IREM

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES
DES PAYS DE LA LOIRE

Des difficultés d'enseigner le hasard

et les probabilités

Anne Boyé

1996

CONFERENCE INTRODUCTIVE AUX PROBABILITÉS

H.E.M., BRAGA, 1996

Anne Boyé, IREM des pays de Loire (Nantes), FRANCE

Jules-Henri Poincaré

"Qu'est-ce qu'une possibilité abstraite, une chance, une probabilité?...De quoi les nombres donnent-ils la valeur dans ce domaine? Que représentent des valeurs pour l'exactitude? Peut-on évaluer l'incertitude, faire une théorie scientifique des erreurs? Deux siècles d'interrogations dont la richesse et la difficulté, de Pascal à Huygens (du droit au gain à la chance de gagner), de Huygens à Laplace (de la valeur de la chance à l'évaluation de l'incertitude), auraient un pouvoir pédagogique malheureusement encore très peu utilisé aujourd'hui."

Pierre Raymond. *De la combinatoire aux probabilités.*

Ce qu'écrivait P. Raymond en 1975 reste largement d'actualité, même si, depuis, des efforts ont souvent été faits de s'appuyer sur l'histoire pour faciliter l'accès aux notions nouvelles, pour comprendre les difficultés auxquelles sont confrontées nos élèves ... Ce n'est pas à vous bien sûr que j'apprendrai l'enrichissement qu'apporte à un enseignement de mathématiques l'introduction d'une perspective historique. Dans ce cas des probabilités, je ne vous imposerai pas une histoire linéaire ni exhaustive (cela serait-il d'ailleurs possible?), mais j'essaierai d'examiner quelques étapes, quelques interrogations historiques qui m'ont paru pouvoir illustrer ces questions auxquelles se heurtent enseignants et élèves et leur apporter peut-être une réponse partielle.

Enseigner les probabilités au niveau de l'enseignement secondaire pose problème à plus d'un titre:

- Nos élèves sont familiers du hasard, ou plutôt des "jeux de hasard", des sondages, des projections probabilistes, mais de façon plus ou moins irrationnelle, au milieu de confusions multiples de langage, d'usage, des esprits, donnant un tour plus ou moins magique ou irrationnel au hasard.

- Les probabilités remettent aussi en cause la vision cartésienne et binaire du monde, que l'on s'est efforcé d'introduire dans d'autres domaines des mathématiques. Elles obligent à passer du concret à l'abstrait, à combiner le particulier au général; il peut être mal aisé par exemple de distinguer probabilité et preuve.

- Nous remarquerons par ailleurs que jusqu'à l'axiomatisation en 1933 par Kolmogorov de la théorie des probabilités, une des parties les plus délicates dans les traités de mathématiques de calcul des probabilités était celle de l'exposé de la définition des probabilités.

La définition classique de la probabilité numérique, celle que nous donne Lacroix par exemple dans son très pédagogique *Traité élémentaire de calcul des probabilités,* en 1816:

"La probabilité mathématique se forme, comme on le voit, en divisant le nombre des chances favorables à l'événement par le nombre total des chances; mais il faut bien faire attention que toutes les chances comparées soient également possibles."

Cette définition donc, qui, au vocabulaire près, est très souvent proposée, est-elle acceptable? Que signifie effectivement "également possible", sinon de probabilité égale? L'on se plonge dans le paradoxe de définir la probabilité par la probabilité.

Nombreux sont ceux qui proposent alors de se débarrasser de cette définition au profit d'une définition "fréquentiste". Mais ceci suppose d'avoir une idée sur la jonction à l'infini entre la fréquence et la probabilité, ajoutant les difficultés de généralisation par induction, sans peut-être trop de précautions.[1]

La difficulté n'avait pas échappé à Jules Henri Poincaré (1854-1912):

" *On ne peut guère donner, écrit-il dans son traité de calcul des probabilités, une définition satisfaisante de la probabilité.* "[2]

Vision pessimiste? Nos élèves sont-ils condamnés à la définition axiomatique de Kolmogorov? L'histoire peut-elle nous aider à trouver un compromis acceptable entre ses contradictions?

L'origine du calcul:

> "*Ainsi, joignant la rigueur des démonstrations de la science à l'incertitude du hasard, et conciliant ces choses en apparence contradictoires, elle [la répartition du hasard dans les jeux qui lui sont soumis], peut, tirant son nom des deux, s'arroger à bon droit ce titre stupéfiant: La Géométrie du Hasard.*"
>
> *Blaise Pascal*

On a coutume de considérer comme acte fondateur du calcul des probabilités la lettre de Pascal à Fermat du 29 juillet 1654, expliquant les grands principes de sa Géométrie du hasard, l'idée d'introduire de la rigueur dans l'incertain étant en assez grande contradiction avec les conceptions habituelles.

"*Un problème relatif aux jeux de hasard, proposé à un austère janséniste, par un homme du monde, a été à l'origine du calcul des probabilités.*" (L'homme du monde étant le Chevalier de Méré.) écrira Siméon Poisson (1781-1840) au XIX° siècle.

Ceci peut-être contesté, certains considérant qu'il est peu légitime de parler de calcul des probabilités avant, au moins, les traités de Huygens et surtout Leibniz et Bernoulli. Nous examinerons pourquoi.

Cependant l' on se doute aussi de l' ancienneté de l' utilisation du hasard dans l' activité humaine. A partir de l'Antiquité, l' existence de jeux avec des astragales (petits os du talon) par exemple est attestée. Les pratiques de recensement pour "prévoir" étaient aussi largement répandues; et, pourtant, l'invention du calcul des probabilités se situe très tard dans l'histoire, à tel point que Ernest Coumet s'est interrogé: "*La théorie du hasard est-elle née par hasard?*"(1970).

Pour simplifier, l' on pourrait considérer que ce sont successivement deux problèmes qui vont lancer la réflexion théorique: le problème du Grand Duc de Toscane, puis celui des partis.

Le problème du Grand Duc de Toscane:

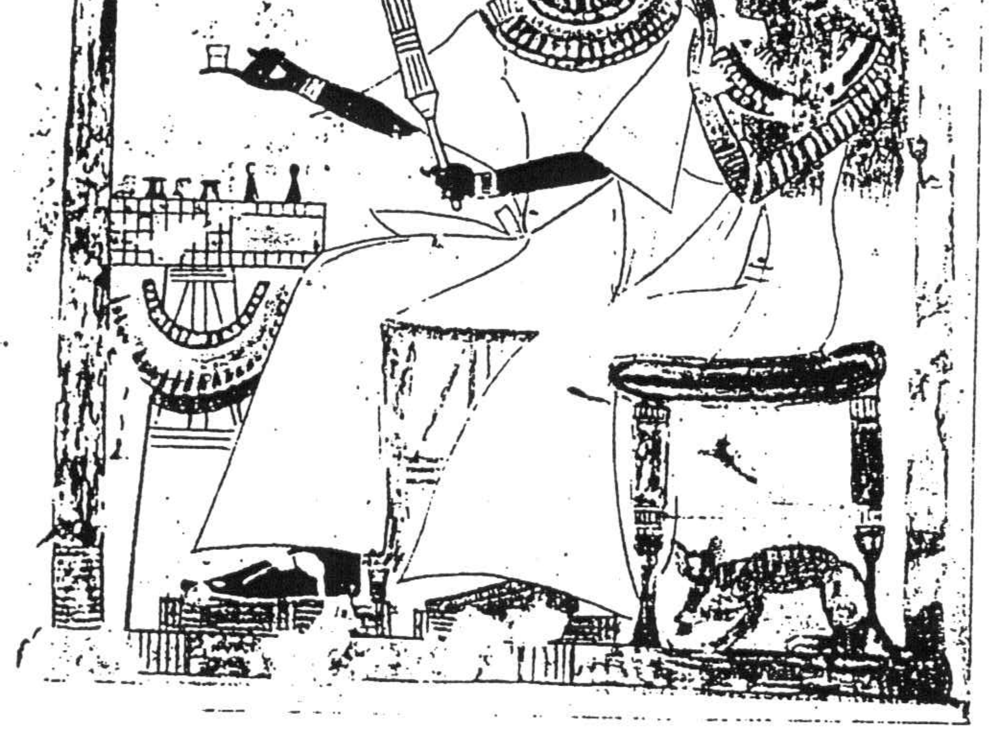
On lance trois dés; il y a autant de cas où la somme des trois nombres obtenus est 9, que de cas où cette somme vaut 10. Pourtant, en pratique,[3] on a pu observé que l'on obtient moins souvent 9 que 10. Pourquoi?

---

[1] Certains élèves peuvent être tentés d'assimiler: vérifications dans de multiples cas, donc "très probable", et démonstration mathématique véritable.

[2] Voir annexe 1

[3] C'est ce que rapporte l'histoire, et qui signifierait que l'expérience a été renouvelée un nombre considérable de fois pour que ce résultat ait pu être remarqué. C'est tout le problème de la probabilité liée à la fréquence.



Peinture d'une tombe égyptienne
montrant un homme noble lançant une astragale.
Oriental Institute, Université de Chicago.

Pour résoudre cette énigme, Galilée propose de considérer que les dés sont lancés successivement, (donc de les différencier), contrairement à la réalité du jeu, puisqu'ils sont lancés simultanément.

En effet, le point crucial est que si l'on ne tient pas compte de l'ordre, (si l'on respecte donc le jeu réel), 9 et 10 peuvent être obtenus chacun de six façons différentes:

$1+2+6=1+3+5=1+4+4=2+2+5=2+3+4=3+3+3=9$,

et $1+3+6=1+4+5=2+2+6=2+3+5=2+4+4=3+3+4=10$

mais, ces différentes façons n'ont pas le même "poids", car $1+3+6$ peut être obtenu six fois (3!), $2+2+6$ trois fois, et $3+3+3$ une seule fois.

Si l'on différencie les dés, on se rend compte que sur 216 jets de dés possibles, la somme dix peut être obtenue dans 27 cas, et la somme neuf, dans 25 cas seulement.

Pour assurer l'équiprobabilité, il faut introduire un ordre "fictif". C'est une des grandes difficultés de la formulation des problèmes de probabilités, à laquelle se heurtera Pascal lui-même dans l'autre grand problème cité.

Le problème des partis:

La question donc a semble-t-il été posée à Pascal par le Chevalier de Méré. On pourrait la résumer ainsi:

Deux joueurs (A et B) jouent à un jeu de pur hasard et le premier qui aura gagné un nombre déterminé (N) de parties sera déclaré vainqueur. Mais voilà qu'ils doivent quitter le jeu avant qu'aucun des deux joueurs n'ait atteint le nombre de parties entraînant la victoire; (A a gagné X parties et B a gagné Y parties). Comment doivent-ils alors, en se séparant, partager l'argent qu'ils ont mis au jeu. (Soit la mise totale S)?

Luca Pacioli (1445-1514) et Nicolo Tartaglia (1500-1557) ont déjà essayé de trouver des solutions à ce problème sur des cas particuliers. Ils ont déjà constaté qu'il s'agit au-delà du jeu de hasard, de problèmes juridiques de partages, où la justice appelle les mathématiques, ce qui en fait leur intérêt.

Chacun a pu reconnaître par ailleurs que pour résoudre le partage, il faut étudier la situation non pas en fonction du passé, mais en fonction de l'avenir. C'est le nombre de parties manquantes qui importe et non celui de parties gagnées.

Mais c'est la correspondance entre Fermat et Pascal qui fera la célébrité du problème. Leurs solutions sont quelque peu différentes. Pascal qualifiera celle de Fermat de "*combinatoire*" et la sienne de "*générale*".

Examinons très brièvement des éléments de ces solutions. Supposons dans un premier temps que A et B ont mis chacun 32 pistoles au jeu et qu'il manque une partie au premier et deux au second. Pascal écrit à Fermat (29 juillet 1654):

"*Considérez donc, Monsieur, que si le premier gagne, il lui appartient 64; s'il perd, il lui appartient 32. Donc s'ils veulent ne point hasarder cette partie et se séparer sans la jouer, le premier doit dire "je suis sûr d'avoir 32 pistoles, car la perte même me les donne; mais pour les 32 autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurez; le hasard est égal, partageons donc ces 32 pistoles par la moitié et me donnez, outre cela mes 32 qui me sont sûres"; il aura donc 48 pistoles et l'autre 16*".

Fig. 15.

(D'après une gravure du XVII[e] siècle, tirée du cabinet de M. Guerrier de Bezance, alors maître des Requêtes.)

Fig. 16.

Portrait de Fermat d'après la gravure placée en tête de ses *Œuvres* (Toulouse 1679).

La méthode de Fermat, exposée par Pascal (24 août 1654), est la suivante:
Si a désigne le fait que A gagne et b le fait que B gagne, le tableau suivant représente toutes les parties possibles.

a a	A gagne
a b	A gagne
b a	A gagne
b b	B gagne

A gagnerait donc trois fois sur quatre et B une fois sur quatre; ce qui donnerai $\frac{3}{4}$ de 64 pistoles à A, soit 48 pistoles, et $\frac{1}{4}$ de 64 pistoles à B, soit 16 pistoles.

C'est la méthode actuelle pour résoudre ce genre de problème; cependant Roberval sera choqué par la manière de Fermat car elle fait intervenir des parties fictives. Dès que A gagne, en effet, le jeu doit en principe s'arrêter. Donc, les parties a a et a b devraient se réduire à "a". Pascal va défendre cette méthode, d'une part parce qu'elle donne le même résultat que la sienne, mais en arguant de plus que les joueurs peuvent s'astreindre à jouer toutes les parties "*puisque cette convention ne change en aucune manière leur condition.*" Cette façon de procéder s'applique à tous les cas de deux joueurs, Pascal indiquant au passage des façons plus rapides de connaître le nombre de "combinaisons" que de les écrire toutes. Dans le cas de trois joueurs, les choses se gâtent:

Si par exemple il manque une partie à A, deux à B, et deux à C; dans la méthode de Fermat, il faut au maximum trois coups pour avoir un gagnant, et il y a donc 27 cas:

a a a	A gagne
a a b	A gagne
a a c	A gagne
a b a	A gagne
a c a	A gagne
b a a	A gagne
c a a	A gagne
a b b	A gagne
a c c	A gagne
b a b	A gagne
c a c	A gagne
b b a	B gagne
c c a	C gagne
a b c	A gagne
a c b	A gagne
b a c	A gagne
b c a	A gagne
c a b	A gagne
c b a	A gagne
b b b	B gagne
b b c	B gagne
b c b	B gagne
c b b	B gagne
b c c	C gagne
c b c	C gagne
c c b	C gagne
c c c	C gagne

A gagnerait donc 17 fois sur 27, B, 5 fois, et C, 5 fois.

Curieusement, ici, Pascal a du mal à prendre en compte les parties"feintes", comme aac, cac, ou abb, où A aurait gagné avant la fin des trois coups, et il critique donc la méthode de Fermat comme mauvaise. Il n'a pas su dans ce cas reprendre les arguments qu'il avait lui-même donnés à Roberval! (ou peut-être sa "méthode générale" ne donnant pas les résultats, y met-il un peu de mauvaise foi.)

Fermat saura, cependant, de façon brillante, convaincre Pascal, dans sa lettre du 25 septembre 1654.

Cette difficulté réelle, de faire intervenir du fictif pour faire apparaître une équiprobabilité, à laquelle se heurtaient Roberval puis Pascal, se retrouvera un siècle et demi plus tard, dans l'article croix ou pile[4] écrit par D'Alembert dans l'Encyclopédie(1795).

D'Alembert a du mal à considérer quatre possibilités pour deux jets d'une pièce afin d'obtenir une fois pile. Il considère trois possibilités:

P, F-P, F-F,

donc deux chances sur trois d'avoir une fois pile sur deux jets. Effectivement, si pile est obtenu au premier jet, la partie peut s'arrêter. Nous savons que le cas P n'a pas le même "poids" que les deux autres cas; il n'y aurait pas équiprobabilité. Il faut pour cela faire intervenir des parties "fictives", qui donneraient: P-P, et P-F.

La conceptualisation du nombre de cas pose donc un réel problème, aussi pour nos élèves.

Revenons à Pascal; il ne s'arrêtera pas là. Et c'est sans doute à l'annexe au Traité du triangle arithmétique: "*Usage du triangle arithmétique pour déterminer les partis qu'on doit faire entre deux joueurs qui jouent plusieurs parties*" qu'il voulait donner le titre "*stupéfiant*" de "*Géométrie du hasard*". Il s'agit en fait pour Pascal, et c'est la première fois, de définir le concept de **l'espérance de gain.**

Pascal fait l'étude du cas général des partis à faire dans toutes les situations initiales possibles, en faisant des raisonnements par récurrence. Il s'appuie bien sûr sur le concept du triangle arithmétique, plus d'ailleurs que sur celui de combinaisons , contrairement à ce que l'on pourrait attendre. Il a montré l'équivalence entre les deux notions, ou presque, mais il lui manque cependant d'avoir conçu $C_n^0=1$, ce qui lui manquerait pour le point de départ de sa récurrence.

Ce traité de Pascal est la première tentative de soumettre le hasard à l'ordre géométrique: principes, propositions, problèmes..; mais c'est d'abord le concept d'espérance ("*ce que l'on a droit d'espérer de la fortune*"), et non celui de probabilité qui a été formalisé.

Notons cependant que ces calculs, même s'ils prenaient exemple sur les jeux de hasard, avaient dès l'origine d'autres ambitions et d'autres terrains d'application.

---

[4]Voir annexe 2

Christiaan Huygens.

Gottfried Wilhelm Leibniz

Huygens, Jacques Bernoulli, Leibniz.

En 1654, Christian Huygens (1629-1695) a 25 ans. Venu en France pour recevoir son doctorat de droit à l'université protestante d'Angers, il séjourne à Paris quelques mois. C'est à ce moment sans doute qu'il est informé du problème des partis et des travaux des mathématiciens français. De retour en Hollande, il travaille sur le sujet et écrit en 1656 à Van Schooten qu'il a un manuscrit sur les jeux de hasard. Cette oeuvre paraîtra en latin en 1657 sous le titre: *De rationiciis in aleae ludo.* (Du calcul dans les jeux de hasard).

C'est en quelque sorte le premier traité "pédagogique" et Huygens commencera par y définir la notion de chance, ou plutôt de *"la valeur de la chance"*, c'est-à-dire là encore d'espérance de gain.

Il donne deux définitions:

"La chance qu'un joueur a de gagner ou de perdre a une valeur déterminée".

"Dans un jeu la chance qu'on a de gagner quelque chose a une valeur telle que si on possède cette valeur on peut se procurer la même chance par un jeu équitable, c'est à dire par un jeu qui ne vise au détriment de personne."

Définitions quelque peu énigmatiques qui peuvent être éclairées par deux propositions qui suivent.

Proposition 1: "Avoir des chances égales d'obtenir a ou b me vaut $\frac{a+b}{2}$"

Proposition 2: "Avoir p chances d'obtenir a et q chances d'obtenir b, les chances étant équivalentes, me vaut $\frac{pa+qb}{p+q}$."

Il s'agit donc bien effectivement d'espérance de gain.

Il n'est peut-être pas utile d'insister sur ce traité de Huygens, qui contient certes le premier essai de définir la "chance", mais qui cependant ne donne pas de méthode générale à l'aide des combinaisons comme avait pu le faire Pascal.

Il faut tout de même retenir que Huygens appliquera le concept opératoire d'espérance qu'il a défini à "l'espérance de vie", à propos d'une question posée par son frère Louis: *"Jusqu'à quel âge doit vivre naturellement un enfant aussitôt qu'il est conçu?"*. Cette question peut être importante pour le calcul de rentes viagères par exemple, et les deux frères s'appuient sur des données de John Grant, sans se préoccuper d'ailleurs de la réalité de cette table. Cette correspondance entre les frères Huygens amorcera la distinction entre la notion de probabilité fondée sur l'égalité des chances, et la notion de probabilité observée à partir de fréquences statistiques.

Nous sommes à la fin du XVII° siècle et aucun de ceux qui ont ainsi donné naissance au calcul des probabilités n'avait sans doute prévu l'immense essor de leur découverte. C'est Leibniz (1644-1716) d'abord qui va s'en saisir; il ouvrira la voie à Jacques Bernoulli.

Leibniz élargit le champ du calcul des probabilités en indiquant la place que l'on doit lui faire du point de vue de l'expérimentation scientifique, et des applications en dehors des mathématiques.

Il énumère des critères qui rendent une hypothèse plus probable qu'une autre, et il fait la liaison avec le calcul des probabilités. Il retient comme critère la puissance qu'a l'hypothèse d'expliquer d'autres phénomènes. Copernic, par exemple, eut-il été le seul à défendre l'héliocentrisme, avait une thèse "*infiniment plus probable*", compte tenu des observations sur lesquelles il s'appuyait.

Il s'agit d'exprimer la probabilité des causes à partir des effets.

Ce faisant, Leibniz[5] propose d'étendre ce calcul, bien au-delà du démontrable, aux domaines les plus divers: moraux, sociaux, techniques...

Il aura d'importantes discussions à ce sujet avec Jacques Bernoulli.

Personne jusqu'à présent n'a encore établi sur des bases solides le lien entre fréquence d'apparition d'un événement dans une suite de parties (que Jacques Bernoulli nommera probabilité *a posteriori*), et la probabilité "géométrique" (*probabilité a priori*), calculée par raison de symétrie, comme lorsqu'on affirme que dans le lancer d'un dé, la probabilité d'apparition du deux est de $\frac{1}{6}$.

Ce sera l'oeuvre de Jacques Bernoulli dans son livre "Ars Conjectandi", publié de façon posthume en 1713 par son neveu Nicolas Bernoulli.

Voici la présentation que Nicolas fait de l'ouvrage de son oncle:

"L'auteur a divisé cette oeuvre en quatre parties. La première contient le Traité de l'illustre Huygens, De rationiciis in aleae ludo, avec des notes, traité que mon oncle a jugé devoir être mis en tête de son ouvrage, car on y trouve les premiers éléments de l'art de conjecturer. La deuxième partie embrasse la théorie des permutations et des combinaisons, théorie absolument nécessaire pour mesurer les probabilités; dans la troisième partie il en a développé les applications aux divers tirages au sort et jeux de hasard. Quant à la quatrième partie par laquelle il aurait voulu montrer l'application et le rapport des parties précédentes aux affaires morales et économiques, affligé depuis longtemps d'une mauvaise santé et enfin prévenu par la mort elle-même, il l'a laissée inachevée."

C'est cette quatrième partie qui restera la plus célèbre car elle contient la première formulation de ce que Poisson nommera en 1857 la loi des grands nombres. Il s'agit d'appliquer le calcul des probabilités au monde réel qui nous entoure, le programme de Leibniz en quelque sorte.

La loi énoncée et démontrée rigoureusement par J.Bernoulli pourrait s'énoncer très grossièrement ainsi:
"Il est très peu probable que, si l'on fait un nombre suffisamment grand d'expériences, la fréquence d'apparition d'un événement s'écarte notablement de sa probabilité."

---

[5] Voir annexe 3

JACOBI BERNOULLI,

Profeſſ. Baſil. & utriuſque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruſſ. Sodal.

MATHEMATICI CELEBERRIMI,

ARS CONJECTANDI,

OPUS POSTHUMUM.

Accedit

TRACTATUS

DE SERIEBUS INFINITIS,

Et EPISTOLA Gallicè ſcripta

DE LUDO PILÆ RETICULARIS.

BASILEÆ,
Impenſis THURNISIORUM, Fratrum.
cIↄ Iↄcc XIII.

Examinons pour mieux comprendre le jeu de pile ou face: pour des raisons "géométriques" de symétrie, nous prenons comme principe que la probabilité "a priori" que la pièce tombe sur le côté pile est de $\frac{1}{2}$.

La loi de Bernoulli n'affirme pas qu'on observera 500 tombés sur le côté pile au cours de 1000 jets; elle dit qu'un écart important par rapport à 500 est peu probable. "Écart important "relativement bien sûr.

Nous pourrions observer par exemple:

sur 10	100	1000	10000	100000	jets
4	55	455	4624	51216	piles

donnant des fréquences de:

$\frac{4}{10}$ $\frac{55}{100}$ $\frac{455}{1000}$ $\frac{4624}{10000}$ $\frac{51216}{100000}$

Donc des écarts à $\frac{1}{2}$ de plus en plus faibles:

0,1 0,05 0,045 0,0376 0,01216.

Jacques Bernoulli est amené à établir cette loi, en ayant remarqué que le calcul de probabilités jusqu'alors, demandait que le nombre de cas soit soigneusement déterminé, et que soit défini combien les uns peuvent arriver plus facilement que les autres "a priori". Or, en dehors des jeux de hasard qui sont conçus dans le but que tous les cas peuvent arriver avec une égale facilité, cela n'a pas lieu, en particulier ceux qui dépendent de "l'oeuvre de la nature" ou de "l'arbitre des hommes". Il propose[6] le cas des conjectures sur un futur état de vie ou de mort en cas de maladie, ou le cas des prévisions météorologiques. alors, *"ce qu' il n'est pas donné d'obtenir a priori l'est du moins a posteriori, c'est-à-dire qu'il sera possible de l'extraire en observant l'issue de nombreux exemples semblables."*

Soulignant[7] que cette *"manière empirique de déterminer par expérience les nombres de cas n'est ni neuve ni insolite"*, il propose, lui, de faire un démonstration rigoureuse en prenant un modèle, dès lors célèbre, d'urne contenant des boules noires et blanches.

"Or bien que cela soit naturellement connu de tous, la démonstration qui permet de le tirer des principes de l'art n'est pas du tout répandue, et par suite il nous incombe d'en traiter en cet endroit, endroit où cependant j'estimerais que je ferais trop peu si je m'en tenais à examiner à démontrer seulement ce que personne n'ignore. Il reste alors à examiner par la suite quelque chose que peut-être personne n'a jusqu'à maintenant rencontré même en y pensant. Il reste assurément à chercher si, en augmentant ainsi le nombre des observations , nous augmentons continuellement la probabilité d'atteindre le rapport réel entre les nombres de cas qui font qu'un événement peut arriver et le nombre de ceux qui font qu'il ne peut arriver, de sorte que cette probabilité dépasse enfin un degré quelconque donné de certitude."

Théoriquement il faudrait faire un nombre infini d'expériences pour connaître la probabilité vraie; la loi que démontre J. Bernoulli signifie qu'un

[6]Voir annexe 4

[7]Voir annexe 5

nombre fini d'expériences peut suffire pour connaître une "bonne" valeur approchée de la probabilité, et qu'un plus grand nombre d'expériences ne donnerait pas d'ailleurs une meilleure valeur, à partir d'un certain seuil. "*Le problème a son asymptote.*"

Précisons de suite que, avant la publication tardive de l'ouvrage de J. bernoulli, Pierre Raymond de Montmort (1678-1719), et Abraham de Moivre (1667-1654), avaient fait paraître deux traités sur le calcul des probabilités.

Nous trouvons en particulier dans celui de De Moivre, (Doctrine of chances), une expression plus complète du théorème de J.Bernoulli sur les épreuves répétées. Il donne en effet une estimation de la loi de l'écart entre probabilité a priori et probabilité a posteriori, et permettra ainsi de construire le premiers modèles probabilistes de phénomènes expérimentaux. Ce traité est d'abord paru dans les transactions philosophiques de 1711. Puis De Moivre l'a complété dans trois éditions successives. Il y fait intervenir en particulier les suites récurrentes et l'analyse, ouvrant la voie à Pierre Simon de Laplace (1749-1827).

Du XVIII° siècle à nos jours:

En dehors de l'intérêt du calcul lui-même l'ouvrage de J. Bernoulli, par l'ouverture qu'il donne, indique déjà toutes les interrogations sur le statut de ce calcul, les interrogations philosophiques aussi sur le hasard, qui font à la fois la richesse et la difficulté des probabilités.

Un des premiers espoirs, une des premières convictions, plutôt, est que le calcul des probabilités fera progresser la connaissance, le jugement, la sagesse. Voici ce que nous trouvons sous la plume[8] de J. Bernoulli:

"*Conjecturer quelque chose, c'est mesurer sa probabilité: l'art de conjecturer ou la stochastique se définit pour nous comme l'art de mesurer aussi exactement que possible les probabilités des choses. Le but est que dans nos jugements et dans nos actions nous puissions toujours choisir ou suivre le parti que nous aurons découvert comme meilleur, préférable, plus sûr ou mieux réfléchi. C'est en cela seulement que réside toute la sagesse du philosophe et toute la sagacité du politique.*"

Ceci sera repris tout au long du XVIII° siècle, en particulier par Condorcet (1743-1794), avec sa mathématique sociale[9]:

"*Cette exposition montrera toute l'utilité de cette science; on verra qu'aucun de nos intérêts individuels ou publics ne lui est étranger, qu'il n'en est aucun sur lequel elle ne donne des idées les plus précises, des connaissances les plus certaines: on verra combien, si cette science était plus répandue, plus cultivée, elle contribuerait, et au bonheur et au perfectionnement de l'espèce humaine.*"

---

[8] Voir annexe 6

[9] Voir annexe 7

Pierre-Simon LAPLACE (1749 - 1827) *Astronome, mathématicien et physicien, célèbre pour son déterminisme, il est pourtant l'auteur d'une œuvre impressionnante sur le calcul des probabilités.*

Citons aussi Lapace, à propos de la loterie[10]:

"Lorsqu'à la loterie de France un numéro n'est pas sorti depuis longtemps, la foule s'empresse de le couvrir de mises. Elle juge que le numéro, resté longtemps sans sortir, doit au prochain tirage, sortir de préférence aux autres. Une erreur aussi commune me paraît tenir à une illusion, par laquelle on se reporte involontairement aux origines des événements. (...) Une illusion semblable persuade à beaucoup de monde que l'on peut gagner sûrement à la loterie, en plaçant chaque fois sur un même numéro, jusqu'à sa sortie, une mise dont le produit surpasse la somme de toutes les mises.

Par une illusion contraire aux précédentes, on cherche dans les tirages passés, les numéros le plus souvent sortis, pour en former des combinaisons sur lesquelles on croit placer sa mise avec avantage. Mais vu la manière dont le mélange des numéros se fait à la loterie, le passé ne doit avoir sur l'avenir aucune influence. les sorties plus fréquentes d'un numéro ne sont que des anomalies du hasard: j'en ai soumis plusieurs au calcul, et j'ai constamment trouvé qu'elles étaient renfermées dans les limites que la supposition d'une égale possibilité de sortie de tous les numéros permet d'admettre sans invraisemblance.(...)

Un des grands avantages du calcul des probabilités est d'apprendre à se défier des premiers aperçus. Comme on reconnaît qu'ils trompent souvent, lorsqu'on peut les soumettre au calcul; on doit en conclure que sur d'autres objets, il ne faut s'y livrer qu'avec une circonspection extrême."

Nous savons hélas que dans le loto ou les autres jeux de ce genre, le hasard pensé, maîtrisé, quantifié par le calcul des probabilités n'existe plus; les forces de l'irrationnel effacent, nient toute connaissance, créant un espace où peut se développer l'exploitation de l'espoir du gain.

L'erreur, entretenue par les organisateurs de loteries, peut venir aussi de la confusion entre une, plusieurs et une infinité d'expériences. Si, dans le lancer d'un dé, le six par exemple n'est pas sorti depuis longtemps, il est courant de penser qu'il sortira sous peu, "pour rattrapper son retard", (puisqu'il doit sortir une fois sur six!) en oubliant que cette probabilité théorique ne sera vérifiée qu'au bout d'un très grand nombre d'expériences, voire d'une infinité.

La difficulté est aussi de consentir au principe fondateur en quelque sorte des probabilités: gommer l'individualité.

Voici ce que rapporte par exemple J.Bertrand (1822-1900):

"L'inoculation, avant la vaccine, était, contre la variole, le meilleur parti qu'on pût prendre; mais un inoculé sur 200 mourait des suites de l'opération. Quelques uns hésitaient; Daniel Bernoulli, géomètre impassible, calculait doctement la vie moyenne, la trouvait accrue de trois ans et déclarait par syllogisme l'inoculation bienfaisante. D'Alembert, toujours hostile à la théorie du jeu, qu'il n'a jamais comprise, repoussait avec grande raison cette fois l'application qu'on voulait en faire: je suppose, dit-il, que la vie moyenne d'un homme de trente ans soit trente autres années et qu'il puisse raisonnablement espérer de vivre encore trente ans en s'abandonnant à la nature et en ne se faisant pas inoculer. Je suppose ensuite qu'en se soumettant à l'opération, la vie moyenne soit de trente quatre ans. Ne semble-t-il pas que, pour apprécier l'avantage de l'inoculation, il ne suffit pas de comparer la vie moyenne de trente quatre ans à la vie moyenne de trente , mais le risque de 1 sur 200 auquel on s'expose de mourir dans un mois, par

---

[10] Voir annexe 8

l'inoculation, à l'avantage éloigné de vivre quatre ans de plus au bout de soixante ans?"

C'est ainsi que Buffon (1707-1788), introduisait en 1777, dans son *Essai d'arithmétique morale, "des règles pour estimer les rapports de vraisemblance, les degrés de probabilité, le poids des témoignages, l'influence des hasards, l'inconvénient des risques et juger en même temps de la valeur réelle de nos craintes et de nos espérances."*

Il rapporte alors la mesure de toute espérance et de toute crainte à celle de *"la crainte de la mort"*, car c'est *"celle qui affecte le plus l'homme en général"*. Il estime qu'il y a 10189 à parier contre 1 qu'un homme de 56 ans vivra plus d'un jour (après consultation des tables de décès de plusieurs paroisses.)

Par conséquent "toute *probabilité égale ou plus petite doit être regardée comme nulle, et toute crainte ou toute espérance qui se trouve au dessous de* $\frac{1}{10000}$ *ne doit ni nous affecter, ni même nous occuper un seul instant le coeur ou la tête."*

Ce problème de l'évaluation des risques est très actuel; en dessous de quelle probabilité doit on considérer un événement comme presqu 'impossible? Il est clair qu'alors nous entrons dans le domaine du sensible. En mathématique stricte, seul un événement de probabilité nulle devrait être considéré comme impossible. Dans la "réalité", un événement de probabilité suffisamment faible ne se produit pas. Qu'est-ce qu'une probabilité suffisamment faible? Il est clair que le risque encouru jouera un rôle dans cette évaluation.

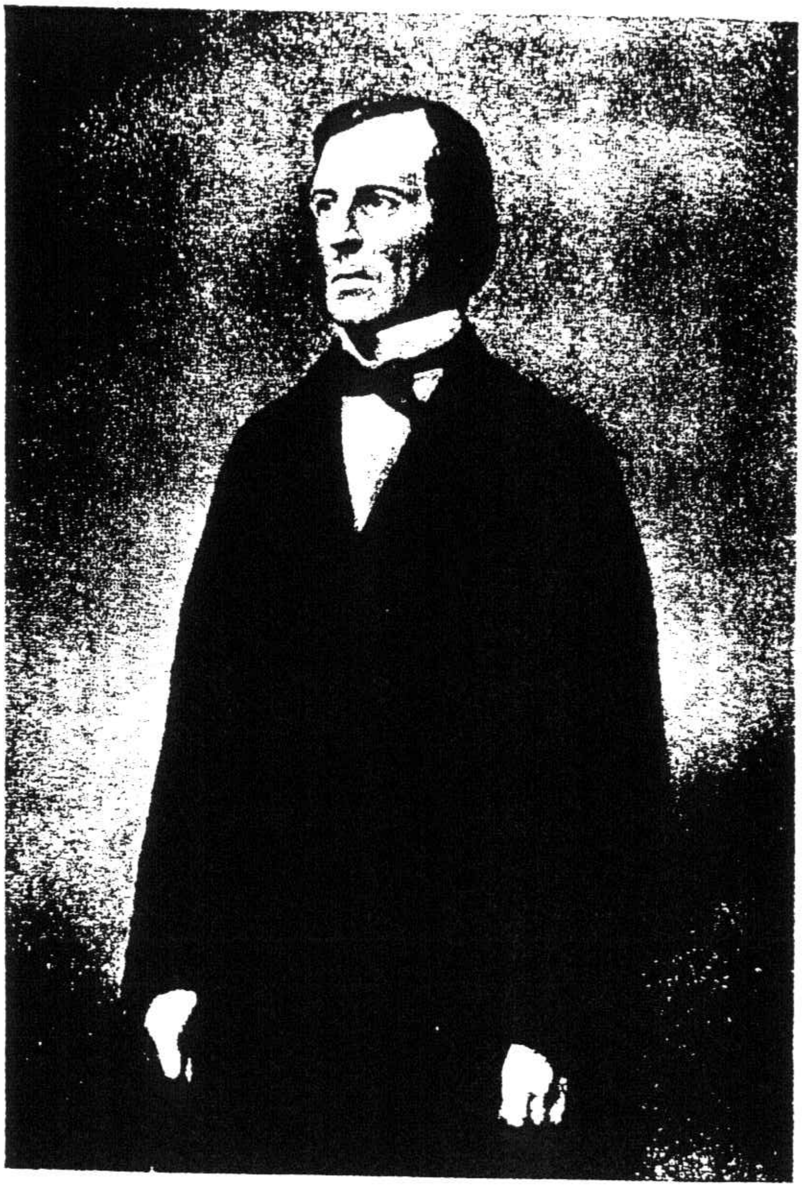
Revenons au traité de J. Bernoulli et à sa loi qui supposait les probabilités des événements connues et permettait de trouver la probabilité que les résultats des expériences à faire les approcheraient. Thomas Bayes (1702-1761), dans les transactions philosophiques cherche alors la probabilité que les probabilités indiquées par des expériences déjà faites soit comprises dans des limites données; autrement dit, remonter de l'expérience à la loi "vraie". C'est ce que l'on appellera probabilité des causes, ou encore probabilité du modèle. La méthode de Bayes, doit permettre de faire le lien entre le mathématique et la réalité sensible. Le problème est de savoir quelle est la valeur pratique du résultat obtenu, son adéquation au réel. Et là se situent de véritables questions et des dérapages possibles. Bayes, lui-même avait senti confusément ces difficultés, puisqu'il ne publia pas sa méthode. Voici ce qu'en dit Lacroix[11]:

"On ne manque donc point de motifs suffisants pour appuyer la légitimité des conclusions du passé à l'avenir, et c'est en cela que consiste le pouvoir de l'analogie; mais n'est-il pas arrivé qu'en se livrant trop à ce pouvoir, les savants, aussi bien que le vulgaire, soient tombés dans l'erreur, et aient hasardé des assertions prématurées? cependant ils ne pouvaient suivre d'autres voies pour découvrir la vérité.(...)

L'hypothèse qui explique complètement un grand nombre de faits n'est donc que probable, et le calcul apprécie le degré de confiance qu'elle mérite. (...)Cette application conduira toujours à des résultats utiles, ou maintiendra dans ce doute salutaire, qui prévient les erreurs dangereuses, lorsqu'on la fera avec circonspection, c'est à dire en distinguant avec soin les faits, afin d'éviter de rapporter à toutes ce qui ne convient qu'à quelques unes, de rendre générales des conclusions qui ne sont vraies qu'entre certaines limites."

---

[11] Voir annexe 9



BOOLE

Georges Boole (1815-1864) aussi, un peu plus tard, soulignera les difficultés, qu'il illustre par une anecdote[12]:

«A little friend of the author's, on being put to bed, was heard to ask his brother the pertinent question, - Why does going to sleep at night make it light in the morning? - The brother, who was a year older, was able to reply, that it would be light in the morning even if little boys did not go to sleep at night.» [13]

Ce problème reste très contemporain, puisque c'est celui de la validité de la loi expérimentale et du modèle.

Ceci est très lié à une autre question philosophique, non moins contemporaine: le déterminisme.

La vision déterministe de Laplace se fait jour déjà sous la plume de J. Bernoulli[14]:

"*Le contingent (tant ce qui est libre - qui est soumis à l'arbitre d'une créature raisonnable - que le fortuit ou l'accidentel - qui dépend du hasard ou de la chance) est ce qui pourrait ne pas être, ne pas advenir ou ne pas avoir été; il relève d'une puissance lointaine, et non pas prochaine, car la contingence n'exclut pas toujours toute nécessité, ni même les causes secondes; je le montre par des exemples. Étant donné la position du dé, sa vitesse et la distance de la table, au moment où il quitte la main du joueur, le dé ne peut tomber autrement qu'il ne tombe en réalité: cela est tout à fait certain; de même, étant donné la composition présente de l'air, et étant donné la masse des vents, des vapeurs et des nuages, leur position, mouvement, direction, vitesse et les lois du mécanisme selon lesquelles tous ces éléments réagissent les uns sur les autres, le temps du lendemain ne peut être autre que ce qu'il sera en réalité; on peut dire que ces effets ne sont pas moins consécutifs à leur causes prochaines que le phénomène de l'éclipse par rapport au mouvement des astres; cependant l'usage veut que l'on compte l'éclipse seule au nombre des faits nécessaires, et que le hasard des dés et le futur du temps soient considérés comme contingents; la seule raison de cet usage est que les données que l'on suppose déterminer les effets postérieurs, et qui dans la nature les déterminent, ne nous sont pas assez connues; et si elles l'étaient, l'étude de la géométrie et de la physique n'est pas assez avancée pour que de ces données le calcul puisse supputer les effets, comme il est possible de calculer et de prédire les Éclipses en considérant les principes de l'astronomie; pour cette raison les éclipses elles-mêmes, quand l'astronomie n'avait pas été portée à ce point de perfection, n'avait pas moins besoin que les deux autres exemples d'être rangées parmi les futurs contingents.(...)Si bien que la contingence est surtout en rapport avec notre connaissance.*"

Texte que nous mettons immédiatement en parallèle avec le célèbre texte[15] de Laplace dans son "*Essai philosophique sur les probabilités*"(1776):

"*Tous les événements, ceux mêmes qui par leur petitesse semblent ne pas tenir aux grandes lois de la nature, en sont une suite aussi nécessaire que*

---

[12]Voir annexe 12

[13]On entendit un des petits amis de l'auteur, sur le point d'être mis au lit, poser à son frère la question pertinente: Pourquoi aller dormir produit le jour le matin? Le frère qui avait un an de plus, fut capable de lui répondre qu'il ferait jour le matin même si les petits garçons n'allaient pas dormir le soir..

[14]Voir annexe 10

[15]Voir annexe 11

les révolutions du soleil. Dans l'ignorance des liens qui les unissent au système entier de l'univers, on les a fait dépendre des causes finales, ou du hasard, suivant qu'ils arrivaient ou se succédaient avec régularité, ou sans ordre apparent; mais ces causes ont été successivement reculées avec les bornes de nos connaissances, et disparaissent entièrement devant la saine philosophie, qui ne voit en elles que l'expression de l'ignorance où nous sommes des véritables causes.(...)."

Pour Laplace comme ce l'était pour J.Bernoulli, on peut transformer notre ignorance en une sorte de savoir, par le calcul des probabilités.

Cette conception est sûrement assez proche de celle de nos élèves. Il est donc important de bouleverser un peu ces certitudes en évoquant les autres questions qu'a pu faire naître l'application du calcul des probabilités à la résolution de problèmes physiques.

En 1859, James Clerk Maxwell (1831-1879), voulant expliquer la pression et la viscosité des gaz par les mouvements des particules va considérer, faute de les connaître avec précisions, que les positions et les vitesses sont réparties au hasard. Il aboutit alors, en utilisant les règles de calcul des probabilités, au calcul de la pression et de la viscosité. Son calcul est confirmé par l'expérience. C'est le premier grand succès de la "physique du hasard".

En 1872, Ludwig Boltzmann (1844-1906), postule qu'un gaz évolue spontanément de la situation la moins probable vers la situation la plus probable, c'est à dire une répartition équilibrée des molécules.

Ballon gonflé d'hydrogène percé avec une fine aiguille. Évolution de la répartition des molécules du temps 0 au temps 3:

Il impose ainsi l'idée d'un déterminisme fondé sur le hasard. Ch. Ruhla pourra écrire en 1989:

"*On passe du hasard par ignorance au hasard par conviction.*"

L'on peut alors s'interroger:

Le hasard est-il dans l'ignorance des hommes ou dans la nature des choses? Hasard par essence ou hasard par ignorance?

Ce sont les grandes questions de la fin du XIX° siècle et du XX° siècle. Elles opposeront par exemple Albert Einstein(1879-1955) et Niels Bohr (1885-1962) à propos de la mécanique quantique.

Nous avons ainsi commencé cet exposé par les difficultés de définir une probabilité, nous en arrivons à la difficulté de définir le hasard. Je laisse ce soin à Giorgio Israel, dans son récent livre "*La mathématisation du réel*":

"*Une fois de plus c'est la notion générale de hasard qui est en jeu. Une définition de ce concept en termes empiriques soulève une foule de problèmes presque inextricables. On peut certes recourir à une définition éliminant tous les problèmes, une définition abstraite et axiomatique qui vide les concepts de leur contenu et les rend inoffensifs. L'axiomatique est tout à fait capable de réaliser ce genre de miracle. C'est en effet un point de vue axiomatique qui a été introduit dans le calcul des probabilités au début des années 1930 par* *les mathématiciens soviétiques Alesandr Iakovlévitch Khintchin (1894-1959) et Andréï Nikolaïévitcth Kolmogorov (1903-1987). Il a connu depuis un immense développement. Comme dans d'autres domaines, il s'est imposé comme moyen de sortir des difficultés logiques posées par les approches classiques. (...) Encore une fois c'est dans le cadre de la mathématisation des sciences morales, sociales et économiques, que se pose la question du rôle des probabilités et de la dialectique entre vision objectiviste et vision subjectiviste du hasard. (...) Dans cette perspective, les approches objectivistes , comme l'axiomatique, conduisent tout simplement à nier ou à sous estimer la valeur probabilistes des sciences non physiques."*

Conclusion:

Au long de cet exposé, de nombreuses questions ont été posées, auxquelles nous avons apporté peu de réponses. Nous pensons cependant avoir mis en évidence, dans ce parcours historique, l'impact très fort qu'a eu ce nouveau mode de pensée, né du calcul des probabilités, tant dans le champ philosophique, sociologique, que scientifique, avec la notion de modèle. C'est un exemple d'une branche des mathématiques qui a pris une place majeure dans les domaines les plus divers de la vie quotidienne. Il semble donc, à l'instar de ce qu'affirmait Poincaré, qu'il soit indispensable d'enseigner les fonctionnements de ce calcul, son développement, de mettre aussi l'accent sur les problèmes du progrès en ce domaine, en particulier dans le cadre de la mathématisation des sciences "humaines", comme le soulignait G.Israel.

Les quelques points abordés ont permis, nous l'espérons, d'éclairer la richesse, mais aussi la difficulté du calcul des probabilités. En cette fin du XX° siècle, nos élèves seront confrontés, sans aucun doute à la notion de modèle mathématique. Il est essentiel de les éduquer progressivement à en saisir l'utilité, et les dangers si la réflexion sur le sens ne suit pas. Il est sans doute important de leur faire sentir que, en mathématique aussi, le questionnement philosophique peut être un des moteurs, et que l'axiomatique ne peut pas tout régler. C'est sans doute plus des réflexions sur le hasard, sur le sens profond de ce qu'est une probabilité, qui les aideront à progresser en mathématique et qui plus est, dans leur formation de citoyens.

Annexe 1

Le seul nom de calcul des probabilités est un paradoxe: la probabilité, opposée à la certitude, c'est ce qu'on ne sait pas, et comment peut-on calculer ce que l'on ne connaît pas? Cependant, beaucoup de savants éminents se sont occupés de ce calcul, et l'on ne saurait nier que la science n'en ait tiré quelque profit. Comment expliquer cette apparente contradiction?

La probabilité a -t-elle été définie? Et, si elle peut l'être, comment ose-t-on en raisonner? La définition, dira-t-on, est bien simple:

La probabilité d'un événement est le rapport du nombre de cas favorables à cet événement au nombre total de cas possibles,... pourvu que ces cas soient également probables. Nous voilà donc réduits à définir le probable par le probable. Comment saurons nous que deux cas possibles sont également probables? Sera-ce par une convention?

(...)

La conclusion qui semble résulter de tout cela, c'est que le calcul des probabilités est une science vaine, qu'il faut se défier de cet instinct obscur que nous nommions bon sens et auquel nous demandions de légitimer nos conventions.

Mais, cette conclusion, nous ne pouvons plus y souscrire; cet instinct obscur, nous ne pouvons nous en passer; sans lui la science serait impossible; sans lui nous ne pourrions ni découvrir une loi, ni l'appliquer.

J.H. Poincaré, *La science et l'hypothèse,* 1902

Annexe 2:

CROIX OU PILE, (*analyse des hasards.*) Ce jeu, qui est très-connu, & qui n'a pas besoin de définition, nous fournira les réflexions suivantes. On demande combien il y a à parier qu'on amenera *croix* en jouant deux coups consécutifs. La réponse qu'on trouvera dans tous les auteurs, & suivant les principes ordinaires, est celle-ci. Il y a quatre combinaisons.

Premier coup.	Second coup.
Croix.	*Croix.*
Pile.	*Croix.*
Croix.	*Pile.*
Pile.	*Pile.*

De ces quatre combinaisons, une seule fait perdre & trois font gagner; il y a donc 3 contre 1 à parier en faveur du joueur qui jette la pièce. S'il parioit en trois coups, on trouveroit huit combinaisons, dont une seule fait perdre, & sept font gagner; ainsi, il y auroit 7 contre 1 à parier. *Voyez* COMBINAISON & AVANTAGE. Cependant cela est-il bien exact? Car, pour ne prendre ici que le cas de deux coups, ne faut-il pas réduire à une les deux combinaisons qui donnent *croix* au premier coup? Car, dès qu'une fois *croix* est venu, le jeu est fini, & le second coup est compté pour rien. Ainsi, il n'y a proprement que trois combinaisons de possibles :

Croix, premier coup.
Pile, *Croix*, premier & second coup.
Pile, *pile*, premier & second coup.

Donc il n'y a que 2 contre 1 à parier. De même, dans le cas de trois coups, on trouvera :

Croix.
Pile, *croix.*
Pile, *pile*, *croix.*
Pile, *pile*, *pile.*

Donc il n'y a que 3 contre 1 à parier.

Annexe 3:

« Les gens de méditation ordinairement ne sauraient goûter cette multitude de vues légères et peu sûres dont il faut se servir dans le train des affaires et dans les sciences pratiques comme sont la politique et la médecine; mais ils ont grand tort. C'est de ces emplois comme du jeu où il faut se résoudre et prendre parti lors même qu'il n'y a aucune assurance; il y a une science qui nous gouverne dans les incertitudes même pour découvrir de quel côté la plus grande apparence se trouve. Mais il est étonnant qu'elle est presque inconnue et que les logiciens n'ont pas examiné les degrés de probabilité ou de vraisemblance qu'il y a dans les conjectures ou preuves, qui ont pourtant leur estimation aussi assurée que les nombres. Cette estimation nous peut et doit servir non pas pour venir à une certitude, ce qui est impossible, mais pour agir le plus raisonnablement qu'il se peut sur les faits ou connaissances qui nous sont données.»

Leibniz, *Opuscules et oeuvres*, édité par Louis Couturat.

Annexe 4:

On a montré dans le chapitre précédent comment, d'après les nombres de cas dans lesquels peuvent exister ou ne pas exister les arguments en faveur de n'importe quelle chose, dans lesquels ils peuvent révéler ou ne pas révéler, ou même révéler le contraire, les forces de ce qui prouve de ces arguments et les probabilités des choses qui leur sont proportionnelles peuvent être déduites et estimées par le calcul. On en est venu à ce point que pour former selon les règles des conjectures sur n'importe quelle chose il est seulement requis d'une part que les nombres de cas soient soigneusement déterminés, et d'autre part que soit défini combien les uns peuvent arriver plus facilement que les autres. Mais c'est ici enfin que surgit une difficulté, nous semble-t-il: cela peut se voir à peine dan quelques très rares cas et ne se produit presque pas en dehors des jeux de hasard que leur premiers inventeurs ont pris soin d'organiser en vue de se ménager l'équité, de telle sorte que fussent assurés et connus les nombres de cas qui doivent entraîner le gain ou la perte, et de telle sorte que tous ces cas puissent arriver avec une égale facilité. En effet lorsqu'il s'agit de tous les autres résultats, dépendant pour la plupart soit de l'oeuvre de la nature soit de l'arbitre des hommes, cela n'a pas du tout lieu. Ainsi, par exemple,(...) qui donc parmi les mortels définira le nombre de maladies, qui sont autant de cas, qui ont le pouvoir d'envahir les innombrables parties du corps humain à l'âge qu'on voudra, et qui ont le pouvoir de nous apporter la mort? Qui définira combien est plus facile à celle-ci qu'à celle-là, la peste ou l'hydropisie, l'hydropisie ou la fièvre, d'anéantir un homme, en sorte qu'à partir de là puisse être formée une conjecture sur un état futur de vie ou de mort? Qui encore recensera les cas innombrables de changements auxquels l'air est soumis chaque jour, en sorte qu'on puisse à partir de là conjecturer ce que sera son état après un mois, sans parler d'une année?

(...)

Car des faits dépendent de causes tout à fait cachées, et destinées de plus par l'innombrable variété des assemblages à se jouer éternellement de notre recherche: il serait donc absolument d'un insensé de vouloir connaître quelque chose à cette matière.

Mais à la vérité s'offre à nous un autre chemin pour obtenir ce que nous cherchons. Ce qu'il n'est pas donné d'obtenir a priori l'est du moins a posteriori, c'est à dire qu'il sera possible de l'extraire en observant l'issue de nombreux exemples semblables; car on doit présumer que, par la suite, chaque fait peut arriver et ne pas arriver dans le même nombre de cas qu'il avait constaté auparavant, dans un état de choses semblables, qu'il arrivait ou n'arrivait pas. »

Jacques Bernoulli, *Ars conjectandi,* traduction Lalande-Meusnier

Annexe 5:

Cette manière empirique de déterminer par expérience les nombres des cas n'est ni neuve ni insolite. (...). C'est la même que tous observent constamment dans la pratique quotidienne. Enfin, il ne peut échapper à personne que, pour juger par ce moyen de quelque événement, il ne suffirait pas d'avoir fait choix d'une ou deux expériences, mais qu'il serait requis une grande quantité d'expériences: tout être des plus stupides, par je ne sais quel instinct naturel, par lui-même et sans le guide d'aucun enseignement (chose absolument admirable) tient pour évident que, plus on aura recueilli de nombreuses observations de ce genre, moins grand sera le danger de s'écarter du but. Or, bien que cela soit naturellement connu de tous, la démonstration qui permet de le tirer des principes de l'art n'est pas du tout répandue, et par suite il nous incombe d'en traiter à cet endroit, endroit où cependant j'estimerais que je ferais trop peu si je m'en tenais à démontrer seulement ce que personne n'ignore. Il reste alors à examiner par la suite quelque chose que peut-être personne n'a jusqu'à maintenant rencontré même en y pensant. Il reste assurément à chercher si, en augmentant ainsi le nombre des observations, nous augmentons continuellement la probabilité d'atteindre le rapport réel entre les nombres de cas qui font qu'un événement peut arriver, de sorte que cette probabilité dépasse enfin un degré quelconque donné de certitude; ou si le problème, pour ainsi dire, a son asymptote, c'est à dire s'il existe un degré de certitude qu'il n'est jamais possible de dépasser.

Jacques Bernoulli, *Ars conjectandi,* traduction Meusnier-Lalande.

Annexe 6:

« Conjecturer quelque chose, c'est mesurer sa probabilité: l'art de conjecturer ou la stochastique se définit pour nous comme l'art de mesurer aussi exactement que possible les probabilités des choses. Le but est que dans nos jugements et dans nos actions nous puissions toujours choisir ou suivre le parti que nous aurons découvert comme meilleur, préférable, plus sûr ou mieux réfléchi. C'est en cela seulement que réside la sagesse du philosophe et toute la sagacité du politique. »

Jacques Bernoulli, *Ars Conjectandi,* traduction Meusnier-Lalande.

Annexe 7:

« L'application du calcul aux sciences morales et politiques n'a donc pu naître qu'à l'époque où les mathématiques ont été cultivées avec succès chez des peuples dont la liberté ait eu la tranquillité pour compagne et les lumières pour appui. En Hollande, le célèbre Jean de Witt, disciple de Descartes, et en Angleterre, le chevalier Petty, donnèrent les premiers essais de cette science dans le siècle dernier, à peu près à l'époque où Fermat et Pascal créaient le calcul des probabilités, qui en est une des premières bases, et n'osaient l'appliquer qu'au jeu de hasard, ou n'avaient pas même l'idée de l'employer à des usages plus importants et plus utiles.

Maintenant l'étendue des applications permet de les regarder comme formant une science à part. (Il s'agit de la mathématique sociale).

(...)

Cette exposition montrera toute l'utilité de cette science; on verra qu'aucun de nos intérêts individuels ou publics ne lui est étranger, qu'il n'en est aucun sur lequel elle ne donne des idées plus précises, des connaissances plus certaines: on verra combien, si cette science était plus répandue, plus cultivée, elle contribuerait, et au bonheur et au perfectionnement de l'espèce humaine. »

Condorcet, *Extrait du projet reformulé de mathématique sociale.*
(Journal d'instruction sociale les 22 juin et 6 juillet 1795)

Annexe 8:

« Lorsqu'à la loterie de France un numéro n'est pas sorti depuis longtemps, la foule s'empresse de le couvrir de mises. Elle juge que le numéro, resté longtemps sans sortir, doit au prochain tirage, sortir de préférence aux autres. Une erreur aussi commune me paraît tenir à une illusion, par laquelle on se reporte involontairement aux origines des événements. (...). Une illusion semblable persuade beaucoup de monde que l'on peut gagner sûrement à la loterie, en plaçant chaque fois sur un même numéro, jusqu'à sa sortie, une mise dont le produit surpasse la somme de toutes les mises.

Par une illusion contraire aux précédentes, on cherche dans les tirages passés, les numéros les plus souvent sortis, pour en former des combinaisons sur lesquelles on croit placer sa mise avec avantage. Mais vu la manière dont le mélange des numéros se fait à la loterie, la passé ne doit avoir sur l'avenir aucune influence. Les sorties plus fréquentes d'un numéro ne sont que des anomalies du hasard: j'en ai soumis plusieurs au calcul, et j'ai constamment trouvé qu'elles étaient renfermées dans des limites que la supposition d'une égale possibilité de sortie de tous les numéros permet d'admettre sans invraisemblance.

Un des grands avantages du calcul est d'apprendre à se défier des premiers aperçus. Comme on reconnaît qu'ils trompent souvent, lorsqu'on peut les soumettre au calcul, on doit reconnaître que sur d'autres objets, il ne faut s'y livrer qu'avec une circonspection extrême. »

Laplace

Annexe 9:

« On ne manque donc point de motifs suffisants pour appuyer la légitimité des conclusions du passé à l'avenir; et c'est en cela que consiste le pouvoir de l'analogie; mais n'est-il pas arrivé qu'en se livrant trop à ce pouvoir, les savants, aussi bien que le vulgaire, soient tombés dans l'erreur, et aient hasardé des assertions prématurées? Cependant ils ne pouvaient suivre d'autres voies pour découvrir la vérité.

(...)

Hors de là, on ne peut plus que balancer les cas favorables à l'analogie avec les cas contraires; et s'il ne s'en présente pas d'abord de cette dernière espèce, rien ne garantit qu'il n'en arrivera point. L'hypothèse qui explique complètement un grand nombre de faits n'est donc encore que probable, et le calcul apprécie le degré de confiance qu'elle mérite: mais tant que les faits ne seront pas tous observés, tous mesurés avec la plus grande précision, aucune hypothèse ne se changera en véritable théorie; les plus heureuses ne seront que des méthodes artificielles, pour lier par une seule formule, ou comprendre dans une seule expression, la dépendance d'un nombre de faits plus ou moins grand. (...)

Cette application conduira toujours à des résultats utiles, ou maintiendra un doute salutaire, qui prévient les erreurs dangereuses, lorsqu'on la fera avec circonspection, c'est à dire en distinguant avec soin les faits, afin d'éviter de rapporter à toutes ce qui ne convient qu'à quelques unes, de rendre générales des conclusions qui ne sont vraies qu'entre certaines limites. »

Sylvestre François Lacroix, *Traité élémentaire de calcul des probabilités,* 1815.

Annexe 10:

« Le contingent (tant ce qui est libre - qui est soumis à l'arbitre d'une créature raisonnable - que le fortuit ou l'accidentel - qui dépend du hasard ou de la chance) est ce qui pourrait ne pas être, ne pas advenir ou ne pas avoir été; il relève d'une puissance lointaine, et non pas prochaine, car la contingence n'exclut pas toujours toute nécessité, ni même les causes secondes; je le montre par des exemples. Étant donné la position du dé, sa vitesse et la distance de la table, au moment où il quitte la main du joueur, le dé ne peut tomber autrement qu'il ne tombe en réalité: cela est tout à fait certain; de même, étant donné la composition présente de l'air, et étant donné la masse des vents, des vapeurs et des nuages, leur position, mouvement, direction, vitesse et les lois du mécanisme selon lesquelles tous ces éléments réagissent les uns sur les autres, le temps du lendemain ne peut être autre que ce qu'il sera en réalité; on peut dire que ces effets ne sont pas moins consécutifs à leurs causes prochaines que le phénomène de l'éclipse par rapport au mouvement des astres; cependant l'usage veut que l'on compte l'éclipse seule au nombre des faits nécessaires, et que le hasard des dés et le futur du temps soient considérés comme contingents; la seule raison de cet usage est que les données que l'on suppose déterminer les faits postérieurs, et qui dans la nature les déterminent, ne nous sont pas assez connues; et si elles l'étaient, l'étude de la géométrie et de la physique n'est pas assez avancée pour que de ces données le calcul puisse supputer les effets, comme il est possible de calculer et de prédire les éclipses en considérant les principes de l'astronomie.

Pour cette raison les éclipses elles-mêmes, quand l'astronomie n'avait pas été portée à ce point de perfection n'avaient pas moins besoin que les deux autres exemples d'être rangées parmi les futurs contingents. Il s'ensuit que ce qui peut sembler contingent à quelqu'un en une circonstance, pour un autre, (ou plutôt pour le même), en un autre temps, une fois les causes connues, sera nécessaire; si bien que le contingent est surtout en rapport avec notre connaissance, dans la mesure où nous ne voyons dans ce qui se présente aucune opposition à ce que cela ne soit pas ou que cela n'advienne pas, même si ici et maintenant cela est ou sera nécessairement par la force d'une cause prochaine ignorée de nous. »

Jacques Bernoulli, *Ars conjectandi,* traduction Meusnier-Lalande.

Annexe 11:

« Tous les événements, ceux mêmes qui par leur petitesse semblent ne pas tenir aux grandes lois de la nature, en sont une suite aussi nécessaire que les révolutions du soleil. Dans l'ignorance des liens qui les unissent au système entier de l'univers, on les a fait dépendre des causes finales, ou du hasard, suivant qu'ils arrivaient et se succédaient avec régularité, ou sans ordre apparent; mais ces causes imaginaires ont été successivement reculées avec les bornes de nos connaissances, et disparaissent entièrement devant la saine philosophie, qui ne voit en elles que l'expression de l'ignorance où nous sommes des véritables causes. Les événements actuels ont avec les précédents une liaison fondée sur le principe évident, qu'une chose ne peut commencer d'être, sans une cause qui la produise. (...)

Une intelligence qui pour un instant donné connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, seraient présents à ses yeux. (...).

Tous ces efforts (de l'esprit humain) dans la recherche de la vérité tendent à le rapprocher sans cesse de l'intelligence que nous venons de concevoir, mais dont il restera toujours infiniment éloigné. »

Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités*, 1776.

Annexe 12:

« As we can neither re-enter nor recall the state of infancy, we are unable to say how far such results as the above serve to explain the confidence with which young children connect events whose association they have once perceived. But we may conjecture, generally, that the strength of their expectations is due to the necessity of inferring (as part of their rational nature), and the narrow but impressive experience upon which the faculty is exercised. Hence the reference of every kind of sequence to that of cause and effect. A little friend of the author's, on being put to bed, was heard to ask his brother the pertinent question:"Why does going to sleep at night make it light in the morning?" The brother, who was a year older, was able to reply, that it would be light in the morning even if little boys did not go to sleep at night. »

George Boole, *An investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of Logic and Probabilities,* 1854.

Annexe 13:

« On voit par cet essai, que la théorie des probabilités n'est au fond, que le bon sens réduit au calcul: elle fait apprécier avec exactitude, ce que les esprits justes sentent par une sorte d'instinct, sans qu 'ils puissent souvent s'en rendre compte. Si l'on considère les méthodes analytiques auxquelles cette théorie a donné naissance, la vérité des principes qui lui servent de base, la logique fine et délicate qu'exige leur emploi dans la solution des problèmes, les établissements d'utilité publique qui s'appuient sur elle, et l'extension qu'elle a reçue et qu'elle peut recevoir encore, par son application aux questions les plus importantes de la philosophie naturelle et de l'économie politique; si l'on observe ensuite que dans les choses mêmes qui ne peuvent être soumises au calcul, elle donne des aperçus les plus sûrs qui puissent nous guider dans nos jugements, et qu'elle nous apprend à nous garantir des illusions qui souvent nous égarent; on verra qu'il n'est point de science plus digne de nos méditations, et dont les résultats soient plus utiles. »

Théorie analytique des probabilités par M. le Comte de Laplace, 1814.

Annexe 14:

« Je mets au rang des illusions l' application que Leibniz et Daniel Bernoulli ont faite du calcul des probabilités, à la sommation des séries. (...).

Leibniz toujours conduit par une métaphysique singulière et très déliée, considéra que la suite, plus un, moins un, plus un, etc... devient l'unité ou zéro, suivant que l'on s'arrête à un nombre de termes impair ou pair; et comme dans l'infini, il n'y a aucune raison de préférer le nombre pair à l'impair, on doit, suivant les règles des probabilités, prendre la moitié des résultats relatifs à ces deux nombres, et qui sont zéro et l'unité; ce qui donne 1/2 pour la valeur de la série.(...) »

(Laplace note un peu plus loin qu'en développant en séries une certaine fraction, il serait possible de montrer que la somme précédemment proposée serait aussi 2/3.)

« Les règles des probabilités donneraient donc alors un faux résultat; ce qui prouve combien il serait dangereux d'employer de semblables raisonnements, surtout dans les sciences mathématiques, que la rigueur de leurs procédés doit éminemment distinguer. »

Théorie analytique des probabilités par M. le Comte de Laplace, 1814.

Bibliographie:

Bernoulli, Jacobi, *Ars conjectandi,* opus posthumum, 1713.
Bernoulli, Jacques, *Ars conjectandi,* traduction et commentaires de Norbert Meusnier et Bernard Lalande, IREM de Rouen, 1987.
Boole, Georges, *An investigation of the laws of thought,* Dover Publications, New york, 1958.
Bru, Bernard, *Petite histoire du calcul des probabilités,* Fragments d'histoire des mathématiques, brochure APMEP n° 41, 1981.
Condorcet, Marie, Marquis de, *Elements du calcul des probablités,* Paris 1816, reed. IREM Paris VII, 1994.
Dahan Dalmedico, Amy, *Le déterminisme de Pierre-Simon Laplace et le déterminisme aujourd'hui,* in Chaos et déterminisme, Seuil, Paris, 1992.
Dossier Pour la science, *Le hasard*, hors série 1996.
Ekeland, Ivar, *Au hasard,* Seuil, Paris, 1991.
Henry, Michel, *L'enseignement des probabilités,* IREM de Besançon, 1994.
Israel, Giorgio, *L'histoire du principe du déterminisme et ses rencontres avec les mathématiques,* in, Chaos et déterminisme, Seuil, Paris, 1992.
Israel, Giorgio, *La mathématisation du réel,* Seuil, Paris, 1996.
Lacroix ,Sylvestre-François, *Traité élémentaire de calcul des probabilités,* Paris, 1822, réed. IREM Paris VII, 1994.
Laplace, Pierre-Simon de, *Théorie ananlytique des probabilités,* Paris, 1814.
Lasnier, Denis, *La géométrie du hasard et L'espérance du Hollandais,* Scholies n°16, Caen, 1992.
Pascal, Blaise, *Oeuvres complètes,* Seuil, Paris, 1963.
Poincaré, Henri, *La science et l'hypothèse,* 1902, Flammarion, Paris, 1968.
Raymond, Pierre, *De la combinatoire aux probabilités,* Maspero, Paris, 1975.
Stewart, Ian, *Dieu joue-t-il aux dés?,* Champs Flammarion, Paris, 1992.

Titre : Des difficultés d'enseigner le hasard et les probabilités.

Éditeur : IREM des Pays de la Loire.

Auteur : Anne BOYÉ.

Date : Novembre 1996.

Public concerné : Enseignants, tous niveaux.

Spécialités : Histoire des mathématiques-enseignement des probabilités.

Mots clés : Probabilités-équiprobabilité-fréquence-hasard-problème des partis-espérance de gain-mathématisation du réel-théorie axiomatique des probabilités-probabilité a priori-probabilité a posteriori-probabilité des causes-mathématique sociale-déterminisme.

Résumé : Quelques réflexions sur l'histoire du calcul des probabilités, la lente élaboration de la notion de modèle mathématique, et les interrogations philosophiques et épistémologiques que cette théorie a fait naître, pour mieux comprendre les difficultés de compréhension à propos du hasard et des probabilités.

Prix : 20 F