre commun des deux similitudes directes qui transforment :

- l'une : A en A′ et B en B′ ,
- l'autre : A en B et B′ en A′,



est situé sur les cercles :

IAA′, IBB′, JAB et JA′B′ .

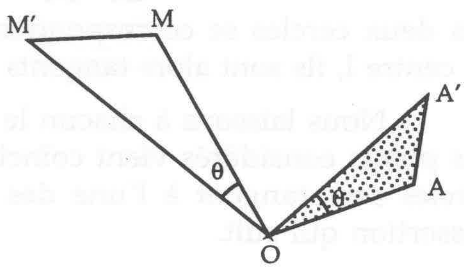
Ainsi, on a prouvé l'assertion qui suit.

Les six sommets d'un quadrilatère complet définissent quatre triangles dont les cercles circonscrits passent par un même point.

Nous concluons ce chapitre par une remarque qui explicite une conséquence aussi simple que méconnue de la proposition (33-2).

Il est clair que si O est un point fixe et si le triangle OMM′ reste directement semblable à lui-même ou, ce qui revient au même, s'il reste directement semblable à un triangle donné OAA′, l'application : $M \mapsto M'$ est alors la similitude :

- de rapport $k=\frac{OA'}{OA}$,
- d'angle $\theta=(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'}) \pmod{2\pi}$.



La réciproque se déduit immédiatement de la proposition (33-2). En effet, si l'on choisit un point arbitraire A, la similitude de centre O qui transforme A en M transforme aussi A′ en M′. Ceci entraîne en, particulier, que les angles :

$$(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MM'}) \text{ et } (\overrightarrow{M'O},\overrightarrow{M'M})$$

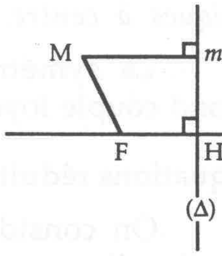
sont indépendants de M car ils restent respectivement égaux à :

$$(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AA'}) \text{ et } (\overrightarrow{A'O},\overrightarrow{A'A}).$$

<u>Remarque</u> : ces dernières propriétés s'expriment très facilement au moyen des nombres complexes.

Chapitre VIII. Les coniques

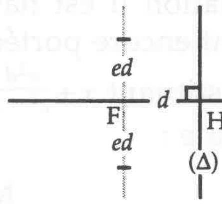
§ 34. Définition commune – équations réduites



Définition : étant donnés une droite Δ, un point F, n'appartenant pas à Δ et un nombre positif e, notant M le point courant du plan et m sa projection orthogonale sur Δ, le lieu des points M, tels que :

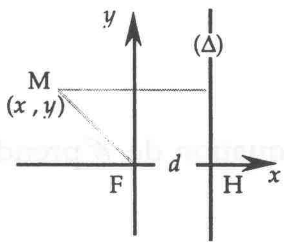
$$\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{M}m} = e.$$

est appelé *conique*, de *directrice* Δ, de *foyer* F et d'*excentricité* e, .



Remarque : l'ensemble, ainsi défini, n'est jamais vide. En effet, notons d la distance de F à Δ, les deux points situés sur la parallèle à la directrice passant par le foyer, à la distance ed de celui-ci appartiennent à ce lieu. Cette distance est appelée le *paramètre* de la conique.

Il est évident que toute conique est symétrique par rapport à la perpendiculaire abaissée de F sur Δ. Pour cette raison on appelle cette droite l'*axe focal*.



Considérons une conique $\mathscr{C}$, soit d la distance du foyer F à la directrice Δ. On rapporte le plan à un repère orthonormé d'origine F, tel que Δ admette pour équation $x = d$. Le point M, de coordonnées (x, y), appartient à $\mathscr{C}$ si, et seulement si :

$$x^2 + y^2 - e^2(x-d)^2 = \mathrm{MF}^2 - e^2\mathrm{M}m^2 = 0.$$

Si y_0 est un nombre donné, les abscisses des points de $\mathscr{C}$, d'ordonnée y_0, sont les racines de l'équation suivante :

$$(e^2-1)x^2 - 2e^2dx - y_0^2 + e^2d^2 = 0.$$

On voit ainsi appraître une première distinction.

- Si $e = 1$, cette équation est du premier degré, elle admet toujours une racine, et une seule. Notons, en passant, que $\mathscr{C}$ rencontre l'axe des abscisses au milieu de FH, où H désigne la projection de F sur Δ.
- Si $e \neq 1$, la demi-somme des racines éventuelles étant :

  $$\gamma = \frac{e^2d}{e^2-1},$$

  reste indépendante de y_0. En conséquence si la droite d'équation $y = y_0$, rencontre $\mathscr{C}$, c'est en deux points symétriques par rapport à la droite d'équation $x = \gamma$. Dans ces conditions, $\mathscr{C}$ admet le point de coordonnées $(\gamma, 0)$ pour centre de symétrie. Notons encore que, pour $y_0 = 0$, l'équation précédente devient :

  $$(e^2-1)x^2 - 2e^2dx + e^2d^2 = 0.$$

  Elle admet toujours deux racines :

  $$ed\frac{e-1}{e^2-1} = \frac{ed}{e+1} \quad \text{et} \quad ed\frac{e+1}{e^2-1} = \frac{ed}{e-1}.$$

Ainsi, toute conique de ce type rencontre son axe focal en deux points qu'on appelle *sommets.*

(34-1) Proposition.

1) Si une conique admet 1 pour excentricité, toute droite parallèle à son axe focal la rencontre en un point.

2) Toute conique dont l'excentricité est différente de 1, admet un centre de symétrie.

Définition : toute conique d'excentricité 1 s'appelle *parabole*. Les autres sont dites *coniques à centre.*

La symétrie des coniques à centre a pour conséquence l'existence d'un second couple foyer-directrice associés.

*** Equations réduites des coniques à centre**

On considère une conique $\mathscr{C}$ d'excentricité $e, e \neq 1$. Pour en exprimer une équation il est naturel de choisir pour origine le centre de symétrie, les abscisses étant encore portées sur l'axe focal. L'équation, dans ce nouveau repère, s'obtient en substituant $x+\frac{e^2d}{e^2-1}$ à x. Dans l'expression de $\mathrm{MF}^2 - e^2\mathrm{M}m^2$, déjà obtenue, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\mathrm{MF}^2 - e^2\mathrm{M}m^2 &= \left(x+\frac{e^2d}{e^2-1}\right)^2 + y^2 - e^2\left(x+\frac{e^2d}{e^2-1}-d\right)^2 \\ &= \left(x+\frac{e^2d}{e^2-1}\right)^2 + y^2 - e^2\left(x+\frac{d}{e^2-1}\right)^2 \\ &= x^2(1-e^2) + y^2 + \frac{e^2d^2(e^2-1)}{(e^2-1)^2} \\ &= x^2(1-e^2) + y^2 + \frac{e^2d^2}{e^2-1}\end{aligned}$$

L'équation de $\mathscr{C}$ prend ainsi la forme :

$$\frac{(1-e^2)^2}{e^2d^2}x^2 + \frac{1-e^2}{e^2d^2}y^2 = 1.$$

Il est usuel de poser les conventions suivantes. On note :

- O le centre de symétrie,
- A et A' les sommets situées sur l'axe focal et l'on pose $a = \mathrm{OA} = \mathrm{OA}'$
- F et F' les foyers et l'on pose $c = \mathrm{OF} = \mathrm{OF}'$.

On remarque, en passant, qu'on a $c^2 = \gamma^2 = \frac{e^4d^2}{(e^2-1)^2}$.

En posant $y = 0$, dans l'équation ci-dessus, on obtient :

$$a^2 = \frac{e^2d^2}{(1-e^2)^2}.$$

On retient qu'on a toujours :

$$e = \frac{c}{a}.$$

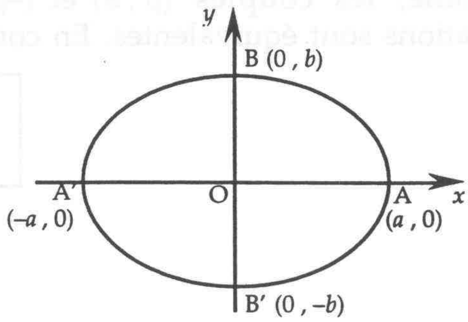
Il convient alors de distinguer deux cas :

- Si $e<1$, le coefficient de y étant positif, $\mathscr{C}$ coupe l'axe des ordonnées en deux points, notés B et B', distants du centre de :
$$b=\frac{e\,d}{\sqrt{1-e^2}}$$
L'équation de $\mathscr{C}$ prend alors la forme :
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$
La courbe ainsi décrite est appelée *ellipse*. On note que :
$$a^2-b^2=\frac{e^4d^2}{(1-e^2)^2}=\left(\frac{e^2d}{1-e^2}\right)^2=c^2.$$
- Si $e>1$, le coefficient de y étant négatif, $\mathscr{C}$ ne rencontre pas l'axe des ordonnées. On pose alors :
$$b=\frac{e\,d}{\sqrt{e^2-1}}$$
L'équation de $\mathscr{C}$ prend la forme :
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$
La courbe ainsi décrite est appelée *hyperbole*. On retient que :
$$a^2-b^2=c^2.$$

Le débutant peut se faire une idée assez précise de l'allure des ellipses et des hyperboles par une étude sommaire des courbes d'équations :
$$y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \quad \text{et} \quad y=b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1},$$
qu'on complète par la symétrie d'axe (Ox). La parabole, quant à elle, est connue depuis bien longtemps.

L'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ possède deux axes et quatre sommets – les points de coordonnées :

A : $(a,0)$, A' : $(-a,0)$, B : $(0,b)$, B' : $(0,-b)$.

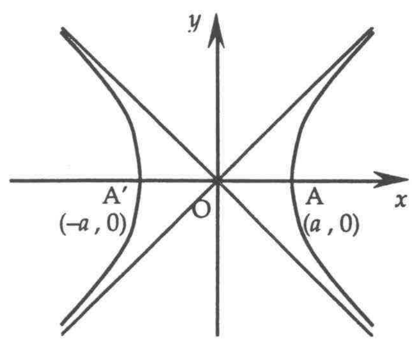


__Remarque__ : pour $a=b$, cette équation définit le cercle de centre O et de rayon a. On convient désormais de considérer les cercles comme étant les coniques d'excentricité nulle. Dans ce cas, les foyer se confondent avec le centre et la directrice n'existe pas.

L'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ possède deux axes et deux sommets – les points de coordonnées :

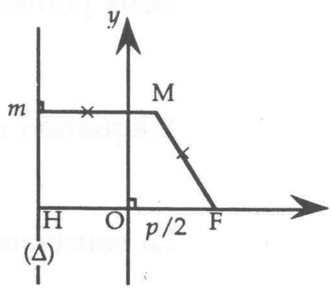
A : $(a,0)$, A' : $(-a,0)$.

Elle admet pour asymptotes les deux droites d'équations :
$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \quad \text{et} \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0.$$



*** Équation réduite de la parabole**

Étant donnée une parabole $\mathscr{P}$ de foyer F, de directrice Δ et de paramètre p, pour en exprimer l'équation il est habituel de choisir le repère orthonormé tel que le foyer ait pour coordonnées $(0, \frac{p}{2})$ et la directrice admette pour équation $x = -\frac{p}{2}$. Dans ces conditions, on a :



$$MF^2 - Mm^2 = (x - \frac{p}{2})^2 + y^2 - (x + \frac{p}{2})^2 = y^2 - 2px.$$

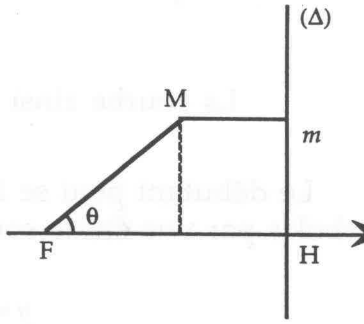
Le point M, de coordonnées (x, y) appartient à $\mathscr{P}$ si, est seulement si :

$$y^2 - 2px = 0.$$

En échangeant abscisses et ordonnées, on retrouve une courbe familière depuis la classe de seconde.

*** Équation d'une conique en coordonnées polaires**

On reprend les notations du début. On choisit F pour origine et pour axe polaire la perpendiculaire à Δ, orientée de F vers cette dernière. On note le paramètre $p = ed$, où d représente la distance de F à Δ. On a :



$$MF = |\rho| \text{ et } Mm = \left|\frac{p}{e} - \rho\cos\theta\right|.$$

Le point M appartient à $\mathscr{C}$, si, et seulement si, on a :

$$\rho = \pm e\left(\frac{p}{e} - \rho\cos\theta\right)$$

Comme p est non nul, cette condition s'exprime aussi :

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \text{ ou } \rho = \frac{-p}{1 - e\cos\theta}$$

Comme, les couples (ρ, θ) et $(-\rho, \theta + \pi)$ définissent le même point, ces deux équations sont équivalentes. En conséquence, $\mathscr{C}$ admet pour équation polaire :

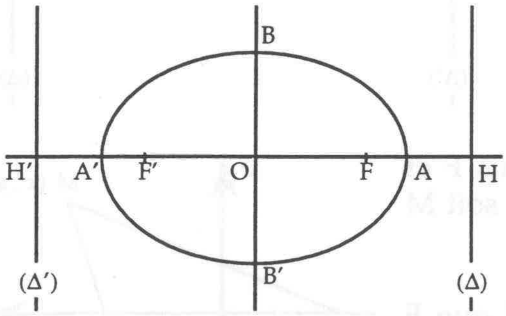
$$\boxed{\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta}}$$

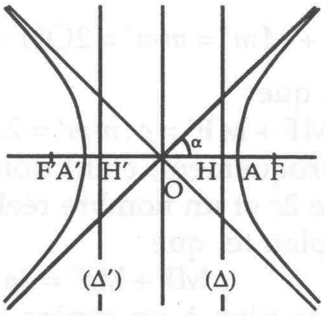
Aide mémoire

Ellipse	Hyperbole
$a > b > 0$	$a > 0\ ,\ b > 0$
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
$c^2 = a^2 - b^2$	$c^2 = a^2 + b^2$

$$e = \frac{c}{a}$$

$e < 1$	$e > 1$





$$AA' = 2a$$

longueur de l'axe focal

$$CC' = 2c$$

distance focale

$BB' = 2b$

longueur du "petit axe"

$\tan\alpha = \frac{b}{a}\ ,\ \cos\alpha = \frac{a}{c}\ ,\ \sin\alpha = \frac{b}{c}$

$$OH = OH' = \frac{a^2}{c} = \frac{a}{e}\ ,\quad d = HF = H'F' = \frac{b^2}{c}$$

$$p = \frac{b^2}{a} = ed$$

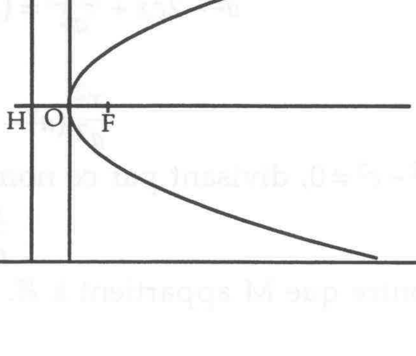
$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

Parabole

$p > 0$

$y^2 = 2px$

$OF = OH = \dfrac{p}{2}$



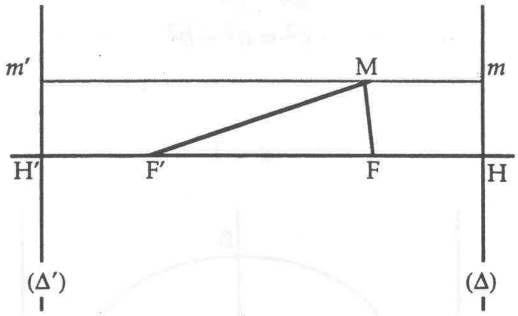
§ 35. Caractérisations bifocales des coniques à centre

On conserve les notations de la section précédente pour désigner les divers éléments attachés à une conique

*** Cas de l'ellipse**

On considère une ellipse $\mathscr{E}$, soit M l'un des ses points, m et m' les points où la parallèle à l'axe focal coupe les directrices Δ et Δ'. On a :

$$\text{MF} = e\text{M}m \quad \text{et} \quad \text{MF}' = e\text{M}m'.$$



Le point M étant, dans ce cas, situé entre m et m', on a :

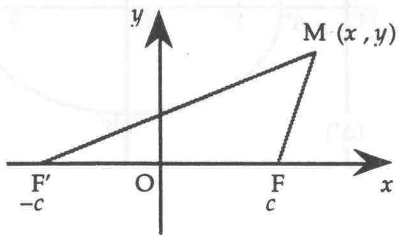
$$\text{M}m + \text{M}m' = mm' = 2\text{OH} = 2\frac{a}{e}.$$

On en déduit que :

$$\text{MF} + \text{MF}' = e\,.\,mm' = 2a.$$

Réciproquement, étant donnés deux points F et F', distants de $2c$ et un nombre réel a tel que $a > c$, soit M un point du plan tel que

$$\text{MF} + \text{MF}' = 2a.$$



On rapporte le plan à un repère orthonormé tel que F et F' aient pour coordonnées respectives :

$$(c\,,0) \quad \text{et} \quad (-c\,,0)$$

On a :

$$(1) \qquad \begin{cases} \text{MF}^2 = (x-c)^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 2cx + c^2 \\ \text{MF}'^2 = (x+c)^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2cx + c^2 \end{cases}.$$

On en déduit que :

$$(\text{MF} + \text{MF}')(\text{MF} - \text{MF}') = \text{MF}^2 - \text{MF}'^2 = -4cx,$$

puis, tenant compte de l'hypothèse posée :

$$\begin{cases} \text{MF} + \text{MF}' = 2a \\ \text{MF} - \text{MF}' = -2\,\dfrac{cx}{a} \end{cases}$$

et enfin :

$$\text{MF} = a - \frac{cx}{a} \quad \text{et} \quad \text{MF}' = a + \frac{cx}{a}\,.$$

On tient compte des relations (1), il vient :

$$a^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2} = (a - \frac{cx}{a})^2 = x^2 + y^2 - 2cx + c^2,$$

puis :

$$\frac{x^2}{a^2}(a^2 - c^2) + y^2 = a^2 - c^2.$$

Comme $a^2 - c^2 \neq 0$, divisant par ce nombre, noté b^2, on obtient :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ce qui montre que M appartient à $\mathscr{E}$. On a donc démontré le théorème essentiel qui suit.

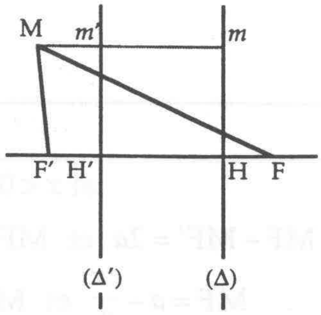
(35-1) <u>Théorème</u> : l'ellipse de foyers F et F', d'axe focal AA' = $2a$ est le lieu des points M tels que :

$$\mathrm{MF} + \mathrm{MF}' = 2a.$$

*** Cas de l'hyperbole**

On considère une hyperbole $\mathscr{H}$, soit M un des ses points, m et m' les points où la parallèle à l'axe focal coupe les directrices Δ et Δ'. On a :

$$\mathrm{MF} = e\mathrm{M}m \quad \text{et} \quad \mathrm{MF}' = e\mathrm{M}m'.$$



Le point M étant, dans ce cas, extérieur au segment mm', on a :

$$|\mathrm{M}m - \mathrm{M}m'| = mm' = 2\mathrm{OH} = 2\frac{a}{e}.$$

On en déduit que :

$$|\mathrm{MF} - \mathrm{MF}'| = e \, . \, mm' = 2a.$$

Réciproquement, étant donnés deux points F et F', distants de $2c$ et un nombre réel a tel que $0 < a < c$, on considère l'ensemble $\mathscr{H}$, des points M tels que :

$$|\mathrm{MF} - \mathrm{MF}'| = 2a.$$

Il est clair que $\mathscr{H}$ est symétrique par rapport à la médiatrice de FF', on peut donc, provisoirement, se limiter à l'ensemble $\mathscr{H}^-$, des points M tels que :

$$\mathrm{MF} - \mathrm{MF}' = 2a.$$

Soit M un point de $\mathscr{H}^-$, les relations (1) étant indépendantes de l'hypothèse posée, on a encore :

$$(\mathrm{MF} + \mathrm{MF}')(\mathrm{MF} - \mathrm{MF}') = -4cx.$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{cases} \mathrm{MF} - \mathrm{MF}' = 2a \\ \mathrm{MF} + \mathrm{MF}' = -2\dfrac{cx}{a} \end{cases},$$

puis :

$$\mathrm{MF} = a + \frac{cx}{a} \quad \text{et} \quad \mathrm{MF}' = -a - \frac{cx}{a}.$$

Comme précédemment, en reportant dans (1), on obtient la même relation :

$$\frac{x^2}{a^2}(a^2 - c^2) + y^2 = a^2 - c^2$$

qui, dans ce cas, compte tenu du fait que $b^2 = c^2 - a^2$, se traduit :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ce qui montre que M appartient à $\mathscr{H}$. Plus précisement à la branche de $\mathscr{H}$ entourant le foyer F'. Tenant compte de la symétrie de $\mathscr{H}$ par rapport à la médiatrice de FF', c'est-à-dire l'axe des ordonnées, il est légitime de conclure.

(35-2) <u>Théorème</u> : l'hyperbole de foyers F et F', de grand axe AA' = $2a$, est le lieu des points M tels que :

$$|\mathrm{MF} - \mathrm{MF}'| = 2a.$$

<u>Remarque</u> : on retiendra des démonstrations précédentes les expressions les longueurs des segments MF et MF', (appelés *rayons vecteurs*). Convenant que F est le foyer d'abscisse positive, si M est un point d'abscisse x, on a :

<table>
<tr><td colspan="2">Pour l'ellipse :</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\mathrm{MF}+\mathrm{MF}'=2a$ et $\mathrm{MF}^2-\mathrm{MF}'^2=-4cx$
$\mathrm{MF}=a-\dfrac{cx}{a}$ et $\mathrm{MF}'=a+\dfrac{cx}{a}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pour l'hyperbole</td></tr>
<tr><td>si $x<0$
$\mathrm{MF}-\mathrm{MF}'=2a$ et $\mathrm{MF}^2-\mathrm{MF}'^2=-4cx$,
$\mathrm{MF}=a-\dfrac{cx}{a}$ et $\mathrm{MF}'=-a-\dfrac{cx}{a}$</td><td>si $x>0$
$\mathrm{MF}-\mathrm{MF}'=-2a$ et $\mathrm{MF}^2-\mathrm{MF}'^2=-4cx$,
$\mathrm{MF}=-a+\dfrac{cx}{a}$ et $\mathrm{MF}'=a+\dfrac{cx}{a}$</td></tr>
</table>

On peut retenir que, dans tous les cas les rayons vecteurs s'expriment :

$$\mathrm{MF}=\left|a-\frac{cx}{a}\right| \text{ et } \mathrm{MF}'=\left|a+\frac{cx}{a}\right|.$$

<u>Remarque</u> : l'ellipse de foyers F et F', d'axe focal de longueur $2a$, partage le plan en deux régions définies par les inéquations :

$$\mathrm{MF}+\mathrm{MF}'<2a \text{ et } \mathrm{MF}+\mathrm{MF}'>2a.$$

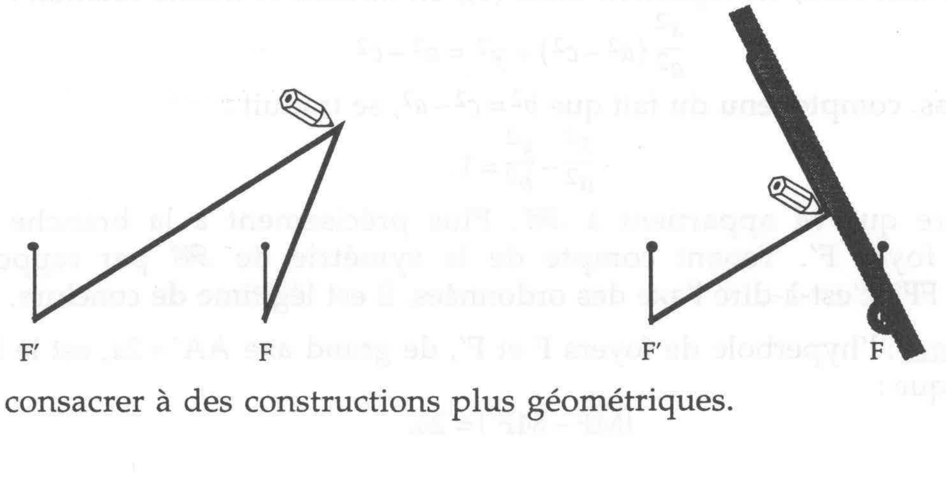
La première contient les foyers, c'est l'*intérieur* de l'ellipse.

L'hyperbole de foyers F et F', d'axe focal de longueur $2a$, partage le plan en trois régions définies par les inéquations :

$$\mathrm{MF}-\mathrm{MF}'>2a \ , \ \mathrm{MF}'-\mathrm{MF}>2a \text{ et } |\mathrm{MF}-\mathrm{MF}'|<2a.$$

Chacune des deux premières contient un foyer, leur réunion constitue l'*intérieur* de l'hyperbole ([1]).

Nous laissons à chacun le soin d'exercer son imagination pour justifier le tracé d'ellipses dit "des jardiniers", ainsi que le tracé de portions d'hyperboles, sommairement suggérés par les schémas ci-dessous :



pour nous consacrer à des constructions plus géométriques.

[1] Cette définition est , a priori, moins naturelle que pour l'ellipse, en fait, il n'en est rien si l'on admet que l'extérieur d'une conique est formé des points d'où il est possible de lui mener deux tangentes ...

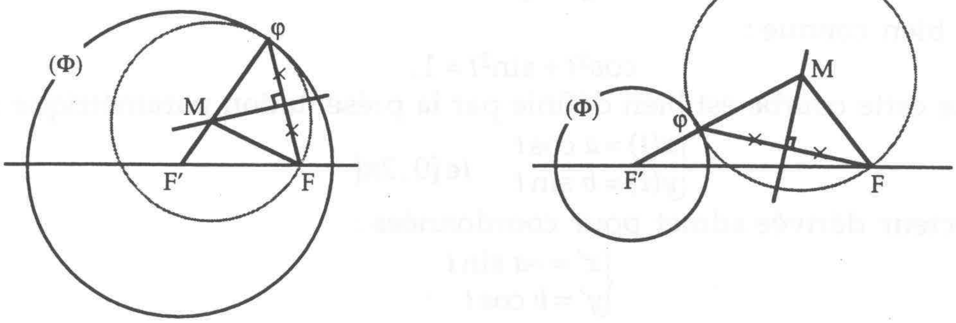
(35-3) Corollaire : étant donnés deux points F et F′ et un cercle Φ ce centre F et de rayon $2a$, ne passant pas par F′, le lieu des centres des cercles tangents à Φ et passant par F′ est la conique de foyers F et F′, d'axe focal $2a$. Il s'agit :

- d'une ellipse si F′ est intérieur à Φ,
- d'une hyperbole si F′ est extérieur à Φ,

Démonstration : exercice.

Définition : Φ est appelé le *cercle directeur associé* au foyer F.

On en déduit une construction point par point des ellipses et hyperboles données par leurs foyers et la longueur de l'axe focal (i.e. $2a$).



§ 36 Tangentes aux coniques

Pour justifier l'existence des tangentes aux coniques, on montre, qu'au voisinage de chacun de ses points, une telle courbe admet un paramétrage dont le vecteur dérivée est non nul.

*** Paramétrage des coniques**

Considérons une ellipse. En rapprochant son équation réduite :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

de la relation bien connue :

$$\cos^2 t+\sin^2 t=1,$$

on montre que cette courbe est bien définie par la présentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t)=a\cos t \\ y(t)=b\sin t \end{cases} \quad t\in[0,2\pi[$$

Comme le vecteur dérivée admet pour coordonnées :

$$\begin{cases} x'=-a\sin t \\ y'=b\cos t \end{cases},$$

il ne s'annulle jamais. Cette courbe admet donc une tangente en chacun de ses points.

Pour une hyperbole d'équation réduite :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

on se souvient que :

$$\mathrm{ch}^2 t-\mathrm{sh}^2 t=1,$$

Les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t)=a\,\mathrm{ch}\,t \\ y(t)=b\,\mathrm{sh}\,t \end{cases} \quad t\in\mathbf{R}.\ (^1)$$

définissent alors la branche de la courbe située dans le demi-plan où l'abscisse est positive. L'autre branche est obtenue en changeant x en son opposé. Ici encore le vecteur dérivée ne s'annule jamais. Il existe donc aussi une tangente en tout point.

Pour la parabole, il suffit d'écrire son équation sous la forme :

$$x=\frac{y^2}{2p},$$

ce qui définit un paramétrage dont le vecteur dérivé ne s'annulle jamais.

---

1 Au niveau du lycée, il est possible de paramétrer l'hyperbole en partant de la relation :

$$\frac{1}{\cos^2 t}-\tan^2 t=1$$

qui conduit aux équations : $x=\frac{a}{\cos^2 t}$, $y=b\tan^2 t$. Il est aussi possible de paramétrer ces courbes au moyen de fractions rationnelles :

- pour l'ellipse, on pense que $\cos t=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin t=\frac{2t}{1+t^2}$,
- pour l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, on on pose : $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=t$, on a $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{1}{t}$ …

*** Dérivée d'un rayon vecteur**

Considérons, de façon très générale, une courbe paramétrée :

$$t \longmapsto \mathrm{M}(t),$$

définie sur un certain intervalle et un point donné F. On convient de poser :

$$\overrightarrow{\mathrm{FM}} = r(t)\,\vec{u}(t) \quad \text{où} \quad r(t) = \mathrm{FM}.$$

le vecteur $\vec{u}(t)$ est donc unitaire. On désigne par $\vec{\mathrm{T}}$ le vecteur tangent à la courbe en $\mathrm{M} = \mathrm{M}(t)$. On a toujours :

$$\vec{\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{\mathrm{FM}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[r(t)\,\vec{u}(t)] = r'(t)\,\vec{u}(t) + r(t)\,\vec{u}\,'(t).$$

Comme $\|\vec{u}(t)\|^2 = 1$, on a $\vec{u}(t)\,.\,\vec{u}\,'(t) = 0$. Il s'ensuit que :

$$r'(t) = \vec{\mathrm{T}}(t)\,.\,\vec{u}(t)$$

*** Propriétés fondamentales**

Si M décrit une ellipse de foyers F et G, on note :

$$\overrightarrow{\mathrm{FM}} = r(t)\,\vec{u}(t) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{GM}} = s(t)\,\vec{v}\,(t)$$

Nous avons montré que :

$$r'(t) + s'(t) = \vec{\mathrm{T}}\,.\,(\vec{u}(t) + \vec{v}(t))$$

Nous savons que :

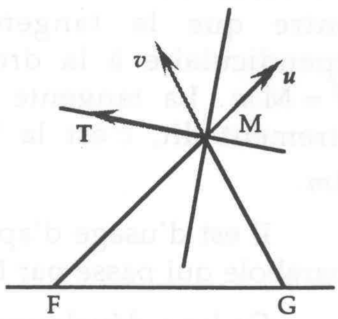
$$\mathrm{FM} + \mathrm{GM} = r(t) + s(t) = 2a.$$

Il s'ensuit que :

$$r'(t) + s'(t) = 0.$$

On en déduit l'égalité :

$$\vec{\mathrm{T}}\,.\,(\vec{u}(t) + \vec{v}(t)) = 0$$



qui montre que les vecteurs $\vec{\mathrm{T}}$ et $\vec{u}(t) + \vec{v}\,(t)$ sont orthogonaux. Or, $\vec{u}(t) + \vec{v}(t)$ est un vecteur directeur de la bissectrice intérieure de l'angle $\mathrm{F\hat{M}G}$, $\vec{\mathrm{T}}$ est donc un vecteur directeur de la bissectrice extérieure.

Si M décrit une hyperbole de foyers F et G, avec les mêmes notations, t appartient toujours un intervalle sur lequel on a :

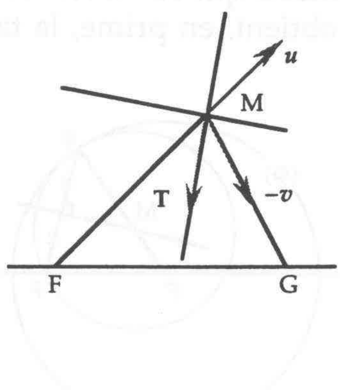
$$\text{soit } \mathrm{FM} - \mathrm{GM} = r(t) - s(t) = 2a \quad \text{soit } \mathrm{FM} - \mathrm{GM} = r(t) - s(t) = -2a.$$

Il s'ensuit que :

$$r'(t) - s'(t) = 0.$$

on en déduit l'égalité :

$$\vec{\mathrm{T}}\,.\,(\vec{u}(t) - \vec{v}(t)) = 0$$



qui montre que les vecteurs $\vec{\mathrm{T}}$ et $\vec{u}(t) + \vec{v}(t)$ sont orthogonaux. Or, $\vec{u}(t) - \vec{v}(t)$ est un vecteur directeur de la bissectrice extérieure de l'angle $\mathrm{F\hat{M}G}$, $\vec{\mathrm{T}}$ est alors un vecteur directeur de la bissectrice intérieure.

Si maintenant M décrit une parabole, on note m sa projection sur la directrice, $\vec{T}$ le vecteur dérivée de M, il vient :

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{FM}^2 = 2\overrightarrow{\mathrm{FM}}\,.\,\frac{d}{dt}\,\overrightarrow{\mathrm{FM}} = 2\overrightarrow{\mathrm{FM}}\,.\,\vec{T}.$$

Par ailleurs, on obtient :

$$\frac{d}{dt}\,\overrightarrow{m\mathrm{M}}^2 = 2\overrightarrow{m\mathrm{M}}\,.\,\frac{d}{dt}\,\overrightarrow{m\mathrm{M}} = 2\overrightarrow{m\mathrm{M}}\,.\,\frac{d}{dt}\,(\overrightarrow{\mathrm{FM}} - \overrightarrow{\mathrm{F}m}) = 2\overrightarrow{m\mathrm{M}}\,(\vec{T} - \frac{d}{dt}\,\overrightarrow{\mathrm{F}m})$$

Nous savons que :

$$\mathrm{FM}^2 = m\mathrm{M}^2$$

On en déduit :

$$\overrightarrow{\mathrm{FM}}\,.\,\vec{T} = \overrightarrow{m\mathrm{M}}\,(\vec{T} - \frac{d}{dt}\,\overrightarrow{\mathrm{F}m})$$

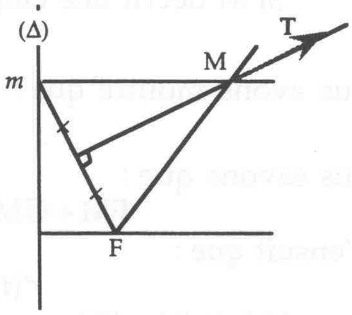
Ce qui donne :

$$\overrightarrow{\mathrm{F}m}\,.\,\vec{T} = (\overrightarrow{\mathrm{FM}} - \overrightarrow{m\mathrm{M}}) = \overrightarrow{m\mathrm{M}}\,.\,\frac{d}{dt}\,\overrightarrow{\mathrm{F}m}.$$

Comme m décrit la directrice, le vecteur dérivée de m appartient à la direction de cette droite. Il reste donc orthogonal à $\overrightarrow{m\mathrm{M}}$ ce qui prouve que :

$$\overrightarrow{\mathrm{F}m}\,.\,\vec{T} = 0.$$

Le vecteur dérivée de M étant non nul, cette égalité montre que la tangente en M à la parabole est perpendiculaire à la droite (Fm). Or, nous savons que MF = Mm. La tangente est donc la médiatrice de Fm. Autrement dit, c'est la bissectrice intérieure de l'angle $\mathrm{F}\hat{\mathrm{M}}m$.

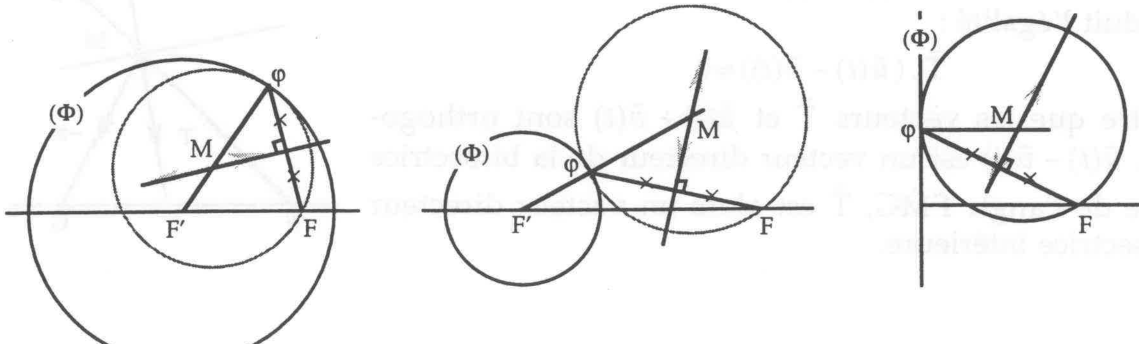


Il est d'usage d'appeler aussi *rayon vecteur* du point M, la parallèle à l'axe de la parabole qui passe par M, ici (Mm).

Ce long développement se résume alors de façon lapidaire.

(36-1) Théorème : toute tangente à une conique est bissectrice des rayons vecteurs de son point de contact.

Ce résultat montre qu'en construisant un point d'une conique par la méthode qui se déduit du corollaire 35-3, ou de façon naturelle pour une parabole, on obtient, en prime, la tangente.



§ 37 Quelques propriétés particulières

*** L'ellipse image affine d'un cercle**

Les propriétés particulières à l'ellipse sont, pour l'essentiel, liées au fait qu'elle est l'image du cercle par des tranformations affines. Il y aurait beaucoup à dire sur le sujet, contentons nous, ici, du minimum qu'on attend d'un élève de lycée.

Considérons une ellipse $\mathcal{E}$, de centre O et dont les axes mesurent $2a$ et $2b$, ou $a \geq b$, elle admet pour équation paramétriques :

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = b\sin\varphi \end{cases}$$

L'affinité orthogonale d'axe Ox, de rapport $\frac{a}{b}$ (ou $-\frac{a}{b}$) la transforme en la courbe d'équations :

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = a\sin\varphi \end{cases}$$

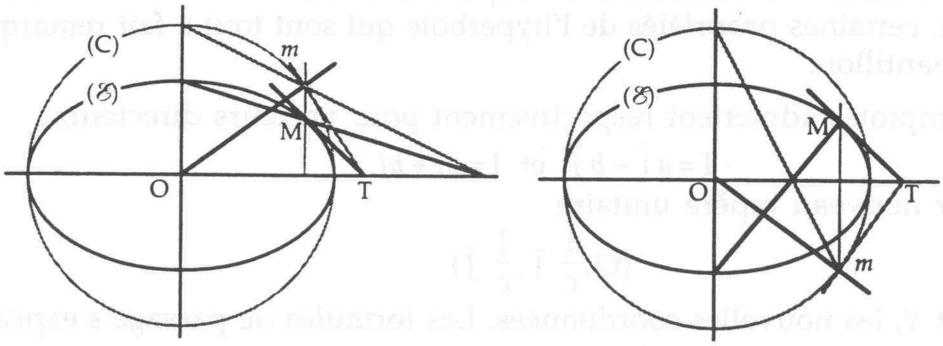
On reconnaît le cercle de centre O qui passe par les sommets de l'axe focal.

Définition : ce cercle est appelé le *cercle principal* de l'ellipse.

Remarque : dans ce contexte, le paramètre φ est appelé *anomalie excentrique* du point correspondant. (1)

(37-1) Théorème : une ellipse dont dont les axes mesurent $2a$ et $2b$ ($a > b$) est l'image de son cercle principal par l'affinité orthogonale de rapport $\pm\frac{b}{a}$, par rapport à l'axe focal.

Cette propriété est aussi importante sur le plan pratique que théorique. Elle fournit, entre autres, une construction commode des points d'une ellipse, donnée par ses sommets. On en déduit une construction des tangentes.



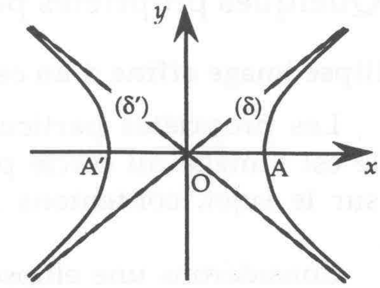
Remarque : l'ellipse considérée est aussi l'image du cercle de centre O et de rayon b par l'affinité de rapport $\pm\frac{a}{b}$, par rapport à l'axe non focal.

1 L'usage de ce terme est isssu de l'astronomie.

*** L'hyperbole et ses asymptotes**

Le plan étant rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère l'hyperbole d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

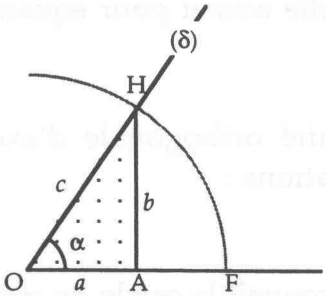


Ses asymptotes sont les deux droites, d'équations :

$$\delta : \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \text{ et } \delta' : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0.$$

On choisit l'une d'elles, par exemple δ. On note H son point qui se projette orthogonalement sur l'axe focal au sommet A. Comme on a :

$$\tan\alpha = \frac{b}{a}$$



il est immédiat que :

$$AH = a \tan\alpha = b.$$

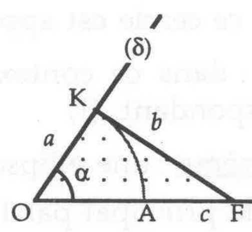
On en déduit que :

$$OH^2 = a^2 + b^2 = c^2.$$

On a donc :

$$AH = b \text{ et } OH = OF = c,$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{c} = \frac{1}{e} \text{ et } \sin\alpha = \frac{b}{c}.$$



On pourra encore noter que si K désigne la projection de F sur δ, le triangle OFK admet, lui aussi, pour côtés a, b, c.

Remarque : les asymptotes sont perpendicualires si, et seulement si, $a = b$, l'excentricité est alors $\sqrt{2}$. Une telle hyperbole est dite *équilatére*. Il est facile de montrer que toute hyperbole est l'image, par affinité d'une hyperbole équilatère.

En abandonnant la contrainte du repère orthonormé on met en évidence, de façon simple, certaines propriétés de l'hyperbole qui sont tout à fait remarquables en voici un échantillon.

Les asymptotes admettent respectivement pour vecteurs directeurs :

$$\vec{I} = a\vec{i} - b\vec{j} \text{ et } \vec{J} = ai + bj.$$

On choisit pour nouveau repère unitaire

$$(O, \frac{1}{c}\vec{I}, \frac{1}{c}\vec{J})$$

et l'on note X et Y, les nouvelles coordonnées. Les formules de passage s'expriment :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{c}(aX + aY) \\ y = \frac{1}{c}(-bX + bY) \end{cases}$$

L'équation de l'hyperbole devient :

$$XY = \frac{c^2}{4}.$$

On obtient de cette façon toutes les équations de la forme $xy = k$ où $k > 0$. En partant des hyperboles d'axe focal (Oy), on obtiendrait l'équivalent, avec k négatif

Réciproquement, considérons la courbe d'équation $XY = k$, dans un repère donné $(O, \bar{I}, \bar{J})$, tel que $\|\bar{I}\| = \|\bar{J}\|$. On choisit pour nouveau repère $(O, \bar{i}, \bar{j})$, tel que :

$$\bar{i} = \bar{I} + \bar{J} \text{ et } \bar{j} = \bar{I} - \bar{J}.$$

On note que les nouveaux axes de coordonnées sont perpendiculaires. Les formules de passage s'exprimant :

$$\begin{cases} x = X + Y \\ y = X - Y \end{cases}$$

l'équation devient :

$$(x+y)(x-y) = k$$

ou, ce qui est équivalent :

$$x^2 - y^2 = k.$$

On rend le repère orthonormé, on change éventuellement son orentation, on obtient l'équation réduite d'une hyperbole.

(37-2) Proposition : étant donné un repère, les hyperboles, admettant pour assymptotes les axes de coordonnées, sont toutes les courbes d'équations :

$$xy = k \text{ où } k \in \mathbf{R}^*.$$

(37-3) Corollaire : si une une droite coupe une hyperbole en deux points M et M' et ses asymptotes en P et P', les segments MM' et PP' ont le même milieu.

Démonstration : on choisit les assymptotes pour axes de coodonnées. L'hyperbole et la droite données admettent pour équations respectives :

$$xy = k \text{ et } ux + vy + w = 0.$$

Les coordonnées de M et M' sont donc les solutions du système des deux équations suivant :

$$\begin{cases} xy = k \\ ux + vy + w = 0 \end{cases} \left| \begin{matrix} -v \\ x \end{matrix} \right.$$

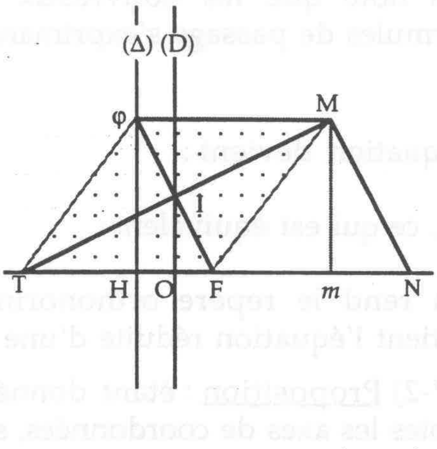
En les combinant, comme il est suggéré, on obtient l'équation suivante :

$$ux^2 + wx + kv = 0.$$

Ses racines sont les abscisses de M et M'. Leur demi-somme $-\frac{w}{2u}$ est donc l'abscisse du milieu de MM'. Ce point est indépendant de k et le calcul vaut, y compris, pour $k = 0$. L'équation donne donc aussi l'abscisse du milieu de PP'. Ce point coïncide donc bien avec le milieu de MM'.

*** Sous-tangente et sous-normale de la parabole**

Étant donnée une parabole foyer F de directrice Δ, il est bien clair que son sommet O est le milieu de FH, où H désigne l'intersection de l'axe et de la directrice. On considère un point M de cette courbe, différent du sommet. On note φ et m ses projections sur la directrice et l'axe, T et N les points d'intersection de la tangente et de la normale en M avec l'axe. Comme nous savons que la tangente est la médiatrice de Fφ, le quadrilatère FMφT est un losange. Le milieu de MT est donc aussi celui de Fφ. Ce point appartient donc à l'image de Δ par l'homothétie de centre F et de rapport $\frac{1}{2}$. Il est clair que la droite en question est la tangente au sommet. On retient ceci en désignant le segment Tm sous le nom de *sous-tangente*. Cette propriété s'énonce alors comme suit.

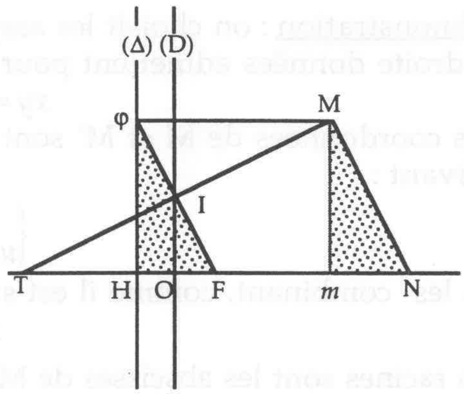


(37-4) <u>Théorème</u> : en tout point d'une parabole, la sous-tangente a pour milieu le sommet de la courbe.

La normale MN et la droite Fφ étant perpendiculaires à la tangente MI, ces deux droites sont parallèles. Il est clair que HφMm est un rectangle. Ainsi, la translation qui transforme F en N, transforme (Fφ) en sa parallèle que passe par N. Ce qui montre que M est l'image de φ. On en déduit que m est l'image de H. Ce qui prouve que :

$$m\mathrm{N} = \mathrm{HF}$$

Cette longueur n'est autre que le paramètre. Ici encore, on allège l'énoncé en appelant mM *sous-normale*.



(37-5) <u>Théorème</u> : en tout point d'une parabole, la longueur de la sous-normale est égale au paramètre de la courbe.

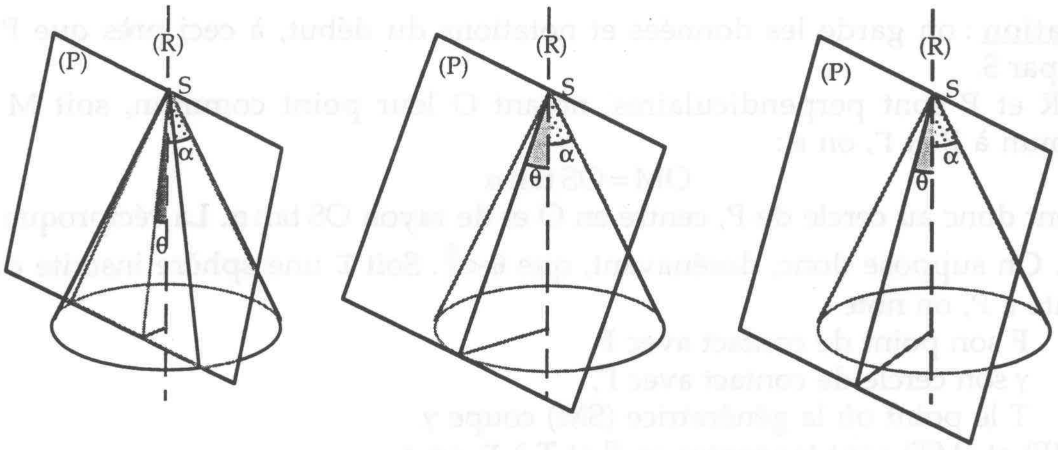
§ 38 Sections planes des cônes de révolution

On ne peut quitter le sujet sans justifier l'usage du terme "conique".

On se place dans l'espace, on considère un cône de révolution Γ et un plan P. Le cône est donné par son axe R, son sommet S – évidemment situé sur R – et un angle aigu α. Il est la réunion des droites passant par S et font avec R un angle α. On convient encore de noter θ l'angle de P et de R – rappelons qu'on entend par là l'angle aigu ou droit de R et de sa projection sur P.

Afin de fixer les idées, commençons par examiner le cas où P passe par S. Comme la valeur des angles formés par R et les droites de P est alors comprise entre θ et $\frac{\pi}{2}$, on est dans l'un des cas suivants :

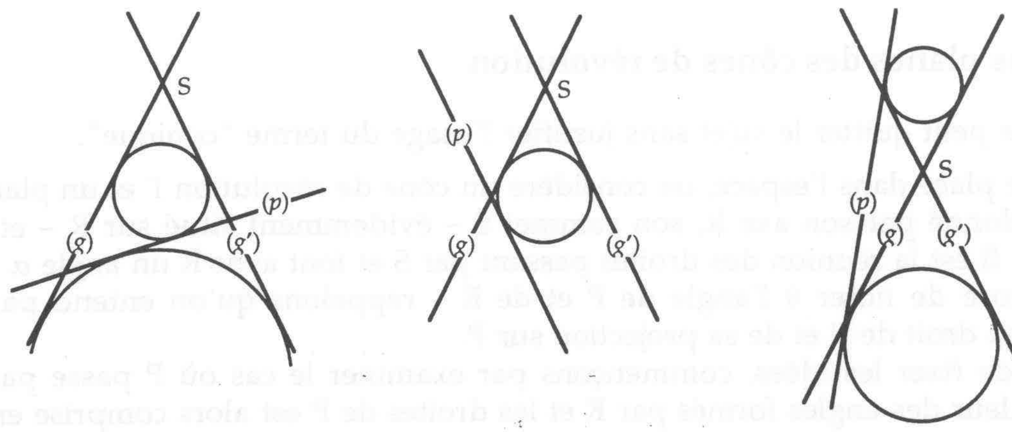
- si $\theta < \alpha$, P contient deux génératrices, on dit alors que P et Γ sont *sécants*,
- si $\theta = \alpha$, P contient une génératrices, on dit alors que P est *tangent* à Γ,
- si $\theta > \alpha$, le sommet est le seul point commun à P et Γ, on dit alors que P est *extérieur* à Γ.



(38-1) <u>Lemme</u> : si P ne passe pas par S, il existe une sphère inscrite dans Γ et tangente à P. Il en existe deux si $\theta \neq \alpha$.

<u>Démonstration</u> : considérons une telle sphère, soit H son point de contact avec P, Notons Π le plan perpendiculaire à P qui contient l'axe R – ou un plan arbitraire contenant R si cette droite est perpendiculaire à P. Ainsi, Π coupe le cône suivant deux génératrices g et g', la sphère suivant un grand cercle σ et enfin P suivant la droite p. Passons en revue les trois cas envisagés, ci-dessus.

- si $\theta > \alpha$, les trois droites g, g' et p forment un triangle qui est intérieur au cône, σ en est alors soit le cercle inscrit soit le cercle exinscrit dans l'angle S.
- si $\theta = \alpha$, p est parallèle à l'une des génératrices, un seul des deux cercles tangents à ces trois droites est intérieur au cône.
- si $\theta < \alpha$, les trois droites forment un triangle qui est extérieur au cône, σ en est un cercle exinscrit dans l'un des angles autres que S.



Réciproquement, soit σ l'un des cercles énumérés, O son centre et Σ la sphère dont il est un grand cercle. Il est immédiat que O appartient à R, Σ est inscrite dans le cône et comme Π est perpendiclaire à P, σ est tangente à P. $\lhd$

(38-2) <u>Théorème de Dandelin</u> : toute section d'un cône de révolution par un plan, ne passant pas par le sommet, est une conique (1).

<u>Démonstration</u> : on garde les données et notations du début, à ceci près que P ne passe plus par S.

Si R et P sont perpendiculaires, notant O leur point commun, soit M un point commun à P et Γ, on a :

$$OM = OS \tan\alpha$$

M appartient donc au cercle de P, centré en O et de rayon OS $\tan\alpha$. La réciproque est immédiate. On suppose donc, dorénavant, que $\theta < \frac{\pi}{2}$. Soit Σ une sphère inscrite dans Γ et tangente à P, on note :

- F son point de contact avec P,
- γ son cercle de contact avec Γ,
- T le point où la génératrice (SM) coupe γ.

Comme (MF) et (MT) sont tangentes en F et T à Σ, on a :

$$MF = MT.$$

On note alors :

- Π le plan de γ,
- Δ l'intersection de Π et de P,
- m le point où M se projette orthogonalement sur Δ,
- μ le point où M se projette orthogonalement sur Π.

La droite (Mμ) étant perpendiculaire à Π, elle est orthogonale à Δ et comme (Mm) est perpendiculaire à Δ, le plan (M$m\mu$) est perpendiculaire à Δ, ainsi (Mμ) se projette sur P suivant (Mm). Comme, de plus, (Mμ) est parallèle à R, on a :

$$\mu\hat{M}m = \theta \quad \text{et} \quad \mu\hat{M}T = \alpha.$$

on en déduit que :

$$Mm\cos\theta = M\mu = MT\cos\alpha.$$

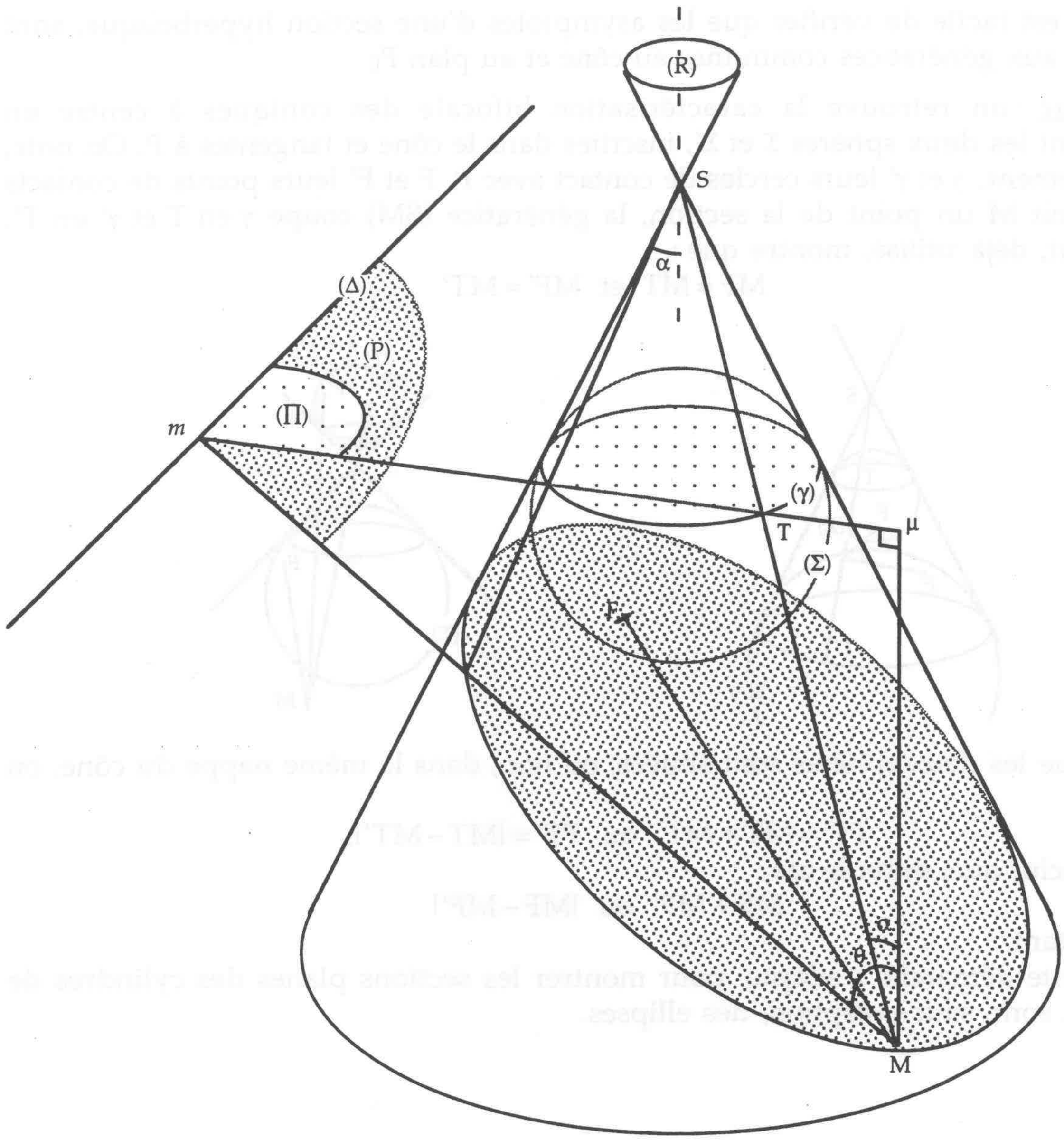
Comme MT = MF, il vient :

$$\frac{MF}{Mm} = \frac{\cos\theta}{\cos\alpha}.$$

Ce qui montre que M appartient à la conique d'excentricité $e = \frac{\cos\theta}{\cos\alpha}$, de foyer F, associé à la directrice Δ.

---

1 Les cercles sont des membres à part entière de cette famille.



Réciproquement, soit M un point de cette conique, les points T, *m* et μ étant définis comme précédemment, on a :

$$MT\cos(\mu\hat{M}T) = M\mu = Mm\cos\theta = MT\cos\alpha.$$

On en déduit que $\mu\hat{M}T = \alpha$, (ΩM) est donc une génératrice du cône. Ce qui prouve que M est commun à P et Γ. ◁

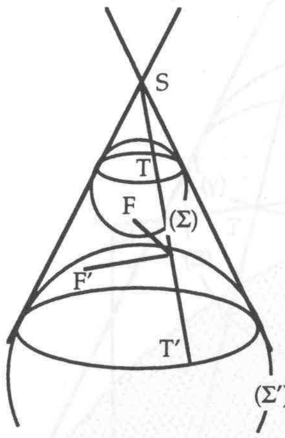
On peut préciser l'énoncé par le tableau suivant, où P_0 désigne le plan parallèle à P passant par le sommet :

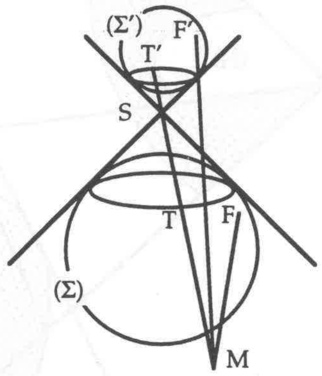
θ : angle de P et de R	P_0	$e = \frac{\cos\theta}{\cos\alpha}$	genre de la section
$\theta > \alpha$	extérieur	$e < 1$	ellipse
$\theta = \alpha$	tagent	$e = 1$	parabole
$\theta < \alpha$	sécant	$e > 1$	hyperbole

Il est facile de vérifier que les asymptotes d'une section hyperbolique, sont parallèles aux génératices communes au cône et au plan P_0

Remarque : on retrouve la caractérisation bifocale des coniques à centre en considérant les deux sphères Σ et Σ', inscrites dans le cône et tangentes à P. On note, respectivement, γ et γ' leurs cercles de contact avec Γ, F et F' leurs points de contacts avec P. Soit M un point de la section, la génératice (SM) coupe γ en T et γ' en T', l'argument, déjà utilisé, montre que :

$$MF = MT \quad \text{et} \quad MF' = MT'$$





Suivant que les deux sphères sont situées, ou non, dans la même nappe du cône, on a :

$$TT' = MT + MT' \quad \text{ou} \quad TT' = |MT - MT'|.$$

On en conclut que, selon le cas :

$$MF + MF' \quad \text{ou} \quad |MF - MF'|$$

reste constant.

Cette démarche s'adapte, pour montrer les sections planes des cylindres de révolution sont, sauf exception, des ellipses.

Chapitre IX. Les isométries de l'espace

On doit savoir aborder les isométries de l'espace avec les concepts dont on dispose au lycée – notamment afin d'étudier les propriétés d'invariance de figures simples. Bien qu'il ne soit pas indispensable de savoir fonder une classification exhaustive de ces transformations sur des critères exclusivement géométriques. nous nous acquittons de cette tâche, un peu laborieuse, moins pour la beautée du geste que apporter des éléments de comparaison entre les mérites respectifs du modèle empirique qui est resté le nôtre et l'espace affine euclidien élaboré via l'algèbre linéaire.

§ 39. Mises au point

Jusqu'à présent, les notions métriques relatives à l'espace, sont apparues essentiellement sous forme analytique. Dans les applications, il convient, par exemple, de traiter de l'orthogonalité autrement qu'en annulant des produits scalaires ou encore de disposer d'un minimum de termes descriptifs. C'est pourquoi nous passons en revue quelques définitions et propriétés, en laissant à chacun le soin de les mettre en forme.

Deux angles dont les côtés sont parallèles sont égaux ou supplémentaires.

Définir et caractériser :

- la droite perpendiculaire à un plan en l'un de ses points,
- la droite perpendiculaire à un plan issue d'un point donné.

Justifier l'existence de la perpendiculaire commune à deux droites non parallèles.

Revenir sur la question de la projection d'un angle droit.

Qu'est-ce qu'un angle dièdre ?

Qu'est-ce qu'un plan bissecteur d'un dièdre ?

Définir l'angle d'une droite et d'un plan.

…

*** Orientations compatibles d'une droite et d'un plan**

Avant tout, on doit de se convaincre que si l'espace est orienté, il n'existe d'orientation canonique ni de ses plans, ni de ses droites ([1]). En revanche, il existe un lien entre l'orientation d'un plan et de toute droite qui le coupe. Précisons ce point.

Orienter $\mathscr{E}$ c'est en distinguer un repère $\mathscr{R} = (\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ auquel on affecte l'orientation directe. A toute autre repère $\mathscr{S} = (\Omega, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de E est associé le déterminant noté :

$$\det_{\mathscr{R}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

des coordonnées, dans $\mathscr{R}$, des ses vecteurs pris dans l'ordre. Suivant que ce nombre est positif ou négatif, l'orientation de $\mathscr{S}$ est directe ou indirecte.

Considérons un plan P et une droite D qui le coupe en Ω. On choisit un repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ de P et un vecteur directeur $\vec{w}$ de D. On dispose ainsi d'un repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de $\mathscr{E}$. Dans ces conditions si l'on oriente P en convenant que (u, v) est d'orientation directe, comme :

$$0 \neq \det_{\mathscr{R}}(u, v, w) = -\det_{\mathscr{R}}(u, v, -w),$$

les deux repères :

$$(\Omega, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \text{ et } (\Omega, \vec{u}, \vec{v}, -\vec{w})$$

ont des orientation opposées, le coefficient : ± 1 de $\vec{w}$, dans le seul des deux qui est d'orientation directe, détermine l'orientation de D compatible avec celle choisie pour P.

Si c'est D qu'on oriente, suivant $\vec{w}$, comme :

$$0 \neq (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$$

l'ordre de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le seul repère direct parmi :

$$(\Omega, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\Omega, \vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$$

fixe l'orientation de P.

En résumé, si $\mathscr{E}$ est orienté, l'orientation d'un plan (respectivement d'une droite) est arbitraire mais détermine, ipso facto, l'orientation de toute droite qui le coupe (respectivement de tout plan qui la coupe).

---

1 Au passage, ajoutons que, pour cette raison :

dans l'espace, il n'est jamais question d'angle de vecteurs !

sans référence à l'orientation du plan, de leurs directions – en insistant lourdement sur ce fait.

§ 40. Réflexions de l'espace

* Plan médiateur

(40-1) Proposition : le lieu des points équidistants de deux points A et B, donnés, distincts, est le plan perpendiculaire à (AB) passant par le milieu de AB.

Définition : ce plan est dit *médiateur* de A et B, ou du segment AB.

* Réflexion

Définition : étant donné un plan P, on appelle *réflexion* – ou *symétrie orthogonale* – de plan P, l'application qui à tout point M de $\mathscr{E}$, associe le point M′ tel que, m désignant le projeté orthogonal de M sur P, on ait :

$$\overrightarrow{mM'} = -\overrightarrow{mM}.$$

Remarque : il est sans inconvénient de parler de réflexion à la fois dans le plan et dans l'espace, sans apporter de précision systématique. La donnée du plan ou de l'axe suffit, généralement, à lever toute ambiguïté.

(40-2) Proposition : toute réflexion est involutive.

Toute réflexion étant une affinité, on a les propriétés suivantes.

(40-3) Proposition : toute réflexion :
- conserve les barycentres ;
- tranforme toute droite en une droite et tout plan en un plan ;
- conserve le parallélisme entre plans, entre droites et entre droites et plan.

(40-4) Proposition : soit s une réflexion de plan P :
- l'ensemble des points invariants par s est P,
- les droites globalement invariantes par s sont, outre celles contenues dans P, les perpendiculaires à P ;
- les plans globalement invariants par s sont, outre P, les plans perpendiculaires à P et l'application induite par s, sur un tel plan, est la symétrie orthogonale par rapport à sa trace sur P.

(40-5) Proposition : toute réflexion conserve les distances et les angles géométriques.

(40-6) Proposition : toute réflexion conserve l'orthogonalité entre droites, entre plans et entre droite et plan.

(40-7) Proposition : toute réflexion inverse l'orientation.

Démonstration : considérons une réflexion s, de plan P. On choisit un repère orthonormé de P qu'on complète pour former un repère orthonormé de $\mathscr{E}$. La symétrie s'exprime :

$$M : (x, y, z) \mapsto M' : (x, y, -z).$$

Considérons quatre points non coplanaires O, A, B, C, transformés par s en O′, A′, B′, C′ et notons les coordonnées respectives de $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$:

$$(a, a', a'') \ , \ (b, b', b'') \ , \ (c, c', c'').$$

Les vecteurs $\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'}, \overrightarrow{O'C'}$ ont alors pour coordonnées :

$$(a, a', -a'') \ , \ (b, b', -b'') \ , \ (c, c', -c''),$$

On en déduit que :

$$(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}, \overrightarrow{OC'}) = -(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}).$$

Ce qui montre que s inverse l'orientation de tout repère. ◁

(40-8) <u>Proposition</u> : soit M et N deux points distincts, transformés en M' et N' par une réflexion de plan P, on a

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}.$$

si, et seulement si (MN) est parallèle à P.

*** Composition de deux réflexions**

Les arguments utilisés dans le plan s'adaptent de façon immédiate à l'espace afin de justifier les deux assertions suivantes.

(40-9) <u>Proposition</u> : la composition de deux réflexions dont les plans sont parallèles donne une translation.

(40-10) <u>Théorème</u> : la translation de vecteur $\vec{v}$ est le produit de deux réflexions dont les plans – dans l'ordre P et P' – sont orthogonaux à $\vec{v}$. L'un de ces plans est arbitraire, l'autre est déterminée par la condition :

$$P' = t_{\frac{1}{2}\vec{v}}(P).$$

Considérons deux réflexions s et s', de plans P et P', sécants suivant la droite D. Soit Π un plan perpendiculaire à D, Δ et Δ' ses intersections avec P et P' et O son point commun avec D. Comme Π est invariant par s et s', il est invariant par $s' \circ s$ et l'application induite sur Π est la rotation r, produit des reflexions – de Π – d'axes Δ et Δ'. Pour apporter un peu de précison, on oriente D, ce qui oriente Π. Dans ces conditions il est naturel de poser la définition qui suit.

<u>Définition</u> : étant donné une D_o, orientée, de l'espace orienté et un nombre réel θ, on appelle *rotation* d'axe D, d'*angle* θ et l'on note $R(D_o, \theta)$, l'application de $\mathscr{E}$ dans lui-même qui, sur tout plan Π, perpendiculaire à D, coïncide avec la rotation de centre O – point commun à D et Π – et d'angle θ, pour l'orientation de Π compatible avec celle de D.

On peut alors formuler simplement le résultat acquis.

(40-11) <u>Proposition</u> : la composition de deux réflexions par rapport à des plans sécants donne une rotation.

Réciproquement, considérons une rotation, soit D son axe et θ son angle, pour une orientation fixée de D. Soit P et P' deux plans contenant D et tels que :

$$P' = R(D_o, \tfrac{\theta}{2})(P).$$

Ce qui précède montre que :

$$s_{P'} \circ s_P = R(D_o, \theta)$$

et justifie l'assertion qui suit.

(40-12) <u>Théorème</u> : la rotation d'axe orienté D_o, d'angle θ, est le produit des réflexions dont les plans – dans l'ordre P et P' – contiennent D. L'un de ces plans est arbitraire, l'autre est déterminé par la condition :

$$P' = R(D_o, \tfrac{\theta}{2})(P).$$

Remarque : on pourrait aussi présenter les choses en faisant intervenir la rotation vectorielle $\vec{r}$, associée à r. Elle est, en effet, indépendante de Π – pourvu que celui-ci soit perpendiculaire à D. Pour tout point M, notant m son projeté orthogonal sur D et M′ son image par r, on a toujours :

$$\overrightarrow{m\mathrm{M}'} = \vec{r}\,(\overrightarrow{m\mathrm{M}}).$$

On peut se servir de cette relation pour définir les rotations de $\mathscr{E}$.

*** Demi-tours**

Étant donnée une droite D, il est clair que la symétrie orthogonale par rapport à D est aussi la rotation d'axe D et d'angle π. C'est pourquoi on appelle cette transformation le *demi-tour d'axe* D.

(40-13) Proposition.

1) Le produit de deux réflexions est commutatif si, et seulement si, leurs plans sont perpendiculaires. Un tel produit donne un demi-tour.

2) Tout demi-tour est le produit de deux réflexions par rapport à des plans perpendiculaires se coupant suivant son axe. Le choix de l'un de ces plans est arbitraire et l'ordre de composition est indifférent.

§ 41. Propriétés des isométries de l'espace

<u>Définition</u> : on appelle *isométrie (de l'espace)* toute application de $\mathscr{E}$ dans lui-même qui conserve la distance, c'est-à-dire telle que, pour tous points M et N, d'images respectives M' et N', on ait

$$M'N' = MN.$$

(41-1) <u>Proposition</u> : la compositon de deux isométries donne une isométrie.

La démarche suivie dans la section 27, s'adapte sans difficulté. On montre ainsi, mutatis mutandi, les propositions suivantes.

(41-2) <u>Proposition</u> : toute isométrie qui laisse invariants quatre points non coplanaires est l'application identique.

(41-3) <u>Proposition</u> : toute isométrie qui laisse invariants trois points non alignés, d'un plan P, est soit :

- l'application identique,
- la réflexion de plan P.

(41-4) <u>Proposition</u> : toute isométrie qui laisse invariants deux points distincts A et B est soit :

- l'application identique,
- une rotation d'axe (AB),
- une réflexion dont le plan passe par A et B.

(41-5) <u>Proposition</u> : toute isométrie qui laisse invariant un point, et un seul, est le produit trois réflexions dont les plans passent par celui-ci.

(41-6) <u>Proposition</u> : toute isométrie se décompose en un produit d'au plus quatre réflexions.

(41-7) <u>Corollaire</u>.

1) Toute isométrie est une application bijective et son application réciproque est une isométrie.

2) Toute isométrie conserve le barycentre.

3) L'image de toute droite par une isométrie est une droite.

4) L'image de tout plan par une isométrie est un plan.

5) Toute isométrie conserve les angles.

6) Toute isométrie f induit sur les vecteurs de $\mathscr{E}$ une application $\vec{f}$, telle que pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ de $\mathscr{E}$ et tout réel λ, on ait :

$$\vec{f}(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{f}(\vec{u}) + \vec{f}(\vec{v}) \quad \text{et} \quad \vec{f}(\lambda\vec{u}) = \lambda\vec{f}(\vec{u}).$$

(41-8) <u>Corollaire</u> : une isométrie donnée conserve l'orientation de tout repère ou la change en son opposée.

<u>Démonstration</u> on a vu que toute réflexion inverse l'orientation. On est donc bien dans l'un des deux cas mentionnés, selon que l'isométrie considérée se décompose en un nombre pair ou impair de symétries. ◁

§ 42. Formes réduites des isométries de l'espace

Définition : on appelle :

- *déplacement* ou *isométrie directe,* toute isométrie qui conserve l'orientation,
- *antidéplacement* ou *isométrie indirecte,* toute isométrie qui inverse l'orientation.

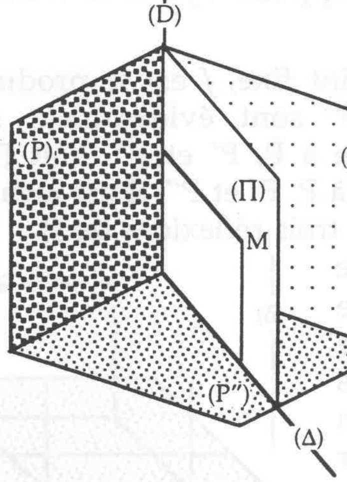
*** Cas des antidéplacements**

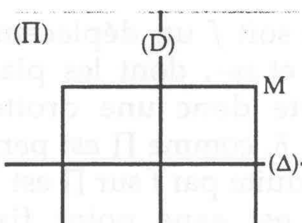
(42-1) Proposition.

1) Le produit des réflexions par rapport à trois plans deux à deux perpendiculaires est la symétrie par rapport au point communs à ceux-ci.

2) Toute symétrie centrale est le produit, dans un ordre indifférent, de trois réflexions dont les plans sont perpendiculaires deux à deux en son centre – arbitrairement choisis.

Démonstration : étant donnés trois plans P, P′ et P″, perpendiculaires deux à deux, en O, on considère un point quelconque M. Si M appartient à deux des plans le résultat est immédiat. Sinon, soit Π le plan contenant M et l'intersection D de P et P′, Π est stable par le demi-tour $s_{P'} \circ s_P$ et comme P″ est perpendiculaire à P et P′, Π est perpendiculaire à P″ ce plan est donc aussi stable par $s_{P''}$.





L'application induite, sur Π, par $s_{P''} \circ s_{P'} \circ s_P$ est le produit de deux réflexions planes dont les axes sont perpendiculaires. La conclusion en découle. La réciproque est alors évidente. ◅

(42-2) Proposition : tout antidéplacement qui laisse un point invariant, se décompose en une rotation et une réflexion dont le plan est perpendiculaire à l'axe de la rotation – ceci dans un ordre indifférent.

Définition : il est commode d'appeler la transformation obtenue une *antirotation.*

Démonstration : soit f un antidéplacement laissant invariant un point O, on note σ la symétrie de centre O. L'isométrie $\sigma \circ f$ est un déplacement qui laisse O invariant Comme seuls des antidéplacements peuvent laisser invariant un point unique (cf. 41-5), $\sigma \circ f$ est l'application identique ou une rotation (cf 41-4). Dans le premier cas $f=\sigma$ et la conclusion est vérifiée, sinon, il existe deux plans P et P', sécants suivant une droite D qui passe par O et tels que :

$$\sigma \circ f = s_{P'} \circ s_P.$$

On note Π le plan perpendiculaire à D en O et Q le plan perpendiculaire à Π et P' en O. On a :

$$\sigma = s_\Pi \circ s_Q \circ s_{P'}$$

On en déduit que :

$$f = \sigma \circ (s_{P'} \circ s_P) = s_\Pi \circ s_Q \circ s_{P'} \circ s_{P'} \circ s_P = s_\Pi \circ (s_Q \circ s_P).$$

Comme P et Q sont perpendiculaires à Π et passent par O, si ces plans sont distincts, ils se coupent suivant D, la conclusion est alors immédiate. ◅

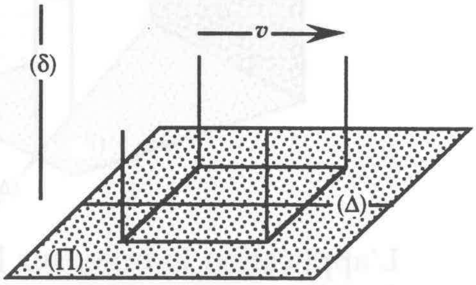
N.B. Une antirotation est bien définie par la donnée de *son axe orienté* ou de *son plan* orienté, *son centre* et de *son angle*. Ainsi l'isométrie considérée ci dessus se décrit comme étant *l'antiroration* de centre O, d'axe D ou de *plan* Π, d'*angle* θ, où ce nombre désigne l'angle de la rotation $s_Q \circ s_P$ compté en orientant D ou Π.

(42-3) Proposition : tout antidéplacement sans point fixe se décompose en une réflexion et une translation dont le vecteur est parallèle au plan de la réflexion – ceci dans un ordre indifférent.

Définition : une transformation de ce type s'appelle *symétrie-translation* ou *symétrie glissée.*

Démonstration : soit f un déplacement sans point fixe, f est le produit de trois réflexions s_P, $s_{P'}$ et $s_{P''}$, dont les plans P, P' et P'' sont, évidemment, sans point commun. Il existe donc une droite δ, parallèle à P, P' et P''. Soit Π un plan perpendiculaire à δ, comme Π est perpendiculaire à P, P' et P'', il est invariant par f. l'application φ, induite par f sur Π est le produit de trois réflexions de Π.

Comme φ est sans point fixe, c'est une symétrie-translation de Π. Notons Δ son axe et $\vec{v}$ le vecteur de sa translation. Comme tout vecteur de la direction de δ est invariant par les trois réflexions données, il est invariant par f. On en déduit que f est le produit de la symétrie par rapport au plan parallèle à δ qui contient Δ par la translation de vecteur $\vec{v}$. ◅



N.B. Une symétrie-translation est bien définie par la donnée du plan de symétrie et du vecteur de la translation. Ainsi l'application de la démonstration se décrit comme la symétrie-translation de *plan* Π et de *vecteur* $\vec{v}$.

En résumé, on a démontré l'assertion suivante.

(42-4) Théorème : tout antidéplacement est soit :

- une réflexion,
- une antirotation,
- une symétrie-translation.

(42-5) Corollaire : pour tout antidéplacement, il existe une droite dont tout vecteur est transformé en son opposé.

*** Cas des déplacements**

(42-6) Lemme : pour tout déplacement, il existe une droite dont tout vecteur est invariant.

Démonstration : en composant un déplacement avec une symétrie centrale, on obtient un antidéplacement, on applique le corollaire précédent. Comme la symétrie centrale transforme tout vecteur en son opposé, la conclusion est immédiate. ◅

(42-7) Théorème : tout déplacement est soit :

- une translation,
- une rotation,
- le produit dune rotation par une translation de vecteur non nul et parallèle à l'axe de la rotation.

Définition : cette dernière application est appelée *déplacement hélicoïdal* ou *vissage.*

Démonstration : soit f un déplacement, nous savons qu'il existe une droite δ, dont les vecteurs sont invariants par f. On considère un plan Π, perpendiculaire à δ. Comme f transforme δ en une droite parallèle, f transforme Π en un plan parallèle Π'. Soit Π'' le plan parallèle équidistant de Π et Π', l'application $s_{\Pi''} \circ f$ est un antidéplacement qui laisse Π invariant et transforme tout vecteur de δ en son opposé. Nous savons alors que :

$$s_{\Pi''} \circ f = s_{\Pi} \circ g,$$

où g désigne soit :

- l'application identique,
- une translation de vecteur parallèle à Π,
- une rotation d'axe parallèle à δ.

On en déduit que :

$$f = s_{\Pi''} \circ s_{\Pi} \circ g = t \circ g$$

où t est une translation de vecteur parallèle à δ. Ainsi, dans les deux premiers cas, f est une translation et dans le troisième, suivant que Π et Π' sont confondus ou distincts, f est une rotation ou un déplacement hélicoïdal. ◅

§ 43 Produit de deux demi-tours

Le produit de deux demi-tours dont les axes sont parallèles est une question élémentaire qui, en fait, relève de la géométrie plane. On laisse ce cas de côté. On considère deux demi-tours d et d' dont les axes Δ et Δ' ne sont pas parallèles. On note :

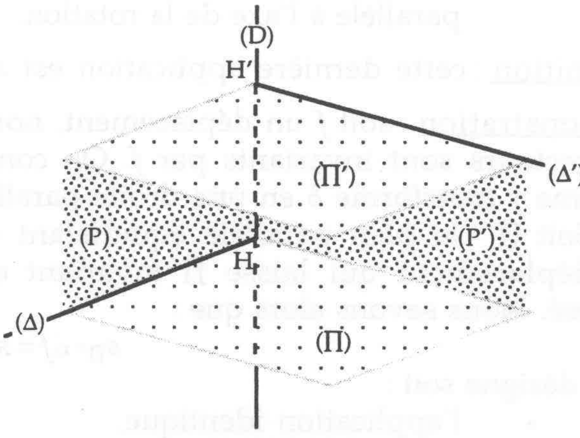
- D la perpendiculaire commune à Δ et Δ',
- Π (respectivement Π') le plan parallèle à Δ' (respectivement Δ) qui contient Δ (respectivement Δ')
- P (respectivement P′) le plan perpendiculaire à Π et Π' qui contient Δ (respectivement Δ')

On a :

$$d = s_P \circ s_\Pi = s_\Pi \circ s_P$$

et

$$d' = s_{P'} \circ s_{\Pi'} = s_{\Pi'} \circ s_{P'}.$$



Il s'ensuit que :

$$d' \circ d = s_{\Pi'} \circ s_{P'} \circ s_P \circ s_\Pi$$

Comme Π est perpendiculaire à P et P′, s_Π commute avec s_P et $s_{P'}$. On a donc :

$$d' \circ d = (s_{\Pi'} \circ s_\Pi) \circ (s_{P'} \circ s_P).$$

Ce qui montre que $d' \circ d$ est le produit de la rotation $s_{P'} \circ s_P$ et de la translation $s_{\Pi'} \circ s_\Pi$.

(43-1) <u>Proposition</u> : étant données deux droites Δ et Δ', on note :

- D leur perpendiculaire commune, H et H′ les points où cette droite coupe Δ et Δ',
- θ une mesure de l'angle orienté (Δ, Δ'), pour une orientation donnée de D.

La composition des demi-tours d'axes D et D′ donne :

- la rotation d'axe D, d'angle 2θ, si Δ et Δ' sont coplanaires,
- le déplacement hélicoïdal composé de la rotation ci-dessus et de la translation de vecteur $2\overrightarrow{HH'}$, dans le cas contraire.

La réciproque est immédiate.

(43-2) <u>Théorème</u> : tout déplacement d'axe D est le produit de deux demi-tours dont les axes sont perpendiculaires à D.

§ 44. Éléments de symétrie d'une figure

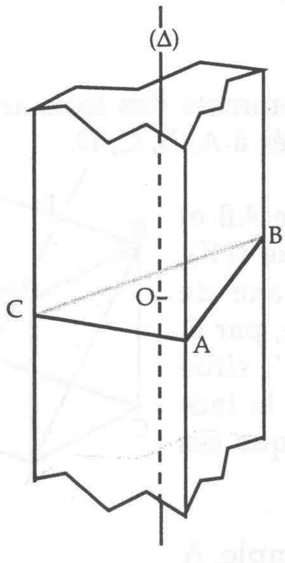
Les notions de centre, d'axe, de plan de symétrie d'une figure sont suffisamment claires pour qu'il ne soit pas indispensable d'en donner une définition dans les formes.

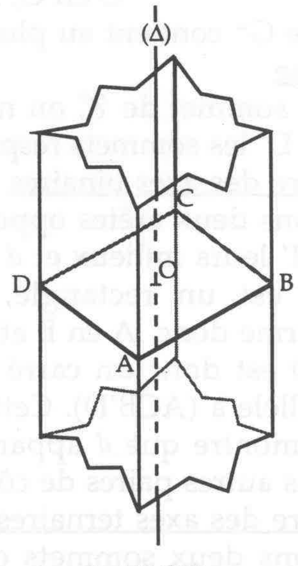
Soit F une figure de l'espace, si F est invariante par une rotation d'angle θ elle est aussi invariante par les rotations de même axe et d'angles $k\theta$, pour tout entier relatif k. Cette remarque conduit à poser la définition qui suit.

Définition : une droite D est appelée *axe de répétition* d'*ordre n*, de F, si n est le plus grand entier positif, tel que F soit invariante par une rotation d'axe D, d'angle $\frac{2\pi}{n}$.

Exemples.

1) On considère un prisme droit Π dont la directrice est un triangle équilatéral. Autrement dit, étant donné un triangle équilatéral ABC, Π est la réunion des droites qui s'appuient sur ses côtés et sont perpendiculaires à son plan. Notons Δ au plan de ce triangle en son centre O, les trois plans contenant Δ et une des arêtes sont des plans de symétrie de Π, tout plan perpendiculaire à Δ est un plan de symétrie de Π et Δ est un axe de répétition, d'ordre 3, de Π. On peut encore noter que Π n'admet pas de centre de symétrie.





2) Soit Π un prisme droit dont la base est un carré ABCD, on note encore Δ la perpendiculaire au plan de ce carré en son centre O. On vérifie que Π admet quatre plans de symétrie contenant Δ, tout plan perpendiculaire à Δ est un plan de symétrie de Π et Δ est un axe de répétition, d'ordre 4, de Π. En outre, tout point de Δ est centre de symétrie de Π.

Définition : une droite D est appelée *axe de révolution* d'ordre n de F, si F est invariante par toute rotation d'axe D.

Exemples : toute droite perpendiculaire à un plan en est un axe de révolution. Un cylindre ou un cône droit à génératrice circulaire admet un axe de révolution.

*** Étude des symétries du cube**

On considère un cube $\mathscr{C}$, on étudie l'ensemble G des isométries qui laissent globalement invariant l'ensemble S de ses huit sommets.

1) Remarques préliminaires

Notons O le centre de gravité de $\mathscr{C}$, soit f un élément de G, comme f conserve le barycentre, l'image de O par f est le centre de gravité des images des sommets, c'est donc O lui même. Ce point est donc invariant par tous les éléments de G.

Soit G^+, l'ensemble des déplacements de G, la remarque précédente montre que G^+ est constitué de rotations dont l'axe passe par O.

Nous savons que O est le milieu commun des diagonales, la symétrie σ, de centre O appartient donc à G.

Notons $G^- = G - G^+$, il est immédiat que la relation $f \mapsto \sigma \circ f$ définit une bijection entre G^+ et G^-, ce qui nous conduit, dans un premier temps, à limiter nos ambitions à la description de G^+.

2) Analyse

Soit f une rotation de G^+, considérons une arête arbitraire AB de $\mathscr{C}$, l'image A′ de A est l'un des huit sommets, comme f est un déplacement, l'image B′ de B est un sommet situé à la distance AB de A′, ce qui ouvre trois possibilités. Comme O est invariant par f, il existe au plus une rotation qui transforme :

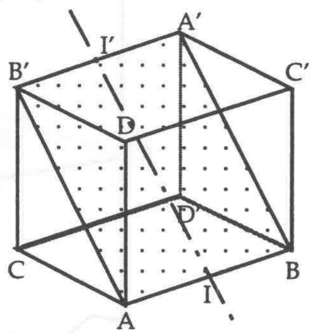
O en O, A en A′ et B en B′.

On en conclut que G^+ contient au plus 24 éléments.

3) Synthèse

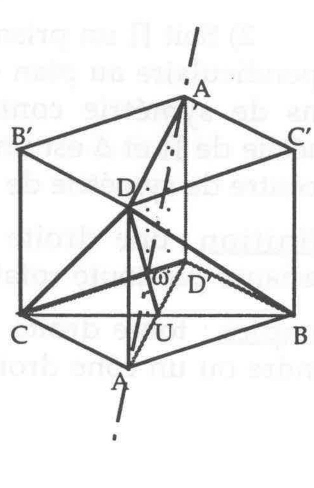
Soit A un sommet de $\mathscr{C}$, on note B, C, D les sommets des trois arêtes issues de A et A′, B′, C′, D′ les sommets respectivement opposés à A, B, C, D.

• Inventaire des axes binaires



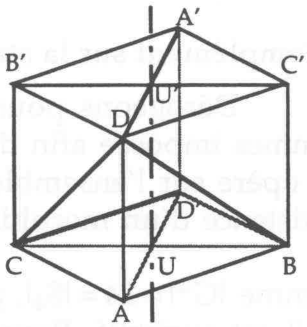
Considérons deux arêtes opposées, par exemple AB et A′B′, notons I et I′ leurs milieux et d le demi-tour d'axe (II′). Comme ABA′B′ est un rectangle, (II′) en est un axe de symétrie, d tranforme donc A en B et B′ en A′. L'image, par d, de la face ACB′D est donc un carré de diagonale BA′, situé dans le plan parallèle à (ACB′D). Cette image est donc la face BC′A′D′. Ce qui montre que d appartient à G^+, ainsi que ses analogues pour les autres paires de côtés opposés.

• Inventaire des axes ternaires



Considérons deux sommets opposés, par exemple A et A′. Le plan (ADA′D′) coupe BC en son milieu, soit U ce point. On en déduit que le point ω où la diagonale (AA′) coupe le plan (BCD) est situé sur la médiane DU du triangle BCD. En remplaçant (ADA′D′) par le plan (ABA′B′) on montre que ω appartient à la médiane issue de B du même triangle. On en déduit que ω est le centre du triangle équilatéral BCD. Comme A est équidistant de B, C et D, (AA′) est la perpendiculaire en ω au plan (BCD). Il s'ensuit que le triangle BCD est invariant par les deux rotations d'axe (AA′) et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Cette conclusion vaut aussi pour le triangle B′C′D′. On en conclut que ces deux rotations appartiennent à G^+, ainsi que leurs analogues,

• Inventaire des axes quaternaires



Considérons deux faces opposées, par exemple ABCD et A'B'C'D', soit U et U' leurs centres respectifs. Il est immédiat que (UU') est perpendiculaire à leurs plans, puis que les deux carré ABCD et A'B'C'D' sont invariants par les quart de tours et le demi tour d'axe (UU'). Ces rotations appartiennent donc à G^+, ainsi que leurs analogues pour les autres paires de faces opposées.

Ainsi, on a mis en évidence l'existence de, respectivement :

- 6 demi-tours,
- 4×2 tiers de tours,
- 3×2 quart de tours et 3 demi-tours,

auxquels on ajoute l'application identique, ce qui donne :

$$6+8+9+1=24$$

éléments distincts de G^+. L'analyse préliminaire justifie que cet inventaire est exhaustif.

4) Composition complète de G

On complète les informations sur G en composant les éléments de G^+ par la symétrie de centre O. On obtient ainsi la description complète du *groupe du cube*.

axes	binaires	ternaires	quaternaires	
nature	milieux des côtés opposés	diagonales	centres des faces opposées	
nombre	$12:2=6$	$8:2=4$	$6:2=3$	
rotations	$6\ \frac{1}{2}$ tours	$4 \times 2\ \frac{1}{3}$ tours	$3 \times 2\ \frac{1}{4}$ tours $3\ \frac{1}{2}$ tours	$23+\mathrm{Id}$
antirotations	6 réflexions	4×2 anti $\frac{1}{6}$ tours	3×2 anti $\frac{1}{4}$ tours 3 réflexions	$23+\sigma$

*** Complément sur la structure du groupe du cube**

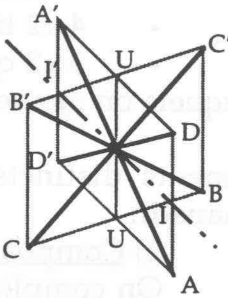
Dérogeons pour ces dernières lignes à la règle de censure que nous nous sommes imposée afin d'en savoir un peu plus sur la structure de G. Il est clair que G^+ opère sur l'ensemble formé par les quatre diagonales de $\mathscr{C}$, ce qui se traduit par l'existence d'un morphisme de groupe :

$$\varphi : G^+ \longrightarrow S_4$$

Comme $|G^+| = 24 = |S_4|$, pour justifier que φ est un isomorphisme, il suffit de prouver qu'il est surjectif. Pour ce faire, comme S_4 est engendré par les transpositions, il suffit de montrer que l'image de φ contient toutes les transpositions.

Il est clair que :

- (AD') est perpendiculaire à (BC) et (A'D'),
- (A'D') est parallèle à (UU')
- (AD') est parallèle à (II'),



Il s'ensuit que la droite (II') est perpendiculaire au plan des diagonales (BB') et (CC'). Comme, de plus, (II') est bissectrice des deux diagonales (AA') et (DD'), le demi-tour d'axe (II') :

- laisse invariantes (BB') et (CC'),
- échange (AA') et (DD').

Son image par φ est donc une transposition. Les cinq autres demi-tours analogues, donnent les cinq autres transpositions.

Il est alors établi que G^+ est isomorphe à S_4. Comme la symétrie de centre O commute avec tous les éléments de G^+, on en conclut que :

$$G \approx S_4 \times \mathbf{Z}_2,$$

où $\mathbf{Z}_2$ désigne le groupe à deux éléments.

Achevé d'imprimer sur les presses de l'université de Nantes le 15 mai 1997

Dépôt légal : 2è trimestre 1996

N° ISBN : 2-86300-023-3

Prix : 35 F