UNIVERSITE DE NANTES - FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES
DES PAYS DE LA LOIRE

Centre de Nantes
2, rue de la Houssinière - BP 92208 - 44322 NANTES CEDEX 3
Téléphone 02 40 37 30 15 ou 30.16 - FAX 02 40 74 61 66

QUELQUES EXERCICES DE GÉOMÉTRIE

DES CLÉS POUR LES RÉSOUDRE

IREM de NANTES **Décembre 1996**

Nous tenons à remercier la Direction des Lycées et Collèges sans laquelle cette production n'aurait pu voir le jour.

Introduction

"La classe de mathématique est un lieu de découverte, d'exploitation de situations, de réflexion(...) sur les démarches suivies (...) et de synthèse dégageant clairement quelques idées et méthodes essentielles mettant en valeur leur portée".

Ce recueil se veut une contribution modeste à la mise en pratique de ces principes extraits des instructions officielles.

On pourra utiliser le document tant pour un travail personnel d'élève que pour des activités de travaux pratiques.

Le choix des exercices, la formulation de leurs énoncés et la présentation de l'ouvrage ont pour objectif de promouvoir l'initiative par l'apprentissage de quelques démarches générales pour aborder des problèmes dont la résolution n'apparaît pas comme immédiate.

Nous n'avons pas voulu produire un recueil d'exercices corrigés. Ces exercices ont été proposés à des élèves et à des étudiants. Cette expérimentation nous a conduits à limiter le nombre de démarches.

La présentation par clés progressives préserve l'intérêt et le goût de la recherche tout en permettant à chacun d'avancer à son rythme et selon son degré de persévérance devant les obstacles.

Les auteurs.

__Exercice n° 1__

(C) est un cercle de centre O. A est un point de (C). (D) est la tangente en A à (C). M est un point de (C) autre que A. La droite (OM) recoupe le cercle de diamètre [OA] en P. H est le projeté orthogonal de M sur (D). *** Prouver que MH = MP**

__Deux démarches sont proposées__
__Démarche 1__ : trois clés
__Démarche 2__ : trois clés

__Exercice n° 2__

ABCD est un parallélogramme. F est le milieu de [DC] et E le projeté orthogonal de A sur (BF). *** Démontrer que DE = DA**

__Deux démarches sont proposées__
__Démarche 1__ : trois clés
__Démarche 2__ : trois clés

__Exercice n° 3__

ABCD est un carré. E est le milieu de [CD]. La perpendiculaire en E à (AE) coupe (BC) en F. *** Comparer les angles EAD et EAF**

__Une démarche proposée__ **: trois clés**

__Exercice n° 4__

ABC est un triangle rectangle en A. I est le point de [BC] tel que CI = 1/3 CB J est le point de [BC] tel que CJ = 2/3 CB *** Calculer les longueurs des côtés de ce triangle sachant que AI = 7 et que AJ = 9.**

__Une démarche est proposée__ **: trois clés**

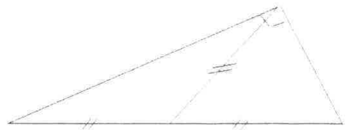
Exercice n° 1

Clé 1.1

On peut essayer de "remplacer" le segment [MH] par un segment de même longueur

Clé 2.1

Le souhait d'exploiter l'appartenance de P au cercle de diamètre [OA] conduit à coder l'angle APO



Exercice n° 2

Clé 1.1

Il suffit de prouver que D est sur la médiatrice de [AE]

Clé 2.1

Tout triangle rectangle permet de faire apparaître des triangles isocèles

Exercice n° 3

Clé 1.1

Les triangles isocèles permettent d'écrire des égalités d'angles

Exercice n° 4

Clé 1.1

Quels sont les principaux théorèmes qui permettent de calculer des distances ?

Faire apparaître des configurations qui permettent de les utiliser

Exercice n° 1

Clé 1.2

Soit I le projeté orthogonal de M sur (OA)

Clé 2.2

L'observation de la figure et l'objectif à atteindre conduisent à conjecturer que les triangles MAH et MAP sont symétriques par rapport à la droite (AM).

Exercice n° 2

Clé 1.2

Prendre l'initiative d'introduire un point de la figure pour lequel on peut affirmer qu'il est sur la médiatrice de [AE]

Clé 2.2

(BF) coupe (AD) en K
Que suffit-il alors de démontrer ?

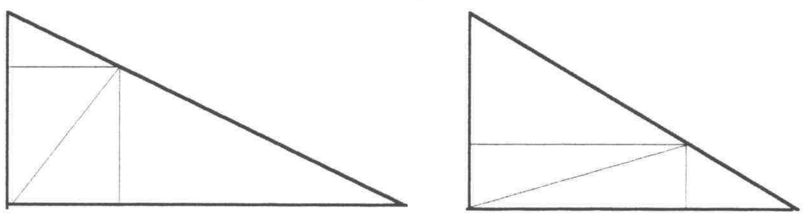
Exercice n° 3

Clé 1.2

La droite (EF) coupe (AD) en G

Exercice n° 4

Clé 1.2



Exprimer les longueurs connues en fonction de AB = c et AC = b

Exercice n° 1

Clé 1.3

Si l'on n'a pas déjà observé les particularités des triangles POA et MOA, il est temps de le faire

Clé 2.3

Pour prouver la symétrie des deux triangles, il suffit de démontrer que (AM) est bissectrice d'un certain angle

Exercice n° 2

Clé 1.3

Soit I le milieu de [AB]

Prouver que (DI) est la médiatrice de [AE]

Clé 2.3

Démontrer que D est le milieu de [AK]

Exercice n° 3

Clé 1.3

Prouver que E est le milieu de [FG]

Exercice n° 4

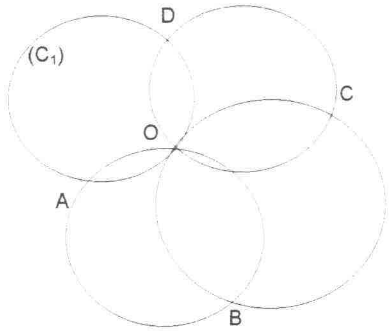
Clé 1.3

On est conduit à résoudre le système

$$\frac{4}{9} b^2 + \frac{1}{9} c^2 = 49 \quad \text{et} \quad \frac{1}{9} b^2 + \frac{4}{9} c^2 = 81$$

Enoncés

Exercice n° 5



Les quatre cercles ont le même rayon et passent par O.

Les points A, B, C et D sont définis par la figure

*** Etudier le quadrilatère ABCD**

Une démarche est proposée **: trois clés**

Exercice n° 6 - Championnat de Pologne :

Extrait de la revue tangente

Pour les quatre villes A, B, C, D représentées comme des points du plan, on connaît les distances
AB = 125 km, AC = 136 km, AD = 75 km, BC = 11 km
BD = 100 km

*** Quelle est la distance entre C et D ?**

Deux démarches sont proposées

Démarche 1 : trois clés
Démarche 2 : trois clés

Exercice n° 7 : Olympiades suédoises

Sur un cercle de diamètre 10 cm, tracez deux cordes perpendiculaires quelconques qui coupent respectivement le cercle en A, B et C et D.
Les droites (AB) et (CD) se coupen en E
*** Calculez $EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2$**

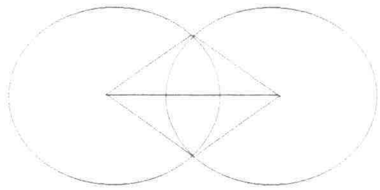
Deux démarches sont proposées

Démarche 1 : trois clés
Démarche 2 : trois clés

Exercice n° 5

Clé1.1

Un sous exercice



(C_1) et (C_2) sont deux cercles de même rayon et secants.
Etudier la configuration formée par les centres et les points d'intersection.

Exercice n° 6 **- Championnat de Pologne** :
Extrait de la revue tangente

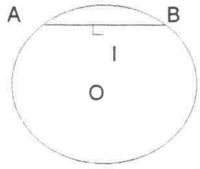
Une figure à l'échelle permet d'émettre deux conjectures :

Clé1.1
et
Clé1.2

Nature du triangle ABC
Disposition des points A, B et C

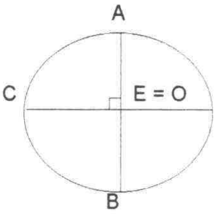
Exercice n° 7 : **Olympiades suédoises**

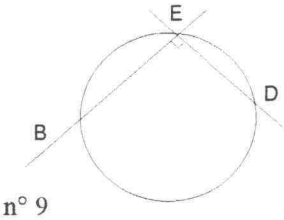
Clé1.1



Clé1.2

Des positions particulières de E permettent de conjecturer la valeur cherchée.





__Exercice n° 5__

__Clé 1.2__ Les losanges de la figure permettent d'écrire des égalités de vecteurs.

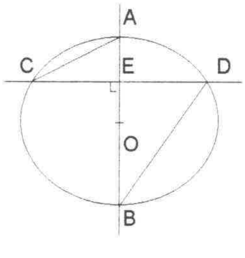
__Exercice n° 6__ **__- Championnat de Pologne__** :
Extrait de la revue tangente

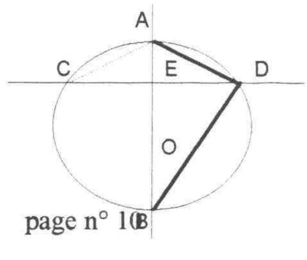
__Clé 1.2 et__
__Clé 2.2__ Faire apparaître un triangle rectangle qui permettra de calculer DC.

__Exercice n° 7__ : **Olympiades suédoises**

__Clé 1.2__ I est le milieu de [AB] , J celui de [CD]
Prouver par le calcul que $EA^2 + EB^2 = 2\ EI^2 + 2\ IA^2$
*** Citer l'égalité annalogue pour $EC^2 + ED^2$**

__Clé 2.2__ Une position de E un peu moins particulière permet de calculer $AC^2 + DB^2$.





Exercice n° 5

Clé 1.3 Ces égalités permettent de prouver que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$
ou que $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

Exercice n° 6 **- Championnat de Pologne** :
Extrait de la revue tangente

Clé 1.3 Soit H le projeté orthogonal de D sur (AB)

*** Calculer les valeurs exactes de DH et de HB (ou AH)**

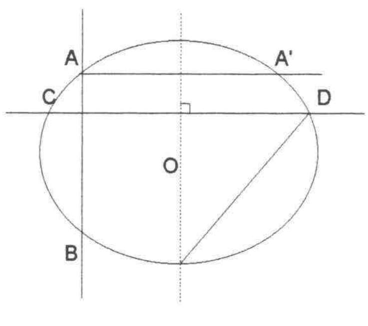
Clé 2.3 Soit K le projeté orthogonal de C sur (AD).

*** Calculer les valeurs exactes de KC et DK**

Exercice n° 7 **: Olympiades suédoises**

Clé 1.3 Regroupez judicieusement les termes pour trouver
le résultat

Clé 2.3 Cas général



A' est le symétrique de A
par rapport à la médiatrice
de [CD]
Etudier le triangle BA'D.

Enoncés

Exercice n° 8

ABC est un triangle rectangle isocèle en A.
M est un point du segment [AB]. N est le point de [AC] tel que AM = AN
La perpendiculaire à (BN) qui passe par A coupe (BC) en I.
La perpendiculaire à (BN) qui passe par M coupe (BC) en J.

*** Démontrer que I est le milieu de [CJ].**

Deux démarches sont proposées

Démarche 1 : quatre clés
Démarche 2 : trois clés

Exercice n° 9

ABCD est un carré. P est un point de [AB].
Q est le point de [BC] tel que PB = BQ.
On note H le projeté orthogonal de B sur (PC)

*** Démontrer que (HQ) et (HD) sont perpendiculaires**

Deux démarches sont proposées

Démarche 1 : quatre clés
Démarche 2 : trois clés

Exercice n° 10

ABC est un triangle équilatéral. E est le point défini par $\overrightarrow{CE} = 1/3\ \overrightarrow{CA}$
F est le point défini par $\overrightarrow{AF} = 1/3\ \overrightarrow{AB}$. Les droites (FC) et (BE) se coupent en K.

*** Prouver que les droites (AK) et (BE) sont perpendiculaires**

Deux démarches sont proposées

Démarche 1 : quatre clés
Démarche 2 : quatre clés

Exercice n° 8

Clé 1.1

Penser au projeté du milieu d'un segment.

Clé 1.2

Le triangle ABC est un demi-carré.

Compléter la figure.

Exercice n° 9

Clé 1.1

Le problème revient à prouver que le point H est sur le cercle de diamètre [DQ].

Tracer ce cercle.

Clé 1.2

L'observation des triangles HPB et HBC conduit à introduire une similitude.

Exercice n° 10

Clé 1.1

Calculer $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BE}$.

Clé 1.2

Le résultat à démonter incite à tracer le cercle de diamètre [AE].

Quelle conjecture peut-on émettre ?

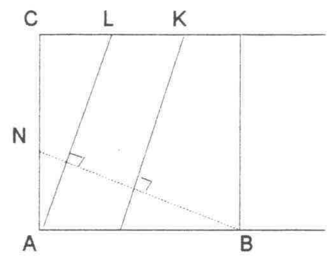
Exercice n° 8

Clé 1.2

La droite (MJ) coupe (AC) en D.

Que suffit-il de démontrer pour le triangle DBC ?

Clé 2.2



Exercice n° 9

Clé 1.2

Le cercle précédent coupe (AD) en Q'.
Le problème revient à prouver que CQ'H est rectangle en H.
Pourquoi ?

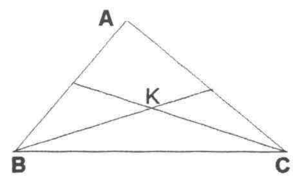
Clé 2.2

Soit s la similitude directe de cente H qui transforme P en B.
Etudier l'image par s du point B, celle de Q.

Exercice n° 10

Clé 1.2

Le calcul du produit scalaire de $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{BE}$ pose le problème du repérage de K
La configuration suggère un repérage particulier.
Lequel ?



Clé 2.2

Prouver que (FE) et (AB) sont perpendiculaires.

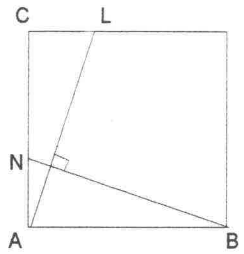
Exercice n° 8

Clé 1.3

M est un point particulier du triangle DBN.

Lequel ?

Clé 2.3



Exercice n° 9

Clé 1.3

DCQQ' est un rectangle.

Clé 2.3

Etudier l'image du triangle rectangle isocèle en B, PQB pour obtenir l'image de Q.

Exercice n° 10

Clé 1.3

Exprimer K comme un barycentre de A, B et C.

Clé 2.3

Reformuler le problème en terme de cocyclicité.

Exercice n° 8

Clé 1.4

(BD est perpendiculaire à (BC).

Exercice n° 9

Clé 1.4

Démontrer que (BQ') et (CP) sont perpendidulaires.

Exercice n° 10

Clé 1.4

Exprimer $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{BE}$ dans la base $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$

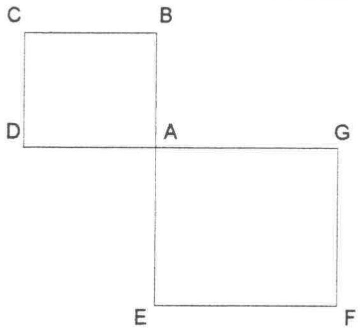
Clé 2.4

Quelle est la mesure attendue de FKE ?

ou comparer les angles $(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EA})$ et $(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FC})$

Enoncés

Exercice n° 11



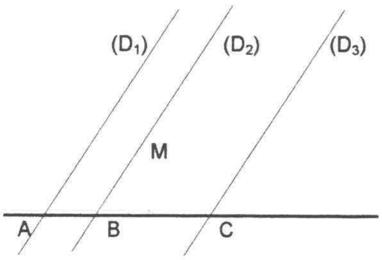
ABCD et AEFG sont deux carrés disposés comme l'indique le dessin.
Les droites (GC) et (BF) se coupent en I.

*** Prouver que les droites (AI) et (BG) sont perpendiculaires.**

Deux démarches sont proposées

Démarche 1 : trois clés
Démarche 2 : quatre clés

Exercice n° 12



(D_1), (D_2) et (D_3) sont parallèles.
La parallèle à (AM) qui passe par B coupe (D_3) en N.
La parallèle à (MC) qui passe par B coupe (D1) en P.

*** Démontrer que M, N et P sont alignés**

Deux démarches sont proposées

Démarche 1 : deux clés
Démarche 2 : quatre clés

Exercice n° 13 - Concours général 1994

Soit ABC un triangle. Si P est un point de son plan, on note L, M, et N. Les projetés orthogonaux de P respectivement sur les droites (BC), (CA) et (AB).
*** Déterminer le point P pour lequel la quantité $BL^2 + CM^2 + AN^2$ est minimale.**

Deux démarches sont proposées

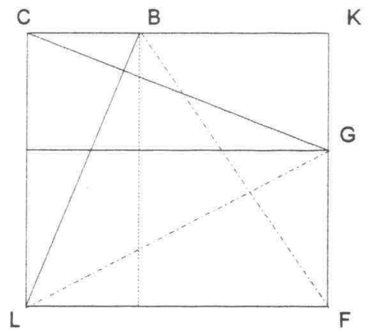
Démarche 1 : quatre clés
Démarche 2 : trois clés

Exercice n° 11

Clé 1.1

La géométrie analytique est un outil parmi les autres.

Clé 2.1

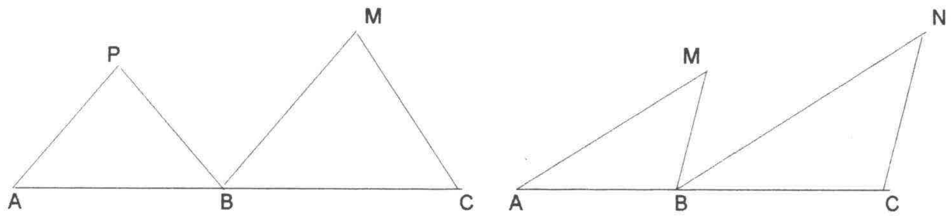


Exercice n° 12

Clé 1.1

Prouver que les vecteurs $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont tous deux colinéaires à un vecteur judicieusement choisi

Clé 2.1 Figures extraites



Exercice n° 13 **Concours général 1994**

Clé 1.1

On pose $f(P) = BL^2 + CM^2 + AN^2$
L'écriture de f(P) peut suggérer d'introduire
$g(P) = CL^2 + AM^2 + BN^2$ (par souci de symétrisation).

Clé 2.1

Transformer naturellement l'écriture de
$f(P) = BL^2 + CM^2 + AN^2$ à l'aide du théorème de Pythagore.

__Exercice n° 11__

__Clé 1.2__

Poursuivre les calculs

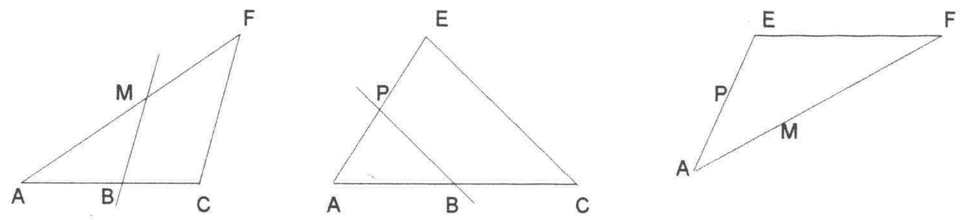
__Clé 2.2__

Le point I est un point particulier du triangle BLG.

__Exercice n° 12__

__Clé 1.2__

Observer les configurations extraites.



__Clé 2.2__

La clé 2.1 suggère d'introduire une transformation du plan.

__Exercice n° 13__

__Clé 1.2__

Prouver que f(P) = g(P)

__Clé 2.2__

La transformation classique de $PA^2 + PB^2 + PC^2$ ne permet pas d'aboutir.
Les écritures $PA^2 + PB^2$, $PB^2 + PC^2$, $PC^2 + PA^2$ suggèrent l'utilisation du théorème de la médiane.

Exercice n° 11

Clé 1.3

Le résultat attendu n'est pas obtenu :
le repère choisi est-il orthonormal ?

Clé 2.3

Prouver que (LI) est perpendiculaire à (BG).
Il reste à démontrer que (LA) est confondue avec (LI).

Exercice n° 12

Clé 2.3

Il existe une homothétie ou une translation
qui transforme A en B et B en C.

Exercice n° 13

Clé 1.3

Le problème revient à transformer l'écriture de f(P) + g(P).

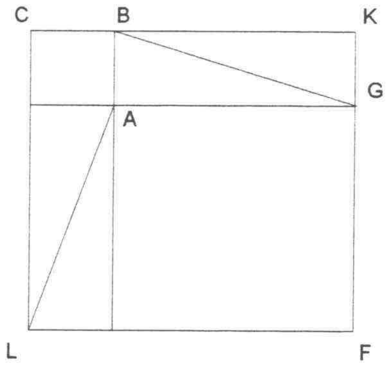
Clé 2.3

Regrouper les termes pour pouvoir appliquer le
théorème de Pythagore

Exercice n° 11

Clé 2.4

Démontrer que (LA) est orthogonale à (BG) ?



Exercice n° 12

Clé 2.4

Déterminer l'image de P et celle de M par l'homothétie ou la translation qui transforme A en B et B en C.

Exercice n° 13

Clé 1.4

Le théorème de la médiane permet de terminer la transformation.

Titre : Quelques exercices de géométrie. Des clés pour les résoudre.

Editeur : IREM des Pays de la Loire.

Auteurs : QUIDU Alain ; JAYEZ Laurent ; GOALOU Richard ; PRIMOT Jean-Jacques

Date : Décembre 1996.

Public concerné : Enseignants tous niveaux.

Mots clés : Chercher - Conjecturer - Prendre des initiatives - Clés.

Résumé : Quelques énoncés d'exercices de géométrie, sans solutions détaillées mais avec des clés progressives permettant d'aboutir à la solution.

Prix : 20 F