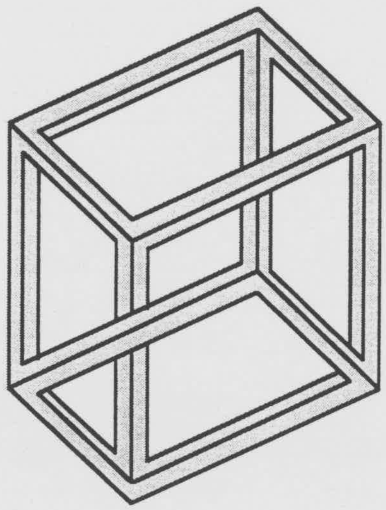
UNIVERSITE DE NANTES

I.R.E.M. des Pays de la Loire

Centre de Nantes

Algèbre linéaire 2



B. Truffault & A. Vogel

Algèbre linéaire 2

Sommaire

Chapitre V. Le déterminant

Bien longtemps avant l'apparition des matrices, on savait déjà exprimer les solutions des sytèmes d'équations linéaires au moyen de formules renfermant un symbole presque magique : *le déterminant*. On savait aussi venir à bout de ces problèmes au moyen de méthodes d'élimination du type de celles que nous avons rencontrées.

La fascination pour les formules a longtemps conduit à présenter le déterminant comme la clef de voute de l'algèbre linéaire, en considérant les méthodes d'élimination commes accessoires. Les moyens actuels de calcul permettent de traiter des problèmes comportant un très grand nombre de variables, pour autant qu'on dispose de méthodes numériques adaptées. Les **algorithmes** fondés sur le principe d'élimination en font partie – ce ne sont pas les seules – alors que les **formules** condensées sous forme de déterminant conduisent très vite à des calculs monstrueux voire aberrants. Le déterminant n'en est pas pour autant condamné à la désuétude car il reste un outil indispensable sur le plan théorique.

§1. Définition et premières propriétés

Définition 1 : nous admettons ([1]) qu'il existe une application de $\mathbf{K}^{n\times n}$ dans $\mathbf{K}$, appelée *déterminant d'ordre n* et notée dét, qui vérifie les propriétés suivantes, où λ désigne un scalaire quelconque et A_i et A_i' $(1\leq i\leq n)$ des matrice-lignes :

(1) *Multilinéarité* : le déterminant est une fonction linéaire relativement à chaque ligne de l'argument.

Ce qui s'explicite, pour $i\in\{1,\dots,n\}$:

$$\text{dét}\begin{bmatrix} A_1 \\ \dots \\ A_{i-1} \\ A_i+\lambda A_i' \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \text{dét}\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ A_i \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \lambda\,\text{dét}\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ A_i' \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

(2) *Dégénérescence* : si A a deux lignes égales, alors $\text{dét}\,A = 0$

(3) *Normalisation* : $\text{dét}\,I_n = 1$.

On peut en déduire directement quelques propriétés simples.

(1-1) Proposition 1 : si une matrice A a une ligne nulle, alors $\text{dét}\,A=0$.

démonstration : si la ligne A_i est nulle, on peut la présenter sous la forme :

$$A = A_i - A_i$$

On applique la propriété (1) de la définition avec $\lambda=-1$ et $A_i' = A_i$, on obtient :

$$\text{dét}\,A = \text{dét}\,A - \text{dét}\,A = 0. \qquad \lhd$$

---

1 Il pourrait se faire que cette définition soit incohérente pour l'une ou l'autre des raisons suivantes :
- ces propriétés purraient être contradictoires et ne définir aucune fonction,
- les conditions énoncées pourraient être vérifiées par différentes fonctions

ce qui suit serait alors sans objet dans un cas, incohérent dans l'autre. Provisoirement nous nous contentons d'admettre qu'il n'en est rien. En effet, dans l'immédiat, il est plus important de mobiliser notre attention sur les propriétés utiles du déterminant que sur les discussions au sujet de ses fondements logiques

Rappel : on a défini les matrices élémentaires, notées :

$$P_{ij}\ ,\ P_i(\lambda)\ \text{ et }\ P_{ij}(\lambda)$$

qui permettent de décrire les opérations de réduction des matrices comme suit.

La multiplication :

- $P_{ij}A$ échange les lignes A_i et A_j, $(L_i \leftrightarrow L_j)$,
- $P_i(\lambda)A$ remplace la ligne A_i par λA_i, $(L_i \rightarrow \lambda L_i)$),
- $P_{ij}(\lambda)A$ remplace la ligne A_i par la ligne $A_i + \lambda A_j$. $(L_i \rightarrow L_i + \lambda L_j)$

Il est naturel d'étudier l'effet de ces transformations sur les déterminants.

(1-2) Proposition : étant donnés une matrice A, carrée d'ordre n, un scalaire λ, et deux entiers i et j, compris entre 1 et n, on a toujours :

(4) $$\text{dét}(P_{ij}(\lambda)A) = \text{dét}\, A,$$

(5) $$\text{dét}(P_i(\lambda)A) = \lambda\ \text{dét}\, A,$$

(6) $$\text{dét}(P_{ij}A) = -\text{dét}\, A.$$

Concrètement, on retiendra que :

- si l'on remplace la ligne A_i par $A_i + \lambda A_j$, le déterminant ne change pas ;
- si l'on multiplie une ligne par λ, le déterminant est multiplié par λ ;
- si l'on échange deux lignes, le déterminant est changé en son opposé.

Démonstration

1) On a :

$$P_{ij}(\lambda)A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ A_i + \lambda A_j \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

On applique la propriété (1) de la définition avec $A_i' = A_j$, puis la propriété (2) car $i \neq j$, on obtient :

$$P_{ij}(\lambda)A = \text{dét}\, A.$$

2) On note que :

$$P_i(\lambda)A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ 0 + \lambda A_j \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

on applique (1), puis la proposition 1, on obtient :

$$\text{dét}\, P_i(\lambda)A = \lambda\ \text{dét}\, A.$$

3) On suppose que $i < j$, on note que :

$$P_{ij}(1)A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i + A_j \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \text{ puis } P_{ji}(-1)[P_{ij}(1)A] = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i + A_j \\ \vdots \\ A_j - (A_i + A_j) \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i + A_j \\ \vdots \\ -A_i \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

On, applique (1), (5), (3), on obtient :

$$\text{dét}\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i + A_j \\ \vdots \\ -A_i \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \text{dét}\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ -A_i \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \text{dét}\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ -A_i \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = -\text{dét}\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + -\text{dét}\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = -\text{dét}\, P_{ij}A$$

On effectue le bilan en tenant compte de (4), il vient :

$$-\text{dét}\, P_{ij}A = \text{dét}[P_{ji}(-1)P_{ij}(1)A] = \text{dét}\, A.$$ ◅

(1-3) Corollaire : étant donnés un scalaire quelconque λ et deux entiers distincts i et j, compris entre 1 et n, on a :

(7) $$\text{dét}\, P_{ij}(\lambda) = 1,$$

(8) $$\text{dét}\, P_i(\lambda) = \lambda,$$

(9) $$\text{dét}\, P_{ij} = -1.$$

Démonstration : on applique la propostion précédente avec $A = I_n$, en tenant compte de la propriété (3). ◅

(1-4) Corollaire : pour toute matrice carrée A et pour toute matrice élémentaire P, de même ordre, on a :

$$\text{dét}\,(PA) = \text{dét}\, P \,.\, \text{dét}\, A.$$

Démonstration : on applique la proposition 1-2 et le corollaire précédent. ◅

(1-5) Théorème : soit A une matrice carrée, d'ordre n, on note son rang r.

(10) $$\text{dét}\, A \neq 0 \Leftrightarrow r = n.$$

Remarque : cette propriété s'énonce aussi bien :

(11) $$\text{dét}\, A = 0 \Leftrightarrow r < n.$$

Démonstration : on applique l'algorithme de Gauss-Jordan à A, on obtient la matrice réduite R, telle que :

$$R = PA \text{ et } P = P_1 \ldots P_m,$$

où les P_i sont des matrices élémentaires. Comme A est une matrice carrée, on est devant l'alternative :

- $r < n$, R comporte alors une ligne de 0 et alors $\text{dét}\, R = 0$,
- $r = n$, alors $R = I$ et $\text{dét}\, R = 1$, il découle du corollaire 1-3 que :

$$\text{dét}\, P_1 \ldots \text{dét}\, P_m \neq 0$$

La conclusion est immédiate. ◅

(1-6) Théorème : pour toutes matrices carrées A et B, de même ordre, on a :

$$\text{dét}(AB) = \text{dét}\, A \,.\, \text{dét}\, B.$$

Démonstration : si A n'est pas une matrice régulière, AB n'est pas régulière et le théorème précédent montre que :

$$\text{dét}\, A = 0 \text{ et } \text{dét}\, AB = 0.$$

On a donc aussi :

$$\text{dét}(AB) = \text{dét}\, A \,.\, \text{dét}\, B.$$

Si A est régulière, on sait que cette matrice est le produit de matrices élémentaires :

$$A = P_1 \ldots P_m.$$

Tenant compte du corollaire 1-4, on a d'un côté :

$$\text{dét}\, A = \text{dét}\, P_1 \ldots \text{dét}\, P_m,$$

de l'autre :

$$AB = P_1 \ldots P_m B$$

et ainsi :

$$\text{dét}(AB) = \text{dét}\, P_1 \ldots \text{dét}\, P_m \;\text{dét}\, B.$$

Ce qui donne bien :

$$\text{dét}(AB) = \text{dét}\, A \,.\, \text{dét}\, B.$$

◅

(1-7) <u>Corollaire</u> : si A est une matrice régulière :

$$\text{dét}\, A^{-1} = (\text{dét}\, A)^{-1}.$$

<u>Démonstration</u> : le théorème précédent montre que :

$$1 = \text{dét}\, I_n = \text{dét}(AA^{-1}) = \text{dét}\, A \,.\, \text{dét}\, A^{-1}.$$

Le résultat s'en déduit immédiatement. ◅

(1-6) <u>Théorème</u> : pour toute matrice carrée A, on a :

$$\text{dét}\, {}^tA = \text{dét}\, A.$$

<u>Démonstration</u> : si A est matrice singulière, ${}^tA$ l'est aussi, on a donc :

$$\text{dét}\, {}^tA = 0 = \text{dét}\, A.$$

Dans le cas contraire, A est le produit de matrices élémentaires :

$$A = P_1 \ldots P_m.$$

Pn sait alors que :

$${}^tA = {}^tP_m \ldots {}^tP_1.$$

Il découle immédiatement du corollaire 1-3 que :

$$\text{dét}\, {}^tP_1 = \text{dét}\, P_1 \,, \ldots, \text{dét}\, {}^tP_m = \text{dét}\, P_m.$$

La conclusion est immédiate. ◅

<u>Remarque</u> : ce théorème est essentiel. Il permet, en effet, de remplacer systématiquement le mot "ligne" par le mot "colonne", sans changer la véracité des assertions ainsi transformées. On retiendra, en particulier ce qui suit.

(1-8) <u>Théorème</u>

(${}^t1$) Le déterminant est une fonction multilinéaire relativement à chaque ligne de son argument.

(${}^t2$) Si une matrice a deux colonnes égales, son déterminant est nul.
Si une matrice a une colonne nulle, son déterminant est nul.

§ 2. Calcul d'un déterminant

*** Déterminant d'une matrice triangulaire**

La démonstration du théorème 1-5 ouvre la possibilité de calculer le déterminant d'une matrice au moyen de l'algorithme de Gauss-jordan. Dans la pratique, on peut procéder de façon plus simple en se contentant d'effectuer l'algorithme de Gauss, ce qui entraîne une économie notable de calcul qui se fonde sur la remarque qui suit.

(2-1) <u>lemme</u> : le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

<u>Démonstration</u> : on considère une matrice triangulaire supérieure A, d'ordre n. Si l'un de ses coefficientes diagonaux est nul, on sait son rang est plus petit que n et alors $\text{dét}\,A = 0$. La propriété est vérifiée dans ce cas.

On suppose donc que les coefficients diagonaux :

$$a_{11}, \dots, a_{ii}, \dots, a_{nn}$$

sont tous différents de 0. La réduction de Gauss-Jordan s'effectue, pour chacune des colonnes, au moyen des opérations suivantes :

$$\frac{1}{a_{ii}} L_i \text{ suivie de } L_j - a_{ji} L_i \text{ pour } j > i.$$

On a donc :

$$I = P_1 \dots P_m A$$

où, parmi les matrices élémentaires $P_1 \dots P_m$, on retrouve nécessairement :

- $P_1(\frac{1}{a_{11}}), \dots, P_i(\frac{1}{a_{ii}}), \dots, P_n(\frac{1}{a_{nn}})$;
- des matrices $P_{ji}(\lambda)$ dont le détail importe peu car toutes ont leur déterminant égal à 1.

Comme on a vu que :

$$\text{dét}(P_1 \dots P_m A) = \text{dét}\,P_1 \dots \text{dét}\,P_m \,\text{dét}\,A.$$

On en déduit que :

$$1 = \text{dét}\,P_1(\frac{1}{a_{11}}) \dots \text{dét}\,P_i(\frac{1}{a_{ii}}) \dots P_n(\frac{1}{a_{nn}})\ \text{dét}\,A = \frac{1}{a_{11}} \cdots \frac{1}{a_i} \cdots \frac{1}{a_{nn}}\ \text{dét}\,A,$$

puis :

$$\text{dét}\,A = a_{11} \dots a_{ii} \dots a_{nn}.$$

Si A est une matrice triangulaire supérieure, on applique ce qui précède à A^t. ◅

*** Réduction de Gauss**

Exemple : on calcule le déterminant de la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Dans la pratique, quand une matrice est donnée explicitement, on note :

$$\text{dét}\, A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

On effectue l'algorithme de Gauss, sans procéder à la normalisation des pivots. On obtient successivement :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

En effet, on est passé de A à la matrice triangulaire finale par les opérations suivantes :

$$P_{41}(-2)A$$
$$P_{42}(1)P_{32}(-1)P_{41}(-2)A$$
$$P_{43}(\tfrac{1}{2})P_{42}(1)P_{32}(-1)P_{41}(-2)A$$

On en déduit que :

$$\text{dét}\, A = 1 \times 1 \times 2 \times (-2) = -4.$$

Dans la suite on pourra combiner ce procédé avec l'utilisation du développement de Laplace qui permet d'abaisser l'ordre à chaque étape. On évite ainsi des écritures inutiles.

Remarque : il suffit d'ajouter quelques lignes à un programme de réduction de matrices carrés pour en calculer le déterminant.

*** Déterminant d'une matrice triangulaire par bloc**

(2-2) Lemme : les matrices triangulaires par blocs :

$$\begin{bmatrix} B & M \\ 0 & I_q \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} I_p & M \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

ont pour déterminant respectifs :

$$\begin{vmatrix} B & M \\ 0 & I_q \end{vmatrix} = \text{dét}\, B \text{ et } \begin{vmatrix} I_p & M \\ 0 & C \end{vmatrix} = \text{dét}\, C.$$

Démonstration : la réduction de Gauss de la matrice B conduit à la matrice échelonnée :

$$R = P_m \dots P_1 B,$$

où les P_i sont des matrices élémentaires, ainsi on a :

$$\text{dét}\, P_m \dots \text{dét}\, P_1\, \text{dét}\, B = \text{dét}\, R.$$

Le début du processus correspondant pour la matrice complète se décrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} P_m & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & M \\ 0 & I_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & N \\ 0 & I_q \end{bmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{vmatrix} P_m & 0 \\ 0 & I_q \end{vmatrix} \dots \begin{vmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & I_q \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B & M \\ 0 & I_q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R & N \\ 0 & I_q \end{vmatrix}$$

Il est clair que pour $i = 1, \dots, m$, on a :

$$\begin{vmatrix} P_i & 0 \\ 0 & I_q \end{vmatrix} = \text{dét}\, P_i$$

Il découle du lemme (2-1) que :

$$\begin{vmatrix} R & N \\ 0 & I_q \end{vmatrix} = \text{dét}\, R.$$

Il s'ensuit que :

$$\text{dét}\, P_m \dots \text{dét}\, P_1\, \text{dét}\, B = \text{dét}\, R = \text{dét}\, P_m \dots \text{dét}\, P_1 \begin{vmatrix} B & M \\ 0 & I_q \end{vmatrix}$$

On a donc bien :

$$\text{dét}\, B = \begin{vmatrix} B & M \\ 0 & I_q \end{vmatrix}.$$

La démonstration précédente s'adapte sans peine afin de prouver la deuxième relation. ◅

(2-3) Proposition : pour une matrice carrée triangulaire par bloc de la forme :

$$A = \begin{bmatrix} B & M \\ 0 & C \end{bmatrix},$$

on a toujours :

$$\text{dét}\, A = \text{dét}\, B \,.\, \text{dét}\, C.$$

Démonstration : on note que si les blocs B et C ont pour tailles respectives p et q, on a :

$$A = \begin{bmatrix} B & M \\ 0 & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & M \\ 0 & I_q \end{bmatrix}$$

On applique le lemme précédent et le théorème (1-6). ◅

Ce résultat se généralise comme suit.

(2-3′) Proposition : pour une matrice carrée triangulaire par bloc de la forme :

$$\begin{bmatrix} \boxed{A_1} & B_{12} & \cdots & & B_{1m} \\ & \boxed{A_2} & B_{23} & \cdots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & \boxed{A_{n-1}} & B_{m-1,m} \\ & & & & \boxed{A_m} \end{bmatrix}$$

on a :

$$\text{dét}\, A = \text{dét}\, A_1 \,.\, \text{dét}\, A_2 \,.\, \ldots \,.\, \text{dét}\, A_m.$$

Démonstration : découle de la proposition qui précède par une récurrence banale., dans la mesure où il est clair que :

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & B_{12} & \cdots & B_{1,m-1} \\ & A_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{m-1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B_{1m} \\ \\ \\ B_{m-1,m} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} A_m \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

est une décompostion en blocs de la forme précédente. ◅

Remarque : on retrouve le lemme 2-1 si les matrices $A_i, \ldots, A_m$ sont de format 1×1, c'est-à-dire quand $m = n$.

Exemple :

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 7 & 0 & 11 & -1 \\ -3 & 4 & -3 & 6 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times (-7) \times 1 = -14.$$

*** Forme explicite du déterminant des matrices d'ordres 2 et 3**

On retrouve par cette méthode les résultats déjà connus concernant la forme générale des déterminants des matrices d'ordre 2 et 3.

On considère la matrice :

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

- Si $a\neq 0$, on a :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d-\dfrac{bc}{a} \end{vmatrix} = ad-bc.$$

- Si $a=0$, on a :

$$\begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ 0 & b \end{vmatrix} = -bc$$

On a donc toujours :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc;$$

On considère la matrice :

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}.$$

On suppose encore que $a\neq 0$, il vient :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & b'-\dfrac{ba'}{a} & c'-\dfrac{ca'}{a} \\ 0 & b''-\dfrac{ba''}{a} & c''-\dfrac{ca''}{a} \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b'-\dfrac{ba'}{a} & c'-\dfrac{ca'}{a} \\ b''-\dfrac{ba''}{a} & c''-\dfrac{ca''}{a} \end{vmatrix}$$

On applique ce qui précède, on obtient successivement :

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} &= a\left[\left(b'-\frac{ba'}{a}\right)\left(c''-\frac{ca''}{a}\right)-\left(c'-\frac{ca'}{a}\right)\left(b''-\frac{ba''}{a}\right)\right] \\ &= ab'c''-cb'a''-ba'c''+\frac{bca'a''}{a}-ac'b''+bc'a''+ca'b''-\frac{bca'a''}{a} \\ &= ab'c''-cb'a''-ba'c''-ac'b''+bc'a''+ca'b''\end{aligned}$$

On retrouve aussi bien la *règle de Sarrus* :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = ab'c''+bc'a''+ca'b''-cb'a''-ba'c''-ac'b''$$

que le développement suivant la première ligne :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & d'' \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}$$

On vérifie que ces résultats valent encore si $a=0$.

<u>Remarque</u> : on observe un phénomène analogue pour une matrice d'ordre 2 car :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc = a\ \text{dét}[\,d\,]-b\ \text{dét}[\,c\,].$$

§ 3. Le développement de Laplace

On généralise ce qu'on a pu observer pour les déterminants d'ordres 2 et 3.

Définition : soit A une matrice carrée d'ordre n, i et j deux indices compris entre 1 et n. on appelle *mineur d'indice* (i,j) de A et l'on note M_{ij} ou $M_{ij}(A)$, la sous-matrice obtenue en supprimant $i^{\text{ème}}$ la ligne et $j^{\text{éme}}$ colonne de A. On l'appelle encore *mineur du coefficient* a_{ij}.

Définition : on appelle *cofacteur* d'indice $(i\ ,j)$ de A, le nombre :

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}\text{dét}(M_{ij}).$$

Remarque : on retiendra fidèlement et sans peine le signe à affecter au cofacteur, en pensant à un damier dont les cases seraient alternativement marquées des signe "+" et "−" :

$i \backslash j$	1	2	3	4	...
1	+	−	+	−	...
2	−	+	−	+	...
3	+	−	+	−	...
4	−	+	−	+	...
...	.	.	.	.	...

Exemple : on considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & -3 & 5 \\ -5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

On a, par exemple :

$$M_{11} = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ ;\ M_{12} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} \ ;\ M_{13} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \ ;\ M_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ ; \ldots$$

$$\alpha_{11} = -5 \quad , \quad \alpha_{12} = -25 \quad , \quad \alpha_{13} = -9 \quad , \quad \alpha_{21} = 2 \ , \ \ldots$$

(3-1) Théorème : soit A une matrice carrée d'ordre n et i un indice compris entre 1 et n, on a :

$$\text{dét}\, A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \alpha_{ij}.$$

Cette expression est appelée le *développement de Laplace*, suivant la $i^{\text{ème}}$ ligne, du déterminant A.

Démonstration : on procède à la suite de transformations suivantes de la matrice A.

a) On amène la ligne A_i en première position en échangeant successivement les lignes i et $i-1$, puis $i-1$ et $i-2$, ... et enfin 2 et 1 – ce qui fait $i-1$ transpositions. D'après la proposition 1-2, on obtient :

$$\text{dét}\, A = (-1)^{i-1}\text{dét}\, A',$$

où A' a pour lignes, dans l'ordre :

$$A_i, A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n.$$

b) La première ligne de A′ se présente comme suit :

$$A'_1 = A_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_j,$$

où E_j représente la $j^{\text{ème}}$ ligne de la matrice I_n, c'est-à-dire qu'on a :

$$\begin{cases} E_1 = [1\ 0\ \dots\ 0] \\ E_2 = [0\ 1\ \dots\ 0] \\ \dots\dots\dots \\ E_n = [0\ 0\ \dots\ 1] \end{cases}$$

On pose :

$$A'(j) = \begin{bmatrix} E_j \\ A_1 \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

Il vient :

$$\text{dét}\, A = (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \text{dét}\, A'(j).$$

c) On amène alors la $j^{\text{éme}}$ colonne de $A'(j)$ en première position par $j-1$ transpositions. On obtient la matrice :

$$A''(j) = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \dots 0 \\ \hline V & M_{ij} \end{array}\right]$$

où M_{ij} est le mineur d'indice $(i\ , j)$ de A. On a donc :

$$\det A''(j) = (-1)^{j-1}\ \text{dét}\, A'(j)$$

et comme :

$$\text{dét}\, A''_j = \text{dét}\, M_{ij},$$

il est établi que :

$$\text{dét}\, A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\ \text{dét}\, M_{ij}. \qquad \lhd$$

<u>Remarque</u> : pour un déterminant d'ordre 3 on retrouve l'expression déjà connue qu'on obtient en appliquant la règle de Sarrus.

<u>Remarque</u> : en appliquant le théorème précédent à ${}^tA$, on obtient le développement de Laplace de A suivant la $i^{\text{ème}}$ colonne.

*** Calculs pratiques**

En associant l'utilisation du développement de Laplace et des combinaisons de lignes et de colonnes, on dispose d'une méthode de calcul efficace des déterminants. On reprend l'exemple déjà traité, on peut désormais présenter les calculs comme suit :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -4.$$

*** Remarque**

Le développement de laplace permet, en théorie, de calculer le déterminant de toute matrice, en abaissant progressivement l'ordre des termes jusqu'à n'obtenir que des déterminant d'ordre 1. On pourra se persuader que cette façon de faire devient vite inopérante. En effet, il est facile de montrer que le nombre des opérations arthmétiques élémentaires à effectuer est de l'ordre à $n!$. Par ailleurs, on sait montrer que le nombres des opérations élémentaires à mettre en œuvre dans un calcul par élimination reste de l'ordre de n^3. On peut se faire une idée de la différence en comparant :

$$\begin{array}{cccc} 5^3=125 \; , & 7^3=343 \; , & 10^3=1\,000 \; , & 70!>10^{99} \\ 5!=120 \; , & 7!=5\,040 \; , & 10!=3\,628\,800 \; , & 70^3=343\,000 \end{array}$$

§ 4. Matrice adjointe et règle de Cramer

Définition : étant donnée une matrice A, on appelle *matrice adjointe* de A, et l'on note adj A, la transposée de la matrice des cofacteurs, autrement dit :

$$\operatorname{adj} A = {}^t[\, \alpha_{ij} \,]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$$

(4-1) Proposition : pour toute matrice carrée A, d'ordre n, on a :

$$A \,.\, \operatorname{adj} A = \operatorname{adj} A \,.\, A = \text{dét}\, A \,.\, I_n.$$

Démonstration : le $i^{\text{ème}}$ coefficient diagonal du produit A . adj A s'exprime :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, \alpha_{ij}.$$

On reconnaît le développement de Laplace du déterminant de A suivant la $i^{\text{ème}}$ ligne.

Le coefficient d'indice (i,j) du même produit s'exprime :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, \alpha_{jk}.$$

Il s'agit le développement de Laplace, suivant la $j^{\text{ème}}$ ligne, du déterminant de la matrice obtenue en remplaçant, dans A, la $j^{\text{ème}}$ ligne par la $i^{\text{ème}}$. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, \alpha_{ik} = 0.$$

On en conclut que :

$$A \,.\, \operatorname{adj} A = \text{dét}\, A \,.\, I_n.$$

On procède de façon analogue pour l'autre produit. ◅

(4-2) Corollaire : si A est une matrice régulière, on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{dét}\, A} \operatorname{Adj} A.$$

(4-3) *Règle de Cramer*

On considère un système de n équations linéaires à n inconnues :

$$AX = B.$$

Si le déterminant de A est non nul, ce système admet une solution, et une seule :

$$(s_1, \ldots, s_n),$$

donnée par la formule :

$$s_i = \frac{\text{dét}\, A(i)}{\text{dét}\, A} \quad \text{pour } i = 1, \ldots, n,$$

où $A(i)$ désigne la matrice obtenue en remplaçant la $i^{\text{ème}}$ colonne de A par B.

Démonstration : nous savons déjà que si $\text{dét}\, A \neq 0$, A est inversible, le système considéré admet alors pour unique solution :

$$S = A^{-1}B = \frac{1}{\text{dét}\, A}\,(\text{Adj}\, A)B$$

La $i^{\text{ème}}$ composante de S s'exprime :

$$s_i = \frac{1}{\text{dét}\, A} \sum_{j=1}^{n} b_j\, \alpha_{ji}.$$

On reconnaît le développement de Laplace du déterminant de $A(i)$, suivant la $i^{\text{ème}}$ colonne. $\lhd$

Remarque : ces deux résultats sont sont à fait remarquables sur le plan théorique. En effet ils présentent sous forme condensée des résultats qui, dans la pratique, demandent des calculs généralement complexes, voire impossibles.

§ 5. Forme explicite du déterminant d'ordre n

Rappel : dans ce qui suit, on suppose connus les résultats classiques suivants concernant le groupe symétrique de degré n, S_n :

- toute permutation se décompose en un produit de transpositions ;
- la signature des permutations définit un morphisme de groupes de S_n sur $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, qu'on note ε, de sorte que si une permutation σ est le produit de m transpositions, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^m$.

On se propose de démontrer le théorème suivant.

(5-1) Théorème : soit $A = [\, a_{ij} \,]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ une matrice carrée d'ordre n, son déterminant s'explicite :

$$\text{dét}\, A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

La démonstration est un peu complexe, elle sera plus claire si l'on traite à part quelques considérations utiles.

*** Matrices de permutation**

À toute permutation de S_n on associe la matrice de $\mathbf{K}^{n\times n}$:

$$P_\sigma = [\, p_{ij} \,]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}, \text{ telle que } p_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ si } i = \sigma(j) \\ 0, \text{ si } i \neq \sigma(j) \end{cases}$$

Autrement dit, si l'on note

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

les vecteurs de la base canonique de $\mathbf{K}^n$, la matrice P_σ est définie par :

$$P_\sigma e_j = e_{\sigma(j)} \text{ pour } j = 1, \dots, n.$$

(5-2) Lemme : l'application $\sigma \mapsto P_\sigma$ est un morphisme injectif de S_n dans $GL_n(\mathbf{K})$ (1).

Démonstration : soit σ et τ deux permutations de S_n et j un entier compris entre 1 et n, Par définition, on a :

$$P_\tau P_\sigma e_j = P_\tau e_{\sigma(j)} = e_{\tau\sigma(j)} = P_{\tau\sigma} e_j.$$

Ceci valant pour j appartenant à $\{1, \dots, n\}$, on en déduit que :

$$\forall \sigma \in S_n\ \forall \tau \in S_n\ \ P_\tau P_\sigma = P_{\tau\sigma}.$$

Comme il est clair que :

$$P_\sigma = I_n \Leftrightarrow \sigma = \mathrm{Id}_{\{1,\dots,n\}},$$

on en déduit que :

$$\forall \sigma \in S_n\ \ P_{\sigma^{-1}} = (P_\sigma)^{-1}.$$

La conclusion avancée s'en déduit immédiatement ⊲.

1 Le groupe des automorphismes de $\mathbf{K}^n$ identifiés aux matrices carrées régulières d'ordre n.

(5-3) Lemme : $\forall \sigma \in S_n \quad \text{dét}\, P_\sigma = \varepsilon(\sigma).$

Démonstration : étant donnée une permutaiton σ de S_n, on sait que σ se décompose en un produit de transpositions :

$$\sigma = \tau_m \ldots \tau_1$$

et que la signature de σ s'exprime :

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^m.$$

Il découle du lemme précédent que :

$$P_\sigma = P_{\tau_m} \ldots P_{\tau_1}.$$

Il s'ensuit que :

$$\text{dét}\, P_\sigma = \text{dét}\, P_{\tau_m} \ldots\ldots \text{dét}\, P_{\tau_1}.$$

Or, le matrices P_{τ_i} sont précisément des matrices élémentaires que de type P_{ij}, on a donc :

$$\text{dét}\, P_{\tau_m} = \ldots = \text{dét}\, P_{\tau_1} = -1.$$

Il s'ensuit que :

$$\text{dét}\, P_\sigma = (-1)^m = \varepsilon(\sigma). \qquad \lhd$$

*** Démonstration du théorème principal**

On note E_i la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice identité I_n. La matrice A prend les formes suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} E_{j_1} \\ \vdots \\ \sum\limits_{j_n=1}^{n} a_{nj_n} E_{j_n} \end{bmatrix}$$

Il découle de la multilinéarité du déterminant que :

$$\text{dét}\, A = \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \ldots \sum_{j_n=1}^{n} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}\, \text{dét} \begin{bmatrix} E_{j_1} \\ E_{j_2} \\ \vdots \\ E_{j_n} \end{bmatrix}$$

On considère la matrice :

$$\begin{bmatrix} E_{j_1} \\ \vdots \\ E_{j_n} \end{bmatrix}$$

si deux des indices $j_1, \ldots, j_n$ sont égaux, ses deux lignes correspondantes sont égales, son déterminant est alors nul. Ainsi, dans la somme précédente, il suffit de prendre en compte les termes pour lesquels $(j_1, \ldots, j_n)$ et une permutation de $\{1, \ldots, n\}$.Ce qui se traduit comme suit :

$$\text{dét}\, A = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}\, \text{dét} \begin{bmatrix} E_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ E_{\sigma(n)} \end{bmatrix}$$

On note que :

$$\begin{bmatrix} E_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ E_{\sigma(n)} \end{bmatrix} = P_{\sigma^{-1}} \quad , \ \text{dét} \begin{bmatrix} E_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ E_{\sigma(n)} \end{bmatrix} = \varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma).$$

On en déduit, comme il était attendu, que :

$$\text{dét}\, A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)} \qquad \lhd$$

§ 6. Existence et unicité

On pourrait résumer ce qui précède ainsi ; si le déterminant existe, il vérifie toutes les propriétés que nous avons passées en revue. Or le théorème de la section précédente donne une seule valeur possible de dét A en fonction des coefficients de A. Plus brièvement :

"**S'il existe une fonction qui vérifie les conditions (1)–(3)** du début de ce chapitre, **elle est unique**.

Notons provisoirement :

$$\begin{array}{rcl} d_n : \mathbf{K}^{n\times n} & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ \mathrm{A} = [\, a_{ij} \,]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} & \longmapsto & \sum\limits_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} \end{array}$$

La question de l'existence sera définitivement tranchée si on vérifie que d_n satisfait effectivement aux trois conditions en question.

1) *Multilinéarité* : on pose :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{A}_{i-1} \\ \mathrm{A}_i + \lambda \mathrm{A}'_i \\ \mathrm{A}_{i+1} \\ \vdots \\ \mathrm{A}_n \end{bmatrix}, \quad \mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{A}_{i-1} \\ \mathrm{A}_i \\ \mathrm{A}_{i+1} \\ \vdots \\ \mathrm{A}_n \end{bmatrix}, \quad \mathrm{A}' = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{A}_{i-1} \\ \mathrm{A}'_i \\ \mathrm{A}_{i+1} \\ \vdots \\ \mathrm{A}_n \end{bmatrix}$$

Il vient :

$$\begin{aligned} d_n(\mathcal{A}) &= \sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots (a_{i\sigma(i)} + \lambda' a_{i\sigma(i)}) \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma)[a_{1\sigma(1)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} + \lambda a_{1\sigma(1)} \dots a'_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} + \lambda \sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a'_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} \end{aligned}$$

Ce qui donne bien :

$$d_n(\mathcal{A}) = d_n(\mathrm{A}) + \lambda d_n(\mathrm{A}').$$

(2) *Dégénérescence* : on considère la partition de S_n en permutations paires et impaires :

$$\mathrm{S}_n = \mathrm{Al}_n \cup (\mathrm{S}_n - \mathrm{Al}_n).$$

Soit i et j deux éléments distincts de $\{1, \dots, n\}$, on considère la transposition $\tau = (i\, j)$. L'application$\varphi : \sigma \mapsto \sigma(i\, j)$ est une bijection de Al_n sur $(\mathrm{S}_n - \mathrm{Al}_n)$.

Si les lignes A_i et A_j de A sont égales, on a :

$$\begin{aligned} a_{1\sigma\tau(1)} \dots a_{i\sigma\tau(i)} \dots a_{j\sigma\tau(j)} \dots a_{n\sigma\tau(n)} &= a_{1\sigma(1)} \dots a_{i\sigma(j)} \dots a_{j(i)} \dots a_{n(n)} \\ &= a_{1\sigma(1)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{j(j)} \dots a_{n(n)} \end{aligned}$$

Ce qui montre que, dans ces conditions, les termes du développement de $d_n(\mathrm{A})$ sont deux à deux opposés. On a donc :

$$d_n(\mathrm{A}) = 0.$$

(3) *Normalisation* : l'expression de $d_n(\mathrm{I}_n)$ comporte un seul terme non nul, celui qui correspond à $\sigma = \mathrm{Id}_{[1,\dots,n]}$, dont tous les facteurs sont égaux à 1. On a donc :

$$d_n(\mathrm{I}_n) = 1.$$

On peut alors conclure que la fonction déterminant est bien définie par les conditions posées au début. ◁

§ 7. Premières applications

* Déterminant d'un endomorphisme

(7-1) Proposition : soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel, de dimension finie, le déterminant d'une matrice représentant f est indépendant de la base sur laquelle celle-ci est définie.

Démonstration : on note E l'espace vectoriel, A et A' les matrices de f relativement à deux bases données $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, de E, soit P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Nous savons que :

$$A' = P^{-1}AP.$$

On a, compte-tenu du théorème 1-6 :

$$\text{dét}\, A' = \text{dét}(P^{-1}AP) = \text{dét}\, P^{-1} . \text{dét}\, A . \text{dét}\, P = (\text{dét}\, P)^{-1} . \text{dét}\, A . \text{dét}\, P = \text{dét}\, A$$

Ce qui montre que dét A est bien indépendant du choix de $\mathscr{B}$. ◅

Ce résultat justifie la cohérence de la définition qui suit.

Définition : soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, le déterminant de toute matrice représentant f est aussi appelé le *déterminant de f.*

(7-2) Proposition : soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie n, sur **K** :

1) si $\text{dét} f = 0$, alors $r(f) < n$;
   si $\text{dét} f \neq 0$, alors $r(f) = n$.

2) $\text{dét}(f \circ g) = \text{dét} f . \text{dét}\, g$

3) Si f est bijective, $\text{dét} f^{-1} = (\text{dét} f)^{-1}$.

Démonstration : il s'agit d'une simple transcription des résultats sur les matrices correspondantes. ◅

* Le groupe spécial linéaire

On considère un espace vectoriel E, de dimension finie sur un corps **K**. Le théorème (1-6) montre que la restriction du déterminant au groupe linéaire de E :

$$\begin{aligned} d : \mathrm{GL(E)} &\longrightarrow \mathbf{K} \\ f &\longmapsto \text{dét} f \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes. On en déduit que :

$$\mathrm{SL(E)} = \ker f = \{f \in \mathrm{GL(E)} \mid \text{dét} f = 1\}$$

est un spus-groupe distingué de GL(E) – qu'on appelle *groupe spécial llinéaire.* Il joue un rôle théorique important.

*** Orientation d'un espace vectoriel réel**

Suivant l'usage, on note GL_n le groupe $GL(\mathbf{R}^n)$.

On considère un espace vectoriel E, de dimension finie sur un corps **K**. On vérifie sans peine que l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl}\varepsilon : GL_n & \longrightarrow & \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \\ f & \longmapsto & \dfrac{\text{dét} f}{|\text{dét} f|}\end{array}$$

est un morphisme de groupes. On fait ainsi apparaître une partition de GL(E) en deux classes :

$$GL_n^+ = \operatorname{Ker} \varepsilon = \{f \in GL(E) \mid \text{dét} f > 0\} \quad \text{et} \quad GL_n^- = \{f \in GL(E) \mid \text{dét} f < 0\}$$

À chaque couple $(\mathscr{B}, \mathscr{C})$ de bases de E, on associe la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$, P est un élément de GL_n. On peut ainsi définir la relation :

$$\mathscr{B} \sim \mathscr{C} \Leftrightarrow P \in GL_n^+$$

On vérife qu'il s'agit d'une équivalence. La réflexivité et la symétrie sont évidentes car on sait que :

$$\text{dét}\, I_n = 1 \text{ et dét}\, P^{-1} = (\text{dét}\, P)^{-1}.$$

Pour justifier la transitivité, on note que si :

- P est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$,
- Q est la matrice de passage de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{D}$,

alors PQ est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$. En effet notant X, Y et Z les matrices représentant un même vecteur x de E respectivement sur $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$, on a :

$$X = PY \ , \ Y = QZ \ \text{ et donc } X = PQZ.$$

Si P et Q appartiennent à GL_n^+, il en va de même pour PQ.

Les bases de E se répartissent ainsi en deux classes d'équivalence qu'on appelle les *orientations* de E.

Orienter E, c'est en distinguer l'une des orientations qu'on qualifie de *positive* ou de *directe*. L'autre orientation se trouvant, ipso facto, qualifiée de *négative*, d'*indirecte* ou de *rétrograde*.

Concrètement, ce choix revient à distinguer une base arbitraire $\mathscr{B}_0$. Si $\mathscr{B}$ est une base quelconque, notant $P_{\mathscr{B}}$ la matrice de passage de $\mathscr{B}_0$ à $\mathscr{B}$, l'orientation de cette dernière sera poisitive ou négative selon que $P_{\mathscr{B}}$ appartient à GL_n^+ ou GL_n^-.

On généralise ainsi la notion déjà connue en dimension 2 et 3.

Remarque : l'existence de deux orientations est une propriété de nature essentiellement topologique, liée à la structure de corps ordonné de **R**. Le déterminant induit une application continue de GL_n sur $\mathbf{R} - \{0\}$. Or, $\mathbf{R} - \{0\}$ se partage en deux composantes connexes – les nombres positifs et les nombres négatifs – dont les images inverses sont deux composantes connexes de GL_n. Intuitivement, ceci veut dire qu'on ne peut pas modifier l'orientation d'une base, **de façon continue**, sans lui faire perdre, sa qualité d'être une base.

Chapitre VI. Réduction des endomorphimes

Considérons l'endomorphisme f de $\mathbf{R}^2$ défini dans une base $\mathscr{B}$ par la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Un calcul simple montre que les vecteurs :

$$u = (1, -1) \text{ et } v = (1, -2)$$

vérifient $f(u) = 2u$ et $f(v) = 3v$ et forment une base $\mathscr{B}'$ de $\mathbf{R}^2$, où la matrice de f prend la forme nettement plus simple :

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Notre préoccupation est, ici, de déterminer sous quelles conditions, une telle base existe pour un endomorphisme donné et, si tel est le cas de savoir l'exhiber. Nous évoquerons aussi des applications : résolution d'équations différentielles, études de suites, invariants en géométrie.

§1. Valeurs propres et vecteurs propres

Dans toute la suite, on désigne par E un espace vectoriel sur un corps $\mathbf{K}$ et par f un endomorphisme donné de E. On commence par des considérations indépendantes de la dimension de E.

Définition : *soit* v un vecteur de E, on dit que v est un *vecteur propre* de f si :

(1) v est **non nul**,

(2) il existe un scalaire λ, tel que $f(v) = \lambda v$.

Remarque : la condition (2) étant banale pour le vecteur nul, la condition (1) s'impose. Elle nous assure que le scalaire correspondant λ est unique, ce qui nous amène à la définition suivante.

Définition : on appelle *valeur propre* de f tout scalaire λ de K vérifiant :

(2') $\exists u,\ u \in E,\ u \neq 0,\ f(u) = \lambda u.$

Il est clair que tout vecteur u de E vérifiant cette condition est un vecteur propre de f. On dit que c'est un vecteur propre *associé* à la valeur propre λ.

À tout scalaire λ, on associe le sous-espace :

$$V(\lambda) = \{u \in E \mid f(u) = \lambda u\} = \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E).$$

(1-1) Théorème : soit λ un scalaire, les assertions suivantes sont équivalentes :

(3) λ est une valeur propre de f,

(4) $V(\lambda) \neq \{0\}$,

(5) $f - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif ([1]).

Dans ces conditions $V(\lambda)$ est un sous-espace vectoriel stable par f.

Définition : on dit alors que $V(\lambda)$ est le *sous-espace propre* associé à λ.

Démonstration : la conditon $f(u) = \lambda u$, de la définition s'exprime aussi bien sous la forme :

$$(f - \lambda \mathrm{Id}_E)(u) = f(u) - \lambda u = 0.$$

---

[1] On pensera que si la dimension de E est finie, on a :
f est injectif $\Leftrightarrow$ f surjectif $\Leftrightarrow$ f est bijectif.

L'équivalence [(3) $\Leftrightarrow$ (4)] est donc évidente. L'équivalence [(4) $\Leftrightarrow$ (5)] est une propriété classique des applications linéaires.

Pour montrer que $V(\lambda) = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ est stable par f, on en considère un vecteur u. La définition se traduit $f(u) - \lambda u = 0$, ce qui entraîne évidemment $f(u) = \lambda u$, autrement dit $f(u) \in V(\lambda)$. $\lhd$

(1-2) Théorème fondamental : si des vecteurs propres de f sont associés à des valeurs propres distinctes, ils sont linéairement indépendants.

Démonstration : comme un système de vecteurs est libre si tout sous-système fini est libre, il suffit de démontrer cette propriété pour un nombre fini, m, de vecteurs propres. On procède par récurrence.

La propriété est vraie pour $m = 1$. En effet, un vecteur propre étant non nul, il constitue une famille libre.

Soit $m > 1$, on suppose que le théorème s'applique à tout système de $m-1$ vecteurs propres. On considère m vecteurs propres de f :

$$v_1, v_2, \dots, v_m,$$

respectivement associés aux valeurs propres **distinctes** :

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m.$$

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ m scalaires, tels que :

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m = 0,$$

on a, d'une part :

$$-\lambda_m(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m) = 0,$$

ce qui s'exprime aussi :

$$\text{(a)} \qquad -\alpha_1 \lambda_m v_1 - \alpha_2 \lambda_m v_2 - \dots - \alpha_m \lambda_m v_m = 0 \; ;$$

d'autre part :

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m) = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \dots + \alpha_m \lambda_m v_m,$$
$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m) = f(0) = 0$$

et ainsi :

$$\text{(b)} \qquad \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \dots + \alpha_m \lambda_m v_m = 0.$$

On additionne membre à membre les égalités (a) et (b), il vient :

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_m)v_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_m)v_2 + \dots + \alpha_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)v_{m-1} = 0.$$

Comme $(v_1, v_2, \dots, v_{m-1})$ est une famille libre, on a :

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_m) = \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_m) = \dots = \alpha_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m) = 0.$$

Or, nous savons que :

$$\lambda_1 - \lambda_m \neq 0, \ \lambda_2 - \lambda_m \neq 0, \ \dots, \ \lambda_{m-1} - \lambda_m \neq 0,$$

on a donc :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{m-1} = 0,$$

puis :

$$\alpha_m v_m = 0$$

et comme v_m est non nul, il apparaît que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0.$$

On en déduit que :

$$(v_1, v_2, \dots, v_m)$$

est une famille libre.

On en conclut que la propriété est démontrée pour tout entier m. $\lhd$

(1-3) Corollaire : si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ sont des valeurs propres f, deux à deux distinctes, la somme des sous-espaces $V(\lambda_1)$, $V(\lambda_2)$, ... , $V(\lambda_m)$ est directe.

Autrement dit :

$$V(\lambda_1) + V(\lambda_2) + \ldots + V(\lambda_m) = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \ldots \oplus V(\lambda_m).$$

Démonstration : soit $v_1, v_2, \ldots, v_m$ des vecteurs appartenant respectivement à $V(\lambda_1)$, $V(\lambda_2)$, ... , $V(\lambda_m)$, le théorème précédent montre que la condition :

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_m = 0$$

est contradictoire sauf dans le cas où chacun de ces vecteurs est nul. ◅

*** Endomorphisme diagonalisable**

Désormais, E est un espace vectoriel de dimension finie et f en est un endomorphisme donné.

(1-4) Proposition : soit $\mathscr{B}$ une base de E, la matrice de f, relativement à $\mathscr{B}$ est diagonale si, et seulement si, $\mathscr{B}$ est constituée de vecteurs propres de f.

Démonstration : il s'agit de l'application directe des définitions :

- des vecteurs propres de f,
- de la matrice de f relativement à une base donnée. ◅

Plus explicitement, si $\mathscr{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ est constiuée de vecteurs propres de f, respectivement associés aux valeurs propres :

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$$

la matrice de f, relative à $\mathscr{B}$, s'exprime :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

Définition : dans les conditions ci-dessus, on dit que f est *diagonalisable*

Exemple : on considère l'endomorphisme f de $\mathbf{R}^2$ défini, relativement à la base canonique, par la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

La matrice de $f - 2\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^2}$:

$$A - 2I_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

est manifestement de rang 1 car ses deux lignes sont proportionnelles, elle n'est pas inversible, $f - 2\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^2}$ n'est donc pas injectif. Le théorème 1-1 montre que 2 est valeur propre de f. De même la matrice :

$$A - 3I_2 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

de $f - 3\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^2}$ est aussi de rang 1, 3 est donc une valeur propre de f.

On détermine V(2) et V(3). Ona :

$$u = (x, y) \in V(2) \Leftrightarrow f(u) - 2u = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ce qui se traduit :

$$\begin{cases} -x - \ y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

et, plus simplement :

$$x + y = 0.$$

On en déduit que V(2) est le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $(1,-1)$. On établit de la même façon que V(3) est le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $(1,-2)$.

Il est clair que les deux vecteurs $(1,-1)$ et $(1,-2)$ forment une base de $\mathbf{R}^2$ et que, relativement à celle-ci, f est décrit par la matrice diagonale :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(1-5) Théorème : si E est de dimension n et si l'endomorphisme f admet n valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable.

Démonstration : si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont n valeurs propres distinctes de f, respectivement associées aux vecteurs propres $v_1, v_2, \ldots, v_n$, le théorème fondamental 1-2 montre que $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ est une famile libre. Comme n est la dimension de E, il s'agit d'une base, formée de vecteurs propres. ◅

N. B. Il doit être bien clair que l'énoncé précédent ne fournit qu'une condition suffisante. En effet, en l'état actuel de nos connaissances, la seule certitude, a priori, est la suivante.

(1-6) Corollaire : si E est de dimension n, un endomorphisme de E admet au plus n valeurs propres distinctes.

Démonstration : c'est, au vu du théorème de la dimension, une conséquence directe du théorème précédent. ◅

Remarque : on considère l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$, défini par :

$$f : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}.$$

Il est immédiat que $V(0) = \operatorname{Ker} f = \mathbf{R}(0,1)$ est de dimension 1 et que si $\lambda \neq 0$, la condition $f(v) = \lambda v$ entraîne que $v = 0$. Il n'existe donc aucun vecteur propre en dehors de V(0), f n'est donc pas diagonalisable.

§ 2. Polynôme caractéristique

La recherche effective des valeurs propres et vecteurs propres passe par l'utilisation du calcul matriciel. Nous allons donc, provisoirement, restreindre le cadre de nos préoccupations.

* Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice

Dans ce qui suit le cadre est l'espace vectoriel $E = \mathbf{K}^n$, dont les éléments sont identifiés aux matrices colonnes à n coefficients.

Convention: étant donnée une matrice A de $\mathbf{K}^{n\times n}$, tout ce qui précède s'applique à l'endomorphisme :

$$f : X \mapsto AX$$

il est commode de parler des valeurs propres, de vecteurs propres de A plutôt que d'en référer à f. De même, on dira, le cas échéant, que c'est A qui est diagonalisable plutôt que f.

Dans le présent contexte, le théorème 1-1 se présente comme suit.

(2-1) Lemme : soit A une matrice de $\mathbf{K}^{n\times n}$ et λ un scalaire de $\mathbf{K}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) λ est valeur propre de A,

(2) $A - \lambda I_n$ est singulière.

(3) $\mathrm{dét}(A - \lambda I_n) = 0$.

La condition (3) nous conduit à considérer $\mathrm{dét}(A - \lambda I_n) = 0$ comme une équation de l'inconnue λ – qu'on appelle l'*équation caractéristique* de A – et à nous intéresser au polynôme qui en constitue le membre de gauche.

* Polynôme caractéristique d'une matrice

Définition : soit A une matrice de $\mathbf{K}^{n\times n}$, on note :

$$\chi_A(X) = \mathrm{dét}(A - XI_n).$$

$\chi_A(X)$ est appelé *polynôme caractéristique* de A.

Remarque : bien que la théorie du déterminant ait été développée pour des matrices à coefficients dans un corps, elle reste formellement valable sur un anneau commutatif intègre, ce qui est le cas de $\mathbf{K}[X]$. On pourrait de toutes façons remplacer X par un élément quelconque de $\mathbf{K}$ et considérer qu'on ne sort pas du cadre qui nous est familier [1].

Exemple : pour la matrice qui nous a déjà servi d'exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

on a :

$$\chi_A(X) = \begin{bmatrix} 1-X & -1 \\ 2 & 4-X \end{bmatrix} = X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3).$$

1 À condition, toutefois qu'il soit légitime d'identifier polynômes et fonctions polynômes ce qui n'est possible que si le corps de base est infini.

On note que, pour une matrice quelconque $A = [\, a_{ij} \,]$, le polynôme suivant :

$$(a_{11}-X)(a_{22}-X)\ \dots\ (a_{nn}-X)$$

est le seul terme du développement de $\text{dét}(A-XI_n)$ qui contienne des monômes de degré n et $n-1$. En effet, tout autre terme du dit développement contient au moins deux coefficients non diagonaux. On en déduit que les deux monômes de plus haut degré de $\chi_A(X)$ sont :

$$(-1)^n X^n \quad \text{et} \quad -(a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn})X^{n-1}.$$

<u>Définition</u> : on appelle *trace* d'une matrice carrée A la somme de ses coefficients diagonaux. On note ce nombre tr A.

On note aussi que le terme de degré 0 est donné par :

$$\text{dét}(A-XI_n)(0) = \text{dét}\, A.$$

On retiendra donc le résultat, un peu schématique suivant.

(2-2) $$\chi_A(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \text{tr}\, A\, X^{n-1} + \dots + \text{dét}\, A.$$

<u>Rappel</u> : deux matrices A et A', de $\mathbf{K}^{n\times n}$, sont dites semblables s'il existe une matrice régulière P, telle que :

$$A' = P^{-1}AP.$$

(2-3) <u>Proposition</u> : deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

<u>Définition</u> : si $A' = P^{-1}AP$, on a de façon évidente :

$$A' - XI_n = P^{-1}AP - XI_n = P^{-1}AP - P^{-1}XI_nP = P^{-1}(A - XI_n)P.$$

Il s'ensuit que :

$$\text{dét}(A'-XI_n) = \text{dét}[P^{-1}(A-XI_n)P] = \text{dét}\,P^{-1}\,.\,\text{dét}(A-XI_n)\,.\,\text{dét}\,P,$$

puis, comme $\text{dét}\,P^{-1} = (\text{dét}\,P)^{-1}$, il vient :

$$\text{dét}(A'-XI_n) = \text{dét}(A-XI_n).$$

Autrement dit :

$$\chi_{A'}(X) = \chi_A(X). \qquad \triangleleft$$

Cette propriété nous permet de nous replacer dans le cas général. En effet si E est de nouveau un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbf{K}$ et f un endomorphisme de E, les matrices représentant f sont toutes semblables. Leur polynôme caractéristique est donc indépendant de la base choisie. On dit que c'est un *invariant de f*.

Il est donc désormais légitime de parler du *polynôme caractéristique* de f, de la *trace* de f – comme c'était déjà le cas pour le déterminant de f.

Ces précautions nous permettent de condenser l'énoncé (2-1) et de conclure comme suit.

(2-4) <u>Théorème</u> : les valeurs propres d'un endomorphisme sont les zéros de son polynôme caractéristique.

*** Spectre d'un endomorphisme – d'une matrice**

Ce qui précède montre qu'il est légitime de parler du *spectre* d'un endomorphisme pour désigner la famille formée par ses valeurs propes, **comptées avec leurs ordres de multiplicité**. On parlera évidemment du spectre d'une matrice et l'on se souviendra qu'il est commun à toutes les matrices qui lui sont semblables.

Comme un polynôme de degré n admet au plus n racines distinctes, le théorème (1-4) redonne la propriété (1-6) : si E est de dimension n, un endomorphisme de E admet au plus n valeurs propres distinctes. Si le corps de base est **R** ou **Q**, on n'en sait guère plus.

Il en va tout autrement si l'on se place sur le corps des nombres complexes. En effet, il résulte du théorème de d'Alembert-Gauss que **C** est algébriquement clos. On entend par là que tout polynôme P, de degré n de **C**[X] se factorise de sous la forme :

$$P = a_n(X-x_1)(X-x_2)\ \dots\ (X-x_n),$$

où a_n est le coefficient directeur de P. Mieux, en tenant compte des facteurs qui se répètent :

$$P = a_n(X-x_1)^{\alpha_1}(X-x_2)^{\alpha_1}\ \dots\ (X-x_n)^{\alpha_m},$$

où les x_i sont des éléments de **C** qui sont deux à deux distincts. Cette dernière décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Il est commode de dire que tout polynôme de degré n sur **C** admet n racines, chacune d'elles étant comptée avec son *ordre de multiplicité.*

Dans la suite, le caractère discriminant sera moins la nature du corps de base que l'existence d'une décomposition du polynôme caractéristique en facteurs du premier degré – si tel est le cas on parle de polynôme *scindé* sur le corps correspondant.

Exemples

- $X^2 - X - 1$ est irréductible sur **Q**, mais il est scindé sur **R** car il admet pour racines $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$,
- $X^2 + X + 1$ est irréductible sur **R** et a fortiori sur **Q**, il est évidemment scindé sur **C**.

Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n, nous avons noté que son polynôme caractérisque prend la forme suivante :

$$\chi_f(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}(\operatorname{tr} A)X^{n-1} + \dots + \text{dét}\, A.$$

Si χ_f est scindé, on a aussi :

$$\chi_f(X) = (\lambda_1 - X)(\lambda_2 - X)\ \dots\ (\lambda_n - X)$$

où $\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les n valeurs propres de f – pas nécessairement distinctes. – en identifiant les termes de degré $n-1$ et 0, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \operatorname{tr} A \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \text{dét}\, A.$$

(2-5) Proposition : la trace et le déterminant d'un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé sont respectivement la somme et le produit des valeurs propres.

Remarque : plus généralement, si on note $c_k(-X)^k$ le monôme de degré k de χ_f, on a :

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\ \dots\ \lambda_{i_k} = c_k.$$

*** Le théorème de Cayley-Hamilton**

On note encore E un espace vectoriel de dimension finie sur le corps **K**. Étant donné un endomorphisme f de E et un polynôme p de **K**[X], il est possible de substituer f dans P, au sens classique du terme, à savoir si :

$$p = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n,$$

alors :

$$p(f) = p = a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 f + \ldots + a_n f^n.$$

Il est facile de vérifier qu'on définit ainsi un morphisme d'anneau de **K**[X] dans End(E). Le résultat qui suit est remarquable

(4-4) Théorème : tout endomorphisme d'espace vectoriel de dimension finie annule son polynôme caractérisitique.

Autrement dit, on a toujours $\chi_f(f) = 0$.

Démonstration : il suffit de démontrer cette propriété pour les matrices. Considérons une matrice carrée A, d'ordre n, sur **K**. On pose :

$$\chi_A = \text{dét}(A - XI) = a_0 + a_1 X + \ldots + (-1)^n X^n.$$

Soit B(X) la matrice adjointe de $A - XI$, il s'agit d'une matrice dont les coefficients sont des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à $n - 1$, on peut donc la présenter comme suit :

$$B(X) = B_0 + B_1 X + \ldots + B_{n-1} X^{n-1}.$$

Il découle de la proposition V-4-1 que :

$$B(A - XI) = \text{dét}(A - XI)I = \chi_A(X) I_n \text{ (1)}.$$

On identifie les coefficients des "monômes" de même degré, on obtient les $n + 1$ relations suivantes, qu'on combine comme il est indiqué :

$$\begin{array}{c|lll|l}
X^n & & -B_{n-1} & = (-1)^n I_n & A^n \\
X^{n-1} & B_{n-1}A & -B_{n-2} & = a_{n-1} I_n & A^{n-1} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
X & B_1 A & -B_0 & = a_1 I_n & A \\
1 & B_0 A & & = a_0 I_n & I_n
\end{array}$$

on obtient :

$$\chi(A) = 0.$$

Si A est la matrice de f pour une base donnée, on a bien $\chi(f) = 0$. ⊲

---

1 Ce faisant, on admet que la théorie des déterminants vaut si les scalaires sont pris, dans un anneau intègre – ce qui est justifié mais ne doit pas être passé sous silence – il existe d'autres démonstrations du théorème de Cayley-Hamilton qui dispensent de cette gymnastique. Nous en proposons une, assez plaisante, en annexe.

§ 3. Diagonalisation – condition nécesaire et suffisante

On convient que E est un espace vectoriel de dimension n sur le corps $\mathbf{K}$ et f en est un endomorphisme.

(3-4) Lemme : f est diagonalisable si, et seulement si, E est engendré par les vecteurs propres de f.

Démonstration : on note V le sous-espace vectotriel de E, engendré par les vecteurs propres de f.

Si f est diagonalisable, il existe une base de E, composée de vecteurs propres de f, on a $E \subseteq V$ et donc $V = E$.

Réciproquement, si l'ensemble des vecteurs propres de f engendrent E, on peut en extraire une base de E ◅

(3-5) Théorème : si λ est une racine d'ordre p du polynôme caractéristique de f, on a :

$$1 \leq \dim V(\lambda) \leq p.$$

Démonstration : on pose $l = \dim V(\lambda)$, comme $V(\lambda) \neq \{0\}$, on sait que $1 \leq l \leq n$. On considère une base :

$$(u_1, \dots, u_l) \text{ de } V(\lambda),$$

elle se complète en une base :

$$(u_1, \dots, u_l, u_{l+1}, \dots, u_n) \text{ de E.}$$

La matrice de f relative à celle-ci est de la formesuivante :

$$A = \begin{bmatrix} \lambda I_l & B \\ 0 & C \end{bmatrix},$$

où le bloc C est éventuellement vide. Dans ces conditions, on a :

$$\chi_f(X) = \chi_A(X) = \begin{vmatrix} (\lambda - X)I_l & B \\ 0 & (C - X)I_{n-l} \end{vmatrix} = (\lambda - X)^l \operatorname{dét}(C - XI_{n-l})$$

Ce qui montre que $(\lambda - X)^l$ divise $\chi_f(X)$ et entraîne que λ est une racine de χ_f dont l'ordre de multiplicité au moins l. ◅

Convention : il est commode d'appeler la dimension de $V(\lambda)$ l'*ordre de multiplicité géométrique* de λ, par opposition à l'*ordre de multiplicité algébrique* de λ qui en est l'ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique.

(3-6) Théorème : f est diagonalisable si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont remplies :

(i) son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbf{K}$,

(ii) chacune de ses valeurs propres a son ordre géométrique égal à son ordre algébrique.

Démonstration : on note $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ les valeurs propres **distinctes** de f et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ leurs ordres de multiplicté algébrique, ce qui veut dire que :

$$\chi_f = (X - \lambda_1)^{\alpha_1}(X - \lambda_2)^{\alpha_1} \dots (X - \lambda_m)^{\alpha_m} Q,$$

où Q est un polynôme de $\mathbf{K}[X]$, sans racine dans $\mathbf{K}$. On a donc :

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_m + \operatorname{degré} Q = n.$$

Le sous-espace V de E engendré par tous les vecteurs propres est la somme directe (cf. corollaire 1-3) :

$$V = V(\lambda_1) \oplus \dots \oplus V(\lambda_m)$$

On a montré que :

$$\dim V(\lambda_i) \leq \alpha_i \text{ pour } i = 1, \ldots, m.$$

Il s'ensuit que :

$$\dim V = n \Leftrightarrow \dim V(\lambda_1) = \alpha_1, \ldots, \dim V(\lambda_m) = \alpha_m \text{ et degré } Q = 0.$$

Ce qui se traduit :

$$\dim V = n \Leftrightarrow [(i) \text{ et } (ii)].$$

Le lemme du début nous assure que ces conditions sont nécessaires et suffisantes pour que f soit diagonalisable. ◅

Exemple 1 : on considère la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \text{ où } \theta \neq 0 \pmod{\pi}$$

On a :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\cos\theta + 1,$$

$$\Delta' = \cos^2\theta - 1 = -\sin^2\theta < 0,$$

A admet donc deux valeurs propres imaginaires conjuguées :

$$\lambda_1 = e^{i\theta} \text{ et } \lambda_2 = e^{-i\theta}.$$

a) Soit $E = \mathbf{R}^2$, rapporté à sa base canonique et f l'endomorphisme de E de matrice A. Comme les valeurs propres de A ne sont pas réelles f n'est pas diagonalisale.

b) Soit $E = \mathbf{C}^2$, rapporté à sa base canonique et g l'endomorphisme de E de matrice A. Comme A admet deux valeurs propres distinctes dans $\mathbf{C}$, g est diagonalisale. On montre facilement que :

$$V(e^{i\theta}) = \mathbf{C}(1, -i) \text{ et } V(e^{-i\theta}) = \mathbf{C}(1, i)$$

Relativement à la base $\mathscr{B} = ((1, -i), (1, i))$, g admet pour matrice :

$$A' = \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta + i\sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta - i\sin\theta \end{bmatrix}.$$

Exemple 2 : soit $E = \mathbf{R}^3$, rapporté à sa base canonique et f l'endomorphisme de E de matrice :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

On a :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2+\lambda)^2.$$

Les valeurs propres sont 1 et -2 qui est compté deux fois. On constate que :

$$A + 2I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

est de rang 1, on en déduit que $V(-2)$ est de dimension 2. On sait alors que f est diagonalisable.

Remarque : on peut aussi vérifier directement que :

$$f(1, 1, 1) = (1, 1, 1),$$

ce qui montre que 1 est valeur propre. On peut aussi constater que $A - 2I$ a toutes ses lignes égales, cette matrice est donc de rang 1 et conclure ainsi très rapidement.

<u>Exemple</u> 3 :soit $E = \mathbf{R}^3$, rapporté à sa base canonique et f l'endomorphisme de E de matrice :

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

On vérifie que :

$$\chi_A(\lambda) = -(1-\lambda)^2(2+\lambda)$$

Les vecteurs de V(1) sont les solutions du système suivant :

$$\begin{cases} -5x \quad -2z = 0 \\ 5x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

qui se réduit sous la forme :

$$\begin{cases} 5x + 2z = 0 \\ \quad y \quad = 0 \end{cases}$$

On en déduit que :

$$V(1) = \mathbf{R}(2, 0, -5)$$

est de dimension 1, c'est moins que l'ordre de multiplicité algébrique de la valeur propre correspondante, f n'est donc pas diagonalisable.

*** Exemples d'application**

Précisons l'exemple 2, nous savons déjà que la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

possède deux valeurs propres :

- 1, associée au vecteur $(1, 1, 1)$
- 2, et que V(2) admet pour équation $x + y + x = 0$.

On en déduit une base de vecteur propres, formée de :

$$v_1 = (1, 1, 1) \ , \ v_2 = (1, -1, 0) \ , \ v_1 = (1, 0, -1).$$

La matrice de passage correspondante est :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

On sait alors que :

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Les applications les plus classiques de cette transformation de A, sont de trois types qu'on passe en revue sur cet exemple.

1. Calcul de A^n et étude de suites récurrentes.

Il est immédiat que :

$$P^{-1}A^nP = (P^{-1}AP)^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{bmatrix}$$

On en déduit que :

$$A^n = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{bmatrix} P^{-1}$$

On calcule P^{-1}, puis on effectue le produit :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

On obtient :

$$A^n = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1+2(-2)^n & 1-(-2)^n & 1-(-2)^n \\ 1-(-2)^n & 1+2(-2)^n & 1-(-2)^n \\ 1-(-2)^n & 1-(-2)^n & 1+2(-2)^n \end{bmatrix}.$$

On considère les trois suites (u_n), (v_n) et (w_n), définies par la donnée de u_0, v_0, w_0 et des relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n - w_n \end{cases}$$

On note :

$$U_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix}$$

les relations de récurrence prennent la forme :

$$U_{n+1} = AU_n$$

Il est alors immédiat que :

$$U_n = A^n U_0.$$

Ce qui permet d'expliciter les suites ainsi définies

$$\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1+2(-2)^n & 1-(-2)^n & 1-(-2)^n \\ 1-(-2)^n & 1+2(-2)^n & 1-(-2)^n \\ 1-(-2)^n & 1-(-2)^n & 1+2(-2)^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{bmatrix}.$$

2. Résolution du système différentiel :

$$\begin{cases} x' = -x + y + z \\ y' = x - y + z \\ z' = x + y - z \end{cases}$$

où x, y, z désignent trois fonctions de la variable réelle t. On pose :

$$\Xi = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = P^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P^{-1}X$$

Comme les coefficients de P^{-1} sont des constantes, on a :

$$\Xi' = (P^{-1}AP)\Xi$$

Le système donné est équivalent au syxtème ainsi obtenu qui s'explicite :

$$\begin{cases} \xi' = \xi \\ \eta' = -2\eta \\ \zeta' = -2\zeta \end{cases}$$

On connaît les solutions de ce dernier :

$$\begin{cases} \xi = Ae^t \\ \eta = Be^{-2t} \\ \zeta = CBe^{-2t} \end{cases}$$

où A, B, C sont trois nombre réels quelconques. On en déduit les solutions cherchées :

$$X = P\Xi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Ae^t \\ Be^{-2t} \\ Ce^{-2t} \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} x = Ae^t + (B+C)e^{-2t} \\ y = Ae^t - Be^{-2t} \\ Ae^t - Ce^{-2t} \end{cases}$$

2. Étude des invariants de la transformation affine f, définie par :

$$\begin{cases} x' = x_0 - x + y + z \\ y' = y_0 + x - y + z \\ z' = z_0 + x + y - z \end{cases}$$

relativement à un repère donné (O, i, j, k) où :

- (x, y, z) sont les coordonnées de M – le point courant de l'espace,
- (x', y', z') sont les coordonnées de son image M',
- (x_0, y_0, z_0) sont les coordonnées d'un point M_0, donné.

On effectue le changement de base de matrice P :

$$\Xi = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P^{-1} X$$

f est alors décrite par la relation :

$$\Xi' = \Xi_0 + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Xi$$

Ce qui montre que l'application linéaire associée $\vec{f}$ est l'affinité de rapport -2, par rapport à la droite engendrée par $i + j + k$, dans la direction du plan engendré par $i - j$ et $i - k$.

Afin de compléter la description de f, on étudie l'existence de points invariants. Leurs coordonnées sont les solutions du système linéaire :

$$X = X_0 + AX$$

qui prend la forme :

$$(A - I) = -X_0$$

et s'explicite :

$$\begin{cases} -2x + y + z = x_0 \\ x - 2y + z = y_0 \\ x + y - 2z = z_0 \end{cases}$$

On vérife que sa condition de compatibilité s'exprime :

$$x_0 + y_0 + z_0 = 0.$$

- Si elle est vérifiée, les solutions forment une droite D, dirigée par le vecteur $i + j + k$. la transformation est effectivement une affinité
- Dans le cas contraire, il n'existe pas de point invariant, f est alors le produit d'une translation et d'une affinité.

§4. Réduction à la forme triangulaire

Si un endomorphisme n'est pas diagonalisable, on pourra chercher à le représenter par une matrice triangulaire, ce qui, on le verra est toujours possible si le corps de base est C. Les considérations qui suivent sont assez peu efficaces sur le plan pratique car il est généralement plus simple de recourir à la décomposition de Jordan qu'on trouvera en annexe. Il n'empêche que les jurys de concours attendent qu'elles soient connues des candidats.

*** Compléments sur le polynôme caractéristique**

On commence par quelques résultats de nature essentiellement techniques qui faciliteront la tâche d'exposition dans la suite.

(4-1) Lemme : le polynôme caractéristique d'une matrice carrée triangulaire par blocs, est le produit des polynômes caractéristique de ses blocs diagonaux.

Démonstration : on considère une matrice triangulaire par blocs :

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{B} & M \\ 0 & \boxed{C} \end{bmatrix}$$

On a :

$$A - XI_n = \begin{bmatrix} \boxed{B - XI_p} & M \\ 0 & \boxed{C - XI_q} \end{bmatrix}$$

Il résulte du lemme 2-2 du chapitre sur le déterminant que :

$$\text{dét}(A - XI_n) = \text{dét}\begin{bmatrix} \boxed{B - XI_p} & M \\ 0 & \boxed{C - XI_q} \end{bmatrix} = \text{dét}(B - XI_p)\,.\,\text{dét}(C - XI_q),$$

c'est-à-dire

$$\chi_A = \chi_B \cdot \chi_C.$$

Cette démonstration vaut quel que soit le nombre des blocs diagonaux. Elle vaut aussi pour des matrices triangulaires inférieurs par blocs. ⊲

(4-2) Lemme : les coefficients diagonaux d'une matrice triangulaire en sont aussi ses valeurs propres.

Démonstration : le lemme précédent s'applique en considérant la partition où les blocs diagonaux sont de taille 1. ⊲

*** Réduction**

On désigne encore par E un espace vectoriel de dimension finie sur **K**.

(4-3) Théorème : si le polynôme caractéristique d'un endomophisme f, de E, est scindé sur **K**, il existe une base de E où la matrice de f est triangulaire supérieure.

Démonstration : on procède par récurrence sur la dimension de E. Si E est de dimension 1, la démonstration est sans objet. On suppose que $n > 1$, le théorème vérifié dans tout espace vectoriel de dimension $n - 1$. On considère vecteur propre v de f, soit λ la valeur propre associée.

Il existe une base $\mathscr{B}$ de E dont u est le premier vecteur. On pose :

$$\mathscr{B} = (u, u_2, \ldots, u_n)$$

et l'on note F les sous-espace de E engendré $(u_2, \ldots, u_n)$. Relativement à $\mathscr{B}$, la matrice de f se présente sous la forme suivante :

$$A = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & a_2\, a_3 \ldots a_n \\ \hline 0 & B \end{array}\right]$$

où la matrice B est celle d'un endomorphisme g de F. Il résulte du lemme 4-1 que :

$$\chi_f = \chi_A = (X-\lambda)\chi_B.$$

On a donc aussi :

$$\chi_f = (X-\lambda)\chi_g.$$

Comme le polynôme χ_f est scindé, χ_g l'est aussi. L'hypothèse de récurrence assure qu'il existe une base $\mathscr{C} = (u'_2, \ldots, u'_n)$ de F, où g est représenté par la matrice triangulaire supérieure $B' = [\, b'_{ij}\,]_{\substack{2 \leq i \leq n \\ 2 \leq j \leq n}}$.

Or, g s'interprète comme suit. On a :

$$E = \mathbf{K}u \oplus F.$$

On note p_u et p_F les projections sur $\mathbf{K}u$ et F associées à cette somme directe. Soit j un entier compris entre 2 et n, on a :

$$f(u_j) = a_j u + b_{1j}u_2 + \ldots + b_{n-1\,j}u_{n-1} \;,\; a_j u \in \mathbf{K}u \;\text{ et }\; b_{1j}u_2 + \ldots + b_{n-1}u_{n-1} \in F$$

et ainsi :

$$g(u_j) = b_{1j}u_2 + \ldots + b_{n-1}u_{n-1} = p_F(f(u_j)) = {}_F \circ f(u_j).$$

On en déduit que :

$$g = p_F \circ f.$$

Il s'ensuit que si $2 \leq j \leq n$:

$$f(u'_j) = p_u(f(u'_j)) + p_F(f(u'_j))$$

Il existe donc un scalaire b_j tel que $p_u(f(u'_j)) = b_j u$, on en déduit que :

$$f(u'_j) = b_j u_j + p_F \circ f(u'_j) = b_j u + g(u'_j) = b_j u + b'_{j2}u'_2 + \ldots + b'_{jn}u'_n$$

Ce qui montre que la matrice de f, relative à la base $(u, u'_2, \ldots, u'_n)$ de E, se présente comme suit :

$$A' = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & b_2\, b_3 \ldots b_n \\ \hline 0 & B' \end{array}\right]$$

Elle est effectivement triangulaire supérieure.

On en conclut que le théorème s'applique pour tout n. ◅

Remarque : le lemme 4-2 montre que la diagonale d'une matrice triangulaire qui, le cas échéant, représente f, est constituée des valeurs propres de f, elle est donc bien définie, à l'ordre des termes près. Il n'en va pas de même des autres coefficients comme le montre l'exemple qui suit.

Exemple : soit f l'endomorphisme de $E = \mathbf{R}^2$, défini par la matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

relativement à une base (i, j) donnée. On a :

$$f(\tfrac{1}{2}j) = \tfrac{1}{2}f(j) = \tfrac{1}{2}(2i + j) = i + \tfrac{1}{2}j$$

on en déduit que la matrice de f, relativement à la base $(i, \frac{1}{2}j)$ est :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On pourra noter que ce fait a une portée très générale pour les matrices de ce type.

§ 5. Une illustration de l'invariance du spectre

L'étude des isométries de l'espace donne une illustration frappante de l'usage qu'on peut faire de considérations sur le spectre d'un endomorphisme. Il nous faut, en préalable, reformuler des propriétés connues des isométries du plan dans le contexte qui est ici le nôtre.

*** Les isométries vectorielles du plan**

Soit $\mathscr{P}$ le plan vectoriel de la géométrie usuelle rapporté à une base orthonormée $\Omega : (\vec{i}\,,\vec{j})$, on en considère un endomorphisme f, on note A sa matrice relativement à la base choisie. On justifie facilement que si f conserve la distance, elle conserve l'orthogonalité. Elle transforme donc Ω en une base orthornormée et réciproquement. Cette propriété est équivalente à :

$$^t\!AA = I,$$

autrement dit :

$$^t\!A = A^{-1}.$$

Une telle matrice est dite *orthogonale*. Cette propriété est indépendante de la base donnée. En effet, si l'on choisit une autre base orthonormée, la matrice de passage P est aussi orthogonale. La matrice de f relativement à la nouvelle base s'exprime :

$$A' = {}^t\!PAP,$$

elle vérifie :

$$^t\!A'A' = {}^t({}^t\!PAP)({}^t\!PAP) = {}^t\!P\,{}^t\!AP\,{}^t\!PAP = I.$$

$$^t\!A' = A'^{-1}.$$

Comme la composition de deux isométries donne une isométrie, on en déduit que les isométries forment un groupe qu'on note $O(\mathscr{P})$.

Si $f \in O(\mathscr{P})$, on a :

$$(\text{dét}\,A)^2 = \text{dét}\,A\,.\,\text{dét}\,A = \text{dét}\,{}^t\!A\,.\,\text{dét}\,A = \text{dét}({}^t\!AA) = \text{dét}\,I = 1.$$

Il s'ensuit que :

$$\text{dét}\,A \in \{-1\,,1\}.$$

On distingue alors les isométries *directes* ou *positives*, celles qui conservent le l'orientation, qui forment un sous-groupe de $O(\mathscr{P})$ qu'on note $O^+(\mathscr{P})$ et les isométries *indirectes* ou *négatives* dont on note l'ensemble $O^-(\mathscr{P})$.

Un calcul simple montre que A est de l'une des deux formes suivantes :

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \text{ avec } a^2 + b^2 = 1.$$

Il existe donc un nombre réel θ, tel que :

- si $f \in O^+(\mathscr{P})$, $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$,
- si $f \in O^+(\mathscr{P})$, $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$.

Dans le premier cas, on reconnaît la matrice d'une rotation. Le polynôme caractéristique de la seconde est :

$$\begin{bmatrix} \cos\theta - X & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta - X \end{bmatrix} = X^2 - 1.$$

Les valeurs propres sont donc 1 et –1. On vérifie que :

$$\cos\tfrac{\theta}{2}\,\vec{i} + \sin\tfrac{\theta}{2}\,\vec{j} \quad \text{et} \quad -\sin\tfrac{\theta}{2}\,\vec{i} + \sin\tfrac{\theta}{2}\,\vec{j}$$

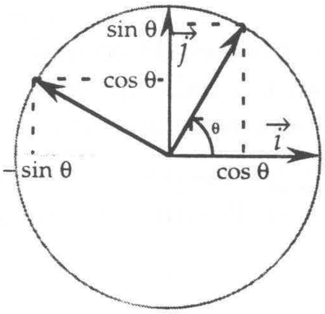
sont des vecteurs propres associés. Ils sont orthogonaux. Il apparaît alors que f est la symétrie orthogonale dont l'axe à la droite d'angle polaire $\frac{\theta}{2}$, par rapport au repère choisi.

<u>En résumé</u> : on retrouve ainsi un résultat familier, à savoir que les seules isométries planes **laissant un point invariant** sont les symétries orthogonales et les rotations.

<u>Remarque</u> : si l'on change l'orientation de Ω – par exemple en échangeant ses vecteurs de Ω, la matrice d'une rotation devient :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Ce qui revient à changer θ en son opposé. La définition d'une rotation par son angle suppose donc qu'on oriente le plan et qu'on le rapporte à une base orthonormée directe. Dans ces conditions, si θ est un réel donné, il devient cohérent de parler de **la** rotation d'angle θ. En effet, elle est définie par la même matrice :



$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

relativement à toute base orthonormée directe.

* Isométries vectorielles de l'espace

Soit $\mathscr{E}$ l'espace des vecteurs de la géométrie en trois dimensions, on le rapporte à une base orthonormée $\Omega = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les considérations valant pour le plan s'appliquent pour montrer que les isométries de $\mathscr{E}$:

- sont décrites par les matrices orthogonales, c'est-à-dire telles que :
  $${}^tA = A^{-1},$$
- forment le groupe $O(\mathscr{E})$ dont on distingue le sous-groupe $O^+(\mathscr{E})$ et son complémentaire $O^-(\mathscr{E})$.

Soit $f \in O(\mathscr{E})$, comme le polynôme caractéristique de f est de degré 3, il admet au moins une valeur propre réelle. Il existe donc toujours un vecteur $\vec{u}$, tel que :

$$f(\vec{u}) = \vec{u} \quad \text{ou} \quad f(\vec{u}) = -\vec{u}.$$

Soit $\mathscr{P}$ le plan vectoriel orthogonal à $\vec{u}$, comme f conserve les distances, elle conserve l'orthogonalité, $\mathscr{P}$ est donc stable par f. On note $f_{\mathscr{P}}$ l'application induite sur $\mathscr{P}$ par f, il s'agit d'une isométrie de $\mathscr{P}$. On est alors en mesure de mener à bien la discussion suivante.

- Si 1 est la seule valeur propre réelle :
  - elle peut être d'ordre 3 et alors $f_{\mathscr{P}} = Id_{\mathscr{P}}$ et $f = Id_{\mathscr{E}}$;
  - sinon, elle est d'ordre 1, l'espace propre associé est une droite $\mathscr{D}$ et $f_{\mathscr{P}}$ est alors une rotation de $\mathscr{P}$, f se décrit alors comme une *rotation d'axe* $\mathscr{D}$.

- Si -1 est valeur propre de f, et :
  - si $f \in O^+(\mathscr{E})$, alors $f_{\mathscr{P}} \in O^-(\mathscr{P})$, f est alors la symétrie par rapport à une droite ;
  - si $f \in O^-(\mathscr{E})$, alors $f_{\mathscr{P}} \in O^+(\mathscr{P})$, f est le produit d'une rotation par la réflexion de plan $\mathscr{P}$, perpendiculaire à son axe – on dit alors que f est une *antirotation*.

<u>En résumé</u> : il existe un nombre réel θ et une base orthonormée où, selon que $f \in O^+(\mathscr{E})$ ou $f \in O^-(\mathscr{E})$, f est décrit par la matrice :

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Cette présentation vaut aussi bien pour les symétries axiales et les symétries planes en remplaçant θ respectivement par π et 0.

N. B. La description d'une rotation de $\mathscr{E}$ par son axe $\mathscr{D}$ et son angle suppose qu'on oriente l'espace et qu'on distingue une orientation de $\mathscr{D}$, ce qui induit une orientation de $\mathscr{P}$.

<u>Remarque</u> : on note que selon le cas :

$$\operatorname{trace} f = 2\cos\theta + 1 \quad \text{ou} \quad \operatorname{trace} f = 2\cos\theta - 1$$

Ce qui permet de connaître, **au signe près**, la valeur de l'angle de la rotation correspondante, quelle qu'en soit la présentation. Pour en savoir plus on procède comme dans l'exemple suivant.

<u>Exemple</u> : l'espace étant orienté et rapporté à un repère orthonormé direct, on considère l'endomorphisme f, de $\mathscr{E}$, défini par la matrice :

$$A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

On vérifie sans peine que :

$${}^tAA = I_3 \text{ et } \det A = 1.$$

On sait alors que f est une rotation, dont l'angle θ vérifie :

$$2\cos\theta + 1 = \frac{16}{9}$$

$$\cos\theta = \frac{7}{18}$$

La résolution du système $(A - I)X = 0$ donne l'axe de rotation $\mathbf{R}\vec{w}$ où :

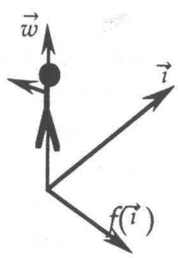
$$\vec{w} = (-3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}).$$

On oriente cette droite, en distinguant $\vec{w}$ parmi ses vecteurs directeurs. On choisit un vecteur arbitraire $\vec{v}$, n'appartenant pas à l'axe, on détermine le signe du produit mixte :

$$(\vec{v}, f(\vec{v}), \vec{w})$$

Par exemple pour $\vec{v} = 9\vec{i}$, on obtient :

$$\begin{vmatrix} 9 & 8 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9 \times (-6) < 0.$$



On en conclut que f est la rotation :

- d'angle $-\operatorname{Arc}\cos\frac{7}{18}$,
- autour de l'axe orienté par $\vec{w}$.

Annexe I. La réduction de Jordan des endomorphismes

Étant donné un corps commutatif **K** et un espace vectoriel E, sur **K**, de dimension finie notée n, on considère un endormophisme f, non nul, de E, choisi une fois pour toutes.

§ 1. Le "théorème des noyaux"

(1-1) Lemme : soit p un polynôme de $\mathbf{K}[X]$, $p(f)$ est un endomorphisme de E dont le noyau et l'image sont des sous-espaces stables par f.

Démonstration : découle immédiatement de :

$$p(f)[f(x)] = (pX)(x) = (Xp)(x) = f[p(f)(x)]. \qquad \lhd$$

(1-2) Lemme : soit p un polynôme de $\mathbf{K}[X]$ qui annule f, si p se décompose en un produit $p = qr$ de deux facteurs premiers entre eux, on a :

$$E = \operatorname{Ker} q(f) \oplus \operatorname{Ker} r(f).$$

Démonstration : le théorème de Bezout montre qu'il existe deux polynômes u et v, de $\mathbf{K}[X]$, tels que $1 = uq + vr$. Il s'ensuit que :

$$\forall x \in E \quad x = u(f)q(f)(x) + v(f)r(f)(x).$$

Si $x \in \operatorname{Ker} q(f) \cap \operatorname{Ker} r(f)$, il vient :

$$x = u(f)q(f)(x) + v(f)r(f)(x) = 0.$$

On a donc :

$$\operatorname{Ker} q(f) \cap \operatorname{Ker} r(f) = \{0\}.$$

Par ailleurs, soit $x \in E$, on a :

$$q(f)[v(f)r(f)(x)] = q(f)v(f)r(f)(x) = q(f)r(f)u(f)(x) = p(f)[u(f)(x)] = 0.$$

Ce qui montre que $x' = v(f)r(f)(x) \in \operatorname{Ker} q(f)$. On a aussi $x'' = u(f)q(f)(x) \in \operatorname{Ker} r(f)$ pour des raisons analogues. Comme de plus, $x = x' + x''$, on en déduit que :

$$E = \operatorname{Ker} q(f) + \operatorname{Ker} r(f).$$

Les noyaux de $q(f)$ et $r(f)$ sont donc bien supplémentaires dans E. $\lhd$

Remarque : il est facile de justifier que, dans les conditions précédentes, on a :

$$\operatorname{Im} q(f) = \operatorname{Ker} r(f) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} r(f) = \operatorname{Ker} q(f).$$

(1-3) Lemme : soit p un polynôme de $\mathbf{K}[X]$ qui annule f, si p se décompose en un produit :

$$p = p_1 p_2 \cdots p_k$$

dont les facteurs sont des polynômes premiers entre eux deux à deux, on a :

$$E = \operatorname{Ker} p_1(f) \oplus \ldots \oplus \operatorname{Ker} p_k(f).$$

Démonstration : découle du lemme 2 par une récurrence immédiate. $\lhd$

§ 2. Polynôme minimal et polynôme caractéristique

Considérons l'ensemble J des polynômes de $\mathbf{K}[X]$ qui annulent f, c'est-à-dire :

$$J = \{p \in \mathbf{K}[X] \mid p(f) = 0\}.$$

Il est immédiat que J est un idéal de $\mathbf{K}[X]$, le théorème de Cayley-Hamilton montre que le polynôme caractéristique de f, appartient à J, cet idéal est donc différent de $\{0\}$ et comme $\mathbf{K}[X]$ est un anneau principal, il existe un polynôme μ de $K[X]$ tel que $J = \mu\mathbf{K}[X]$. Comme f est non nul, le degré de μ est non nul et un seul polynôme unitaire remplit cette condition, on le note μ_f.

Définition : μ_f ainsi défini est appelé le *polynôme minimal* de f.

Remarque : il est possible de se passer de la référence au théorème de Cayley-Hamilton. En effet, les endomorphismes de E constituent un espace vectoriel de dimension finie (n^2), la famille : $(I, f, \dots, f^n, \dots)$ est donc liée. En d'autres termes, il existe un polynôme non nul p qui appartient à J.

Le polynôme minimal de f est, par définition, un diviseur du polynôme caractéristique de f. Ce fait est riche de conséquences, notamment dans le cas où f a toutes ses valeurs propres dans $\mathbf{K}$.

(2-1) Théorème : si le polynôme caractéristique de f est scindé sur $\mathbf{K}$, le polynôme minimal se factorise sous la forme :

$$\mu_f = (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$$

où les entiers α_i sont positifs et les λ_i sont **toutes les valeurs propres distinctes** de f.

De plus la dimension du noyau de $(f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{\alpha_i}$ est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i, pour $i = 1, \dots, k$.

Démonstration : soit $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de f, comme le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique, il est clair qu'il existe une telle décomposition, où les entiers α_i sont positifs ou nuls. Soit i un entier compris entre 1 et k, si x un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i, on a :

$$x \neq 0 \quad \text{et} \quad 0 = (f - \lambda_1 I)^{\alpha_1} \dots (f - \lambda_k I)^{\alpha_k}(x) = (\lambda_i - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (\lambda_i - \lambda_k)^{\alpha_k} x,$$

Comme on a $(\lambda_i - \lambda_j)^{\alpha_j} \neq 0$ si $j \neq i$, on a nécessairement $\alpha_i \neq 0$.

Notons N_i le noyau $\mathrm{Ker}(f - \lambda_i I)^{\alpha_i}$ et f_i l'endomorphisme induit par f sur le sous-espace stable N_i (cf. lemme 1-1). Le lemme 1-3 montre que :

$$V = N_1 \oplus \dots \oplus N_k.$$

Il s'ensuit que :

$$\chi_f = \chi_{f_1} \cdots \chi_{f_k}.$$

Soit β_i l'ordre de multiplicité de λ_i dans χ_f, $(X - \lambda_i)^{\beta_i}$ divise le produit $\chi_{f_1} \cdots \chi_{f_k}$. et comme N_i contient tous les vecteurs propres de f associés à λ_i, χ_{f_i} est le seul facteur divisible par $X - \lambda_i$, on est donc sûr que $(X - \lambda_i)^{\beta_i}$ divise χ_{f_i}. On a donc :

$$\dim N_i = \text{degré}\, \chi_{f_i} \geq \beta_i, \text{ pour } i = 1, \dots, k.$$

Or on a :

$$n = \dim N_1 + \dots + \dim N_k = \beta_1 + \dots + \beta_k.$$

ce qui exige que $\beta_i = \dim N_i$, pour $i = 1, \dots, k$. ◅

Comme il est clair que $f_i - \lambda_i I$ est nilpotent, nous pouvons restreindre notre attention à ce type d'endomorphisme.

§ 3. Endomorphismes nilpotents

*** Cycles**

Définition : soit r un entier positif, toute suite d'élements de E telle que :

$$v, f(v), \dots, f^{r-1}(v) \ , \ f^r(v) = 0 \text{ et } f^{n-1}(v) \neq 0,$$

est appelée *cycle* (pour f) et l'entier r en est la *longueur*.

(3-1) Proposition : tout cycle est un système libre.

Démonstration : étant donné un cycle :

$$v, f(v), \dots, f^{r-1}(v),$$

on considère une combinaison linéaire, de ses éléments :

$$y = a_0 v + a_1 f(v) + \dots + a_{r-1} f^{r-1}(v).$$

Si k est une entier compris entre 1 et $r-1$, on a :

$$f^{r-k-1}(a_k f^k(v) y) = a_k f^{r-1}(v).$$

et comme $f^{r-1}(v) \neq 0$, $y = 0$ entraîne successivement :

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{r-1} = 0.$$

◅

Définition : un sous-espace de V est dit *cyclique* – relativement à f – s'il admet une base formée d'un cycle pour f.

Remarque : notons qu'un tel sous-espace est stable par f.

*** Forme réduite d'un endomorphisme nilpotent**

Théorème 1 : étant donné un espace vectoriel E, si f est un endomorphisme nilpotent de E, il existe une décomposition de E en somme directe de sous-espaces cycliques relativement à f.

Démonstration : on procède par récurrence sur la dimension de E, notée n. Si $n = 1$, la propriété est banale, on suppose donc que $n > 1$ et que la propriété est vérifiée pour tout espace de dimension moindre que n. Comme f est nilpotent, son rang est inférieur à n, le théorème s'applique donc à l'image de f. Il existe un entier m et des cycles :

$$w_i, f(w_i), \dots, f^{r_i-1}(w_i) \quad i \in \{1, \dots, m\}$$

dont la réunion forme une base de Im f.

Pour chaque $i \in \{1, \dots, m\}$, on distingue un vecteur v_i, tel que $f(v_i) = w_i$, la réunion des vecteurs suivants :

$$v_i, f(v_i), \dots, f^{r_i-1}(v_i) \text{ pour } i \in \{1, \dots, m\}.$$

forment un sytème libre de E, on note F, le sous-espace engendré.

On sait que F et Ker$f$ sont supplémentaires dans V ([1]). Les vecteurs restant :

$$f^{r_i}(v_i) = f^{r_i-1}(w_i) \quad i \in \{1, \dots, m\}$$

forment une partie libre de Ker$f$ qu'on complète par des vecteurs :

$$v_{m+1}, \dots, v_{m+s}$$

pour former une base de ce sous-espace. La réunion des bases de ces deux sous-espaces donne une base de E. Celle-ci peut s'ordonner de la façon suivante :

$$v_1, f(v_1), \dots, f^{r_1}(v_1), \dots, v_m, f(v_m), \dots, f^{r_m}(v_m), v_{m+1}, \dots, v_{m+s}$$

C'est bien une réunion de cycles. L'assertion de l'énoncé en découle de façon immédiate.

◅

---

1 Voir la démonstration de la propriété classique dim E = dim ker f + rang f.

Dans la pratique, il est plus commode de ranger chaque cycle dans l'ordre inverse du précédent :

$$\left.\begin{array}{r} f^{r_1}(v_1)\ ,\ \dots\ ,\ v_1 \\ \dots\dots\dots \\ f^{r_m}(v_m),\ \dots\ ,\ v_m \\ v_{m+1} \\ \dots \\ v_{m+s} \end{array}\right\}$$

Relativement à une telle base, la matrice de f se présente sous la forme diagonale par blocs, où chaque bloc diagonal a tous ses coefficients nuls, sauf ceux situés immédiatement au dessus de la diagonale principale qui sont égaux à 1 – forme qu'on schématise comme suit :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{bmatrix}$$

La forme réduite de Jordan de f se déduit immédiatemment de ce fait.

<u>Remarque</u> : on peut prouver que la suite formée par les tailles de ces blocs classées par ordre croissant – ou décroissant, peu importe – est unique. Ce fait a évidemment une importance théorique considérable car il permet la classification des endomorphismes, dans le cas où le corps est algébriquement clos.

Dans le contexte qui est le notre, cette propriété est un peu secondaire. Néanmoins, on pourra se persuader que la démonstration consiste à interpréter la suite des dimensions des noyaux successifs en termes de nombre de chaînes qui naissent – ou s'interrompent, selon le point de vue adopté.

Elle pose plus de problèmes de rédaction qu'elle n'offre de difficultés réelles.

§ 4. Forme réduite de Jordan

Théorème 2 : étant donné un espace vectoriel E, sur le corps K, et un endomorphisme f de E **ayant toutes ses valeurs propres dans K**, il existe une base de V pour laquelle la matrice de f admet une partition diagonale dont les blocs sont de la forme :

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ & 0 & \lambda & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & & \cdots & & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Démonstration : nous avons vu que dans ces conditions, V est la somme directe des sous-espaces invariants – précédemment notés N_i. Sur chacun d'eux, f induit un endomorphisme de la forme $\lambda_i I + f_i$, où f_i est nilpotent. ◅

*** Détermination concrète**

La démonstration du théorème 1 suggère une méthode de calcul explicite d'une base où la matrice de f est réduite dans ce sens. En théorie cela semble compliqué car l'exposé général ne se rédige pas à l'économie. Soit λ une valeur propre dont l'ordre de multiplicité est β, on détermine le rang des puissances successives de $A - \lambda I$, jusqu'à ce que ce nombre soit stable, c'est-à-dire. Ce qui livre l'entier α, tel que :

$$\text{rang}\,(A - \lambda I)^{\alpha-1} > \text{rang}\,(A - \lambda I)^{\alpha} = \text{rang}\,(A - \lambda I)^{\alpha+1}.$$

On a alors $N = \text{Ker}(f - \lambda I)^{\alpha}$ et $\dim N = \beta$. On choisit :

une base $w_1, \dots, w_p$ de $N \cap \text{Im}(f - \lambda I)^{\alpha-1}$.

On en relève les éléments par $f - \lambda I$, on forme ainsi une partie libre $v_1, \dots, v_p$ de $\text{Im}(f - \lambda I)^{\alpha-2}$, telle que :

$w_1 = f(v_1), \dots, w_p = f(v_p)$ soit une partie libre de $\ker(f - \lambda I)^{\alpha-1} \cap \text{Im}(f - \lambda I)^{\alpha-2}$,

qu'on complète de façon arbitraire en une base de ce sous-espace si nécessaire.

... et ainsi de suite jusqu'à épuisement.

Dans les illustrations courantes, l'écart entre α et β est 1 ou 2 – rarement trois ou quatre. La dimension de $\text{Ker}(f - \lambda I)$ fournit le nombre des "blocs", il suffit de relever, par $f - \lambda I$ [1], pour des vecteurs propres "convenablement choisis" pour obtenir la base souhaitée.

Recette : pour fabriquer des exemples on part du résultat. On construit une matrice semblable en effectuant quelques transformations élémentaires des types :

$$M \longmapsto P_{ij}(-\lambda) M P_{ij}(\lambda) \;,\; M \longmapsto P_{ij} M P_{ij}.$$

On constate que la matrice devient très vite méconnaissable.

---

1 Ce qui s'entend choisir une solution du système $(A - \lambda I)X = V$.
Dans les cas où la chute de rang est supérieure à 1, on est amené à résoudre en chaîne des sytèmes linéaires ayant même premier membre. Il est possible d'éviter la répétition des opérations d'élimination en commençant par réduire la matrice augmentée $[A - \lambda I \mid I]$. Notons $[R \mid P]$ le résultat de cette opération, la forme réduite de tout système $(A - \lambda I)X = B$ sera alors $RX = PB$.

Annexe II. Sur les matrices compagnes

§ 1. Définition et premières conséquences

Définition : étant donné un polynôme unitaitre de degré n, de K[X] :

$$P = a_0 + a_1X + \ldots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n,$$

on lui associe la matrice carrée d'ordre n suivante :

$$M_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & \vdots & & & & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & & & & \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \\ & & \vdots & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ & & & & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

qu'on appelle sa *compagne* (1).

Remarque

1) On est habitué à ramener la résolution de l'équation différentielle linéaire :

$$y^{(n)} + ay^{(n-1)} + \ldots + a_0y = 0$$

à un problème de Cauchy, en posant :

$$y_0 = y' \ , y_1 = y'' \ , \ \ldots \ , \ y_n = y^{(n-1)}$$

L'équation donnée devient équivalente à :

$$Y' = {}^tM_P\, Y,$$

où P est le polynôme caractéristique de l'équation (2).

$$P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \div + a_0.$$

2) Ceci vaut, mutatis mutandi, pour les équations aux différences linéaires.

(1-1) Proposition : tout polynôme unitaire, de degré supérieur à 1, est, au signe près, le polynôme caractéristique de sa matrice compagne.

Plus précisément, si P est de degré n, on a :

$$\text{dét}(M_P - XI) = (-1)^n P.$$

Démonstration 1 : on applique à la matrice $M_P - XI$, les opérations suivantes :

$$L_1 \mapsto L_1 + XL_2 \ , \ L_1 \mapsto L_1 + X^2L_3 \ , \ \ldots \ , \ L_1 \mapsto L_1 + X^{n-1}L_n.$$

Soit B la matrice obtenue, elle vérifie :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -P(X) \\ T & C \end{bmatrix} \text{ et } \text{dét}(M_P - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0 & -P(X) \\ T & C \end{vmatrix}.$$

où T est triangulaire supérieure de format $(n-1)\times(n-1)$ et ne comporte que des 1 sur la diagonale. Le développement suivant la première ligne donne :

$$\text{dét}(M_P - XI) = (-1)^n P.$$

---

1 Ce terme nous semble plus adéquat que l'anglicisme "*matrice compagnon*" – traduction paresseuse de "*companion matrix*".

2 Au sens classique qu'on lui donne dès le lycée.

Démonstration 2 : on peut préférer éviter de travailler sur un déterminant à coefficiente polynômiaux et procéder comme suit. Soit E l'espace vectoriel K^n, rapporté à sa base canonique, notée, pour la circonstance, $(e_0, e_1, \ldots, e_{n-1})$, P désignant toujours un polynôme donné, de degré n et unitaire, on note f_P l'endomorphisme de E défini par la matrice compagne M_P. On a :

$$f_P(e_0) = e_1 \ , \ \ldots \ , \ f_P(e_{n-2}) = e_{n-1} \ \text{ et } \ f_P(e_{n-1}) = -(a_0e_0 + a_1e_1 + \ldots + a_{n-1}e_{n-1})$$

On en déduit que :

$$f_P^i(e_0) = e_i \ \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

puis :

$$f^n(e_0) = -[a_0\mathrm{Id}(e_0) + a_1f(e_0) + \ldots + a_{n-1}f^{n-1}(e_0)].$$

Ce qui s'écrit :

$$\mathrm{P}(f)(e_0) = 0$$

et entraîne que :

$$\mathrm{P}(f_P)(e_i) = \mathrm{P}(f_P)f_P^i(e_0) = \mathrm{P}X^i(f_P)(e_0) = X^i\mathrm{P}(f_P)(e_0) = f_P^i(\mathrm{P}(f_P)(e_0)) = 0.$$

On a donc

$$\mathrm{P}(f)(e_i) = 0 \ \text{ pour } i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Ainsi P(f) est l'endomorphisme nul de E.

Soit Q un polynôme annulateur de f, de degré k, $k \leq n-1$.

$$Q = b_0 + b_1X + \ldots + b_kX^k,$$

on a :

$$0 = Q(f)(e_0) = b_0e_0 + b_1e_1 + \ldots + b_ke_k$$

et comme les e_i appartiennent à une base, il vient :

$$b_0 = b_1 = \ldots = b_k = 0.$$

On en conclut que $Q = 0$ et comme P est unitaire, il est le polynôme minimal de f. Il divise le polynôme caractéristique χ_f de f, il est de degré n. On a donc :

$$\chi_f = (-1)^n\mathrm{P}. \qquad \lhd$$

On a donc établi, en passant.

(1-2) Proposition : tout polynôme unitaire, de degré supérieur à 1, est le polynôme minimal de sa matrice compagne.

Une des conséquence les plus marquante s'énonce comme suit.

(1-3) Théorème : toute matrice carrée est semblable à une matrice diagonale de blocs qui sont des matrices compagnes.

Démonstration : voir l'exercice 9. $\lhd$

§ 2. Algorithme de Danilevsky

Il est possible, partant d'une matrice carrée donnée, de construire une matrice semblable, triangulaire supérieure par blocs et dont les termes diagonaux sont des matrices compagnes, en effectuant opérations élémentaires portant sur les lignes et les colonnes.

L'utilité d'une telle opération est évidente. En effet, partant d'une matrice A, elle livre une matrice dont le polynôme caractéristique est le produit des polynômes caractéristiques des blocs diagonaux. Or, ces derniers s'expriment immédiatement car il s'agit de matrices compagnes. Commençons par un exemple très simple.

<u>Exemple</u> 1 : partant de la matrice :

$$A=\begin{bmatrix}2&3&1\\1&2&1\\1&2&3\end{bmatrix}$$

Le second coefficient de la première colonne étant 1, on s'en sert comme pivot pour éliminer les autres coefficients de la colonne, on effectue les opérations :

$$L_1 \to L_1-2L_2 \text{ et } L_3 \to L_3-L_2,$$

ce qui donne :

$$P_{32}(-1)AP_{12}(-2)A=\begin{bmatrix}0&-1&-1\\1&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$$

On obtient une matrice semblable à A en effectuant la multiplication à droite par $P_{12}(2)$ et $P_{32}(1)$, ce qui s'opère concrètement par les opérations élémentaires sur les colonnes :

$$C_2 \to C_2+2C_1 \text{ et } C_2 \to C_2+C_3,$$

$$A_1=\begin{bmatrix}0&-2&-1\\1&5&1\\0&2&2\end{bmatrix}$$

On note que ces opérations, n'affectant que la deuxième colonne, conservent les acquis de l'élimination. On passe à la deuxième colonne. On crée un pivot égal à 1, en position (3,2) en effectuant l'opération :

$$L_3 \to \frac{1}{2}L_3$$

Le résultat s'exprimant $P_3(\frac{1}{2})A_1$, on rétablit la similitude en effectuant la multiplication à droite par $P_3(2)$. Son résultat s'obtient par l'opération :

$$C_3 \to 2C_3.$$

On obtient ainsi :

$$A'_2=\begin{bmatrix}0&-2&-2\\1&5&2\\0&1&2\end{bmatrix}$$

On continue, selon le même principe, en effectuant les opérations :

$$L_1 \to L_1+2L_3 \text{ et } L_2 \to L_2-5L_3 \text{ puis } C_3 \to C_3-2C_1 \text{ et } C_3 \to C_3+5C_2,$$

On obtient :

$$A_3=\begin{bmatrix}0&0&-2\\1&0&-8\\0&1&2\end{bmatrix}$$

Le procédé s'arrête là et A_3 est une matrice compagne semblable à A.

Exemple 2 : on applique les opérations à la matrice augmentée $[A \mid I]$

$$\begin{array}{cccc|cccc} & A & & & & I & & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Les transformations sur les colonnes n'affectant que les quatres premières. Le résultat sera de la forme :

$$[B \mid P] = [PAP^{-1} \mid P]$$

Ainsi, on explicite facilement la matrice par laquelle on va conjuguer A.

On commence par créer un pivot en position $(2,1)$ au moyen des opérations :

$$L_1 \leftrightarrow L_2 \text{ et } C_1 \leftrightarrow C_2.$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

On procède à l'élimination au moyen de :

$$L_1 \to L_1 + L_2 \text{ , } L_3 \to L_3 - 2L_2 \text{ et } L_4 \to L_4 - 2L_2.$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

On assure la similitude par :

$$C_2 \to C_2 - C_1 \text{ , } C_2 \to C_2 + 2C_3 \text{ et } C_2 \to C_2 + 2C_4.$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 13 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Un premier bloc apparaît. On passe à la troisième colonne. On ajuste le coefficient $(4,3)$, en effectuant :

$$L_4 \to -L_4 \text{ et } \text{ et } C_4 \to -C_4.$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 13 & 4 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{array}$$

On procède à l'élimination – inutile de remonter plus haut que le coefficient $(3,3)$, on effectue :

$$L_3 \to L_3 - L_4.$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 13 & 4 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{array}$$

On ajuste les colonnes, via :

$$C_4 \to C_4 + C_3 :$$

PAP^{-1}				P			
0	13	4	2	1	1	0	0
1	4	1	0	1	0	0	0
0	0	0	1	−4	0	1	1
0	0	1	1	2	0	0	−1

La matrice obtenue est bien de la forme attendue. On en déduit le polynôme caractéristique de A :

$$\chi A(X) = (X^2 - 4X - 13)(X^2 - X - 1).$$

Pour s'assurer que ce procédé va toujours à son terme, il suffit de remarquer que lorsqu'on vient de traiter la colonne $i-1$ ($i<n$), on est exclusivement dans l'un des cas ci-après.

1. Le terme $(i+1\,,i)$ est 1, l'élimination s'effectue par les opérations :
$$L_j \to L_j - a_{ji}L_{i+1},$$
l'ajustemnent mettant en jeu $C_{i+1} \to C_{i+1} + a_{ji}C_j$, il ne porte que sur la colonne $i+1$ et ne modifie pas les acquis antérieurs.
2. Le terme $(i+i+1)$ est non nul, mais différent de 1, les opérations :
$$L_{i+1} \to \frac{1}{a_{i\,i+1}} L_{i+1} \quad \text{et} \quad C_{i+1} \to a_{i\,i+1}C_{i+1}$$
nous ramènent au cas précédent.
3. Le terme $(i+i+1)$ est nul et il existe j, tel que $j > i+1$ et $a_{ji} \neq 0$. On effectue les opérations :
$$L_{i+1} \leftrightarrow L_j \quad \text{et} \quad C_{i+1} \leftrightarrow C_j.$$
La première place a_{ji} en position $(i+1\,,i)$, ce coefficient n'est donc pas affecté par la seconde. On est ramené à l'un des cas précédents.
4. On a $a_{ij} = 0$ pour $j \geq i+1$, le terme a_{ii} "limite" un bloc – dont la taille peut être 1. On passe à la colonne suivante, à moins que $i+1 = n$, auquel cas le processus s'arrête de lui-même.

§ 3. Une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

Soit E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E, on choisit arbitrairement un élément, non nul, e de E, on note p le plus grand entier tel que les vecteurs :

$$e_1 = e \quad , e_2 = f(e) \quad , \quad \dots \quad , \quad e_p = f^{p-1}(e)$$

soient linéairement indépendants – on a $1 \leq p \leq n$. Le sous-espace engendré par ces vecteurs est stable par f. Soit g l'endomorphisme induit, il s'exprime, relativement à la base $(e_1, e_2, \dots, e_p)$, par une matrice compagne M_P. Nous avons montré que $P(g) = 0$ (cf. 1-2), on a donc, en particulier :

$$P(f)(e) = P(g)(e) = 0.$$

On complète $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ en une base de E, la matrice de f s'exprime alors :

$$A = \begin{bmatrix} M_P & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

Il est classique que :

$$\chi_A(X) = \text{dét}(A - XI) = \text{dét}(M_P - XI) \, . \, \text{dét}(B - XI) = P(X) \, . \, \text{dét}(B - XI) = \text{dét}(B - XI) \, . \, P(X).$$

On pose $\text{dét}(B - XI) = Q(X)$, il vient :

$$\chi_A(f) = [Q(X)P(X)](f) = Q(f) \circ P(f)$$

On en déduit que :

$$\chi_A(f)(e) = \text{dét}(A - XI)(f) \circ P(f)(e) = 0.$$

Il apparaît ainsi, que $\chi_A(f)(e) = 0$ et ceci quel que soit e. Autrement dit, $\chi_A(f)$ est l'endomorphisme nul. ◅

Exercices

V. Exercices sur le déterminant

I Soit A une matrice d'ordre n, exprimer détλA en fonction de λ et de dét A.

II Calculer les déterminants suivants :

1)

$$\begin{vmatrix} 2&0&0\\1&1&0\\8&5&7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3&1&1\\2&5&5\\8&7&7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4&-9&2\\4&-9&2\\3&1&0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4&-1&1\\2&0&0\\1&5&7 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1&2&-1\\0&1&1\\0&2&7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1&4&2\\5&0&7\\3&0&8 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 2&1&2\\0&3&-1\\4&1&1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3&-1&5\\-1&2&1\\-2&4&3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2&4&3\\-1&3&0\\0&2&1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3&1&2\\4&5&1\\-1&2&-3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2&-1&4\\3&1&5\\1&2&3 \end{vmatrix}$$

2)

$$\begin{vmatrix} 1&2&3\\2&3&4\\3&4&5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7 \end{vmatrix}$$

3)

$$\begin{vmatrix} 1&3&1&1\\2&1&5&2\\1&-1&2&3\\4&1&-3&7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1&1&-2&4\\0&1&1&3\\2&-1&1&0\\3&1&2&5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1&1&2&0\\0&3&2&1\\0&4&1&2\\3&1&5&7 \end{vmatrix}$$

III Calculer le déterminant du produit de matrices suivant :

$$\begin{bmatrix} x&-y\\y&x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x'&y'\\-y'&x' \end{bmatrix}$$

En déduire une identité remarquable.

IV Déterminant de Vandermonde

Démontrer que :

$$\begin{bmatrix} 1&x&x^2\\1&y&y^2\\1&z&z^2 \end{bmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y).$$

Adapter à un déterminant d'ordre 4.

V Démontrer les égalités suivantes, sans développer les déterminants :

(1) $$\begin{bmatrix} a-b-c&2a&2a\\2b&b-c-a&2b\\2c&2c&c-a-b \end{bmatrix} = (a+b+c)^3.$$

(2) $$\begin{bmatrix} 0&a&b&c\\a&0&c&b\\b&c&0&a\\c&b&a&0 \end{bmatrix} = -(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).$$

(3) $$\begin{bmatrix} 1&\sin a&\cos a\\1&\sin b&\cos b\\1&\sin c&\cos c \end{bmatrix} = \sin(b-c)+\sin(c-a)+\sin(a-b).$$

VI Dans le plan vectoriel, rapporté à un repère orthonormé $(\vec{i}, \vec{j})$, calculer le déterminant de :

1) la rotation d'angle θ,

2) la symétrie orthogonale d'axe $\mathbf{R}(\vec{i}+\vec{j})$.

VII Résoudre les sytèmes suivants :

(1)
$$\begin{cases} 3x+y-z=0 \\ x+y+z=0 \\ y-z=1 \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} 2x-y+z=1 \\ x+3y-2z=0 \\ 4x-3y+z=2 \end{cases}$$

(3)
$$\begin{cases} 4x+y+z+w=1 \\ x-y+2z-3w=0 \\ 2x+y+3z+5w=0 \\ x+y-z-w=2 \end{cases}$$

VIII On considère le déterminant suivant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 6 \\ 4 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

1) Montrer, sans le calculer, qu'il est divisible par 5.

2) a) Déterminer un nombre réel a de tel que :

$$3+7a+2a^2=9+6a+a^2=0.$$

b) En déduire, sans le calculer, que Δ est divisible par 31.

3) Calculer Δ.

IX Étant donnés un entier n supérieur ou égal à 2, n polynômes $P_1, P_2, \dots, P_n$ de $\mathbf{C}[X]$, de degré inférieur ou égal à $n-2$ et n nombres complexes $z_1, z_2, \dots, z_n$, On note

$$A = [\, a_{ij} \,]_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}, \quad \text{où } a_{ij} = P_i(z_j).$$

Quel est le déterminant de A ?

X Étant donnés $n+1$ nombres complexes $a_1, a_2, \dots, a_n$ et z, on considère le déterminant d'ordre $n+1$ suivant :

$$D_n = \begin{bmatrix} -z & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & -z & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & -z & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -z & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & -z \end{bmatrix}$$

1) Trouver une relation de récurrence simple reliant D_n et D_{n-1}.

2) En déduire la valeur de D_n.

XI On considère la suite $(D_n)_{n\geq 1}$ des déterminants suivants :

$$D_1 = 3\ ,\ D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\ ,\ D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}\ ,\ \dots\ ,\ D_n = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \dots$$

a) Montrer que $(D_n)_{n\geq 1}$ vérifie une relation de récurrence de la forme :

$$D_n = aD_{n-1} + bD_{n-2}\ .$$

b) En déduire la valeur de D_n.

XII Calculer de manière analogue le déterminant suivant

$$D_n = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

XIII Soit z un nombre complexe. On considère le déterminant d'ordre n suivant :

$$D_n = \begin{bmatrix} 1+z^2 & -z & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -z & 1+z^2 & -z & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -z & 1+z^2 & -z & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -z & 1+z^2 & -z \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -z & 1+z^2 \end{bmatrix}$$

1) Établir une relation de récurrence entre D_n, D_{n-1} et D_{n-2}.

2) En déduire la valeur de D_n.

VI. Exercices sur la réduction des endomorphismes

I Déterminer les solutions réelles des systèmes différentiels suivants :

(a) $\begin{cases} x' = -7x - 6y \\ y' = 12x + 10y \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x' = \quad + y + z \\ y' = x \quad + z \\ z' = x + y \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x' = 11x - 6y + 2z \\ y' = -6x + 10y - 4z \\ z' = 2x - 4y + 6z \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x' = \quad + y - z \\ y' = -x + \quad + 2z \\ z' = x - 2y \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x' = \quad y + z \\ y' = \quad z + u \\ z' = x \quad + u \\ u' = x + y \end{cases}$

II Déterminer les solutions réelles des systèmes différentiels suivants :

(a) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + 3y \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x' = 3x + y - z \\ y' = x + y + z \\ z' = 2x \quad + 2z \end{cases}$

III Montrer que la résolution des systèmes suivants se ramène à celle de systèmes du premier ordre. Effectuer cette résolution – détermier les solutions réelles :

(a) $\begin{cases} x'' = -23x - 18y \\ y'' = 36x + 28y \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x'' + 3y' - 4x + 6y = 0 \\ y'' + x' - 2x + 4y = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x'' = x' + y' - y \\ y'' = x' + y' - x \end{cases}$

IV Déterminer les solutions réelles de l'équation différentielle :

$$y^{(4)} - y = 0$$

à l'aide d'un système différentiel du premier ordre.

V Calculer la puissance $n^{\text{èmes}}$ ($n \in \mathbf{N}$) des matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

VI Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$, donnée par ses trois premiers termes u_0, u_1, u_2 appartenant à $\mathbf{C}$ et vérifiant la relation de récurrence.

a) $\forall n\ ,\ n \geq 2\ ,\ u_{n+1} = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$

b) $\forall n\ ,\ n \geq 2\ ,\ 2u_{n+1} + u_n + 2u_{n-1} + 2u_{n-2} = 0.$

VII Montrer que les matrices suivantes définissent des isométries de $\mathbf{R}^3$. Pour les rotations, en préciser l'angle :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{bmatrix}, \quad D = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

On pensera à utiliser la trace.

VIII Montrer que la matrice suivante définit une symétrie orthogonale par rapport à un plan vectoriel dans $\mathbf{R}^3$:

$$B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

IX Montrer que les matrices suivantes définissent des antidéplacements de $\mathbf{R}^3$, qu'on précisera :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

X Utiliser le théorème de Hamilton-Cayley pour montrer que la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

est inversible et calculer son inverse.

XI Déterminer, à similitude près, toutes les matrices de $\mathbf{C}^{2\times 2}$ et de $\mathbf{C}^{3\times 3}$ qui sont idempotentes – c'est-à-dire telles que $A^2 = A$.

XII Soit E un espace vectoriel de dimension finie, on en considère un endomorphisme f, dont toutes les valeurs propres sont distinctes.

1) Montrer que si g est un endomorphisme de E qui commute avec f, tout vecteur propre de f est vecteur propre de g.

2) En déduire que si g commute avec tous les endomorphismes de E, c'est une homothétie.

3) Montrer que tout endomorphisme de E qui commute avec f, est une combinaison linéaire de $\mathrm{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1}$.

XIII 1) Étant donnés deux polynômes P et Q, à coefficients complexes, unitaires, de même degré n, on note leurs racines respectivement :

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n \text{ et } \beta_1, \dots, \beta_n.$$

Montrer que si, pour tout entier naturel k, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^k,$$

alors $P = Q$ [1].

2) Étant données deux matrices carrées A et B, de même ordre, montrer que

$$\operatorname{trace} AB = \operatorname{trace} BA$$

et, plus généralement, que, pour tout entier positif k, on a :

$$\operatorname{trace} (AB)^k = \operatorname{trace} (BA)^k.$$

En déduire que AB et BA on le même polynôme caractéristique.

3) Etant données deux matrices A et B, montrer que si AB et BA sont définies, les polynômes caractéristiques de ces deux matrices coïncident, à un facteur près qui est une puissance de l'indéterminée.

---

1 On peut utiliser les *formules de Newton*. Se reporter au chapitre d'un quelconque manuel d'algèbre traitant des relations entre coefficients et racines d'un polynôme.

Les exemples qui suivent ont en commun de montrer que résoudre une équation caractéristique n'est pas toujours le passage obligé dans la détermination du spectre – contrairement aux idées reçues.

XIV Soit n un entier positif, on pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ et pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$:

$$r_k = (1, \omega^k, \omega^{2k}, \ldots, \omega^{(n-1)k}).$$

L'espace vectoriel $\mathbf{C}^n$ étant rapporté à sa base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$, on en considère l'endomorphisme D tel que :

$$\mathrm{D}(e_j) = e_{j+1} \text{ pour } j = 1, \ldots, n-1 \text{ et } \mathrm{D}(e_n) = e_1.$$

Montrer que D est diagonalisable, de même que :

$$\mathrm{M} = \frac{1}{2}(\mathrm{I} + \mathrm{D}).$$

Donner une interprétation géométrique de M.

XV Déterminer les valeurs propres de la matrice *"circulante"* :

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_n & a_1 & \ldots & a_{n-1} \\ . & . & . & . \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_1 \end{bmatrix}$$

XVI Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes :

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ -1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 0 & 1 \\ & & & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} ; \text{(b)} \begin{bmatrix} 0 & a & a & \ldots & a \\ b & 0 & a & \ldots & a \\ b & b & 0 & \ldots & a \\ . & . & . & . & . \\ b & b & b & \ldots & 0 \end{bmatrix} ; \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \ldots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \ldots & \omega^{2(n-1)} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \ldots & \omega^{(n-1)^2} \end{bmatrix}$$

Elles sont d'ordre n et en :

(b) on suppose que $ab \neq 0$

(c) $\omega = \exp i\frac{2\pi}{n}$ et l'on suppose que n est impair.

Indications

(a) Les coordonnées d'un vecteur propre associé sont les premiers termes d'une suite récurrente qui s'exprime en fonction de la valeur propre associée. La condition d'arrêt permet de conclure.

(b) Il est possible d'exprimer l'équation caractéristique au moyen d'une relation de récurrence, obtenue en effectuant des transformations sur les lignes.

(c) Notons A la matrice considérée. On détermine A^2, ... on connaît alors toutes les valeurs propres possibles de A, il reste à en déterminer les ordres de multiplicité ... On montre la trace de A admet pour module $\sqrt{n}$.

On aurait pu demander de calculer dét A et |trace A|. sans restriction sur n.

Exercices Complémentaires

I On convient que f est l'automorphisme de $\mathbf{R}^2$ défini, relativement à la base canonique, par la matrice :

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad ad - bc = 0.$$

On adjoint à $\mathbf{R}$ un élément noté ∞ et l'on pose $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$. Désignant par x l'élément courant de $\mathbf{R}$, on définit l'application :

$$\hat{f} : \hat{\mathbf{R}} \longrightarrow \hat{\mathbf{R}},$$

– appelée *homographie* – comme suit :

- si $c \neq 0$

$$\begin{cases} \hat{f}(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d} & \text{si } x \neq -\dfrac{d}{c} \text{ et } x \neq \infty \\ \hat{f}(-\dfrac{d}{c}) = \infty & \\ \hat{f}(\infty) = \dfrac{a}{c} & \end{cases}$$

- Si $c = 0$ (alors $d \neq 0$)

$$\begin{cases} \hat{f}(x) = \dfrac{ax+b}{d} & \text{si } x \neq \infty \\ \hat{f}(\infty) = \infty & \end{cases}$$

1) a) Donner une interprétation géométrique de l'ensemble ainsi obtenu pour $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_2$.

b) Caractériser les points fixes de $\hat{f}$ qui appartiennent à $\mathbf{R}$.

c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ∞ soit un point fixe de $\hat{f}$.

2) a) Vérifier que si $h = g \circ f$, $\hat{h} = \hat{g} \circ \hat{f}$ et si $g = \lambda f$, $\hat{g} = \hat{f}$.

b) Décrire les homographies définies par :

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad \text{puis } \mathrm{M} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

c) Montrer que si une homographie $\hat{f}$ admet un point fixe réel, il existe une homographie $\hat{g}$, telle que :

$$\hat{g}^{-1} \circ \hat{f} \circ \hat{g}$$

soit de l'un des types précédent.

3) L'automorphisme f étant donné, on considère les suites $(u_n)_{n \geq 0}$ qui vérifient :

$$\forall n, n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \hat{f}(u_n).$$

Déterminer la forme générale des solutions, dans le cas où les valeurs propres de f sont réelles.

II Etant donné un scalaire λ, si $n \geq 2$, on note $J_{n,\lambda}$ la matrice de $\mathbf{K}^{n\times n}$, qui se présente comme suit :

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ & 0 & \lambda & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & & \cdots & & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

et l'on convient que $J_{1,\lambda} = \lambda$.

1) Pour $K = \mathbf{R}$, résoudre le sytème différentiel $X'(t) = J_{n,\lambda}X(t)$, avec les conditions initiales :

$$x_i(0) = A_i \text{ pour } 1 \leq i \leq n.$$

2) Exprimer $J_{n,\lambda}^k$,pour $k \geq 1$.

3) Montrer que si f est un endomorphisme de E, non nul et tel que $f^2 = 0$, il existe une base de E où f s'exprime par une matrice diagonale par blocs de la forme $J_{2,0}$ et $J_{1,0}$.

4) Déterminer tous les endomorphismes de E tels que :

(1) $$p^2 = p,$$

(2) $$s^2 = \mathrm{Id}_E.$$

5) Décrire toutes les transformations affines involutives d'un espace affine de dimension finie.

III Classer, à conjugaison près, tous les automorphismes de $\mathbf{R}^2$, puis de $\mathbf{R}^3$.

IV Résoudre le système différentiel :

$$X'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} X(t) \ , \ X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

V Autour du polynôme $X^2 + 1$

Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 + \mathrm{Id} = 0$.

1) Montrer que E devient un espace vectoriel complexe E_C, en posant :

$$(a + ib)x = ax + bf(x).$$

2) Montrer que E_C est un espace vectoriel réel de dimension $2n$.

3) Montrer qu'il existe une base de E où la matrice de f est formée de blocs de la forme :

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

VI Autour du polynôme $(X - a)^2$.

1) On convient que $E = \mathbf{R}_1[X]$ et on note :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -a^2 \\ 1 & 2a \end{bmatrix}.$$

a) Si P est un élément de E, on note $u(P)$ le reste de la division de XP par $(X - a)^2$. On définit ainsi un endomorphisme de E. En exprimer la matrice relativement à la base canonique de E.

b) Soit R_n le reste de la division de X^n par $(X - a)^2$, on pose :

$$R_n(X) = \alpha_n + \beta_n X.$$

Calculer directement α_n, β_n et vérifier que :

$$\begin{bmatrix} \alpha_{n+1} \\ \beta_{n+1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

2) Soit A une matrice carrée d'ordre 3 qui vérifie :

$$A^2 = 2aA - a^2 I.$$

a) Montrer que $A^n = R_n(A)$.

b) Déterminer :

$$U_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix} \text{ tel que } U_{n+1} = AU_n.$$

c) Montrer que A est semblable à une matrice diagonale formée de blocs :

$$J_{2,a} \text{ et } J_{1,a}$$

d) Résoudre le sytème différentiel $X'(t) = AX(t)$.

VII Étant donné un polynôme à coefficients réels, qu'on note :

$$D(X) = X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0,$$

on considère l'endomorphisme :

$$\begin{array}{rcl} u : \mathbf{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_2[X] \\ P & \mapsto & u(P) \end{array}$$

où $u(P)$ désigne le reste de la division de XP par D.

1) Exprimer la matrice de u relativement à la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$.

2) Soit S un polynôme arbitraire de $\mathbf{R}[X]$ et P un polynôme de $\mathbf{R}_2[X]$, décrire $S(u)(P)$ au moyen de S et D.

3) Déterminer le polynôme caractéristique de $S(u)$, de deux manières différentes.

VIII 1) Relation d'Euler

Montrer que deux polynômes A et B de $\mathbf{K}[X]$, ne sont pas premiers entre eux si, et seulement si, il existe deux polynômes non nuls U et V tels que :

$$AU + BV = 0 \ , \ \text{degré}\, U < \text{degré}\, B \ \text{ et } \ \text{degré}\, V < \text{degré}\, A.$$

2) Matrice et déterminant de Sylvester

Étant donnés deux entiers n et m, non nuls et deux polynômes A et B de degrés respectifs n et m, on considère l'application :

$$\begin{array}{rcl} f_{P,Q} : K_{m-1}[X] \times K_{m-1}[X] & \longrightarrow & K_{m+n-1}[X] \\ (U, V) & \mapsto & AU + BV \end{array}$$

a) Vérifier que cette définition est bien cohérente et donne une application linéaire.

b) Décrire la matrice relativement aux bases naturelles.

c) Donner une condition, formulée au moyen d'un déterminant pour que deux A et B soit premier entre eux.

IX Le cadre est l'espace vectoriel $E = K^n$, rapporté à sa base canonique notée $(e_0, \dots, e_{n-1})$. Soit P un polynôme unitaire de degré n, on note f l'endomorphisme de E défini par la matrice compagne M_P. Soit A et B deux polynômes unitaires, **premiers entre eux** et tels que :

$$P = AB.$$

On note $p = \text{degré}\, A$ et $q = \text{degré}\, B$ – on a donc $n = p + q$.

1) Montrer que :

$$\text{Ker}\, A(f) = \text{Im}\, B(f) \ \text{ et } \ \text{Ker}\, B(f) = \text{Im}\, A(f).$$

2) Montrer que le système de vecteurs :

$$(A(f)(e_0), A(f)(e_1), \dots, A(f)(e_{q-1}) ; B(f)(e_0), B(f)(e_1), \dots, B(f)(e_{p-1}))$$

est une base de E. Exprimer la matrice de f_P, relativement à celle-ci.

3) Conclure.

Ébauches de solutions

V. Déterminant

I On a $\text{dét}(\lambda A) = \lambda^n \text{dét}\, A$. Ce qui se justifie de plusieurs façons :

- on applique la proposition 1-1 et la première propriété de la définition,
- on applique la proposition 1-2
- le théorème 1-6 $\text{dét}\, \lambda A = \text{dét}\, \lambda I_n \,.\, \text{dét}\, A$.

II 1) On trouve succesivement :

- 14 La matrice est triangulaire.
- 0 Deux colonnes sont égales.
- 0 Deux lignes sont égales.
- 24 On développe suivant la deuxième ligne.
- 5 On développe suivant la première colonne.
- 76 On développe suivant la deuxième colonne.
- -20 On fait apparaître un autre zéro dans la première colonne.
- 5 On fait apparaître en une seule fois deux zéros dans la deuxième colonne.
- 4 On fait aparaître un second zéro dans la colonne 1 ou 3 ou la ligne 2 ou 3.
- -14,
- 10.

2) Ces deux déterminants sont nuls On fait apparaître deux lignes égales,.

3) On procède par élimination, on trouve -115, -18 et 45.

III On applique le théorème sur le déterminant d'un produit de matrices, on obtient :

$$(x^2+y^2)(x'^2+y'^2) = (xx'+yy')^2 + (xy'+yx')^2.$$

IV On retranche une ligne de toutes les autres, le résultat suit.

Pour l'ordre 4 on trouve :

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{bmatrix} = (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2)(x_4-x_3).$$

<u>Généralisation</u> : le résultat, écrit sous la forme :

$$\prod_{1\le i<j\le 4} (x_j - x_i).$$

se généralise pour un ordre quelconque. On pourrait procéder par récurrence, on préfère généralement remarquer que l'expression attendue est, en fait, un polynôme D_n des n indéterminées $x_1, x_2, \dots, x_n$, dont le degré est $1 + \dots + n-1 = \frac{n(n-1)}{2}$ et qui s'annulle si l'on y substitue l'un quelconque des x_i à l'un quelconque des x_j, si $i \neq j$. Il est donc divisible par $x_i - x_j$ pour tout couple (i, j) tel que $1 \le j < i \le n$. Comme ces polynômes sont premiers entre eux deux à deux, il est divisble par le produit :

$$P = \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i).$$

Comme P comporte C_n^2 facteurs de degré 1, il est de même degré que D_n. Il existe donc un scalaire k, tel que $D_n = kP$.

Le terme diagonal $x_2x_3^2 \dots x_n^{n-1}$ est l'unique monôme du développement du déterminant qui ne contient pas x_1. Il lui correspond un seul des 2^n termes issus du développement de P :

$$\begin{array}{r|l} (x_2-x_1) & \to x_2 \\ (x_3-x_2)(x_3-x_1) & \to x_2x_3^2 \\ \dots\dots\dots\dots & \\ (x_n-x_{n-1})(x_n-x_{n-2}) \dots (x_n-x_2)(x_n-x_1) & \to x_2x_3^2 \dots x_n^{n-1} \end{array}$$

On en déduit que $k=1$ et ainsi :

$$D_n = \prod_{1\leq i<j\leq n} (x_j-x_i)_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1\leq i<j\leq n} (x_i-x_j).$$

V (1) On ajoute à la première ligne les deux autres, $a+b+c$ se met en facteur. On retranche la première colonne des deux autres.

(2) On remplace la première ligne par la somme des quatre lignes, $a+b+c$ se met en facteur. Dans le déterminant 4×4 obtenu, on retranche la première colonne de chacune des autres. On obtient un déterminant 3×3 dans lequel de la première colonne on retranche la seconde et on lui ajoute la troisième, $a-b+c$ se met de nouveau en facteur ...

(3) On développe suivant la prem!ère colonne.

VI 1) Soit f la rotation vectorielle d'angle θ. On a :

$$f(\vec{i}\,) = \cos\theta\ \vec{i} + \sin\theta\ \vec{j} \quad \text{et} \quad f(\vec{j}\,) = -\sin\theta\ \vec{i} + \cos\theta\ \vec{j},$$

la matrice A de f dans la base considérée est donc :

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Son déterminant est égal à 1.

b) Considérons le repère orthogonal $(\vec{u}, \vec{v})$ avec :

$$\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{v} = -\vec{i} + \vec{j}$$

Notant g la symétrie orthogonale d'axe $\mathbf{R}\vec{u}$, on a :

$$g(\vec{u}) = \vec{u} \quad \text{et} \quad g(\vec{v}) = -\vec{v}$$

Ainsi, la matrice de f relativement à la base $(\vec{u}, \vec{v})$ est :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

son déterminant est égal à -1.

VII 1) $\frac{1}{3}(-1, 2, -1)$.

2) $\frac{1}{12}(5, -1, 1)$

3) $\frac{1}{48}(-10, 97, 16, -25)$

VIII 1) En ajoutant la deuxième et la troisième ligne, on obtient trois entiers multiples de 5.

2) a) $a=-3$.

b) En remplaçant la ligne L_3 par $L_3 + a\ L_2 + a^2L_1$ (notation conventionnelle) on obtient, avec $a=-3$, la ligne [31 0 0]. D'où le résultat.

3) On trouve $\Delta = 155$ $(=31\times5)$.

IX Les polynômes $P_1, P_2, \dots, P_n$ appartiennent à l'espace vectoriel $\mathbf{C}_{n-2}[X]$ des polynômes à coefficients complexes, de degré inférieur ou égal à $n-2$. Cet espace étant de dimension $n-1$, ces n polynômes forment une famille liée. Il existe donc n nombres des complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, non tous nuls, tels que :

$$\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n = 0.$$

Il s'ensuit que :

$$\forall z \in \mathbf{C},\ \lambda_1 P_1(z) + \dots + \lambda_n P_n(z) = 0.$$

On a donc en particulier :

$$\forall j,\ 1 \le j \le n,\ \lambda_1 P_1(z_j) + \dots + \lambda_n P_n(z_j) = 0.$$

Ce qui signifie que les lignes de A forment une famille liée de $\mathbf{C}^n$ et ainsi :

$$\text{dét}\, A = 0.$$

X 1) On développe suivant la première ligne (ou colonne) on obtient la relation suivante :

$$D_n = -zD_{n-1} + (-1)^n a_n^2 z^{n-1}.$$

b) On effectue la combinaison schématisée ci-dessous :

$$\begin{array}{r|l} & D_n = -zD_{n-1} + (-1)^n a_n^2 z^{n-1} \\ -z & D_{n-1} = -zD_{n-2} + (-1)^{n-1} a_n^2 z^{n-2} \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (-z)^{n-2} & D_2 = -zD_1 - a_2^2 z \\ (-z)^{n-1} & D_1 = z^2 - a_1^2 \end{array}$$

On obtient :

$$D_n = (-z)^{n-1}[z^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)].$$

XI 1) On développe D_n suivant la première ligne on obtient la relation de récurrence :

$$D_n = 3D_{n-1} - 2D_{n-2}$$

2) On sait que les suites réelles, ainsi définies, forment un espace vectoriel de dimension 2. Pour en déterminer une base, on résout l'équation caractéristique :

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Les racines en sont 1 et 2, elles sont distinctes, les deux suites :

$$(1^n)_{n\ge1}\ ,\ (2^n)_{n\ge1}$$

forment donc une base de cet espace vectoriel. Il existe des réels λ et μ tels que :

$$\forall n,\ n \ge 1,\ D_n = \lambda + \mu 2^n$$

Les conditions initiales :

$$D_1 = 3 \text{ et } D_2 = 7,$$

donnent le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = 3 \\ \lambda + 4\mu = 7 \end{cases}.$$

On a donc $\lambda = -1$ et $\mu = 2$. Il s'ensuit que :

$$\forall n,\ n \ge 1,\ D_n = -1 + 2^{n+1}.$$

XII On trouve par la même méthode :

$$\forall n \ge 1,\ D_n = -2^{n+1} + 3^{n+1}.$$

XIII 1) On développe suivant la première ligne (ou colonne) on obtient :

$$D_n = (1 + z^2)D_{n-1} - z^2 D_{n-2}.$$

b) La relation précédente prouve que $(D_n - D_{n-2})_{n\ge2}$ est une suite géométrique de raison z^2. Après calculs on trouve :

$$\forall n,\ n \ge 1,\ D_n = 1 + z^2 + z^4 + \dots + z^{2n}.$$

VI. Réduction

I (a) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$;
$V(1) = \mathbf{R}(3,4)$ et $V(2) = \mathbf{R}(2,-3)$;

$$\begin{cases} x(t) = 3Ae^{t} + 2Be^{2t} \\ y(t) = -4Ae^{t} - 3Be^{2t} \end{cases} \qquad (A,B) \in \mathbf{R}^2.$$

(b) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$;
$V(2) = \mathbf{R}(1,1,1)$ et $V(-1) = \mathbf{R}(1,-1,1) \oplus \mathbf{R}(1,0,-1)$:

$$\begin{cases} x(t) = Ae^{2t} + (B + C)e^{-t} \\ y(t) = Ae^{2t} - Be^{-t} \\ z(t) = Ae^{2t} - Ce^{-t} \end{cases} \qquad (A,B) \in \mathbf{R}^2.$$

(c) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 18$;

$$\begin{cases} x(t) = Ae^{t} + 2Be^{6t} + 2Ce^{18t} \\ y(t) = 2Ae^{t} + Be^{6t} - 2Ce^{18t} \\ z(t) = 2Ae^{t} - 2Be^{6t} + Ce^{18t} \end{cases} \qquad (A,B,C) \in \mathbf{R}^3.$$

(d) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = i\sqrt{6}$, $\lambda_3 = -i\sqrt{6}$.
On commence par rechercher les solutions complexes :
$V(0) = \mathbf{C}(2,1,1)$,
$V(i\sqrt{6}) = \mathbf{C}(-2, 2 - i\sqrt{6}, 2 + i\sqrt{6})$, $V(-i\sqrt{6}) = \mathbf{C}(-2, 2 + i\sqrt{6}, 2 - i\sqrt{6})$.
On obtient :

$$\begin{cases} x(t) = 2\alpha - 2\beta e^{i\sqrt{6}t} + 2\gamma e^{-i\sqrt{6}t} \\ y(t) = \alpha + (2 - i\sqrt{6})\beta e^{i\sqrt{6}t} + (2 + i\sqrt{6})\gamma e^{-i\sqrt{6}t} \\ z(t) = \alpha - (2 + i\sqrt{6})\beta e^{i\sqrt{6}t} + (2 - i\sqrt{6})\gamma e^{-i\sqrt{6}t} \end{cases} \qquad (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbf{C}^3.$$

On en déduit les solutions réelles :

$$\begin{cases} x(t) = 2A - 2B\cos\sqrt{6}t - 2C\sin\sqrt{6}t \\ y(t) = A + (2B - C\sqrt{6})\cos\sqrt{6}t + (B\sqrt{6} + 2C\sqrt{6})\sin\sqrt{6}t \\ z(t) = A + (2B + C\sqrt{6})\cos\sqrt{6}t + (B\sqrt{6} - 2C\sqrt{6})\sin\sqrt{6}t \end{cases} \qquad (A,B,C) \in \mathbf{R}^3$$

<u>Remarque</u> : les solutions réelles sont celles où β et γ sont imaginaires conjugués. On pose : $\beta + \gamma = B$ et $i(\beta - \gamma) = C$.

(e) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1 + i$, $\lambda_4 = -1 - i$;
On se place encore dans $\mathbf{C}$.
$V(0) = \mathbf{C}(1,-1,1,-1)$, $V(2) = \mathbf{C}(1,1,1,1)$,
$V(-1 + i) = \mathbf{C}(1, i, -1, -i)$, $V(-1 - i) = \mathbf{C}(1, -i, -1, i)$
Les solutions complexes s'expriment :

$$\begin{cases} x(t) = \alpha + \beta e^{2t} + \gamma e^{(-1+i)t} + \delta e^{-(1+i)t} \\ y(t) = -\alpha + \beta e^{2t} + i\gamma e^{(-1+i)t} - i\delta e^{-(1+i)t} \\ z(t) = \alpha + \beta e^{2t} - \gamma e^{(-1+i)t} - \delta e^{-(1+i)t} \\ u(t) = \alpha + \beta e^{2t} - i\gamma e^{(-1+i)t} + \delta e^{-(1+i)t} \end{cases} \qquad (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbf{C}^4.$$

Les solutions réelles s'expriment :

$$\begin{cases} x(t) = \ \ \alpha + \beta e^{2t} + (\mathrm{A}\cos t + \mathrm{B}\sin t)e^{-t} \\ y(t) = -\alpha + \beta e^{2t} + (\mathrm{B}\cos t - \mathrm{A}\sin t)e^{-t} \\ z(t) = \ \ \alpha + \beta e^{2t} - (\mathrm{A}\cos t + \mathrm{B}\sin t)e^{-t} \\ u(t) = -\alpha + \beta e^{2t} - (\mathrm{B}\cos t - \mathrm{A}\sin t)e^{-t} \end{cases} \qquad (\alpha, \beta, \mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbf{C}^4.$$

[poser $\mathrm{A} = \gamma + \delta$ et $\mathrm{B} = i(\gamma - \delta)$]

II (a) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\mathrm{V}(2) = \mathbf{R}(1, 1)$

Comme $\dim \mathrm{V}(2) = 1 < 2$, la matrice :

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

n'est pas diagonalisable. On choisit un vecteur propre $u = (1, 1)$ et un vecteur arbitraire $v = (1, 0)$ indépendant de u. Notant f l'endomorphisme f de $\mathbf{R}^2$ défini par A, relativement à la base canonique, on a :

$$f(u) = 2u \text{ et } f(v) = (1, -1) = -e_1 + 2e_2.$$

Ce qui donne la matrice de f pour la nouvelle base :

$$\mathrm{A}' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

On pose :

$$\mathrm{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \ \Xi = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \text{ et } \mathrm{X} = \mathrm{P}\Xi.$$

On résoud le sytème :

$$\begin{cases} \xi' = 2\xi - \eta \\ \eta' = \ \ \ \ 2\eta \end{cases}$$

La transformation $\mathrm{X} = \mathrm{P}\Xi$, donne les solutions cherchées :

$$\begin{cases} x(t) = (\mathrm{A} + \mathrm{B} - \mathrm{B}t)e^{2t} \\ y(t) = (\mathrm{A} - \mathrm{B}t)e^{2t} \end{cases} \qquad (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbf{R}^2.$$

(b) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$; $\mathrm{V}(2) = \mathbf{R}(0, 1, 1)$.

La matrice de ce système différentiel :

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

n'est pas diagonalisable. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ défini par A, relativement à la base canonique. On détermine une base (u, v, w) telle que la matrice de f soit triangulaire, c'est-à-dire :

$$\mathrm{A}' = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & \beta \\ 0 & 2 & \gamma \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

On choisit $u = (0, 1, 1)$, on pose $v = (a, b, c)$ et $w = (a', b', c')$, les conditions posées deviennent :

$$\begin{cases} 2a = \alpha \\ a + b - c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a' = \beta + \gamma \\ a' + b' - c' = \gamma \end{cases}$$

Les vecteurs $u = (1, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 0)$ conviennent et donnent :

$$\mathrm{A}' = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ pour } \mathrm{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

On trouve :

$$\begin{cases} x(t) = (\mathrm{B} + \mathrm{C} + 2\mathrm{C}t)e^{2t} \\ y(t) = (\mathrm{A} + \mathrm{C} + 2\mathrm{B}t + 2\mathrm{C}t^2)e^{2t} \\ z(t) = (\mathrm{A} + \mathrm{B} + 2(\mathrm{B} + \mathrm{C})t + 2\mathrm{C}t^2)e^{2t} \end{cases} \qquad (\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}) \in \mathbf{R}^3.$$

III (a) Le système est équivalent à :

$$\begin{cases} x' = u \\ y' = v \\ u' = -23x - 18y \\ v' = 36x + 28y \end{cases}$$

On trouve $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = -2$.
Les solutions s'expriment :

$$\begin{cases} x(t) = 3\mathrm{A}e^{t} + 3\mathrm{B}e^{-t} + 2\mathrm{C}e^{2t} + 2\mathrm{D}e^{-2t} \\ y(t) = -4\mathrm{A}e^{t} - 4\mathrm{B}e^{-t} - 3\mathrm{C}e^{-2t} - 3\mathrm{D}e^{-2t} \end{cases} \qquad (\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}) \in \mathbf{R}^3.$$

(b) On se ramène à la résolution du système

$$\begin{cases} x' = u \\ y' = v \\ u' = 4x - 6y - 3v \\ v' = 2x - 4y - u \end{cases}$$

Les valeurs propres de sa matrice sont :

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = i,\ \lambda_4 = -i.$$

Après avoir déterminé les solutions complexes, on obtient les solutions réelles sous la forme :

$$\begin{cases} x(t) = \mathrm{A}e^{2t} + 2\mathrm{B}e^{-2t} + 3(2\mathrm{C} + \mathrm{D})\cos t + 3(2\mathrm{D} - \mathrm{C})\sin t \\ y(t) = \qquad\quad \mathrm{B}e^{-2t} \qquad + 5\mathrm{C}\cos t \qquad + 5\mathrm{D}\sin t \end{cases} \qquad (\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}) \in \mathbf{R}^3.$$

c) On obtient le système

$$\begin{cases} x' = u \\ y' = v \\ u' = -y + u + v \\ v' = -x + u + v \end{cases}$$

Sa matrice admet pour valeurs propres :

$$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1.$$

Les sous-espaces propres correspondants sont :

$$\mathrm{V}(-1) = \mathbf{R}(1, -1, -1, 1) \text{ et } \mathrm{V}(1) = \mathbf{R}(1, 0, 1, 0) \oplus \mathbf{R}(0, 1, 0, 1).$$

La matrice du système n'est donc pas diagonalisable.

On choisit pour nouvelle base (u_1, u_2, u_3, u_4), en posant :

$$u_1 = (1, -1, -1, 1)\ ,\ u_2 = (1, 0, 1, 0)\ ,\ u_3 = (0, 1, 0, 1)\ ,\ u_4 = (0, 0, 1, 1).$$

La matrice du système devient :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On obtient les solutions :

$$\begin{cases} x(t) = \mathrm{A}e^{-t} + (\mathrm{B} + \mathrm{D}t)e^{t} \\ y(t) = -\mathrm{A}e^{-t} + (\mathrm{C} + \mathrm{D}t)e^{t} \end{cases} \qquad (\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}) \in \mathbf{R}^3.$$

IV On est amené à résoudre le système :

$$\begin{cases} y' = u \\ u' = v \\ v' = w \\ w' = y \end{cases}$$

dont la matrice admet pour valeurs propres :

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = i,\ \lambda_4 = -i.$$

En procédant comme dans l'exercice 3) b) par exemple, on trouve pour solutions réelles de $y^{(4)} - y = 0$:

$$y(t) = \mathrm{A}e^{t} + \mathrm{B}e^{-t} + \mathrm{C}\cos t + \mathrm{D}\sin t \ ,\ (\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D}) \in \mathbf{R}^4.$$

<u>Remarque</u> : En notant que $y^{(4)} - y = (y'' - y)'' + (y'' - y)$, une autre méthode est de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} y'' - y = z \\ z'' + z = 0 \end{cases}$$

Pour cela, on résout d'abord la seconde équation ce qui conduit à :

$$y'' - y = \alpha \cos t + \beta\ \sin t\ ,\ \alpha \in \mathbf{R}\ ,\ \beta \in \mathbf{R}$$

V (a) A est diagonalisable car $\mathrm{V}(-1) = \mathbf{R}(1,1,1)$, $\mathrm{V}(2) = \mathbf{R}(1,-1,0) \oplus \mathbf{R}(0,1,-1)$

$$\mathrm{A}^n = \mathrm{P}\mathrm{A}'^n\mathrm{P}^{-1}$$

avec :

$$\mathrm{A}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Le résultat admet la présentation suivante :

$$\mathrm{A}^n = \frac{1}{3}[((-1)^n + 2^{n+1}) + ((1)^n - 2^n)\mathrm{B}] \quad \text{où} \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Comme précédemment A est diagonalisable. On obtient :

$$\mathrm{B}^n = \begin{bmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2^{n+1} - 2 & 0 \\ -2^n + 1 & -2^n + 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) La matrice C est triangulaire, on vérifie qu'elle n'est pas diagonalisable. On note que que $\mathrm{C} = \mathrm{D} + \mathrm{N}$ avec :

$$\mathrm{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Comme $\mathrm{N}^2 = 0$,on montre, par récurrence, que :

$$\mathrm{A}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & u_n & v_n \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où u_n et v_n vérifient :

$$\forall n,\ n \geq 1,\ u_{n+1} = u_{n+1} \ \text{ et } \ v_{n+1} = 2v_n + 1$$

On obtient immédiatement $u_n = n$ et $v_n = 2^n - 1$ et ainsi :

$$\mathrm{A}^n = \begin{bmatrix} 0 & n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

VI a) On pose :

$$U_n = \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{bmatrix} \text{ et } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$U_{n+1} = AU_n.$$

Il s'ensuit que :

$$U_n = A^n U_0.$$

On vérifie que :

$$\chi_A(X) = -(X-1)^2(X+2)$$
$$V(1) = \mathbf{R}(1,1,1) \text{ et } V(-2) = \mathbf{R}(1,-2,4).$$

A n'est donc pas diagonalisable. On choisit pour nouvelle base base (u_1, u_2, u_3) avec :

$$u_1 = (1,1,1)\ ,\ u_2 = (-2,-1,0) \text{ et } u_3 = (1,-2,4).$$

On obtient :

$$A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ où } P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

On calcule A'^n, puis la première ligne de $A^n = PA'^nP^{-1}$. On en déduit :

$$u_n = \frac{1}{9}[(-6n+8+(-2)^n u_0) + (3n+2+(-2)^{n+1})u_1 + (3n-1+(-2)^n)u_2].$$

Ce qui vaut à partir de $n = 0$.

b) On procède de façon analogue. On pose :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

admet pour polynôme caractéristique :

$$\chi_A(X) = -\frac{1}{2}(X^2+1)(2X-1)$$

On est donc conduit à se placer dans $\mathbf{C}$. On a :

$$A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix} \text{ où } P = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & i & -i \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

obtient :

$$A^n = PA'^nP^{-1}$$

Du calcul de calcul de la première ligne de A^n, on déduit :

$$u_n = \frac{1}{10}(\alpha_{n-2}\, u_0 + \beta_{n-2}\, u_1 + \gamma_{n-2}\, u_2) \text{ où } \begin{cases} \alpha_n = -\dfrac{2i}{(-2)^n} + i^n[2+i-(-1)^n(-2+i)] \\ \beta_n = 5i^n(1-(-1)^n) \\ \gamma_n = -\dfrac{2i}{(-2)^n} + i^n[2-4i-(-1)^n(2+4i)] \end{cases}$$

On obtient alors :

$$u_{2p} = \frac{1}{5}\Big[\Big(\frac{1}{4^{p-1}} + (-1)^p\Big)u_0 + \Big(\frac{1}{4^{p-1}} + 4(-1)^{p-1}\Big)u_2\Big],$$

$$u_{2p+1} = -\frac{1}{10}\Big[\Big(\frac{1}{4^{p-1}} + 4(-1)^{p-1}\Big)u_0 + 10(-1)^{p-1}u_1 + \Big(\frac{1}{4^{p-1}} + 4(-1)^{p-1}\Big)u_2\Big].$$

On pourrait aussi présenter ce résultat sous la forme : $u_n = A\frac{1}{2^n} + B\cos\frac{n\pi}{2} + C\sin\frac{n\pi}{2}$.

VII A : rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ (mod 2π) mesuré autour de l'axe orienté par le vecteur $(-1,-1,-1)$.

B : rotation d'angle $-\text{Arc}\cos\frac{1}{3}$ (mod 2π) mesuré autour de l'axe orienté par le vecteur $(1,0,1)$.

C : symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle $\mathbf{R}(1,4,1)$.

D : symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle $\mathbf{R}(1,-1,2)$.

VIII On a ${}^tA\,.\,A = I$, f est donc une isométrie. On note que $A^2 = I$ et comme $A \neq I$, f est une symétrie orthogonale. Le sous-espace propre relatif à la valeur propre 1 est le plan d'équation $x+y+z=0$.

IX a) On note que $-A$ est la matrice A de l'exercice, il est clair que f est l'isométrie négative produit (commutatif) de la symétrie vectorielle par rapport à l'origine (i.e. $-\text{Id}$) et de la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ (mod 2π) mesuré autour de $(-1,-1,-1)$. Elle se décrit aussi comme l'antirotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ (mod 2π) dont l'axe est orienté par $(1,1,1)$.

b) La matrice B définit l'antirotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ (mod 2π) dont l'axe est orienté par $(1,1,1)$.

X On a :

$$\chi_A(X) = -X^3 - 1.$$

On sait que $\chi_A(A) = 0$, on a donc $-A^3 = I$, A est inversible et $A^{-1} = -A^2$. Le calcul est immédiat.

XI Dans les deux cas, puisque $A^2 = A$, les valeurs propres de A sont 0 ou 1. En effet si λ est une valeur propre de A de vecteur propre x, on a :

$$A(x) = \lambda x \quad \text{et} \quad A^2(x) = A(\lambda x) = \lambda A(x) = \lambda^2 x$$

et ainsi :

$$\lambda x = \lambda^2 x$$

Il s'ensuit que :

- si $n=2$, $\chi_A \in \{X^2, X(X-1), (X-1)^2\}$
- si $n=3$, $-\chi_A \in \{X^3, X^2(X-1), X(X-1)^2, (X-1)^3\}$

a) Cas $n=2$: si $\chi_f = X(X-1)$, A est diagonalisable et est donc nécessairement semblable à la matrice :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

C'est-à-dire qu'elle est de la forme :

$$P\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}P^{-1},$$

où P est une matrice inversible. En calculant le carré de cette matrice, on vérifie que la condition est suffisante. Lorsque $\chi_f = X^2$ (0 est valeur propre 0 double), A est nécessairement semblable à une matrice :

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où α appartient à $\mathbf{C}$. La vérification donne $\alpha = 0$. Ainsi A est semblable, donc égale, à la matrice nulle. La résolution du troisième cas montre que A est semblable, donc égale, à la matrice identité.

En résumé, pour $n=2$, on obtient

- la matrice nulle
- la matrice identité
- les matrices semblables à :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Cas $n=3$: on obtient par la même méthode

- la matrice nulle,
- la matrice identité,
- les matrices semblables à l'une ou l'autre des matrices :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Remarque : ces résultats ne constituent pas une surprise car on a déjà vu que tout endomorphisme p, tel que $p^2=p$, est la projection sur $\mathrm{Im}\,p$ suivant $\mathrm{Ker}\,p$.

XII 1) Soit λ une valeur propre de f et v un vecteur propre de $V_f(\lambda)$, on a :

$$f(g(v)) = f \circ g(v) = g \circ f(v) = g(\lambda v) = \lambda g(v),$$

ce qui établit que $g(v) \in V_f(\lambda)$. Comme f a toutes ses valeurs propres distinctes, $V_f(\lambda)$ est de dimension 1 et comme v est non nul, il existe un scalaire μ, tel que :

$$g(v) = \mu v.$$

On en conclut que v est un vecteur propre de g.

2) Soit x un vecteur non nul de E, il existe toujours un endomorphisme f qui vérifie l'hypothèse du début et admet x pour vecteur propre. Le point 1 nous assure que :

$$\forall x \in \mathrm{E} \;\; \exists \lambda_x \in \mathbf{K} \;\; g(x) = \lambda_x x.$$

On montre que λ_x est indépendant de x. C'est immédiat pour les vecteurs colinéaires à x. On considère donc un vecteur y, indépendant de x. On a :

$$\lambda_{x+y}(x+y) = f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y.$$

Comme x et y sont indépendants, on en déduit que :

$$\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y.$$

Ainsi, λ_x est bien indépendant de x et g est une homothétie.

3) Soit C l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f. Il est immédiat que C est un sous-espace vectoriel de End E et comme tout élément de C est bien défini par la donnée de n valeurs propres relativement à une base de vecteurs propres de f, on a $\dim \mathrm{C} = n$.

Comme f admet n valeurs propres distinctes, son polynôme caractéristique est aussi son polynôme minimal. Il s'ensuit que $(\mathrm{Id}, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$ est une famille libre, elle est formé de n éléments de C qui est de dimension n. Il s'agit donc d'une base de C. La propriété avancée s'en déduit immédiatement.

Notant α une racine de l'équation $x^n = \frac{a}{b}$, et $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, on obtient :

$$a + \lambda = \alpha\omega^k(b + \lambda).$$

Les $\alpha\omega^k$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$ étant n nombres complexes distincts, on peut conclure.

- Si $a \neq b$, on a n valeurs propres distinctes :

$$\lambda_k = b\frac{\alpha\omega^k - \alpha^{n-1}}{1-\alpha\omega^k} \quad , \ k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

- Si $a = b$, on obtient directement que :

$$\begin{cases} -a \text{ est valeur propre d'ordre } n-1 \\ n-1 \text{ est valeur propre simple} \end{cases}.$$

(c) Comme n est impair, on convient que $n = 2p+1$. On note la matrice A, on vérifie que :

$$A^2 = n\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boxed{J} \end{bmatrix},$$

où tous les coefficients de J sont nuls, à l'exception de ceux, situés sur la diagonale secondaire qui sont égaux à 1. Comme $(nJ)^2 = n^2I$, le polynôme minimal de nJ est $X^2 - n^2$. On en déduit que les valeurs propres de A^2 sont n et $-n$, avec pour ordres respectifs $p+1$ et p. Les valeurs propres de A sont donc :

$$\sqrt{n} \ , -\sqrt{n} \ , i\sqrt{n} \ , -i\sqrt{n}.$$

On en note les ordres respectifs a, b, c et d. On sait alors que :

$$\begin{cases} a \geq 0 \ , b \geq 0 \ , c \geq 0 \ , d \geq 0 \\ a + b = p + 1 \\ c + d = p \end{cases}$$

Avec ces conventions, on a donc :

$$\text{trace } A = \sqrt{n}[(a-b) + i(c-d)] \quad \text{et} \quad \text{dét } A = n^{\frac{n}{2}}(-1)^b \, i^{c-d}.$$

Par ailleurs, on montre que [1] :

$$|\text{trace } A| = \sqrt{n}.$$

On a donc :

$$(a-b)^2 + (c-d)^2 = 1.$$

Les parités de $a-b$ et de $c-d$ étant celles de $a+b = p+1$ et de $c-d = p$, on a soit :

$$\begin{cases} a-b = \pm 1 \ , \quad c = d \quad \text{et} \quad p \text{ est pair} \\ \quad a = b \quad , c-d = \pm 1 \text{ et } p \text{ est impair} \end{cases}$$

On en déduit que :

- Si $n = 4k+1$, $c = d = k$ et ou bien $\begin{cases} a = k \text{ et } b = k+1 & (1) \\ a = k+1 \text{ et } b = k & (2) \end{cases}$
- Si $n = 4k+3$, $a = b = k+1$ et ou bien $\begin{cases} c = k \text{ et } d = k+1 & (3) \\ c = k+1 \text{ et } d = k & (4) \end{cases}$

Pour conclure, on utilisera le fait que :

$$\text{dét } A = n^{\frac{n}{2}}(-1)^b \, i^{c-d}.$$

On note qu'on a, selon les cas répertoriés ci-dessus :

$$(-1)^b \, i^{c-d} = \begin{cases} (-1)^{k+1} & , (1) \\ (-1)^k & , (2) \\ (-1)^k i & , (3) \\ (-1)^{k+1} i & , (4) \end{cases}$$

$\text{dét } A = n^{\frac{n}{2}}(-1)^b \, i^{c-d}.$

1 Voir un peu plus loin.

Par ailleurs, ce déterminant de Vandermonde s'explicite comme suit :

$$\det A = \prod_{0 \le r < s \le n-1} (\omega^s - \omega^r).$$

Or on a :

$$\omega^s - \omega^r = e^{\frac{s2\pi i}{n}} - e^{\frac{r2\pi i}{n}} = e^{\frac{(r+s)\pi i}{n}}\left(e^{\frac{(s-r)\pi i}{n}} - e^{-\frac{(s-r)\pi i}{n}}\right) = 2i\, e^{\frac{(r+s)\pi i}{n}} \sin\frac{(s-r)\pi}{n}$$

Les sinus qui apparaissent étant positifs, on sait évaluer une détermination de l'argument de ce nombre complexe :

$$\alpha = \frac{n(n-1)}{2}\frac{\pi}{2} + \sum_{0 \le r < s \le n-1} (r+s)\frac{\pi}{n}.$$

Un calcul classique montre que :

$$\sum_{0 \le r < s \le n-1} (r+s) = \sum_{s=1}^{n-1} \left[s^2 + \frac{s(s-1)}{2}\right] = \ldots = \frac{n(n-1)^2}{2}.$$

On en déduit que :

$$\alpha = \frac{n(n-1)}{2}\frac{\pi}{2} + \frac{n(n-1)^2}{2}\frac{\pi}{n} = (n-1)(3n-2)\frac{\pi}{4} = (n-1)n\pi - (n-1)(n+2)\frac{\pi}{4}.$$

Comme $(n-1)n$ et $(n-1)(n+2)$ sont deux entiers pairs, on obtient :

$$\det A = n^{\frac{n}{2}}\, i^{\frac{(n-1)(n+2)}{2}}.$$

Or, on a :

- si $n = 4k+1$, $\frac{(n-1)(n+2)}{2} = 2k(4k+3)$, $i^{\frac{(n-1)(n+2)}{2}} = (-i)^{2k} = (-1)^k$,
- si $n = 4k+3$, $\frac{(n-1)(n+2)}{2} = (2k-1)(4k+5)$, $i^{\frac{(n-1)(n+2)}{2}} = i^{2k-1} = (-1)^{k+1} i$.

On peut alors conclure. En effet, il apparaît que les seuls cas possibles sont (2) et (4), à savoir :

- Si $n = 4k+1$, $a = k+1$, $b = c = d = k$;
- Si $n = 4k+3$, $a = b = c = k+1$ et $d = k$.

Il reste à justifier que le module de la trace est effectivement $\sqrt{n}$. On pose :

$$T = 1 + \omega + \omega^4 + \ldots + \omega^{(n-1)^2}.$$

Comme $(n+k)^2 = n^2 + 2kn + k^2$, on a $\omega^{(k+n)^2} = \omega^{k^2}$, ce qui montre que T s'exprime aussi bien :

$$T = 1 + \omega + \omega^4 + \ldots + \omega^{(n-1)^2} = \omega^{h^2} + \omega^{(h+1)^2} + \ldots + \omega^{(h+n-1)^2}$$

Autrement dit, si h est un entier arbitraire, on a :

$$T = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(h+k)^2}.$$

$$\overline{T}T = \sum_{h=0}^{n-1} \omega^{-h^2} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(h+k)^2} = \sum_{h=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}\omega^{2kh} = \sum_{k=0}^{n-1}\left[\omega^{k^2} \sum_{h=0}^{n-1} \omega^{2kh}\right].$$

Or, on a :

$$\sum_{h=0}^{n-1} (\omega^{2k})^h = \begin{cases} 0 \text{ , si } \omega^{2k} \ne 1 \\ n \text{ , si } \omega^{2k} = 1 \end{cases}.$$

On en déduit que :

$$|T|^2 = \overline{T}T = \begin{cases} n, & \text{si } n \text{ est impair} \\ n(1+(-1)^p), & \text{si } n \text{ est pair, } n = 2p \end{cases}.$$

On en tire, en particulier, le résultat attendu.

$$|T| = \begin{cases} \sqrt{n} \text{ , si } n \text{ est impair} \\ \sqrt{2n} \text{ , si } n \equiv 0 \pmod 4 \\ 0 \text{ , si } n \equiv 2 \pmod 4 \end{cases}$$