UNIVERSITÉ DE NANTES

Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques et d'Informatique

IREM des Pays de la Loire

Recueil d'exercices de DEUG A.1

Module M.1 (Mathématiques)

Année 94 - 95

2, rue de la Houssinière 44072 Nantes Cedex 03

Algèbre

	Contenu	Thèmes de TD
*AL*1	• Nombres réels & complexes. Notations Σ et Π • Quantificateurs, raisonnement par récurrence...	• Révisions sur les calculs dans $\mathbb{C}$, calculs avec Σ et Π , indices muets... • Raisonnement par récurrence. • Formule du binôme
*AL*2	• Rappels et compléments sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ Points et vecteurs. Calcul vectoriel (linéaire) élémentaire. Produit scalaire, produit vectoriel, produit mixte Déterminants 2x2 et 3x3 • Géométrie analytique élémentaire. Equations et représentations paramétriques (droites, plans, cercles, sphères...)	• Equations et représentations paramétriques de droites et de plans Résolution de l'équation $a \wedge x = b$. Double produit vectoriel... Aires et volumes (déterminants 2x2 et 3x3...) • Géométrie plane: Equation et représentations paramétriques d'un cercle, puissance d'un point / cercle Distance d'un point à une droite... Equation d'une ellipse, d'une parabole, d'une hyperbole (Paramétrage cf analyse) Traduction de transformations élémentaires (projection, symétrie, rotation) (affine/vectoriel) • Espace: Distance d'un point à un plan, à une droite... Traduction de transformations élémentaires (projection, symétrie, rotation) (affine/vectoriel)
*AL*3	• Systèmes d'équations linéaires Systèmes équivalents. Opérations élémentaires sur les équations Systèmes échelonnés. Equations principales / non principales. Inconnues principales / libres, paramétrage des solutions Rang d'un système	• Résolution de systèmes linéaires (méthode de Gauss) Mise en évidence des équations/inconnues principales, du rang, de différents paramétrages des solutions (choix d'inconnues principales) • Interprétations géométriques (ou autres ??)
*AL*4	• Notation matricielle: Matrice d'un système linéaire. Matrices lignes, matrices colonnes Somme, produit de matrices. • Matrices triangulaires, diagonales, symétriques, antisymétriques, transposition • Equivalence-ligne. Rang d'une matrice Matrices carrées. Matrices inversibles • Détermination de l'inverse par la méthode du pivot Application à la résolution de systèmes d'équations	• Exemples et calculs élémentaires • Matrices particulières. Transposée. Polynômes de matrices • Matrices échelonnées • Inverse d'une matrice carrée • Applications
*AL*5	• Fonctions polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{Q}$) Somme, produit, division euclidienne Formule de Taylor. Racines, ordre de multiplicité. Divisibilité, pgcd, ppcm. Algorithme d'Euclide. Parallèle avec la divisibilité dans $\mathbb{Z}$. (?!) Nombres premiers et polynômes irréductibles. Décomposition en facteurs premiers (admis) Th. de d'Alembert. Polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$. Décomposition dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$: Relations entre coefficients et racines. Division suivant les puissances croissantes	• Calculs algébriques, exercices divers tournant autour de la division. • Racines & multiplicité, formule de Taylor • Décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$. • Utilisation de la divisibilité, recherche du pgcd par plusieurs méthodes... (Algorithme d'Euclide, facteurs irréductibles, ...) • Elimination (Pgcd ou relations coefficients-racines) • Division suivant les puissances croissantes)
*AL*6	• Décomposition des fractions rationnelles en éléments simples: Fractions rationnelles. Partie entière. Pôles Décomposition théorique dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$. (admis) Méthodes pratiques de décomposition	• Pratique de la décomposition sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$. (Utilisation de la décomposition sur $\mathbb{C}$ pour obtenir celle de $\mathbb{R}$)

Analyse

	Contenu	Thèmes de TD
*AN*1	• Limites - Continuité - Fonctions continues sur un intervalle (admis et illustré) Théorème de la valeur intermédiaire (admis et illustré) Fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone • Suites numériques élémentaires Convergence, unicité de la limite (Définition admise, pas de ε) Théorèmes algébriques (somme, produit, etc...) admis Liaison avec la continuité, et la limite d'une fonction. Suites croissantes majorées	• (Ré)vision: Généralités sur les fonctions (domaine de définition, parité, symétries, etc...) • Exemples de fonctions continues et discontinues. Prolongement par continuité (cas simples) (Application des théorèmes sur les limites) • Applications du th de la valeur intermédiaire. Existence d'une racine d'une équation (Ex: polynôme d'ordre impair, etc...) • Fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone. • Exercices simples de calculs de limites. • Recherche des racines d'une équation: Par exemple: dichotomie. (une suite convergente est une suite qui définit un nombre réel. Evaluation de l'erreur...) • Exemples de fonctions continues ou non, monotones ou non, bijectives ou non... Choix d'intervalles de monotonie pour une fonction continue.
*AN*2	• Dérivation Calcul (fonctions composée, dérivée d'une fonction réciproque) Th de Rolle, Accr finis (énoncés admis et illustration)... Formule de Taylor Applications à l'étude des variations des fonctions	• Calculs de dérivées, de dérivées n-ième, de dérivées de fonctions réciproques... • Applications du th des accr finis et de la formule de Taylor: (Majorations, variation de fonctions, etc...) • Méthodes numériques: Résolution d'équations, méthode de Newton, parties proportionnelles... • Fonctions convexes...
*AN*3	• Fonctions usuelles: Puissances, exponentielle, logarithme, croissances comparées Fonctions trigonométriques et leurs réciproques Fonctions hyperboliques et leurs réciproques	• Puissances, *Ln* et *Exp*: Limites et inégalités classiques ($lim(x \cdot ln x)$,... $ln x \leq x-1$, etc...) Limites de suites classiques (a^n/n^a , etc...). • Révisions de trigonométrie (Linéarisation, etc...) Paramétrages de l'ellipse et de l'hyperbole. • Fonctions réciproques des fonctions trigonométriques: Simplification de formules, etc... Equations, représentations graphiques...
*AN*4	• Développements limités Infiniment petit, ordre d'un infiniment petit Développements limités classiques Méthodes d'obtention des développements limités (opérations algébriques, substitution, intégration, dérivation) Applications. Développements limités généralisés et asymptotiques	• Calculs de développements limités (toutes méthodes) • Calculs de limites... • Etude locale de fonctions: Tangentes, points d'inflexion, extrema... • Partie principale d'un infiniment petit, comparaison d'i.p; (notation $o(f)$, équivalents ?) • Développements limités généralisés, développements asymptotiques, calculs de limites.
*AN*5	• Courbes planes: Définies par $y = f(x)$ (Branches infinies, points remarquables) • Définies par une représentation paramétrique (Branches infinies, points stationnaires, points multiples...) • Données en coordonnées polaires (Idem...)	• Courbes $y=f(x)$: Compléments: Etude locale, Concavité, Directions asymptotiques, asymptotes... Utilisation de développements limités et asymptotiques... • Courbes paramétrées: $x = x(t)$; $y = y(t)$ Domaine d'étude (recherche des symétries), Points stationnaires (rebroussements, etc) Points multiples, Branches infinies... • Coordonnées polaires: $r = f(\theta)$ Intervalle d'étude (recherche des symétries), Tangentes à l'origine et Cercles asymptotes... Tangente à un arc en un point, Points multiples. Recherche d'asymptotes... • Exemples de paramétrage (ou de représentation polaire) d'une courbe donnée par une équation cartésienne du type $f(x,y)=0$ ...(??)

Raisonnement par récurrence

1 Prouver par récurrence qu'à partir d'un certain rang n on a: $5^n > 4^n + 3^n$

2 Prouver que pour tout entier n: $(n > 7) \Rightarrow (2^n > 18(n+1))$
En déduire que pour tout nombre réel x: $(x \geq 8) \Rightarrow (2^x > 18x)$

3 Montrer que pour tout nombre entier n, le nombre $n^5 - n$ est un multiple de 5.

4 Montrer par récurrence que tout nombre entier n supérieur ou égal à 24 peut s'écrire sous la forme :
$n = 5a + 7b$ où a et b sont deux nombres entiers positifs.
(Distinguer les cas où $b \geq 2$ et où $b \leq 1$ $(a \geq 4)$, en notant que $1 = 3\times5 - 2\times7 = -4\times5 + 3\times7$)

5 Montrer par récurrence que:

a. La somme des n premiers (à partir de 1) nombres entiers est $\sigma_{1,n} = \dfrac{n(n+1)}{2}$

b. La somme des carrés des n premiers nombres entiers est $\sigma_{2,n} = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c. La somme des cubes des n premiers nombres entiers est $\sigma_{3,n} = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} = (\sigma_{1,n})^2$

d. Déduire du (a) la somme des n premiers nombres pairs, puis celle des n premiers nombres impairs.
Retrouver ce résultat directement par récurrence.

6 On considère la suite de Fibonacci définie par: $\Phi_0 = 0$; $\Phi_1 = 1$; $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Phi_{n+2} = \Phi_{n+1} + \Phi_n$

On note dans ce qui suit $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \Phi_k$ la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (Φ_n)

a. Calculer Φ_n et σ_n pour $n = 1, 2, \ldots, 10$

b. Montrer par récurrence les résultats suivants:

- $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Phi_n < (\frac{7}{4})^n$
- $\forall n \in \mathbb{N}$ $\sigma_n = \Phi_{n+2} - 1$ et $\sigma_{n+2} = \sigma_{n+1} + \sigma_n + 1$
- $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Phi_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

7 *Où est l'erreur ?*
Voici trois raisonnements par récurrence donnant des résultats certainement faux... Déterminer pour chacun d'eux quelle est l'erreur. (On note $p(n)$ l'hypothèse de récurrence)

a. Montrons que: $\forall n \geq 1$ $10^n + 1$ est un multiple de 9.
En effet, si $10^n + 1 = 9k$, alors $10^{n+1} + 1 = (9+1)10^n + 1 = 9\times10^n + (10^n + 1) = 9\times(10^n + k)$
$10^{n+1} + 1$ est donc bien un multiple de 9...
En particulier, pour $n = 1$, 11 est un multiple de 9...

b. Montrons que pour tout $n \geq 1$: $\dfrac{1}{1\times2} + \dfrac{1}{2\times3} + \cdots + \dfrac{1}{(n-1)n} = \dfrac{3n-2}{2n}$

En effet, pour $n = 1$: $\dfrac{1}{1\times2} = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{3\times1-2}{2\times1} = \dfrac{1}{2}$ (donc $p(1)$ est vrai)

Et si $p(n)$ est vrai, alors: $\dfrac{1}{1\times2} + \dfrac{1}{2\times3} + \cdots + \dfrac{1}{(n-1)n} + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{3n-2}{2n} + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{3(n+1)-2}{2(n+1)}$

Et pourtant, pour $n = 4$: $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{3}{4}$ alors que... $\dfrac{3\times4-2}{2\times4} = \dfrac{5}{4}$

c. Montrons que nous sommes tous des filles... Pour cela, nous montrons par récurrence que la propriété p suivante est vrai pour tout n...
$p(n)$: *"Si, dans un groupe de n individus il y a une fille, alors les n individus du groupe sont tous des filles"*

1. $p(1)$ est évidemment vrai: (considérer un "groupe" de 1 individu comportant une fille !!!)
2. Si on suppose que $p(n)$ est vraie, et qu'on considère un groupe de $n+1$ individus $\{E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n, E_{n+1}\}$, dont on sait que l'un d'entre eux, par exemple E_1, est une fille...
En appliquant la propriété p au groupe $\{E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n\}$ puis au groupe $\{E_1, E_3, \ldots, E_n, E_{n+1}\}$, on déduit que $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n, E_{n+1}$ sont tous des filles.
3. La propriété p étant ainsi prouvée, il suffit de considérer le groupe constitué par toute l'humanité... Ma mère est une fille de ce groupe, donc nous sommes tous des filles.

Notations Σ et Π

8 Calculer (et comparer) : $A=\sum_{n=0}^{5}\frac{1}{n^2+1}$ $\quad B=\sum_{0\le n\le 5}\frac{1}{n^2+1}$ $\quad C=\sum_{0\le n^2\le 5}\frac{1}{n^2+1}$ $\quad D=\sum_{0\le m^2\le 5}\frac{1}{m^2+1}$

$E=\sum_{0\le\sqrt{j}\le 5}\frac{1}{j^2+1}$ $\quad F=\sum_{0\le k^2\le 5}\frac{1}{k+1}$ $\quad G=\sum_{0\le\sqrt{p}\le 5}\frac{1}{p+1}$ $\quad H=\sum_{n=-5}^{5}\frac{1}{n^2+1}$

9 Calculer (et comparer) : $A=\sum_{n=0}^{100}a^n$ $\quad B=\sum_{0\le 2n\le 100}a^n$ $\quad C=\sum_{0\le k\le 100}a^{2k}$ $\quad D=\sum_{0\le 2p\le 100}a^{2p}$

$E=\sum_{\substack{0\le m\le 100\\ m\ pair}}a^m$ $\quad F=\sum_{\substack{0\le 2m\le 100\\ m\ pair}}a^m$ $\quad G=\sum_{0\le 2i\le 200}a^{2i}$ $\quad F=\sum_{\substack{0\le m\le 200\\ m\ pair}}a^m$

10 a. Représenter dans un tableau à double entrée les nombres $a_{mn}=m+n^2$ pour $1\le m\le 4$ et $1\le n\le 4$

Calculer: $A=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}a_{ij}$ $\quad B=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}a_{ji}$ $\quad C=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{2}a_{ij}$ $\quad D=\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{4}a_{ji}$

$E=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{i}a_{ij}$ $\quad F=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=i}^{4}a_{ij}$ $\quad G=\sum_{1\le i\le j\le 4}a_{ij}$ $\quad H=\sum_{1\le i<j\le 4}a_{ij}$ $\quad I=\sum_{1\le j\le i\le 4}a_{ij}$

b. Mêmes questions avec $a_{mn}=m+n$, $a_{mn}=m^n$ et $a_{mn}=m^2n$

11 Calculer: $A=\sum_{n=p}^{q}n$ $\quad B=\sum_{n=0}^{N}(a+bn)$ $\quad C=\sum_{m=p}^{q}\sum_{n=r}^{s}mn$

$D=\sum_{m\le i\le n}(u_i-u_{i-1})$ $\quad E=\sum_{m\le i\le n}(u_{i+1}-u_{i-1})$ $\quad F=\sum_{1\le k\le n}\frac{1}{k(k+2)}$

12 Calculer: $A=\prod_{n=0}^{4}\left(\frac{3n+5}{2n-3}\right)$ $\quad B=\prod_{n=1}^{N}\left(\frac{n+1}{n}\right)$ $\quad C=\prod_{n=2}^{N}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$ $\quad D=\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$E=\prod_{n=1}^{N}(n\alpha)$ $\qquad$ et montrer que pour $n\ge 1$: $2^n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\prod_{m=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^m}\right)=\sin x$

Formule du binôme

13 a. Ecrire le développement de $(1+x)^n$, et calculer:

$\sum_{k=0}^{n}C_n^k$; $\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k$; $\sum_{k=0}^{n}2^kC_n^k$; $\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\,e^{\frac{k}{2}}$; $\sum_{0\le 2k\le n}C_n^{2k}$; $\sum_{0\le 2k+1\le n}C_n^{2k+1}$

b. Calculer $\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\,3^k\,(1+x)^{3n-2k}\,x^k$

c. Calculer, pour $n>0$: $\sum_{k=0}^{n}kC_n^k$ $\quad \sum_{k=1}^{n}k(k-1)\,C_n^k$ $\quad \sum_{k=0}^{n}k^2\,C_n^k$ $\quad \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}C_n^k$

d. Montrer que $C_{2n}^n=\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2$ (Utiliser $(1+x)^{2n}$)

14 a. Montrer que pour $p\le n$: $\sum_{k=p}^{n}C_k^p=C_{n+1}^{p+1}$ (Que signifie cette égalité sur le triangle de Pascal ?)

En déduire les valeurs de $\sigma_{1,n}=\sum_{k=1}^{n}k$ $\quad \sigma_{2,n}=\sum_{k=1}^{n}k^2$ $\quad \sigma_{3,n}=\sum_{k=1}^{n}k^3$ (cf ex n° 5)

b. En utilisant le développement de $(1+k)^m$, montrer que: $(1+n)^m-(1+n)=\sum_{k=1}^{m-1}(C_m^k\,\sigma_{k,n})$

(où $\sigma_{k,n}=\sum_{q=1}^{n}q^k$) . En déduire une troisième manière de calculer $\sigma_{1,n}$, $\sigma_{2,n}$, $\sigma_{3,n}$

15 Montrer par récurrence sur n que pour $m \geq n$ $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_{m+1}^{k} = C_{m}^{n}$

(Interpréter cette égalité sur le triangle de Pascal, par exemple pour $m=3$, $n=2$)

Calcul dans $\mathbb{C}$

16 Dans cet exercice, $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ sont supposés être réels. Comme d'habitude, $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

a. Mettre sous la forme "$a+ib$" les nombres complexes suivants: ( )

$A = \frac{\alpha+i}{1-\alpha i}$ $\quad B = \frac{\alpha+i\beta}{\beta+i\alpha} + \frac{\alpha-i\beta}{\beta-i\alpha}$ $\quad C = \frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\varphi-i\sin\varphi}$ $\quad D = \frac{1+j}{1-j}$

b. Calculer le module et l'argument (donner le résultat entre 0 et 2π) de:

$E = ij^2$ $\quad F = 1 - i\sqrt{3}$ $\quad G = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^n$ pour $n = 21, 22, 23, 24$

Pour $\theta \in]0; 2\pi[$; $\varphi \in]0; 2\pi[$ $\quad H = e^{i\theta} - 1$ $\quad I = \frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$ $\quad J = \frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\varphi}-1}$

c. Calculer la puissance 6-ième de: $K = 1+i$ $\quad L = 1+j$

$M = \frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$ $\quad (\theta \neq \frac{\pi}{2} \ (mod\ \pi))$

$N = \frac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1-\cos\theta-i\sin\theta}$ $\quad (\theta \neq 0 \ (mod\ 2\pi))$

17 *Racines cubiques de l'unité...* Vérifier les formules suivantes:

a. $\forall z \in \mathbb{C}$ $\quad (z+1)(z+j)(z+j^2) = (1+z)(1+jz)(1+j^2z) = z^3+1$

b. $\forall (u,v) \in \mathbb{C}^2$ $\quad u^3+v^3 = (u+v)(u+jv)(u+j^2v)$

c. $\forall (u,v,w) \in \mathbb{C}^3$ $\quad 2(u+jv+j^2w)(u+j^2v+jw) = (u-v)^2 + (v-w)^2 + (w-u)^2$

18 Résoudre les équations suivantes (Trouvez toutes les solutions, représentez les graphiquement dans le plan):

a. $z^2 = i$ $\quad z^3 = -8$ $\quad z^2 = \frac{1+i}{1-i}$ $\quad z^4 = 16j$ $\quad z^7 = \overline{z}$ $\quad z = 2\overline{z}$

b. $z^2 + z + 2 = 0$ $\quad z^2 + (3+2i)z + 1 + 3i = 0$ $\quad z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0$ $\quad (\theta \in \mathbb{R})$

$(z^2 - 4z + 5)^2 + (z+1)^2 = 0$ $\quad z^2 - 2ze^{i\theta} + 1 = 0$ $\quad (\theta \in]0; \pi[)$

c. $z^4 + z^2 + 1 = 0$ $\quad 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = 0$ $\quad (z+i)^n = (z-i)^n$ $\quad$ (n entier, $n \geq 2$)

$(z+j)^3 + (z+j)^2(z-1) + (z+j)(z-1)^2 + (z-1)^3 = 0$

d. $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |1-z|$

19 Soit $x \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que::

$$\sum_{k=0}^{n} \cos kx = \frac{\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \sin kx = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

20 On considère les sommes suivantes: $A = C_n^0 + C_n^3 + \ldots$ $\quad B = C_n^1 + C_n^4 + \ldots$ $\quad C = C_n^2 + C_n^5 + \ldots$

Calculer $A+B+C$, $A+jB+j^2C$, et $A+j^2B+jC$ et en déduire les valeurs de A, B, C.

Comment feriez-vous pour calculer: $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \ldots$

21 *Linéarisation de polynômes trigonométriques*

Montrer que: $\cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$ $\quad \sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$

Exprimer comme combinaison linéaire des $\cos px$ et / ou des $\sin qx$: $\quad A = \cos^5\theta \sin^3\theta$ $\quad B = \cos^2\theta \sin^4\theta$

Les exercices de ce chapitre constituent une mise au point sur les outils courants de la géométrie analytique dans le plan et dans l'espace. L'aspect "physique" (les figures) y est prépondérant, les aspects formels délibérément réduits au minimum.

Dans les exercices de ce chapitre, V désigne l'ensemble des vecteurs du plan ou de l'espace (euclidien), et les repères assumés par les énoncés sont toujours orthonormaux et directs (Bonhomme d'Ampère !).
On parlera plutôt de coordonnées d'un point et de composantes d'un vecteur, sans se poser de question métaphysique sur les structures affine et vectorielle. Les vecteurs sont les "vecteurs libres" de la physique, et deux vecteurs sont égaux lorsque leurs composantes sont égales...
Dans le même ordre d'idées, on ne parlera pas de base, mais on parlera des "vecteurs de base" au sens "vecteurs qui constituent le repère", étant entendu que tous les étudiants savent qu'un vecteur se décompose de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de base...
La dimension est simplement le nombre des vecteurs de base. La norme d'un vecteur est sa "longueur".

••• Supposé connu (à vérifier !... Faire le point le cas échéant... Certaines propriétés sont proposées en exercice):

- **Produit scalaire:** $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\theta = u_1u_2 + v_1v_2$ ($+ u_3v_3$ pour des vecteurs de l'espace)

Propriétés essentielles:

- Linéarité par rapport à chacun des vecteurs. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$
- $(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(\lambda\vec{v}) = \lambda\,\vec{u}\cdot\vec{v}$
- Commutativité: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- $(\ \vec{u}\cdot\vec{v} = 0\ ) \Leftrightarrow (\ \vec{u} = \vec{o}$ ou $\vec{v} = \vec{o}$ ou $\vec{u}\perp\vec{v}\ )$

- **Produit vectoriel:** $\vec{u}\wedge\vec{v}$ a pour composantes: $\begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$

On peut définir $\vec{w} = \vec{u}\wedge\vec{v}$ par les propriétés suivantes: $\vec{w} = \vec{o}$ si ($\vec{u} = \vec{o}$ ou $\vec{v} = \vec{o}$ ou $\vec{u}\,/\!/\,\vec{v}$)

- $\vec{w}\perp\vec{v}$ et $\vec{w}\perp\vec{v}$ ($\vec{w}$ est perpendiculaire au plan ($\vec{u}\,;\vec{v}$))
- ($\vec{u},\vec{v},\vec{w}$) est direct (Bonhomme d'Ampère)
- $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot|\sin\theta|$ (où θ est l'angle des deux vecteurs)

Propriétés essentielles:

- Linéarité par rapport à chacun des vecteurs. - $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$ $(\vec{u}+\vec{v})\wedge\vec{w} = \vec{u}\wedge\vec{w}+\vec{v}\wedge\vec{w}$
- $(\lambda\vec{u})\wedge\vec{v} = \vec{u}\wedge(\lambda\vec{v}) = \lambda\,\vec{u}\wedge\vec{v}$
- Anti-commutativité: $\vec{v}\wedge\vec{u} = -\,\vec{u}\wedge\vec{v}$
- $(\ \vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{o}\ ) \Leftrightarrow (\ \vec{u} = \vec{o}$ ou $\vec{v} = \vec{o}$ ou $\vec{u}\,/\!/\,\vec{v}\ )$

- **Déterminant de 2 vecteurs du plan** $det(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\sin\theta = u_1v_2 - v_1u_2$

Propriétés essentielles:
- Linéarité par rapport à chacun des vecteurs.
- Anti-commutativité: $det(\vec{v},\vec{u}) = -\,det(\vec{u},\vec{v})$

... Aspect géométrique:
- $|\,det(\vec{u},\vec{v})\,|$ est l'aire du parallélogramme construit sur ($\vec{u},\vec{v}$)
- $(\ det(\vec{u},\vec{v}) = 0\ ) \Leftrightarrow (\ \vec{u} = \vec{o}$ ou $\vec{v} = \vec{o}$ ou $\vec{u}\,/\!/\,\vec{v}\ )$

- **Déterminant de 3 vecteurs dans l'espace (produit mixte)**

$$det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

$= u_1v_2w_3 + u_2v_3w_1 + u_3v_1w_2 - u_3v_2w_1 - u_1v_3w_2 - u_2v_1w_3$ *(Développement de Sarrus)*

$= u_1(\ v_2w_3 - v_3w_2\ ) + u_2(\ v_3w_1 - v_1w_3\ ) + u_3(\ v_1w_2 - v_2w_1\ )$

(Développement suivant le 1er vecteur, la 1ère colonne)

$= u_1(\ v_2w_3 - v_3w_2\ ) + v_1(\ w_2u_3 - w_3u_2\ ) + w_1(\ u_2v_3 - u_3v_2\ )$

(Développement suivant la 1ère coordonnée, la 1ère ligne)

Propriétés essentielles:

- Invariance par permutation circulaire sur les vecteurs: $det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = det(\vec{v},\vec{w},\vec{u}) = det(\vec{w},\vec{u},\vec{v})$

ou encore: $(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w} = (\vec{v}\wedge\vec{w})\cdot\vec{u} = (\vec{w}\wedge\vec{u})\cdot\vec{v}$

D'où : $(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w} = (\vec{v}\wedge\vec{w})\cdot\vec{u} = \vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})$

... Les autres sont des conséquences de ce qui précède, et des propriétés du produit scalaire et du produit vectoriel:
- Linéarité par rapport à chacun des vecteurs...
- Changement de signe par échange de 2 vecteurs Par exemple: $det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = -\,det(\vec{v},\vec{u},\vec{w})$
- Développement par rapport à une ligne ou à une colonne (ramenée en tête par permutation circulaire)

... Et aussi (aspect géométrique)..
- $|\,det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\,|$ est le volume du parallélipipède construit sur ($\vec{u},\vec{v},\vec{w}$)
- $(\ det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) > 0\ ) \Leftrightarrow (\ (\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est direct (Bonhomme d'Ampère))
- $(\ det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0\ ) \Leftrightarrow (\ (\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ sont coplanaires)

... On peut aussi citer l'invariance par transposition du tableau, mise en évidence par le développement de Sarrus)

$$det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Vecteurs du plan et de l'espace. Produit scalaire, produit vectoriel, déterminant

1 *Produit scalaire*

a. Montrer que pour tout vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ de V: $x = (\vec{v}\cdot\vec{i})$ $y = (\vec{v}\cdot\vec{j})$ $z = (\vec{v}\cdot\vec{k})$

Que représentent x, y, z lorsque $\vec{v}$ est un vecteur unitaire ?

Quels angles (val. approchées) font avec les axes du repère les vecteurs $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

b. Le globe terrestre étant assimilé à une boule de rayon $\rho=6000$ km, calculer la distance d (à vol d'oiseau) entre les points A et B définis par leur longitude φ et leur latitude λ: $A\begin{cases}long\colon \varphi = 5°\\ lat\colon \lambda = 60°\end{cases}$ et $B\begin{cases}long\colon \varphi' = -40°\\ lat\colon \lambda' = 45°\end{cases}$

(Exprimer en fonction de $\rho, \varphi, \lambda, \varphi'$ et λ' les coordonnées de A et B dans un repère $R=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ où O est le centre de la terre, où l'axe $(O,\vec{k})$ passe par le pôle nord et l'axe $(O,\vec{i})$ par le méridien de Greenwich. En déduire la valeur de l'angle $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$... Réponses: $\cos\theta = \cos\lambda\,\cos\lambda'\,\cos(\varphi-\varphi') + \sin\lambda\,\sin\lambda'$.

Avec les données ci-dessus: $\cos\theta = \dfrac{1+\sqrt{6}}{4}$)

2 Montrer que la projection orthogonale d'un angle droit $(\vec{u},\vec{v})$ sur un plan (par exemple sur le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$) est un angle droit si, et seulement si, l'un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est parallèle au plan.

(Décomposer $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en $\vec{u} = \vec{u_1} + \lambda\vec{k}$ et $\vec{v} = \vec{v_1} + \mu\vec{k}$ où $\vec{u_1}$ et $\vec{v_1}$ sont parallèles au plan $(O,\vec{i},\vec{j})$)

3 a. *Equation $\vec{a}\cdot\vec{x} = b$ (dans le plan).* On suppose $\vec{a} \neq \vec{o}$

- Solution "géométrique": Vérifier que les solutions sont les vecteurs $\vec{x}$ qui se projettent orthogonalement sur $\vec{a}$ selon le vecteur $\dfrac{b}{a}\vec{a}$, où $a = \|\vec{a}\|$ est la norme (la longueur) de $\vec{a}$.
- Si A est un point donné du plan, vérifier que l'ensemble des points M solutions de l'équation $\vec{a}\cdot\overrightarrow{AM} = b$ est une droite Δ dont on précisera la position. Si on note $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ les composantes de $\vec{a}$, et $\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ les coordonnées de A, donner l'équation de Δ. Application: $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{a}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$... (Equation de Δ ?)
- Inversement, étant donné une droite Δ d'équation $ux+vy+w=0$ et un point $A\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$, comment choisir $\vec{a}$ et b pour qu'on puisse considérer Δ comme l'ensemble des points M tels que $\vec{a}\cdot\overrightarrow{AM} = b$?

  Retrouver ainsi que le vecteur $\vec{n}$ de composantes $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ est orthogonal à Δ, et que la distance de A à la droite Δ est donnée par la formule: $d(A,\Delta) = \dfrac{|up+vq+w|}{\sqrt{u^2+v^2}}$

b. Mêmes questions qu'au (a), mais en dimension 3. (Adapter l'énoncé... Exemple: Distance d'un point à un plan)

4 *Produit vectoriel (espace)*

a. On donne les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}$. Calculer les composantes de $\vec{u}\wedge\vec{v}$

b. Etablir l'identité de Lagrange: $(ax+by+cz)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$

5 *Equation $\vec{a}\wedge\vec{x} = \vec{b}$* $(\vec{a} \neq \vec{o})$

- Solution "géométrique": Montrer que cette équation ne peut avoir de solution que si $\vec{a}\perp\vec{b}$.

  Montrer que si $\vec{x_0}$ est une solution, alors tout vecteur $\vec{y} = \vec{x_0} + \lambda\vec{a}$ est aussi solution.

  Prouver enfin qu'il existe une unique solution $\vec{x_0}$ (bien sûr, si $\vec{a}\perp\vec{b}$) telle que $\vec{x_0}\perp\vec{b}$ et $\vec{x_0}\perp\vec{a}$
- A étant un point donné dans l'espace, et $\vec{b}$ étant un vecteur orthogonal à $\vec{a}$, déduire de ce qui précède que l'ensemble des points M solutions de l'équation $\vec{a}\wedge\overrightarrow{AM} = \vec{b}$ est une droite Δ parallèle à $\vec{a}$, orthogonale à $\vec{b}$, telle que $\|\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\, d(A,\Delta)$ (où $d(A,\Delta)$ représente la distance de A à la droite Δ) et telle que pour tout point P de Δ (en fait, il suffit que ce soit pour un seul des points de Δ) le trièdre $(\vec{a},\overrightarrow{AP},\vec{b})$ soit direct.
- Application: Soit Δ une droite donnée par un point A et un vecteur directeur $\vec{a}$, et un point M du plan.

  Montrer que la distance $d(M,\Delta)$ de M à la droite Δ est donnée par la formule: $d(M,\Delta) = \dfrac{\|\vec{a}\wedge\overrightarrow{AM}\|}{\|\vec{a}\|}$

  Calculer la distance du point $M\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ à la droite $D=(AB)$ où $A\,((1;1;0))$ et $B\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. Retrouver ce résultat géométriquement en notant que le triangle ABM est équilatéral (compléter le cube d'arêtes parallèles à $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ construit sur les points O, A, B, M)

6 Soit $\vec{v}$ un vecteur unitaire. Calculer $\| \vec{v} \wedge \vec{i} \|^2 + \| \vec{v} \wedge \vec{j} \|^2 + \| \vec{v} \cdot \vec{k} \|^2$.
En déduire que toute droite du plan fait avec l'un au moins des axes un angle au moins égal à l'angle α défini par $\sin \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Donner un exemple de droite faisant avec les 3 axes un angle égal à α.

7 *Déterminants* 2×2 (Repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$)

a. Soit ABC un triangle. Prouver que: $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$
En déduire la "loi des sinus": Si on note α, β, γ les angles du triangle, et a, b, c les côtés respectifs BC, CA, AB, on a la relation: $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$

b. Vérifier que l'aire du triangle ABC est: $\frac{|det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|}{2}$.
Application: $A\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, C\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$. Quelle est l'aire du triangle ABC ?

c. On fait subir au triangle ABC de la question précédente une homothétie de rapport k, et de centre quelconque. Quelle est l'aire du triangle $A'B'C'$ obtenu ?

8 *Système de 2 équations linéaires à 2 inconnues. Formules de Cramer*
Le système d'équations $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ s'interprète d'une part comme la recherche de l'intersection de deux droites, d'autre part comme équation vectorielle $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{c}$ où les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}, \vec{c}$ sont définis par leurs composantes: $\vec{a}\begin{pmatrix}a\\a'\end{pmatrix}$ $\vec{b}\begin{pmatrix}b\\b'\end{pmatrix}$ $\vec{c}\begin{pmatrix}c\\c'\end{pmatrix}$.

- Intersection de 2 droites: Vérifier que pour qu'il y ait une solution unique il faut et il suffit que $det(\vec{a}, \vec{b}) \neq 0$
- Equation vectorielle:

Si (x, y) est une solution du système, prouver que: $x\,det(\vec{a}, \vec{b}) = det(\vec{c}, \vec{b})$; $y\,det(\vec{a}, \vec{b}) = det(\vec{a}, \vec{c})$
En déduire l'expression de la solution lorsqu'elle est unique.

9 *Produit mixte et déterminants* 3×3.

a. Calculer par la méthode de Sarrus les déterminants suivants: $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ $B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

b. Prouver que $det(\vec{u} + \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}, \vec{v}, \vec{w}) = det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$
(On ne change pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres)
Retrouver que $det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est nul si, et seulement si, les 3 vecteurs sont coplanaires.

c. Montrer que $det(\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a}) = 2\ det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

10 *Système de 3 équations linéaires à 3 inconnues. Formules de Cramer*

a. Vérifier la formule du double produit vectoriel: $\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$
En déduire que: $\forall (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{t})$ $(\vec{x} \wedge \vec{y}) \wedge (\vec{z} \wedge \vec{t}) = det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{t})\vec{z} - det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})\vec{t}$
puis que: $\forall (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ $det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\vec{d} = det(\vec{d}, \vec{b}, \vec{c})\vec{a} + det(\vec{a}, \vec{d}, \vec{c})\vec{b} + det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})\vec{c}$

b. Le système $(S)\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$ s'interprète comme équation vectorielle $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{d}$
en notant $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ les vecteurs de coordonnées $\vec{a}\begin{pmatrix}a\\a'\\a''\end{pmatrix}, \vec{b}\begin{pmatrix}b\\b'\\b''\end{pmatrix}, \vec{c}\begin{pmatrix}c\\c'\\c''\end{pmatrix}, \vec{d}\begin{pmatrix}d\\d'\\d''\end{pmatrix}$

On suppose dans cet exercice qu'on est dans le cas où $\underline{det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0}$

- Déduire de ce qui précède que si $det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0$, le système (S) a alors au moins une solution, donnée par:

$$x = \frac{det(\vec{d}, \vec{b}, \vec{c})}{det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})} \quad y = \frac{det(\vec{a}, \vec{d}, \vec{c})}{det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})} \quad z = \frac{det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})}{det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}$$ *(Formules de Cramer)*

- Inversement, montrer en calculant le déterminant $det(\vec{d}, \vec{b}, \vec{c})$ (et les déterminants analogues) que si (S) a une solution, ce ne peut être que celle que donnent les formules de Cramer. Conclure.
- Applications: (1) $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x + z = 3 \\ y + z = 2 \\ x + y = 7 \end{cases}$
- Les formules de Cramer seront généralisées dans le M2, on peut toutefois d'ores et déjà noter l'analogie avec la résolution d'un système de 2 équations à 2 inconnues:

Soit le système d'équations $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$, interprété comme équation vectorielle $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{c}$.

On a vu dans un exercice précédent que si $det(\vec{a}, \vec{b}) \neq 0$, ce système admet une solution unique donnée par:

$$x = \frac{det(\vec{c}, \vec{b})}{det(\vec{a}, \vec{b})} \quad y = \frac{det(\vec{a}, \vec{c})}{det(\vec{a}, \vec{b})}$$

Dans tous les cas, le dénominateur est le déterminant des vecteurs qui forment le premier mambre de l'équation, et le numérateur relatif à chacune des inconnues s'obtient en remplaçant le vecteur (la colonne) correspondant par le vecteur (la colonne) second membre de l'équation vectorielle...

Géométrie analytique plane

11 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $R = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ soit les points $A\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}11\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

On note A', B', C' les milieux respectifs des côtés BC, CA, AB du triangle $T = (ABC)$, et Γ son cercle circonscrit.

a. Calculer les coordonnées des points A', B', C', et celles du centre de gravité G du triangle T.

b. Donner les équations des hauteurs de T, et calculer les coordonnées de son orthocentre H.

c. Donner les équations des médiatrices de T, et calculer les coordonnées du centre Ω de Γ.
Vérifier que Ω, G, H sont alignés (droite d'Euler de T), et qu'on a la relation: $\overline{GH} = -2\,\overline{G\Omega}$

d. Donner les équations des tangentes à Γ en A, B, C

e. Montrer que l'équation de Γ est: $x^2 + y^2 - \frac{82}{7}x + \frac{4}{7}y + \frac{55}{7} = 0$, et que son rayon est: $R = \frac{10\sqrt{13}}{7}$

f. On note γ le cercle d'Euler de T, homothétique de Γ par l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$
Justifier que γ a pour centre le milieu ω de ΩH, et donner son rayon ρ, puis son équation.
Vérifier que γ passe par les points A', B', C', par les pieds des hauteurs de T, et par les milieux des segments AH, BH, CH.

12 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $R = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on considère les points $A\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$

a. Calculer les composantes de vecteurs unitaires $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ portés par les côtés respectifs BC, CA, AB du triangle.
En déduire des représentations paramétriques et des équations des bissectrices intérieures du triangle ABC, vérifier qu'elles sont concourantes, et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection I.

b. Vérifier que les distances de I aux côtés du triangle sont égales, en déduire que I est bien le centre du cercle γ inscrit dans le triangle ABC. Donner l'équation de γ.

c. Calculer les coordonnées des points de contact P, Q, R de γ avec les côtés BC, CA, AB (projections de I sur les côtés). Vérifier que les droites AP, BQ, CR sont concourantes en un point G (Point de Gergonne)

d. Les bissectrices AI, BI, CI recoupent les côtés respectifs BC, CA, AB du triangle en A', B', C'.
Vérifier analytiquement les égalités: $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B}{A'C}$ $\quad \frac{BC}{BA} = \frac{B'C}{B'A}$ $\quad \frac{CA}{CB} = \frac{C'A}{C'B}$

Géométrie analytique en dimension 3

13 Dans l'espace rapporté à un repère (orthonormal) on considère le plan P passant par les trois points suivants :
$A : (1,-1,2,)$, $B : (2,1,-1)$, $C : (-1,1,1)$
Déterminer une équation cartésienne et une représentation paramétrique du plan P, ainsi que des équations de ses traces sur les faces du repère.
On note U, V, W les intersections de P avec les axes du repère. Evaluer (valeur approchée) les angles du triangle UVW.

14 Vérifier que dans l'espace rapporté à un repère les relations suivantes : $\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = -1 \end{cases}$
sont les équations cartésiennes d'une droite dont on écrira une présentation sous forme paramétrique.
Caractériser cette droite par la donnée d'un point et d'un vecteur directeur.

15 *Equation d'un plan: une "formule"...*

Soit P un plan donné par un point $A\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$, et deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}u\\u'\\u''\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}v\\v'\\v''\end{pmatrix}$ (non nuls et non colinéaires)

Montrer que pour qu'un point M appartienne à P, il faut et il suffit que: $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

En déduire que l'équation du plan est donnée par la formule: $\begin{vmatrix} u & v & x-\alpha \\ u' & v' & y-\beta \\ u'' & v'' & z-\gamma \end{vmatrix} = 0$

16 Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $R = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ soit les points $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

a. Ecrire l'équation des plans (ABC) et (ABD). Comment obtenir simplement les équations des plans (BCD) et (ACD) à partir de celle de (ABD) ? (utiliser la symétrie des données)
Donner une valeur approchée de l'angle θ des plans (ABC) et (ABD) (*Rep*: $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{33}}$)
Calculer la distance de D au plan (ABC), et celle de C au plan (ABD).

b. Donner des représentations paramétriques et des équations de la perpendiculaire d abaissée de D sur le plan (ABC) (Hauteur relative au sommet D du tétraèdre), et de la hauteur c relative au sommet C.
Montrer que c et d se coupent en un point H dont on déterminera les coordonnées. Vérifier que la droite (AH) est orthogonale au plan (BCD), et que la droite (BH) est orthogonale au plan (ACD).
En déduire que les hauteurs du tétraèdre $(ABCD)$ sont concourantes (tétraèdre orthocentrique).

c. Montrer que les hauteurs b et c du tétraèdre $(OBCD)$ se coupent en A, mais que ses hauteurs c et d ne sont pas sécantes, et que donc le tétraèdre $(OBCD)$ n'est pas orthocentrique...

17 Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $R=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère deux droites d et d' définies chacune par un point et un vecteur directeur: $d\ (A,\vec{u})$, $d'\ (B,\vec{v})$

a. Soit M un point de d, et N un point de d'. Montrer que : $det(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{MN}) = det(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB})$

b. Justifier que la perpendiculaire commune à d et d' (dont on supposera l'existence) a pour direction $\vec{u}\wedge\vec{v}$

c. En déduire que la distance entre d et d' peut être obtenue par la formule: $\delta(d,d') = \dfrac{|\,det(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB})\,|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}$

18 *Expression analytique de quelques transformations géométriques*

Dans l'espace rapporté à un repère on considère les points A, B, C, U, V de coordonnées :
$A\ (1,2,2)$, $B\ (2,1,1)$, $C\ (2,-3,-1)$, $U\ (1,2,-1)$ et $V\ (3,1,1)$
On note P le plan (ABC) et D la droite (UV)

1. Vérifier que P et D ne sont pas parallèles.
2. Soit $M\ (x,y,z)$ un point quelconque. Déterminer les coordonnées des images de M par:
   a. la projection sur P suivant la direction de D,
   b. la symétrie par rapport à P suivant la direction de D,
   c. la projection sur D suivant la direction de P,
   d. la symétrie par rapport à D suivant la direction de P.

19 Mêmes questions, en remplaçant D par la perpendiculaire à P passant par le point $W\ (1,2,3)$.

Résolution de systèmes

1 Pour chacun des systèmes de 3 équations à 3 inconnues ci-desous,
- Résoudre le système par la méthode du pivot de Gauss
- L'interpréter vectoriellement, et, si le déterminant est non nul, le résoudre en utilisant les formules de Cramer
- L'interpréter géométriquement comme intersection de plans

$$(A)\ \begin{cases} 2x+3y+z=7 \\ x-y+2z=-3 \\ 3x+y-z=6 \end{cases} \quad (B)\ \begin{cases} x+2y-3z=-1 \\ 3x-y+2z=7 \\ 5x+3y-4z=2 \end{cases} \quad (C)\ \begin{cases} x+2y-3z=6 \\ 2x-y+4z=2 \\ 4x+3y-2z=14 \end{cases}$$

$$(D)\ \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y+az=3 \\ x+ay+3z=2 \end{cases} \quad (E)\ \begin{cases} x+2y-3z=a \\ 2x+6y-11z=b \\ x-2y+7z=c \end{cases} \quad (B)\ \begin{cases} x-3z=-3 \\ 2x-my-z=-2 \\ x+2y+mz=1 \end{cases}$$

2 Discuter et résoudre en fonction du paramètre a: $(A)\ \begin{cases} (a+1)x+y+z=a^2+3a \\ x+(a+1)y+z=a^3+3a^2 \\ x+y+(a+1)z=a^4+3a^3 \end{cases}$

Et en fonction de b: $(B)\ \begin{cases} x-y+z-t=2 \\ x+by+b^2z+b^3t=b \\ bx+b^2y+b^3z+t=b^2 \\ b^2x+b^3y+z+bt=b^3 \\ b^3x+y+bz+b^2t=b^4 \end{cases}$

3 a. Soit le système suivant d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{C}^3$, de paramètres $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$, et où $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$

$$(S)\ \begin{cases} x+y+z=a \\ x+jy+j^2z=b \\ x+j^2y+jz=c \end{cases}$$

Résoudre ce système de 3 façons différentes: par la méthode du pivot de Gauss, à l'aide des formules de Cramer, et à l'aide de combinaisons linéaires astucieuses (ne pas oublier la vérification !)
Comment choisir a, b et c pour que la solution soit réelle ?

b. Etudier le système: $(T)\ \begin{cases} x+y+jz=3 \\ x+jy+j^2z=m \\ x+j^2y+z=2m \end{cases}$ de paramètre $m\in\mathbb{C}$

Comparer avec le système (S)...

4 a. Soit le système suivant d'inconnue $(x,y,z,t)\in\mathbb{C}^4$, de paramètres $(a,b,c,d)\in\mathbb{C}^4$

$$\begin{cases} x+y+z+t=a \\ x+iy-z-it=b \\ x-y+z-t=c \\ x-iy-z+it=d \end{cases}$$

Résoudre ce système de 2 façons différentes: par la méthode du pivot de Gauss, et à l'aide de combinaisons linéaires astucieuses (ne pas oublier la vérification !)
Comment choisir a, b, c, d pour que la solution soit réelle ?

Systèmes échelonnés. Rang

5 Pour chacun des systèmes suivants, réduire le système par la méthode du pivot. Préciser le rang r, le nombre d'inconnues principales et libres, et résoudre le système...

$$(\alpha)\ \begin{cases} x+2y-3z=4 \\ x+3y+z=11 \\ 2x+5y-4z=13 \\ 2x+6y+2z=22 \end{cases} \quad (\beta)\ \begin{cases} x+2y-2z+3u=2 \\ 2x+4y-3z+4u=5 \\ 5x+10y-8z+11u=12 \end{cases}$$

$$(\gamma)\ \begin{cases} 2x+y-2z+3t=1 \\ 3x+2y-z+2t=4 \\ 3x+3y+3z-3t=5 \end{cases} \quad (\delta)\ \begin{cases} x+y-2z+u+3v=1 \\ 2x-y+2z+2u+6v=2 \\ 3x+2y-4z-3u-9v=3 \end{cases}$$

$$(\varepsilon)\ \begin{cases} x+2y+3z+4t+5u+6v=1 \\ 2x+3y+4z+5t+6u+v=2 \\ 3x+4y+5z+6t+u+2v=3 \\ 4x+5y+6z+t+2u+3v=4 \\ 5x+6y+z+2t+3u+4v=5 \\ 6x+y+2z+3t+4u+5v=6 \end{cases}$$

6 Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \cdots & + & x_n & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & \cdots & + & 2x_n & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & \cdots & + & 3x_n & = & 2 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & \cdots & + & nx_n & = & 2 \end{array}\right.$$

7 Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} \lambda x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \cdots & + & x_n & = & a_1 \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & + & \cdots & + & x_n & = & a_2 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \cdots & + & \lambda x_n & = & a_n \end{array}\right.$$

où λ et les a_i sont des nombres complexes donnés.

Applications géométriques, algébriques, etc.

8 a. Discuter l'existence des solutions du système: $\left\{\begin{array}{l} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{array}\right.$

où on suppose que (a, b, c) sont non tous nuls, ainsi que (a', b', c').
Distinguer tous les cas possibles de la résolution, et donner une interprétation géométrique des résultats.

b. Même question pour un système de 3 équations à 2 inconnues: $\left\{\begin{array}{l} ax + by = d \\ a'x + b'y = d' \\ a''x + b''y = d'' \end{array}\right.$

Ce système peut s'interpréter dans le plan, ou dans l'espace (coefficients $c = c' = c'' = 0$).
Pour chacun des cas possibles de la résolution, donner sa signification pour les deux interprétations géométriques, et préciser le rang du système.

9 Résoudre les systèmes suivants dans $\mathbb{C}^n$:

$$(A) \quad \left\{\begin{array}{l} x_2 = a\,x_1 + b \\ x_3 = a\,x_2 + b \\ \quad\cdots \\ x_n = a\,x_{n-1} + b \\ x_1 = a\,x_n + b \end{array}\right. \qquad (B) \quad \left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 2a_1 \\ x_2 + x_3 = 2a_2 \\ \quad\cdots \\ x_{n-1} + x_n = 2a_{n-1} \\ x_n + x_1 = 2a_n \end{array}\right.$$

(distinguer suivant la parité de n)

où a , b et les a_i sont des nombres complexes donnés.

- Etant donné n points $M_1, M_2, \cdots, M_n$ dans le plan, existe-t-il un polygone (de n côtés) dont ces points soient les milieux des côtés ?
On justifiera que si n est impair, il existe une solution unique à ce problème. Par contre, si n est pair, il y en a une infinité ou aucun, selon que le vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_3M_4} + \cdots + \overrightarrow{M_{n-1}M_n}$ est nul ou non...

10 On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.
A tout polynôme $P = a\,X^2 + b\,X + c$ de $\mathbb{R}_2[X]$, on associe le polynôme $F(P) = 2\,(X+1)\,P - (X^2 - 1)\,P'$

1. Montrer que si $P \in \mathbb{R}_2[X]$ alors $F(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer les éléments non nuls P de $\mathbb{R}_2[X]$ pour lesquels il existe un réel λ tel que $F(P) = \lambda P$.

11 Résoudre successivement les trois systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{l} 20x + 19y = 3{,}9 \\ 21x + 20y = 4{,}1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} 20x + 19{,}1y = 4 \\ 21x + 20y = 4{,}1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} 20x + 19{,}1y = 3{,}9 \\ 20{,}9x + 20y = 4{,}1 \end{array}\right.$$

Quelles conclusions en tirer sur la stabilité des solutions d'un système dont les coefficients sont donnés par des valeurs approchées ?
Donner une explication géométrique du phénomène.

Notations:

- $\mathfrak{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ (resp $\mathfrak{M}_{m,n}(\mathbb{C})$) désigne l'ensemble des matrices $m\times n$ (m lignes , n colonnes) à coefficients dans $\mathbb{R}$ (resp $\mathbb{C}$)
  $\mathfrak{M}_{n}(\mathbb{R})$ (resp $\mathfrak{M}_{n}(\mathbb{C})$) désigne l'ensemble des matrices $n\times n$ (matrices carrées d'ordre n) à coefficients dans $\mathbb{R}$ (resp $\mathbb{C}$)
  Si le choix de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est indifférent, (ou s'il n'y a pas d'ambiguité), on note simplement $\mathfrak{M}_{m,n}$ ou $\mathfrak{M}_{n}$
- $O_{m,n}$ (resp. O_n) désigne la matrice de $\mathfrak{M}_{m,n}$ (resp. de $\mathfrak{M}_{n}$) dont tous les coefficients sont nuls.
  S'il n'y a pas d'ambiguité sur m et n, on note simplement O.
- I_n désigne la matrice unité de $\mathfrak{M}_{n}$; S'il n'y a pas d'ambiguité sur n, on note simplement I.

Technique élémentaire

1

On donne $A_1=\begin{pmatrix}1&2&-5\\0&-3&2\end{pmatrix}$ $A_2=\begin{pmatrix}1&2\\-1&-2\\7&1\end{pmatrix}$ $A_3=\begin{pmatrix}3&1&-1\\6&-2&3\\7&2&-2\end{pmatrix}$ $A_4=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$ $A_5=\begin{pmatrix}7&2&-4\end{pmatrix}$.

Calculer tous les produits $A_i\,A_j$ possibles, en présentant les résultats dans un tableau à double entrée. (conseil: placer A_i en ligne, A_j en colonne du tableau).

2

On donne $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&7\\-2&-4&-5\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0&1&-1\\4&-3&4\\3&-3&4\end{pmatrix}$.

a. Calculer: $A+B$, $A-B$, $5A-7B$, $A\cdot B$, $B\cdot A$, ${}^t(A+B)$, ${}^tA+{}^tB$, ${}^tB+{}^tA$, ${}^t(A\cdot B)$, ${}^tA\cdot{}^tB$, ${}^tB\cdot{}^tA$

b. Calculer: A^2 , B^2 , $(A+B)^2$, A^2-B^2 , $A^2+2A\cdot B+B^2$, $(A+B)\cdot(A-B)$

c. Calculer: $A\cdot A^2$, $A^2\cdot A$, $A\cdot A^3$, $A^3\cdot A$, $(A^2)^2$.
Justifier ces résultats en parenthésant ces expressions et en utilisant l'associativité du produit.

3

1. Soit A la matrice : $A=\begin{pmatrix}1&-1&0&-3\\3&-2&1&0\end{pmatrix}$ Calculer ${}^tA.A$ et $A.{}^tA$.
2. Soit $A\in\mathfrak{M}_{m,n}$. Montrer que ${}^tA.A$ et $A.{}^tA$ sont des matrices symétriques.

Quelques sujets d'étonnement

4

On donne $A=\begin{pmatrix}1&-3&2\\2&1&-3\\4&-3&-1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&4&1&0\\2&1&1&1\\1&-2&1&2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}2&1&-1&-2\\3&-2&-1&-1\\2&-5&-1&0\end{pmatrix}$

Vérifier que : $A\cdot B=A\cdot C$ (alors que $B\neq C$)
Noter que: $A\cdot(B-C)=O$
(On notera O toutes les matrices dont tous les coefficients sont nuls, de dimensions adéquates, bien sûr)

5

Soit $M=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-3&2&-1\\-2&1&0\end{pmatrix}$ $N=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\1&2&3\end{pmatrix}$ Vérifier que : $N\cdot M\neq O$ mais que $M\cdot N=O$

6

Soit $D=\begin{pmatrix}2&3&-2\\2&0&1\\8&6&-2\end{pmatrix}$ Vérifier que : $D^3=O$ mais que $D^2\neq O$

7

a. Soit $P=\begin{pmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{pmatrix}$ $Q=\begin{pmatrix}-1&3&5\\1&-3&-5\\-1&3&5\end{pmatrix}$ Vérifier que : $Q\cdot P=P\cdot Q=O$

b. Montrer que: $(P+Q)^2=P^2+Q^2$ et que, plus généralement : $\forall\,n\geq 1$; $(P+Q)^n=P^n+Q^n$

Matrices carrées. Polynômes de matrices.

8 On donne: $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ Calculer $P(D)$ dans les cas suivants:

$P = X^2 + X$ $\quad Q = X^2 + X + 1$ $\quad$ Vérifier que D annule le polynôme $X^2 - 14$

9 a. Montrer que si A et B sont deux matrices carrées de même ordre:
- $((A+B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2) \iff (A \text{ et } B \text{ commutent})$
- $(A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)) \iff (A \text{ et } B \text{ commutent})$

b. Montrer que si A et B sont deux matrices carrées (réelles ou complexes) de même ordre, et qui commutent :
- $\forall n \geq 0 \quad A \cdot B^n = B^n \cdot A$ (A commute avec B^n)... Par convention: $B^0 = I$
- $\forall m \geq 0 ; \forall n \geq 0 \quad A^m \cdot B^n = B^n \cdot A^m$ (A^m commute avec B^n).
- Si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ (ou de $\mathbb{C}[X]$): $P(A) \cdot Q(B) = Q(B) \cdot P(A)$

b. Montrer que si A et B sont deux matrices carrées (réelles ou complexes) de même ordre, et qui commutent :
- La formule du binôme est licite: $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k}$
- Si en outre $A \cdot B = B \cdot A = O$, alors: $\forall n \geq 1 \quad (A+B)^n = A^n + B^n$

10 b. Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $P(B)$ lorsque P est le polynôme: $P = X^3 - 1$

En déduire un calcul simple de: $W = \sum_{k=0}^{100} B^k$

a. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $P(A)$ lorsque P est le polynôme: $P = X^2 + X + 1$

En déduire un calcul simple de: $U = A^4 + 2A^3 + A^2$ et de $V = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^{n+k}$

c. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Vérifier que M annule le polynôme: $X^2 - (a+d)X + \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

11 Résoudre dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$: $M^2 + M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad M^2 - 2M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad M^2 = -I$ $\quad M^2 + M = I$

12 Soient trois réels p, q, r, vérifiant : $p^2 + q^2 + r^2 = 1$. On considère la matrice: $A = \begin{pmatrix} p^2 & qp & rp \\ pq & q^2 & rq \\ pr & qr & r^2 \end{pmatrix}$.

et on pose $B = I_3 - A$. Montrer que $A^2 = A$ et en déduire AB, BA et B^2.

13 Pour tout nombre réel θ, soit $A(\theta)$ la matrice : $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

b. Montrer que $\forall \theta, \forall \varphi$; $A(\theta)$ commute avec $A(\varphi)$ et que: $A(\theta) \cdot A(\varphi) = A(\theta + \varphi)$

b. Montrer que $A(\theta)$ est inversible pour tout θ et que $[A(\theta)]^{-1} = A(-\theta)$.

c. En développant $[A(\theta) + A(-\theta)]^n$, montrer que l'on peut déterminer $\cos^n\theta$ en fonction de cosinus d'arcs multiples de θ.

14 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et A^3 et résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: $x I_3 + y A + z A^2 = A^3$

En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}

2. Montrer que toute matrice $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et vérifiant une relation du type:

$$a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_n A^n = 0 \qquad \text{où } a_i \in \mathbb{R} \text{ et } a_0 \neq 0$$

est inversible, et calculer son inverse.

Matrices carrées particulières.

15 a. On donne: $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ $\quad T_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad T_3 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Calculer : $T_1 \cdot T_2$, $T_2 \cdot T_1$, $T_1 \cdot T_3$, $(T_1 \cdot T_2 - T_2 \cdot T_1)^n$

c. Montrer que le produit de deux matrices carrées d'ordre n triangulaires supérieures (resp. triangulaires inférieures) est une matrice triangulaire supérieure (resp. triangulaire inférieure).

16 Soit A la matrice : $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^n en remarquant que $A = 2I + B$.

17 Soit A et B deux matrices carrées symétriques. A quelle condition la matrice $A \cdot B$ est-elle symétrique ?

18

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et vérifier que: $A^2 = A + 2\,I$.
   En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et de I.
2. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, A^n$ peut s'écrire sous la forme: $A^n = u_n\,A + v_n\,I$ où u_n et v_n sont réels.
3. On pose: $\alpha_n = 2\,u_n + v_n$; $\beta_n = u_n - v_n$.
   Calculer $(\alpha_{n+1}, \beta_{n+1})$ en fonction de (α_n, β_n), puis u_n et v_n en fonction de n.
4. Calculer A^n.

19

a. On considère la matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$ et $\overline{A}$ la matrice conjugués de A (dont les termes sont les conjugués de ceux de A). Calculer $A \cdot \overline{A}$ et résoudre le système: $(S)\ \begin{cases} x + y + z = a \\ x + jy + j^2 z = b \\ x + j^2 y + jz = c \end{cases}$

b. On note $a_{kl} = e^{\frac{2ikl\pi}{n}}$. Soit A_n la matrice $A_n = \left(a_{kl}\right)_{\substack{1\le k\le n \\ 1\le l\le n}}$. Calculer le produit $A_n \cdot \overline{A_n}$

20

Soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ les racines cubiques de l'unité $(1, j, j^2)$.

On considère les matrices $A_k = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_k^2 & \varepsilon_k \\ \varepsilon_k & 1 & \varepsilon_k^2 \\ \varepsilon_k^2 & \varepsilon_k & 1 \end{pmatrix}$ pour $k = 1, 2, 3$

1. Calculer les produits $A_p\,A_q$ en distinguant les cas: $p = q$ et $p \neq q$.
2. a. Montrer que toute matrice du type $M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$ où a, b, c sont réels, peut s'écrire de manière unique sous la forme: $M = x\,A_1 + y\,A_2 + z\,A_3$ où x, y, z sont des nombres complexes qu'on calculera en fonction de a, b, c.
   b. En déduire que: $M^n = x^n A_1 + y^n A_2 + z^n A_3$
   Appliquer ce résultat pour $a = 1, b = 0, c = -1$.

21

On note $\Delta_{ij} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les termes sont nuls sauf celui de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne, qui vaut 1. Montrer qu'une matrice B commute avec toutes les matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si elle commute avec chacune des n^2 matrices Δ_{ij}.
En déduire qu''une matrice B qui commute avec toutes les matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est de la forme: $B = \lambda I$.

Matrices échelonnées. Rang

- ***Conventions et notations:***

Matrice échelonnée:	Matrice dans laquelle le nombre de zéros en début de chacune des lignes est strictement supérieur à celui des lignes précédentes.
Elément distingué:	Le premier terme non nul d'une ligne non nulle...
Opérations élémentaires sur les lignes	... Echanger les lignes L_i et L_j ($L_i \longleftrightarrow L_j$; $i \neq j$) ... Ajouter à la ligne L_i le produit de L_j par un nombre k. ($L_i \longrightarrow L_i + kL_j$; $i \neq j$) ... Multiplier la ligne L_i par un coefficient non nul. ($L_i \longrightarrow k\,L_i$ $k \neq 0$)
Equivalence-ligne:	Une matrice A est équivalente-ligne à une matrice B lorsqu'on peut passer de A à B par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes.
Forme canonique ligne de A:	Matrice échelonnée équivalente-ligne à la matrice A, et dont les éléments distingués sont tous égaux à 1, et sont les seuls termes non nuls dans leur colonne.

- ***Résultats admis et illustrés:***

Toute matrice A est équivalente-ligne à une matrice échelonnée, et admet une unique forme canonique ligne.
Toutes les matrices échelonnées équivalentes-ligne à une matrice A ont même nombre d'éléments distingués: $rg(A)$

22

a. Déterminer à l'aide d'opérations élémentaires de lignes le rang des matrices suivantes:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 4 \\ 1 & 8 & 5 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \end{pmatrix}$$

b. Discuter (en fonction des paramètres a, b, c, m de $\mathbb{C}$) le rang des matrices: $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ m & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1-m & 2 & 1-m & 2m+1 \\ 0 & m+1 & 0 & 3m+1 \\ 1 & 3 & 1+m & 4 \\ m & 2m+1 & m & 2m+1 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & b \\ a & 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 & a \\ b & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

c. Déterminer en fonction de n et α le rang des matrices suivantes de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ ($n \geq 2$)

$$R = \begin{pmatrix} -1 & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & 1+\alpha & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+\alpha & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1+\alpha \\ 1+\alpha & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

23 Donner les formes canoniques ligne des matrices suivantes:

$$A=\begin{pmatrix}2&2&3\\0&6&4\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&2&-3\\2&5&-4\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}6&3&-4\\-4&1&-6\\1&2&-5\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\\4&3&1&2\end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix}0&1&3&-2\\2&1&-4&3\\2&3&2&-1\end{pmatrix}\quad F=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\3&2&1&2\\2&-1&2&5\\5&6&3&2\\1&3&-1&-3\end{pmatrix}\quad G=\begin{pmatrix}1&-1&1&1&1\\1&-1&2&3&1\\2&-2&1&0&2\\1&1&-1&-3&3\end{pmatrix}$$

Indication: les rangs des matrices obtenues sont dans l'ordre: 2 , 2 , 2 , 3 , 2 , 3 , 3

24 Soit I la matrice unité de $\mathfrak{M}_n$. On note, pour représenter les opérations élémentaires sur les lignes:

- E_{ij} la matrice obtenue en échangeant dans I les lignes i et j.
- $P_i(k)$ la matrice obtenue en multipliant dans I la ligne i par k $(k\neq 0)$.
- $S_{ij}(k)$ la matrice obtenue en ajoutant (dans I) à la ligne i le produit par k de la ligne j.

a. Pour $n=4$, écrire les matrices élémentaires suivantes: $E_{2,4}$, $E_{4,2}$, $S_{1,3}(4)$, $S_{3,1}(4)$, $P_2(-5)$
Déterminer les opérations inverses de ces opérations, et leurs matrices.
Justifier que les matrices E_{ij} , $P_i(k)$, $S_{ij}(k)$ sont inversibles et déterminer leurs inverses...

b. $(n=3)$. Soit $A=\begin{pmatrix}2&3&8&3\\0&3&6&3\\1&0&1&0\end{pmatrix}$.

Multipliez A à gauche, successivement par $E_{1,3}$, $S_{3,1}(-2)$, $E_{2,3}$, $S_{3,2}(-1)$, $P_2(\frac{1}{3})$ et $P_3(\frac{1}{3})$, en vérifiant que les matrices obtenues à chaque étape correspondent bien aux transformations espérées.
En déduire que si B est la forme canonique-ligne de A: $P_3(\frac{1}{3})\cdot P_2(\frac{1}{3})\cdot S_{3,2}(-1)\cdot E_{2,3}\cdot S_{3,1}(-2)\cdot E_{1,3}\cdot A=B$

c. On considère la réduction suivante: $A=\begin{pmatrix}0&1&3\\1&2&6\\2&3&9\\1&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&6\\2&3&9\\0&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&3\\0&1&3\\0&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=B$

Traduire cette réduction par des multiplications à gauche par des matrices élémentaires.
Déterminer une matrice carrée inversible P telle que: $P\cdot A=B$

d. Réduire à sa forme canonique-ligne la matrice: $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{pmatrix}$. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}

Calcul de l'inverse d'une matrice

25 Calculer l'inverse des matrices suivantes de plusieurs manières:

- En résolvant un système d'équations
- En utilisant la méthode du pivot

$$A=\begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&3&3\\1&4&3\\1&3&4\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&-3&-2&2\\-1&-3&-2&-2\\3&1&-1&0\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}2&4&3&2\\3&6&5&2\\2&5&2&-3\\4&5&14&14\end{pmatrix}$$

26 Déterminer les inverses de: $F=\begin{pmatrix}a_1&0&\cdots&0\\0&a_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&&\cdots\\0&0&\cdots&a_n\end{pmatrix}$ $G=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&a_1\\0&\cdots&a_2&0\\\cdots&&\cdots&\cdots\\a_n&0&\cdots&0\end{pmatrix}$ (où $\prod_1^n a_i\neq 0$)

27 Sur $\mathbb{C}$ déterminer l'inverse de: $K=\begin{pmatrix}i&-1&2i\\2&0&2\\-1&0&1\end{pmatrix}$ $L=\begin{pmatrix}1&i&-1\\-2i&0&3\\1&i&-i\end{pmatrix}$ $M=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&i&-1&-i\\1&-1&1&-1\\1&-i&-1&i\end{pmatrix}$

28 Déterminer, lorsqu'elles existent les inverses des matrices suivantes (Discuter suivant a , b , c):

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1+a&1&1\\1&1&1+b&1\\1&1&1&1+c\end{pmatrix}\quad Q=\begin{pmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{pmatrix}\quad R=\begin{pmatrix}1+a&b&a&b\\b&1+a&b&a\\a&b&1+a&b\\b&a&b&1+a\end{pmatrix}\quad S=\begin{pmatrix}a-b-c&2a&2a\\2b&b-a-c&2b\\2c&2c&c-a-b\end{pmatrix}$$

29 Déterminer les inverses de: $T=\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&1&1&\cdots&1\\0&0&1&\cdots&1\\\cdots&\cdots&&&\cdots\\0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}$ $U=\begin{pmatrix}1&2&3&\cdots&n\\0&1&2&\cdots&n-1\\0&0&1&\cdots&n-2\\\cdots&\cdots&&&\cdots\\0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}$

$$V=\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&2&1&\cdots&1\\0&0&3&\cdots&1\\\cdots&\cdots&&&\cdots\\0&0&\cdots&0&n\end{pmatrix}\quad W=\begin{pmatrix}a&b&b&\cdots&b\\b&a&b&\cdots&b\\b&b&a&\cdots&b\\\cdots&\cdots&&&\cdots\\b&b&\cdots&b&a\end{pmatrix}$$

(On vérifiera que W n'est inversible que si $a\neq b$ et $a+(n-1)b\neq 0$)

30 Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,n}$

a. On suppose que $A^3 = 0$. Montrer que $I - A$ est inversible et que: $(I-A)^{-1} = I + A + A^2$

b. On suppose qu'il existe $p \geq 2$ tel que $A^p = 0$. Montrer que $(I-A)$ est inversible et calculer $(I-A)^{-1}$.

c. On suppose A triangulaire supérieure et telle que les coefficients de la diagonale soient nuls. Démontrer que les k dernières lignes de A^k $(k \geq 1)$ sont nulles. En déduire que A satisfait à la condition du (b).

d. Application : Calculer par cette méthode l'inverse de: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Quelques applications du calcul matriciel

31 Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^{-1} et résoudre le système: $\begin{cases} 2x+3y+\ \ z=9 \\ \ \ x+2y+3z=6 \\ 3x+\ \ y+2z=8 \end{cases}$

32 Soit $m \neq \pm 1$. Montrer que $\begin{pmatrix} m-1 & 1 & -1 \\ 2 & m & 1 \\ m & 1-m & m \end{pmatrix}$ est inversible et résoudre: $\begin{cases} (m-1)x + \quad y - \ z = m \\ 2x + \ my + \ z = 3 \\ mx + (1-m)y + mz = m^2 \end{cases}$

33

a. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par: $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n \\ v_{n+1} = u_n + 3v_n \end{cases}$ avec $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$

Calculer u_n et v_n pour tout n, en utilisant la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(On pourra noter que $A = 2I + K$ et vérifier que $K^n = 2^{n-1}K$ pour appliquer la formule du binôme)

b. Mêmes questions lorsque: $\begin{cases} u_{n+1} = 5u_n + 4v_n \\ v_{n+1} = 3v_n \end{cases}$

Calculs élémentaires

1 a. Déterminer un trinôme T du second degré unitaire et à coefficients entiers dont une des racines est $\alpha = 1-\sqrt{3}$.
Soit $P(x) = x^5 + 2x^4 + x^2 - x - 1$. Calculer $P(1-\sqrt{3})$ en notant que: $\alpha^2 = 2\alpha + 2$.
Retrouver le résultat en utilisant la formule du binôme, et en faisant la division euclidienne de P par T.

b. Mêmes questions avec: $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $P = X^6 + 2X^4 - 7X^3 + 3X - 5$

2 a. Montrer qu'une fonction polynôme paire (resp. impaire) a ses coefficients impairs (resp. pairs) nuls.
(On rappelle qu'un polynôme à coefficients réels ou complexes n'est nul que si ses coefficients sont tous nuls)

b. Montrer que si un nombre complexe α est racine d'un polynôme P à coefficients réels, alors $\overline{\alpha}$ est aussi racine du polynôme P. Cas où α est réel.

3 *Polynômes d'interpolation de Lagrange.*

Etant donné n nombres deux à deux distincts $a_1, a_2, \dots a_n$, on note $\pi_k(x) = \prod_{p \neq k} (x-a_p)$

et $\varphi_k(x) = \dfrac{\pi_k(x)}{\pi_k(a_k)} = \dfrac{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{k-1})(x-a_{k+1})\cdots(x-a_n)}{(a_k-a_1)(a_k-a_2)\cdots(a_k-a_{k-1})(a_k-a_{k+1})\cdots(a_k-a_n)}$

a. Vérifier que, k étant fixé, φ_k est un polynôme de degré $n-1$, et que $\varphi_k(a_p)$ vaut 1 si $k=p$, et 0 si $k \neq p$.

b. Montrer que pour tout polynôme P de degré $n-1$, on a la relation: $P = \sum_{k=1}^{n} P(a_k)\varphi_k$
(On rappelle qu'un polynôme non nul de degré k a au plus k racines distinctes)

c. Etant donné n nombres $b_1, b_2, \dots b_n$, montrer qu'il existe un unique polynôme P, de degré $n-1$, et tel que pour tout k on ait: $P(a_k) = b_k$

d. Exemples d'application:
- Ecrire l'équation de la droite passant par les points $A\ (a, a')$ et $B\ (b, b')$ (où $a \neq b$)
- Donner l'équation de la parabole d'axe parallèle à Oy, qui passe par les points $U\ (1, 2)$, $V\ (-1, 6)$, $W\ (2, 3)$

e. Résoudre le système: $\begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 = A_1 \\ x_0 + 2x_1 + 4x_2 = A_2 \\ x_0 + 3x_1 + 9x_2 = A_3 \end{cases}$ en interprétant (x_0, x_1, x_2) comme les coefficients d'un polynôme P de degré 2...

- Généralisation: Etant donné n nombres deux à deux distincts $a_1, a_2, \dots a_n$, et n nombres $b_1, b_2, \dots b_n$,
résoudre le système de n équations linéaires: $\begin{cases} x_0 + x_1 a_1 + x_2 a_1^2 + \cdots + x_{n-1} a_1^{n-1} = b_1 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ x_0 + x_1 a_n + x_2 a_n^2 + \cdots + x_{n-1} a_n^{n-1} = b_n \end{cases}$

4 Soit P le polynôme: $P = x^3 + px + q$ où p et q sont deux nombres réels fixés.

a. Etudier les variations de la fonction $y = P(x)$, et en déduire que pour que P ait 3 racines réelles distinctes, il faut et il suffit que $4p^3 + 27q^2 < 0$.

b. *Méthode de Cardan.*
Pour trouver les racines réelle de P, on pose $x = u+v$, où u et v sont liés par la relation: $3uv + p = 0$.
Montrer que u^3 et v^3 sont solutions d'une équation du second degré qu'on déterminera.
Pour résoudre l'équation $x^3 + px + q = 0$, il suffit donc de calculer u^3 et v^3, puis u et v (liés par la relation $3uv + p = 0$), pour obtenir $x = u+v$.
Application: Résoudre par ce procédé les équations: $x^3 - 21x - 20 = 0$ et $x^3 - 12x - 65 = 0$
Indications: Ayant obtenu pour u^3 et v^3 *des* valeurs (réelles ou complexes) U et V, résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $u^3 = U$ et $v^3 = V$, puis en déduire $x = u+v$ en tenant compte de ce que uv doit être réel ($3uv = -p$)
Pour le premier exemple, on pourra noter après l'avoir vérifié que $(10+9i\sqrt{3})$ est le cube de $(-2+i\sqrt{3})$

Division euclidienne

5 Effectuer la division euclidienne de A par B dans $\mathbb{R}[X]$ ou dans $\mathbb{C}[X]$ suivant le cas.

a. $A = 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ $\qquad B = X^3 + X + 2$

b. $A = X^4 - X^3 + X - 2$ $\qquad B = X^2 - 2X + 4$

c. $A = X^2 - 3iX - 5(1+i)$ $\qquad B = X - 1 + i$

d. $A = X^4 + (4-2i)X^3 - (5+3i)X^2 + (13+19i)X + 3 - 6i$ $\qquad B = X^2 - (1+i)X + 2 + 3i$

6 Effectuer la division euclidienne de A par B dans $\mathbb{R}[X]$ ou dans $\mathbb{C}[X]$ suivant le cas.

a. $A = X^5 + X + 1$ $\qquad B = X^3 - X^2 + 1$

b. $A = X^5 - 7X^4 - X^2 - X + 9$ $\qquad B = X^2 - 5X + 4$

c. $A = 4X^3 + X^2$ $\qquad B = X + 1 + i$

d. $A = X^4 - (5j+3)X^3 + (2j+1)X^2 - (1+j)X + 2$ $\qquad B = X^2 - (2+j)X + j$ $\qquad$ (où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$)

e. $A = X^{101} - 1$ $\qquad B = X^4 - 1$

7 Soit A, B, C trois polynômes non nuls de $\mathbb{C}[X]$.
Lorsqu'on divise A par BC, le reste est R.
On divise A par B. Le quotient est Q' et le reste S'. On divise Q' par C. Le reste est T'.
On divise A par C. Le quotient est Q'' et le reste S''. On divise Q'' par B. Le reste est T''.
Montrer que: $\quad BT' + S' = CT'' + S'' = R$

8

a. Soit a et b deux nombres réels distincts, et P un polynôme quelconque.
Exprimer le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X-a)(X-b)$ en fonction de $a, b, P(a), P(b)$.

b. Soit a, b, c trois nombres réels distincts, et P un polynôme quelconque.
Exprimer le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X-a)(X-b)(X-c)$ en fonction de $a, b, c, P(a), P(b), P(c)$. (Faire cet exercice de deux manières, en appliquant ou non les résultats de l'exercice 3)

c. Exemple: Déterminer le reste de la division d'un polynôme Q par $(X-1)(X-2)(X-3)$ sachant que $Q(1)=3$, $Q(2)=7$ et $Q(3)=13$.

9 Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P qui ait pour reste $(X+1)$ si on le divise par $(X-1)(X-2)$, et pour reste $(X+2)$ si on le divise par (X^2-1).

10

a. Trouver le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ de $P=(X-2)^{2n}+(X-1)^n+1$ par les polynômes:
α) $Q=(X-1)(X-2)$ $\qquad \beta$) $Q=(X-1)(X-2)(X-3)$ $\qquad \gamma$) $Q=(X-1)^2(X-2)$

b. Trouver le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ de X^n par les polynômes:
α) $Q=(X-1)^2(X+2)$ $\qquad \beta$) $Q=(X-1)^3(X+1)$

11 Effectuer dans $\mathbb{R}[X]$ la division euclidienne de $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ par $X-a$
On prouvera que le reste est $P(a)$ et que le quotient est de la forme: $Q = b_nX^{n-1} + b_{n-1}X^{n-2} + \cdots + b_1X + b_0$
où $b_n = a_n$; $b_{n-1} = a_{n-1} + a\,a_n$; $b_{n-k} = a_{n-k+1} + a\,a_{n-k+2} + a^2a_{n-k+3} + \cdots + a^{k-1}a_n$; etc.

12

a. Déterminer $a \in \mathbb{C}$ pour que le polynôme $X^2 - aX + 1$ divise le polynôme $X^4 - X + a$ [Rep: $a = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$]

b. Déterminer $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ pour que $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ [Rep: $\lambda = 3$; $\mu = 2$]

c. Déterminer $(p, q) \in \mathbb{C}^2$ pour que le polynôme $P(x) = x^2 + px + q$ divise le polynôme défini par $Q(x) = P(x^2+1)$
[Rep: $(p,q) \in \{ (0,-j) ; (0,-j^2) ; (-1;1) ; (1,2) ; (2j, j^2) ; (2j^2, j) \}$]

d. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ pour que $X^3 + X^2 - cX + 1$ divise $X^5 + aX^2 + b$
[Rep: $(a,b,c) \in \{ (-2j^2, -j^2, j) ; (-2j, -j, j^2) \}$]

13 Soit n un nombre entier donné, φ un nombre réel donné, et A, B, C les trois polynômes suivants de $\mathbb{C}[X]$.

$A = X^n \sin\varphi - X \sin(n\varphi) + \sin(n-1)\varphi$

$B = X^{n+1}\cos(n-1)\varphi - X^n\cos(n\varphi) - X\cos\varphi + 1$

$C = X^2 - 2X\cos\varphi + 1$

a. Effectuer les divisions euclidiennes de A par C, et de B par C.

b. Dans les deux cas on trouve que le reste est nul. Peut-on démontrer ce résultat plus rapidement en se plaçant dans $\mathbb{C}[X]$?

c. Retrouver le résultat du (b) en considérant le polynôme $D + iB$ où D est défini par: $D(x) = x^{n+1}A(\frac{1}{x})$

Diviseurs et multiples. Racines, multiplicité, formule de Taylor.

14 Prouver que les polynômes suivants vérifient: Q divise P :

a. $P(x) = x^{12} - 1$ $\quad Q(x) = x - 1$, $Q(x) = x^2 - 1$, $Q(x) = x^3 - 1$, $Q(x) = x^4 - 1$, $Q(x) = x^6 - 1$

b. $P(x) = x^{3n+2} + x^{3m+1} + x^{3p}$ $\quad Q(x) = x^2 + x + 1$ $\quad (n,m,p \in \mathbb{N})$.

c. $P(x) = (x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$ $\quad Q(x) = x(x+1)(2x+1)$ $\quad (n \in \mathbb{N}^*)$.

d $P(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$ $\quad Q(x) = (x-1)^2$ $\quad (n \in \mathbb{N}^*)$.

15

a. Déterminer a et b pour que le polynôme $P = aX^{n+1} + bX^n + 1$ soit divisible par $(X-1)^2$ dans $\mathbb{R}[X]$.

b. Prouver que $X^{10} - 2X^9 + X^8 - 2X^6 + 4X^5 - 2X^4 + X^2 - 2X + 1$ est divisible par $(X-1)^4$ dans $\mathbb{R}[X]$

c. Prouver que si $n \geq 2$: $(1+X)(1-X^n) - 2nX^n(1-X) - n^2X^{n-1}(1-X)^2$ est divisible par $(X-1)^3$ dans $\mathbb{R}[X]$

d. Prouver que si $n \geq 1$: $nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ est divisible par $(X-1)^3$ dans $\mathbb{R}[X]$

e. Pour quelles valeurs de l'entier n le polynôme $P = X^{2n} + X^n + 1$ est-il divisible par $Q = X^2 + X + 1$?

16 Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, et a un nombre réel quelconque.
Montrer que a est racine au moins triple du polynôme: $Q = \frac{1}{2}(X-a)(P' + P'(a)) - P + P(a)$

17 Soit p et q sont deux entiers non nuls premiers entre eux.
Montrer que le polynôme $(X-1)(X^{pq}-1)$ est divisible par $(X^p-1)(X^q-1)$
(A faire par une autre méthode quand on aura prouvé que le *P.G.C.D.* de (X^p-1) et (X^q-1) est $(X-1)$)

18 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, tel que $P \neq 0$. On suppose que: $\exists\, a \in \mathbb{R}$; $(P(a) > 0$ et $\forall\, n \leq deg(P)\ P^{(n)}(a) \geq 0)$.
Montrer que si P a une racine réelle x_0 alors on a certainement $x_0 < a$

19 Montrer que le polynôme suivant de $\mathbb{C}[X]$ n'a pas de racine multiple: $P(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$

20 Montrer que $P_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x(x+1)}{2!} + \dots + \frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{n!}$ a pour racines : $-1, -2, \dots, -n$.

21 Etant donné a, b deux entiers relatifs non nuls et n un entier naturel, on note P le polynôme: $P = \frac{X^n(a-bX)^n}{n!}$
Montrer que P, ainsi que toutes ses dérivées prennent des valeurs entières pour $x = 0$ et $x = \frac{a}{b}$ (On pourra utiliser la formule de Taylor).

22 P étant un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, on note $P^{[2]}(x) = P(P(x))$

a. Quel est le degré de $P^{[2]}$?. Montrer que $P - X$ divise $P^{[2]} - X$

b. Calculer $P^{[2]}(x)$ lorsque $P = X^2 + 2X - 2$, et résoudre l'équation $P^{[2]}(x) = x$

Irréductibilité. Décomposition dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$

23 a. Décomposer dans $\mathbb{C}[X]$: $A = X^2 - 2X\cos\theta + 1$ où $\theta \in \mathbb{R}$
$A = X^2 - 2Xe^{i\theta} + 1$ pour $\theta \in [0\,;\pi]$ $(\sin\theta > 0)$ puis pour $\theta \in [\pi\,;2\pi]$

24

a. Décomposer les polynômes suivants dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$:

$a = X^5 + 1$ $\quad b = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ $\quad c = X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$

$d = X^4 - X^2 + 1$ $\quad e = X^6 + X^4 + 1$

$f = X^4 + 1$ $\quad g = X^8 + 1$ $\quad g = X^{16} + 1$

$g = X^6 + 2X^4 + 2X^2 + 1$ $\quad h = X^9 + X^6 + X^3 + 1$ $\quad i = (1-X^2)^3 + 8X^3$

$j = X^8 - 2X^4\cos(2\alpha) + 1$ $\quad k = X^6 + X^4 + 3X^2 + 2X + 2$ (en vérifiant que j est racine double...)

b. Soit λ une racine du polynôme b du (a). Justifier que $\lambda \neq 0$, puis calculer $\frac{b(\lambda)}{\lambda^2}$ en fonction de $\mu = \lambda + \frac{1}{\lambda}$.
En déduire à l'aide du (a) que: $\cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos(\frac{3\pi}{5}) = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$

25

a. Montrer que le polynôme: $P = X^5 - 6iX^4 - 11X^3 + 2iX^2 - 12X + 8i$
admet la racine $2i$. Quelle est sa multiplicité ? Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $X^6 - 7X^3 - 8 = 0$, et factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $X^6 - 7X^3 - 8$

26 Décomposer les polynômes suivants dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$:

a. $P=(X+i)^n-(X-i)^n$ (2 méthodes).

b. $Q=(X+1)^n-(X-1)^n$ En déduire que: $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\displaystyle\prod_{p=1}^{n} cotan\left(\frac{p\pi}{2n+1}\right)=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

b. $R=(1+iX)^n-e^{2in\alpha}(1-iX)^n$ lorsque $e^{2in\alpha}\neq(-1)^n$ En déduire $T=\displaystyle\prod_{p=0}^{n-1} tan\left(\alpha+\frac{p\pi}{n}\right)$ (s'il existe)

Rep: $P=2in\displaystyle\prod_{p=1}^{n-1}\left(X-cotan\left(\frac{p\pi}{n}\right)\right)$ $Q=2n\displaystyle\prod_{p=1}^{n-1}\left(X+i\,cotan\left(\frac{p\pi}{n}\right)\right)$ $T=\begin{cases}(-1)^p & \text{si } n=2p\\ (-1)^p tan(2p+1)\alpha & \text{si } n=2p+1\end{cases}$

27 Soit P un polynôme à coefficients rationnels admettant $\alpha+\beta\sqrt{3}$ comme racine, avec $\alpha,\beta\in\mathbb{Q}$.

a. Montrer que si $\lambda+\mu\sqrt{3}=0$ avec $\lambda\in\mathbb{Q}$ et $\mu\in\mathbb{Q}$ alors $\lambda=\mu=0$

b. Prouver que pour tout k entier, $(\alpha+\beta\sqrt{3})^k$ et $(\alpha-\beta\sqrt{3})^k$ peuvent s'écrire respectivement sous la forme $A_k+B_k\sqrt{3}$ et $A_k-B_k\sqrt{3}$ où A_k et B_k sont rationnels.

c. En déduire que $\alpha-\beta\sqrt{3}$ est racine de P.

d. Application: Factoriser le polynôme: $X^4-3X^3-X^2+4X+2$, en sachant que $1+\sqrt{3}$ est racine.

28 Soit $P=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\ldots+a_1X+a_0$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ à coefficients entiers.

a. Montrer que si un entier p est racine de P, alors p divise a_0 (Notation: $p\mid a_0$)

b. Montrer que si le rationnel $X=\frac{p}{q}$ (p et q premiers entre eux) est racine de P, alors $p\mid a_0$ et $q\mid a_n$

c. Montrer que $P=X^3-X-1$ n'a pas de racine rationnelle.

d. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $3X^3+8X^2+12X-5=0$.

29 Soit $P=X^4+1$, qu'on peut considérer aussi bien comme polynôme de $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$

a. Donner les décompositions de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$

b. Justifier que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$
- Par l'absurde, en utilisant l'unicité de la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$
- Par un calcul direct, en essayant d'écrire $P=(X^2+\alpha X+\beta)(X^2+\gamma X+\delta)$ (ou bien sûr $P=(X-r)Q$) (où $\alpha,\beta,\gamma,\delta,r$ seraient rationnels...)

Divisibilité, P.g.c.d, P.p.c.m

30 Déterminer le *P.G.C.D.* des polynômes suivants :

a. $X^5+3X^4+X^3+X^2+3X+1$ et X^4+2X^3+X+2

b. $2X^5+4X^4+4X^3+2X^2+6X+6$ et $2X^2+4X+4$

c. $X^5+X^4-X^3+X^2+X-1$ et $X^5+X^4+2X^2-1$

d. $X^4+X^3-3X^2-4X-1$ et X^3+X^2-X-1

e. $2X^6-5X^5-14X^4+36X^3+86X^2+12X-31$; $2X^5-9X^4+2X^3+37X^2+10X-14$ et X^3-2X-1

31 Déterminer *tous* les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ qui sont diviseurs communs à $P=X^6+X^4-18X^3-8X+80$ et à $Q=X^5-4X^3-8X^2+32$

32 a. Déterminer suivant les valeurs de $a\in\mathbb{R}$ le *P.G.C.D.* de P et Q définis par:
$P=X^6-X^5-X^4+2X^3-X^2-X+a$ et $Q=X^4+X^3-3X^2-X+2$
[Rep: Si $a=1$, $PGCD=X^3-X^2-X+1$ Si $a=-62$, $PGCD=X+2$ Sinon, $PGCD=1$]

b. Pour $n\geq 3$, déterminer dans $\mathbb{C}[X]$ le *P.G.C.D.* de $A=nX^{n+1}-(n+1)X^n+1$ et $B=X^n-nX+n-1$
[Rep: $PGCD=(X-1)^2$]

33 a. Effectuer la division euclidienne de $P(x)=x^n-1$ par $Q(x)=x^p-1$.

b. Quelle relation doit-on avoir entre n et p pour que Q divise P ?

c. Prouver que le *P.G.C.D.* de P et Q est X^d-1, où d est le *P.G.C.D.* de n et p.

34 a. Soient S et T deux polynômes premiers entre eux. Montrer qu'il existe un couple unique de polynômes (U, V) tels que: $SU+TV=1$ avec : $deg\,U<deg\,T$ et $deg\,V<deg\,S$

b. Déterminer U et V dans les cas particuliers suivants:
(On pourra admettre si besoin est que ce couple peut s'obtenir en explicitant les quotients et les restes de l'algorithme d'Euclide à partir du dernier)

$S(x)=x^3+1$ $T(x)=x^4+1$

$S(x)=x^5+1$ $T(x)=x^2+1$

$S(x)=x^n+1$ $T(x)=x^{2n}$

$S(x)=x-a$ $T(x)=x^n$ ($a\neq 0$)

Utilisation du P.G.C.D. et fonctions symétriques des racines

35 Déterminer a et b pour que les polynômes $P=X^4+3X^2+a$ et $Q=X^3+X+b$ de $\mathbb{C}[X]$ aient deux racines communes (distinctes ou confondues) dans $\mathbb{C}$.

36 a. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients p et q pour que le polynôme $P=X^3+pX+q$ de $\mathbb{C}[X]$ admette une racine double.
Faire cet exercice par 3 méthodes:

- Etudier la fonction $y=P(x)$, et déduire qu'une racine double vérifie nécessairement $x=\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}=\frac{3q}{2p}$
- Utiliser $P.G.C.D(P,P')$
- Utiliser les fonctions symétriques des racines (noter λ, λ, μ les racines...)

37 Déterminer a de sorte qu'une des racines du polynôme $P=X^3-7X+a$ soit double d'une autre.
- en notant que les équations $P(x)=0$ et $Q(x)=P(2x)=0$ doivent avoir une racine commune... ($P.G.C.D$)
(Noter la solution parasite $a=0$, qui donne la solution $x=0$, qui est son propre double !)
- en utilisant les fonctions symétriques des racines (Noter λ, 2λ, et μ les racines...)

38 1. Déterminer un polynôme P divisible par X^2+1 et tel que $P-1$ soit divisible par X^3+1.
2. Plus généralement, étant donné deux polynômes S et T, à quelle condition peut-on trouver un polynôme P tel que P soit multiple de S et $P-1$ multiple de T ?

39 Décomposer le polynôme $P=X^5-13X^4+67X^3-171X^2+216X-108$, sachant qu'il a une racine double et une racine triple

40 Déterminer un polynôme P de degré 7 tel que $P+1$ soit divisible par $(X-1)^4$, et $P-1$ divisible par $(X+1)^4$.
(On pourra utiliser P')

41 a. Trouver tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que : $P(i)=2i+5$. (Chercher d'abord une solution particulière)
b. Trouver tous les polynômes Q à coefficients réels tels que $Q(j)=j^2+1$ *et* $Q(i)=-1$

42 On considère la suite de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ définie par: $P_0=1$, $P_1=X$ et pour $n\geq 1$ $P_{n+1}=XP_n-P_{n-1}$
a. Montrer que P_n est degré n, et déterminer pour n supérieur ou égal à 2 ses trois coefficients de plus haut degré.
b. On pose pour t réel : $f_n(t)=(e^{it}-e^{-it})\,P_n(e^{it}+e^{-it})$. Montrer que : $f_n(t)=e^{i(n+1)t}-e^{-i(n+1)t}$
En déduire les racines, puis une factorisation de P_n .
c. Calculer pour n supérieur ou égal à 2 :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{n}\qquad T_n=\sum_{1\leq k\leq p\leq n}\cos\frac{k\pi}{n}\cos\frac{p\pi}{n}\qquad U_n=\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{n}$$

Division suivant les puissances croissantes

43 Effectuer la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 4 de:
a. $2-3X^3+X^4$ par $1+X+X^5$
b. 1 par $1-X$
c. $1-X$ par $1+X^2$

44 Effectuer la division suivant les puissances croissantes à l'ordre n de:
a. $1-abX^2$ par $1-(a+b)X+abX^2$ $(a,b\in\mathbb{R}^2)$
b. $1-X\cos a$ par $1-2X\cos a+X^2$
c. $X\sin a$ par $1-2X\cos a+X^2$
d. $\sum_{k=0}^{n}x^k$ par $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k$

Divers

1 A quelle condition, portant sur α et β, peut-on trouver deux nombres réels A et B tels qu'on ait l'identité:

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1;1\} \quad \frac{X^2+\alpha X+\beta}{(X^2-1)^2} = \frac{A}{(X-1)^2} + \frac{B}{(X+1)^2}$$

2 Déterminer α, β, γ de façon que l'expression suivante soit un polynôme en x :

$$\frac{x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma}{x-1} + \frac{x^3+\beta x^2+\gamma x+\alpha}{x-2} + \frac{x^3+\gamma x^2+\alpha x+\beta}{x-3}$$

3 Soit P et Q deux polynômes à coefficients réels, premiers entre eux. On note R la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$

a. Montrer que R est une fonction paire si et seulement si P et Q sont des polynômes pairs.

b. Montrer que pour que R soit une fonction impaire, il faut et il suffit que P ou Q soit impair, et que l'autre soit pair. C'est-à-dire que: (R impaire) $\Longleftrightarrow$ ((P paire et Q impaire) ou (P impaire et Q paire))

4 Soit $R = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle de $\mathbb{C}[X]$, admettant a pour pôle.

a. On suppose que a est un pôle simple. Montrer que le coefficient de $\frac{1}{x-a}$ dans la décomposition de R en éléments simples est $\frac{P(a)}{Q'(a)}$ Exemple: Décomposer $R = \frac{2x+1}{x^2-1}$

b. On suppose que a est un pôle multiple d'ordre n. Montrer que le coefficient de $\frac{1}{(x-a)^n}$ dans la décomposition de R en éléments simples est $\frac{n!\,.P(a)}{Q^{(n)}(a)}$

Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$

5 Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples sur $\mathbb{R}$. En déduire des primitives

a. Pôles simples...

$A(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$ $\quad B(x) = \frac{x^2+2x+5}{x^2-3x+2}$ $\quad C(x) = \frac{1}{(x-a)(x-b)}$

$D(x) = \frac{P(x)}{x-a}$ (où $P(a) \neq 0$) [Thèmes: penser à la division euclidienne, à la formule de Taylor, etc...]

$E(x) = \frac{x^2-x-2}{x^3+x^2-6x}$ $\quad F(x) = \frac{x^2-x-2}{x(x-1)(x-2)}$ $\quad G(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$

a. Pôles multiples...

$H(x) = \frac{x^4-x^2-x-1}{x^3-3x^2}$ $\quad I(x) = \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}$ $\quad J(x) = \frac{8}{(x+1)(x-1)^5}$

$K(x) = \frac{x^8+x+1}{x^4(x-1)^3}$ $\quad L(x) = \frac{2x+3}{x(x-1)(x^4-1)}$ $\quad M(x) = \frac{1}{x^2(x-1)^n}$

b. Eléments de 2ème espèce

$N(x) = \frac{x^4}{x^2+1}$ $\quad O(x) = \frac{1}{x^4-1}$ $\quad P(x) = \frac{2}{(x^2+1)(x-1)^4}$

$Q(x) = \frac{3}{x^3+1}$ $\quad R(x) = \frac{x^3-3x-4}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$ (Penser à multiplier par x^2+1, puis faire $x = i$...)

$R(x) = \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}$ $\quad T(x) = \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)(x^2+c^2)}$ (où $a^2 \neq b^2 \neq c^2 \neq a^2$)

d. Tutti frutti...

$U(x) = \frac{x^5-x^4+4x^8-4x^2+8x-4}{(x^2+2)^3}$ $\quad V(x) = \frac{x^7+1}{(x^2+x+1)^3}$

$W(x) = \frac{1}{x(x^2+1)^2}$ $\quad X(x) = \frac{x}{(x^2-1)(x^2+1)^3}$ $\quad Y(x) = \frac{1}{(x^6-1)^2}$

Utilisation de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$

6 Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$:

$\alpha(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ $\beta(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x^4+1)}$ $\gamma(x) = \dfrac{x^2}{(x^2+1)^3}$

$\delta(x) = \dfrac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2}$ $\varepsilon(x) = \dfrac{x^6}{(x-i)^2(x+1)^3}$ $\zeta(x) = \dfrac{x+i}{x^2+ix+1}$

7 Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples sur $\mathbb{C}$.
En déduire leur décomposition sur $\mathbb{R}$.

$\lambda(x) = \dfrac{1}{x^5+1}$ $\mu(x) = \dfrac{x^2-3x-2}{(x+1)^2(x^2+x+1)^2}$. $\nu(x) = \dfrac{1}{x^6-1}$

$\xi(x) = \dfrac{x^6}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$ $o(x) = \dfrac{1}{(x^3-1)^2}$ $\pi(x) = \dfrac{1}{x(x^4-1)}$

$\rho(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$

$\sigma(x) = \dfrac{1}{x^n-1}$ (pour la décomposition dans $\mathbb{R}$, distinguer suivant la parité de n)

Domaine de définition, parité, symétries

1 Donner le domaine de définition des fonctions définies par...

$a(x) = x^3 + ln(x)$ $\quad b(x) = \sqrt{x+2}$ $\quad c(x) = \sqrt{|x+2|}$ $\quad d(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x+2|}}$ $\quad e(x) = \sqrt{-x^2}$

$f(x) = \dfrac{x+1}{1-x}$ $\quad g(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x}}$ $\quad h(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$ $\quad i(x) = \sqrt{sin\,x - 1}$

$j(x) = \dfrac{1}{ln(x)}$ $\quad k(x) = \dfrac{1}{ln(ln\,x)}$ $\quad l(x) = \dfrac{1}{ln\,|ln\,x|}$ $\quad m(x) = \dfrac{1}{ln(ln\,|x|)}$ $\quad n(x) = \dfrac{1}{ln\,|ln\,|x||}$

$o(x) = cotan\,x \;\; (= \dfrac{cos\,x}{sin\,x})$ $\quad p(x) = \dfrac{1}{tan\,x}$

$q(x) = ln\,cos\,x$ $\quad r(x) = \sqrt{ln\,cos\,x}$ $\quad s(x) = ln\,|cos\,x|$ $\quad t(x) = \sqrt{ln\,|cos\,x|}$ $\quad u(x) = \dfrac{1}{\sqrt{ln\,|cos\,x|}}$

2 A partir du graphe, connu, de chacune des fonctions f suivantes, représenter graphiquement, sans les étudier, les fonctions: $x \longmapsto f(|x|)$ $\quad x \longmapsto |f(x)|$ et $x \longmapsto |f(|x|)|$

a. $f(x) = ln\,x$ b. $f(x) = x^2 - x$ c. $f(x) = x^2 - 1$ d. $f(x) = sin\,x$ e. $f(x) = cos\,x$

3 Soit (C) la courbe représentative de $x \longmapsto e^x$. Quelle est l'équation cartésienne des courbes suivantes:

a. Translatée de (C) par la translation dont le vecteur a pour composantes $(1; -2)$
b. Symétrique de (C) par rapport à l'axe Ox
c. Symétrique de (C) par rapport à la droite d'équation $y = 3$
d. Symétrique de (C) par rapport à l'axe Oy
e. Symétrique de (C) par rapport à la droite d'équation $x = -2$
f. Symétrique de (C) par rapport à l'origine O
g. Symétrique de (C) par rapport au point A de coordonnées $(1; 5)$

4 Déterminer la période de celles des fonctions suivantes qui sont périodiques:

$\alpha(x) = cos^2 x$ $\quad \beta(x) = cos(x^2)$ $\quad \gamma(x) = cos\,2x$ $\quad \delta(x) = cos\dfrac{x}{2}$

$\varepsilon(x) = cos\,|x|$ $\quad \zeta(x) = sin\,|x|$ $\quad \eta(x) = sin^2|x|$

5 Quels sont les éléments de symétrie (et éventuellement la période) des fonctions suivantes ?

$c(x) = \sqrt{|x+2|}$ $\quad d(x) = x^3 + 3x + 1$ $\quad e(x) = x^6 + 3\,cos\,x + 1$ $\quad f(x) = cos^2(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4})$

Limite d'une fonction en un point et en ± ∞

6 Etudier la limite (éventuellement les limites à gauche et à droite) des fonctions a, b, c définies par::

$a(x) = \dfrac{x-4}{x^2-x-12}$ en $x=4$ $\quad b(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{(x-1)^2}$ en $x=1$ $\quad c(x) = \dfrac{x^3-3x+2}{(x-1)^2}$ en $x=1$

Quelles sont les limites de ces fonctions quand $x \to -\infty$, quand $x \to +\infty$?

7 Calculer les limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$

b. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

c. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$

d. $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{x} - \sqrt[m]{a}}$ $\quad (a \in \mathbb{R}^{+*}, m, n \in \mathbb{N}^*)$

e. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-1}}$

f. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-1}{\sqrt{x^4+1}}$

g. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)$

h. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \left(x - \sqrt{1-x^3}\right)$

8 On rappelle la propriété suivante :

(♥) Pour que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = b$, il faut et il suffit que pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ tendant vers a et telle que pour tout n, $x_n \neq a$, la suite $(f(x_n))$ tende vers b. (a et b pouvant désigner un nombre réel, $+\infty$, ou $-\infty$)

a. Soit $f(x) = x \sin x$.
Donner deux suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ qui tendent vers $+\infty$ et telles que : $f(x_n) = x_n$, $f(y_n) = -y_n$
En utilisant la propriété (♥), montrer que $f(x)$ n'a pas de limite lorsque $x \to +\infty$.

b. Les fonctions suivantes ont-elles une limite quand x tend vers 0 : $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ $g(x) = x\sin\frac{1}{x}$

Questions de continuité

9 On note f, g, h les fonctions définies par:
$f(0)=2$ et $f(x)=3x+\frac{|2x|}{x}$ pour $x\in\mathbf{R}^*$; $g(x)=E(x)+E(2-x)$; $h(x)=-E(E(x)-x)$
En quels points de $\mathbf{R}$ les fonctions suivantes sont-elles continues: $f, g, h, g+h, gh, h\circ g, g\circ h$

10 Etudier si les fonctions suivantes, définies sur $\mathbf{R}^*$, sont prolongeables en des fonctions continues sur $\mathbf{R}$.

$a(x) = \frac{(1+x)^n - 1}{2x}$ $(n\in\mathbf{N})$ $b(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ $c(x) = x\sin\frac{1}{x}$ $d(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

$e(x) = (\sin x)\sin\frac{1}{x}$ $f(x) = (\cos x)\cos\frac{1}{x}$ $g(x) = (\sin(1+x))\ln|1+x|$

Fonctions continues sur un intervalle.

11 Montrer que l'équation $x^2\cos x + x\sin x + 1 = 0$ a au moins une solution dans $\mathbf{R}$
(Chercher un intervalle dans lequel on puisse être certain que la fonction $x \longmapsto x^2\cos x + x\sin x + 1$ s'annule)

12 a. Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[a,b]$ $(a < b)$, et à valeurs dans ce même intervalle.
Démontrer qu'il existe un point c de $[a,b]$ tel que $f(c) = c$.
b. Soit f et g continues $[a,b] \to \mathbf{R}$, et telles que: $f(a) = g(b) = 0$ et $f(b) = g(a) = 1$
Montrer que pour tout nombre positif K il existe un point $c \in [a,b]$ pour lequel: $f(c) = K\,g(c)$

13 Soit f et g continues $[a,b] \to \mathbf{R}$, et telles que pour tout $x \in [a,b]$ $f^2(x) = g^2(x) \neq 0$
Montrer que f et g gardent un signe constant sur $[a,b]$, et que: $f = g$, ou $f = -g$
Noter la différence entre: "$\forall x$; $(f(x) = g(x)$ ou $f(x) = -g(x))$" et "$(\forall x\,;f(x) = g(x))$ ou $(\forall x\,;f(x) = -g(x))$"

14 Soit f: $[a,+\infty[\to \mathbf{R}$ continue telle que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$
a. Montrer que pour tout A compris strictement entre $f(a)$ et 1, il existe $c > a$ tel que $f(c) = A$.
b. On suppose f strictement croissante. Montrer que la valeur c du (a) est unique.

15 Soit f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue . On suppose: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
a. En remarquant que pour tout n, il existe deux nombres réels a_n et b_n tels que $f(a_n) < -10^n$ et $f(b_n) > 10^n$ montrer que pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$ l'équation $f(x) = \alpha$ admet au moins une solution.
b. Démontrer que tout polynôme de degré impair à coefficients réels admet au moins une racine réelle.
c. Montrer que tout polynôme P unitaire de degré pair (à coefficients réels) admet un minimum absolu m qui est atteint, et que pour tout $\alpha > m$ l'équation $P(x) = \alpha$ a au moins deux solutions distinctes.

16 Soit f une fonction réelle définie, continue et périodique sur $\mathbf{R}$. Démontrer que f est bornée dans $\mathbf{R}$.

Fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone.

17 Représenter graphiquement chacune des fonctions suivantes, dire si elle est continue, (strictement) monotone, injective, surjective, bijective, et préciser éventuellement sa fonction réciproque. Le cas échéant, préciser des intervalles sur lesquels la restriction est continue et strictement monotone (donner les fonctions réciproques correspondantes).

a. $\alpha : [-1,2] \to [0,4]$ $\alpha(x) = x^2$
b. $\beta : [0,2] \to [0,2]$ $\beta(x) = E(x)+(x-E(x))^2$
c. $\gamma : [0,2[\to [0,3[$ $\gamma(x) = 2E(x)+(x-E(x))^2$
d. $\delta : [0,2] \to [0,5]$ $\delta(x) = E(x)+2(x-E(x))^2$
e. $\varepsilon : [0,2[\to]0,2[$ $\varepsilon(x) = 1+x+E(x)-2xE(x)$

(On notera en particulier que la restriction à $]0,2[$ de fonction ε réalise une bijection de $]0,2[$ sur $]0,2[$, bien que la fonction ε ne soit ni continue ni monotone dans $]0,2[$.)

18 Déterminer les intervalles de $\mathbf{R}$ sur lesquels les fonctions ci-après admettent une fonction réciproque, et donner l'expression de cette fonction réciproque (pour a, b, c, d) dans chacun des intervalles trouvés.

$a(x) = x^2 - 4$ $c(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ $e(x) = \cos x$

$b(x) = \frac{x}{1+x^2}$ $d(x) = \frac{3e^x - 2}{e^x + 4}$ $f(x) = \sin^2 x$

19 Soit f une fonction réelle, bijective, continue, définie sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ $(a < b)$.
Montrer que si $f(a) < f(b)$, alors f est strictement croissante.

Limites de suites

La définition de la convergence au moyen de ε et N n'étant pas prévue dans le cadre du M1, tous les exercices portant sur les suites ne font intervenir que quelques notions de base:

- Limites de fonctions connues et limites classiques ($\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\ln(1+x)}{x}$ lorsque $x \to 0$, $\frac{\ln x}{x}$, $\frac{e^x}{x}$, etc... lorsque $x \to \infty$)
- Théorèmes classiques sur les suites convergentes (somme, produit, quotient, ...), unicité de la limite (admis)
- Si f est une fonction continue en a et si la suite (u_n) converge vers a, alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.
- Il est admis qu'une suite croissante converge si elle est majorée, et tend vers $+\infty$ si elle n'est pas majorée.
- Si $u_n \leq v_n \leq w_n$ - la convergence de u_n et w_n vers une même limite l implique la convergence de u_n vers l
  - si $u_n \to +\infty$ alors $v_n \to +\infty$ (et si $w_n \to -\infty$ alors $v_n \to -\infty$)
- Suites adjacentes (dont la théorie ne fait appel qu'aux suites croissantes majorées)
- Il est aussi admis qu'on peut pour étudier la nature d'une suite ne pas tenir compte d'un nombre fini de ses termes.
- Si une suite (u_n) converge vers l, toute suite "extraite" de (u_n) converge aussi vers l.

20 Trouver les limites (si elles existent) des suites suivantes :

$\alpha_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$ $\qquad \beta_n = \dfrac{n^2+1}{\sqrt{n^4+1}}$ $\qquad \gamma_n = \dfrac{(2n+3)^3(3n-2)^2}{n^5+2n}$ $\qquad \delta_n = \dfrac{2^n-7^n}{2^n+7^n}$

$\varepsilon_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2+1}}{n+2}$ $\qquad \zeta_n = \dfrac{E(nx)}{n}$ $\qquad \eta_n = \dfrac{\sin n}{n^\alpha}$ $(\alpha > 0)$ $\qquad \theta_n = \dfrac{n \sin(n!)}{n^2+1}$

$\iota_n = \dfrac{a^n+b^n-c^n}{a^n+b^n+c^n}$ (où $0 < a < b < c$) $\qquad \kappa_n = \sqrt{n+a} - \sqrt{n}$ $(a > 0)$ $\qquad \lambda_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$

$\mu_n = \dfrac{\sqrt[3]{8n^3+1}-2n}{\sqrt[3]{n^3+1}-n}$ $\qquad \nu_n = \sqrt[n]{n}$ $\qquad \xi_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$ $\qquad o_n = \sqrt[n]{5n^3+(-1)^n}$

$\pi_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n-1}{n^2} = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k$ $\qquad \rho_n = \dfrac{1}{n^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ $\qquad \sigma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^n}$

$\tau_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$ $\qquad \upsilon_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ $\qquad \varphi_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ $\qquad \chi_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} e^{-\sqrt{k}}$

21 Justifier les réponses aux questions suivantes par un raisonnement ou par un contre-exemple:

a. (u_n) est une suite réelle telle que (u_n^2) converge. La suite (u_n) est-elle convergente ?
b. (u_n) est une suite réelle à termes positifs telle que (u_n^2) converge. La suite (u_n) est-elle convergente ?
c. (u_n) est une suite réelle telle que (u_n^2) et (u_n^3) convergent. La suite (u_n) est-elle convergente ?
(Répondre sans utiliser le (d))
d. (u_n) est une suite réelle telle que (u_n^3) converge. La suite (u_n) est-elle convergente ?
e. (u_n) est une suite de nombres complexes telle que (u_n^3) converge. La suite (u_n) est-elle convergente ?

22 On considère la suite (h_n) définie par: $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ est croissante, et que $h_{2n} - h_n > \dfrac{1}{2}$

En déduire que la suite (h_n) n'est pas majorée, donc tend vers $+\infty$

(On pourra raisonner par l'absurde, ou prouver par récurrence que $h_{2^n} > \frac{n}{2}$)

23 On définit les suites u_n et v_n par: $\qquad u_1 = 1 \qquad v_1 = 12 \qquad u_{n+1} = \dfrac{u_n+2v_n}{3} \qquad v_{n+1} = \dfrac{u_n+3v_n}{4}$

a. On pose $w_n = v_n - u_n$ et $t_n = 3u_n + 8v_n$.
Montrer que w_n et t_n sont des suites géométriques convergentes, et donner leurs limites.
b. En déduire la convergence et les limites de u_n et v_n.
c. Montrer directement que les suites (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes ((u_n) croissante, (v_n) décroissante, et $v_n - u_n \to 0$), donc convergent vers une limite commune. Que peut-on alors déduire du (a) ?

24

a. Soit (u_n) une suite de nombres complexes non nuls. Montrer que si $q_n = \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \longrightarrow \lambda < 1$, alors $(u_n) \longrightarrow 0$.
(suivant ce qui aura été vu en cours, on pourra admettre ou justifier qu'à partir d'un certain rang N tous les q_n sont compris entre 0 et $\mu = \dfrac{1+\lambda}{2}$. Il suffit alors " d'oublier les N premiers termes " de la suite (u_n), et de montrer que pour $n > N$ on a la majoration du type: $|u_n| \leq |u_N| \mu^{n-N}$)
b. Applications : trouver les limites des suites de terme général: $\dfrac{a^n}{n^p}$, $\dfrac{a^n}{n!}$, $\dfrac{n!}{n^n}$, $\dfrac{n^\alpha}{n!}$
Note: ces résultats sont importants et méritent d'être retenus.
c. Etudier la convergence des suites: $\dfrac{2^n}{n^3+n}$, $\dfrac{n! - 1000^n}{n^n + n^2}$, $\dfrac{5^n - n^5}{3^n - n^3}$

Suites et résolution approchée d'équations

25 *Dichotomie.*

a. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ $(a < b)$. On suppose que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$
On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par: $u_0 = a$, $v_0 = b$
puis, par récurrence: $m_n = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et si $f(m_n) < 0$ $u_{n+1} = m_n$ et $v_{n+1} = v_n$, sinon $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = m_n$
Montrer que les suites ainsi définies sont adjacentes ((u_n) croissante, (v_n) décroissante, $v_n - u_n \to 0$), et en déduire qu'elles convergent vers une solution α de l'équation $f(x) = 0$.
Quelle valeur de n (en fonction de a et b) suffit-il de considérer pour obtenir α avec une précision ε ?

b. Application: Résoudre l'équation $e^x = 2\cos x$ avec une précision de 10^{-3} (Noter que $e^0 < 2$ et $e > 2$)
(Réponse: pour $n = 9$, $0{,}53906 < \alpha < 0{,}54102$. $\alpha \approx 0{,}54004$ à 10^{-3} près)

26 *Equation du type: $f(x) = x$. Fonction continue croissante...*
Soit f une fonction continue croissante sur un intervalle $[a,b]$, et telle que $f([a,b]) \subset [a,b]$

a. Justifier que l'équation $f(x) = x$ a au moins une solution dans $[a,b]$

b. Soit c un point quelconque de $[a,b]$. On note (u_n) la suite définie par: $u_0 = c$ et $u_{n+1} = f(u_n)$
Prouver que la suite (u_n) est monotone, en déduire qu'elle converge vers un nombre α (tel que $f(\alpha) = \alpha$).
Note: Cela ne fournit qu'un résultat qualitatif, on est incapable à priori d'évaluer l'erreur... Ce résultat est donc peu utilisable en pratique pour obtenir une valeur approchée d'une solution de l'équation $f(x) = x$.

c. On suppose qu'en outre (f est toujours continue et croissante sur $[a,b]$, et telle que $f([a,b]) \subset [a,b]$) la fonction f possède la propriété : $\forall x \in [a,b]$, $\forall y \in [a,b]$ $(x \neq y)$ $|f(x) - f(y)| < |x - y|$
(Attention, ne pas confondre cette condition avec celle de l'exercice suivant, on ne suppose pas ici que f est une fonction contractante !)
Montrer que dans ces conditions l'équation $f(x) = x$ a exactement une solution dans $[a,b]$
En déduire que la suite définie au (b) permet alors d'obtenir *LA* solution de l'équation $f(x) = x$

27 *Equation du type: $f(x) = x$. Fonction contractante...*
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, et vérifiant la propriété suivante (fonction "contractante"):
Il existe un nombre k, tel que $0 < k < 1$, et tel que: $\forall x \in [a,b]$ $\forall y \in [a,b]$ $|f(x) - f(y)| \le k\,|x - y|$
On suppose en outre que: $f([a,b]) \subset [a,b]$

a. Justifier qu'il existe un *unique* point α de $[a,b]$ tel que $f(x) = x$

b. Soit c un point quelconque de $[a,b]$. On note (u_n) la suite définie par: $u_0 = c$ et $u_{n+1} = f(u_n)$
Prouver que la suite (u_n) converge vers α (tel que $f(\alpha) = \alpha$). On montrera en particulier que l'erreur commise en remplaçant α par u_n est inférieure (ou égale) à $k^n\,|b - a|$

c. Résoudre par cette méthode l'équation $\cos x = 2x$ (Trouver une valeur approchée de la solution à 10^{-2} près)
$\left(\text{On pourra noter que } \frac{1}{2}|\cos x - \cos y| \le \left|\sin\frac{x-y}{2}\right| \le \frac{|x-y|}{2}\right)$

Suites de fonctions

28 Soit $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$, les fonctions définies par: $f_n(x) = x^n$
Représenter sommairement sur un même graphique les courbes représentatives de f_1, f_2, f_3, f_4.
Déterminer la fonction f définie par: $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$
Etudier la continuité des fonctions f_n, de la fonction f... Conclusion ?

29 a. Soit $f_n : [0,\pi] \longrightarrow \mathbf{R}$, les fonctions définies par: $f_n(x) = \sin^n x$
Représenter sommairement sur un même graphique les courbes représentatives de f_1, f_2, f_3.
Déterminer la fonction f définie par: $\forall x \in [0,\pi]$, $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$.
Etudier la continuité des fonctions f_n, de la fonction f...

b. Soit $f_n : [0,\pi] \longrightarrow \mathbf{R}$, les fonctions définies par: $f_n(x) = \sin nx$
Représenter sommairement sur un même graphique les courbes représentatives de f_1, f_2, f_4.
Existe-t-il une fonction f telle que: $\forall x \in [0,\pi]$, $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$.
(considérer les points d'abscisses 0 et $\frac{\pi}{2}$, par exemple)

30 a. Tracer le graphe de la fonction f: $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, définie par : $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$

b. Trouver la fonction f: $\mathbf{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbf{R}$, définie par: $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1 - x^n}{1 + x + x^2 + \dots + x^{n+p-1}}$ $(p \in \mathbf{N})$

31 Passage de la limite sous le signe $\int$
Soit $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$, les fonctions définies par : $f_n(x) = \begin{cases} nx^n & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$

a. Déterminer, pour tout x de $[0,1]$, $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$

b. Montrer que: $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\int_0^1 f_n(x)\,dx \right) \neq \int_0^1 \left(\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) \right) dx$

Calculs de dérivées

1 a. Calculer la dérivée des fonctions suivantes (sans chercher à vérifier les domaines de validité):

$\alpha(x) = \dfrac{3x^2-5x+1}{x+4}$ sur $\mathbf{R} - \{-4\}$ $\beta(x) = \dfrac{x^3+2}{(x^2-5)^3}$ sur $\mathbf{R} - \{-5;5\}$

$\gamma(x) = (-x^7+3x^2)^5$ sur $\mathbf{R}$ $\delta(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ sur $\mathbf{R}^*$

$\delta(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ sur $]-1;1[$ $\varepsilon(x) = \dfrac{3+2\sqrt{x}}{3-2\sqrt{x}}$ sur $\mathbf{R} - \{\frac{9}{4}\}$

$\zeta(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ sur $]0;+\infty[$ $\eta(x) = \dfrac{1}{2+\sqrt{x}+3x}$ sur $]0;+\infty[$

$\theta(x) = x^5 \cos^3 x \sin^4(7x)$ sur $\mathbf{R}$ $\iota(x) = \dfrac{\cos x + x\sin x}{\sin x - x\cos x}$ (ne pas préciser son domaine)

$\kappa(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\sin^2 x}$ sur $\mathbf{R} - \{k\frac{\pi}{2}\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$ $\lambda(x) = \tan x - \frac{1}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x$ sur $\mathbf{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$

$\mu(x) = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ sur $]0;a[$ $\nu(x) = 3^{5x-7}$ sur $\mathbf{R}$

$\xi(x) = e^{\sin^2 x}$ sur $\mathbf{R}$ $o(x) = x^x$ sur $]0;+\infty[$

$\pi(x) = \ln^2 x - \ln(\ln x)$ sur $]1;+\infty[$ $\rho(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2})$ sur $\mathbf{R}$

$\sigma(x) = e^{e^{-x^2}}$ sur $\mathbf{R}$ $\tau(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ sur $]-1;0[\ \cup\ ]0;+\infty[$

$\upsilon(x) = (\ln x)^{\ln x}$ sur $]1;+\infty[$ $\varphi(x) = \sqrt{1+\ln x} + \ln(1+\sqrt{x})$ sur $]\frac{1}{e};+\infty[$

$\chi(x) = (2ma^{mx} + b)^p$ sur $\mathbf{R}$ $(a>0,\ b>0)$ $\psi(x) = \ln\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}-x}$ sur $\mathbf{R}$ $(a \neq 0)$

$\omega(x) = \tan(e^{2x})$ (domaine à préciser)

2 Déterminer la dérivée n-ième des fonctions suivantes:

$A(x) = \dfrac{1}{a+x}$ $B(x) = \dfrac{1}{a-x}$ $\Gamma(x) = \ln(ax+b)$ $\Delta(x) = \cos x$ $E(x) = \sin x$

$Z(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ (on pourra chercher à écrire $Z(x)$ sous la forme: $Z(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1}$)

$H(x) = \cos 3x$ $\Theta(x) = \cos^3 x$ (on pourra linéariser $\cos^3 x$)

$I(x) = x^p \ln x$ (Montrer que $I^{(n)}(x)$ est de la forme : $I^{(n)}(x) = x^{p-n}(a_n \ln x + b_n)$)

3 *Formule de Leibniz*

Déterminer la dérivée n-ième des fonctions f, g et g définies par:

$A(x) = xe^x$ $B(x) = (x^3 + x^2 + 1)e^{2x}$ $\Gamma(x) = (1-x^2)\cos x.$

$\Delta(x) = \dfrac{1}{ax+b}$ $E(x) = e^{ax+b}$ $\Theta(x) = \cos^3 x \sin^2 x$

$I(x) = (x^3 + 2x - 7)e^x$ $K(x) = x^\beta \sin x$

4 n étant un entier fixé, calculer la dérivée n-ième de $P(x) = ((X-a)(X-b))^n$.

En déduire la valeur de $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$ (Faire $a = b = 0$)

Retrouver la valeur de S en cherchant le coefficient du terme de degré n de $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$

5 Dans chacun des cas suivants, vérifier que f admet une fonction réciproque définie sur $\mathbf{R}$, et calculer $(f^{-1})'(c)$, s'il existe...

a. $f(x) = x^3+7x$ $c = 22$
b. $f(x) = e^x + x + 1$ $c = 2$
c. $f(x) = x + \sin x$ $c = \pi$
d. $f(x) = x + \sin x$ $c = 2\pi$

Préciser l'ensemble des points où la réciproque de la fonction $x \longmapsto x + \sin x$ est dérivable.

6 Supposons que f^{-1} , $f'[f^{-1}(x)]$ et $f''[f^{-1}(x)]$ existent et que $f'[f^{-1}(x)] \neq 0$.

Montrer que : $(f^{-1})''(x) = \dfrac{-f''[f^{-1}(x)]}{(f'[f^{-1}(x)])^3}$

Questions de dérivabilité

7 Etudier la continuité, la dérivabilité, la continuité de la dérivée, pour les fonctions suivantes $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\alpha(x) = |x|\sqrt{|x|}$ $\quad\beta(x) = \sin\sqrt{|x|}$

$\gamma(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ $\quad\delta(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ $\quad\varepsilon(x) = \begin{cases} x^3\sin\frac{1}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$

8
a. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^{43}$ pour $x \geq 0$ et $f(x) = x^{37}$ pour $x < 0$
Jusqu'à quel ordre f est-elle dérivable ?
b. On considère deux polynômes à coefficients réels: $A(x) = a_0 + a_1x + \dots a_nx^n$ et $B(x) = b_0 + a_1x + \dots b_mx^m$
On note f la fonction définie par $f(x) = A(x)$ si $x < 0$, et $f(x) = B(x)$ si $x \geq 0$.
A quelle condition la fonction f est elle continue ?... k fois dérivable ?

9 Pour $a \in \mathbb{R}$, et $b \in]0;+\infty[$, on définit f par: $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x} & \text{si } x\in]0;b[\\ x^2+3 & \text{si } x\in[b;+\infty[\end{cases}$

- A quelle condition sur a et b la fonction f est-elle continue sur $]0;+\infty[$?
- Déterminer a et b pour que f soit dérivable sur $]0;+\infty[$

10 Soit $I =]-a;a[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0. On considère une fonction f dérivable dans I.
a. Montrer que si f est paire (resp. impaire) alors f' est impaire (resp. paire).
b. Réciproquement, montrer que si f' est paire, la fonction $t \longmapsto (f(t)+f(-t))$ est constante.
Donner un exemple de fonction qui n'est pas impaire, mais dont la dérivée est paire.
c. Montrer par contre que si f' est impaire, alors la fonction f est paire (étudier $t \longmapsto (f(t)-f(-t))$)

11 Soit une fonction f dérivable dans $\mathbb{R}$.
a. Montrer que si f est périodique et de période T alors f' est aussi périodique de période T.
b. Réciproquement, donner un exemple de fonction non périodique dont la dérivée est périodique.
Montrer que si f' est périodique de période T, prouver que pour que f soit périodique il faut et il suffit que $f(0) = f(T)$. (Etudier par exemple la fonction $\varphi(x) = f(x+T)-f(x)$)

Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

12 *Très facile, merci de bien expliciter les théorèmes utilisés (Th de Rolle, Th de la valeur intermédiaire...)*
On considère la fonction $f(x) = x^5 - 10x^2 + 5x$
Pour étudier les variations de f, étudier d'abord le signe de f'', puis en déduire les variations de f'...
On montrera en particulier que f' s'annule pour deux valeurs α et β telles que: $0 < \alpha < 1 < \beta < 2$
Déduire les variations de f, et donner l'allure de la courbe représentative de f.
Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet 3 racines 0, λ, μ telles que: $0 < \lambda < 1 < \mu < 2$

13 Soit p et q des nombres réels, et $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que le polynôme $f(x) = x^n + px + q$ a au plus deux racines réelles distinctes si n est pair et au plus trois racines réelles distinctes si n est impair.

14 Montrer que si une fonction n fois dérivable prend la valeur 0 en $(n+1)$ points distincts d'un intervalle donné, il existe un point de cet intervalle où la dérivée d'ordre n prend la valeur 0.

15 On considère une fonction f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, telle que $f(a) = f(b) = 0$.
Etant donné un point d de $[a,b]$, montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que la tangente en $(c,f(c))$ au graphe de f passe par le point du plan de coordonnées $(d,0)$
Indication : Après étude géométrique de la question, appliquer le théorème de Rolle à $g(x) = \dfrac{f(x)}{(x-d)}$.

16 En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$, prouver que:

$$\forall x \in]-1;\infty[\quad \frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x \quad \text{(discuter suivant le signe de } x\text{)}$$

17 Soit f une fonction réelle continue sur $[a,b]$, et qui est dérivable sur $]a,b[$, sauf peut-être en $x_0 \in]a,b[$.
a. Montrer que si f' a une limite en x_0 alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$
b. Donner un contre exemple à la réciproque.

18
a. Soit $\alpha \in]0,1[$. Montrer : $\forall n > 0$: $\dfrac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} < (n+1)^\alpha - n^\alpha < \dfrac{\alpha}{n^{1-\alpha}}$ En déduire: $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$

b. Montrer que pour $x > 0$: $\dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \dfrac{1}{x}$. En déduire, pour $\lambda \in \mathbb{N}$ $(\lambda > 1)$ la limite de $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\lambda n} \frac{1}{k}$

19 Montrer que si f est une fonction f dérivable sur $[a, b]$, et si $f'(a)=f'(b)=0$, alors, il existe (au moins) un point $c \in]a, b[$ tel que l'on ait : $f(c)-f(a)=(c-a)f'(c)$. Interprétation géométrique.

Indication: Considérer la fonction g définie par: $g(a)=0$; $g(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ pour $x \neq a$

20 Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$, et telle que: $f(a)=0$ $f(b)>0$ et $f'(b)<0$

Montrer qu'il existe (au moins) un point $c \in]a, b[$ tel que l'on ait: $f'(c)=0$. Interprétation géométrique.

Indication: On pourra commencer par prouver (par l'absurde ?) qu'il y a au moins un point $d \in]a, b[$ et tel que $f(d)>f(b)$...

Formule de Taylor

21 Etudier l'allure du graphique des fonctions suivantes (tangente, position par rapport à la tangente, etc):

c. $x \to a(x)=x^3-3x+2$ au voisinage du point $x=0$.

b. $x \to b(x)=x^3-3x^2+2x+1$ au voisinage du point $x=1$. (Poser: $x=1+h$)

c. $x \to c(x)=\frac{x^2+x-2}{x^2}$ au voisinage du point $x=4$. (Poser: $x=4+h$)

Pour ce dernier exemple, placer la courbe représentative de c (dans des voisinages de $x=4$ qu'on précisera) par rapport à la parabole d'équation: $y=\frac{1}{8}\left(9-\frac{(x-4)^2}{16}\right)$

22 Ecrire la formule de Taylor-Mac Laurin à l'ordre n pour les fonctions : e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$

Même question pour la fonction $\tan x$ à l'ordre 5.

En déduire les inégalités suivantes:

- $\forall x>0$ $\quad e^x > 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$
- $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad \left|e^x-1-x\right| \leq \frac{x^2}{2}e^{|x|}$
- $\forall x>0$ $\quad x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$
- $\forall x>0$ $\quad x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x$
- $\forall x \in]0;\frac{\pi}{2}[$ $\quad \tan x > x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}$
- $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad 1-\frac{x^2}{2}<\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$

23

a. Montrer en utilisant la formule de Taylor que la suite $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge vers $\ln 2$

b. Montrer de même que: $v_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}$ converge vers e.

24 Montrer en utilisant la formule de Taylor que si f et g possèdent au voisinage du point a des dérivées continues jusqu'à l'ordre n et si: $f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(n-1)}(a)=g(a)=g'(a)=\ldots=g^{(n-1)}(a)=0$, $g^{(n)}(a)\neq 0$

alors: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$

Applications: Déterminer $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ $\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ $\quad \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}-\cos x}{x^4}$ $\quad \lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{6}-\sin x}{x^5}$

$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}$ $\quad \lim_{x\to 0}\left(\cot g x-\frac{1}{x}\right)$

25

Soit f la fonction définie pour $x\neq 0$ par $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$

a. Montrer que f peut se prolonger à une fonction continue dans $\mathbb{R}$ (qu'on continuera à appeler f).

b. Montrer par récurrence que f est indéfiniment dérivable dans $\mathbb{R}$, et que pour tout n : $f^{(n)}(0)=0$

Que donne la formule de Taylor-Mac-Laurin pour une telle fonction ?

Applications

26 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ telle que $|f'(x)| \leq k<1$ pour tout $x>0$, et telle que $f(0)>0$.

Montrer que l'équation $f(x)=x$ a une seule racine positive et que cette racine est la limite de la suite (x_n) définie par : $x_1=f(0)$, $x_2=f(x_1)$, ..., $x_n=f(x_{n-1})$

27

a. Montrer que la dérivée n-ième de $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ s'écrit : $f^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$

où P_n est un polynôme de degré n.

b. En dérivant la relation $(1+x^2)f'(x)+2xf(x)=0$, démontrer que

$$P_{n+1}(x)+2(n+1)xP_n(x)+(1+x^2)(n^2+n)P_{n-1}(x)=0.$$

c. En comparant $f^{(n+1)}(x)$ et $f^{(n)}(x)$, démontrer que : $P_{n+1}(x)+2(n+1)xP_n(x)=(1+x^2)P'_n(x)$

d. En déduire une relation entre P_{n-1} et P'_n.

e. Montrer que le polynôme P_n a n racines réelles distinctes.

28 Montrer les inégalités suivantes (Trouver à chaque fois la bonne fonction à étudier !):

a. $\forall\, x \in\,]\,0;\frac{\pi}{2}\,[$ $\quad \frac{2x}{\pi} < \sin x < x$

b. $\forall\, n \geq 3$ $\quad \sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$

c. $\forall\, x \in\,]\,0;\frac{\pi}{2}\,[$ $\quad \tan x + 2\sin x > 3x$

d. $\forall\, x \in [\,0;\pi]$ $\quad \pi\,|\sin x| \leq 2\sqrt{x(\pi - x)}$

e. $\forall\, n \geq 8$ $\quad \sqrt{n}^{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}^{\sqrt{n}}$

Trigonométrie

1 Montrer que: $\forall\, x \in \mathbf{R} \quad \cos(\sin x) > \sin(\cos x)$
(Ramener l'étude à $[\,0\,, \frac{\pi}{2}\,]$. On rappelle que pour $x > 0,\ \sin x < x$)

2
a. Résoudre les équations: $\cos 2x = \sin x$ $\quad \tan x + \sqrt{3}\,\mathrm{cotan}\, x = 0$
$\cos x + \sin x = \sqrt{2}$ $\quad \cos x + \sin x = 1$ $\quad \cos x + \sin x = 2$
$\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2$
b. ... et l' inéquation: $\sqrt{3}\cos x - \sin x \leq 1$

3 Calculer $\cos 2x$, $\cos 3x$, $\cos 4x$, $\cos 5x$ en fonction de $\cos x$, et $\sin 3x$, $\sin 5x$ en fonction de $\sin x$
Montrer que d'une manière générale on peut écrire: $\cos nx = T_n(\cos x)$ où T_n est un polynôme de degré n, dont on précisera le terme constant et le terme de plus haut degré.
(On pourra utiliser la formule du binôme, ou remarquer que: $\cos(n+1)x + \cos(n-1)x = 2\cos x \cos nx$)
Montrer que si n est impair, $\sin nx$ s'exprime sous la forme $V_n(\sin x)$, et que si n est pair on peut écrire que $\sin nx = (\cos x)\, W_n(\sin x)$ (où V_n et W_n sont des polynômes dont on précisera le degré...)

4 Etant donné deux nombres réels positifs a et b, on considère le point M ($x(t) = a\cos t\,;\ y(t) = b\sin t$)
a. Vérifier que lorsque t décrit $[\,0\,;2\pi\,]$, le point M décrit l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
b. On note $F\,(c\,;0)$ et $F'\,(-c\,;0)$ les foyers de cette ellipse (c étant défini par: $c > 0\,;\ a^2 = b^2+c^2$)
Montrer que $MF = a - c\cos t$ et $MF' = a + c\cos t$. (Noter que $MF + MF' = 2a$)
c. On admet que la tangente en M à l'ellipse a pour vecteur directeur le vecteur $(x'(t)\,;\,y'(t))$.
Déterminer des vecteurs unitaires proportionnels à $\overrightarrow{MF}$ et à $\overrightarrow{MF'}$, et en déduire que la tangente en M à l'ellipse est la bissectrice extérieure de l'angle $(\overrightarrow{MF}\,,\overrightarrow{MF'})$

Fonctions puissances. Logarithme et exponentielle

5
a. Représenter sur un même graphique les fonctions $x \longmapsto x^\alpha$ pour $\alpha = -2\,,-1\,,-\frac{1}{2}\,,0\,,\frac{1}{2}\,,1\,,2\,,3\,,4$
(définies sur $[\,0\,;+\infty\,[$ ou à défaut sur $]\,0\,;+\infty\,[$)
Comparer, suivant les intervalles de valeurs de x, les positions de ces différentes courbes.
b. Faire le point de celles des fonctions $x \longmapsto x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbf{R}$) qui sont définies sur $[\,0\,;+\infty\,[$, dérivables sur $[\,0\,;+\infty\,[$
c. Lesquelles de ces fonctions sont convexes sur $[\,0\,;+\infty\,[$?
d. Lesquelles admettent la première bissectrice comme axe de symétrie ?

6
a. Montrer que toutes les courbes représentatives des fonctions $x \longmapsto a^x$ ont une seule tangente passant par l'origine des axes. Déterminer les coordonnées des points de tangence. Quel est, lorsque a varie, l'ensemble de ces points ? Le résultat est-il étonnant ?
b. Par quelle transformation géométrique passe-t-on de la courbe représentant la fonction $\ln$ à celle de la fonction $x \longmapsto \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$? De la courbe représentant $\log_a$ à celle représentant $\log_b$?
De la courbe représentant $x \longmapsto e^x$ à celle représentant $x \longmapsto a^x$?
De la courbe représentant $x \longmapsto a^x$ à celle représentant $x \longmapsto b^x$?
Ces remarques expliquent-elles le résultat du (a) ?

7 Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$: $e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$
Représenter sur un même graphique les fonctions $x \longmapsto e^{-x^2}$ et $x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$

8 On note Γ_n la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto e^x - n\ln|x|$
a. Indiquer les différentes formes possibles des courbes Γ_n et représenter sur un même dessin les courbes Γ_n pour $n = -2\,,-1\,,-\frac{1}{e}\,,-\frac{1}{2e}\,,0\,,1$ (ce serait une bonne idée d'utiliser des couleurs différentes)
b. Déduire de ce qui précède la discussion de l'équation $e^x - n\ln|x| = p$. Représenter graphiquement les résultats de la discussion en considérant le point du plan de coordonnées (n,p).

9 Montrer que : $ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = -ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$

10 Résoudre les équations: $4^x = 2^x + 6$

$(x^2)^x = x^{2^x}$ (avec la convention: $x^{2^x} = x^{(2^x)}$)

$(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$

$3^{2x} + 2^{2x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$

Fonctions hyperboliques

11 Simplifier les expressions suivantes : $sh(ln x)$, $th(ln\sqrt{x})$, $(ch\,x + sh\,x)^n$

12 Calculer en fonction de sh et ch les sommes : $S = 1 + ch\,x + ch\,2x + ... + ch\,nx$

$T = \quad sh\,x + sh\,2x + ... + sh\,nx$

Résoudre l'équation: $\sum_{n=0}^{100} sh(2+nx) = 0$

13 Calculer $ch\,nx$ et $sh\,nx$ à l'aide de $ch\,x$ et $sh\,x$.
Applications : Calculer $ch\,5\,x$, $sh\,5\,x$, $ch\,4\,x$ et $sh\,4\,x$ en fonction de $ch\,x$ et $sh\,x$.

14 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $a\,chx + b\,shx = c$

$chx + shx = \dfrac{1}{shx} - \dfrac{1}{chx}$

15 Montrer que le système : $\begin{cases} chx+chy=a \\ shx+shy=b \end{cases}$ $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ a des solutions si et seulement si $a \geq \sqrt{b^2+4}$
Résoudre ce système dans ces conditions.

16 Etant donné deux nombres réels positifs a et b, on considère le point M ($x(t) = a\,ch\,t$; $y(t) = b\,sh\,t$)

a. Vérifier que lorsque t décrit $\mathbb{R}$, le point M décrit une branche de l'hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

b. On note F (c ; 0) et F' ($-c$; 0) les foyers de cette ellipse (c étant défini par: $c > 0$; $c^2 = a^2 + b^2$)
Montrer que $MF = c\,ch\,t - a$ et $MF' = c\,ch\,t + a$. (Noter que $MF' - MF = 2a$)

c. On admet que la tangente en M à l'hyperbole a pour vecteur directeur le vecteur $(x'(t)\,;\,y'(t))$.
Déterminer des vecteurs unitaires proportionnels à $\overrightarrow{MF}$ et à $\overrightarrow{MF'}$; en déduire que la tangente en M à l'hyperbole est la bissectrice extérieure de l'angle $(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MF'})$

Fonctions réciproques des fonctions trigonométriques

17 Calculer la valeur numérique de : $A = Arcsin(-\frac{1}{\sqrt{2}})$ $\qquad B = sin(Arcsin(-\frac{1}{2}))$

$C = cos(Arcsin(-\frac{1}{2}))$ $\qquad D = Arccos(sin(Arctan(-1)))$

18 a. Simplifier les expressions : $p(x) = cos(Arcsin\,x)$ $\qquad q(x) = cos(2Arcsin\,x)$

$r(x) = sin(2Arcsin\,x)$ $\qquad s(x) = tan(Arccos\sqrt{1-x^2})$

b. Calculer et représenter graphiquement les fonctions définies dans $[-3\pi ; 3\pi]$ par:

$\alpha(x) = Arcin(sin\,x)$ $\qquad \beta(x) = Arccos(cosx)$

$\gamma(x) = Arctan(tan\,x)$ $\qquad \delta(x) = Arcsin(|\,sin\,x\,|)$

$\varepsilon(x) = Arcsin(sin\,2x)$ $\qquad \zeta(x) = Arcsin(cos\,2x)$

19 Calculer les dérivées des fonctions: $\alpha(x) = Arccos(-3x)$ $\qquad \beta(x) = Arctan\sqrt{x}$

$\gamma(x) = x\,Arcsin(x^2)$ $\qquad \delta(x) = Arctan\dfrac{x+1}{x-1}$

20 Montrer les relations:

Pour $-1 < x < 1$ $\qquad Arctan\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = Arcsin\,x$

Pour $x \in \mathbb{R}$ $\qquad Arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = Arctan\,x$

Pour $x \in \mathbb{R}$ $\qquad Arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2} = 2\,|Arctan\,x|$

21 Montrer que pour $xy \neq 1$: $Arctan x + Arctan y = Arctan\dfrac{x+y}{1-xy} + \lambda\pi$ où $\lambda = \begin{cases} 0 & \text{si } xy<1 \\ 1 & \text{si } xy>1 \text{ et } x>0 \\ -1 & \text{si } xy>1 \text{ et } x<0 \end{cases}$

Calculer: $X = Arctan\frac{1}{2} + Arctan\frac{1}{5} + Arctan\frac{1}{8}$

22 On donne les fonctions: $f(x) = Arctan\frac{1}{2x^2}$ (définie sur $\mathbb{R}^*$)

et $g(x) = Arctan\frac{x}{x+1} - Arctan\frac{x-1}{x}$ (définie sur $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$)

Comparer f et g, d'une part en les dérivant, d'autre part en utilisant l'exercice précédent.

23 a. Montrer que pour tout x de $[-1,1]$: $Arc\cos x + Arc\cos(-x) = \pi$

b. Calculer: $y = Arcsin\frac{2x}{1+x^2} + Arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$

(On pourra poser: $x = tan\frac{\theta}{2}$ avec $-\pi < \theta < \pi$ c'est-à-dire: $\theta = 2Arctan\, x$)

24 Montrer que $\alpha = 4Arctan\frac{1}{5} - Arctan\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$

25 Résoudre les équations:

$$Arc\cos x = Arc\sin 2x$$

$$Arc\cos\frac{1-x^2}{1+x^2} + Arc\sin\frac{2x}{1+x^2} = \pi$$

$$Arc\cos\frac{1-x}{1+x} + Arc\sin\frac{2\sqrt{x}}{1+x} = \pi$$

26 Etudier la fonction définie par : $f(x) = Arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ et représenter la courbe.

Préciser les tangentes aux points anguleux.

Indiquer comment déduire la courbe représentative de f à partir de celle de la fonction *Arctan*.

Fonctions réciproques des fonctions hyperboliques

27 Calculer la valeur numérique de : $A = Argsh\, 2$; $B = sh(Argch 3)$; $C = Argch(ch 7)$; $D = Argsh(sh 7)$; $E = Argch(ch(-7))$; $F = Argsh(sh(-7))$; $G = ch(Argsh(-7))$

28 Simplifier les expressions suivantes: $sh(Argsh\, x)$; $Argsh(sh\, x)$; $ch(Argch\, x)$; $Argch(ch\, x)$; $ch(Argsh\, x)$; $th(Argsh\, x)$

29 Montrer que:

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$ $\quad Argsh\, x + Argsh\, y = Argsh\left(x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}\right)$

$\forall x \geq 1, \forall y \geq 1$ $\quad Argch\, x + Argch\, y = Argch\left(xy + \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}\right)$

$\forall x \in]-1;1[, \forall y \in]-1;1[$ $\quad Argth\, x + Argth\, y = Argth\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$

30 Simplifier les expressions sui vantes : $Argth\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ $\quad Argsh\left(2x\sqrt{1+x^2}\right)$ $\quad Argth\sqrt{\frac{ch\,x-1}{ch\,x+1}}$

(Etablir les formules de deux manières différentes, calcul direct ou dérivation...)

Opérations sur les développements limités

1 Trouver un développement limité au voisinage de $x = 0$ de chacune des fonctions suivantes :

$\alpha.$	$ch\,x\,sin\,x$	(à l'ordre 5)	$\beta.$	$\frac{1}{cos\,x}$	(à l'ordre 4)
$\gamma.$	$\frac{ln(1+x)}{1+x}$	(à l'ordre 4)	$\delta.$	$\frac{x}{e^x-1}$	(à l'ordre 4)
$\varepsilon.$	$\frac{x}{sin\,x}$	(à l'ordre 4)	$\zeta.$	$\frac{x^2}{sin^2 x}$	(à l'ordre 4)
$\eta.$	$tg^2 x$	(à l'ordre 6)	$\theta.$	$tg\,x$	(à l'ordre 6)
ι	$th\,x$	(à l'ordre 6)	$\kappa.$	$\frac{sin\,x+sh\,x}{cos\,x+ch\,x}$	(à l'ordre 7)
$\lambda.$	$ln(2-x)$	(à l'ordre 5)	$\mu.$	$ln\,\frac{sin\,x+sh\,x}{x}$	(à l'ordre 6)
$\nu.$	$cos(x\,sh\,x)$	(à l'ordre 8)	$\xi.$	$\sqrt{1+sin\,x}$	(à l'ordre 5)
$o.$	$\sqrt{1+th\,x}$	(à l'ordre 4)	$\pi.$	$\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$	(à l'ordre 3)
$\rho.$	$ln\left(1+x+\sqrt{1+x}\right)$	(à l'ordre 3)	$\sigma.$	$\sqrt[3]{1+ch\,x}$	(à l'ordre 5)
$\tau.$	$sin(ln(1+x))$	(à l'ordre 4)	$\upsilon.$	$e^{cos\,x}$	(à l'ordre 6)
$\varphi.$	$cos\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$	(à l'ordre 4)	$\chi.$	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$	(à l'ordre 3)
$\psi.$	$(ch\,x)^{\sqrt{cos\,x}}$	(à l'ordre 4)	$\omega.$	$(1+sin\,x)^{\frac{1}{x}}$	(à l'ordre 3)

2 Trouver les quatre premiers termes des développements limités de $\frac{ln\,x}{x^2}$ et de $\sqrt{x}$ au voisinage de 1

3 Trouver un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de $x = \frac{\pi}{3}$ de $y = sin^2(\frac{x}{2})$, $z = ln\,sin\,x$

4 Soit f définie au voisinage de 0 par : $f(x) = ln\,\frac{1+tg\,x}{1-tg\,x}$
Calculer f' au voisinage de 0. Déduire un développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de f.
Retrouver le même résultat sans utiliser la dérivation.

5 Rappeler le développement limité à l'ordre 4 de $(1+x)^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$, et en déduire les développements limités au voisinage de 0 de:

$a(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (à l'ordre 8) $\qquad c(x) = ln(x+\sqrt{1+x^2})$ (à l'ordre 9)

$b(x) = Arcsin\,x$ (à l'ordre 9) $\qquad d(x) = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{Arcsin\,x}{2}$ (à l'ordre 9)

6 Développement limité à l'ordre 8 au voisinage de 0 de : $y = Arctan(Arc\,sin\,x) - Arc\,sin(Arc\,tan\,x)$.

7 Donner la partie principale (le premier terme non nul du développement limité) des expressions suivantes, suivant les valeurs de a et b::

$$A(x) = ln(1+x+a\,x^2) - \frac{x}{1+b\,x} \qquad B(x) = \frac{2}{1+x} - \frac{1}{1+a\,x} - \frac{1}{1+b\,x}$$

Développements limités généralisés et développements asymptotiques

8 Calculer les développements limités généralisés à l'ordre 2 au voisinage de 0, des fonctions suivantes :

a. $\tan(\ln(1+x)) - \ln(1+\tan x)$ b. $\dfrac{1}{\sin^3 x}$ c. $\dfrac{1}{e^x - 1}$

d. $\sqrt{\sin x}$ (pour $x \in [0;\pi]$)

Calculer le développement limité généralisé à l'ordre 3 au voisinage de 1, de $\dfrac{\operatorname{Arctan} x}{\ln x}$

Donner le développement asymptotique à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$ de $\dfrac{x^3-2x^2+2x+2}{x-1}$

Trouver un développement asymptotique à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$ de: $y = \sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2}$

Calculer les développements asymptotiques au voisinage de $+\infty$ de:

$a(x) = \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sin\frac{1}{x}}$ (à l'ordre 4) $b(x) = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x-1}$ (à l'ordre 4).

$c(x) = x \ln\left(1 + tg\frac{1}{x}\right)$ (à l'ordre 3) $d(x) = (x+1)\ln x - x\ln(x+1)$ (à l'ordre 3)

On se propose de calculer le développement asymptotique à l'ordre 3, au voisinage de $+\infty$, de la fonction f définie par: $f(x) = \operatorname{Arctan}\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}$

a. Soit $u(t) = f\left(\dfrac{1}{t}\right)$. Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $u'(t)$. En déduire le développement asymptotique à l'ordre 3 de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

b. Calculer le développement asymptotique à l'infini de $\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}$ Retrouver le développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$.

Applications des développements limités

14 Indiquer les positions mutuelles, dans un voisinage suffisamment petit de 0, des courbes représentatives des fonctions suivantes:
$\sin x$, $\tan x$, $\operatorname{Arcsin} x$, $\operatorname{Arctan} x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{Argsh} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{Argth} x$, et x

5 Calculer les limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x - x^2}{(\cos x - 1)(e^x-1)^2}$ b. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}$

c. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}\tan\frac{\sqrt{x}}{2} - \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)}{\sin x - x}$ d. $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan} x - 1\right)$

e. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\tan x} + \cos(\ln(1+x)) - 2 + x}{x^4}$ f. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right)$

16 Limite lorsque $x \to 0$ de:

a. $y = e^{\frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}}$ b. $y = \dfrac{e^{\operatorname{Arcsin} x} - e^{\sin x}}{e^{\operatorname{Arctan} x} - e^{\tan x}}$

7 Calculer: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right)$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+2} - \sqrt[3]{x^3+1}\right)^x$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}\right)^n$

8 Soit f la fonction définie par: $f(x) = e^{\frac{x}{1-x}}$
Peut-on prolonger f par continuité en $x=1$? Si oui, le prolongement est-il dérivable en x=1 ?

- Courbes définies par une équation $y=f(x)$
- Courbes définies par représentation paramétrique
- Courbes définies en coordonnées polaires

Courbes définies par une équation $y=f(x)$

1 Etudier les courbes suivantes :

a. $y = x^2 e^{\frac{1}{x}} - x^2 - x - \frac{1}{2}$

- (Dériver 3 fois).
  Prolongement par continuité à gauche en $x = 0$. Demi-tangente en ce point..
  (Donner un développement limité au voisinage de 0 pour $x < 0$)

b. $y = Arcsin\, e^{-x}$

- Tangente au point d'abscisse 0.

c. $y = \dfrac{x \ln x}{x^2 - 1}$

- Prolongements par continuité en $x = 0$ (tangente verticale) et en $x = 1$ (maximum)

d. $y = \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$

- Demi-tangentes à l'origine.
  Développement asymptotique pour déterminer l'asymptote.

e. $y = \dfrac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$

- Deux prolongements possibles pour $x = 0$ (à gauche ou à droite, mais pas les deux !)
- Développement asymptotique pour trouver l'asymptote

f. $y = (1-x)\, e^x$

- Point d'inflexion (développement limité au voisinage de -1 pour étude locale)

g. $y = x^x$

- Prolongement par continuité en $x = 0$ (tangente verticale)
- Minimum...

h. $y = \dfrac{\ln x}{x}$

- Maximum, point d'inflexion (développement limité au voisinage de $e^{\frac{3}{2}}$ pour étude locale)

i. $y = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1+2x)}$

- Prolongements par continuité en $x = -\frac{1}{2}$ (tangente verticale) et en $x = 0$
  (développement limité au voisinage de 0 pour étude locale)

j. $y = \ln|\ln|x||$

- Symétries, asymptotes, branches paraboliques.
- Points d'inflexion, intersections avec Ox, tangentes en ces points.

k. $y = x\, Arctan \dfrac{x}{x-1}$

- Deux prolongements possibles pour $x = 1$ (à gauche ou à droite, mais pas les deux !)
- Tangentes aux points d'arrêt (développements limités pour étude locale)
- Développement asymptotique pour trouver l'asymptote

l. $y = x^2\, Arctan \dfrac{1}{x+1}$

- Deux prolongements possibles pour $x = -1$ (à gauche ou à droite, mais pas les deux !)
- Tangentes aux points d'arrêt (développements limités pour étude locale)
- Développement asymptotique pour trouver l'asymptote

m. $y = \dfrac{ch\, x}{th^2 x}$

- Parité
- A l'infini, position par rapport à la courbe $y = ch\, x$

n. $y = x^{\frac{x}{1-x}}$

- Etude de $x \longmapsto 1 - x - \ln x$ pour les variations
- Tangente au point d'arrêt (Prolongement par continuité en $x = 0$)

Courbes définies par représentation paramétrique

2 a. Donner des représentations paramétriques:

- La droite passant par 2 points A et B, ou définie par un point et un vecteur
- Le cercle de centre $\omega\,(a;b)$ et de rayon R
- L'ellipse de centre O, d'axes portés par les axes du repère et de longueurs a et b ($\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$)
- L'hyperbole de centre O, d'axes portés par les axes du repère, définie par ($\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$)
- La parabole d'axe Ox, de tangente au sommet Oy, définie par : ($y^2 = 2px$)

b. Reconnaître parmi les figures du (a) celles qui sont représentées par:

$\alpha \begin{cases} x = 2+\cos t \\ y = 3+\sin t \end{cases}$ $\quad \beta \begin{cases} x = 2ch t \\ y = sh t \end{cases}$ $\quad \gamma \begin{cases} x = t+\frac{1}{t} \\ y = t-\frac{1}{t} \end{cases}$ $\quad \delta \begin{cases} x = 2+3t \\ y = 1-t \end{cases}$

$\varepsilon \begin{cases} x = 1+\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = 3+\frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$ $\quad \zeta \begin{cases} x = 1+\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = 1+\frac{t}{1+t^2} \end{cases}$

On précisera en particulier le rapport entre les représentations (α , ε) d'une part, (B, γ, ζ) d'autre part...

2 Etudier les courbes suivantes, et préciser les particularités annoncées.

a. $\begin{cases} x = \sin 3t \\ y = \cos 2t \end{cases}$

- Périodicités et symétries.
- Points doubles, angle des tangentes en ces points

b. $\begin{cases} x = \frac{1}{t+1}+\frac{1}{t} \\ y = \frac{1}{t-1}+\frac{1}{t} \end{cases}$

- Vérifier que la seconde bissectrice est axe de symétrie.
- Asymptotes
- Point double, tangentes en ce point.

c. $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \frac{\sin^2 t}{2+\sin t} \end{cases}$

- Symétrie par rapport à Oy.
- Rebroussements en A et B, les tangentes en ces points passent par $C\ (0;1)$.

d. $\begin{cases} x = 2t+t^2 \\ y = 2t-\frac{1}{t^2} \end{cases}$

- Point stationnaire (rebroussement): Développements limités de x et y au voisinage de $t=1$.
- Point double
- Vérifier que lorsque $t \to \pm\infty$, la courbe est asymptote à la parabole: $y^2 = 4(x-y)$

Courbes définies en coordonnées polaires

3 Vérifier que l'équation: $r = \frac{d}{\cos(\theta-\alpha)}$ (où $d>0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ sont deux paramètres) représente une droite située à la distance d de l'origine, et faisant avec l'axe Ox un angle $\frac{\pi}{2}+\alpha$.

4 Vérifier que l'équation du cercle de centre $\omega\ (a,b)$ et qui passe par l'origine est: $r = 2(a\cos\theta + b\sin\theta)$ (M étant le point de coordonnées $(r\cos\theta, r\sin\theta)$, et A le point $(2a;\ 2b)$ extrémité du diamètre d'origine O, écrire que le triangle AOM est rectangle !).

5 Représenter les courbes suivantes:

a. $r = \frac{1}{1+\theta^2}$

- Symétrie par rapport à Ox
- Point asymptote
- Déterminer la tangente au point $A\ (1;0)\quad (\theta=0)$

b. $r = 2 + th\,\theta$

- Deux cercles asymptotes

c. $r = a\sin 2\theta$

- Symétries (domaine d'étude)
- Tangentes à l'origine (voir aussi: $r = a\cos 2\theta$

d. $r = 1+\tan\frac{\theta}{2}$

- Asymptote
- Tangente à l'origine
- Point double

e. $r = a\,e^{2\theta}$

- Spirale
- Montrer que la tangente fait un angle constant avec le rayon vecteur

6 On considère la courbe d'équation: $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$

a. Etudier l'allure de la courbe (symbole "∞"), préciser les tangentes à l'origine.

b. Déterminer les points à tangente horizontale A et B d'abscisse positive, et prouver que le triangle OAB est équilatéral

7 On considère la courbe d'équation: $r = \dfrac{1}{\cos^3\left(\frac{\theta}{3}\right)}$

a. Etudier l'allure de la courbe (Intervalle d'étude, branches paraboliques, point double)

b. Vérifier que les tangentes au point double font entre elles un angle égal à $\frac{\pi}{3}$

c. On coupe la courbe par une droite quelconque passant par l'origine. Montrer que les tangentes aux 3 points d'intersection obtenus forment un triangle équilatéral, et retrouver le résultat du (b).