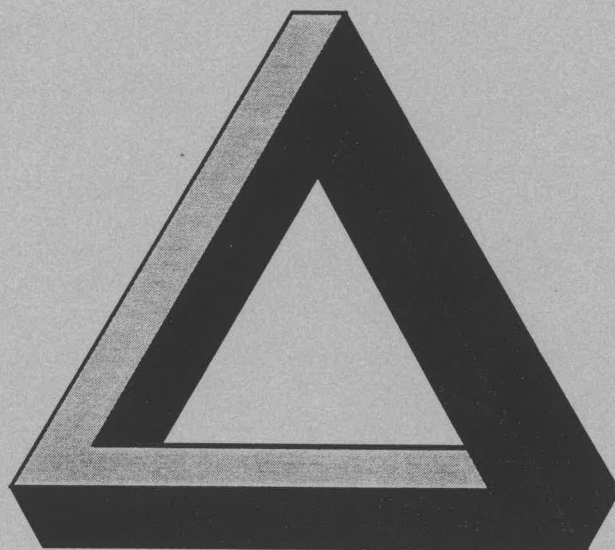
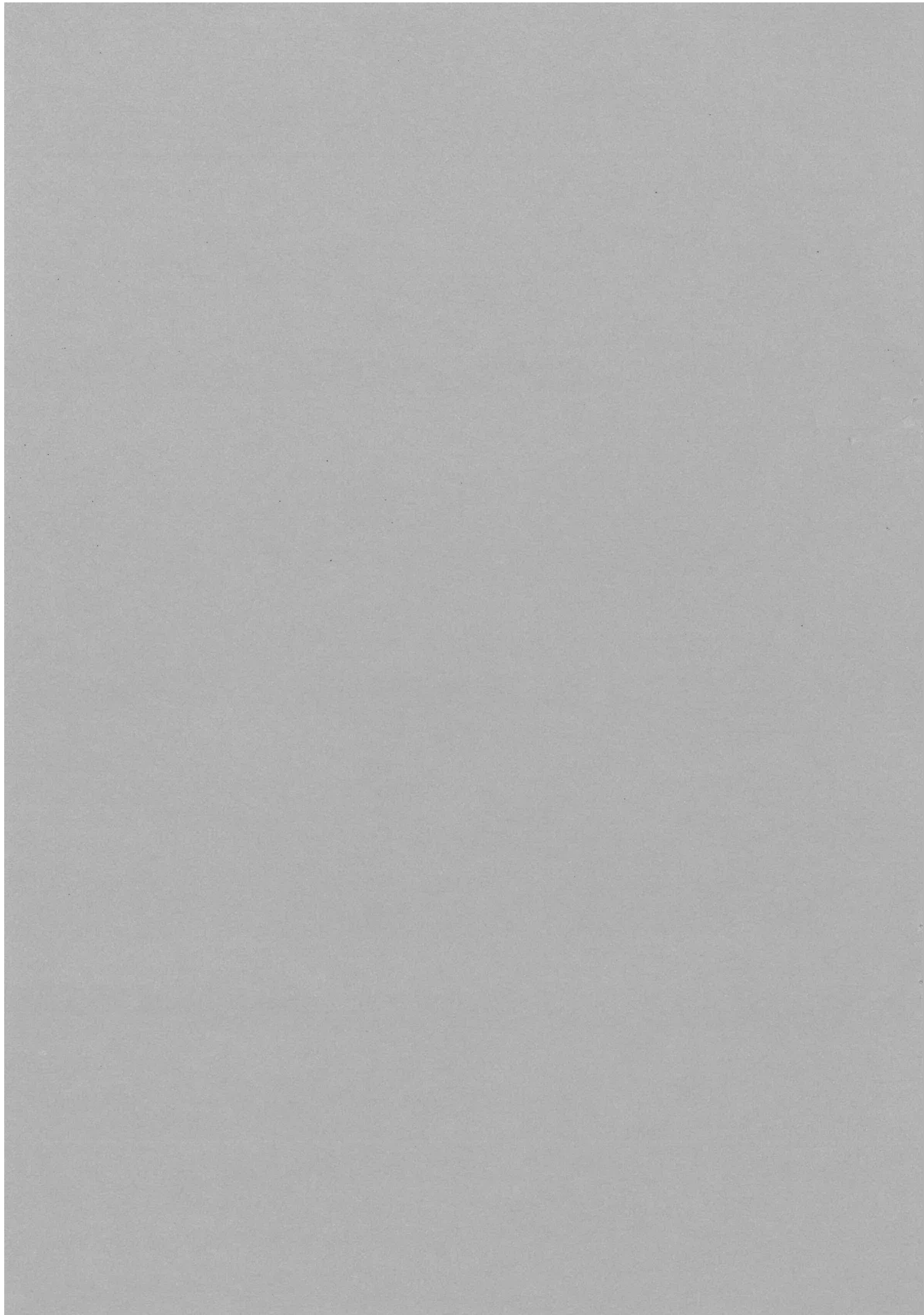


Algèbre linéaire 1



B. Truffault & A. Vogel



Algèbre linéaire 1

Sommaire

Chapitre I. Les matrices

§ 1. Des tableaux de nombres aux matrices	3
§ 2. Opérations sur les matrices	7
§ 3. Matrices carrées	10
§ 4. Partition de matrices	13
§ 5. Vocabulaire	16

Chapitre II. Les méthodes d'élimination

§ 1. Les réductions de Gauss et de Gauss-Jordan	19
§ 2. Interprétation des opérations sur les lignes d'une matrice	24
§ 3. La résolution des systèmes linéaires	26
§ 4. Inversion de matrices	34
Deux annexes au chapitre II	37

Chapitre III. Espaces vectoriels

§ 1. Définitions et règles de calcul	41
§ 2. Sous-espaces vectoriels	43
§ 3. Systèmes générateurs, systèmes libres, bases	47
§ 4. Espaces vectoriels de dimension finie	52
§ 5. Sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie	56
§ 6. Changement de base	58
§ 7. Rang	60
§ 8. Équation d'un sous-espace	64
Annexe au chapitre III	67

Chapitre IV. Applications linéaires

§ 1. Définitions et généralités	69
§ 2. Applications linéaires en dimension finie	74
§ 3. Matrices d'une application linéaire	75

Exercices

Exercices sur le chapitre I	83
Exercices sur le chapitre II	85
Exercices sur le chapitre III	87
Exercices sur le chapitre IV	91

Ébauches de solutions

I. Calcul matriciel	97
II. Élimination	101
III. Espaces vectoriels	107
IV. Applications linéaires	115

Chapitre I. Les matrices

§ 1. Des tableaux de nombres aux matrices

Avant de "parler matrices", examinons un exemple tout à fait conventionnel.

Imaginons un fabricant de jouets qui propose à sa clientèle un jeu de construction, présenté dans cinq boîtes, composées à partir de sept pièces de base. Appelons les boîtes :

$a_1, a_2, \dots, a_5$ ("a"ssortiment)

et les pièces :

$b_1, b_2, \dots, b_7$ ("b"riques).

La façon la plus claire de décrire la composition des assortiments est de la présenter sous forme de tableau, par exemple :

(1)	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
b_1	20	20	15	20	0
b_2	20	15	10	15	0
b_3	12	25	25	10	20
b_4	5	8	10	8	12
b_5	0	3	0	6	8
b_6	2	6	10	10	20
b_7	0	2	5	10	15

Si le produit est conditionné dans trois unités de fabrication différentes c_1, c_2, c_3 , la production journalière de celles-ci pourra faire l'objet d'un second tableau, par exemple :

(2)	c_1	c_2	c_3
a_1	200	0	150
a_2	200	0	120
a_3	100	100	100
a_4	0	150	100
a_5	0	150	80

(3)	c_1	c_2	c_3
a_1	190	0	120
a_2	195	100	140
a_3	105	0	100
a_4	0	150	100
a_5	0	130	80

Des calculs élémentaires permettent de tirer parti de l'information contenue dans ces tableaux.

Exemple 1 : l'addition terme à terme des tableaux (2) et (3) donne un tableau de même nature dont l'interprétation est évidente :

(4)			
	390	0	270
	395	100	260
	205	100	200
	0	300	200
	0	280	160

Exemple 2 : la multiplication par $\frac{1}{2}$ de tous les termes du tableau (4) donne :

(5)			
	195	0	135
	197,5	50	130
	102,5	50	100
	0	150	100
	0	140	80

Elle fournit encore un tableau de même nature qui décrit la moyenne journalière des productions (2) et (3).

Exemple 3 : pour déterminer le nombre de pièces b_1 , utilisées par c_1 , afin d'assurer la production décrite par (2), on effectue le calcul suivant :

$$20 \times 200 + 20 \times 200 + 15 \times 100 + 20 \times 0 + 0 \times 0 = 9\,500$$

et si nous répétons ce calcul $7 \times 3 = 21$ fois, nous pouvons compléter le tableau ci-après.

200	0	150		
200	0	120		
100	100	100		
0	150	100		
0	150	80		
↓				
20	20	15	20	0
20	15	10	15	0
12	25	25	10	20
5	8	10	8	12
0	3	0	6	8
2	6	10	10	20
0	2	5	10	15
→				
9500	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	7000	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

Il décrit la ventilation des pièces consommées par les différentes unités de conditionnement. On pourra, par soi-même, imaginer le parti qu'on pourrait tirer de l'information supplémentaire contenue dans une ligne qui présenterait les prix unitaires de chacune des pièces de base.

Les trois calculs proposés peuvent s'effectuer à partir de tableaux quelconques, sous les seules réserves suivantes :

- l'addition terme à terme suppose que les tableaux aient le même nombre de lignes et de colonnes,
- le calcul de l'exemple 3 suppose que le nombre de colonnes du tableau de gauche soit égal au nombre de lignes de celui de droite.

Il semble alors naturel de regarder chacun de ces calculs, pris globalement, comme une opération élémentaire sur les tableaux. Ce qui nous conduit à considérer tout tableau de nombres, ou, plus exactement, son contenu, comme une entité. Plus clairement, ceci signifie qu'après avoir identifié les tableaux ci-dessus par des symboles, par exemple dans l'ordre où ils sont apparus :

A, B, C, D, E, F

on est tout naturellement amené à écrire :

$$B + C = D, \quad E = \frac{1}{2}D = \frac{1}{2}(B + C), \quad F = A \cdot B.$$

Le symbole A, par exemple, désigne ainsi le contenu du tableau (1) qui, débarrassé des mentions marginales, perd sa signification physique. On le présente alors explicitement sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} 20 & 20 & 15 & 20 & 0 \\ 20 & 15 & 10 & 15 & 0 \\ 12 & 25 & 25 & 10 & 20 \\ 5 & 8 & 10 & 8 & 12 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 10 & 10 & 20 \\ 0 & 2 & 5 & 10 & 15 \end{bmatrix}$$

et l'on convient de l'appeler une *matrice*.

La définition formelle d'une matrice sera naturellement celle d'une famille de nombres indexée par des couples d'entiers.

Définition : une *matrice* A de format $m \times n$ est une application :

$$A : \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$(i, j) \longmapsto a_{ij}$$

Notations : on désignera par $\mathbf{R}^{m \times n}$ l'ensemble des matrices de format $m \times n$ à coefficients réels. La matrice de format $m \times n$ la plus générale se présente sous la forme qui suit :

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

On peut fort bien remplacer les crochets par des parenthèses – ce n'est qu'une question de goût. Par ailleurs, lorsque ces indices seront des expressions, on pourra être amené à les séparer par une virgule, afin d'éviter des confusions éventuelles.

Remarque : en informatique, on retrouve les matrices sous le nom de tableaux de dimension 2. Le coefficient a_{ij} est, dans la plupart des langages de programmation, identifié sous la forme $A(i, j)$ ou $A[i, j]$ ce qui reflète parfaitement la définition proposée.

Convention : une matrice de format $m \times 1$ est appelée indifféremment *matrice-colonne* ou *vecteur* et nous confondrons de façon quasi systématique les ensembles :

$$\mathbf{R}^m \text{ et } \mathbf{R}^{m \times 1}.$$

! Nous éviterons, provisoirement, d'identifier les *matrices-lignes* à des vecteurs. Il ne s'agit là nullement d'un interdit, mais d'une simple mesure de prudence dont on percevra le bien-fondé quand on aura traité la dualité.

N.B. C'est, essentiellement, pour des raisons de commodité d'exposition que, dans cette première partie, il est exclusivement question de matrices à coefficients réels. Chacun pourra s'assurer que, dans tout ce qui suit, le corps des nombres réels peut être remplacé par tout corps commutatif, en particulier, par celui des nombres complexes.

§2. Opérations sur les matrices

* Les opérations linéaires

Définition : addition

Soit $A = [a_{ij}]$ et $B = [b_{ij}]$ deux matrices de même format $m \times n$, leur *somme* est la matrice, notée $A + B$, telle que si $A + B = C = [c_{ij}]$:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \text{ pour } i = 1, \dots, m \text{ et } j = 1, \dots, n.$$

Définition : multiplication par un scalaire.

Soit $A = [a_{ij}]$ une matrice de format $m \times n$ et λ un nombre. Le *produit* de A par λ est la matrice C de même format que A , notée λA , telle que si $\lambda A = C = [c_{ij}]$:

$$c_{ij} = \lambda a_{ij}, \text{ pour } i = 1, \dots, m \text{ et } j = 1, \dots, n.$$

Remarque : la somme $A + A + \dots + A$ de p matrices identiques est égale à pA .

Conventions.

1) *Matrices nulles* : on notera 0 toute matrice dont les coefficients sont tous nuls. On pourra, au besoin, en préciser le format en indice en notant : $0_{m \times n}$.

2) *Opposée d'une matrice* : à toute matrice A on peut associer la matrice opposée :

$$-A = (-1)A.$$

C'est-à-dire qu'on a, pour tous i et j :

$$-[a_{ij}] = [-a_{ij}]$$

* L'espace vectoriel des matrices de format $m \times n$

(2-1) Théorème : m et n étant deux entiers fixés, l'ensemble des matrices de format $m \times n$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$.

Démonstration : c'est une propriété vérifiée par tout ensemble des applications d'un ensemble donné dans $\mathbf{R}$ et, plus généralement dans tout corps commutatif. $\triangleleft$

* La multiplication matricielle

Dans l'introduction, nous avons vu apparaître une opération plus complexe que les deux précédentes, donnons en la définition formelle avant d'en étudier les propriétés.

Définition : multiplication des matrices.

Soit A et B deux matrices, de formats respectifs $m \times n$ et $n \times p$, on appelle *produit* de A par B , la matrice C de format $m \times p$, notée AB , et telle que, si :

$$AB = C = [c_{ij}] :$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

pour $i = 1, \dots, m$ et $j = 1, \dots, p$.

! La très grande analogie formelle, entre les calculs portant sur des matrices et ceux effectués avec des nombres, tend quelques pièges aux distraits. Citons à titre d'échantillon :

- ce n'est pas parce que le produit AB est défini que le produit BA a un sens ;
- même si AB et BA sont définis – A et B ont alors même nombre de lignes et de colonnes – il n'y a pas commutativité, en d'autres termes, le fait pour deux matrices de vérifier la relation $AB = BA$ est une situation exceptionnelle, on pourra garder à l'esprit le contre-exemple qui suit. Il est utile à plus d'un titre.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il permet aussi de constater qu'un produit de deux matrices peut être nul, sans qu'aucun de ses facteurs ne le soit. Ceci interdit, en particulier, des opérations de simplification, parfois tentantes, puisqu'on peut très bien avoir à la fois :

$$AB = AC \quad \text{et} \quad B \neq C.$$

On pourra facilement construire un contre-exemple à partir du précédent.

* La transposition des matrices

La transposition d'une matrice est l'opération qui consiste à en échanger les lignes et les colonnes.

Définition : soit $A = [a_{ij}]$ une matrice de format $m \times n$, la *transposée* de A est la matrice de format $n \times m$ notée tA , telle que si ${}^tA = [a'_{ij}]$, on ait :

$$a'_{ij} = a_{ji}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, n \text{ et } j = 1, \dots, m.$$

(2-4) Proposition : pour toutes matrices A et B de même format et pour tout réel λ , on a :

- (6) ${}^t({}^tA) = A,$
- (7) ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB,$
- (8) ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA.$

De plus, chaque fois que le produit AB est défini on a :

! (9) ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA.$

La démonstration n'est qu'une simple traduction des définitions des opérations mises en jeu.

§ 3. Matrices carrées

Définition : une matrice qui a le même nombre de lignes que de colonnes, est tout naturellement appelée une *matrice carrée*. Ce nombre est alors appelé l'*ordre* de la matrice.

Définition : on appelle *matrice identité* d'ordre n et on note I_n , la matrice suivante :

$$I_n = [\delta_{ij}] \text{ où } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (1).$$

ou plus clairement :

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

On vérifie immédiatement que, pour toute matrice A carrée, d'ordre n , on a :

$$AI_n = I_n A = A$$

et, plus généralement, si A est une matrice de format $m \times n$:

$$AI_n = I_m A = A.$$

Sur l'ensemble des matrices carrées d'ordre n , la multiplication est une loi de composition interne. Les propriétés (1), (2) et (3), complétée par l'existence de l'élément neutre I_n , se résument comme suit.

(3-1) **Théorème** : l'ensemble $\mathbf{R}^{n \times n}$ des matrices carrées d'ordre n est un anneau.

Remarque : signalons pour mémoire que le terme d'*algèbre des matrices carrées*, traduit la présence simultanée de la structure d'anneau et celle d'espace vectoriel, liées par la propriété (4) :

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B),$$

où A et B désignent deux matrices carrées de même format et λ est un nombre quelconque.

* Matrices inversibles

Revenons pour quelques lignes à des matrices de format quelconque.

Définition : soit A une matrice de format $m \times n$, une matrice B sera dite :

- *inverse à gauche* de A si $BA = I_n$,
- *inverse à droite* de A si $AB = I_m$.

Exemple : on considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il est immédiat que $AB = I_2$. Ainsi, B est inverse à droite de A et, ipso facto, A est inverse à gauche de B .

¹ δ_{ij} est appelé le symbole de *Kronecker*.

Remarques

1) Si une matrice admet un inverse à gauche ou à droite, en général, celui-ci n'est pas unique. Pour s'en convaincre, remplacer dans l'exemple précédent :

- B par :

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ou encore :

- A par :

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \text{"n'importe quoi"} \\ 1 & 2 & \text{"n'importe quoi"} \end{bmatrix}.$$

2) Ajoutons que, pour une matrice donnée, de tels inverses peuvent ne pas exister. Ce sera donc toujours une erreur que d'en supposer l'existence a priori.

L'un des intérêts de cette notion d'inversibilité est d'autoriser la simplification d'expressions algébriques dans les conditions suivantes.

(3-2) Proposition :

- Si A admet un inverse à gauche et si $AX = AY$ alors $X = Y$.
- Si A admet un inverse à droite et si $XA = YA$ alors $X = Y$.

Convention : dans le premier cas on dira que A est *simplifiable à gauche* et dans le second, on dira qu'elle est *simplifiable à droite*.

Démonstration : si A admet B pour inverse à gauche si $AX = AY$ alors on a les égalités suivantes :

$$X = IX = (BA)X = B(AX) = B(AY) = (BA)Y = IY = Y.$$

L'autre cas se règle de façon analogue. ◀

Considérer des matrices admettant un inverse à gauche et à droite nous ramène aux matrices carrées, ainsi qu'on le voit dans la proposition qui suit.

(3-3) Proposition : si une matrice A admet un inverse à gauche B et un inverse à droite C alors A est une matrice carrée et $B = C$.

Démonstration : si A est de format $m \times n$, comme BA et AC sont des matrices carrées, B et C sont respectivement de format $n \times m$ et $n \times m$. Si de plus, on a :

$$BA = I_n, \quad AC = I_m,$$

on en déduit immédiatement que :

$$B = BI_m = B(AC) = (BA)C = I_n C = C.$$

Ce qui exige que $n = m$. ◀

On est alors conduit à poser la définition qui suit.

Définition : une matrice carrée A est *inversible* – on dit aussi *régulière* – s'il existe une matrice A', telle que :

$$A'A = AA' = I.$$

On appelle alors A' l'*inverse* de A. Une matrice non inversible est dite *singulière*.

Il découle directement de la définition et de la proposition (3-2) que :

(3-4) Proposition : Si A est une matrice régulière, son inverse est unique, c'est aussi une matrice inversible.

Convention : si une matrice A est régulière, comme son inverse est unique, il est naturel de le noter A^{-1} . Dans ces conditions on a :

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

N.B. A la fin de du chapitre II, nous serons en mesure de prouver que pour qu'une matrice carrée soit inversible, il suffit qu'elle admette un inverse à gauche – respectivement un inverse à droite. Cette propriété étant loin d'aller de soi car elle est bien particulière aux matrices, en attendant, pour affirmer que deux matrices sont inverses l'une de l'autre, il conviendra de s'assurer de la double égalité.

(3-5) Proposition : si A et B sont deux matrices inversibles de même ordre, leur produit est aussi une matrice inversible et l'on a :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Démonstration : on a bien à la fois :

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(B B^{-1})A^{-1} = A I A^{-1} = AA^{-1} = I$$

et :

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1} I B = B^{-1}B = I.$$

Il s'ensuit que :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \quad \triangleleft$$

Ce résultat se généralise au produit d'un nombre quelconque de matrices inversibles et un raisonnement par récurrence banal prouve que :

$$(A_1 A_2 \dots A_n)^{-1} = A_n^{-1} A_{n-1}^{-1} \dots A_1^{-1}.$$

Enfin, il est facile de s'assurer que si A est une matrice inversible, on a toujours :

$$(3-6) \quad ({}^t A)^{-1} = {}^t(A^{-1}).$$

§ 4. Partition de matrices

Au départ, ce sont des contraintes d'ordre pratique qui peuvent amener à partager des tableaux en sous tableaux. Cependant, il est tout à fait remarquable que les opérations ainsi mises en œuvre donnent lieu à des interprétations théoriques qui se révéleront fort utiles dans les applications ultérieures.

Définition : soit A et B deux matrices, on dit que B est une *sous-matrice* de A s'il est possible de l'obtenir par suppression de lignes et de colonnes de A.

Par exemple considérons les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 5 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

On peut considérer que B est une sous-matrice de A. En effet, on l'obtient en supprimant la deuxième colonne, la première et la troisième ligne de A. En revanche, la matrice :

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

ne peut pas être considérée comme une sous-matrice de A, même si ses coefficients en sont extraits.

Définition "concrète" : définir une *partition* de la matrice A, c'est la présenter comme un tableau de matrices par l'insertion de séparations entre certaines colonnes et entre certaines lignes.

Par exemple, on peut poser :

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 3 & 1 & 2 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 6 & 5 & 2 & 3 & 9 \\ \hline 8 & 2 & 1 & 0 & 4 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{23} & A_{23} \end{bmatrix}$$

où l'on convient que :

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_{13} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 1 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 8 \end{bmatrix}, \quad A_{23} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Les sous-matrices qui interviennent dans une telle partition sont appelées des *blocs*.

N.B. Il n'est pas question d'utiliser des partages où des séparations seraient matérialisées par des lignes brisées.

* Multiplication par blocs

(4-1) Proposition : on considère deux matrices A et B de formats respectifs $m \times n$ et $n \times p$. Chacune d'elles fait l'objet d'une partition, telle que le partage des colonnes de A soit le même que celui des lignes B. Dans ces conditions, on peut appliquer la règle de la multiplication matricielle en traitant les sous-matrices de A et de B comme des coefficients. Le résultat est une partition du produit AB.

La démonstration consisterait à jongler avec des indices doubles superposés. Elle est de peu intérêt et n'a pas sa place ici. En revanche on pourra aisément comprendre le pourquoi et le comment de cette *multiplication par blocs* en effectuant les calculs ci-dessous :

- d'abord la multiplication matricielle usuelle :

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & 2 & 4 & 3 \\
 & & & 1 & 1 & 2 \\
 & & & \hline
 & & & 1 & 5 & 1 \\
 & & & 3 & 2 & 2 \\
 & & & 2 & 1 & 3 \\
 & & & \hline
 1 & 1 & | & 2 & 1 & 1 \\
 2 & 0 & | & 3 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & | & 4 & 6 & 2
 \end{array}$$

- puis la multiplication par blocs afin s'assurer qu'on obtient bien la même matrice ⁽¹⁾ :

$$\begin{array}{l}
 \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 2 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 5 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{array} \right] \\
 \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{ccc} 4 & 6 & 2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 2 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{ccc} 4 & 6 & 2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 5 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{array} \right]
 \end{array}$$

* Partition en lignes ou en colonnes

Ce qui suit pourra, à juste titre, être considéré comme gratuit en première lecture. C'est, néanmoins, un point essentiel pour la logique du cours, ceci à partir de la section 2 du chapitre II.

Soit A une matrice de format $m \times n$, on peut la partager aussi bien suivant les lignes que suivant les colonnes :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \dots \\ A_i \\ \dots \\ A_m \end{bmatrix} = A = [A^1 | \dots | A^j | \dots | A^n].$$

¹ Il va sans dire que cette présentation n'a d'autre intérêt que d'illustrer le propos.

Ainsi, quand on considère deux matrices A et B de formats respectifs $m \times n$ et $n \times p$, leur produit peut toujours s'interpréter comme étant le résultat de l'une des multiplications par blocs suivantes :

- A est présentée normalement et B est partagée suivant ses lignes :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_j \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}B_1 + \dots + a_{1j}B_j + \dots + a_{1n}B_n \\ \vdots \\ a_{i1}B_1 + \dots + a_{ij}B_j + \dots + a_{in}B_n \\ \vdots \\ a_{m1}B_1 + \dots + a_{mj}B_j + \dots + a_{mn}B_n \end{bmatrix}$$

- A est partagée suivant ses colonnes et B est présentée normalement :

$$\begin{bmatrix} A^1 & \dots & A^j & \dots & A^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1i} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{j1} & \dots & b_{ji} & \dots & b_{jp} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{ni} & \dots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}A^1 + \dots + b_{n1}A^n & \dots & b_{1i}A^1 + \dots + b_{ni}A^n & \dots & b_{1p}A^1 + \dots + b_{np}A^n \end{bmatrix}$$

- A est partagée suivant ses lignes et B suivant ses colonnes :

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^1 & \dots & B^j & \dots & B^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1B^1 & \dots & A_1B^j & \dots & A_1B^p \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_iB^1 & \dots & A_iB^j & \dots & A_iB^p \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_mB^1 & \dots & A_mB^j & \dots & A_mB^p \end{bmatrix}$$

La dernière est anecdotique, les deux premières se traduisent par la proposition ci-dessous.

(4-2) Proposition

1) La $i^{\text{ème}}$ ligne du produit AB est la combinaison linéaire des lignes de B avec pour coefficients les termes de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A.

2) La $j^{\text{ème}}$ colonne du produit AB est la combinaison linéaire des colonnes de A avec pour coefficients les termes de la $j^{\text{ème}}$ colonne de B.

Ce qui peut encore s'écrire comme suit.

(4-2 bis) La $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne du produit AB sont respectivement de la forme suivante :

$$(AB)_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} B_k \text{ pour } i=1, \dots, m \text{ et } (AB)^j = \sum_{k=1}^m b_{kj} A^k \text{ pour } j=1, \dots, p.$$

§ 5. Vocabulaire

Nous terminons ce chapitre en présentant une liste de propriétés formelles dont il est commode de disposer pour s'exprimer. Nous la donnons essentiellement à titre de référence. Il n'est donc pas indispensable de chercher à tout retenir en première lecture.

* Matrices diagonales

Définition : la *diagonale principale* d'une matrice carrée $A = [a_{ij}]$ est la suite de ses éléments diagonaux, c'est-à-dire :

$$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}.$$

Définition : une matrice carrée est dite *diagonale* si tous ses éléments situés en dehors de la diagonale principale sont nuls.

Exemple :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

On symbolisera une matrice diagonale par :

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix} \text{ ou, plus simplement } \begin{bmatrix} a_1 & & & & \\ & a_2 & & 0 & \\ & & a_3 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{bmatrix}.$$

Définition : on appelle *matrice scalaire* d'ordre n , toute matrice diagonale de la forme λI_n , où λ est un nombre :

$$\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & 0 \\ & & \lambda & \\ & 0 & & \ddots \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}.$$

Définition : une matrice A est *diagonale par blocs* si elle peut être partagée en blocs sous la forme :

$$A = [A_{ij}]$$

où seuls les blocs diagonaux A_{ii} sont des matrices non nulles.

Schématiquement ceci donne :

$$\begin{bmatrix} \boxed{A_{11}} & & & 0 \\ & \boxed{A_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A_{nn}} \end{bmatrix}.$$

* Matrices triangulaires

Définition : une matrice carrée est dite *triangulaire supérieure* (resp. *inférieure*) si tous les éléments situés au-dessous (resp. au-dessus) de la diagonale principale sont nuls.

Exemples :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Il est clair qu'une matrice diagonale est à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure.

(5-2) Proposition : le produit de deux matrices triangulaires supérieures (resp. triangulaires inférieures) est une matrice triangulaire supérieure (resp. triangulaire inférieure).

Dans ces conditions, la diagonale principale du produit AB est le produit terme à terme des diagonales des facteurs A et B.

Démonstration : si A et B sont deux matrices triangulaires supérieures de même ordre n , alors

$$a_{ij} = b_{ij} = 0 \text{ si } i > j.$$

Par définition, le coefficient courant du produit AB est de la forme :

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Il comporte donc uniquement des termes nuls si $i < j$ et le produit $a_{ii}b_{ii}$ dans le cas où $j = i$.

On applique ce qui précède aux matrices transposées, on obtient la propriété correspondante des matrices triangulaires inférieures. $\triangleleft$

* Matrices symétriques, antisymétriques

Définition : une matrice A est dite :

- *symétrique* si ${}^tA = A$,
- *antisymétrique* si ${}^tA = -A$.

Chapitre II. Les méthodes d'élimination

§ 1. Les réductions de Gauss et de Gauss-Jordan

Dans la présente section, on formalise le procédé de réduction d'un système linéaire présenté par ailleurs en géométrie, suivant un tout autre point de vue. Ensuite, on en propose une variante utile à plus d'un titre. Comme ces considérations ont une portée beaucoup plus générale que la seule résolution des systèmes d'équations linéaires, nous les appliquons plutôt à des matrices.

La nature purement combinatoire de ces développements les rend rebutants de prime abord. En effet, il faut beaucoup de texte pour décrire abstraitement des mécanismes opératoires, alors que, dans l'immédiat, l'important, est de savoir les mettre en œuvre concrètement. On doit donc considérer ce qui suit comme un investissement qui portera ses fruits ultérieurement.

* La réduction de Gauss

Cette méthode de réduction est la plus connue, c'est elle qu'on utilise au niveau élémentaire. Elle consiste, on le sait, à ramener une matrice à une forme triangulaire supérieure. Cependant cette seule précision ne suffit pas, c'est pourquoi il nous faut introduire le concept, indigeste, de matrice échelonnée.

Définition : on considère une matrice A de format $m \times n$ et un entier r tel que $r \leq m$. On suppose tout d'abord que :

- (1) les lignes A_i sont non nulles pour $i \leq r$,
- (2) les lignes A_i sont nulles pour $i > r$.

On convient alors de noter j_i l'indice de colonne du premier coefficient non nul de la $i^{\text{ème}}$ ligne, pour $i = 1, \dots, r$. Si, de plus, on a :

- (3) $j_1 < j_2 < \dots < j_r$,
- (4) $a_{ij_1} = a_{ij_2} = \dots = a_{ij_r} = 1$,

on dit alors que A est *échelonnée* de rang r .

Remarque : il est clair que r doit être aussi inférieur au nombre des colonnes de A .

Exemple : les matrices suivantes sont échelonnées de rang 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Définition : on appelle *opérations élémentaires* sur les lignes d'une matrice A les transformations suivantes :

1. échange des lignes A_i et A_j ,
2. remplacement de la ligne A_i par λA_i où λ est un scalaire **non nul**,
3. remplacement de la ligne A_i par $A_i + \lambda A_j$, où $i \neq j$ et λ est un scalaire quelconque

Il est commode de symboliser ces opérations comme suit :

$$A_i \leftrightarrow A_j, \quad A_i \rightarrow \lambda A_i, \quad A_i \rightarrow A_i + \lambda A_j.$$

Définition : on appelle *opération sur les lignes* de A la donnée d'une suite finie de matrices de même format :

$$A = A(0), A(1), \dots, A(p)$$

telles que, pour $k = 1, \dots, p$, $A(k)$ s'obtienne par une opération élémentaire sur les lignes de $A(k-1)$.

(1-1) Théorème : pour toute matrice non nulle, il existe une opération sur ses lignes qui la transforme en une matrice échelonnée.

Démonstration : on procède par récurrence sur le nombre de lignes noté m .

Pour $m = 1$, le théorème est vérifié.

Soit $m > 1$, on suppose que le théorème soit vérifié par toute matrice comportant moins de m lignes. On considère une matrice B à m lignes, non nulle. On échange deux lignes de B , si nécessaire pour obtenir une matrice de la forme $[0 | A]$ avec $a_{11} \neq 0$ – dans la pratique la sous-matrice nulle est généralement vide. On remplace d'abord la première ligne A_1 de A par :

$$\frac{1}{a_{11}} A_1.$$

Puis, on remplace chacune des autres lignes A_i par :

$$A_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} A_1 \text{ pour } i = 2, \dots, m.$$

On obtient ainsi une matrice qu'on peut présenter comme suit :

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & M \end{bmatrix}$$

Si $M = 0$, la matrice A' est échelonnée, sinon l'hypothèse de récurrence nous dit qu'il existe une opération sur les lignes de M qui produit une matrice échelonnée N .

En fait, on peut appliquer les opérations élémentaires mises en jeu à la matrice donnée au départ. En effet, les transformations effectuées pour passer de A à A' , n'affectent pas la première ligne. De plus, elles ne modifient en rien les colonnes de zéros qui, éventuellement, occupent les premières places. On obtient ainsi la matrice :

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & L \\ 0 & 0 & N \end{bmatrix}$$

Comme la matrice N est échelonnée, la matrice B' l'est aussi et le théorème est démontré. $\triangleleft$

Suggestion : la démonstration qui précède décrit en fait le premier pas d'un processus itératif, concevoir l'algorithme correspondant.

* La réduction de Gauss-Jordan

Définition : on dit qu'une matrice A est *réduite* s'il existe une permutation de ses colonnes qui la met sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} I_r & U \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'entier r est alors appelé le *rang* de A .

Exemple : la matrice suivante est réduite de rang 3 :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les deux matrices suivantes sont réduites échelonnées de rang 3 et 4.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Remarque : lorsque le rang est égal au nombre de lignes on parlera de matrice réduite (respectivement : échelonnée, réduite échelonnée) de *plein rang*.

On pourrait facilement adapter la démonstration du théorème précédent afin de prouver l'assertion qui suit.

(1-2) Théorème : pour toute matrice non nulle il existe une opération sur ses lignes qui la transforme en une matrice réduite échelonnée.

Nous préférons obtenir ce résultat par un procédé algorithmique ⁽¹⁾.

¹ On trouvera, dans l'annexe I, un schéma d'algorithme rédigé suivant les règles plus ou moins codifiées de la programmation structurée. Sa lecture pourrait remplacer ce qui suit pour qui est familier de ce mode de présentation.

* Un pas de la réduction de Gauss-Jordan

On considère une matrice A de format $m \times n$ qui se présente sous la forme suivante :

$$A = \begin{bmatrix} U & V \\ 0 & W \end{bmatrix}$$

où la sous-matrice U est réduite échelonnée de plein rang et comporte $i-1$ lignes ($i \geq 1$).

- Si $W=0$, A est, elle aussi, réduite échelonnée de rang $i-1$.
- Si $W \neq 0$, on effectue les opérations suivantes :
 - *Choix d'un pivot* : on choisit arbitrairement un coefficient non nul de la première colonne non nulle de W . Ce coefficient, on convient que c'est a_{kp} , on l'appelle *pivot* (sous-entendu d'élimination).
 - *Mise en place du pivot* :
 - la ligne $\frac{1}{a_{kp}} A_k$ prend la place de A_i ,
 - si $k > i$ la ligne A_i prend la place de A_k .

On note B la matrice obtenue, le pivot est devenu $b_{ip} = 1$.

- *Elimination* : pour $t = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, m$,
 - la ligne B_t est remplacée par $B_t - b_{tp} B_i$.

On note C la matrice obtenue. Tous les coefficients c_{kp} de sa $p^{\text{ème}}$ colonne sont nuls, sauf le pivot c_{ip} qui est égal à 1.

Conclusion : la matrice C peut s'écrire sous la forme :

$$C = \left[\begin{array}{c|c|c} U' & | & V' \\ \hline - & + & - \\ 0 & | & W' \end{array} \right]$$

où U' comporte i lignes et se présente sous la forme suivante :

$$U' = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} U & | & T & | & 0 \\ \hline - & + & - & + & - \\ 0 \dots 0 & | & 0 \dots 0 & | & 1 \end{array} \right]$$

Les opérations décrites n'ont jamais affecté les coefficients de U . Alors, peu importe le contenu de T , la matrice U' est, comme U , réduite échelonnée de plein rang.

* L'algorithme de réduction de Gauss-Jordan

Partant d'une matrice quelconque A non nulle et de format $m \times n$, on construit par récurrence une suite :

$$A = A(0), A(1), \dots, A(i), \dots$$

dont l'élément courant est de la forme suivante :

$$A(i) = \left[\begin{array}{c|c} U(i) & V(i) \\ \hline 0 & W(i) \end{array} \right]$$

où la sous matrice $U(i)$ est réduite échelonnée de plein rang et comporte i lignes. On passe d'une matrice à la suivante au moyen des opérations décrites au point précédent. Ceci est possible tant que le bloc $W(i)$ est non nul ou non vide ($i = m$). Comme i ne peut évidemment pas dépasser le nombre de lignes de la matrice donnée au départ, il existe un entier $r \leq m$ pour lequel $W(r)$ est nul ou vide. C'est-à-dire pour lequel la matrice $A(r)$ est réduite échelonnée.

Le théorème (1-2) est alors démontré.

Définition : la matrice ainsi obtenue est appelée la *réduite échelonnée* de A ou *réduite de Gauss-Jordan* de A .

Remarque : il est possible de démontrer que la réduite de Gauss-Jordan d'une matrice est indépendante de la méthode suivie. Ainsi, pour une matrice donnée A , l'entier r – rang de la réduite échelonnée de A , est un invariant de A . C'est pourquoi, il est sans inconvénient de parler dès maintenant du *rang* de A , même si cet usage apparaît provisoirement abusif.

§2. Interprétation des opérations sur les lignes d'une matrice

Nous allons montrer que l'effet, sur une matrice, d'une opération sur ses lignes, est le même que celui produit par sa multiplication à gauche par une certaine matrice régulière. Cette interprétation nous permettra d'appréhender globalement, des suites d'opérations qui, dans la pratique, ne peuvent s'expliquer que par la mise en œuvre d'un algorithme, c'est-à-dire de façon séquentielle. Au départ, on pourrait penser qu'il s'agit là d'un jeu gratuit. Qu'on ne s'y trompe pas, ce point jouera un rôle essentiel lors de la mise en œuvre pratique des concepts développés dans toute la suite de ce cours.

Convention : soit m un entier naturel, on note E_{ij} la matrice carrée d'ordre m dont tous les coefficients sont nuls, à l'exception de celui situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne qui est égal à 1. C'est-à-dire qu'on a :

$$E_{ij} = [e_{pq}], \quad e_{pq} = \delta_{ip} \delta_{jq}, \quad \text{pour } p, q = 1, \dots, m.$$

On considère les trois types de matrices carrées d'ordre m définis comme suit :

$$(1) \quad P_{ij} = I_m - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}, \quad \text{où } 1 \leq i < j \leq m.$$

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \leftarrow j \end{matrix}$$

$$(2) \quad P_i(\lambda) = I_m + (\lambda - 1)E_{ii}, \quad \text{où } \lambda \neq 0 \text{ et } 1 \leq i \leq m.$$

$$P_i(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \leftarrow i$$

$$(3) \quad P_{ij}(\lambda) = I_m + \lambda E_{ij}, \quad \text{où } i \neq j, 1 \leq i \leq m \text{ et } 1 \leq j \leq n.$$

$$P_{ij}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda & \cdots & 1 \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow j \\ \leftarrow i \end{matrix}$$

Définition : les matrices P_{ij} , $P_i(\lambda)$, $P_{ij}(\lambda)$ sont dites *élémentaires*.

(2-1) Proposition : la multiplication à gauche d'une matrice A de format $m \times n$:

- par P_{ij} échange les lignes A_i et A_j ,
- par $P_i(\lambda)$ remplace la ligne A_i par λA_i ,
- par $P_{ij}(\lambda)$ remplace la ligne A_i par $A_i + \lambda A_j$,

sans autre modification.

Ceci s'énonce en d'autres termes sous la forme qui suit.

(2-1 bis) Proposition : la multiplication à gauche de A

- par P_{ij} réalise l'opération élémentaire de ligne : $A_j \leftrightarrow A_i$,
- par $P_i(\lambda)$ réalise l'opération élémentaire de ligne : $A_i \rightarrow \lambda A_i$,
- par $P_{ij}(\lambda)$ réalise l'opération élémentaire de ligne : $A_i \rightarrow A_i + \lambda A_j$.

Démonstration : c'est une application directe de (I-4-2). $\triangleleft$

(2-2) Proposition : les matrices élémentaires sont régulières. Plus précisément, on a :
 $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$, $P_i(\lambda)^{-1} = P_i(\lambda^{-1})$ et $[P_{ij}(\lambda)]^{-1} = P_{ij}(-\lambda)$.

Démonstration : la proposition précédente, montre que :

$$\begin{aligned} P_{ij} P_{ij} &= I_m, \\ P_i(\lambda^{-1}) P_i(\lambda) &= I_m = P_i(\lambda) P_i(\lambda^{-1}), \\ P_{ij}(-\lambda) P_{ij}(\lambda) &= I_m = P_{ij}(\lambda) P_{ij}(-\lambda). \end{aligned}$$

Ce qui justifie l'assertion avancée. $\triangleleft$

Il est alors établi que tout produit de matrices élémentaires est une matrice régulière et les opérations de réduction s'interprètent comme suit.

(2-3) Théorème : soit A une matrice donnée, si une suite d'opérations sur les lignes transforme A en B, il existe une matrice carrée régulière P, telle que :

$$B = PA.$$

Les théorèmes (1-1) et (1-2) peuvent alors se reformuler comme suit

(2-4) Théorème : pour toute matrice A de format $m \times n$, il existe une matrice carrée régulière P, d'ordre m et telle que le produit PA soit une matrice échelonnée (resp. réduite échelonnée).

* Discussion

Passons en revue tous les cas possibles :

1. Si $r[B|W] > r$, le système réduit contient la condition contradictoire $0=1$. Il est **incompatible**.
2. Si $r[B|W] = r$, on est dans l'un des deux cas suivants.
 - $r = n$ et alors toutes les inconnues sont principales, le système réduit exprime la **solution** qui est **unique** :

$$x_1 = w_1, x_2 = w_2, \dots, x_n = w_n.$$

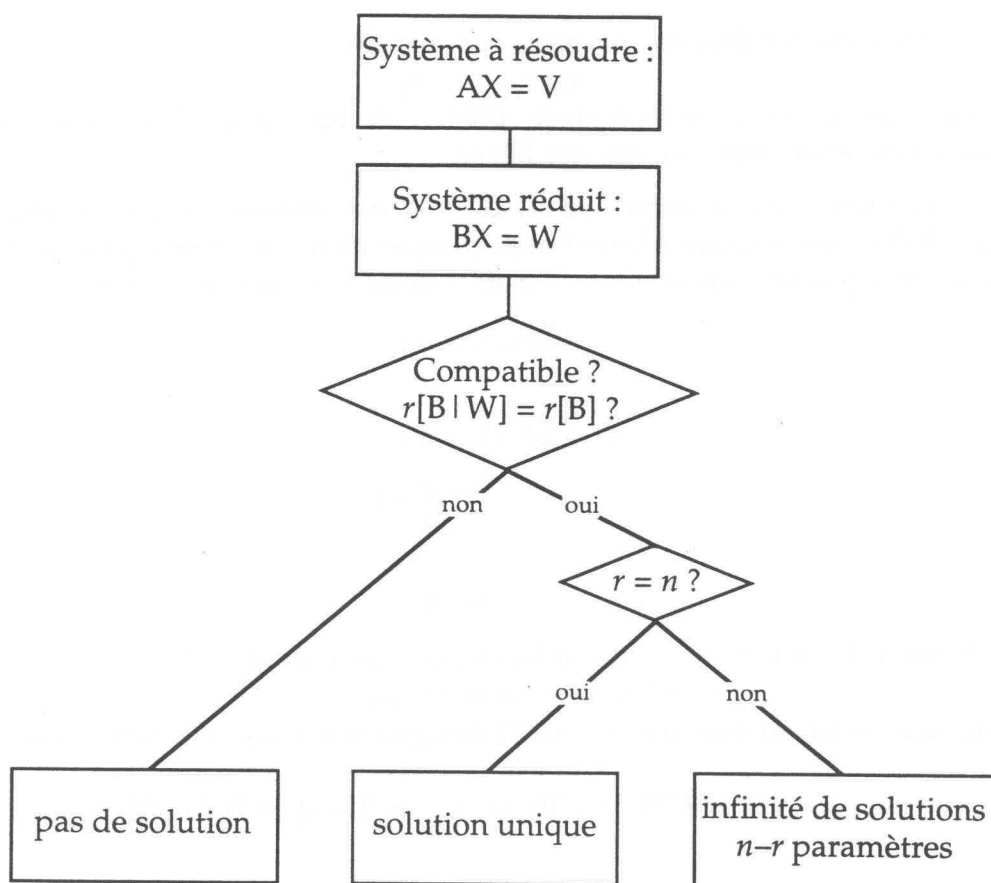
- $r < n$, chaque inconnue principale ne figure que dans une seule équation, ce qui permet d'écrire, pour $i = 1, 2, \dots, r$:

$$x_{j_i} = w_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_1, j_2, \dots, j_r}}^n b_{ij} x_j.$$

Ces relations expriment les inconnues principales en fonction des inconnues non principales. Ces dernières pouvant prendre des valeurs arbitraires jouent, de ce fait, le rôle de paramètres.

On peut résumer cette discussion sous la forme de l'organigramme qui suit.

(3-3)



* Conditions d'existence et d'unicité des solutions

On commence à entrevoir le caractère intrinsèque du rang d'une matrice avec le théorème ci-dessous.

(3-4) **Théorème** : soit A une matrice donnée de format $m \times n$, on note r son rang et l'on considère un vecteur quelconque V à m composantes. Dans ces conditions, le système linéaire de m équations à n inconnues $AX = V$ admet :

- **au moins une solution**, pour tout second membre V si, et seulement si :

$$r = m \leq n ;$$

- **au plus une solution** pour tout second membre V si, et seulement si :

$$r = n \leq m ;$$

- **une solution, et une seule**, pour tout second membre V si, et seulement si :

$$r = m = n.$$

Démonstration : nous savons qu'il existe une matrice régulière P , d'ordre m , telle que $PA = B$ soit réduite échelonnée de rang r .

1) Si le système admet au moins une solution pour tout second membre alors les systèmes suivants sont, en particulier, compatibles :

$$AX = P^{-1}E_j, \text{ pour } j = 1, 2, \dots, m,$$

où :

$${}^tE_1 = [1 \ 0 \ \dots \ 0], {}^tE_2 = [0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0], \dots, {}^tE_m = [0 \ \dots \ 0 \ 1].$$

Il existe donc S_j , tel que :

$$AS_j = P^{-1}E_j,$$

ceci pour $j = 1, 2, \dots, m$, Il s'ensuit que :

$$BS_j = PAS_j = PP^{-1}E_j = E_j.$$

Ainsi le produit $BS_j = E_j$ ne peut pas avoir de ligne nulle d'indice j , pour $j = 1, 2, \dots, m$. La matrice B ne peut donc avoir aucune de ses lignes qui soit nulle. Son rang est, de ce fait, égal au nombre de ses lignes, c'est-à-dire m . On a donc prouvé que $r = m$ et comme, de plus, on a toujours $r \leq m$ et $r \leq n$, il s'ensuit bien que $r = m \leq n$. La réciproque est donnée par la discussion générale résumée en (3-3).

2) Si le système admet au plus une solution pour tout second membre, c'est qu'il n'y a que des inconnues principales, c'est-à-dire que $r = n$. La discussion précédente prouve la réciproque.

3) Ce point résulte de la conjonction des propriétés que nous venons d'établir. ◀

Définition : un système linéaire tel que $m = n = r$ est appelé *système de Cramer*.

* Dispositions pratiques

On peut imaginer diverses variantes de l'algorithme de Gauss-Jordan. Dans celle que nous avons exposée, on a rendu tous les pivots égaux à 1. Cette façon d'opérer serait malcommode pour résoudre "à la main" des systèmes à coefficients entiers. Dans ce cas, l'inconvénient d'avoir à effectuer quelques opérations supplémentaires est mineur face à celui de manipuler des fractions ou des nombres décimaux. On repousse donc le plus longtemps possible l'apparition de coefficients fractionnaires. Ainsi, dans les exemples qui suivent, on ne procède à la normalisation des lignes pivots qu'après avoir effectué toutes les opérations d'élimination. Inutile d'ajouter qu'on prend soin de simplifier les équations chaque fois que l'occasion s'en présente.

Désormais, nous effectuerons et présenterons les calculs sous forme de tableaux.

Exemple 1 : on résout le système suivant :

$$\begin{cases} 2y + 3z + t - u = 5 \\ x + z + t = 3 \\ 2x + y - t = 2 \\ x + 3y + 2z - t - u = 4 \end{cases}$$

1 ^{er} pivot	0	2	3	1	-1	5	1		
	1	0	1	1	0	3	0	-2	-1
	2	1	0	-1	0	2		1	
	1	3	2	-1	-1	4			1
2 ^e pivot	1	0	1	1	0	3	1		
	0	2	3	1	-1	5	0	-1	-3
	0	1	-2	-3	0	-4		2	
	0	3	1	-2	-1	1			2
3 ^e pivot	1	0	1	1	0	3	7		
	0	2	3	1	-1	5		7	
	0	0	-7	-7	1	-13	1	3	1
	0	0	-7	-7	1	-13			-1
plus de pivot	7	0	0	0	1	8	1/7		
	0	14	0	-14	-4	-4	1/14		
	0	0	-7	-7	1	-13	-1/7		
	0	0	0	0	0	0			
on normalise les pivots	1	0	0	0	1/7	8/7			
	0	1	0	-1	-2/7	-2/7			
	0	0	1	1	-1/7	13/7			
	0	0	0	0	0	0			

Nous savons que le système donné est équivalent à :

$$\begin{cases} x + \frac{1}{7}u = \frac{8}{7} \\ y - t - \frac{2}{7}u = -\frac{2}{7} \\ z + t - \frac{1}{7}u = \frac{13}{7} \end{cases}$$

L'écriture de la solution sous forme paramétrique est immédiate :

$$\begin{cases} x = \frac{8}{7} - \frac{1}{7}u \\ y = -\frac{2}{7} + t + \frac{2}{7}u \\ z = \frac{13}{7} - t + \frac{1}{7}u \end{cases}$$

où t et u sont des nombres réels quelconques.

Exemple 2 : système de Cramer

$$\begin{cases} 5x + 2y + z = 12 \\ 5x - 6y + 2z = -1 \\ -4x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

5	2	1	12	1	4
5	-6	2	-1	-1	
-4	2	1	3		5
5	2	1	12	4	
0	8	-1	13	-1	9
0	18	9	63		4
20	0	5	35	-9	
0	8	-1	13		45
0	0	45	135	-1	1
180	0	0	180	1/180	
0	360	0	720	1/360	
0	0	45	135	1/45	
1	0	0	1		
0	1	0	2		
0	0	1	3		

Le système réduit, donne la solution :

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases} \text{ ou } (x, y, z) = (1, 2, 3).$$

§ 4. Inversion de matrices

Nous ne connaissons encore explicitement des matrices régulières guère plus que la définition :

“A est inversible s’il existe B telle que $AB = BA = I$ ”

et ses conséquences les plus immédiates. On sait, en particulier, que pour une matrice carrée A, s’il existe B et C telles que :

$$AB = CA = I,$$

alors :

$$B = C = A^{-1}.$$

À présent, nous pouvons en apprendre beaucoup plus.

(4-1) Théorème : concernant une matrice carrée A, d’ordre n , les affirmations suivantes sont équivalentes :

- | | |
|-----|------------------------------|
| (1) | A est inversible, |
| (2) | A admet un inverse à gauche, |
| (3) | A est de rang n , |
| (4) | A admet un inverse à droite. |

Démonstration.

L’implication $[(1) \Rightarrow (2)]$ est évidente.

$[(2) \Rightarrow (3)]$ Si A admet un inverse à gauche, elle est simplifiable à gauche (cf. I-3-2.), ce qui, en particulier, entraîne que pour tout vecteur X :

$$AX = AY \Rightarrow X = Y.$$

Ainsi, tout système linéaire $AX = V$ admet au plus une solution et donc A est de rang n .

$[(3) \Rightarrow (4)]$ Soit r le rang de A, comme il s’agit d’une matrice carrée, si $r = n$ alors tout système $AX = V$ est un système de Cramer. Ainsi les n systèmes écrits sous forme condensée :

$$A[X^1 | X^2 \dots | X^n] = I_n$$

ont une solution unique. Ceci veut dire qu’il existe une matrice :

$$B = [B^1 | B^2 | \dots | B^n],$$

telle que :

$$A[B^1 | B^2 | \dots | B^n] = I_n,$$

c’est-à-dire que :

$$AB = I_n.$$

$[(4) \Rightarrow (1)]$: Si A admet B pour inverse à droite, B admet A pour inverse à gauche. L’implication $[(2) \Rightarrow (4)]$ est déjà démontrée, on l’applique à B. Cette matrice admet aussi un inverse à droite. La proposition (I-3-3) prouve alors que B est inversible et que :

$$A = B^{-1}.$$

Le cycle est alors refermé ce qui prouve l’assertion avancée. ◀

(4-2) Corollaire 1 : une matrice carrée A est inversible si, et seulement si, le système homogène $AX=0$ admet pour seule solution $X=0$.

Démonstration : c'est une autre façon d'exprimer que A est inversible si et seulement si, $AX=0$ est un système de Cramer, ce qui, on le sait déjà, est vrai si, et seulement si, $r=n$. $\triangleleft$

(4-3) Corollaire 2 : le produit de deux matrices B et C , carrées, de même ordre, est une matrice régulière si, et seulement si B et C sont régulières..

Démonstration : on pose $A=BC$. Nous savons déjà que si B et C sont régulières A l'est aussi (cf. I-3-5).

Réciproquement, si A est inversible, on applique le corollaire précédent. Si S est une solution du système homogène $CX=0$, elle vérifie

$$AS = (BC)S = B(CS) = B0 = 0$$

$$AS = 0.$$

Comme A est régulière, on a :

$$S = A^{-1}AS = 0.$$

Il s'ensuit que C est régulière, on a donc $B = AC^{-1}$ et B est un produit de matrices régulières. Elle est régulière. $\triangleleft$

Remarque : un raisonnement par récurrence banal généralise l'énoncé précédent à tout produit d'un nombre quelconque de matrices.

* Calcul de matrices inverses

Soit A une matrice carrée donnée, d'ordre n , on lui applique l'algorithme de Gauss-Jordan, on obtient la matrice réduite échelonnée A . On sait qu'il existe une matrice carrée régulière P telle que $B=PA$. On pose $r=r(B)$.

- Si $r < n$, A n'est pas inversible.
- Si $r = n$, A étant carrée d'ordre n toutes les colonnes ont un pivot, on a donc :

$$B = I.$$

Le théorème (4-1) montre que :

$$P = A^{-1}.$$

On en tire le principe d'une méthode pratique d'inversion des matrices. On applique l'algorithme de Gauss-Jordan à la matrice augmentée :

$$[A | I].$$

On construit ainsi :

$$P[A | I] = [I | P] = [I | A^{-1}].$$

Exemple : on calcule l'inverse de la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Remarque : ici encore, on repousse au dernier moment l'apparition de coefficients fractionnaires, ce qui ne modifie en rien le principe de la méthode.

1	2	3	1	0	0	-2	-3
2	3	1	0	1	0	1	
3	1	2	0	0	1		1
1	2	3	1	0	0	1	
0	-1	-5	-2	1	0	2	-5
0	-5	-7	-3	0	1		1
1	0	-7	-3	2	0	18	
0	-1	-5	-2	1	0		18
0	0	18	7	-5	1	7	5
18	0	0	-5	1	7	$\frac{1}{18}$	
0	-18	0	-1	-7	5	$-\frac{1}{18}$	
0	0	18	7	-5	1	$\frac{1}{18}$	
1	0	0	$-\frac{5}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{7}{18}$		
0	1	0	$\frac{1}{18}$	$\frac{7}{18}$	$-\frac{5}{18}$		
0	0	1	$\frac{7}{18}$	$-\frac{5}{18}$	$\frac{1}{18}$		

On obtient ainsi :

$$A^{-1} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & -5 \\ 7 & -5 & 1 \end{bmatrix} \quad (1).$$

* Matrices triangulaires régulières

(4-4) Proposition : une matrice triangulaire supérieure (resp. triangulaire inférieure) est régulière si, et seulement si, ses éléments diagonaux sont non nuls. Son inverse est alors triangulaire supérieure (resp. triangulaire inférieure) .

Démonstration : soit A une matrice triangulaire supérieure d'ordre n , lors de sa réduction les coefficients diagonaux s'imposent comme pivots, ceci tant qu'ils sont non nuls. Il s'ensuit, d'une part que l'absence de zéro sur la diagonale implique $r(A) = n$, d'autre part, que la présence d'un zéro sur la diagonale interdit le choix d'un pivot dans la colonne correspondante et, de ce fait, entraîne $r(A) < n$. Il est alors prouvé que A est inversible si, et seulement si, elle n'a pas de zéro sur sa diagonale (cf. 4-1).

Dans ce cas, la réduction s'opère sans échange de lignes. De plus, comme toutes les éliminations s'opèrent dans la partie de la matrice située au-dessus de la diagonale principale, la matrice A^{-1} apparaît comme un produit de matrices élémentaires des deux types :

$$P_i(\lambda) \text{ et } P_{ij}(\lambda) \text{ avec } i < j.$$

C'est donc un produit de matrices triangulaires supérieures et par conséquent, une matrice triangulaire supérieure.

Pour les matrices triangulaires inférieures on applique ce qui vient d'être démontré aux transposées. $\triangleleft$

¹ Inutile de dire qu'il est conseillé de se donner la peine de multiplier la matrice donnée par sa présumée inverse afin de vérifier les calculs.

Deux annexes au chapitre II

I. Un schéma de programme

Dans le programme esquissé ci-après, on notera l'emploi de la tactique dite "du pivot maximal". Cette précaution permet, en général, de limiter les effets d'arrondi. (cf. annexe II).

```

DÉBUT {algorithme de Gauss-Jordan}
  LIRE  $m, n$                                      { $m$  nombre des lignes,  $n$  nombre des colonnes}
  LIRE  $A$                                            { $A$  : matrice  $m \times n$  à réduire}
   $i$  PPV 1,  $j$  PPV 1                                { $i$  indice de ligne,  $j$  indice de colonne}
   $fin$  PPV FAUX                                     { $fin$  : variable logique qui arrête le
  traitement                                         si toute les lignes restant à traiter sont nulles}

  TANT QUE  $i \leq m$  et  $fin = \text{FAUX}$ 
    TANT QUE  $j \leq n$  et  $A(i, j) = A(i+1, j) = \dots = A(m, j) = 0$ 
      |  $j$  PPV  $j+1$                                 {recherche de la  $i^{\text{ème}}$  colonne pivot}
    FIN TANT QUE
    SI  $j > n$                                        {alors  $A$  est réduite}
      ALORS  $fin$  PPV VRAI
      SINON
        DÉBUT
          déterminer  $p$  tel que :
          |  $A(p, j) = \max\{A(i, j), A(i+1, j), \dots, A(m, j)\}$ 
          SI  $p \neq i$  ALORS échanger les lignes  $A_i$  et  $A_p$ 
          |
          FIN SI                                     { $A(i, j)$  est le  $i^{\text{ème}}$  pivot}
          remplacer la ligne  $A_i$  par  $(1/A(i, j))A_i$ 
          POUR  $k = 1$  À  $k = m$ 
            | SI  $k \neq i$  ALORS
              |                                     remplacer la ligne  $A_k$  par  $A_k - A(k, j)A_i$ 
              |                                     {élimination de  $A(k, j)$ }
              FIN SI
            FIN POUR
          FIN
        FIN
      FIN SI
     $i$  PPV  $i+1$ 
  FIN TANT QUE
   $r$  PPV  $i-1$                                      { $A$  contient la réduite de la matrice lue au début}
  FIN                                             { $r$  est le rang de  $A$ }

```


II. Remarques sur les questions numériques

La mise en œuvre effective des méthodes d'élimination peut, dans la pratique, soulever des problèmes épineux. Qu'on en juge.

Exemple 1 : les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} 20x + 19y = 3,9 \\ 21x + 20y = 4,1 \end{cases}$$

forment un système de Cramer d'allure sympathique puisque son unique solution est évidente :

$$x = y = 0,1.$$

Modifions légèrement les coefficients du second membre :

$$\begin{cases} 20x + 19y = 4 \\ 21x + 20y = 4 \end{cases}$$

la solution devient :

$$x = 4, \quad y = -4.$$

Ainsi, une perturbation relative de l'ordre de $\frac{0,1}{4}$ sur les données se traduit par une variation relative du résultat de $\frac{4}{0,1}$. Soit 1 600 fois la perturbation initiale !

De même une légère modification des coefficients de x :

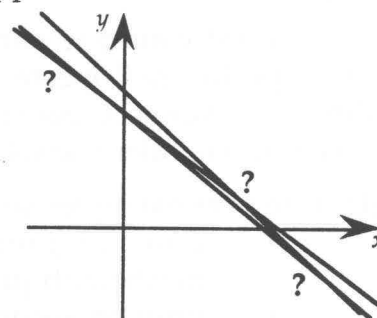
$$\begin{cases} 20x + 19,1y = 4 \\ 20,9x + 20y = 4 \end{cases}$$

donne une solution encore bien différente :

$$x \approx -0,38, \quad y \approx 0,6$$

Dans de telles conditions quelle valeur pourra-t-on accorder aux solutions calculées si les coefficients sont donnés par des valeurs approchées ?

Ce phénomène spectaculaire n'a rien de mystérieux, bien au contraire, il admet une explication géométrique immédiate. Les équations considérées sont celles de droites sécantes, mais dont les directions sont très voisines. Ainsi, le plus léger déplacement de l'une ou l'autre peut changer considérablement la position du point d'intersection.



Exemple 2 : le système suivant se résout de façon immédiate :

$$\begin{cases} 10^{-4}x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} -1 & 1 \\ \hline 1 & -10^{-4} \end{array}$$

Il vient :

$$\begin{cases} 0,9999x = 1 \\ 0,9999y = 0,9998 \end{cases}$$

On peut donner la solution avec une précision arbitrairement choisie.

$$\begin{cases} x = 1,0001\,0001\,\dots\,0001\,\dots \\ y = 0,9998\,9998\,\dots\,9998\,\dots \end{cases}$$

Imaginons que, pour effectuer ce calcul, nous n'ayons pas d'autre moyen qu'une calculatrice exprimant les nombres en virgule flottante avec trois chiffres significatifs, c'est-à-dire sous la forme :

$$m \times 10^k$$

avec :

- pour la mantisse : $1,00 \leq m \leq 9,99$
- pour l'exposant : $k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, par exemple :

$$2,39 \times 10^3 \text{ représente } 2390$$

mais aussi

$$2391, 2392, \dots, 2399, \dots, 2399,9, \dots, 2399,99, \dots$$

Suivons pas à pas le déroulement des calculs effectués, dans ces conditions, au moyen de l'algorithme de Gauss. Le premier candidat-pivot qui se présente est 10^{-4} , il est non nul il n'y a donc aucune raison de chercher plus loin. Le système prend alors successivement les formes suivantes :

$$\begin{cases} 10^{-4}x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 10^4 y = 10^4 \\ 9,99 \times 10^3 y = 9,99 \times 10^3 \end{cases}$$

et le résultat devient :

$$x = 0, y = 1 !$$

ce qui est aberrant.

Pour éviter une telle mésaventure, il suffit d'échanger les rôles des équations. On obtient alors :

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 10^{-4}x + y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ 9,99 \times 10^{-1}y = 9,99 \times 10^{-1} \end{cases}$$

On obtient ainsi :

$$x = 1 \text{ et } y = 1.$$

Ce qui, compte-tenu des moyens utilisés, est un résultat acceptable.

Il est clair que dans un ordinateur le phénomène a lieu à une autre échelle. Il n'empêche qu'il existe et l'on doit être en mesure de pouvoir en tenir compte. Afin de prévenir ce genre d'extravagance on choisit, à chaque pas, le pivot qui est maximum en valeur absolue – cette façon de faire n'étant pas une panacée.

Moralité : ces exemples soulèvent deux questions de natures très différentes :

- pour le premier : la stabilité des solutions – c'est un problème mathématique,
- pour le second : la fiabilité de l'algorithme relativement aux erreurs d'arrondi dues à la représentation des nombres en machine.

Ce type de préoccupations sort du cadre de ce cours. Il convient, cependant, d'être conscient qu'une méthode, mathématiquement irréprochable, peut fort bien conduire à des résultats faux si l'on en méconnaît les aspects numériques.

Chapitre III. Espaces vectoriels

§1. Définitions et règles de calcul

On désigne par K un corps quelconque qui, dans la pratique, sera le plus souvent celui des nombres réels : $\mathbf{R}$ ou celui des nombres complexes : $\mathbf{C}$.

Définition : on appelle *espace vectoriel* sur K tout ensemble E muni de deux lois de composition :

- l'une, *interne*, notée "+", confère à E une structure de groupe commutatif, à savoir :
 - (1) $\forall u \in E \quad \forall v \in E \quad \forall w \in E \quad u + (v + w) = (u + v) + w,$
 - (2) $\forall u \in E \quad \forall v \in E \quad u + v = v + u,$
 - (3) E contient un élément noté 0 tel que : $\forall u \in E \quad 0 + u = u,$
 - (4) Tout élément u de E admet un opposé : $-u$, tel que $u + (-u) = 0.$
- l'autre, *externe*, associe à tout couple (λ, u) de $K \times E$, un élément de E noté λu , et vérifie les propriétés suivantes :
 - (5) $\forall \lambda \in K \quad \forall u \in E \quad \forall v \in E \quad \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v,$
 - (6) $\forall \lambda \in K \quad \forall \mu \in K \quad \forall u \in E \quad (\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u,$
 - (7) $\forall \lambda \in K \quad \forall \mu \in K \quad \forall u \in E \quad \lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u,$
 - (8) $\forall u \in E \quad 1u = u.$

Vocabulaire :

Les éléments de E sont naturellement appelés les *vecteurs*.

On appelle K le *corps de base* et ses éléments les *scalaires*.

La loi interne est appelée *addition* et la loi externe *multiplication* par les scalaires.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté possible sur le corps de base, on parlera d'espace vectoriel et même simplement d'espace.

Lorsque le corps de base est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, il est commode de parler d'espace vectoriel réel ou complexe.

Exemples : par ailleurs, nous avons déjà noté que :

- les vecteurs de l'espace de la géométrie constituent un espace vectoriel réel, le choix d'une origine O permettant d'identifier tout point M au vecteur $\overrightarrow{OM}$.
- $\mathbf{R}^n$ est un espace vectoriel réel pour tout entier naturel n ,

On pourra aussi vérifier que :

- l'ensemble des polynômes à coefficients réels (respectivement complexes) est un espace vectoriel réel (respectivement complexe).
- si X est un ensemble, l'ensemble K^X des applications de E dans K , est un espace vectoriel sur K si on le munit des deux lois dites *naturelles* :

$$\begin{aligned} \forall f \in K^X \quad \forall g \in K^X \quad \forall x \in X \quad (f+g)(x) &= f(x) + g(x). \\ \forall \lambda \in K \quad \forall f \in K^X \quad \forall x \in X \quad (\lambda f)(x) &= \lambda f(x). \end{aligned}$$

En particulier, l'ensemble des suites de nombres réels (ou complexes) est un espace vectoriel réel (ou complexe).

- m et n étant deux entiers donnés, l'ensemble $K^{m \times n}$ des matrices à m lignes et n colonnes, à coefficients dans K , est un espace vectoriel sur K .

En outre, on remarquera que :

- C est un espace vectoriel sur R ,
- R est un espace vectoriel sur Q ,
- et plus généralement, tout corps est un espace vectoriel sur chacun de ses sous-corps.

* Conséquences directes de la définition

Les règles de calcul concernant la loi, notée $+$, sont celles d'un groupe commutatif, ce qui entraîne, en particulier :

(1-1) Proposition

$$\forall u \in E \quad \forall v \in E \quad \forall w \in E, \quad u + v = u + w \Rightarrow v = w,$$

$$\forall u \in E \quad \forall v \in E \quad \forall w \in E, \quad u + v = w + v \Rightarrow u = w,$$

$\forall u \in E \quad \forall v \in E$ l'équation $u + x = v$ admet une solution dans E , et une seule.

En outre, on a les propriétés qui suivent.

(1-2) Proposition :

$$(1) \quad \forall u \in E \quad 0u = 0,$$

$$(2) \quad \forall \lambda \in K \quad \lambda 0 = 0,$$

$$(3) \quad \lambda u = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ ou } u = 0,$$

$$(4) \quad (-1)u = -u.$$

Démonstration.

1) On a toujours :

$$1u = (1 + 0)u = 1u + 0u$$

et par suite :

$$0u = 0.$$

2) Si $\lambda \in K$ et si $u \in E$, on a :

$$\lambda u = \lambda(u + 0) = \lambda u + \lambda 0,$$

d'où il vient :

$$\lambda 0 = 0.$$

3) Réciproquement, si $\lambda u = 0$ et $\lambda \neq 0$, λ admet un inverse λ^{-1} et l'on a, d'une part:

$$\lambda^{-1}(\lambda u) = \lambda^{-1}0 = 0,$$

d'autre part :

$$\lambda^{-1}(\lambda u) = (\lambda^{-1}\lambda)u = 1u = u.$$

Ce qui entraîne :

$$u = 0.$$

4) On a d'une part :

$$[1 + (-1)]u = 1u + (-1)u,$$

d'autre part :

$$[1 + (-1)]u = 0u = 0$$

et ainsi :

$$u + (-1)u = 0.$$

On en conclut que :

$$(-1)u = -u$$



On en déduit sans difficulté les propriétés qui suivent.

(1-3) Proposition :

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in K \quad \forall \mu \in K \quad \forall u \in E \quad (\lambda - \mu)u &= \lambda u - \mu u, \\ \forall \lambda \in K \quad \forall u \in E \quad \forall v \in E \quad \lambda(u - v) &= \lambda u - \lambda v, \\ \forall \lambda \in K \quad \forall \mu \in K \quad \forall u \in E \quad [u \neq 0 \text{ et } \lambda u &= \mu u] \Rightarrow \lambda = \mu, \\ \forall \lambda \in K \quad \forall u \in E \quad \forall v \in E \quad [\lambda \neq 0 \text{ et } \lambda u &= \lambda v] \Rightarrow u = v. \end{aligned}$$

§ 2. Sous-espaces vectoriels

E désigne un espace vectoriel quelconque et K son corps de base.

Définition : soit F un sous-ensemble de E, on dit que F un *sous-espace vectoriel* de E si les lois de composition interne et externe de E induisent sur F une structure d'espace vectoriel sur K.

N.B. $\{0\}$ est toujours un sous-espace de E, ainsi que E lui-même.

(2-1) Proposition : un sous-ensemble F de E est un sous-espace vectoriel si, et seulement si, il vérifie les trois propriétés suivantes :

- (1) $0 \in F,$
- (2) $\forall u \in F \quad \forall v \in F \quad u + v \in F,$
- (3) $\forall \lambda \in K \quad \forall u \in E \quad \lambda u \in F.$

Démonstration : ces conditions sont évidemment nécessaires, montrons qu'elles sont suffisantes. On suppose qu'elles sont vérifiées. Les conditions (2) et (3) font que les deux lois de E induisent deux lois de F. Si 0 appartient à F, il est élément neutre pour l'addition dans F. Pour tout élément u de F, $(-1)u$ est l'opposé de u et appartient à F du fait de (3). Les autres propriétés étant vérifiées dans E elles le sont aussi dans F. Ce sous-ensemble est donc un espace vectoriel sur K. $\triangleleft$

Remarque : on vérifie facilement qu'un sous-ensemble F de E est un sous-espace vectoriel si, et seulement si, il vérifie les deux conditions suivantes :

- (1') $0 \in F,$
- (2') $\forall \lambda \in K \quad \forall u \in F \quad \forall v \in F \quad u + \lambda v \in F.$

Remarques : comme tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel est, ipso facto, un espace vectoriel, la proposition (2-1) fournit une caractérisation très commode de cette structure. Il est, en effet, toujours plus avantageux de vérifier la stabilité d'une partie d'un espace vectoriel connu, relativement aux deux lois, plutôt que de passer en revue, une à une, les huit propriétés que comporte la définition.

Exemples.

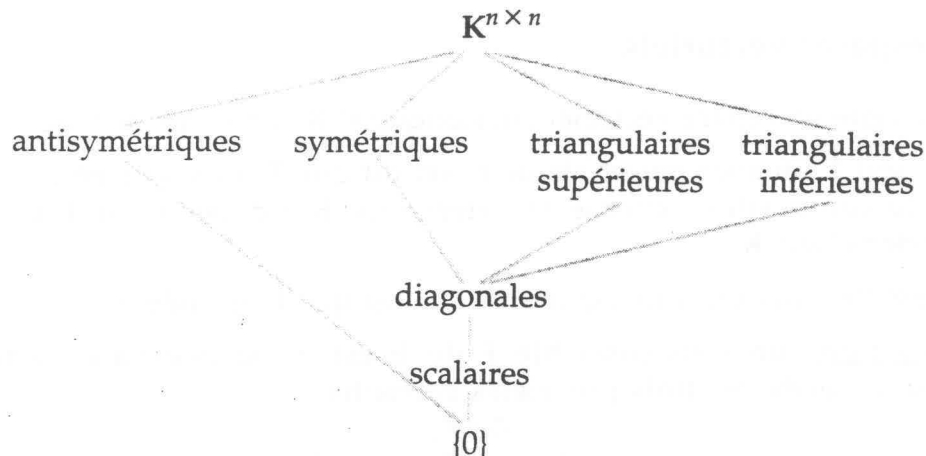
- L'ensemble des vecteurs $\overline{OM}$, où M décrit une droite ou un plan, passant par le point O, donné, est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des vecteurs de l'espace.
- Les polynômes à coefficients complexes, de degré 3 au plus, forment un sous-espace de $\mathbb{C}[X]$.
- Les fonctions numériques continues (respectivement dérivables) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ constituent un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^I$.

- L'ensemble des suites de nombres réels qui vérifient une relation de récurrence de la forme :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,$$

où a et b sont deux nombres réels donnés, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- Dans l'ensemble des matrices, carrées d'ordre n , à coefficients dans K , les inclusions suivantes correspondent à des sous-espaces vectoriels :



(2-2) Proposition : l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E . Plus généralement, l'intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration : immédiate. ◁

* Somme de sous-espaces et somme directe

Définition : on considère deux parties F et G de E . On appelle *somme* de F et G et l'on note $F+G$, la partie de E formée des éléments de la forme $u+v$, où u appartient à F et v appartient à G . Autrement dit, on a :

$$F+G = \{x \in E \mid \exists u \in F, \exists v \in G, x = u+v\}.$$

Il découle immédiatement de l'associativité de l'addition que cette opération sur l'ensemble des parties de E est associative :

$$\forall F \subseteq E \quad \forall G \subseteq E \quad \forall H \subseteq E \quad F+(G+H) = (F+G)+H.$$

(2-3) Proposition : la somme de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration : on considère deux sous-espaces F et G de E . Comme $0 = 0 + 0$ et 0 appartient à F et G , $F+G$ est non vide. Si x et y sont deux éléments de $F+G$, il existe deux éléments u et u' de F et deux éléments v et v' de G tels que :

$$x = u + v \quad \text{et} \quad y = u' + v'.$$

Si, de plus, λ est un scalaire, on a :

$$x + \lambda y = u + v + \lambda(u' + v') = (u + \lambda u') + (v + \lambda v').$$

Comme F et G sont des sous-espaces de E , $u + \lambda u'$ et $v + \lambda v'$ appartiennent respectivement à F et G . Il s'ensuit que :

$$x + \lambda y \in F + G,$$

$F+G$ est donc un sous-espace vectoriel de E . ◁

(2-4) Proposition : étant donnés deux sous-espaces vectoriels F et G de E , tout élément de $F + G$ s'exprime de façon **unique** comme somme d'un élément de F et d'un élément de G si, et seulement si :

$$F \cap G = \{0\}.$$

Définition : dans ces conditions, on dit que la somme $H = F + G$ est *directe* et l'on note alors :

$$H = F \oplus G.$$

Démonstration : soit x un élément de $F \cap G$, on peut aussi bien considérer que :

$$x = x + 0, \quad x \in F \text{ et } 0 \in G,$$

$$x = 0 + x, \quad 0 \in F \text{ et } x \in G.$$

Si la condition d'unicité est vérifiée, elle entraîne en particulier que $x = 0$. Comme on sait que 0 appartient à $F \cap G$, il s'ensuit que $F \cap G$ se réduit à 0 .

Réciproquement, soit x un élément de $F + G$, par définition x admet une telle décomposition. On considère des éléments u et u' de F , v et v' de G tels que :

$$x = u + v \text{ et } x = u' + v'.$$

Alors, on a :

$$u - u' = v' - v.$$

Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E , il vient :

$$u' - u \in F \text{ et } v - v' \in G.$$

Si $F \cap G = \{0\}$, on a donc :

$$u - u' = v' - v = 0$$

et par suite :

$$u = u' \text{ et } v = v'$$

la décomposition de x est alors unique. ◁

Définition : deux sous-espaces F et G de E sont dit *supplémentaires* si $E = F \oplus G$.

Exemples.

1) Soit V l'ensemble des vecteurs d'un plan, on définit une droite vectorielle D à partir de la donnée d'un vecteur v , non nul de V , comme suit :

$$D = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Deux droites vectorielles distinctes sont supplémentaires dans V .

2) Dans l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{n \times n}$ des matrices carrées d'ordre n , les matrices symétriques et les matrices antisymétriques forment deux sous-espaces supplémentaires. La vérification est immédiate, il suffit de penser que toute matrice carrée A s'exprime :

$$A = \frac{A + {}^t A}{2} + \frac{A - {}^t A}{2}.$$

3) Dans le même ordre d'idées, si E désigne l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans lui-même, les sous-ensembles E^+ et E^- formés : le premier des fonctions paires, le second des fonctions impaires, sont des sous-espaces supplémentaires de E . En effet, pour tout f de E et pour tout x , on a :

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Si F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E , on dit couramment : " G est un supplémentaire de F ". Cet usage est généralement commode. Cependant, un phénomène de dérive habituel conduit à parler "**du**" supplémentaire de ...

! Attention, de l'impropriété de langage à la faute majeure qui consisterait à prétendre qu'un supplémentaire est unique, il n'y a qu'un pas. Penser, par exemple, aux vecteurs du plan. Deux droites en sont toujours deux sous-espaces supplémentaires, pourvu qu'elles soient distinctes.

Généralisation : on peut définir la somme de plusieurs sous-espaces vectoriels :

$$E_1, E_2, \dots, E_n.$$

d'un même espace vectoriel. C'est l'ensemble des éléments de E qui s'expriment comme somme d'éléments des E_i :

$$E_1 + E_2 + \dots + E_n = \{x_1 + x_2 + \dots + x_n \mid x_i \in E_i, \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n\}.$$

On dit que cette somme est directe si, pour tout élément de ce sous-espace, cette décomposition est unique. On la note alors :

$$E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n.$$

! Pour que cette condition soit vérifiée, il ne suffit pas que les E_i forment deux-à-deux des sommes directes. Par exemple, on considère dans l'espace V des vecteurs d'un plan, trois droites vectorielles D_1 , D_2 et D_3 définies par trois vecteurs non nuls u , v et w . Si ces droites sont distinctes les unes des autres, leurs sommes deux à deux sont directes, alors que $D_1 + D_2 + D_3$ n'est pas une somme directe. En effet, il existe toujours entre u , v et w une relation de la forme :

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0.$$

§ 3. Systèmes générateurs, systèmes libres, bases

On désigne encore par E un espace vectoriel quelconque et par K son corps de base.

Remarque préliminaire : dans ce qui suit, nous aurons à considérer des décompositions de vecteurs sous la forme suivante :

$$x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n,$$

où $u_1, u_2, \dots, u_n$ sont des vecteurs donnés et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des scalaires. Il est clair que, si l'on se préoccupe de l'unicité d'une telle présentation, il n'est pas indifférent de prendre en compte, l'existence de répétitions éventuelles d'un même vecteur u_i , c'est pourquoi nous serons amenés à donner les u_i sous forme de familles ou de suites. Cependant, l'ordre des u_i important peu, on préfère, en général, parler de "systèmes de vecteurs". On entend par là des suites définies à l'ordre des termes près. Cette convention est commode, dans la mesure où elle permet de supposer que l'indexation est celle qui offre la plus grande commodité d'écriture et d'expression.

* Systèmes générateurs

Définition : soit $\mathcal{S}$ un sous-ensemble de E , on appelle sous-espace vectoriel *engendré* par $\mathcal{S}$ dans E et l'on note $\text{esp}(\mathcal{S})$ le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $\mathcal{S}$.

Remarque : cette définition est bien cohérente car l'ensemble X des sous-espaces de E qui contiennent $\mathcal{S}$ contient E . Il est, de ce fait, non vide. On peut donc considérer l'intersection de tous ces sous-espaces :

$$\bigcap_{\mathcal{S} \subseteq F} F.$$

Il s'agit, bien évidemment, du plus petit sous-espace de E qui contient $\mathcal{S}$.

Il est clair que :

- $\text{esp}(\emptyset) = \{0\}$;
- si $\mathcal{S}$ est un sous-espace de E , alors $\text{esp}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$;
- si $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T} \subseteq E$ alors $\text{esp}(\mathcal{S}) \subseteq \text{esp}(\mathcal{T})$.

Définition : soit $\mathcal{S}$ un sous-ensemble **non vide** de E , on considère un élément x de E , on dit que x est une *combinaison linéaire* d'éléments de $\mathcal{S}$, s'il existe des vecteurs :

$$u_1, u_2, \dots, u_n \text{ de } \mathcal{S}$$

et des scalaires :

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

tels que :

$$x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n.$$

(3-1) Proposition : soit $\mathcal{S}$ un sous-ensemble non vide de E , le sous-espace engendré par $\mathcal{S}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de $\mathcal{S}$.

Démonstration : soit F l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de $\mathcal{S}$, comme $\text{esp}(\mathcal{S})$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient $\mathcal{S}$, il contient toutes les combinaisons linéaires des éléments de $\mathcal{S}$. On a donc :

$$F \subseteq \text{esp}(\mathcal{S}).$$

La somme de deux éléments de F est encore une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{S}$, elle appartient à F . De même, le produit d'un élément de F par un scalaire appartient à F . Cette partie de E est donc un sous-espace vectoriel de E , elle contient $\mathcal{S}$, on a donc :

$$\text{esp}(\mathcal{S}) \subseteq F.$$

La proposition est alors démontrée. ◁

Définition : soit $\mathcal{S}$ une partie de E , on dit que $\mathcal{S}$ engendre E si le sous-espace de E engendré par $\mathcal{S}$ est E tout entier.

Dans ces conditions, tout élément de E est combinaison linéaire, à coefficients dans K , d'éléments de $\mathcal{S}$.

Exemple.

- Si E désigne l'espace des vecteurs de la géométrie, le sous-espace engendré par un élément u est une droite vectorielle si $u \neq 0$ et $\{0\}$ si $u = 0$.
Plus généralement, si E est un espace vectoriel quelconque, le sous-espace vectoriel engendré par un élément u de E est l'ensemble des multiples de u . Autrement dit :
$$\text{esp}(u) = \{\lambda u \mid \lambda \in K\} = Ku.$$

Par analogie avec la géométrie, un tel ensemble est appelé une *droite* si u est non nul.
- $(1, X, X^2, X^3)$ engendre l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 3.

N.B. Si, dans ce qui précède, on remplace la donnée d'un sous-ensemble par celle d'un système fini $\mathcal{S} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, alors toute combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{S}$ s'écrit :

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n.$$

On peut, en effet, toujours ajouter des termes dont le coefficient est nul et rassembler tous les termes qui sont des multiples d'un même vecteur u_i . Ceci ne change rien à la proposition (3-1), ni à la définition qui la suit. On parlera donc sans problème de *système générateur*.

* Systèmes libres

Définition : on considère un système $\mathcal{S}$ d'éléments de E .

1) Si $\mathcal{S}$ est **fini**, $\mathcal{S} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, on dit que $\mathcal{S}$ est *libre* si toute équation de la forme :

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0,$$

où les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont des scalaires, admet pour unique solution, celle triviale, c'est-à-dire telle que :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Dans ces conditions, on dit aussi que les éléments $u_1, u_2, \dots, u_n$ sont *linéairement indépendants*. Dans le cas contraire, on dit $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est un *système lié* ou que les éléments $u_1, u_2, \dots, u_n$ sont *linéairement dépendants*.

2) Si $\mathcal{S}$ est **infini**, on dit que $\mathcal{S}$ est un système libre si tout sous-système **fini** de $\mathcal{S}$ est libre.

Remarque : un système formé d'un vecteur u est lié si $u = 0$, il est libre si $u \neq 0$. En effet, on a montré que $\lambda u = 0$ et $u \neq 0$ entraîne $\lambda = 0$.

Ici, parler de système n'est pas indifférent car si u est non nul (u) est un système libre, en revanche (u, u) est à l'évidence un système lié.

Exemples

- Dans l'espace de la géométrie, deux vecteurs non colinéaires, trois vecteurs non coplanaires constituent des systèmes libres.
- Dans $\mathbb{C}$, considéré comme espace vectoriel réel, le système $(1, j)$ est libre. En revanche, $(1, j, j^2)$ est lié car on sait que $1 + j + j^2 = 0$.
- Dans l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, les éléments :

$$P_1 = 2 - X + X^3, \quad P_2 = X, \quad P_3 = 2 + X^3$$

sont tels que

$$P_1 + P_2 - P_3 = 0,$$

ils sont donc linéairement dépendants.

(3-2) Proposition

- (1) tout système contenant un système lié est un système lié,
- (2) tout élément d'un système libre est non nul,
- (3) tout sous-système d'un système libre est un système libre.

Démonstration

1) Soit $\mathcal{T}$ un sous-système d'un système de vecteurs $\mathcal{S}$, donné, toute relation de la forme :

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0,$$

vérifiée par les éléments de $\mathcal{T}$, est aussi une relation entre les éléments de $\mathcal{S}$.

2) Si un système donné contient 0, il contient un sous-système lié, il est donc lié.

3) L'assertion (3) est la contraposée de (1). ◀

N.B. La dernière propriété nous assure que le **système vide** : $\emptyset = ()$, est libre !

A première vue, cette assertion pourrait passer pour anecdotique, voire farfelue. Il n'empêche qu'elle est vraie. De plus, elle est utile (cf. §4).

(3-3) Lemme : un système de vecteurs d'un espace vectoriel est lié si, et seulement si, l'un, au moins, de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Démonstration : on considère un système $\mathcal{S}$ de vecteurs de E . Si $\mathcal{S}$ est lié, il existe des vecteurs :

$$u_1, u_2, \dots, u_n \text{ de } \mathcal{S}$$

et des scalaires :

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n,$$

non tous nuls, tels que :

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0.$$

On peut toujours supposer que λ_1 est non nul. On a alors :

$$\lambda_1 u_1 = -\lambda_2 u_2 - \dots - \lambda_n u_n.$$

Le coefficient λ_1 étant non nul, on peut multiplier les deux membres de cette relation par le scalaire $\lambda = \lambda_1^{-1}$. On obtient ainsi :

$$u_1 = -(\lambda \lambda_2) u_2 - \dots - (\lambda \lambda_n) u_n.$$

Réciproquement, si, par exemple, u_1 est combinaison des autres éléments de $\mathcal{S}$, alors on a :

$$u_1 = \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n.$$

Ce qui donne la relation :

$$(-1)u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$$

qui fait, puisque 1 est non nul, que $\mathcal{S}$ est un système lié. ◁

Remarque : dans les conditions ci-dessus, une telle propriété n'est pas forcément vraie pour tout vecteur de $\mathcal{S}$. Considérons, par exemple, les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^2$:

$$u_1 = (1, 0), \quad u_2 = (-1, 0) \quad \text{et} \quad u_3 = (0, 1).$$

Ils sont linéairement dépendants, car on a :

$$u_1 + u_2 + 0u_3 = 0.$$

Pourtant, il est clair que u_3 n'est pas combinaison linéaire de u_1 et de u_2 .

* Bases

Définition : on appelle *base* d'un espace vectoriel E , tout système libre qui engendre E .

Exemples :

- deux vecteurs non colinéaires du plan forment une base des vecteurs du plan et trois vecteurs non coplanaires forment une base des vecteurs de l'espace ;
- $(1, i)$ est une base de l'espace vectoriel réel $\mathbb{C}$;
- $\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, il admet pour base le système formé des vecteurs suivants :

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

qu'on appelle la *base canonique* de $\mathbb{K}^n$; tout vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ admet sur cette base l'unique décomposition suivante : $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$.

(3-4) Proposition : un système fini $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E si, et seulement si, tout élément de E s'exprime, de façon unique, comme combinaison linéaire (à coefficients dans $\mathbb{K}$) des éléments de $\mathcal{B}$.

Démonstration : soit x un élément de E , si $\mathcal{B}$ est une base, alors $\mathcal{B}$ engendre E , x est une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$. Il existe donc des scalaires :

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n,$$

tels que :

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n.$$

Considérons des scalaires :

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \text{ et } \lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_n,$$

tels que :

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n \text{ et } x = \lambda'_1 e_1 + \lambda'_2 e_2 + \dots + \lambda'_n e_n.$$

Dans ces conditions, on a :

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = \lambda'_1 e_1 + \lambda'_2 e_2 + \dots + \lambda'_n e_n.$$

et par suite :

$$(\lambda_1 - \lambda'_1)e_1 + (\lambda_2 - \lambda'_2)e_2 + \dots + (\lambda_n - \lambda'_n)e_n = 0.$$

Les vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_n$ étant linéairement indépendants, il vient :

$$\lambda_1 - \lambda'_1 = \lambda_2 - \lambda'_2 = \dots = \lambda_n - \lambda'_n = 0,$$

ce qui démontre l'unicité des coefficients de cette combinaison linéaire.

Réciproquement, l'existence pour tout x appartenant à E , d'une telle décomposition entraîne que $\mathcal{B}$ engendre E . L'unicité, pour 0, en particulier, montre que la seule relation de la forme :

$$0 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$$

existant entre les éléments de $\mathcal{B}$ est celle, "triviale", où tous les scalaires sont nuls. $\triangleleft$

Définition : dans les conditions de la proposition ci-dessus, les scalaires :

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

sont appelés les *coordonnées* de x sur la base $\mathcal{B}$.

Il sera parfois avantageux de pouvoir caractériser l'appartenance d'un vecteur à un sous-espace au moyen de la proposition qui suit.

(3-5) Lemme : soit $\mathcal{L} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ un système **libre** dans E , x un élément de E , on note : $\mathcal{L}' = (u_1, u_2, \dots, u_n, x)$. Le vecteur x appartient au sous-espace de E engendré par $\mathcal{L}$ si, et seulement si, $\mathcal{L}'$ est lié.

Démonstration : soit F le sous-espace de E engendré par $\mathcal{L}$, si x appartient à F , x est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{L}$ et la proposition (3-3) montre que $\mathcal{L}'$ est lié. Réciproquement, si $\mathcal{L}'$ est lié, il existe des scalaires, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda$ non tous nuls, tels que :

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n + \lambda x = 0.$$

Comme $\mathcal{L}$ est libre, λ est non nul et alors :

$$x = -(\lambda^{-1}\lambda_1)u_1 - \dots - (\lambda^{-1}\lambda_n)u_n.$$

Il s'ensuit que x appartient à F . $\triangleleft$

Remarque : on peut vérifier que l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels admet pour base le système infini :

$$1, X, X^2, \dots, X^n, \dots$$

Il est donc clair qu'un espace vectoriel n'admet pas toujours une base finie. Néanmoins, la proposition 3-4 reste vraie dans tous les cas. Il importe, cependant, de retenir qu'une combinaison linéaire est le résultat d'une suite d'opérations algébriques, elle comporte donc toujours un nombre fini de termes. En conséquence, un vecteur ne peut avoir qu'un nombre fini de coordonnées non nulles.

§4. Espaces vectoriels de dimension finie

On désigne toujours par E un espace vectoriel quelconque sur un corps K .

* Lemmes "techniques"

(4-1) Lemme : on considère un système libre fini $\mathcal{L} = (u_1, u_2, \dots, u_r)$ de r éléments de E et un système générateur $\mathcal{G}$ de E . Si $\mathcal{L}$ n'est pas une base de E , il existe u_{r+1} appartenant à $\mathcal{G}$ tel que :

$$(u_1, \dots, u_r, u_{r+1})$$

soit un système libre de E .

Démonstration : on note F le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{L}$. Si $\mathcal{G}$ était contenu dans F , on aurait :

$$E = \text{esp}(\mathcal{G}) \subseteq F$$

F serait alors égal à E et $\mathcal{L}$ serait une base de E , ce qui est contraire aux hypothèses. Il existe donc un élément u_{r+1} de $\mathcal{G}$ qui n'appartient pas à F . Le lemme (3-5) montre que :

$$(u_1, \dots, u_r, u_{r+1})$$

est un système libre. ◁

(4-2) Lemme de complétion

Si $\mathcal{L} = (u_1, u_2, \dots, u_r)$ est un système libre fini d'éléments de E et $\mathcal{G}$ un système générateur fini de E , il existe des éléments de $\mathcal{G}$:

$$u_{r+1}, \dots, u_{r+p}$$

tels que :

$$\mathcal{L}_k = (u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_{r+k})$$

soit un système libre pour $k = 1$ à $k = p$ et :

$$\mathcal{L}_p = (u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_{r+p})$$

soit une base de E .

Démonstration : on construit la suite des $\mathcal{L}_k$ par récurrence sur k . On pose $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$. On considère un entier naturel k et l'on suppose que $\mathcal{L}_k$ est définie. Si $\mathcal{L}_k$ est une base, alors $p = k$. Dans le cas contraire, le lemme précédent montre qu'il existe u_{r+k+1} , appartenant à $\mathcal{G}$ et tel que $\mathcal{L}_{k+1} = (u_1, \dots, u_{r+k+1})$ soit un système libre. Cette construction peut se poursuivre tant que $\mathcal{L}_k$ n'est pas une base de E . Comme $\mathcal{G}$ est fini la suite des $\mathcal{L}_k$ est finie et son dernier terme est une base de E . ◁

Dans le cas particulier où $\mathcal{L}$ est vide, on obtient l'énoncé qui suit.

(4-3) Lemme d'extraction

Si $\mathcal{G}$ est un système générateur fini de E , il existe des éléments de $\mathcal{G}$:

$$u_1, \dots, u_k,$$

tels que :

$$\mathcal{L} = (u_1, \dots, u_k)$$

soit une base de E .

(4-4) Lemme d'échange

Si $\mathcal{L}$ est un système libre fini de r éléments de E et si $\mathcal{S}$ est un système générateur de E , constitué de m éléments, alors :

- 1) $r \leq m$,
- 2) il existe $m - r$ éléments de $\mathcal{S}$ qui, ajoutés aux éléments de $\mathcal{L}$ forment un système générateur de E .

Démonstration : on démontre ce résultat par récurrence sur r . On note :

$$\mathcal{L} = (u_1, \dots, u_r).$$

Si $r = 0$, il n'y a rien à démontrer, on se place donc dans le cas où $r \geq 1$. On suppose que la propriété est vraie pour toute famille libre à $r - 1$ éléments. Il existe $m - r + 1$ éléments $v_r, \dots, v_m$ de $\mathcal{S}$, tels que $(u_1, \dots, u_{r-1}, v_r, \dots, v_m)$ soit un système générateur. Ce qui entraîne l'existence de scalaires :

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}, \beta_r, \dots, \beta_m$$

tels que :

$$u_r = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{r-1} u_{r-1} + \beta_r v_r + \dots + \beta_m v_m.$$

Comme $\mathcal{L}$ est une famille libre, l'un au moins des coefficients β_i est non nul. Il est donc nécessaire que r soit au plus égal à m . On peut toujours supposer que $\beta_r \neq 0$ et poser $\beta = -\beta_r^{-1}$, on a donc :

$$v_r = \beta \alpha_1 u_1 + \dots + \beta \alpha_{r-1} u_{r-1} - \beta u_r + \beta \beta_{r+1} v_{r+1} + \dots + \beta \beta_m v_m.$$

Ainsi, v_r s'exprime comme combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_r, v_{r+1}, \dots, v_m$, ce qui fait que

$$(u_1, \dots, u_r, v_{r+1}, \dots, v_m)$$

est un système générateur de E .

Le lemme est alors démontré. ◀

N.B. Des modifications mineures de forme permettent d'étendre la validité de cet énoncé au cas où $\mathcal{S}$ est infini.

* La notion de dimension

C'est la condition qui apparaît comme discriminante dans la conclusion des lemmes 4-2 et 4-3 qu'on retrouve dans la définition qui suit.

Définition : on dit que E est de *dimension finie*, s'il admet un système générateur fini. Dans le cas contraire, on dit que E est de *dimension infinie*.

Des lemmes 4-2 et 4-3 on déduit immédiatement la proposition qui suit.

(4-5) Proposition : si E est de dimension finie, on a les propriétés suivantes.

1. Tout système libre fini d'éléments de E peut être complété, en une base de E , par des éléments d'un système générateur fini arbitrairement choisi.
2. Tout système générateur fini de E contient une base de E .

(4-6) Proposition : si E est de dimension finie, un système libre de E a toujours un nombre fini d'éléments au plus égal à celui d'un système générateur quelconque.

Démonstration : soit $\mathcal{L}$ un système libre de E et $\mathcal{G}$ un système générateur fini de E . Le lemme (4-4) montre que tout sous-système fini de $\mathcal{L}$ contient au plus autant d'éléments que $\mathcal{G}$. La conclusion en découle immédiatement. $\triangleleft$

(4-7) Théorème de la dimension : si un espace vectoriel est de dimension finie, toutes ses bases sont finies et elles ont le même nombre d'éléments.

Définition : ce nombre s'appelle la *dimension* de E . On le note $\dim E$.

Démonstration : on considère deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E . Comme ces systèmes sont libres, la proposition précédente montre qu'ils sont finis. Soit n et n' le nombre des éléments de $\mathcal{B}$ et de $\mathcal{B}'$. Comme $\mathcal{B}$ est libre et $\mathcal{B}'$ engendre E , la même proposition prouve que $n \leq n'$. Les rôles de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ étant symétriques, on a aussi prouvé que $n' \leq n$. $\triangleleft$

On retiendra tout spécialement les résultats suivants.

(4-8) Théorème : si E est de **dimension n** , alors :

- (1) tout système **libre** de E contient **au plus n vecteurs** ;
- (2) tout système **générateur** de E contient **au moins n vecteurs** ;
- (3) tout système **libre** de **n vecteurs** est une **base** ;
- (4) tout système **générateur** de **n vecteurs** est une **base**.

Démonstration : ces propriétés sont des conséquences de la proposition 4-5 et du théorème de la dimension. Pour (1) et (2) c'est immédiat. La proposition (3) découle plus précisément du point 4-5-1 : tout système libre de n éléments, peut être complété en une base qui a le même nombre d'éléments que lui. Enfin, la proposition (4) se déduit du point 4-5-2 : tout système générateur de E de n éléments contient une base qui a le même nombre d'éléments que lui. $\triangleleft$

Nous sommes alors en mesure de supprimer de la proposition 4-5 les hypothèses de finitude qui, désormais, sont superflues. En effet, la proposition 4-8-1 nous assure que dans un espace vectoriel de dimension finie, tout système libre est fini. Le procédé de construction du lemme 4-2 ne peut donc produire que des suites finies. Ceci, sans qu'il soit nécessaire de supposer fini le système générateur considéré. On obtient ainsi deux théorèmes essentiels.

(4-9) *Théorème de la base incomplète*

Tout système libre d'éléments d'un espace vectoriel de dimension finie peut être complété en une base.

(4-10) *Théorème de la base extraite*

Tout système générateur d'un espace de dimension finie en contient une base.

Exemples.

- L'espace vectoriel $\{0\}$ est de dimension nulle.
- Les vecteurs d'un plan forment un espace de dimension 2.
- Les vecteurs de l'espace de la géométrie forment un espace de dimension 3.
- $\mathbf{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension n .
- $\mathbf{C}$ est un espace vectoriel réel de dimension 2 car il admet pour base : $(1, i)$.
- L'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré n , au plus, est un espace vectoriel de dimension $n + 1$ sur $\mathbf{R}$ car il admet pour base : $(1, X, \dots, X^n)$.
- L'espace vectoriel de tous les polynômes à coefficients réels n'est pas de dimension finie sur $\mathbf{R}$. En effet, pour tout entier n , le système $(1, X, \dots, X^n)$ est libre.

Convention : il est commode d'appeler respectivement *droites* et *plans* les espaces vectoriels de dimension 1 et 2.

*** Quelques mots sur la dimension infinie**

Au vu de ce qui précède, on pourrait établir qu'un espace vectoriel de dimension infinie admet des familles libres infinies. En fait, est possible de démontrer que **tout espace vectoriel admet une base** – finie ou infinie. Dans le cas le plus général, on est conduit à faire appel à l'axiome du choix. La méthode suivie ne livre aucun procédé de construction d'une base.

Si, pour certains espaces, on peut exhiber plus ou moins facilement une base – c'est le cas des polynômes – il n'en va pas toujours ainsi. Par exemple, on sait que $\mathbf{R}$ est un espace vectoriel de dimension infinie sur $\mathbf{Z}$, cependant, on n'en connaît explicitement aucune base.

§ 5. Sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie

(5-1) Théorème : si est F un sous-espace d'un espace vectoriel E de dimension finie alors :

- (1) F est un espace vectoriel de dimension finie,
- (2) $\dim F \leq \dim E$,
- (3) si $\dim F = \dim E$ alors $F = E$.

Démonstration : comme tout système libre de F est aussi un système libre de E . Le procédé de construction du lemme 4-2 appliqué à F , avec $\mathcal{S} = F$, ne peut donc produire que des suites comportant un nombre d'éléments inférieur à la dimension de E , ce qui justifie les assertions (1) et (2).

Si la dimension de F est égale à celle de E , toute base de F est un système libre de E qui compte autant d'éléments que la dimension de E . La proposition 4-8-3 montre que c'est une base de E . $\triangleleft$

(5-2) Proposition : étant donnés deux sous-espaces de dimension finie F et G , d'un même espace vectoriel E , une base $\mathcal{C}$ de F et $\mathcal{C}'$ de G ; E est la somme directe de F et G si, et seulement si, la réunion de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ est une base de E .

Démonstration : posant :

$$\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_r), \quad \mathcal{C}' = (e_{r+1}, \dots, e_n) \text{ et } \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n),$$

il est immédiat que $E = F + G$ si, et seulement si, $\mathcal{B}$ engendre E .

1. Si $E = F \oplus G$, on considère des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que :

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0.$$

On a :

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r = -\lambda_{r+1} e_{r+1} - \dots - \lambda_n e_n.$$

Les deux membres de cette égalité expriment, à gauche un élément de F et à droite un élément de G . La somme de F et G étant directe, on a $F \cap G = \{0\}$, et ainsi :

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r = 0 \text{ et } -\lambda_{r+1} e_{r+1} - \dots - \lambda_n e_n = 0$$

Comme $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont libres, il vient :

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_r = \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0.$$

Il s'ensuit que $\mathcal{B}$ est libre.

2. Si $\mathcal{B}$ est une base de E , on considère un élément u de $F \cap G$. Il existe des scalaires :

$$\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n = 0.$$

tels que :

$$u = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r \text{ et } u = \lambda_{r+1} e_{r+1} + \dots + \lambda_n e_n.$$

On a donc :

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r - \lambda_{r+1} e_{r+1} - \dots - \lambda_n e_n = 0$$

Comme $\mathcal{B}$ est libre, on a :

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_r = -\lambda_{r+1} = \dots = -\lambda_n = 0.$$

u est donc nul. Il s'ensuit que $F \cap G = \{0\}$, c'est-à-dire que $E = F \oplus G$. $\triangleleft$

(5-3) Corollaire : soit F et G deux sous-espaces de dimension finie d'un même espace vectoriel ; si la somme de F et G est directe alors :

$$\dim F \oplus G = \dim F + \dim G.$$

Démonstration : c'est une conséquence immédiate de la proposition précédente. $\triangleleft$

(5-4) Théorème : dans un espace vectoriel de dimension finie, tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire.

Démonstration : soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace de E , comme E est de dimension finie, F est aussi de dimension finie. Il existe une base $(e_1, \dots, e_r)$ de F , on peut la compléter en une base $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ de E . Soit G le sous-espace de E engendré par $(e_{r+1}, \dots, e_n)$, la proposition 5-2 justifie que :

$$E = F \oplus G. \quad \blacktriangleleft$$

(5-5) Théorème : si F et G sont deux sous espaces de dimension finie d'un même espace vectoriel, alors :

$$\dim F + G = \dim F + \dim G - \dim F \cap G.$$

Démonstration : le théorème précédent permet de considérer un sous-espace H , supplémentaire de $F \cap G$ dans G . Comme :

$$G = (F \cap G) + H,$$

on a :

$$F + G = F + (F \cap G) + H.$$

Comme de plus $F \cap G$ est une partie de F , il vient :

$$F + (F \cap G) = F$$

et par suite :

$$F + G = F + H$$

Comme $H \subseteq G$, on a :

$$F \cap H \subseteq F \cap G$$

et comme il est évident que :

$$F \cap H \subseteq H,$$

il vient :

$$F \cap H \subseteq (F \cap G) \cap H = \{0\}.$$

On a donc :

$$F \cap H = \{0\}.$$

Il est alors établi que :

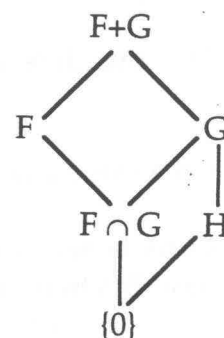
$$F + G = F \oplus H$$

Le corollaire 5-3 justifie les deux relations suivantes :

$$\dim G = \dim(F \cap G) + \dim H \quad \text{et} \quad \dim(F + G) = \dim F + \dim H.$$

L'égalité avancée s'en déduit immédiatement. $\blacktriangleleft$

Remarque : les propriétés 5-1-3 et 5-5 sont à retenir tout spécialement car elles permettent de justifier des égalités entre sous-espaces de façon très concise.



On notera que P est une matrice inversible. En effet, si l'on note P' la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$, alors on a :

$$X = PX' \text{ et } X' = P'X$$

et par suite :

$$X = PP'X.$$

Cette égalité étant vérifiée pour tout vecteur x de E , elle vaut en particulier pour les vecteurs e_i . On en déduit immédiatement que $PP' = I$. On échange les rôles de $\mathcal{B}$ et de $\mathcal{B}'$, il vient : $P'P = I$. La matrice P est donc inversible et $P' = P^{-1}$.

Dans la pratique, il est commode

- de présenter $\mathcal{B}$ comme l' "*ancienne base*" et $\mathcal{B}'$ comme la "*nouvelle base*",
- d'appeler P la *matrice de passage*
- de dire que les expressions 5-1 et 5-2 sont les "*formules de passage*" de l' "*ancienne base*" à la "*nouvelle*".

Il n'y a pas lieu d'hésiter sur le fait que les colonnes de la matrice de passage sont formées des coordonnées des vecteurs de "la nouvelle base" sur "l'ancienne". C'est, en effet, la seule façon naturelle de définir les données du problème posé.

Il suffit alors de retenir que :

**"les formules de passage expriment
les anciennes coordonnées en fonctions des nouvelles".**

§ 7. Rang

On désigne par E un espace vectoriel sur un corps K .

Définition : on appelle *rang* d'un système de vecteurs de E la dimension du sous-espace vectoriel de E engendré par celui-ci

Désormais, E est de dimension finie égale à m . On en distingue une base :

$$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_m).$$

La donnée d'un système fini de n vecteurs de E :

$$\mathcal{A} = (a^1, a^2, \dots, a^n)$$

équivalent à celle d'une matrice à n lignes et m colonnes :

$$A = [a_{ij}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

si l'on convient que

$$a^j = a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + \dots + a_{mj}e_m \text{ pour } j = 1, 2, \dots, n.$$

En pratique, ceci revient à identifier le vecteur a^j avec la matrice-colonne A^j .

Dans ces conditions, si b est un élément de E et $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont des scalaires, l'équation vectorielle suivante :

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + \dots + x_n a^n = b.$$

est équivalente à l'équation matricielle :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

qu'on condense sous la forme :

$$AX = B.$$

On peut toujours considérer cette expression comme un système de m équations linéaires à n inconnues dans K . Il est alors clair que :

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \text{ est solution de } AX = B \Leftrightarrow b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n.$$

Il apparaît ainsi que $\mathcal{A}$ est une base de E si, et seulement si, $AX = B$ est un système de Cramer pour tout B , c'est-à-dire si la matrice A est inversible. On a donc prouvé la proposition qui suit.

(7-1) **Théorème** : si A désigne la matrice d'un système de vecteurs $\mathcal{A}$ d'un espace vectoriel de dimension finie, on a :

$$A \text{ est une base de } E \Leftrightarrow A \text{ est inversible.}$$

Autrement dit, toute matrice carrée A , d'ordre n , inversible, s'interprète comme la matrice d'un changement de base de E .

* Extraction d'une base d'un système de vecteurs

Le théorème de la base extraite nous assure que, de tout système de vecteurs, on peut extraire une base de l'espace qu'il engendre. Pour un système fini, exprimé sur une base donnée, cette opération peut se faire simplement. On applique les méthodes d'élimination exposées au chapitre II. Tout se fonde sur la remarque suivante.

Soit R une matrice de format $m \times n$, réduite échelonnée, de rang r – en pratique la réduite de Gauss-jordan d'une matrice donnée – une permutation de ses colonnes lui donne la forme suivante :

$$R = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & a' & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & b & b' & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & c & c' & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & l & l' & \dots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \end{array} \right]$$

où il est clair que :

- les r colonnes-pivots forment une base du sous-espace engendré, dans K^m , par les colonnes de R .
- les r lignes des pivots forment un système libre de K^n .

N.B. Ces considérations s'appliquent aussi bien si l'on considère la matrice réduite par l'algorithme de Gauss. La sous-matrice I_r est alors remplacée par une matrice triangulaire supérieure dont les termes diagonaux sont non nuls.

Revenons au système de vecteurs $\mathcal{A}$, considéré plus haut et à sa matrice A . Une opération sur les lignes de A conduit à une matrice réduite R qui est telle que :

$$R = PA$$

où P désigne, on le sait, une matrice carrée d'ordre m , inversible (cf. chapitre II 15-3). Cette relation est la conjonction des égalités suivantes entre matrices-colonnes :

$$R_j = PA_j \text{ pour } j = 1, \dots, n$$

ou encore :

$$A_j = P^{-1}R_j \text{ pour } j = 1, \dots, n.$$

Il découle de la proposition 7-1 que P^{-1} s'interprète comme une matrice de changement de base de E et les expressions ci-dessus comme les formules de passage correspondantes. Les colonnes de la matrice R expriment donc les vecteurs de A après un changement de base dont la matrice est P^{-1} . La remarque faite plus haut nous assure que les vecteurs de $\mathcal{A}$, correspondant aux colonnes contenant les pivots de R , forment une base du sous-espace de E engendré par $\mathcal{A}$.

En résumé on a justifié l'énoncé qui suit.

(7-2) Proposition : soit E un espace vectoriel de dimension m , rapporté à une base donnée, on considère un système $\mathcal{A}$ de vecteurs de E et l'on note A la matrice associée. Si l'on transforme A en une matrice réduite par une opération sur ses lignes, alors les vecteurs de $\mathcal{A}$, correspondant aux colonnes contenant les pivots d'élimination, forment une base du sous-espace de E engendré par $\mathcal{A}$.

En conséquence, le rang de $\mathcal{A}$ est égal au nombre des pivots d'élimination de A .

Illustration : on suppose que $m = 4$ et $n = 7$ et que pour $\mathcal{A}$ donné, la réduction de Gauss, (resp. de Gauss-Jordan) ait transformé la matrice A en la matrice réduite :

1	2	3	4	5	6	7
1	2	1	5	4	1	6
0	0	1	2	4	1	5
0	0	0	0	0	1	3
0	0	0	0	0	0	0

1	2	3	4	5	6	7
1	2	0	3	0	0	1
0	0	1	2	4	0	2
0	0	0	0	0	1	3
0	0	0	0	0	0	0

Avec les notations ci-dessus, on lit directement sur ces deux tableaux que :

- $\mathcal{A}$ est de rang trois
- les vecteurs a_1, a_3 et a_6 forment une base du sous-espace engendré par $\mathcal{A}$.

On lit, aussi, la décomposition des autres vecteurs sur la base ainsi construite – à savoir, pour le second :

$$a_2 = 2a_1, a_4 = 3a_1 + 2a_3, a_5 = 4a_3, a_7 = a_1 + 2a_3 + 3a_6.$$

C'est sur ce point, en particulier, que la méthode de Gauss-Jordan se révèle bien plus efficace la méthode de Gauss.

* Rang d'une matrice

Ce que nous venons de montrer confirme le caractère intrinsèque du rang d'une matrice (admis au le chapitre précédent). En fait, on peut prouver un peu plus avec la proposition qui suit.

(7-3) Proposition : pour toute matrice A de format $m \times n$, à coefficients dans un corps K , il y a égalité entre :

- le nombre des pivots d'élimination dans toute réduction de A ,
- la dimension du sous espace engendré dans K^m par les colonnes de A ,
- la dimension du sous espace engendré dans K^n par les lignes de A .

Définition : ce nombre est appelé le *rang* de A .

Démonstration : soit R la forme réduite de A , r le nombre de ses lignes non nulles. La proposition précédente montre que r est indépendant du mode de réduction de A – pourvu qu'il soit mené à son terme. On peut donc supposer que R est la réduite de Gauss-Jordan de A . On sait déjà que r est égal à la dimension du sous-espace engendré dans K^m par les colonnes de A . Il reste à prouver la propriété correspondante pour les lignes. On note respectivement L et L' les sous-espaces de K^n engendrés par les lignes des matrices A et R .

Comme il existe une matrice inversible P telle que : $R = PA$, la proposition 4-2 du chapitre I montre que toute ligne de R est une combinaison linéaire des lignes de A . On a donc :

$$L' \subseteq L.$$

La matrice P étant inversible, on a aussi $A = P^{-1}R$ et par suite :

$$L \subseteq L'.$$

Il est alors prouvé que $L = L'$. Par ailleurs, on a vu que les r lignes pivots de R forment une base de L' . Il s'ensuit que :

$$\dim L = r.$$

◁

Les propriétés suivantes sont alors claires.

(7-4) Théorème : toute matrice a le même rang que sa transposée.

(7-5) Proposition : le rang d'une matrice est égal à l'ordre maximum d'une sous-matrice carrée inversible.

Démonstration : la sous-matrice obtenue en supprimant les colonnes et les lignes ne contenant pas de pivot d'élimination remplit ces conditions. ◀

(7-6) Proposition : la multiplication à gauche comme à droite d'une matrice de rang r par une matrice carrée inversible donne une matrice de rang r .

Démonstration : pour la multiplication à gauche, c'est une conséquence immédiate de l'interprétation de cette opération comme un changement de base dans l'espace des matrices-colonnes. Pour la multiplication à droite, on applique ce qui précède aux transposées. ◀

§ 8. Équation d'un sous-espace

On considère un système d'équations linéaires homogènes $AX=0$, soit N l'ensemble de ses solutions. On se reporte à la fin de la section 3 (chapitre II). On y a proposé un moyen automatique d'en écrire la solution générale à partir de solutions particulières – dites "canoniques" – attachées à chacune des inconnues non principales.

Si l'on reprend ce qui n'était alors qu'une recette, en tenant compte des acquis postérieurs, il apparaît que :

- le nombre des inconnues principales admet maintenant une définition intrinsèque comme rang de la matrice A ,
- les solutions "canoniques" forment un système libre de K^n ,
- N est l'ensemble des combinaisons linéaires des solutions "canoniques".

Ce qui s'énonce comme suit.

(8-1) **Théorème** : l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires, homogène, à n inconnues, de rang r , est un sous-espace vectoriel de dimension $n-r$ de K^n .

Nous allons montrer que, réciproquement, tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie admet une telle présentation.

* Equation d'un sous-espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel de dimension n , rapporté à la base :

$$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n).$$

On considère un sous-espace F de E , soit p sa dimension ($p \leq n$). On suppose que F est engendré par le système de m vecteurs :

$$A = (a^1, a^2, \dots, a^m)$$

définis par leurs coordonnées sur $\mathcal{B}$. On sait que cette donnée équivaut à celle d'une matrice A de format $n \times m$ et de rang p . On considère le système d'équations linéaires :

$$AL = X$$

où :

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \dots \\ l_m \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- L est la matrice des inconnues,
- les coefficients du second membre X sont, provisoirement, considérés comme des paramètres.

Ce système est équivalent au système réduit

$$PAL = PX.$$

Sa condition de compatibilité est donnée par les équations d'indice supérieur à p – celles qui sont de la forme :

$$0 = \text{ligne de } PX$$

On note B la matrice formée des $n-p$ dernières lignes de P , la condition de compatibilité se présente alors sous la forme :

$$BX=0.$$

Si x est le vecteur de E dont les coordonnées sur B sont $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, on a de façon évidente :

$$x \in F \Leftrightarrow \exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \quad \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = x,$$

puis :

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = x \Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \text{ est solution de } AL = X.$$

Il s'ensuit que :

$$x \in F \Leftrightarrow AL = X \text{ est compatible.}$$

Il est alors prouvé que :

$$x \in F \Leftrightarrow BX=0.$$

Comme la matrice B est formée de $n-p$ lignes d'une matrice régulière, elle est de rang $n-p$. Ainsi, on vient de démontrer le théorème qui suit, où X retrouve son statut habituel d'inconnue.

(10-1) Théorème : on considère espace vectoriel de E de dimension n rapporté à une base donnée. Pour tout sous-espace F de E , il existe une matrice B à n colonnes, de rang :

$$r = n - \dim F,$$

telle que les coordonnées des vecteurs de E soient les solutions du système homogène

$$BX=0.$$

N. B. Il va sans dire que B dépend de la base choisie.

Définition : dans ces conditions, l'expression $BX=0$ est appelée *équation cartésienne* de F – relativement la base donnée..

La démonstration fournit aussi le moyen de déterminer explicitement l'équation d'un sous-espace défini par un système-générateur. Dans les cas les plus simples, il n'y a pas lieu d'expliciter la matrice P , il suffit d'appliquer la méthode de Gauss au système $PAL = PX$ (c'est la plus économique), comme nous savons le faire en géométrie pour déterminer l'équation d'un plan dans l'espace.

Cette façon de procéder est nettement plus efficace que la recherche des lignes de B utilisant des coefficients indéterminés.

Exemple : dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces E et F engendrés par les deux systèmes de vecteurs suivants :

$$E: \quad u_1 = (1, 1, 1, 1), \quad u_2 = (1, -1, 1, -1)$$

$$F: \quad v_1 = (1, 2, 1, 2), \quad v_2 = (3, 4, 1, 3), \quad v_3 = (5, 4, -1, 1), \quad v_4 = (1, 0, 2, 0).$$

On applique la méthode de Gauss aux deux systèmes obtenus en écrivant que le vecteur (x, y, z, t) est combinaison linéaire de u_1 et u_2 puis de v_1, v_2, v_3 et v_4 .

u_1 ↓	u_2 ↓		v_1 ↓	v_2 ↓	v_3 ↓	v_4 ↓	
1	1	x	1	3	5	1	x
1	-1	y	2	4	4	0	y
1	1	z	1	1	-1	2	z
1	-1	t	2	3	1	0	t
	2	$x-y$		2	6	2	$2x-y$
	0	$x-z$		2	6	-1	$x-z$
	2	$x-t$		3	9	2	$2x-t$
		$x-z$			0	3	$x-y+z$
		$y-t$			0	2	$2x-3y+2t$
							$4x-7y-2z+6t=0$

Annexe au chapitre III

Interprétation vectorielle de la résolution des systèmes linéaires

On désigne par E un espace vectoriel de dimension m , rapporté à une base donnée et l'on considère une matrice $A = [a_{ij}]$ de format $m \times n$ et de rang r . La donnée de A équivaut à celle du système de n vecteurs : $A = (a^1, a^2, \dots, a^n)$. Soit b un vecteur de E et B la matrice colonne associée. On considère le système linéaire :

$$AX = B.$$

Partant de l'équivalence :

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \text{ est solution de } AX = B \Leftrightarrow b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n,$$

il est facile d'interpréter les différents cas se présentant dans la discussion qui a fait l'objet des propositions II-3-4.

$$AX = B \text{ est compatible} \Leftrightarrow b \in \text{esp}(A)$$

$$A \text{ engendre } E \Leftrightarrow AX = B \text{ admet au moins une solution} \Leftrightarrow r = m \geq n$$

$$A \text{ est libre} \Leftrightarrow AX = B \text{ admet au plus une solution} \Leftrightarrow r = n \geq m$$

$$A \text{ est une base de } E \Leftrightarrow AX = B \text{ admet une solution unique} \Leftrightarrow r = m = n$$

Il est ainsi possible de retrouver de façon quasi immédiate les résultats essentiels sur les espaces vectoriels de dimension finie de la section 4 du présent chapitre, à savoir :

- le fait qu'un système libre ait toujours moins d'éléments qu'un système générateur,
- le théorème de la dimension,
- le théorème de la base extraite,
- le théorème de la base incomplète.

Il suffit pour cela de dire, au départ, qu'un espace vectoriel est de dimension finie s'il admet une base finie – ce qui, en fin de compte, ne change strictement rien.

Remarque : on pourrait trouver cette façon de faire plus avantageuse. Il convient, cependant, de savoir procéder comme nous l'avons fait ici, ceci pour au moins deux raisons d'ordre général.

La première est que le recours systématique à une base peut se révéler un très mauvais réflexe en maintes circonstances. Il convient donc de s'habituer à traiter les problèmes de façon intrinsèque chaque fois que c'est possible.

La seconde est qu'on travaille couramment sur des espaces de dimension infinie – notamment en analyse – il est donc indispensable de disposer d'un exposé qui ne soit pas uniquement orienté vers l'étude de la dimension finie.

Il s'y ajoute une raison de nature purement technique, elle est plus subtile. C'est qu'il faut bien, de toutes façons, démontrer que tout sous-espace vectoriel d'un espace de dimension finie est de dimension finie. Or, cette propriété ne découle pas de façon immédiate des théorèmes évoqués plus haut. Il faut donc, à un moment ou à un autre, procéder à une construction analogue à celle du lemme 4-2.

Chapitre IV. Applications linéaires

Il nous reste à étudier les morphismes d'espace vectoriel : les *applications linéaires* – on entend par là les fonctions qui respectent les deux opérations de base. Tel est l'objet du présent chapitre. On y retrouvera, en partie, le découpage du précédent. À savoir, nous passerons en revue les généralités indépendantes de la notion de dimension. Puis, nous étudierons en détail les particularités de ces applications dans le cas où l'espace source est de dimension finie. Enfin, nous introduirons la présentation matricielle des applications linéaires. Nous disposerons alors d'un moyen efficace pour mener à bien les calculs explicites. Ce dernier point trouve logiquement sa place à la fin du chapitre, il n'empêche qu'on doit pouvoir disposer de cette technique dès les premières applications, aussi, ne faut-il pas hésiter à y recourir même si l'on a pas totalement assimilé les notions exposées antérieurement.

§ 1. Définitions et généralités

En l'absence d'autres conventions explicitement posées, E et F désignent toujours deux espaces vectoriels sur un **même corps** K .

Définition : soit f une application de E dans F , on dit que f est *linéaire* si elle vérifie les deux conditions suivantes :

- (1) $\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad f(x+y) = f(x) + f(y),$
- (2) $\forall x \in E \quad \forall \lambda \in K \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$

En d'autres termes, f est une application linéaire si les deux lois d'espace vectoriel sont stables par f . Dans le cas où f est une application linéaire de E dans lui-même, on dira que f est un *endomorphisme* de E .

On déduit immédiatement de cette définition que si f est une application linéaire de E dans F , pour tous éléments x et y de E et pour tous scalaires λ et μ , on a :

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

En fait, cette condition est nécessaire et suffisante, on peut même l'affaiblir un peu de la façon qui suit.

(1-1) **Proposition** : l'application f de E dans F est linéaire, si et seulement si :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \forall \lambda \in K \quad f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y).$$

Exemples.

1) Soit k un élément donné de K , on vérifie sans peine que l'application :

$$\begin{array}{ccc} f: E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & kx \end{array}$$

est un endomorphisme de E . Si k est non nul, on parle de l'*homothétie* de rapport k .

2) Si A est une matrice de format $m \times n$, à coefficients dans le corps K , la relation :

$$X \mapsto Y = AX$$

définit une application linéaire de K^n dans K^m .

3) La majorité des transformations usuelles de la géométrie vectorielle sont associées à applications linéaires : projections, affinités, similitudes, ...

4) Si un espace vectoriel E est la somme directe de deux de ses sous-espaces F et G , tout élément x de E s'écrit de façon unique :

$$x = u + v \text{ où } u \in F \text{ et } v \in G.$$

La relation $p : x \mapsto u$ est une application de E dans lui-même, montrons qu'elle est linéaire. Considérons deux éléments x et x' de E , il existe deux éléments u et u' de F et deux éléments v et v' de G tels que :

$$x = u + v \text{ et } x' = u' + v'.$$

$$x + \lambda x' = (u + v) + \lambda(u' + v') = (u + \lambda u') + (v + \lambda v')$$

Le dernier membre représente l'unique décomposition de $x + \lambda x'$ en la somme d'un élément de F et d'un élément de G . On a donc :

$$p(x + \lambda x') = u + \lambda u' = p(x) + \lambda p(x'),$$

ceci sans aucune restriction. L'application p est donc linéaire. On l'appelle la *projection sur F parallèlement à G* .

* Espace vectoriel des applications linéaires de E dans F

(1-2) Proposition : L'ensemble des applications linéaires de E dans F est un espace vectoriel sur K .

Notation : il est d'usage de noter cet ensemble $L(E, F)$ ou $\mathcal{L}(E, F)$.

Démonstration : comme F est un espace vectoriel, l'ensemble F^E des applications de E dans F est, on le sait, un espace vectoriel. Considérons deux éléments f et g de $L(E, F)$, puis un scalaire λ et vérifions que $f + \lambda g$ est une application linéaire. Pour ce faire il nous faut aussi introduire deux vecteurs quelconques x et y de E et un scalaire μ . On a toujours :

$$\begin{aligned} (f + \lambda g)(x + \mu y) &= f(x + \mu y) + \lambda g(x + \mu y) \\ &= f(x) + \mu f(y) + \lambda g(x) + \lambda \mu g(y) \\ &= [f(x) + \lambda g(x)] + \mu [f(y) + \lambda g(y)] \\ &= (f + \lambda g)(x) + \mu (f + \lambda g)(y). \end{aligned}$$

Dans ces conditions, l'application $f + \lambda g$ est toujours linéaire, $L(E, F)$ est donc un sous-espace vectoriel de F^E . $\triangleleft$

*** Conséquences directes de la définition**

(1-3) Proposition : si f est une application linéaire de E dans F , on a toujours :

$$f(0) = 0$$

et pour tout élément x de E :

$$f(-x) = -f(x).$$

Démonstration : par définition, on a :

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0).$$

Or, le vecteur nul est le seul élément de F qui vérifie une telle relation. Par ailleurs, il découle de III-1-2 et de la définition que

$$f(-x) = f[(-1)x] = (-1)f(x) = -f(x). \quad \blacktriangleleft$$

Définition : une application linéaire bijective est appelée un *isomorphisme*. S'il existe un isomorphisme de E dans F , on dit que E et F sont *isomorphes*, on note alors : $E \approx F$.

(1-4) Proposition : l'application inverse d'un isomorphisme est aussi un isomorphisme.

Démonstration : soit f un isomorphisme de E sur F , on considère deux éléments x' et y' de F . Comme f est bijective, f^{-1} est une application, on peut donc poser $x = f^{-1}(x')$ et $y = f^{-1}(y')$. Soit λ un scalaire quelconque, on a :

$$f^{-1}(x' + \lambda y') = f^{-1}[f(x) + \lambda f(y)] = f^{-1}[f(x + \lambda y)] = x + \lambda y = f^{-1}(x') + \lambda f^{-1}(y').$$

Ainsi, on a toujours :

$$f^{-1}(x' + y') = f^{-1}(x') + \lambda f^{-1}(y')$$

f^{-1} est donc bien une application linéaire bijective. $\blacktriangleleft$

(1-5) Proposition : soit f une application linéaire de E dans F ,

- si E' est un sous-espace vectoriel de E , alors $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F ;
- si F' est un sous-espace vectoriel de F , alors $f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration : comme $f(E')$ contient au moins $f(0)$, ce sous-ensemble de F est non vide. Soit x' et y' deux éléments de $f(E')$, il existe x et y appartenant à E' tels que :

$$x' = f(x) \text{ et } y' = f(y).$$

Dans ces conditions, si λ est un scalaire quelconque, on a :

$$x' + \lambda y' = f(x) + \lambda f(y) = f(x + \lambda y).$$

Comme E' est un sous-espace de E , $x + \lambda y$ appartient à E' et $x' + \lambda y'$ appartient toujours à $f(E')$. Il s'ensuit que $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F .

On considère $f^{-1}(F')$, cette partie de E contient au moins 0 , elle est non vide. Soit x et y deux éléments de $f^{-1}(F')$ et λ un scalaire quelconque, on a :

$$f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y).$$

Par définition, $f(x)$ et $f(y)$ appartiennent à F' qui est un sous-espace de F . L'élément $f(x) + \lambda f(y)$ appartient donc à F' . Dans ces conditions, $x + \lambda y$ appartient toujours à $f^{-1}(F')$. Il s'ensuit que $f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E . $\blacktriangleleft$

(1-6) **Proposition** : on considère une application linéaire f de E dans F et un système $\mathcal{S}$ de vecteurs de E .

(1) L'image par f du sous-espace de E engendré par $\mathcal{S}$ est le sous-espace de F engendré par $f(\mathcal{S})$.

(2) Si $\mathcal{S}$ est lié, alors $f(\mathcal{S})$ est lié.

(3) Si $f(\mathcal{S})$ est libre, alors $\mathcal{S}$ est libre.

Démonstration.

1) Le sous-espace $f[\text{esp}(\mathcal{S})]$ de F est, par définition, l'ensemble des éléments de F de la forme $f(x)$, où x est combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{S}$. Comme f est linéaire, cet ensemble est formé des combinaisons linéaires des éléments de $f(\mathcal{S})$, c'est donc $\text{esp}[f(\mathcal{S})]$.

2) On pose $\mathcal{S} = (x_1, \dots, x_p)$ et l'on considère des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que :

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p = 0.$$

Alors, on a :

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p) = 0$$

et par suite :

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_p f(x_p) = 0.$$

- Si $\mathcal{S}$ est lié, il existe de tels scalaires, non tous nuls et alors $f(\mathcal{S})$ est lié.
- Si $f(\mathcal{S})$ est libre, ces scalaires sont nuls et $\mathcal{S}$ est libre. $\triangleleft$

* Noyau et image d'une application linéaire

Définition : soit f une application linéaire de E dans F ,

- on appelle *noyau* de f et l'on note $\text{Ker } f$ l'ensemble des éléments de E dont l'image par f est le vecteur nul de F , autrement dit :

$$\text{Ker } f = f^{-1}(0).$$

- on appelle *image* de f et l'on note $\text{Im } f$ l'ensemble des images par f des éléments de E , autrement dit :

$$\text{Im } f = f(E).$$

(1-7) **Proposition** : si f une application linéaire de E dans F ,

- le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E ,
- l'image de f est un sous-espace vectoriel de F .

Démonstration : ceci résulte immédiatement de la proposition (1-6) $\triangleleft$

(1-8) **Théorème** : une application linéaire est injective si, et seulement si, son noyau se réduit au seul vecteur nul.

Démonstration : on considère une application linéaire f de E dans F . Si f est injective et si x est un élément de son noyau, alors $f(x) = f(0)$ et $x = 0$, on a donc $\text{Ker } f = \{0\}$. Réciproquement, si $\text{Ker } f = \{0\}$ et si x, y sont deux éléments de E tels que $f(x) = f(y)$, on a :

$$\begin{aligned} f(x - y) &= f(x) - f(y) = 0, \\ x - y &\in \text{Ker } f = \{0\}. \end{aligned}$$

Dans ces conditions, on a toujours $x = y$, f est alors injective. $\triangleleft$

(1-9) **Proposition** : soit f une application linéaire de E dans F . Si f est **injective**, l'image par f d'un système libre de E est un système libre de F .

Démonstration : soit $(e_1, \dots, e_p)$ un système libre fini de E , on considère des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que :

$$\lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \dots + \lambda_p f(e_p) = 0$$

Comme f est linéaire, il vient :

$$f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_p e_p) = 0$$

De plus, f est injective et par suite :

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_p e_p = 0.$$

Or, $(e_1, \dots, e_p)$ est libre, ce qui entraîne que :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0.$$

Les vecteurs $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p)$ sont donc linéairement indépendants. $\triangleleft$

*** Définition d'une application linéaire sur les éléments d'une base**

Remarque : dans la démonstration des deux propriétés qui suivent, la dimension de E est implicitement supposée finie. On pourra chercher à se persuader que des adaptations mineures permettraient de lever cette restriction.

(1-10) **Théorème** : soit f une application linéaire de E dans F , si E est de dimension n , pour toute base $(e_1, \dots, e_n)$ de E , et pour tout système de n vecteurs $(y_1, \dots, y_n)$ de F , il existe une application linéaire f de E dans F , **et une seule**, telle que :

$$f(e_i) = y_i \text{ pour } i = 1, \dots, n.$$

Démonstration : soit f une telle application et x un élément quelconque de E , nous savons que x s'exprime de façon unique sous la forme :

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n.$$

La linéarité de f est entraînée que :

$$f(x) = \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n.$$

Or, cette expression ne dépend que de la base considérée et de la donnée des y_i , ce qui fait que, si f existe, f est unique. Vérifier que l'application ainsi définie est linéaire est immédiat. $\triangleleft$

(1-11) **Proposition** : une application linéaire de E dans F , f est un isomorphisme si, et seulement si, l'image d'une base de E est une base de F .

Démonstration : soit f une telle application, on considère une base $\mathcal{B}$ de E , la proposition 1-6 montre que $f(\mathcal{B})$ engendre $\text{Im } f$.

Si f est un isomorphisme, f est surjective et $\text{Im } f = F$, f est aussi injective et la proposition 1-9 montre que $f(\mathcal{B})$ est libre. L'image de $\mathcal{B}$ par f est donc une base de F .

Réciproquement, si $f(\mathcal{B})$ est une base de F , f est surjective. Pour montrer qu'elle est injective, on considère un élément x du noyau de f :

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_p e_p.$$

On a :

$$\lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \dots + \lambda_p f(e_p) = f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_p e_p) = f(x) = 0.$$

Or, $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p))$ est un système libre de F , il s'ensuit que :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0.$$

Alors x est nul. On a donc $\text{Ker } f = \{0\}$ et le théorème 1-8 montre que f est injective. $\triangleleft$

Remarque : tous les espaces de dimension n sur K sont isomorphes à K^n .

§2. Applications linéaires en dimension finie

On désigne encore par E et F deux espaces vectoriels sur un même corps K .

* Conditions suffisantes pour qu'une application linéaire soit un isomorphisme

(2-1) Théorème : si E et F sont deux espaces vectoriels de même dimension finie et si f est une application linéaire de E dans F , les conditions suivantes sont équivalentes :

- | | |
|-----|---------------------|
| (1) | f est injective, |
| (2) | f est surjective, |
| (3) | f est bijective. |

Démonstration : soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E , si f est injective, les propositions 1-6 et 1-9 montrent que $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est une base de $\text{Im} f$. On a donc :

$$\dim(\text{Im} f) = \dim E = \dim F.$$

Il résulte alors de III-5-1 que $\text{Im} f = F$, f est surjective, on a donc $(1 \Rightarrow 2)$.

Si f est surjective, la proposition 1-6 montre que le système $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ engendre $\text{Im} f$. Le nombre de ses éléments est, par hypothèse, égal à la dimension de F , c'est donc une base, la proposition 1-10 justifie alors que f est un isomorphisme. On a donc $(2 \Rightarrow 3)$

Comme $(3 \Rightarrow 1)$ est toujours vraie, la démonstration est complète. $\triangleleft$

* Rang d'une application linéaire

Définition : on appelle *rang* d'une application linéaire f , la dimension de son image. On note ce nombre $\text{rang} f$ ou encore $r(f)$. Plus succinctement, on a :

$$\text{rang} f = \dim(\text{Im} f).$$

(2-2) Théorème : soit f une application linéaire de E dans F , si E est de dimension finie, alors l'image de f est de dimension finie et l'on a :

$$\dim E = \text{rang} f + \dim(\text{Ker} f).$$

Démonstration : il découle de la proposition 1-6 que l'image par f d'une base de E engendre $\text{Im} f$. Ce sous-espace de F est donc de dimension finie. Soit H un supplémentaire de $\text{Ker} f$ dans E , montrons que H est isomorphe à $\text{Im} f$. Soit f_H la restriction de f à H , il est clair que :

$$\text{Ker} f_H = H \cap \text{Ker} f = \{0\}.$$

Le théorème 1-8 montre que f_H est injective. Pour prouver que f_H est aussi surjective, on considère un élément y de $\text{Im} f$. Il existe x appartenant à E , tel que $f(x) = y$. Comme H est un supplémentaire de $\text{Ker} f$ dans E , il existe aussi u et v tels que :

$$u \in \text{Ker} f, v \in H \text{ et } x = u + v.$$

On a :

$$y = f(x) = f(u + v) = f(u) + f(v) = f(v) = f_H(v).$$

La surjectivité de f_H est alors acquise. L'application f_H est donc un isomorphisme et par suite :

$$\dim H = \dim(\text{Im} f) = \text{rang} f.$$

Enfin, comme $E = H \oplus \text{Ker} f$, on a aussi :

$$\dim E = \dim H + \dim(\text{Ker} f).$$

L'égalité avancée en découle immédiatement. $\triangleleft$

Il n'est pas sans intérêt pratique de savoir exhiber un sous-espace supplémentaire du noyau d'une application linéaire. Ceci peut se faire de façon immédiate, grâce à la proposition qui suit.

(2-3) Proposition : si f est une application linéaire de E dans F et si $(y_1, \dots, y_r)$ est une base de l'image de f , tout système $(x_1, \dots, x_r)$ de vecteurs de E , tel que :

$$f(x_1) = y_1, \dots, f(x_r) = y_r$$

engendre, dans E , un sous-espace supplémentaire du noyau de f .

Démonstration : soit x un élément quelconque de E , il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, tels que :

$$f(x) = \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_r y_r.$$

Soit H le sous-espace vectoriel de E engendré par $(x_1, \dots, x_r)$, la proposition 1-6 montre que ce système de vecteurs est aussi une base de H . Soit f_H la restriction de f à H , la proposition 1-11 prouve que f_H est un isomorphisme de H sur $\text{Im } f$. On a donc $\text{Ker } f_H = \{0\}$. Or, $H \cap \text{Ker } f = \text{Ker } f_H$, la somme $G = H + \text{Ker } f$ est donc directe ce qui fait que :

$$\dim G = \dim \text{Ker } f + \dim H.$$

De plus, comme la dimension de H est le rang de f , on a

$$\dim G = \text{rang } f + \dim \text{Ker } f = \dim E.$$

et le théorème III-5-1 justifie que $E = \text{Ker } f \oplus H$. ◀

§ 3. Matrices d'une application linéaire

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie qu'on suppose respectivement rapportés aux bases :

$$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n) \text{ et } \mathcal{C} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$$

Si l'on considère une application linéaire f de E dans F , on peut toujours lui associer la matrice des coordonnées dans la base $\mathcal{C}$ des vecteurs du système :

$$(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$$

et définir ainsi une application de $L(E, F)$ dans $K^{m \times n}$.

Réciproquement, si $A = [a_{ij}]$, est une matrice de format $m \times n$, donnée, l'application suivante :

$$\begin{aligned} K^n &\longrightarrow K^m \\ X &\mapsto Y = AX \end{aligned}$$

induit l'unique application linéaire f de E dans F telle que : $\sum_{i=1}^n$

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} f_i, \text{ pour } j = 1, \dots, n.$$

De plus, il est clair que la matrice précédemment associée à f est A . Nous sommes ainsi en présence d'une bijection entre $L(E, F)$ et $K^{m \times n}$. Formulons plus précisément cet acquis

(3-1) Proposition : la donnée d'une base de E et d'une base de F définit une bijection de $L(E, F)$ sur l'ensemble des matrices, à n lignes et m colonnes, à coefficients dans K . Le coefficient a_{ij} , de la matrice A associée à l'application linéaire f , est la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de l'image du $j^{\text{ème}}$ de la base de E . Dans ces conditions, si x et y appartiennent respectivement à E et F , on note X et Y les matrices de leurs coordonnées respectives, alors on a :

$$y = f(x) \Leftrightarrow Y = AX.$$

Remarque : il n'existe pas de terme réellement consacré pour exprimer cette relation entre les applications linéaires abstraites et les matrices. On dira, par exemple, que A est la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. On dira aussi que A est la matrice associée à f ou encore que la matrice A représente l'application linéaire f sur les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$...

Comme la matrice d'une application linéaire est explicitement liée au choix des bases où elle est définie, on pourrait préconiser l'usage de notations rendant compte de ce fait. Cependant, ceci alourdirait considérablement l'exposé, sans réel bénéfice, c'est pourquoi, le plus souvent, on se contente de noter cette matrice A ou M . Il convient néanmoins de rester vigilant et de toujours avoir présent à l'esprit quelles sont les bases de référence.

Exemples.

1) Soit $\mathbf{R}_n[X]$, l'espace vectoriel des polynômes, à coefficients réels, de degré n , au plus. Considérons l'application D de $\mathbf{R}_3[X]$ dans $\mathbf{R}_2[X]$ qui, à tout élément du premier espace, fait correspondre le polynôme dérivé. On vérifie que D est une application linéaire. Sa matrice par rapport aux bases $(1, X, X^2, X^3)$ et $(1, X, X^2)$ est la suivante :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

2) Si E est de dimension n , la matrice de l'homothétie $x \mapsto kx$ est la matrice scalaire kI_n , ceci quelle que soit la base.

On vérifie les propriétés ci-après, en partant des définitions.

(3-2) Proposition : soit E et F deux espaces vectoriels sur un même corps, on suppose que chacun d'eux est rapporté à une base donnée et l'on considère deux applications linéaires f et g E dans F .

Relativement, aux bases en question, si A et B sont les matrices respectives de f et g , alors :

- $A + B$ est la matrice de $f + g$,
- λA est la matrice de λf pour tout scalaire λ .

Remarque : ces deux assertions se résument dans la formule qui suit.

(3-3) Proposition : l'application qui, à toute application linéaire de E dans F , associe sa matrice relativement à des bases données, est un isomorphisme de $L(E, F)$ sur $K^{m \times n}$.

Ce qui justifie l'assertion qui suit.

(3-4) Proposition :

$$\dim L(E, F) = \dim E \times \dim F.$$

(3-5) Proposition : soit E , F et G trois espaces vectoriels sur un même corps, on suppose que chacun d'eux est rapporté à une base donnée et l'on considère deux applications linéaires :

$$f: E \longrightarrow F \text{ et } g: F \longrightarrow G.$$

Si A et B sont les matrices respectives de f et g , relativement aux bases données, BA est alors la matrice de $g \circ f$.

Démonstration : on note les bases données pour E, F et G, respectivement :

$$(e_1, \dots, e_n), (f_1, \dots, f_m) \text{ et } (g_1, \dots, g_l),$$

Par définition, on a :

$$f(e_j) = \sum_{k=1}^m a_{kj} f_k, \text{ pour } j=1, \dots, n \text{ et } g(f_k) = \sum_{i=1}^l b_{ik} g_i, \text{ pour } k=1, \dots, m.$$

Il s'ensuit que, pour $j=1, \dots, n$, on a :

$$\begin{aligned} g \circ f(e_j) &= g\left[\sum_{k=1}^m a_{kj} f_k\right] \\ &= \sum_{k=1}^m a_{kj} g(f_k) \\ &= \sum_{k=1}^m a_{kj} \sum_{i=1}^l b_{ik} g_i \\ &= \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^m b_{ik} a_{kj} g_i \end{aligned}$$

Soit C la matrice de $g \circ f$ relativement à $(e_1, \dots, e_n)$ et $(g_1, \dots, g_l)$, le calcul précédent se traduit par :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m b_{ik} a_{kj} \text{ pour } i=1, \dots, l \text{ et } j=1, \dots, n.$$

On a donc bien :

$$C = BA.$$

◀

Remarque : la propriété précédente est à l'origine de la définition du produit de deux matrices. De plus, elle justifie, de façon immédiate, l'associativité de la multiplication matricielle. Par ailleurs, on notera que le produit des matrices s'effectue dans le même ordre que celui des applications correspondantes.

(3-4) Corollaire : on considère une application linéaire f , de E dans F, soit A sa matrice relativement à des bases données de E et de F.

Si f est un isomorphisme de E sur F si, et seulement si, A est inversible. Dans ces conditions, A^{-1} représente l'isomorphisme réciproque de f sur les mêmes bases.

Démonstration : si f est un isomorphisme de E sur F, son application réciproque f^{-1} est une application linéaire de F dans E. Soit B la matrice associée à f^{-1} dans les bases données. On a :

$$g \circ f = \text{Id}_E.$$

le théorème précédent montre que :

$$BA = I.$$

La matrice A est donc inversible et $B = A^{-1}$.

Réciproquement, si A est inversible, la matrice A^{-1} représente une application linéaire g de F dans E, dans les bases données. La matrice associée à $g \circ f$ est alors $A^{-1}A = I$. On a donc $g \circ f = \text{Id}_E$. Ceci s'applique aussi bien à $f \circ g$ et montre que $f \circ g = \text{Id}_F$. Il s'ensuit que f est un isomorphisme et que $g = f^{-1}$. ◀

* Changement de base

On doit savoir exprimer l'effet d'un changement de base sur la matrice d'une application linéaire. Pour régler cette question, on considère deux espaces vectoriels E et F , on effectue dans chacun d'eux un changement de base en convenant que les formules de passage s'écrivent :

$$\text{dans } E : X = PX' \text{ et dans } F : Y = QY'.$$

On considère une application linéaire f de E dans F . On en note A et A' les matrices relativement aux anciennes et aux nouvelles bases. Dans ces conditions, si $y = f(x)$, on a toujours à la fois :

$$Y = AX \text{ et } Y' = A'X'.$$

Ceci s'exprime aussi :

$$QY' = APX'.$$

La multiplication à gauche par Q^{-1} fournit la relation suivante :

$$Y' = Q^{-1}APX'$$

qui est l'expression matricielle de f sur les nouvelles bases. Comme il n'y a aucune restriction sur les vecteurs considérés, il s'ensuit que :

$$A' = Q^{-1}AP.$$

On a donc démontré la proposition qui suit.

(3-4) Proposition : soit f une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F , on effectue, dans E un changement de base de matrice P et dans F un changement de base de matrice Q . Les matrices A et A' qui expriment f , respectivement sur les anciennes et les nouvelles bases, sont liées par la relation :

$$A' = Q^{-1}AP.$$

(3-5) Corollaire : dans E , on effectue un changement de base de matrice P . On considère un endomorphisme f de E , les matrices A et A' qui expriment f , respectivement sur l'ancienne et la nouvelle base, sont liées par la relation :

$$A' = P^{-1}AP.$$

Définitions.

Soit A et B deux matrices de même format $m \times n$. On dit que A et B sont *équivalentes*, s'il existe deux matrices carrées inversibles :

$$P \text{ d'ordre } n \text{ et } Q \text{ d'ordre } m,$$

telles que :

$$B = QAP.$$

Deux matrices carrées d'ordre n A et B sont dites *semblables*, s'il existe une matrice carrée d'ordre n inversible P telle que :

$$B = P^{-1}AP.$$

Ces deux relations sont des équivalences.

Exemple 1 : soit $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique, notée (e_1, e_2, e_3) , on considère l'endomorphisme f de E défini par les relations suivantes :

$$f(e_1) = (-1, 0, 0), \quad f(e_2) = (1, 1, 1) \text{ et } f(e_3) = (0, -1, -1).$$

Dans la base considérée, f est représentée par la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

qu'on réduit, ce qui donne le tableau ci après.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On sait alors que f est de rang 2, son image est le sous-espace engendré par les vecteurs $f(e_1)$ et $f(e_2)$. Un élément (x, y, z) de E appartient au noyau de f si, et seulement si, il est solution du système homogène $AX=0$ qui, une fois réduit se présente sous la forme :

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases},$$

où il est clair que $\text{Ker } f$ est de dimension 1, et que le vecteur $(1, 1, 1)$ en constitue une base.

On considère les trois vecteurs suivants de E :

$$\varepsilon_1 = -e_2, \quad \varepsilon_2 = e_1 + e_3, \quad \varepsilon_3 = e_1.$$

Il est évident qu'ils sont linéairement indépendants, ils forment donc une base de E . On en détermine les images par f .

$$f(\varepsilon_1) = -f(e_2) = -(e_1 + e_2 + e_3) = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

$$f(\varepsilon_2) = f(e_1) + f(e_3) = -e_1 - e_2 - e_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

$$f(\varepsilon_3) = f(e_1) = -e_1 - e_3 = -\varepsilon_3.$$

La matrice de f par rapport à cette nouvelle base de E est donc :

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Remarque : la matrice de passage de l'ancienne base à la nouvelle est :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

On a immédiatement : $e_1 = \varepsilon_3$, $e_2 = -\varepsilon_1$ et $e_3 = \varepsilon_2 - e_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$ et par suite :

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

On pourra vérifier qu'on a bien :

$$A' = P^{-1} A P.$$

Exemple 2 : soit $E = \mathbb{R}^5$ et $F = \mathbb{R}^3$, on considère f l'application de E dans F , définie par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} f: (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &\mapsto (y_1, y_2, y_3) \\ \begin{cases} y_1 = 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 \\ y_2 = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \\ y_3 = 5x_1 - x_3 + 5x_4 + 4x_5 \end{cases} \end{aligned}$$

On pose :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & -1 & 5 & 4 \end{bmatrix},$$

ces relations s'écrivent :

$$Y = AX.$$

L'application f est donc linéaire.

On réduit A , on obtient :

	1	2	3	4	5
1	5	0	-1	5	4
2	0	5	-3	5	-3
3	0	0	0	0	0

Sur ce tableau, on lit directement que f est de rang 2 et que les vecteurs $f(e_1)$ et $f(e_2)$ forment une base de $\text{Im}f$. On y lit aussi les solutions de canoniques du système homogène $AX=0$.

$$i=(1,3,5,0,0), j=(-1,-1,0,1,0), k=(-4,3,0,0,5).$$

Ces trois vecteurs forment une base du noyau de f . Pour la compléter une base de E , il suffit de lui adjoindre des vecteurs de E dont les images forment une base de $\text{Im}f$ (cf. 2-4). Par ailleurs, on peut vérifier que, dans F , $e'_1=(1,0,0)$ est linéairement indépendant de $f(e_1)$ et $f(e_2)$. Ainsi, la matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

représente l'application linéaire f sur les bases formées de :

$$e_1, e_2 \text{ et } i, j, k \text{ pour } E \text{ et } f(e_1), f(e_2), e'_1 \text{ pour } F.$$

On pourra vérifier que $B=Q^{-1}AP$ si P et Q sont les matrices de passage correspondantes, à savoir :

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ et } Q=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercices

Exercices sur le chapitre I

Calcul matriciel

I Étant données deux matrices A et B , à quelles conditions a-t-on respectivement :

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \text{ et } (A+B)(A-B) = A^2 - B^2 ?$$

II Soit A une matrice carrée et n un entier naturel. Montrer que :

$$I - A^n = (I - A)(I + A + \dots + A^{n-1}).$$

III Déterminer les puissances successives des matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \dots \quad \text{généraliser.}$$

IV Montrer que les matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ où } a \in \mathbb{R}$$

forment un groupe commutatif pour l'une des lois usuelles.

v Déterminer l'ensemble des matrices carrées A , d'ordre 2, vérifiant respectivement :

- | | | |
|----|-----------|---------------------------------|
| a) | $A^2 = 0$ | <i>(nilpotentes d'indice 2)</i> |
| b) | $A^2 = I$ | <i>(involutives)</i> |
| c) | $A^2 = A$ | <i>(indempotentes)</i> |

vi On considère l'algèbre $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2 \times 2}$, des matrices carrées A , d'ordre 2, dont les coefficients sont les entiers modulo 2.

- a) Combien comporte-t-elle d'éléments ?
- b) Combien contient-elle de matrices symétriques ?
- c) Expliciter les éléments des sous-ensembles décrits dans l'exercice v.

vii Montrer que, pour une matrice carrée A , les conditions suivantes sont équivalentes :

$$(1) (I - A)(I + A) = 0 \quad (2) \frac{1}{2}(I + A) \text{ est idempotente} \quad (3) \frac{1}{2}(I - A) \text{ est idempotente}$$

viii 1) On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \text{ et } K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

trouver une relation entre A^2 , A , K et I , puis entre A^2 , A et I . En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} .

2) On note K la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1. Soit a un nombre quelconque et $A = K + aI$. À quelle condition A est-elle inversible ? Déterminer son inverse quand il existe.

ix Montrer que si deux matrices A et B sont permutables (ie : $AB = BA$) on a :

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k A^{n-k} B^k.$$

x Déterminer A^n pour :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1).$$

xi On note J la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux de la diagonale secondaire qui sont égaux à 1. Décrire, par des mots, l'effet de la multiplication d'une matrice par J - à gauche, puis à droite. En déduire que J est involutive (2).

xii Soit V un vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que ${}^tV \cdot V \neq 0$, on considère la matrice suivante :

$$H(V) = I - \frac{2}{{}^tV \cdot V} V \cdot {}^tV$$

Montrer qu'elle est symétrique et involutive.

xiii On note $E_{ij} = [e_{pq}]$ la matrice carrée d'ordre n, telle que :

$$e_{pq} = \begin{cases} 1 & \text{si } p=i \text{ et } q=j \\ 0 & \text{si } p \neq i \text{ ou } q \neq j \end{cases}.$$

1) Déterminer l'ensemble des matrices permutables avec E_{ij} .

2) En déduire que l'ensemble des matrices permutables avec tous les éléments de $\mathbb{R}^{n \times n}$ est formé des matrices scalaires λI .

xiv On considère la matrice A, carrée d'ordre n, ayant la forme suivante :

- les coefficients situés sur et au dessus de la diagonale principale sont égaux à 1,
- les coefficients situés au dessous de la diagonale principale sont nuls.

Déterminer A^p (3).

xv On considère une matrice carrée A et une partition de celle-ci dont les blocs diagonaux sont des matrices carrées :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Montrer que si :

$$A_{11} \text{ et } B = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$$

sont inversibles alors A est inversible et l'on a :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1}(I + A_{12}B^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}) & -A_{11}^{-1}A_{12}B^{-1} \\ -B^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}.$$

1 On écrit $A = I + B$ et l'on utilise la formule du binôme (cf. l'exercice précédent).

2 i.e. $J^2 = I$

3 On pourra commencer par exprimer A^2 puis A^3 , en fonction des coefficients du binôme pour $n = 3, \dots$, puis pour n quelconque. On pourra utiliser la relation suivante - après l'avoir justifiée :

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \dots + C_{k-1}^{k-1}.$$

Exercices sur le chapitre II

Élimination de Gauss – applications

N.B. Tous les exercices comportant des données numériques peuvent être repris après modification arbitraire de celles-ci - y compris en changeant la taille des systèmes linéaires ou le format des matrices.

- I A quelle condition le système suivant est-il compatible ?

$$\begin{cases} x - y + 2z = a \\ x + 2y - z = b \\ 2x + y - z = c \\ 2x - y + 2z = d \end{cases}$$

- II Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants :

$$\begin{cases} x + y - z + t = 5 \\ 2x - y + 3z - 2t = -5 \\ x - z - 2t = 4 \\ 3x - y + z - t = -1 \end{cases} ; \begin{cases} x - y + 2z + t = 3 \\ x + y - z + 2t = 5 \\ 2x - y - z + t = 4 \\ 2x + 2y + z + 4t = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{resp. } 3 \\ " \quad 5 \\ " \quad 2 \\ " \quad 11 \end{matrix}$$

- III Déterminer l'ensemble des polynômes $p(X)$ de degré inférieur ou égal à 3 tels que :

$$p(1) = 1, \quad p(2) = 1 \text{ et } p(3) = 9.$$

Existe-t-il dans cet ensemble un polynôme dont le coefficient directeur est égal à 1 ? Si oui, le déterminer.

- IV Choisir au hasard les coefficients de matrices 3×3 , puis 4×4 , déterminer si elles sont inversibles et, le cas échéant, exprimer leur inverse (prendre soin de vérifier le résultat).

- V Déterminer, s'ils existent, les inverses des matrices suivantes ⁽¹⁾ :

$$(1) \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & d_n \\ 0 & 0 & \dots & d_{n-1} & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & d_2 & \dots & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & \dots & 1 & 1 \\ & & \ddots & & \\ 1 & 1 & \dots & a_{n-2} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- VI Déterminer l'ensemble des matrices X telles que $AX = I$ pour :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

¹ Pour la troisième et surtout la quatrième ceci n'a rien d'évident.

vii On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Calculer AB et BA. Ces matrices sont-elles inversibles ?

Plus généralement, soit A et B deux matrices de formats respectifs $m \times n$ et $n \times m$ montrer que si $n < m$ le produit AB n'est pas inversible.

viii 1) Déterminer l'effet sur une matrice de la multiplication à droite par les matrices élémentaires P_{ij} , $P_i(\lambda)$, $P_{ij}(\lambda)$. En déduire que pour toute matrice A il existe des matrices régulières P et Q telles que :

$$PAQ = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right].$$

ix 1) On considère la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Appliquer l'algorithme de Gauss à la matrice augmentée $[A|I]$. En déduire une décomposition de A de la forme:

$$A = LU \text{ (1),}$$

où L est une matrice triangulaire inférieure et U est une matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1 (2).

2) Montrer que, de façon générale, si une matrice carrée régulière admet une décomposition de ce type, celle-ci est unique.

x On désigne par A une matrice de format $m \times n$ et de rang r .

1) Montrer que A admet un inverse à gauche si, et seulement si, $r = n \leq m$. Proposer un algorithme pour le déterminer, s'il existe. Enfin, montrer qu'un tel inverse n'est jamais unique si $m > n$.

2) Adapter les demandes de la question précédente en remplaçant "gauche" par "droite".

¹ Comme "Lower" et "Upper".
² On dit "unitaire"

Exercices sur le chapitre III

Espaces vectoriels

I Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbf{R}^3$, quels sont les sous-espaces vectoriels ?

$$\begin{aligned} &\{(x, y, z) \mid x=0\} \\ &\{(x, y, z) \mid x+y=0\} \\ &\{(x, y, z) \mid x+y=1\} \\ &\{(x, y, z) \mid x+y \geq 0\} \end{aligned}$$

II Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps K . On définit, sur le produit cartésien $E \times F$, les opérations suivantes :

$$\begin{aligned} (x, y) + (x', y') &= (x + x', y + y') \\ \lambda(x, y) &= (\lambda x, \lambda y) \end{aligned}$$

où x et x' désignent des éléments de E , y et y' des éléments de F , et λ un scalaire.

- 1) Montrer qu'on définit ainsi un espace vectoriel sur K .
- 2) Si E est de dimension n et F de dimension m , quelle est la dimension de $E \times F$?

III Soit E l'ensemble des nombres réels x de la forme :

$$x = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3},$$

où a, b, c sont des nombres rationnels.

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}$, considéré comme espace vectoriel sur $\mathbf{Q}$.

2) Montrer que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est une base de E .

3) On considère le sous-espace de E engendré par l'élément $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. Quelle sa dimension ? En déterminer un sous-espace supplémentaire.

IV On donne les quatre éléments suivants de $\mathbf{R}^3$:

$$a = (1, -1, -2), \quad b = (2, 3, -1), \quad c = (3, 7, 0), \quad d = (5, 0, -7)$$

et l'on considère les sous-espaces vectoriels engendrés dans $\mathbf{R}^3$ par a et b d'une part, c et d d'autre part. Déterminer leur dimension et montrer qu'ils sont égaux.

V Déterminer la dimension du sous-espace de $\mathbf{R}^4$ engendré par :

$$x_1 = (2, 1, 3, 1), \quad x_2 = (1, 2, 0, 1), \quad x_3 = (-1, 1, -3, 0).$$

VI Montrer que les vecteurs

$$v_1 = (1, -1, i), \quad v_2 = (-1, i, 1) \quad \text{et} \quad v_3 = (i, 1, -1)$$

forment une base de $\mathbf{C}^3$ et déterminer les coordonnées sur celle-ci du vecteur suivant :

$$w = (1 + i, 1 - i, i)$$

VII Soit K le corps $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$, on considère l'espace vectoriel $E = K \times K$. Les systèmes suivants sont-ils libres ?

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= ((\bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2})) \\ \mathcal{S}' &= ((\bar{2}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{3})) \end{aligned}$$

VIII Soit K l'ensemble des nombres réels de la forme $p + q\sqrt{2}$, où p et q sont deux nombres rationnels.

1) Montrer que K est un sous-corps de $\mathbf{R}$ contenant $\mathbf{Q}$.

Dans la suite, on considère $\mathbf{R}$ comme espace vectoriel sur $\mathbf{Q}$.

2) Montrer que K est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}$. Quelle en est la dimension ?

3) Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}$ engendré par $\sqrt{3}$ et $\sqrt{6}$ et $H = K + E$, montrer qu'il s'agit d'une somme directe. Quelle est la dimension de H ?

4) Soit x un élément non nul de H . Montrer que le système :

$$(x, x\sqrt{2}, x\sqrt{3}, x\sqrt{6})$$

engendre H . En déduire que H est un sous-corps de $\mathbf{R}$.

IX A quelle condition les trois vecteurs suivants de $\mathbf{R}^3$:

$$(3, 1, 6), (1, 1, 4), (1, 0, m)$$

sont-ils linéairement dépendants ?

X 1) Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, on note $\mathcal{A}(I)$ l'ensemble des applications continues de I dans $\mathbf{R}$. Montrer que $\mathcal{A}(I)$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$.

2) Soit f, g, h, k les applications de $I = [0, \pi]$ dans $\mathbf{R}$, définies par :

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \cos x, \quad h(x) = \sin 2x, \quad k(x) = \cos 2x.$$

Montrer que ces quatre éléments de $\mathcal{A}(I)$ sont linéairement indépendants.

XI On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbf{R}^4$:

$$U = \{(x, y, z, t) \mid x + y + z + t = 0\} \quad \text{et} \quad V = \{(x, y, z, t) \mid x + y = 0 \text{ et } z = 2t\}.$$

Montrer que U et V sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$.

Déterminer une base de U , une base de V , une base de $U \cap V$. Compléter cette dernière en une base de U , puis compléter celle obtenue en une base de $U + V$ (1).

XII Montrer que les polynômes suivants :

$$1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3$$

forment une base de l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré au plus 3. Déterminer l'expression du polynôme $aX^3 + bX^2 + cX + d$ sur cette base.

XIII On note V l'espace vectoriel $\mathbf{R}_3[X]$, des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à trois, on en considère les trois éléments suivants :

$$P_0 = 1, \quad P_1 = X, \quad P_2 = X(X-1) \quad \text{et} \quad P_3 = X(X-1)(X-2).$$

Montrer qu'ils forment une base de V . Déterminer la matrice de passage de la base usuelle $(1, X, X^2, X^3)$ à cette base, ainsi que la matrice inverse. Déterminer la décomposition, relativement à cette base, de $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$.

¹ Utiliser pour cette opération des vecteurs extraits respectivement des bases de U et de V précédemment obtenues.

XIV Polynômes d'interpolation de Lagrange

Étant donné un entier positif n et n nombres complexes distincts $a_1, \dots, a_n$, on définit les polynômes suivants de $V = \mathbb{C}_{n-1}[X]$:

$$L_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{X - a_i}{a_k - a_i} \text{ pour } k = 1, \dots, n.$$

1) Calculer $L_k(a_i)$, démontrer que $(L_1, \dots, L_n)$ est une base de V , puis exprimer la décomposition d'un polynôme quelconque P de V , relativement à celle-ci.

2) Soit p un entier compris entre 1 et $n-1$, quel est le polynôme $\sum_{i=0}^n a_i^p L_i$?

3) Exprimer la matrice de passage de la base $(L_1, \dots, L_n)$ à la base canonique. Déterminer son inverse ⁽¹⁾.

xv 1) Étant donné deux nombres complexes a et b , on considère l'ensemble E , de suites de nombres complexes $(u_n)_{n \geq 0}$, vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \geq 0 \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

a) Montrer que E est un espace vectoriel de dimension 2 et en déterminer une base.

b) Soit r une racine du trinôme $P(X) = X^2 - aX - b$. Montrer que la suite (r^n) appartient à E . Montrer que si r est une racine double, la suite (nr^n) appartient à E . En déduire la forme générale des éléments de E .

2) Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0, u_1 = 1 \text{ et } \forall n \geq 0 \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \text{ (2)}.$$

¹ De façon simple ! – on pensera à utiliser les polynômes symétriques élémentaires.
² Suite de Fibonacci

Exercices sur le chapitre IV

Généralités sur les applications linéaires

I On considère l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par :
 $f(x, y, z) = (x + 2y + 5z, 2x + 4y + 10z, x + 3y + 8z, 3x + 4y + 11z)$.
 Montrer que f est une application linéaire. Déterminer une base de son image, puis de son noyau.

II Mêmes demandes concernant l'application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :
 $f(x, y, z, t) = (x - 3y + 4z - 2t, y - 3z, 2y + 5z + t)$.

III Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui, sur la base canonique de cet espace, s'exprime par la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -4 & 8 & 4 \\ 5 & -10 & -5 \end{bmatrix}.$$

Déterminer son image et son noyau et vérifier que f est une projection.

IV Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus égal à n , pour tout élément P de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$u(P) = P(X+1) \text{ et } v(P) = P(X-1)$$

- 1) Montrer que u et v sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 2) Déterminer les matrices associées à u et v sur la base $(1, X, X^2, \dots, X^n)$.
- 3) Vérifier que ces matrices sont inverses l'une de l'autre.

V Soit E un espace vectoriel sur un corps K . On appelle projecteur tout endomorphisme de E tel que :

$$p^2 = p \circ p = p.$$

1) Montrer que p est un projecteur si et seulement si $\text{Id}_E - p$ est un projecteur. Mettre en évidence une relation entre les images et les noyaux de p et de $\text{Id}_E - p$?

2) Montrer que, si p est un projecteur, $\text{Im } p$ et $\text{Ker } p$ sont deux sous-espaces supplémentaires de E . Justifier, au moyen d'un contre-exemple, que cette propriété n'est pas caractéristique des projecteurs.

3) Soit p et p' deux projecteurs, trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $p + p'$ soit un projecteur ⁽¹⁾.

VI Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K , on considère deux sous-espaces vectoriels F et G de E ainsi que l'application f de $F \times G$ dans E définie par la relation :

$$f(x, y) = x + y.$$

Montrer que f est linéaire, que $\text{Im } f = F + G$ et que le noyau de f est isomorphe à $F \cap G$. En déduire la relation :

$$\dim F + \dim G = \dim(F + G) + \dim(F \cap G).$$

¹ On supposera que K , n'est pas de caractéristique 2 – c'est-à-dire que $1 \neq -1$.

VII Soit E et F des espaces vectoriels de dimension finie sur un même corps K , on considère une application linéaire f de E dans F , un sous-espace vectoriel E' de E , et un sous-espace vectoriel F' de F . Justifier les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned}\dim f(E') &= \dim E' - \dim(\text{Ker } f \cap E'), \\ \dim(f^{-1}(F')) &= \dim(\text{Im } f \cap F') + \dim E - \text{rang } f.\end{aligned}$$

VIII Soit E , F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, sur même corps. On considère deux applications linéaires f de E dans F et g de F dans G . Montrer que :

$$\begin{aligned}\text{rang } g \circ f &\leq \min(\text{rang } f, \text{rang } g), \\ \text{rang } g \circ f &\geq \text{rang } f + \text{rang } g - \dim F.\end{aligned}$$

IX Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3, on considère l'endomorphisme f de E , défini, relativement à une base donnée (e_1, e_2, e_3) , par les relations suivantes :

$$\begin{cases} f(e_1) = 2e_2 + 3e_3 \\ f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3 \\ f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3 \end{cases}$$

- 1) Écrire la matrice de f sur la base donnée.
- 2) Déterminer une base du noyau de l'application $f - \text{Id}_E$.
- 3) On considère l'application linéaire $f^2 = f \circ f$, déterminer le noyau de $f^2 + \text{Id}_E$. Montrer qu'on peut en choisir une base (v, w) telle que $w = f(v)$.
- 4) Montrer que les vecteurs obtenus en 2) et 3) forment une base de E et déterminer la matrice de f relativement à celle-ci.

x Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ et (e_1, e_2, e_3) une base de E .

- 1) On considère l'endomorphisme de E défini par les relations suivantes :

$$\begin{cases} f(e_1) = e_1 + e_2 - e_3 \\ f(e_2) = e_1 - e_2 + e_3 \\ f(e_3) = 2e_1 \end{cases}$$

Déterminer la matrice de f^2 par rapport à la base donnée, en déduire le noyau de f^2 . Montrer qu'il est possible de trouver trois vecteurs u, v et w tels que :

$$v = f(w) \text{ et } u = f(v)$$

qui forment une base de E . Exprimer la matrice de f sur celle-ci.

- 2) Soit φ un endomorphisme de E tel que :

$$\varphi^2 = \varphi \circ \varphi \neq 0 \text{ et } \varphi^3 = \varphi \circ \varphi \circ \varphi = 0$$

et soit w un élément de E tel que : $\varphi^2(w) \neq 0$. On pose :

$$v = \varphi^2(w) \text{ et } u = \varphi(w).$$

Montrer que u, v et w forment une base de E et déterminer la matrice de φ par rapport à celle-ci.

xi Etant donné un nombre réel a , non nul, on considère les trois fonctions f, g et h , définies par les relations suivantes :

$$f(x) = e^{ax}, \quad g(x) = x e^{ax} \quad \text{et} \quad h(x) = x^2 e^{ax},$$

soit E le sous-espace qu'elles engendrent dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

- 1) Montrer que (f, g, h) est une base de E .
- 2) Pour tout φ appartenant à E , on note $D(\varphi)$ sa dérivée. Montrer que D est une application linéaire de E dans lui-même. Déterminer sa matrice A relativement à la base considérée.

3) Soit n un entier naturel quelconque, déterminer A^n . Exprimer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $(3x^2 + 1)e^{ax}$.

4) Montrer que tout élément φ de E admet une unique primitive dans E . On la note $I(\varphi)$. Montrer qu'on définit ainsi une application linéaire de E dans lui-même. En déterminer la matrice B , que peut-on dire de B ?

xii Soit E un espace vectoriel de dimension n , on considère un endomorphisme f de E tel que $f^2 = f \circ f = 0$, soit r son rang.

- 1) Montrer que $\text{Im } f \subset \ker f$. En déduire que $2r \leq n$.
- 2) Montrer qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$, de E , telle que :

$$f(e_i) = e_{r+i} \quad \text{si } 1 \leq i \leq r \quad \text{et} \quad f(e_i) = 0 \quad \text{si } r < i.$$

Donner la forme de la matrice de f relativement à celle-ci.

xiii Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique s'exprime :

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

- 1) On considère les vecteurs :

$$e'_1 = (1, 0, -1), \quad e'_2 = (0, 1, 1) \quad \text{et} \quad e'_3 = (1, 0, 1).$$

Montrer qu'ils forment une base de E et déterminer la matrice B de f par rapport à celle-ci.

- 2) Calculer B^n , pour tout entier n et en déduire A^n .
- 3) On considère les suites (u_n) , (v_n) et (w_n) de nombres réels qui pour tout entier naturel n , vérifient les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - v_n + w_n \\ u_{n+1} = 2v_n \\ w_{n+1} = u_n - v_n + 3w_n \end{cases}$$

et telles que : $u_0 = v_0 = 1$, $w_0 = 2$. Exprimer u_n , v_n et w_n pour tout entier n .

Ébauches de solutions

I. Calcul matriciel

I Dans les deux cas, une condition nécessaire et suffisante est que les matrices A et B soient permutables, c'est-à-dire :

$$AB=BA.$$

II $(I-A)(I+A+\dots+A^{n-1})=I+A+\dots+A^{n-1}-A-A^2-\dots-A^{n-1}-A^n=I-A^n.$

III La multiplication à droite (resp. à gauche) d'une matrice quelconque A par une telle matrice transforme le coefficient a_{ij} en la somme des coefficients de la ligne A_i (de la colonne A). Ainsi, dans le cas général d'une matrice carrée K, d'ordre n, dont tous les coefficients sont égaux à 1, une récurrence immédiate montre que :

$$K^p = n^{p-1}K.$$

IV Pour tous réels a et b, on a :

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La vérification que l'ensemble est un groupe commutatif est banale.

v (1) Soit :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

on a :

$$A^2 = \begin{bmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{bmatrix}$$

a) Si $A^2=0$ alors :

$$a^2+bc=bc+d^2=0.$$

On en déduit que :

$$(a+d)(b-c)=0.$$

- Si $b=c$ alors $a^2+b^2=b^2+d^2=0$, d'où $a=b=c=d=0$
- Si $b \neq c$ alors $d=-a$ et :

- si $b \neq 0$, $c = -\frac{a^2}{b}$,
- si $b=0$, $a=0$ et c reste indéterminé.

On obtient ainsi les matrices :

$$0, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} \text{ où } c \in \mathbf{R} \text{ et } \begin{bmatrix} a & b \\ -\frac{a^2}{b} & -a \end{bmatrix} \text{ où } a \in \mathbf{R} \text{ et } b \in \mathbf{R} - \{0\}.$$

On vérifie qu'elles sont effectivement solutions.

¹ Pour répondre à de telles demandes, il serait vain de procéder par équivalences successives Il est beaucoup plus facile d'exposer la solution en séparant analyse et synthèse. Cette dernière phase se résumant ici à sa plus simple expression, à savoir une vérification banale.

b) Si $A^2 = I$, alors :

$$a^2 + bc = bc + d^2 = 1 \text{ et } (a+d)(b-c) = 0.$$

- Si $a^2 = 1$, alors $bc = 0$ et $a^2 = d^2 = 1$ et dans ces conditions, ou bien :
 - $b = c = 0$ et $a, d \in \{-1, 1\}$,
 - $b \neq 0$ ou $c \neq 0$, alors $b - c \neq 0$ et $a = -d = \pm 1$.
- Si $a^2 \neq 1$, $bc = 1 - a^2 \neq 0$ on a $c = \frac{1-a^2}{b}$ et, de plus $d = -a$.

On obtient les matrices suivantes :

$$\pm I; \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ b & -\varepsilon \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} \varepsilon & b \\ 0 & -\varepsilon \end{bmatrix} \text{ où } \varepsilon \in \{-1, 1\} \text{ et } b \in \mathbf{R}; \begin{bmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{bmatrix} \text{ où } a \in \mathbf{R} \text{ et } b \in \mathbf{R} - \{0\}.$$

...

c) Si $A^2 = A$, alors $a^2 + bc = a$, $b(a+d) = b$, $c(a+d) = c$ et $d^2 + bc = d$.

- Si $a^2 = a$, alors $bc = 0$ et $d^2 = d$. Dans ces conditions, ou bien :
 - $a, d \in \{0, 1\}$ si $b = c = 0$,
 - $a \in \{0, 1\}$ et $d = 1 - a$, si $b \neq 0$ ou $c \neq 0$.
- Si $a^2 \neq a$, alors $bc \neq 0$, $c = \frac{a(1-a)}{b}$ et $d = 1 - a$.

On obtient les matrices suivantes :

$$O, I, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} \text{ où } b \in \mathbf{R}; \begin{bmatrix} a & b \\ \frac{a(1-a)}{b} & 1-a \end{bmatrix} \text{ où } a \in \mathbf{R} \text{ et } b \in \mathbf{R} - \{0\}.$$

...

- VI a) L'algèbre $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{2 \times 2}$ se compose de $2^4 = 16$ éléments.
 b) Elle comporte $2^3 = 8$ matrices symétriques et antisymétriques ⁽¹⁾.
 c) La solution de l'exercice précédent nous donne :

$$A^2 = 0 : \quad 0, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$A^2 = I : \quad I, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$A^2 = A : 0, I, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Remarque : on a ainsi passé en revue 14 des 16 éléments, les deux qui restent sont :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ils vérifient $A^2 = B$ et $B^2 = A$.

VII On a :

$$(I + A)(I - A) = I^2 + AI - IA - A^2 = I - A^2.$$

$$(I + A)^2 = I^2 + AI + IA + A^2 = I + 2A + A^2.$$

$$(I - A)^2 = I^2 - AI - IA + A^2 = I - 2A + A^2.$$

Il est alors évident que chacune des conditions énoncées est équivalente à :

$$A^2 = I.$$

¹ Comme dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, tout élément est égal à son opposé, toute matrice symétrique est aussi antisymétrique

viii 1) On a, de façon évidente : $K = A + 4I$ et l'on vérifie que :
 $A^2 + 8A + 16I = K^2 = 3K = 3(A + 4I)$.

On en déduit que :

$$A^2 + 5A + 4I = 0.$$

On peut encore écrire :

$$\left[-\frac{1}{4}(A + 5I)\right]A = I = A\left[-\frac{1}{4}(A + 5I)\right]$$

La matrice A est inversible et :

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}(A + 5I).$$

2) Dans le cas général, on reprend exactement les calculs effectués au point précédent. On vérifie successivement qu'on a :

$$K = A - aI, nK = K^2 = A^2 - 2aA + a^2I$$

$$n(A - aI) = A^2 - 2aA + a^2I$$

$$A^2 - (n + 2a)A + a(n + a)I = 0$$

$$A(A - (n + 2a)I) = -a(n + a)I$$

- Si $a = 0$ ou $a = -n$, A n'est pas inversible.
- Si $a(n + a) \neq 0$, A est inversible et :

$$A^{-1} = \frac{1}{a(n + a)}[(n + 2a)I - A].$$

ix Si les matrices A et B sont permutables, chacune d'elles est permutable avec toute puissance de l'autre. La démonstration demandée est alors en tout point identique à celle de la formule du binôme pour les nombres.

x On pose $B = A - I$ et l'on vérifie que :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } B^3 = 0.$$

Il est évident que B et I sont permutables. Dans ces conditions, la formule du binôme devient :

$$A^n = (I + B)^n = I + nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2.$$

Ce qui donne :

$$A^n = \begin{bmatrix} 0 & na & nb + \frac{n(n-1)}{2}ac \\ 0 & 1 & nc \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

xi La multiplication à gauche (resp. à droite) par J inverse l'ordre de ses lignes (resp. de ses colonnes). On a ainsi $J^2 = I$.

xii De façon générale, toute matrice de la forme $A^t A$ est symétrique, H est donc une somme de matrices symétriques, elle est symétrique. De plus, on a :

$$H^2 = I - \frac{4}{{}^t V V} V^t V + \frac{4}{({}^t V V)^2} (V^t V)(V^t V)$$

Comme ${}^t V V$ est un scalaire on a :

$$(V^t V)(V^t V) = V({}^t V V){}^t V = ({}^t V V)(V^t V).$$

le résultat demandé en découle immédiatement.

xiii 1) Soit A une matrice carrée ordre n on pose $B = E_{ij}A$ et $C = AE_{ij}$. On aura ainsi :

- $B_k = 0$ pour $k \neq i$ et $B_i = A_j$,
- $C^k = 0$ pour $k \neq j$ et $C^j = A^i$.

Il s'ensuit que :

$$B = C \Leftrightarrow \begin{cases} a_{jk} = 0 & \text{si } k \neq j \\ a_{ki} = 0 & \text{si } k \neq i \\ a_{ii} = a_{jj} \end{cases}$$

En d'autres termes, la $j^{\text{ème}}$ ligne et la $i^{\text{ème}}$ colonne ont leurs coefficients nuls en dehors de la diagonale et leurs coefficients diagonaux sont égaux.

1) Si A permute avec tous les éléments de $\mathbb{R}^{n \times n}$, A permute avec les E_{ij} , pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, il s'ensuit que : $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $a_{ii} = a_{jj}$ pour tous i et j , on a donc :

$$a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = \lambda.$$

Ce qui justifie que A est une matrice scalaire. La réciproque est évidente.

xiv Le calcul des premières puissances de A suggère, pour A^n , la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} C_{p-1}^{p-1} & C_p^{p-1} & \dots & C_{n+p-1}^{p-1} \\ 0 & C_{p-1}^{p-1} & \dots & C_{n+p-2}^{p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{p-1}^{p-1} \end{bmatrix}.$$

On démontre que c'est la bonne, par récurrence sur p .

On notera que chaque coefficient du produit $A^{p-1}A = A^p$ s'obtient en ajoutant, au coefficient correspondant de A^{p-1} , tous les coefficients qui le précèdent sur sa ligne. La formule donnée en indication permet de conclure.

xv Notons C la matrice donnée, la multiplication par blocs de A par C donne les termes suivants :

$$(1,1): A_{11}A_{11}^{-1}(I + A_{12}B^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}) - A_{12}B^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} = I,$$

$$(1,2): -A_{11}A_{11}^{-1}A_{12}B^{-1} + A_{12}B^{-1} = 0,$$

$$\begin{aligned} (2,1): & A_{21}A_{11}^{-1}(I + A_{12}B^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}) - A_{22}B^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} \\ &= A_{21}A_{11}^{-1} + (A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} - A_{22})B^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} \\ &= A_{21}A_{11}^{-1} - BB^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$(2,2): -A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}B^{-1} + A_{22}B^{-1} = BB^{-1} = I.$$

Remarques.

1) Il n'est pas sans intérêt d'effectuer l'analyse qui donne la forme de A^{-1} .

2) Une telle formule peut être utile pour inverser des matrices de grande taille. En particulier, pour une matrice triangulaire par blocs, on a :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}.$$

II. Élimination

I La méthode de Gauss conduit au système équivalent suivant :

$$\begin{cases} x - y + 2z = a \\ 3y - 3z = -a + b \\ 2z = a + b - c \\ 0 = 7a - b + 3c - 6d \end{cases}$$

et donne immédiatement la condition demandée.

II Le premier système admet pour unique solution :

$$x = 1, y = 2, z = -1, t = 1.$$

Le second système est incompatible dans le premier cas, compatible dans le second où il admet pour solution :

$$\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 23 \\ 22 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -9 \\ -8 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

III On pose $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, les hypothèses se traduisent par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ a + 2b + 4c + 8d = 1 \\ a + 3b + 9c + 27d = 9 \end{cases}$$

On le résout, on obtient la solution générale :

$$9 - 12x + 4x^2 + d(-6 + 11x - 6x^2 + x^3), d \in \mathbb{R}.$$

La solution particulière demandée est celle où $d = 1$:

$$3 - x - 2x^2 + x^3.$$

IV ...

V (1) La matrice est inversible si, et seulement si, $d_1 d_2 \dots d_n \neq 0$. Dans ce cas, l'inverse s'exprime :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & d_1^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & d_{n-1}^{-1} & \dots & 0 \\ d_n^{-1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

(2) La matrice considérée est toujours régulière. Elle admet pour inverse :

$$\begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -a & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -a & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

(3) On note A la matrice donnée. S'il existe i tel que $a_i = 1$, elle a deux lignes égales, elle est donc singulière – sa multiplication à droite par une matrice quelconque donnant toujours une matrice qui a deux lignes égales, le résultat n'est jamais la matrice identité. On suppose donc $a_i \neq 1$, pour $i = 1, \dots, n-1$ et l'on convient de poser :

$$b_i = \frac{1}{a_i - 1}$$

On effectue les opérations suivantes sur les lignes de $[A | I]$:

1	1	1	...	1	1	1	0	...	0	0	
0	$a_1 - 1$	0	...	0	0	1	1	...	0	0	$\leftarrow L_2 - L_1$
0	0	0	...	$a_{n-2} - 1$	0	-1	0	...	0	0	$\leftarrow L_{n-1} - L_1$
0	0	0	...	0	$a_{n-1} - 1$	-1	0	...	0	0	$\leftarrow L_n - L_1$

1	1	1	...	1	1	1	0	...	0	0	
0	1	0	...	0	0	$-b_1$	b_1	...	0	0	$\leftarrow b_1 L_2$
0	0	0	...	1	0	$-b_{n-2}$	0	...	b_{n-2}	0	$\leftarrow b_{n-2} L_{n-1}$
0	0	0	...	0	1	$-b_{n-1}$	0	...	0	b_{n-1}	$\leftarrow b_{n-1} L_n$

1	0	0	...	0	0	β	$-b_1$	...	$-b_{n-2} - b_{n-1}$		$\leftarrow L_1 - L_2 \dots - L_n$
0	1	0	...	0	0	$-b_1$	b_1	...	0	0	
0	0	0	...	1	0	$-b_{n-2}$	0	...	b_{n-2}	0	
0	0	0	...	0	1	$-b_{n-1}$	0	...	0	b_{n-1}	

où l'on a posé $\beta = 1 - b_1 - \dots - b_{n-1}$.

La condition :

$$(a_1 - 1) \dots (a_{n-1} - 1) \neq 0$$

est apparue comme nécessaire pour que A soit inversible. Si elle est vérifiée, on obtient :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{a_i - 1} & -\frac{1}{a_1 - 1} & -\frac{1}{a_2 - 1} & \dots & -\frac{1}{a_{n-1} - 1} \\ -\frac{1}{a_1 - 1} & \frac{1}{a_1 - 1} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{a_2 - 1} & 0 & \frac{1}{a_2 - 1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{a_{n-1} - 1} & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{a_{n-1} - 1} \end{bmatrix}$$

(4) Soit M la matrice donnée, on suppose qu'elle est régulière, soit $A = [a_{ij}]$ son inverse. Comme M est symétrique, nous savons que A est symétrique. Il suffit donc de déterminer les coefficients a_{ij} tels que $i \geq j$.

On commence par déterminer la première ligne de A . On a :

$$2a_{1,1} - a_{1,2} = 1, \dots, -a_{1,j-1} + 2a_{1,j} - a_{1,j+1} = 0, \dots, -a_{1,n-1} + 2a_{1,n} = 0$$

On écarte provisoirement la première condition, les relations suivantes :

$$a_{1,n-1} = 2a_{1,n} \text{ et } a_{1,j} = \frac{a_{1,j-1} + a_{1,j+1}}{2} \text{ pour } j = n-1, \dots, 2$$

montrent que :

$$a_{1,n}, a_{1,n-1}, \dots, a_{1,1}$$

est une suite arithmétique de raison $a_{1,n}$. On a donc, en particulier :

$$a_{1,1} = na_{1,n} \text{ et } a_{1,2} = (n-1)a_{1,n}$$

On reporte dans la relation non encore utilisée : $2a_{1,1} - a_{1,2} = 1$, il vient :

$$2na_{1,n} - (n-1)a_{1,n} = 1$$

$$a_{1,n} = \frac{1}{n+1}.$$

On sait alors que les coefficients la première ligne et la première colonne de A sont, dans l'ordre :

$$\frac{n}{n+1}, \frac{n-1}{n+1}, \dots, \frac{2}{n+1}, \frac{1}{n+1}.$$

De façon analogue, pour $i > 1$, on a les relations suivantes :

$$2a_{i,1} - a_{i,2} = 0 \text{ et } -a_{i,j-1} + 2a_{i,j} - a_{i,j+1} = 0 \text{ pour } j = 2, \dots, i-1.$$

Ce qui montre que :

$$a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,i}$$

est une suite arithmétique de raison $a_{i,1}$, ceci pour $i = 2, \dots, n$. Comme on en connaît le premier terme, on peut conclure. On obtient ainsi :

$$A = \frac{1}{n+1} \begin{bmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ n-1 & 2(n-1) & 2(n-2) & \dots & 6 & 4 & 2 \\ n-2 & 2(n-2) & 3(n-2) & \dots & 9 & 6 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 3 & 6 & 9 & \dots & 3(n-2) & 3(n-1) & n-2 \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 3(n-1) & 2(n-1) & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \end{bmatrix}$$

Ce qui montre que M est effectivement inversible et, compte-tenu de la symétrie, son inverse $[a_{ij}]$ se définit comme suit ⁽¹⁾ :

$$a_{i,j} = \frac{n-i+1}{n+1} j \text{ pour } j = 1, \dots, i, i = 1, \dots, n,$$

¹ Inutile de préciser qu'une telle solution est l'aboutissement d'un certain nombre de tâtonnements et qu'elle ne rend guère compte de la démarche réellement suivie pour parvenir au résultat.

vi On réduit simultanément les trois systèmes :

$$\begin{array}{|ccc|ccc|} \hline 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|ccc|ccc|} \hline 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \hline 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ \hline \end{array}$$

On peut présenter la solution sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} [\alpha \ \beta \ \gamma].$$

où α , β et γ sont trois nombres réels quelconques.

vii La matrice AB est régulière et BA est singulière. On note que si $m > n$, Le produit AB est égal au produit des matrices carrées obtenues en complétant A et B respectivement par des colonnes de t des lignes de zéros :

$$AB = [A \mid 0] \begin{bmatrix} B \\ - \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, AB est égal à un produit de matrices singulières, ce n'est donc pas une matrice inversible.

viii 1) Soit A une matrice de format $m \times n$ et P une matrice élémentaire d'ordre n . On applique ce qui est établi dans le cours au produit ${}^tP^tA$. On peut alors affirmer que la multiplication à droite de A par :

- P_{ij} échange les colonnes A^i et A^j ,
- $P_i(\lambda)$ remplace A^i par λA^i ,
- $P_{ij}(\lambda)$ remplace A^j par $A^j + \lambda A^i$.

2) Soit A une matrice de format $m \times n$, on sait qu'il existe une matrice carrée P , d'ordre m , régulière, telle que $PA = B$ soit réduite échelonnée. Une suite d'échanges de colonnes de B conduit à une matrice de la forme :

$$\begin{bmatrix} I_r & U \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On peut éliminer les coefficients de U par des opérations élémentaires sur les colonnes. Ces transformations s'interprètent comme des multiplications à droite par des matrices élémentaires. En conséquence, il existe une matrice régulière Q , d'ordre n , telle que :

$$PAQ = BQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

ix 1) Partant de $[A|I]$, l'algorithme de Gauss conduit au tableau suivant :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}$$

On pose :

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

On a $U=PA$. On inverse P – on sait que P est régulière. Pour ce faire, le plus simple est de résoudre les systèmes suivants. Ils se présentent déjà sous forme échelonnée :

$$\begin{cases} x & = 1 & | & 0 & | & 0 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y & = 0 & | & 1 & | & 0 \\ -x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z & = 0 & | & 0 & | & 1 \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} x=1 & | & 0 & | & 0 \\ y=1 & | & -2 & | & 0 \\ z=2 & | & -1 & | & \frac{3}{2} \end{cases}$$

On a ainsi :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = LU \text{ (1).}$$

2) L'unicité est la conséquence du caractère unitaire de l'une des matrices – on a choisi la seconde. Pour prouver ce fait, on considère deux décompositions de ce type d'une même matrice A :

$$A = LU = L_1U_1.$$

Si A est régulière L , U , L_1 et U_1 le sont aussi. On a donc :

$$M = L^{-1}AU_1^{-1} = UU_1^{-1} = L^{-1}L_1.$$

La matrice ainsi obtenue est :

- triangulaire supérieure et unitaire comme UU_1^{-1} ,
- triangulaire inférieure comme $L^{-1}L_1$.

On a donc :

$$M = I, \quad U_1 = U \text{ et } L_1 = L.$$

On peut encore décomposer L en produit d'une matrice triangulaire inférieure unitaire et d'une matrice diagonale :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il est facile de montrer que cette nouvelle décomposition (dite : "LDU") est unique.

Remarque : de telles décompositions existent chaque fois qu'il est possible de mener à bien l'algorithme de Gauss sans échange de lignes. Ajoutons qu'il ne s'agit pas là d'un fait anecdotique car les décompositions de ce type jouent un rôle important en analyse numérique – ce qui n'est une toute autre histoire.

1 "Lower" "Upper".

x 1) Si A admet un inverse à gauche, A est simplifiable à gauche, c'est-à-dire que :

$$AX = AY \Leftrightarrow X = Y$$

En conséquence, tout système linéaire $AX = V$ admet au plus une solution, ce qui entraîne que $r = n \leq m$. Réciproquement, si $r = m \leq n$, l'algorithme de Gauss-Jordan donne, en partant de $[A | I_m]$, une matrice de la forme :

$$\begin{bmatrix} I_n & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \text{ telle que } \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}.$$

On a ainsi $P_1 A = I_n$, P_1 est donc un inverse à gauche de A . La démonstration donne, en prime, un algorithme calcul. Il est notablement plus simple que celui qu'on pourrait concevoir en posant directement le problème en termes de système linéaire.

Si $m > n$, on pourra ajouter à toute ligne de P_1 une combinaison linéaire des lignes de P_2 sans modifier le produit $P_1 A = I_n$. L'inverse à gauche n'est donc pas unique. On pourrait montrer que la remarque ci-dessus donne la forme générale de ces matrices.

2) Si B est inverse à droite de A , ${}^t B$ est inverse à gauche de ${}^t A$.

Remarque : la formalisation des opérations sur les lignes et son interprétation en termes de produit matriciel n'était pas un effort gratuit. On dispose là d'un outil simple et efficace, utile pour les calculs explicites et fécond du point de vue théorique.

III. Espaces vectoriels

I Les deux premiers sous-ensembles sont des sous-espaces vectoriels.

- Ils contiennent le vecteur nul $(0, 0)$ de façon évidente.
- Ils sont stables pour les deux lois puisque pour tout scalaire λ , on a

$$x=0 \text{ et } x'=0 \Rightarrow x+\lambda x'=0,$$

$$x+y=0 \text{ et } x'+y'=0 \Rightarrow (x+x')+\lambda(y+y')=0.$$

Le troisième ne contient pas le vecteur nul, le quatrième contient $(1, 0, 0)$ mais pas son opposé $(-1, 0, 0)$, ce ne sont donc même pas des sous-groupes de $\mathbb{R}^3$.

II 1) La vérification des huit conditions de la définition ne pose aucun problème car elles sont satisfaites sur chacune des composantes du produit cartésien.

2) Si E et F ont pour dimensions respectives n et m , on considère une base :

$$(e_1, \dots, e_n) \text{ de } E, (f_1, \dots, f_m) \text{ de } F$$

et l'on montre que les $n+m$ vecteurs suivants de $E \times F$:

$$(e_1, 0), \dots, (e_n, 0), (0, f_1), \dots, (0, f_m)$$

forment une base de $E \times F$.

Soit (x, y) un élément quelconque de $E \times F$, comme :

$$(e_1, \dots, e_n) \text{ engendre } E \text{ et } (f_1, \dots, f_m) \text{ engendre } F,$$

il existe des scalaires

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ et } \mu_1, \dots, \mu_m,$$

tels que :

$$x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \text{ et } y = \mu_1 f_1 + \dots + \mu_m f_m.$$

Ce qui donne :

$$(x, y) = \lambda_1(e_1, 0) + \dots + \lambda_n(e_n, 0) + \mu_1(0, f_1) + \dots + \mu_m(0, f_m)$$

et montre que les vecteurs considérés engendrent $E \times F$.

On considère $n+m$ scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m$, tels que :

$$\lambda_1(e_1, 0) + \dots + \lambda_n(e_n, 0) + \mu_1(0, f_1) + \dots + \mu_m(0, f_m) = (0, 0).$$

Cette relation devient :

$$(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n, \mu_1 f_1 + \dots + \mu_m f_m) = (0, 0).$$

Elle donc équivalente à :

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0 \text{ et } \mu_1 f_1 + \dots + \mu_m f_m = 0.$$

Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $(f_1, \dots, f_m)$ est une base de F , il vient :

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \text{ et } \mu_1 = \dots = \mu_m = 0.$$

Les vecteurs considérés sont donc linéairement indépendants. Ces $m+n$ vecteurs forment une base de $E \times F$. Cet espace vectoriel est donc de dimension $m+n$.

Remarque : on pourrait aussi vérifier que les deux sous-ensembles suivants :

$$E \times \{0\} \text{ et } \{0\} \times F$$

sont des sous espaces vectoriels qui admettent respectivement pour base :

$$((e_1, 0), \dots, (e_n, 0)) \text{ et } ((0, f_1), \dots, (0, f_m)).$$

Puis justifier que :

$$E \times F = (E \times \{0\}) \oplus (\{0\} \times F).$$

En réunissant une base de $E \times \{0\}$ et une base de $\{0\} \times F$ on forme une base de $E \times F$.

III 1) La vérification est immédiate.

2) Montrons que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est un système libre. On considère trois nombres rationnels a, b et c tels que :

$$a1 + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0.$$

On a :

$$a + b\sqrt{2} = -c\sqrt{3}.$$

En élevant au carré, il vient :

$$a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2} = 3c^2,$$

$$2ab\sqrt{2} = 3c^2 - a^2 - 2b^2.$$

Si ab était non nul, on aurait :

$$\sqrt{2} = \frac{3c^2 - a^2 - 2b^2}{2ab}$$

et $\sqrt{2}$ serait un nombre rationnel – ce qui est faux – on a donc $ab = 0$. La relation de départ prend l'une des formes :

$$b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0 \text{ ou } a + c\sqrt{3} = 0.$$

Dans les deux cas, on aboutit à la conclusion que $c = 0$, puis :

$$a = b = c = 0.$$

Ce qui justifie que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est un système libre de E . Comme il engendre E , c'est une base.

3) Comme $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est l'unique présentation d'un élément de E sur la base considérée, celui-ci est non nul. Il constitue donc une base du sous-espace qu'il engendre. On a donc :

$$\dim(\sqrt{2} + \sqrt{3})\mathbb{Q} = 1.$$

Il est clair que :

$$\sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3}.$$

On en déduit que :

$$E = \text{esp}(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}) \subseteq (1, \sqrt{2} + \sqrt{3}, \sqrt{3}),$$

puis :

$$\text{esp}(1, \sqrt{2} + \sqrt{3}, \sqrt{3}) = E.$$

Le système $(1, \sqrt{2} + \sqrt{3}, \sqrt{3})$ engendre E , il a trois éléments, c'est autant que la dimension de E , c'est donc une base de E . On en conclut que le sous-espace de E engendré par 1 et $\sqrt{3}$ est supplémentaire de $(\sqrt{2} + \sqrt{3})\mathbb{Q}$.

Remarque : $\text{esp}(1, \sqrt{2})$ ou $\text{esp}(1, \sqrt{2} - \sqrt{3})$, ... ou encore $\text{esp}(1789, 1989\sqrt{2} + 1990\sqrt{3})$ conviendraient tout aussi bien.

IV Comme les coordonnées de a et b ne sont pas proportionnelles, ces éléments sont linéairement indépendants. Ils forment donc une base de $\text{esp}(a, b)$. De même (c, d) est une base de $\text{esp}(c, d)$.

On peut avoir recours à la méthode de Gauss :

a	b	c	d
1	2	3	5
-1	3	7	0
-2	-1	0	-7
0	5	10	5
0	3	6	3
0	0	0	0

On sait alors que (a, b) une base de $\text{esp}(a, b, c, d)$. On a donc $c \in \text{esp}(a, b)$ et $d \in \text{esp}(a, b)$. Il s'ensuit que :

$$\text{esp}(c, d) \subseteq \text{esp}(a, b).$$

Comme de plus, ces sous-espaces ont la même dimension, ils sont égaux.

Remarque : dans un cas aussi simple, on peut voir directement que :

$$c = -a + 2b \text{ et } d = 3a + b$$

et conclure comme ci-dessus.

v On procède comme à l'exercice précédent. On place x_2 en tête de façon à avoir un premier pivot égal à 1 :

2	1	3	2	1	3	2	1	3
1	2	-1						
2	1	1	0	3	-3			
0	3	-3	0	3	-3	0	0	0
1	1	0	0	1	-1	0	0	0

Ce système de vecteurs est de rang deux.

Remarque : ici encore, on aurait pu voir directement que :

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

Le rang de ce système est donc au plus égal à 2. Comme il est clair que x_1 et x_2 n'ont pas leurs coordonnées proportionnelles, ces deux vecteurs sont linéairement indépendants. Ce rang est donc au moins 2.

vi Comme on demande de déterminer les coordonnées de w , c'est la méthode de Gauss-Jordan qui s'impose.

Remarque : ici, il est prudent de rendre, à chaque pas, les pivots égaux à 1.

1	2	3	w	1	2	3	w
1	-1	i	1+i	1	0	0	0
-1	i	1	1-i	0	1	-i	-1-i
i	1	-1	i	0	0	-1+i	1+2i
1	-1	i	1+i	1	0	0	0
0	-1+i	1+i	2	0	1	-i	-1-i
0	1+i	0	1	0	0	1	$\frac{1}{2}(1-3i)$
1	-1	i	1+i	1	0	0	0
0	1	-i	-1-i	0	1	0	$\frac{1}{2}(1-i)$
0	1+i	0	1	0	0	1	$\frac{1}{2}(1-3i)$

Sur le tableau final, on lit que v_1, v_2 et v_3 forment une base de $\mathbb{C}^3$ et que :

$$w = \frac{1}{2}(1-i)v_2 + \frac{1}{2}(1-3i)v_3.$$

vii De façon générale, deux vecteurs (x, y) et (x', y') de $E = K \times K$ sont liés si et seulement si leurs composantes sont proportionnelles, c'est-à-dire si :

$$xy' = yx'$$

On a pour :

- $\mathcal{L} = ((1, 1), (1, 2)) : 1 \times 2 \neq 1 \times 1 \pmod{5},$
- $\mathcal{S} = ((2, 1), (1, 3)) : 2 \times 3 = 1 \times 1 \pmod{5}.$

ce qui justifie que $\mathcal{L}$ est libre et $\mathcal{S}$ est lié.

viii 1) Il est clair que K contient $\mathbf{Q}$. La vérification que K est sous-groupe pour l'addition est immédiate, ainsi que celle de la stabilité de K pour la multiplication. Reste à montrer que l'inverse de tout élément non nul de K est dans K . Ceci découle immédiatement de l'identité :

$$(p + q\sqrt{2})(p - q\sqrt{2}) = p^2 - 2q^2$$

qui montre que si $p + q\sqrt{2} \neq 0$, on a :

$$(p + q\sqrt{2})^{-1} = \frac{1}{p^2 - 2q^2} (p - q\sqrt{2}) \in K.$$

2) Comme $\mathbf{Q}$ est un sous-corps de K , K est un espace vectoriel sur $\mathbf{Q}$. Il est contenu dans $\mathbf{R}$, c'est donc bien un sous espace vectoriel de $\mathbf{R}$.

Par définition, 1 et $\sqrt{2}$ engendrent K et comme $\sqrt{2}$ est irrationnel, ces deux éléments sont linéairement indépendants. Ils forment une base et K est de dimension 2 sur $\mathbf{Q}$.

3) Comme le quotient $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$ est irrationnel, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{6}$ sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$. La dimension de E est donc 2.

Soit x un élément de $K \cap E$, il existe des nombres rationnels p, q, r, s tels que :

$$\begin{aligned} x &= p + q\sqrt{2} = r\sqrt{3} + s\sqrt{6} \\ p + q\sqrt{2} &= (r + s\sqrt{2})\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Si $x \neq 0$, on a :

$$\sqrt{3} = \frac{p + q\sqrt{2}}{(r + s\sqrt{2})}$$

et comme K est un sous-corps de $\mathbf{Q}$, $\sqrt{3}$ appartient à K , ce qui est exclu (cf. exercice 3). Ce qui justifie que $x = 0$, puis $K \cap E = \{0\}$. La somme de K et de E dans $\mathbf{R}$ est donc directe et $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ est une base de $H = K \oplus E$ qui, de ce fait, est de dimension 4.

4) Il s'ensuit immédiatement que si x est un élément non nul de H , $(x, x\sqrt{2}, x\sqrt{3}, x\sqrt{6})$ est un système libre de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{Q}$. De plus, il existe des rationnels p, q, r, s tels que :

$$x = p + q\sqrt{2} + r\sqrt{3} + s\sqrt{6}.$$

On a donc :

$$x\sqrt{2} = 2q + p\sqrt{2} + 2s\sqrt{3} + r\sqrt{6} \in H.$$

On montre de la même façon que $x\sqrt{3}$ et $x\sqrt{6}$ sont aussi dans H . Ce qui fait que :

$$(x, x\sqrt{2}, x\sqrt{3}, x\sqrt{6})$$

est un système libre de H et comme H est de dimension 4, c'en est une base.

Comme $1 \in H$, il existe des rationnels p, q, r, s tels que :

$$1 = px + qx\sqrt{2} + rx\sqrt{3} + sx\sqrt{6} = x(p + q\sqrt{2} + r\sqrt{3} + s\sqrt{6}),$$

de sorte que :

$$x^{-1} = p + q\sqrt{2} + r\sqrt{3} + s\sqrt{6} \in H.$$

Comme par ailleurs on vérifie facilement que H est un sous-anneau de $\mathbf{R}$, on en conclut que H est un sous-corps de $\mathbf{R}$.

ix La méthode de Gauss appliquée à la matrice de ce système de vecteurs donne :

3	1	1	0	2	-1	0	0	m-1
1	1	0	0	2	-1	0	0	m-1
6	4	m	0	2	m-2	0	0	m-1

Ce système est lié si son rang est inférieur à 3. Ceci a lieu si, et seulement si, $m = 1$.

x 1) Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{A}(I)$ et λ un nombre réel, on sait que :

$f + \lambda g$ est une fonction continue

et comme la fonction constante : $x \mapsto 0$ est continue, $\mathcal{A}(I)$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble $\mathbb{R}^I$, des fonctions réelles définies sur l'intervalle I .

2) On considère des nombres réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que :

$$\alpha f + \beta g + \gamma h + \delta k = 0.$$

On a donc :

$$\forall x \in [0, \pi] \quad \alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma h(x) + \delta k(x) = 0.$$

On donne à x des valeurs particulières :

x	$\sin x$	$\cos x$	$\sin 2x$	$\cos 2x$
0	0	1	0	1
$\frac{\pi}{2}$	1	0	0	-1
π	0	-1	0	1
	α	β	γ	δ

ce qui fournit les relations suivantes :

$$\beta + \delta = \alpha - \delta = -\beta + \delta = 0.$$

Elles entraînent que :

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0.$$

Les quatre fonctions considérées sont bien linéairement indépendantes.

Remarque : de façon plus générale, on peut montrer que :

$$(1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots)$$

est un système libre de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

xi Soit U l'hyperplan d'équation :

$$x + y + z + t = 0,$$

un système de solutions canoniques de cette équation linéaire en donne une base :

$$(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1).$$

On obtient de la même façon une base de V :

$$(-1, 1, 0, 0), (0, 0, 2, 1).$$

Le sous-espace $U \cap V$ admet pour équation :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + y = 0 \\ z - 2t = 0 \end{cases}$$

Ce système est équivalent à :

$$x + y = z + t = 0.$$

Il est de rang 3, sa solution est la droite engendrée par $(-1, 1, 0, 0)$.

On forme une base :

- de U en adjoignant à $(-1, 1, 0, 0)$ les vecteurs $(0, 1, 0, -1)$ et $(0, 0, 1, -1)$,
- de V en réunissant $(-1, 1, 0, 0)$ et $(0, 0, 2, 1)$.

Remarque : comme on a :

$$\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) = 3 + 2 - 1 = 4,$$

on est assuré que $U + V = \mathbb{R}^4$ et que les quatre vecteurs ainsi considérés :

$$(-1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1), (0, 0, 2, 1)$$

forment une base de cet espace.

xii Comme $X^n = [1 = (X-1)]^n$, les polynômes de la base usuelle s'expriment immédiatement en fonction des polynômes donnés, ce qui donne :

$$X = 1 + (X-1), \quad X^2 = 1 + 2(X-1) + (X-1)^2, \quad X^3 = 1 + 3(X-1) + 3(X-1)^2 + (X-1)^3.$$

Les quatre polynômes forment donc un système générateur. Comme l'espace vectoriel considéré est de dimension 4, ils forment une base. On en déduit immédiatement l'expression de P dans la nouvelle base :

$$\begin{aligned} P(X) &= aX^3 + bX^2 + cX + d \\ &= a + b + c + d + (3a + 2b + c)(X-1) + (3a + b)(X-1)^2 + a(X-1)^3. \end{aligned}$$

Remarque : on retrouve ainsi la formule de Taylor qui, de façon générale, s'écrit pour un polynôme de degré n :

$$P(X) = P(a) + \frac{x-a}{1!} P'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} P''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} P^{(n)}(a).$$

xiii On a :

$$P_0 = 1, \quad P_1 = X, \quad P_2 = X^2 - X, \quad P_3(X) = X^3 - 3X^2 + 2X$$

On en déduit immédiatement que :

$$1 = P_0, \quad X = P_1, \quad X^2 = P_2 + P_1, \quad X^3 = P_3 + 3P_2 + P_1$$

On conclut comme à l'exercice précédent. Les matrices de passage s'écrivent de façon immédiate à partir de ces expressions :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

xiv 1) Il est clair que :

$$L_k(a_i) = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq k \\ 1, & \text{si } i = k \end{cases}$$

On considère une combinaison linéaire des L_k :

$$P = \sum_{k=1}^n \lambda_k L_k.$$

On a montré que :

$$P(a_i) = \lambda_i \text{ pour } i = 1, \dots, n.$$

Il s'ensuit que, si $P = 0$, alors :

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0,$$

ces polynômes forment donc une famille libre. Comme leur nombre est égal à la dimension de V , ils en constituent une base.

2) On sait alors que tout polynôme P , de V , s'exprime :

$$P = \sum_{k=1}^n P(a_k) L_k.$$

Il s'ensuit que :

$$\sum_{i=0}^n a_i^p L_i = X^p.$$

3) Il est alors immédiat que la matrice de Vandermonde :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

est la matrice de passage demandée.

Son inverse admet pour terme générique a_{ij} , le coefficient du monôme de degré i de :

$$L_j = \frac{1}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (a_k - a_i)} \prod_{i=1}^n (X - a_i).$$

Notons :

$$S_k(X_1, \dots, X_{n-1}) = \sum_{p_1 < p_2 < \dots < p_k} X_{p_1} X_{p_2} \dots X_{p_k}.$$

le $k^{\text{ème}}$ polynôme symétrique des $n-1$ indéterminées $X_1, \dots, X_{n-1}$. On a :

$$a_{ij} = \frac{(1)^{n-1-i} S_{n-1-i}(a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_{n-1})}{\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq j}}^n (a_j - a_p)}.$$

xv 1) a) Le principe de récurrence montre qu'une suite de E est bien définie par la donnée de ses deux premiers termes qui peuvent être choisis de façon arbitraire. Il existe donc deux suites de E , $s = (s_n)$ et $t = (t_n)$ dont les premiers termes sont respectivement :

$$s_0 = 1, s_1 = 0 \text{ et } t_0 = 0, t_1 = 1.$$

Soit u une suite quelconque de E , on a :

$$u_0 = u_0 s_0 + u_1 t_0 \text{ et } u_1 = u_0 s_1 + u_1 t_1$$

u_0 et u_1 sont donc les deux premiers termes de la suite $u_0 s + u_1 t$. Une récurrence banale montre que :

$$u = u_0 s + u_1 t.$$

Les deux suites s et t engendrent donc E , comme il est clair qu'elles sont linéairement indépendantes, elles forment une base. L'espace vectoriel E est bien de dimension 2 et admet pour base les suites :

$$1, 0, b, ab, \dots \text{ et } 0, 1, a, a^2 + b, \dots$$

b) Si r est un nombre complexe non nul. On a :

$$(r^n) \in E \Leftrightarrow r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n \Leftrightarrow r^2 - ar - b = 0.$$

Ainsi, la suite (r^n) appartient à E si, et seulement si, r est racine de l'équation suivante (1) :

$$x^2 - ax - b = 0$$

Si r est racine double, on a :

$$a^2 + 4b = 0, \quad r = \frac{a}{2}, \quad b = -r^2$$

et alors :

$$a(n+1)r^{n+1} + bnr^n = [a(n+1)r + bn]r^n = [2(n+1) - n]r^{n+2} = (n+2)r^{n+2}.$$

La suite (nr^n) appartient donc aussi à E .

- Si P a deux racines distinctes r_1 et r_2 , les suites

$$1, r_1, r_1^2, \dots \text{ et } 1, r_2, r_2^2, \dots$$

ne sont pas proportionnelles, elles forment donc une base de E et l'on a :

$$E = \{(u_n) \mid u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n, \lambda \in \mathbb{C} \text{ et } \mu \in \mathbb{C}\}$$

- Si P admet r pour racine double, les suites :

$$1, r, r^2, \dots \text{ et } 0, r, 2r^2, \dots$$

ne sont pas non plus proportionnelles, elles forment encore une base de E , on a alors :

$$E = \{(u_n) \mid u_n = (\lambda + \mu n)r^n, \lambda \in \mathbb{C} \text{ et } \mu \in \mathbb{C}\}.$$

¹ Appelée équation caractéristique.

Remarque : les constantes λ et μ sont déterminées par la donnée des deux premiers termes.

5) L'équation caractéristique :

$$x^2 - x - x = 0$$

admet pour racines :

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ et } \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Les conditions initiales s'expriment :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \mu \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}} = -\mu.$$

Ce qui donne le terme général :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad (2).$$

- ² Il s'agit là de la suite de Fibonacci. Elle est remarquable à plus d'un titre, non seulement en raison de ses nombreuses propriétés arithmétiques mais aussi parce qu'on la retrouve en botanique quand on dénombre les spirales formées par les graines de certains végétaux : pommes de pin, fleur de tournesol, ... ou encore dans la disposition des feuilles sur les tiges (spirales ontogéniques). Signalons qu'on voit apparaître cette suite en effectuant en oblique des sommes de termes du triangle de Pascal.

	1				
	1	1			
1	1	2	1		
1	1	3	3	1	
2	1	4	6	4	1
3	1	5	10	...	
5	1	...			
8					
13					

Dans son traité "Liber abacci" qui date du début du XIII^e siècle, Léonard de Pise, dit Fibonacci, la présentait co"me solution d'un problème qu'il énonçait ainsi :

"Combien de paires de lapins peut engendrer une seule paire pendant une année ?"

La solution qu'il proposait commençait dans ces termes :

"Quelqu'un a mis une paire de lapins dans un endroit entouré de murs pour savoir combien de paires de lapins naîtraient au cours d'une année, la nature des lapins étant telle que dès l'âge de deux mois une paire en engendre tous les mois une autre. Comme la première femelle met bas le premier mois, il faut doubler et tu as deux paires de lapins pour ce mois ; l'une d'elle, à savoir la première a également des petits le mois suivant de sorte que le deuxième mois on a trois paires ; ... et ainsi de suite, jusqu'à ce que nous ajoutions le dixième nombre au onzième, c'est-à-dire 144 et 233, et obtenions le nombre total de paires de lapins, c'est-à-dire 277 ; on peut continuer cette opération à l'infini."

(d'après VOROBIEV - Caractères de divisibilité et suite de Fibonacci - éd. MIR)

IV. Applications linéaires

I La matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & 4 & 11 \end{bmatrix}$$

exprime f relativement aux bases canoniques de $\mathbf{R}^3$ et $\mathbf{R}^4$, f est donc bien une application linéaire. On réduit A , on obtient :

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

f est de rang 2, une base de son image est formée par $f(1,0,0)$ et $f(0,1,0)$ c'est-à-dire : $(1,2,2,3)$ et $(2,4,3,4)$. Son noyau est de dimension 1, une solution non nulle du système $AX=0$, en forme une base. On peut choisir, par exemple, $(1,2,-1)$.

II L'application considérée est représentée par la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

dont la réduction donne :

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{17}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{11} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 1 \end{array}$$

Il apparaît ainsi que f est de rang 3, son image est donc $\mathbf{R}^3$ tout entier et son noyau est le sous-espace engendré dans $\mathbf{R}^4$ par $(17, -3, -1, 11)$.

III On remarque que $f(e_1), f(e_2)$ et $f(e_3)$ sont colinéaires au vecteur non nul :

$$u = (2, 4, -5)$$

qui, de ce fait, forme une base de $\text{Im} f$. Le noyau est le plan d'équation :

$$-x + 2y + z = 0.$$

Une base de celui-ci est obtenue en choisissant arbitrairement deux solutions linéairement indépendantes, par exemple :

$$v = (2, 1, 0) \text{ et } w = (1, 0, 1).$$

On vérifie que u, v et w forment une base de l'espace tout entier, de sorte que $\mathbf{R}^3$ est la somme directe de :

$$F = \text{esp}(u) = \text{Im} f \text{ et } G = \text{esp}(v, w) = \ker f.$$

On vérifie que $f|_F = \text{Id}_F$. On est donc en présence de la projection sur F parallèlement à G .

IV On note u et v ces deux applications.

1) La vérification que u et v sont linéaires s'opère sans difficulté.

2) La formule du binôme nous donne les expressions des images de la base et avec elles les matrices respectives de ces endomorphismes :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots & C_n^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & C_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & (-1)^n \\ 0 & 1 & -2 & 3 & \dots & (-1)^{n-1}n \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \dots & (-1)^{n-2}C_n^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & (-1)^{n-3}C_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

3) Pour tout P appartenant à $\mathbf{R}_n[X]$, on a :

$$v \circ u(P) = v(P)(X+1) = P(X+1-1) = P(X)$$

et ainsi $v \circ u = \text{Id}$. On a de même $u \circ v = \text{Id}$, ces deux endomorphismes sont inverses l'un de l'autre, leurs matrices le sont aussi.

V 1) Soit p un endomorphisme de E , on pose $q = \text{Id}_E - p$, on a toujours :

$$q^2 = (\text{Id}_E - p) \circ (\text{Id}_E - p) = \text{Id}_E - \text{Id}_E \circ p - p \circ \text{Id}_E + p \circ p$$

$$q^2 = \text{Id}_E - 2p + p^2.$$

Ce qui s'exprime aussi :

$$q^2 - q = p^2 - p.$$

On a donc :

$$p^2 = p \Leftrightarrow q^2 = q.$$

Montrons que $\text{Im } p = \text{Ker } q$. Puisque $p + q = \text{Id}_E$, pour tout $x \in E$, on a :

$$x = p(x) + q(x).$$

En conséquence :

- si $x \in \text{Im } p$, il existe $y \in E$ tel que :

$$x = p(y) = p^2(y) = p(x),$$

on a donc $x = p(x)$. Il s'ensuit que $q(x) = 0$ et $x \in \text{Ker } q$. Ce qui fait que :

$$\text{Im } p \subseteq \text{Ker } q.$$

- si $x \in \text{Ker } q$, alors $x = p(x)$, $x \in \text{Im } p$, on a donc aussi $\text{Ker } q \subseteq \text{Im } p$.

En conséquence, on a :

$$\text{Im } p = \text{Ker } q.$$

Les rôles de p et q étant symétriques on a :

$$\text{Im } p = \text{Ker } q \quad \text{et} \quad \text{Im } q = \text{Ker } p.$$

2) On déduit immédiatement de ce qui précède que :

$$E = \text{Im } p + \text{Ker } p.$$

Soit $x \in \text{Im } p \cap \text{Ker } p$, on a à la fois :

$$0 = p(x) \quad \text{et} \quad p(x) = p^2(x), \text{ d'où } x = 0. \text{ On a donc aussi :}$$

$$\text{Im } p \cap \text{Ker } p = \{0\}.$$

L'image et le noyau de p sont donc deux sous-espaces supplémentaires dans E .

On note que cette propriété reste vérifiée si l'on remplace p par λp , où λ est un scalaire non nul et différent de 1. Elle n'est donc pas caractéristique des projecteurs.

3) Si p et p' sont des projecteurs, on vérifie qu'on a toujours :

$$(p + p')^2 = p + p' + p \circ p' + p' \circ p.$$

Il s'ensuit que $p + p'$ est un projecteur si, et seulement si :

$$p \circ p' + p' \circ p = 0.$$

Si cette condition est remplie, on a à la fois :

$$p \circ (p \circ p' + p' \circ p) = 0 \quad \text{et} \quad (p \circ p' + p' \circ p) \circ p = 0.$$

On en déduit que :

$$p \circ p' = -p \circ p' \circ p = p' \circ p.$$

Il s'ensuit que :

$$p \circ p' = -p \circ p'.$$

Si le corps de base n'est pas de caractéristique 2, ceci entraîne que :

$$p \circ p' = p' \circ p = 0.$$

La réciproque étant évidente, il est alors prouvé que :

$$p + p' \text{ est un projecteur si, et seulement si, } p \circ p' = p' \circ p = 0.$$

vi 1) La vérification est immédiate.

2) L'égalité $\text{Im } f = F + G$ se déduit immédiatement de la définition de la somme de deux sous-espaces vectoriels. Si (x, y) est un élément du noyau de f , on a $x = -y$ et donc $x \in F \cap G$. Dans ces conditions, l'application :

$$\begin{aligned} \ker f &\longrightarrow F + G \\ (x, y) &\longmapsto x \end{aligned}$$

est bijective et comme elle est linéaire de façon évidente, c'est un isomorphisme. Ce qui fait que $\dim F \cap G = \dim \ker f$. L'égalité avancée s'en déduit immédiatement.

vii On note que :

- la restriction de f à E' , a pour noyau $\ker f \cap E'$,
- la restriction de f au sous espace $f^{-1}(F')$ a le même noyau que f et son image est $(\text{Im } f) \cap F'$.

On conclut en appliquant dans chaque cas le théorème 2-2.

viii On a :

$$\text{Im } g \circ f \subseteq \text{Im } g$$

et donc :

$$\text{rang } g \circ f \leq \text{rang } g.$$

On note que :

$$\ker g|_{\text{Im } f} = \text{Im } f \cap \ker g.$$

On en déduit que :

$$\text{rang } g \circ f = \text{rang } g|_{\text{Im } f} = \dim \text{Im } f - \dim(\text{Im } f \cap \ker g)$$

1. On a donc :

$$\text{rang } g \circ f \leq \text{rang } f.$$

et comme il est clair que :

$$\text{Im } g \circ f \subseteq \text{Im } g$$

on a aussi :

$$\text{rang } g \circ f \leq \text{rang } g.$$

Ce qui justifie que :

$$\text{rang } g \circ f \leq \min(\text{rang } f, \text{rang } g).$$

2. Comme

$$\dim(\text{Im } f \cap \ker g) \leq \dim \ker g = \dim F - \text{rang } g,$$

il vient :

$$\text{rang } g \circ f = \dim \text{Im } f - \dim(\text{Im } f \cap \ker g) \geq \dim \text{Im } f - (\dim F - \text{rang } g).$$

Ce qui justifie l'autre inégalité :

$$\text{rang } g \circ f \geq \text{rang } f + \text{rang } g - \dim F.$$

ix 1) La matrice de f relative à la base donnée s'exprime :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{bmatrix}.$$

2) Le noyau de $f - \text{Id}$ est la solution du système homogène :
 $(A - I)X = 0.$

Le calcul montre que ce sous-espace est de dimension 1 et admet pour base le vecteur $u = (1, 1, 1).$

3) La multiplication de A par elle-même donne :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Il est évident que $A^2 + I$ est de rang 1, le noyau de $f^2 - \text{Id}$ est le plan d'équation :
 $x - y + z = 0.$

On en choisit un vecteur non nul, par exemple :
 $v = (1, 1, 0)$

On a :

$$w = f(v) = (2, -3, -5),$$

Il est immédiat que ce vecteur appartient aussi au noyau de $f^2 + \text{Id}$ et clair qu'il est linéairement indépendant de v . Ces deux vecteurs forment donc une base du plan considéré.

4) Comme les coordonnées de u ne vérifient pas l'équation du sous-espace engendré par v et w , ces trois vecteurs sont linéairement indépendants, ils forment donc une base de E . Comme $u \in \text{Ker}(f - \text{Id})$ et $v \in \text{Ker}(f^2 - \text{Id})$, les images par f de ces vecteurs s'expriment :

$$f(u) = u, \quad f(v) = w \quad \text{et} \quad f(w) = -v.$$

On en déduit la matrice de f relativement à la base (u, v, w) :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

x On écrit la matrice A de f dans la base donnée et on calcule A^2 , on obtient :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Il est clair que A^2 est de rang 1 et que le noyau de f^2 est le plan d'équation $y = -z$. On choisit un vecteur qui n'appartient pas à ce sous-espace, par exemple :

$$w = e_1 + e_2.$$

On a :

$$v = f(w) = e_1 - e_2 + e_3 \quad \text{et} \quad u = f(v) = 2(e_1 + e_2 - e_3).$$

On constate immédiatement que ces vecteurs forment une base de E . Comme de plus, $f(u) = 0$, l'endomorphisme f s'exprime, relativement à la base (u, v, w) , par la matrice :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

³ En continuant, on constaterait que $A^3 = 0$.

2) On considère trois nombres réels α, β et γ tels que :

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0.$$

On a alors :

$$0 = \varphi^2(\alpha u + \beta v + \gamma w) = \alpha \varphi^4(w) + \beta \varphi^3(w) + \gamma \varphi^2(w) = \gamma \varphi^2(w)$$

et comme, par hypothèse, $\varphi^2(w)$ est non nul, on a $\gamma = 0$. On a de plus :

$$0 = \varphi(\alpha u + \beta v) = \alpha \varphi^3(w) + \beta \varphi^2(w) = \beta \varphi^2(w).$$

Ce qui entraîne que $\beta = 0$ et par suite $\alpha = 0$. Les trois vecteurs u, v et w sont donc linéairement indépendants, il forment une base de E . La matrice de φ , est évidemment celle obtenue à la première question (4).

x1 1) Soit α, β et γ trois nombres réels tels que la fonction :

$$x \mapsto \alpha e^{ax} + \beta x e^{ax} + \gamma x^2 e^{ax}$$

soit nulle. On a :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad (\alpha + \beta x + \gamma x^2) e^{ax} = 0$$

et comme l'exponentielle n'est jamais nulle, ceci entraîne que :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \alpha + \beta x + \gamma x^2 = 0.$$

Les coefficients de ce trinôme sont donc nuls. Les trois fonctions considérées sont linéairement indépendantes, elles forment une base de E .

2) Les dérivées de f, g et h s'expriment :

$$D(f)(x) = a e^{ax}, \quad D(g)(x) = (1 + ax) e^{ax} \quad \text{et} \quad D(h)(x) = (2x + ax^2) e^{ax}.$$

On a donc :

$$D(f) = af, \quad D(g) = f + ag \quad \text{et} \quad D(h) = 2g + ah.$$

Comme ces trois fonctions appartiennent à E , D est une application de E dans E lui-même. Sa linéarité est évidente.

Les expressions ci-dessus donnent directement la matrice de D , elle s'écrit :

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

2) On pose :

$$A = aI + J,$$

il vient :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad J^3 = 0.$$

On en déduit que :

$$A^n = a^n I + n a^{n-1} J + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} J^2.$$

On a donc :

$$A^n = \begin{bmatrix} a^n & n a^{n-1} & n(n-1) a^{n-2} \\ 0 & a^n & 2 n a^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}.$$

⁴ Cette situation est générale. Dans un espace de dimension n , si un endomorphisme f est nilpotent d'indice n (i. e. : $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$), les dimensions des noyaux des puissances successives de f sont $1, 2, \dots, n-1, n$. Il est donc possible de choisir un vecteur v tel que $f^{n-1}(v) \neq 0$, les n vecteurs :

$$v, f(v), f^2(v), \dots, f^{n-1}(v)$$

sont alors linéairement indépendants. La forme de la matrice de f relativement à la base $(f^{n-1}(v), \dots, f(v), v)$ généralise celle de la matrice J .

La fonction considérée admet pour coordonnées 1, 0 et 3. Les coordonnées de sa dérivées $n^{\text{ème}}$ sont données par le produit matriciel :

$$\begin{bmatrix} a^n & na^{n-1} & n(n-1)a^{n-2} \\ 0 & a^n & 2na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^n + 3n(n-1)a^{n-2} \\ 6na^{n-1} \\ 3a^n \end{bmatrix}.$$

On a donc :

$$D^n f(x) = [a^n + 3n(n-1)a^{n-2} + 6na^{n-1}x + 3a^n x^2]e^{ax}.$$

3) le calcul des primitives de f, g et h donne respectivement :

$$\frac{1}{a}e^{ax} + C, \left[\frac{1}{a}x - \frac{1}{a^2}\right]e^{ax} + C \text{ et } \left[\frac{1}{a}x^2 - \frac{2}{a^2}x + \frac{2}{a^3}\right]e^{ax} + C,$$

où C désigne une constante quelconque. Chacune de ces fonctions admet donc une unique primitive dans E – celle où $C=0$. L'application I est donc définie, sa linéarité est évidente. Sa matrice s'écrit :

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} & \frac{2}{a^3} \\ 0 & \frac{1}{a} - \frac{2}{a^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

On obtient ainsi l'inverse de A .

xii 1) Si $f^2 = 0$ alors $f(\text{Im } f) = \{0\}$, on a donc $\text{Im } f \subseteq \text{Ker } f$. Il s'ensuit que :

$$r = \dim \text{Im } f \leq \dim \text{Ker } f$$

et comme, de façon générale, on sait que $r + \dim \text{Ker } f = n$, on a bien :

$$2r \leq n.$$

2) On considère une base $(e'_1, \dots, e'_r)$ de $\text{Im } f$, soit $e_1, \dots, e_r$ tels que :

$$e'_1 = f(e_1), \dots, e'_r = f(e_r).$$

Nous savons que ces vecteurs forment une base d'un sous-espace supplémentaire H de $\text{Ker } f$. Comme $\text{Im } f \subseteq \text{Ker } f$, $(e'_1, \dots, e'_r)$ est une famille libre de $\text{Ker } f$ et la dimension de ce sous-espace étant $n-r$, il existe $n-2r$ vecteurs $e_{2r+1}, \dots, e_n$ tels que :

$$(e'_1, \dots, e'_r, e_{2r+1}, \dots, e_n)$$

en soit une base de $\text{Ker } f$. Comme $E = H \oplus \text{Ker } f$, la famille :

$$(e_1, \dots, e_r, e'_1, \dots, e'_r, e_{2r+1}, \dots, e_n)$$

est une base de E . Il est toujours possible de poser :

$$e_{r+1} = e'_1, \dots, e_{2r} = e'_r$$

et alors on a bien :

$$f(e_i) = e_{r+i} \text{ si } 1 \leq i \leq r.$$

Comme $e_{r+1}, \dots, e_n$ sont des éléments du noyau, on a aussi :

$$f(e_i) = 0 \text{ si } r < i.$$

Il apparaît ainsi que la matrice qui décrit f , relativement à cette base, admet la décomposition suivante :

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & \\ \hline I_r & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

où les blocs résultent d'un partage en :

$$r, r \text{ et } n-2r$$

lignes et d'une partition identique des colonnes.

x 1) Il est clair que e_1' et e_3' sont linéairement indépendants et que e_2' n'appartient pas à l'espace engendré par les deux autres. Ces trois vecteurs forment donc une base de $\mathbb{R}^3$. On exprime les images par f de ces vecteurs :

$$f(e_1') = f(e_1) - f(e_3) = 2e_1 - 2e_3 = 2e_1'$$

$$f(e_2') = f(e_1) - f(e_3) = 2e_2 + 2e_3 = 2e_2'$$

$$f(e_3') = f(e_1) - f(e_3) = 4e_1 + 2e_3 = 4e_3'$$

Dans cette nouvelle base, f est représentée par la matrice diagonale :

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

On peut ainsi facilement calculer B^n .

2) Soit P la matrice du changement de base ainsi effectué, on sait que :

$$B = P^{-1}AP.$$

On en déduit que :

$$A^n = PB^nP^{-1}.$$

Or, on a :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

On effectue le produit et l'on obtient :

$$A^n = 2^{n-1} \begin{bmatrix} 1+2^{2n} & 1-2^n & -1+2^n \\ 0 & 2 & 0 \\ -1+2^n & 1-2^n & 1+2^n \end{bmatrix}.$$

Application : on note U_n la matrice associée au vecteur (u_n, v_n, w_n) . La relation de récurrence s'écrit alors sous la forme suivante :

$$U_{n+1} = AU_n.$$

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = A^n U_0.$$

Pour le vecteur U_0 , donné, on obtient :

$$u_n = 2^{2n}, v_n = 2^n, w_n = 2^n(1 + 2^n).$$

