IREM DES PAYS DE LOIRE

Groupe LP

Septembre 94

DES OUTILS

pour les

BACS PROFESSIONNELS

Tome 3

Le groupe Lycées Professionnels de l' IREM des Pays de Loire poursuit la publication des documents élaborés au cours des stages intitulés :

"Construction d'outils pédagogiques en mathématiques pour les Bacs Professionnels"

Volumes déjà parus :

* tome 1 : Juin 91 et supplément en mars 92
* tome 2 : Juin 92

Sommaire

Activité proposée :

On se propose d'étudier une proposition de prêt personnel faite par une banque. Pour cela, on se réfère au document fourni en annexe, qui est la reproduction d'une offre préalable de prêt émise par cette banque.

① Références concernant l'organisme prêteur, l'emprunteur et le prêt.

② Cadre législatif du contrat de prêt.

③ Identité et domicile de l'emprunteur.

④ Caractéristiques du prêt :

* Montant : somme empruntée (10 000 F).
* Durée et périodicité du remboursement (24 mensualités).
* Prise d'effet : date origine du prêt.
* Taux nominal : c'est le taux annuel (13,5 %) qui, appliqué au capital emprunté, sert au calcul des intérêts. Il représente l'intérêt calculé par une somme de un franc placé pendant un an. La périodicité des remboursements étant mensuelle, il faut déterminer le taux mensuel pour calculer le montant des intérêts. On peut définir deux taux mensuels différents :

➢ Le *taux proportionnel*, qui est utilisé par les banques. Deux taux d'intérêts sont dits proportionnels s'ils sont proportionnels aux durées des périodes considérées, exprimées dans la même unité.

On applique alors la relation : $\frac{t_1}{n_1} = \frac{t_2}{n_2}$, d'où : $\frac{0{,}135}{12} = \frac{t_2}{1}$, donc $t_2 = 0{,}01125$

➢ Le *taux périodique équivalent*, qui est souvent utilisé dans les problèmes. Deux taux sont équivalents si, appliqués à un même capital, ils conduisent à la même valeur acquise.
La valeur acquise (A) par un capital (C) pendant n périodes au taux t est donnée par la relation : $A = C.(1+t)^n$.
Pour un capital de 1 F, on doit avoir : $1 + 0{,}135 = (1+t)^{12}$, d'où :

$$t = 1{,}135^{1/12} - 1 = 0{,}010686.$$

Le taux équivalent est inférieur au taux proportionnel.

⑤ Garanties : Assurance décès ; I.A.D (Invalidité arrêt définitif) ; I.T (Invalidité temporaire).

⑥ Coût total du prêt : 10 000 F (montant du crédit) + 1 466,48 F (montant des intérêts) + 84 F (assurances) + 102 F (timbres) = 11 652,48 F.

Calcul des intérêts :

On détermine d'abord le montant (a) d'une mensualité en utilisant la relation :

$$a = V_0 \cdot \frac{t}{1 - (1+t)^{-n}}, \text{ d'où l'on tire : } a = 10\,000 \frac{0{,}01125}{1 - (1+0{,}01125)^{-24}} = 477{,}77 \text{ F.}$$

V_0 : montant de l'emprunt et valeur actualisée de l'ensemble des mensualités à la date origine du prêt ;

t : taux d'intérêt mensuel ;

n : nombre de mensualités.

Montant des 24 versements : 4777,77 x 24 = 11 466,48 F.

Montant des intérêts : 11 466,48 - 10 000 = 1 466,48 F.

Montant d'une échéance, assurance comprise : $477{,}77 + \frac{84}{24} = 481{,}27$ F.

Le taux effectif global au sens de la loi N° 66-1010 du 28/12/66 s'établit à 1,2739 % mensuel, soit 15,287 % l'an. Il vérifie la relation :

$$481{,}27 = (10\,000 - 102) \frac{t}{1 - (1+t)^{-24}}$$

le capital versé par la banque étant le montant de l'emprunt amputé des frais de timbre. On peut retrouver sa valeur à l'aide d'un tableur.

⑦ Conditions concernant la durée de l'offre et son acceptation.

Commentaires :

Objectif :	Étude d'une offre de prêt réelle, intégrant les frais bancaires. Définition et vérification du taux effectif global.
Prérequis	Relations utilisées pour établir les tableaux d'amortissements.
Activité des élèves :	Application des relations du cours et vérification des valeurs données par la banque.
Temps passé :	2 h.

Exemplaire à conserver par les Emprunteurs

BANQUE

REFERENCE : 1

OFFRE PREALABLE DE PRET PERSONNEL

AGENCE : LES SABLES D'OL.
N° COMPTE : 08019483141
N° DOSSIER : 0171305
N° PRET : 740305
CODE RISQUE : 688

2

En application de la loi N° 78-22 du 10/01/1978 relative à l'information et à la protection des consommateurs dans le domaine de certaines opérations de crédit, la Banque fait à l'emprunteur ou aux emprunteurs solidaires désignés ci-après par l'Emprunteur :

3

NOM : Monsieur
ADRESSE :
DATE ET LIEU DE NAISSANCE :
PROFESSION : SITUATION DE FAMILLE :

4

TITRE I - CONDITIONS PARTICULIERES :

Une offre de prêt personnel dont les caractéristiques sont les suivantes :

MONTANT : 10000.00 F (DIX MILLE FRANCS)
DUREE : 24 mois remboursable par mensualité
PRISE D'EFFET : 10/02/1993
NOMBRE D'ECHEANCES : 24 DATE 1ERE ECHEANCE : 10/03/1993
DATE DE DERNIERE ECHEANCE: 10/02/1995

TAUX NOMINAL : 13.500 % l'an
Note : L'utilisation de lettres de change ou de billets à ordre est interdite (Art 17 de la loi 78-22 du 10/01/78).

5

TITRE II - GARANTIES :

Assurance Décès-I.A.D. I.T. 100 % MR CHAILLOT, sous réserve de l'acceptation de la Cie d'assurances.

6

TITRE III - COUT TOTAL DU PRET :

Les 24 échéances payables à terme échu seront prélevées d'office sur le compte bancaire N° 08019483141 ouvert par l'emprunteur à la Banque Populaire Anjou-Vendée agence de LES SABLES D'OL..
Le coût total du prêt est évalué à 11652.48 F. Il représente :
- le montant du crédit pour : 10000.00 F
- les intérêts pour 1466.48 F
- les cotisations d'assurances pour 84.00 F (sous réserve de l'acceptation par la Compagnie d'Assurances)
- les frais de timbres pour 102.00 F
Le montant des échéances s'élèvera à 477.77 F hors assurance et à 481.27 F assurance comprise.
A titre d'information le taux effectif global au sens de la loi N° 66-1010 du 28/12/66 est de 15.287 % l'an, soit un taux périodique de : 1.273 %

7

TITRE IV - CONDITIONS GENERALES

ARTICLE 1 - DUREE DE L'OFFRE

La présente offre de prêt personnel est valable quinze jours à compter de son émission.
L'octroi du crédit est subordonné à l'acceptation irrévocable de l'offre par l'emprunteur ainsi qu'à l'acceptation irrévocable et à l'engagement de la caution éventuellement exigée ou proposée, ou encore à la prise de toute autre garantie demandée.
La Banque peut se réserver toutefois le droit d'accorder ou de refuser le crédit dans un délai de sept jours à compter de l'acceptation de l'offre par l'emprunteur.

ARTICLE 2 - ACCEPTATION DE L'OFFRE

Si cette offre lui convient, l'emprunteur doit faire connaitre à la Banque qu'il l'accepte en lui renvoyant un exemplaire de cette offre après avoir apposé sa signature au bas de la formule d'acceptation dûment remplie.

Activité proposée :

Une offre de prêt est proposée dans les conditions suivantes :
* Montant : 25000 F
* Durée : 30 mois
* Remboursable par mensualités constantes calculées au taux nominal de 12,3 % l'an.

1) Calculer le montant d'une mensualité en utilisant le taux proportionnel.

2) Déterminer le montant des intérêts payés sur cet emprunt.

3) Rédiger les 3 premières lignes du tableau d'amortissement.

4) La cotisation d'assurance égale à 240 F étant répartie de façon égale sur chaque mensualité, déterminer le montant d'une mensualité, assurance comprise.

5) En réalité, lors de la mise à disposition des fonds, l'emprunteur reçoit le capital emprunté diminué des frais de timbres. Calculer la somme réellement perçue sachant qu'un taux effectif global de 14,04 % appliqué à cette somme permet de retrouver la mensualité précédente. En déduire le montant des frais de timbres (les résultats seront arrondis au centime le plus proche).

Commentaires:

Objectifs :	Étude d'un prêt à mensualité constantes
Prérequis :	Pourcentages. Mensualité d'un prêt à remboursement constant.
Activité des élèves :	Calcul numérique
Temps passé :	2 h .

Résultats:

1) Taux mensuel : $\dfrac{0,123}{12} = 0,01025$

2) Le calcul de la valeur d'une mensualité utilise la relation : $V_0 = a \cdot \dfrac{1 - (1+t)^{-n}}{t}$, d'où l'on tire : a = 972,24 F.

V_0 : montant de l'emprunt et valeur actualisée de l'ensemble des mensualités à l'origine des temps, c'est à dire un mois avant la date de la première échéance.

a : montant d'une mensualité.

t : taux d'intérêt mensuel

n : nombre de mensualités.

3) Tableau d'amortissement :

N° du versement	Valeur résiduelle	Mensualité	Amortissement du capital	Intérêts
1	25 000,00	972,24	715,99	256,25
2	24 284,01	972,24	723,33	248,91
3	23 560,68	972,24	730,74	241,50

4) Mensualité assurance comprise : 980,24

5) Taux effectif global mensuel : $\dfrac{0,1404}{12} = 0,0117$, d'où $V'_0 = 24680,30$ F. Frais de timbres : 319,70 F.

Activité proposée :

1) Étudier la fonction $f:x \rightarrow -2x^2 + 10x - 8$. Dresser le tableau de variation et effectuer la représentation graphique. On prendra d(O,I) = 1 cm et d(O,J) = 1 cm.

2) Calculer l'abscisse des points d'intersection A et B de la courbe avec l'axe des abscisses. Déterminer l'ordonnée de son point d'intersection C avec l'axe des ordonnées.

3) Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe aux points A et B. Déterminer l'équation complète de la tangente au point A.

4) On considère la droite (D) passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}(-1,-2)$. Déterminer l'équation de la droite (D) et les coordonnées de ses points d'intersection A et E avec la courbe représentative de f.

Soit un point M(x,y) quelconque de la droite (D') perpendiculaire à (D) au point E.

Déterminer l'expression analytique du produit scalaire $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EM}$ et en déduire l'équation de (D'). Cette droite est-elle tangente à la courbe au point E? Justifier votre réponse.

5) Résoudre l'inéquation: $y - 2x + 2 < 0$. Désigner les points du plan dont les coordonnées vérifient l'inéquation.

6) Soit la droite (D") d'équation: $y = 4x + 3$. Représenter (D") dans le repère précédent et calculer les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{v}$ de cette droite.

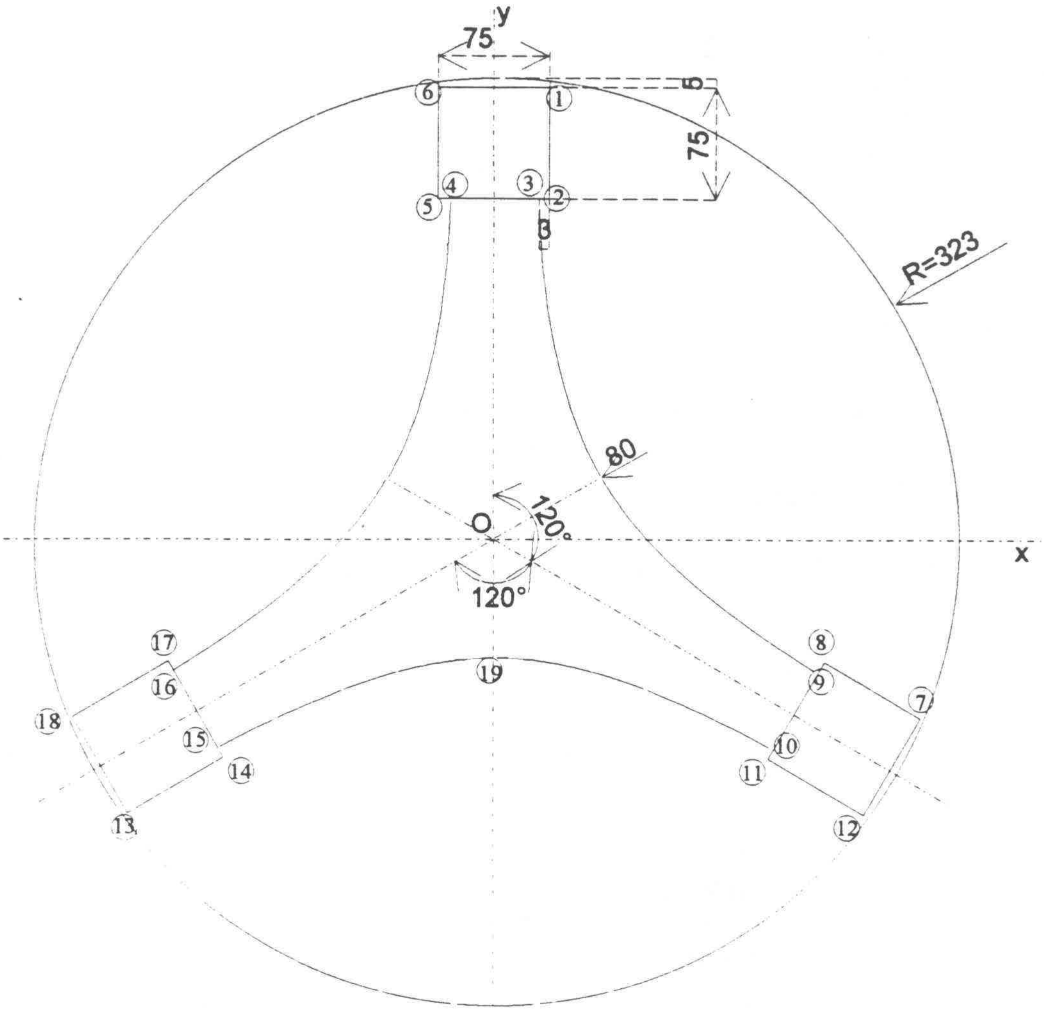
7) Calculer le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$. En déduire la mesure de l'angle $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.

8) On considère un axe $\overrightarrow{Oz}$ de vecteur unitaire $\vec{k}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{Ox}$ et $\overrightarrow{Oy}$ tel que le repère (O,I,J,K) soit un repère orthonormé direct. Déterminer de deux manières différentes les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AH}$ égal au produit vectoriel $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AB}$.

Commentaires:

Objectifs :	Exercice de synthèse permettant la révision des notions généralement abordées en première année.
Prérequis :	Notion de fonction. Dérivée. Équation de droites. Inéquations. Produit scalaire et produit vectoriel.
Activité des élèves :	Recherche d'équation de droites. Représentations graphiques. Calcul littéral et numérique.
Temps passé :	2 h.

TABLE A TROIS PIEDS



Activité proposée : **Première étape**

Le dessin ci-dessus présente le dessous d'une table circulaire de rayon 323 mm, à trois pieds de section carrée de côté 75 mm distants de 5 mm du bord de table, et raccordés par une forme arrondie avec un retrait de 3 mm au pied et une distance de 80 mm de l'axe de la table. Ce profil sera élaboré en commande numérique. Il faut donc calculer les positions des points 1 à 19 (entourés d'un cercle sur le dessin), dans le repère d'axes Ox et Oy.

Commentaires :

Objectifs :	Résolution du problème
Prérequis :	Repérage en coordonnées cartésiennes. Calculs trigonométriques
Activités des élèves :	Recherche en autonomie en devoir « maison »
Temps passé :	Sans limite
Public visé :	Elèves de classes industrielles bois et ébénisterie de niveau baccalauréat professionnel.

Solution

Point 1	$x_1 = 75/2$	$= 37,5$	$y_1 = 323 - 5$	$= 318$
Point 2	$x_2 = x_1$	$= 37,5$	$y_2 = y_1 - 75$	$= 243$
Point 3	$x_3 = x_2$	$= 34,5$	$y_3 = y_2$	$= 243$
Point 4	$x_4 = -x_3$	$= -34,5$	$y_4 = y_2$	$= 243$
Point 5	$x_5 = -x_2$	$= -37,5$	$y_5 = y_2$	$= 243$
Point 6	$x_6 = x_5$	$= -37,5$	$y_6 = y_1$	$= 318$

Rotation d'angle α :

Si le point A a pour coordonnées cartésiennes $(x_A ; y_A)$ et pour coordonnées polaires $(r ; \theta)$ et subit une rotation d'angle α qui l'amène en B ; ses coordonnées cartésiennes seront $(x_B ; y_B)$; et polaires $(r ; \theta + \alpha)$.

$x_A = r\cos(\theta)$ $x_B = r\cos(\theta + \alpha) = r[\cos(\theta)\cos(\alpha) - \sin(\theta)\sin(\alpha)] = x_A\cos(\alpha) - y_A\sin(\alpha)$

$y_A = r\sin(\theta)$ $y_B = r\sin(\theta + \alpha) = r[\sin(\theta)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(\theta)] = y_A\cos(\alpha) + x_A \sin(\alpha)$

Rotation d'angle -120° donne : $x_B = x_A\cos(-120°) - y_A\sin(-120°) = -0,5\, x_A + 0,866\, y_A$

$y_B = y_A\cos(-120°) + x_A\sin(-120°) = -0,5\, y_A - 0,866\, x_A$

Point 7	$x_7 = -0,5x_6 + 0,866\, y_6$	$= 294$	$y_7 = -0,5y_6 - 0,866\, x_6$	$= -126,5$
Point 8	$x_8 = -0,5x_5 + 0,866\, y_5$	$= 229$	$y_8 = -0,5y_5 - 0,866\, x_5$	$= -89$
Point 9	$x_9 = -0,5x_4 + 0,866\, y_4$	$= 227,7$	$y_9 = -0,5y_4 - 0,866\, x_4$	$= -91,6$
Point 10	$x_{10} = -0,5x_3 + 0,866\, y_3$	$= 193,2$	$y_{10} = -0,5y_3 - 0,866\, x_3$	$= -151,4$
Point 11	$x_{11} = -0,5x_2 + 0,866\, y_2$	$= 191,7$	$y_{11} = -0,5y_2 - 0,866\, x_2$	$= -154$
Point 12	$x_{12} = -0,5x_1 + 0,866\, y_1$	$= 256,6$	$y_{12} = -0,5y_1 - 0,866\, x_1$	$= -191,5$

Symétrie d'axe Oy transforme A en B tel que $x_B = -x_A$ et $y_B = y_A$

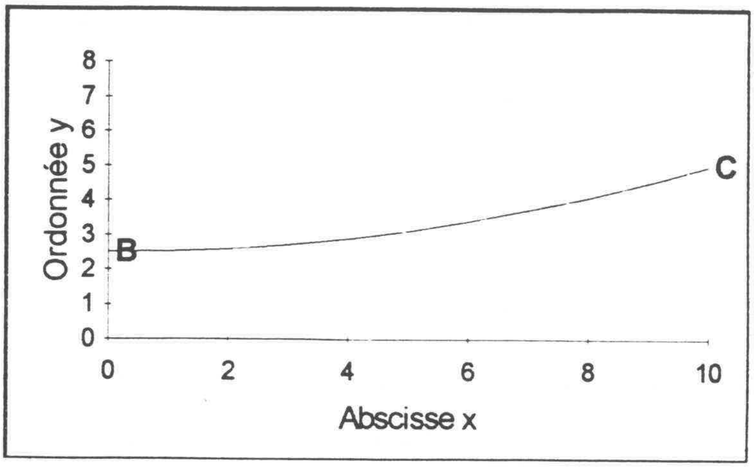
Point 13	$x_{13} = -x_{12}$	$= -256,6$	$y_{13} = y_{12}$	$= -191,5$
Point 14	$x_{14} = -x_{11}$	$= -191,7$	$y_{14} = y_{11}$	$= -154$
Point 15	$x_{15} = -x_{10}$	$= -193,2$	$y_{15} = y_{10}$	$= -151,4$
Point 16	$x_{16} = -x_9$	$= -227,7$	$y_{16} = y_9$	$= -91,6$
Point 17	$x_{17} = -x_8$	$= -229$	$y_{17} = y_8$	$= -89$
Point 18	$x_{18} = -x_7$	$= -294$	$y_{18} = y_7$	$= -126,5$

Point 19 $x_{19} = 0$ $y_{19} = -80$

Activité proposée : **Deuxième étape**

RECHERCHE D'EQUATION DE COURBES

1. On veut déterminer l'équation de la courbe entre B(0 ; 2,5) et C(10 ; 5) ; dont la pente en C est 0,5.
On admet que l'équation de la courbe est de la forme : $y = ax^n + b$.
Déterminer b, a, n.



2. Variante : Coordonnées de B deviennent (0 ; 1), refaire les calculs.

3. Cas de la table : B(0 ; -80) et C(193,2 ; -151,4) ; pente de la tangente = -0,577 :

Commentaires :

Objectifs :	Déterminer l' équation d'une courbe connaissant deux point de cette courbe et la pente en un de ces points.
Prérequis :	Fonctions numériques. Equations. Puissances. Fonctions dérivées
Activités des élèves :	Recherche en autonomie
Temps passé :	De 1 à 2 heures, suivant que l'élève aborde 1 2 ou 3 questions
Public visé :	Elèves de terminales baccalauréat professionnel industriel.

Solution

L'équation de la courbe est vérifiée en B donc : $2,5 = a.0^n + b$ ⇨ $\mathbf{b = 2,5}$
L'équation de la courbe est vérifiée en C donc : $5 = a.10^n + 2,5$ ⇨ $2,5 = a.10^n$

donc $a = \dfrac{2,5}{10^n}$

Si $y = ax^n + b$ est l'équation de la courbe, cette fonction de x a pour dérivée : $y' = nax^{n-1}$.
En C la pente de la courbe est 0,5 qui est aussi la valeur de la dérivée en ce point, donc $0,5 = na10^{n-1}$.

$0,5 = n\dfrac{2,5}{10^n}10^{n-1}$ ⇨ $0,5 = 0,25\,n$ ⇨ $\mathbf{n = 2}$ $\quad \mathbf{a = \dfrac{2,5}{10^2} = 0,025}$

L' équation de la courbe s'écrit $\mathbf{y = 0,025\,x^2 + 2,5}$

2. <u>Variante</u> : Coordonnées de B deviennent (0 ; 1) :

En B on a donc : $1 = a.0^n + b$ ⇨ $\mathbf{b = 1}$

En C on a donc : $5 = a.10^n + 1$ ⇨ $4 = a.10^n$ donc $a = \dfrac{4}{10^n}$

La dérivée en C donne : $0,5 = na10^{n-1}$ ⇨ $0,5 = n\dfrac{4}{10^n}10^{n-1}$

donc $n = {}^5\!/_4$ et $a = \dfrac{4}{10^{5/4}}$ L'équation s'écrit alors $y = \dfrac{4}{10^{5/4}}x^{5/4} + 1$

3. <u>Cas de la table</u> : B(0 ; -80) et C(193,2 ; -151,4) ; pente de la tangente = -0,577 :

En B on a donc : $-80 = a.0^n + b$ ⇨ $\mathbf{b = -80}$
En C on a donc : $-151,4 = a.193,2^n - 80$ ⇨ $-71,4 = a.193,2^n$

donc $a = \dfrac{-71,4}{193,2^n}$

La dérivée en C donne : $-0,577 = na193,2^{n-1}$ ⇨ $-0,577 = n\dfrac{-71,4}{193,2^n}193,2^{n-1}$

donc $n = \dfrac{-0,577 \times 193,2}{-71,4} = 1,561$ et $a = \dfrac{-71,4}{193,2^{1,561}} = -0,0192$

L'équation s'écrit alors $\mathbf{y = -\,0,0192\,x^{1,561} - 80}$

TRACE DU PROFIL SOUS GRAPHIX

Pour toutes les courbes nous avons les données communes suivantes :

unités(cm) Ox:9/325	Oy:9/325	trait:1	couleur:0	hachure:0	pas:.1
Position de l'origine en cm à partir du coin en bas à gauche: xo=13 yo=9					
Longueur des axes en cm: xpositif=13 xnégatif=13 ypositif=9 ynégatif=9					

Tracé du cercle : Courbe numéro 1 Coordonnées Polaires
Ensemble d'étude:[0;2*π]
θ(t)=t
r(t)-325

Tracé courbe 3.9 : Courbe numéro 2 Coordonnées Paramétriques
Ensemble d'étude:[-193.2;193.2]
x(t)=-1/2*t+√3/2*(0.0192*abs(t)^1.562+80)
y(t)=+√3/2*t+1/2*(0.0192*abs(t)^1.562+80)

Tracé courbe 4.16 : Courbe numéro 3 Coordonnées Paramétriques
Ensemble d'étude:[-193.2;193.2]
x(t)=-1/2*t-√3/2*(0.0192*abs(t)^1.562+80)
y(t)=-√3/2*t+1/2*(0.0192*abs(t)^1.562+80)

Tracé courbe 15.10 : Courbe numéro 4 Coordonnées Cartésiennes
Ensemble d'étude:[-191.7;191.7]

y - -0.0192*abs(x)^1.562-80

Tracé axe : Courbe numéro 5 Coordonnées Cartésiennes
Ensemble d'étude:[0;280]

y = -√3/3*x

Tracé axe : Courbe numéro 6 Coordonnées Cartésiennes
Ensemble d'étude:[-280;0]

y = +√3/3*x

Tracé segment 6.1 : Courbe numéro 7 Coordonnées Cartésiennes
Ensemble d'étude:[-37.5;37.5]

y = 318

Tracé segment 5.2 : Courbe numéro 8 Coordonnées Cartésiennes
Ensemble d'étude:[-37.5;37.5]

y = 243

Tracé segment 5.6 : Courbe numéro 9 Coordonnées Paramétriques
Ensemble d'étude:[243;318]
x(t)=-37.5
y(t)=t

Tracé segment 2.1 : Courbe numéro 10 Coordonnées Paramétriques
Ensemble d'étude:[243;318]
x(t)=37.5
y(t)=t

Tracé segment 11.8 : Courbe numéro 11 Coordonnées Cartésiennes
Ensemble d'étude:[191.7;229]

y = √3*x-486

Tracé segment 12.7 : Courbe numéro 12 Coordonnées Cartésiennes
Ensemble d'étude:[256.6;294]

y = √3*x-636

Tracé segment 8.7 : Courbe numéro 13 Coordonnées Cartésiennes
Ensemble d'étude:[229;294]

y = (-x/√3)+42.8

Tracé segment 11.12 : Courbe numéro 14 Coordonnées Cartésiennes
Ensemble d'étude:[191.7;256.6]

y = (-√3/3*x)-43.3

Tracé segment 14.13 : Courbe numéro 15 Coordonnées Cartésiennes
Ensemble d'étude:[-191.7;-256.6]

y = -43.3+x/√3

Tracé segment 18.17 : Courbe numéro 16 Coordonnées Cartésiennes
Ensemble d'étude:[-294;-229]

y = x/√3+42.8

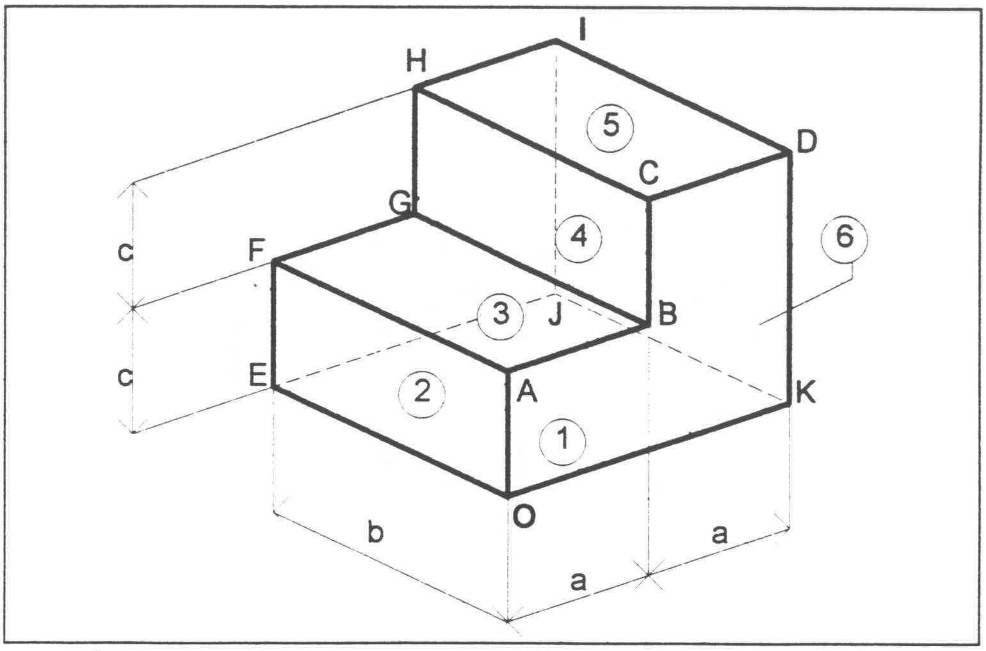
Tracé segment 18.13 : Courbe numéro 17 Coordonnées Cartésiennes
Ensemble d'étude:[-294;-256.6]

y = -√3*x-636

Tracé segment 14.17 : Courbe numéro 18 Coordonnées Cartésiennes
Ensemble d'étude:[-191.7;-229]

y = -√3*x-486

1. LA FOURMI CHERCHE SON CHEMIN



Activité proposée : **Première étape**

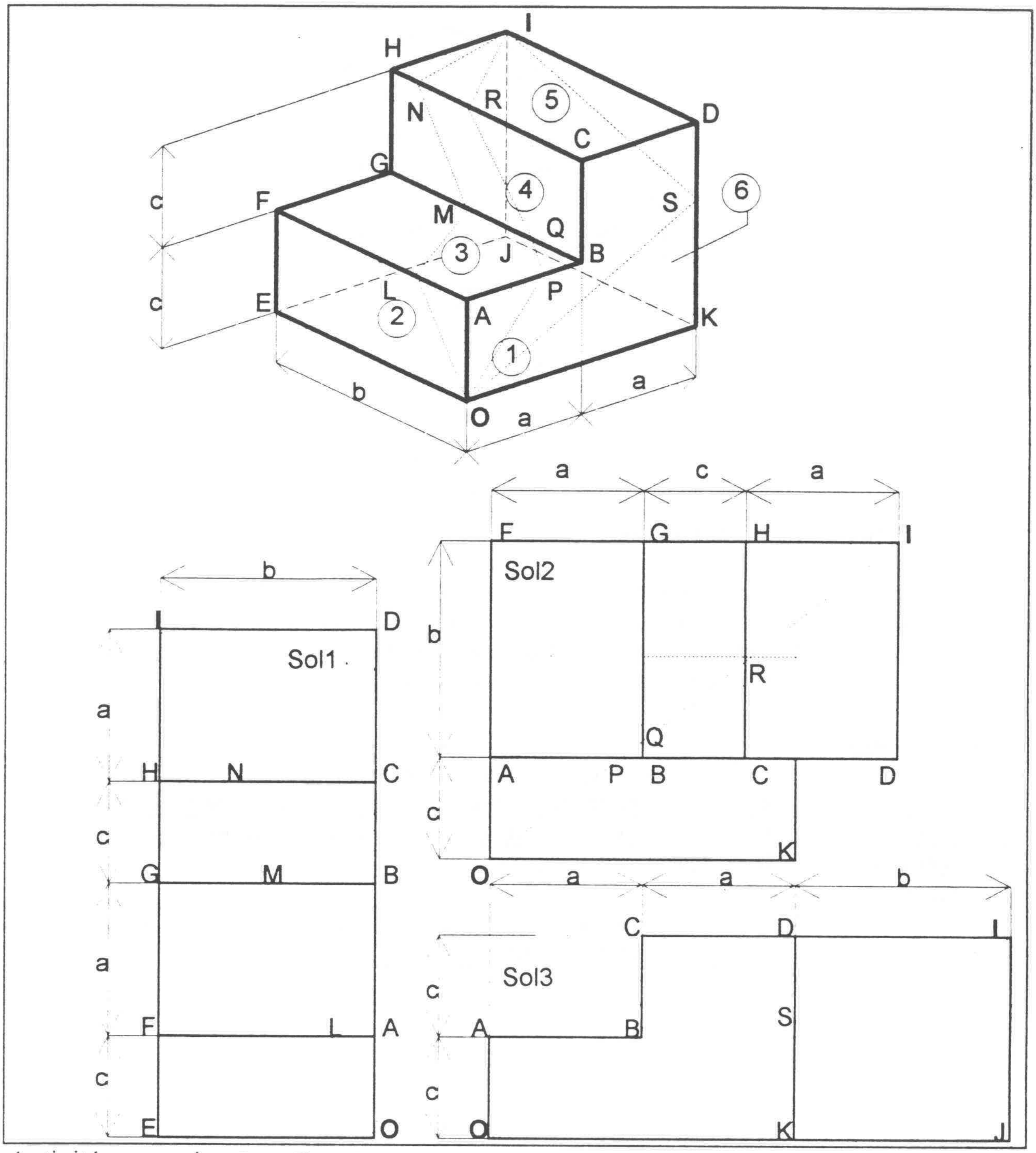
Un podium à deux niveaux repose sur le sol par la face OKJE. Une fourmi en O, désire se rendre en I. Elle recherche le chemin le plus court. Elle a le choix entre les faces 1, 2, 3, 4, 5, 6.

1. En faisant des développements des faces, dessiner chacun des choix possibles.
2. Evaluer en fonction des cotes a, b, c, la longueur du chemin.

Commentaires :

Objectifs :	Réflexion sur les possibilités de chemin, tracé des chemins sur les dévellopements des faces, évaluation des distances correspondantes.
Prérequis :	Dessin en perpective, développement d'un solide, théorème de Pythagore
Activité des élèves :	Recherche en autonomie
Temps passé :	1 h
Public visé :	Elèves de classes industrielles troisième technologique à terminale baccalauréat professionnel.

2. LA FOURMI CHERCHE SON CHEMIN



Activité proposée : **Deuxième étape :**

1. Pour chacune des solutions proposées : Sol1 (OLMNI), Sol2 (OPQRI), Sol3 (OSI), évaluer la longueur du chemin suivi en fonction des cotes a, b, c.

Solution

1. Longueur du chemin suivi :

Sol1 : $d=\sqrt{b^2+(2a+2c)^2}=\sqrt{b^2+4a^2+4c^2+8ac}$

Sol2 : $d=\sqrt{(b+c)^2+(2a+c)^2}=\sqrt{b^2+c^2+2bc+4a^2+c^2+4ac}=\sqrt{b^2+4a^2+2c^2+4ac+2bc}$

Sol3 : $d=\sqrt{(2c)^2+(2a+b)^2}=\sqrt{4c^2+4a^2+b^2+4ab}=\sqrt{b^2+4a^2+4c^2+4ab}$

2. Sol3 est inférieure à Sol1 si : $b^2+4a^2+4c^2+4ab<b^2+4a^2+4c^2+8ac\Rightarrow$ $4ab<8ac\Rightarrow b<2c;(a>0)$

<u>Application numérique</u> $a=b=c=12$:

Sol 1 : $d2=17a^2=17*12^2=2448$; $d=\sqrt{2448}\approx$ **49,48**

Sol 3 : $d2=13a^2=13*12^2=1872$; $d=\sqrt{1872}\approx$ **43,27**

3. Calcul des cotes :

$$\frac{AL}{OA}=\frac{DI}{OD}\Rightarrow AL=OA\frac{DI}{OD}=c\frac{b}{2(a+c)}$$

$$\frac{BM}{OB}=\frac{DI}{OD}\Rightarrow BM=OB\frac{DI}{OD}=(a+c)\frac{b}{2(a+c)}=\frac{b}{2}$$

$$\frac{CN}{OC}=\frac{DI}{OD}\Rightarrow CN=OC\frac{DI}{OD}=(a+2c)\frac{b}{2(a+c)}$$

$$\frac{AP}{OA}=\frac{FI}{OF}\Rightarrow AP=OA\frac{FI}{OF}=c\frac{2a+c}{b+c}$$

$$BQ=BG-GQ;\frac{GQ}{OF}=\frac{GI}{FI}\Rightarrow GQ=OF\frac{GI}{FI}=(b+c)\frac{a+c}{2a+c}\Rightarrow BQ=b-(b+c)\frac{a+c}{2a+c}$$

$$CR=CH-HR;\frac{HR}{OF}=\frac{HI}{FI}\Rightarrow HR=OF\frac{HI}{FI}=(b+c)\frac{a}{2a+c}\Rightarrow CR=b-(b+c)\frac{a}{2a+c}$$

$$\frac{KS}{OK}=\frac{JI}{OJ}\Rightarrow KS=OK\frac{JI}{OJ}=2a\frac{2c}{2a+b}$$

4. L'existence de Sol2 implique

$$AP<a\Rightarrow c\frac{2a+c}{b+c}<a\Rightarrow c(2a+c)<a(b+c);(b>0\,et\,c>0)$$

$$\Rightarrow 2ac+c^2<ab+ac\Rightarrow ac+c^2<ab\Rightarrow c+\frac{c^2}{a}<b\Rightarrow b>c+\frac{c^2}{a}$$

5. **Hypothèse** $b = 1,5c$ *et* $b > c + \frac{c^2}{a}$ **(existence de Sol2)**

donc $1,5c > c + \frac{c^2}{a} \Rightarrow 0,5c > \frac{c^2}{a} \Rightarrow 0,5 > \frac{c}{a} \Rightarrow 0,5a > c \Rightarrow a > 2c$

Sol2 est inférieure à Sol3 si :

$b^2 + 4a^2 + 2c^2 + 4ac + 2bc < b^2 + 4a^2 + 4c^2 + 4ab \Rightarrow 4ac + 2bc < 2c^2 + 4ab$ *or* $b = 1,5c \Rightarrow$

$4ac + 3c^2 < 2c^2 + 6ac \Rightarrow c^2 < 2ac \Rightarrow c < 2a$
(condition déjà réalisée par $a \geq 2c$, donc quand Sol2 existe, c'est la plus courte)

Application numérique : calcul de d2 (Sol2 n'existe que si $a \geq 2c$)

a	*b*	*c*	*a* ≥2 *c*	*c* ≤ 2*a*	*Sol2 : d2*	*d*	*Sol3 : d2*	*d*
12	18	12	Faux	Vrai	non	non	2340	48,37
18	18	12	Faux	Vrai	non	non	3492	59,09
24	18	12	Vrai	Vrai	4500	67,08	4932	70,23
30	18	12	Vrai	Vrai	6084	78,00	6660	81,61

6. **Hypothèse** $b = 2c$ *et* $b > c + \frac{c^2}{a}$ **(existence de Sol2)**

donc $2c > c + \frac{c^2}{a} \Rightarrow c > \frac{c^2}{a} \Rightarrow 1 > \frac{c}{a} \Rightarrow a > c$

Sol2 est inférieure à Sol3 si :

$b^2 + 4a^2 + 2c^2 + 4ac + 2bc < b^2 + 4a^2 + 4c^2 + 4ab \Rightarrow 4ac + 2bc < 2c^2 + 4ab$ *or* $b = 2c \Rightarrow$

$4ac + 4c^2 < 2c^2 + 8ac \Rightarrow 2c^2 < 4ac \Rightarrow c < 2a$
(condition déjà réalisée par $a > c$ ou $c < a$, donc quand Sol2 existe, c'est la plus courte)

Application numérique : calcul de *d2* (Sol2 n'existe que si $a \geq c$)

a	*b*	*c*	*a*≥*c*	*c*≤2*a*	*Sol2 : d2*	*d*	*Sol3 : d2*	*d*
6	24	12	Faux	Vrai	non	non	1872	**43,27**
10	24	12	Faux	Vrai	non	non	2512	**50,12**
12	24	12	Vrai	Vrai	2592	**50,91**	2880	53,67
14	24	12	Vrai	Vrai	2896	**53,81**	3280	57,27

Donc quand *b* est inférieur ou égal à 2*c*, c'est, si elle existe, la solution 2 qui est la plus courte.

7. **Hypothèse $b = 2,5c$ et $b > c + \frac{c^2}{a}$ (existence de Sol2)**

donc $2,5c > c + \frac{c^2}{a} \Rightarrow 1,5c > \frac{c^2}{a} \Rightarrow 1,5 > \frac{c}{a} \Rightarrow 1,5a > c \Rightarrow a > \frac{2}{3}c$

<u>Sol2 est inférieure à Sol1 si :</u>

$b^2 + 4a^2 + 2c^2 + 4ac + 2bc < b^2 + 4a^2 + 4c^2 + 8ac \Rightarrow 2bc < 2c^2 + 4ac$ *or* $b = 2,5c \Rightarrow$

$5c^2 < 2c^2 + 4ac \Rightarrow 3c^2 < 4ac \Rightarrow 3c < 4a \Rightarrow c < \frac{4}{3}a$ *ou* $a > \frac{3}{4}c$

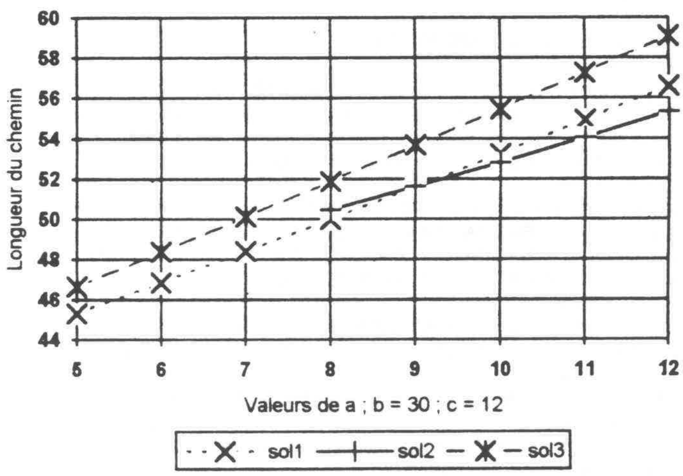
<u>Application numérique</u> : calcul de $d2$ (Sol2 n'existe que si $a \geq \frac{2}{3}c$)

a	b	c	$a \geq \frac{2}{3}c$	$a \geq \frac{3}{4}c$	**Sol2 : d2**	d	**Sol1 : d2**	d
5	30	12	Faux	Faux	non	non	2056	**45,34**
6	30	12	Faux	Faux	non	non	2196	**46,86**
7	30	12	Faux	Faux	non	non	2344	**48,41**
8	30	12	Vrai	Faux	2548	50,48	2500	**50,00**
9	30	12	Vrai	Vrai	2664	**51,61**	2664	**51,61**
10	30	12	Vrai	Vrai	2788	**52,80**	2836	53,25
11	30	12	Vrai	Vrai	2920	**54,04**	3016	54,92
12	30	12	Vrai	Vrai	3060	**55,32**	3204	56,60

Donc pour b supérieur ou égal à $2c$ la solution 1 est la plus courte si a inférieur ou égal à $3c/4$, la solution 2 est la plus courte si a est supérieur ou égal à $3c/4$.

<u>Comparaison des trois solutions (rappel des résulats)</u>

a	b	c	Sol1	Sol2	Sol3	Min
12	12	12	49,48		43,27	3
12	18	12	51,26		48,37	3
18	18	12	62,64		59,09	3
24	18	12	74,22	67,08	70,23	2
30	18	12	85,91	78,00	81,61	2
6	24	12	43,27		43,27	3
10	24	12	50,12		50,12	3
12	24	12	53,67	50,91	53,67	2
14	24	12	57,27	53,81	57,27	2
5	30	12	45,34		46,65	1
6	30	12	46,86		48,37	1
7	30	12	48,41		50,12	1
8	30	12	50,00	50,48	51,88	1
9	30	12	51,61	51,61	53,67	2
10	30	12	53,25	52,80	55,46	2
11	30	12	54,92	54,04	57,27	2
12	30	12	56,60	55,32	59,09	2

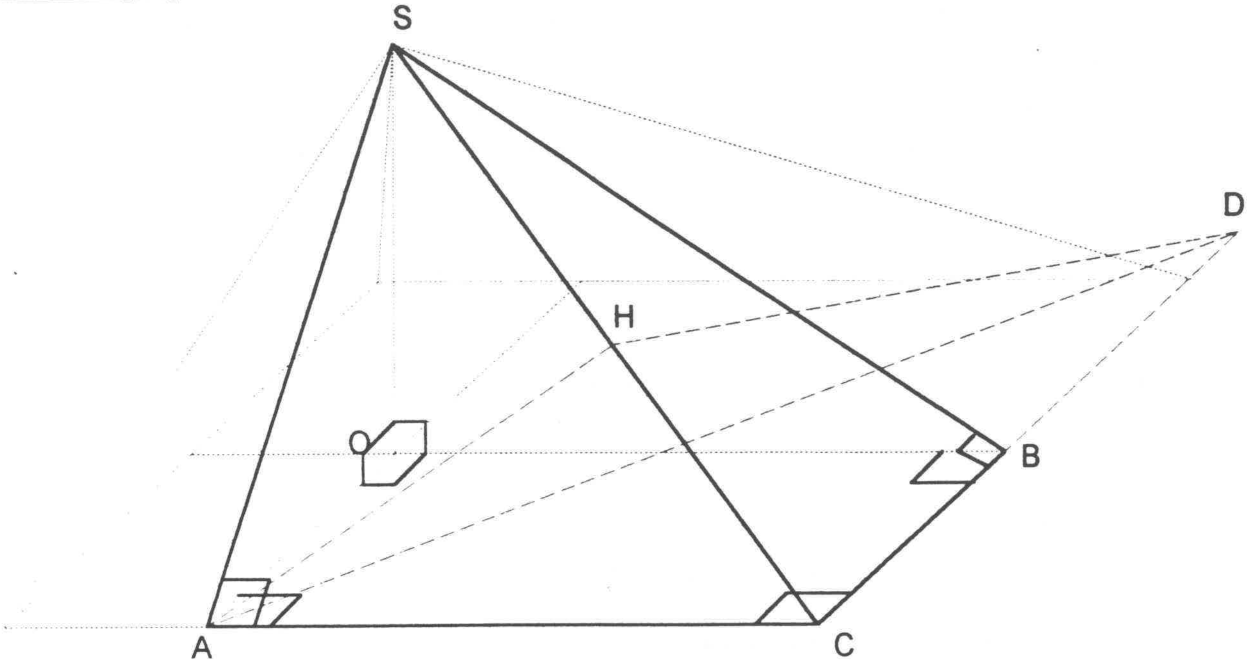


Programme écrit sous GWBASIC permettant de visualiser le podium et le chemin suivi par la fourmi, sur écran VGA ou EGA, affichant la longueur du chemin en fonction des données : *a b c*.

```
10 CLS
20 LOCATE 10,20 : INPUT "Valeur de a : ",A
22 LOCATE 12,20 : INPUT "Valeur de b : ",B
24 LOCATE 14,20 : INPUT "Valeur de c : ",C
30 H = A + B/2 + 2*C : L = A*1.732 + B*.866
32 IF L<=H*2 THEN K = 1 ELSE K = L/H
40 MAXY = H*K : MAXX = A*3.464*K : MINX = B*1.732*K
100 KEY OFF
110 SCREEN 9,0,0
120 CLS
130 GOSUB 1000
170 WINDOW (-MINX,0)-(MAXX,MAXY)
180 GOSUB 1050
190 COUL = 5
200 X = 0 : Y = 0 : Z = 0 : PSET (0,0)
210 X = 0 : Y = 0 : Z = C : GOSUB 1100
212 X = A : Y = 0 : Z = C : GOSUB 1100
214 X = A : Y = 0 : Z = 2*C : GOSUB 1100
216 X = 2*A : Y = 0 : Z = 2*C : GOSUB 1100
218 X = 2*A : Y = 0 : Z = 0 : GOSUB 1100
220 X = 0 : Y = 0 : Z = 0 : GOSUB 1100
222 X = 0 : Y = B : Z = 0 : GOSUB 1100
224 X = 0 : Y = B : Z = C : GOSUB 1100
226 X = A : Y = B : Z = C : GOSUB 1100
228 X = A : Y = B : Z = 2*C : GOSUB 1100
230 X = 2*A : Y = B : Z = 2*C : GOSUB 1100
232 X = 2*A : Y = 0 : Z = 2*C : GOSUB 1100
234 X = A : Y = 0 : Z = 2*C : GOSUB 1100
236 X = A : Y = B : Z = 2*C : GOSUB 1100
238 X = A : Y = B : Z = C : GOSUB 1100
240 X = A : Y = 0 : Z = C : GOSUB 1100
242 X = 0 : Y = 0 : Z = C : GOSUB 1100
244 X = 0 : Y = B : Z = C : GOSUB 1100
250 S1 = SQR((2*A+2*C)^2+B^2)
260 AA = (2*A+C)*C/(B+C) : S2 = 0
270 IF AA <= A THEN S2 = SQR((B+C)^2+(2*A+C)^2)
280 S3 = SQR((2*A+B)^2+(2*C)^2)
300 MIN = S3 : SOL = 3
310 IF S1 < MIN THEN MIN = S1 : SOL = 1
320 IF S2 > 0 AND S2 < MIN THEN MIN = S2 : SOL = 2
330 LOCATE 1,5 : PRINT "a = ";A : LOCATE 1,25 : PRINT "b = ";B
332 LOCATE 1,45 : PRINT "c = ";C : LOCATE 1,65 : PRINT "Sol ";SOL
334 LOCATE 23,1 : PRINT USING "Distance minimale : #####.##";MIN : LOCATE 2,1
340 X = 0 : Y = 0 : Z = 0 : PSET (0,0)
342 COUL = 9
350 ON SOL GOSUB 500,600,700
360 END
500 X = 0 : Y = B*C/(2*(C+A)) : Z = C : GOSUB 1100
502 X = A : Y = B*(C+A)/(2*(C+A)) : Z = C : GOSUB 1100
504 X = A : Y = B*(2*C+A)/(2*(C+A)) : Z = 2*C : GOSUB 1100
506 X = 2*A : Y = B : Z = 2*C : GOSUB 1100
510 RETURN
600 X = AA : Y = 0 : Z = C : GOSUB 1100
602 X = A : Y = (B+C)*A/(2*A+C)-C : Z = C : GOSUB 1100
604 X = A : Y = (B+C)*(C+A)/(2*A+C)-C : Z = 2*C : GOSUB 1100
606 X = 2*A : Y = B : Z = 2*C : GOSUB 1100
610 RETURN
700 X = 2*A : Y = 0 : Z = 4*A*C/(2*A+B) : GOSUB 1100
704 X = 2*A : Y = B : Z = 2*C : GOSUB 1100
710 RETURN
1000 VIEW (0,0)-(639,9),1,0 : '----------S/P fenêtre 1 : entête----------------
1010 RETURN
1050 VIEW (1,12)-(638,309),0,2 : '--------S/P fenêtre 2 : dessin---------------
1060 VIEW (6,17)-(632,303),0,0
1070 RETURN
1100 XX = (X-Y)*.866 : YY = (X+Y)*.5 + Z : '---S/P trace ligne---------------
1110 LINE -(XX,YY),COUL
1120 RETURN
```

ANGLE DE DIEDRE

Activité proposée :



Soit la pyramide OACBS, de base rectangulaire OACB et de sommet S. La projection orthogonale du sommet S sur le plan de base est le point O. Le rectiligne du dièdre (SCA,SCB), d'arête SC est l'angle $\widehat{AHD}$ que nous allons déterminer.
Si OA = a, OB = b, OS = c, exprimer en fonction de a,b,c, les longueurs suivantes : SA, SB, SC, AH, HC, CD, AD, HD ; et en déduire l'angle $\widehat{AHD}$.

Commentaires :

Objectifs	Repérage des faces triangles rectangles . Détermination de l'expression d'un angle dièdre dans une pyramide.
Prérequis	Théorème des trois perpendiculaires dans l'espace. Théorème de Pythagore. Application de Thalès aux triangles semblables. Trigonométrie dans le triangle quelconque. Simplification des expressions mathématiques.
Activités des élèves :	Activités graphiques et calcul littéral. Construction de la pyramide pour contrôler les résultats avec des valeurs numériques.
Temps passé :	2 h en autonomie, tous documents autorisés.
Public visé	Elèves de terminales baccalauréat professionnel industriel bâtiment et brevet des métiers d'art ébénisterie.

Solution

Les triangles SOA, SOB, SOC, SAC, SBC, AHC, DHC, ACD sont rectangles.

Dans SOA, nous appliquons l'énoncé de Pythagore : $SA = \sqrt{OA^2 + OS^2} = \sqrt{a^2 + c^2}$

Dans SOB, nous appliquons l'énoncé de Pythagore : $SB = \sqrt{OB^2 + OS^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$

Dans SAC, nous appliquons l'énoncé de Pythagore : $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

AHC et SAC sont semblables, nous appliquons l'énoncé de Thalès :

$$\frac{AH}{AC} = \frac{SA}{SC} \Rightarrow AH = AC\frac{SA}{SC} = b\frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \; et \; \frac{HC}{AC} = \frac{AC}{SC} \Rightarrow HC = \frac{AC^2}{SC} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

DHC et SBC sont semblables, nous appliquons l'énoncé de Thalès :

$$\frac{HC}{DC} = \frac{BC}{SC} \Rightarrow DC = HC\frac{SC}{BC} = \frac{AC^2}{SC} * \frac{SC}{BC} = \frac{AC^2}{BC} = \frac{b^2}{a}$$

$$\frac{HD}{DC} = \frac{SB}{SC} \Rightarrow HD = DC\frac{SB}{SC} = \frac{b^2}{a} * \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Dans ACD, nous appliquons l'énoncé de Pythagore :

$$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{b^2 + \frac{b^4}{a^2}} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 + b^2}$$

Dans le triangle quelconque AHD :

$$AD^2 = AH^2 + HD^2 - 2AH * HD * \cos A\hat{H}D \Rightarrow \cos A\hat{H}D = \frac{AH^2 + HD^2 - AD^2}{2AH * HD}$$

$$A\hat{H}D = A\cos(\frac{AH^2 + HD^2 - AD^2}{2AH * HD}) = A\cos(\frac{\frac{b^2(a^2 + c^2)}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{b^4(b^2 + c^2)}{a^2(a^2 + b^2 + c^2)} - \frac{b^2(a^2 + b^2)}{a^2}}{2b\frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} * \frac{b^2}{a} * \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}) =$$

$$A\cos(\frac{a^2 + c^2 + \frac{b^2}{a^2}(b^2 + c^2) - \frac{(a^2 + b^2)}{a^2}(a^2 + b^2 + c^2)}{2\frac{b}{a}\sqrt{a^2 + c^2}\sqrt{b^2 + c^2}}) =$$

$$A\cos(\frac{a^2 + c^2 + \frac{b^4}{a^2} + \frac{b^2c^2}{a^2} - a^2 - b^2 - b^2 - \frac{b^4}{a^2} - c^2 - \frac{b^2c^2}{a^2}}{2\frac{b}{a}\sqrt{a^2 + c^2}\sqrt{b^2 + c^2}}) =$$

$$A\cos(\frac{-2b^2}{2\frac{b}{a}\sqrt{a^2 + c^2}\sqrt{b^2 + c^2}}) = A\cos(\frac{-ab}{\sqrt{a^2 + c^2}\sqrt{b^2 + c^2}})$$

a	*b*	*c*	*SA*	*SB*	*SC*	*AH*	*HC*	***DC***	***HD***	***AD***	***Angle H en °***
50	50	50	70,71	70,71	86,60	40,82	28,87	50,00	40,82	70,71	120,00
50	100	100	111,80	141,42	150,00	74,54	66,67	200,00	188,56	223,61	108,43
50	100	150	158,11	180,28	187,08	84,52	53,45	200,00	192,72	223,61	100,10
50	150	150	158,11	212,13	217,94	108,82	103,24	450,00	438,00	474,34	102,92
50	150	200	206,16	250,00	254,95	121,29	88,25	450,00	441,26	474,34	98,37

ACTIVITE SUR LES SIGNES 1

1ERE PHASE : (à faire à la maison)

Travaillez seul ou en groupe:

x représente n'importe quel nombre réel;

indiquez à l'aide des symboles + pour positif et - pour négatif le signe des expressions suivantes:

-5	*+7*	*-9*	*0,5*	*-1/7*
x	*x-1*	*x+1*	*2+x*	*-x+3*
2x + 4	*-7 + 5x*	*-6x +1*	*2/x*	

Relever les feuilles de résultats ; discuter les résultats où les élèves ont répondu + pour x+1 en se basant sur un seul exemple. (contre-exemple)

Aider à la prise de conscience des élèves :le signe d'une expression dépend de la valeur numérique de x ;
Rendre systématique la présentation des résultats sous forme de tableau (que l'on untilisera lors des tableaux de signes pour le second degré et même pour les tableaux de valeurs des fonctions)

ex:

x	- inf		1		+ inf
x-1		-	0	+	

faire traduire par une phrase ce que signifie ce tableau

faire autant de tableaux que d'exemples choisis;

2EME PHASE: (pour la séance suivante) travail personnel

Présenter les résultats pour les exemples 5 -9 x-1 -x+3 et -6x+1 dans un seul et même tableau ;

On pourra éventuellement les guider en donnant ce genre de trame:

5 -9 x-1 -x+3 -6x+1	

on pourra à la correction ajouter une ligne 5 (x-1) ou (-x+3)(-6x+1) pour amorcer le second degré.

document: activité sur les signes1

Objectifs:	faire le lien entre x>0 et x positif construire un tableau de signes but: aide aux inéquations
Pré-Requis:	premier degré
Activité des élèves:	autonomie travail à la maison, en classe seuls ou en groupe recherche
Temps passé:	en classe: 2 fois 1/2 heure

ACTIVITE SUR LES SIGNES 2

$-15\ x^2 + 90\ x + 105$

complétez::
cette expression comporte ...... termes : c'est un ....
le premier terme est "en x^2" : il est du .... degré.

Trouvez le signe de cette expression.

éventuellement: donner une signification numérique et graphique de votre réponse

public: bac pro 1ere année (début d'année)

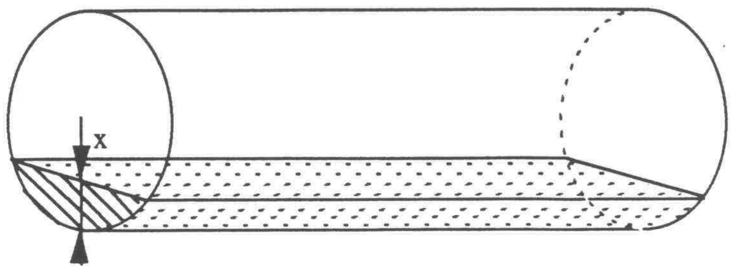
les résultats: ils ont tous fait le tableau de signes (se sont corrigé mutuellement les erreurs de signes)
puis ils ont échangé leurs résultats du tableau de valeurs pour la construction graphique;ils ont beaucoup d'idées préconçues du style "c'est une droite"
"elle doit augmenter toujours à partir d'un certain point"
"il est anormal de trouver y=225 à la fois pour x=2 et x=4"

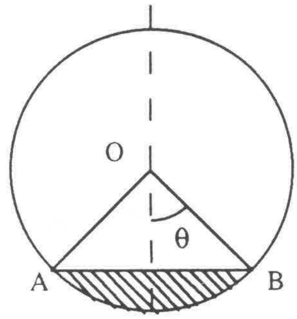
document: activité sur les signes2

Objectifs:	faire le lien entre le second degré et les fonctions donner un sens graphique et numérique aux tableaux de signes
Pré-Requis:	premier et second degré repérage ds le plan construction d'un tableau de signes et d'une parabole; visualisation du signe du trinôme
Activité des élèves:	autonomie; travail à la maison;en classe
Temps passé:	1)lancement du travail 1/4 heure 2)analyse et correction 1heure

Activité proposée :

On considère une cuve cylindrique de diamètre égal à 2 mètres et de longueur 5 mètres, posée horizontalement.
On se propose d'étudier comment varient le volume de V liquide contenu dans la cuve ainsi que l'aire A de la surface mouillée par le liquide en fonction de la hauteur du liquide.





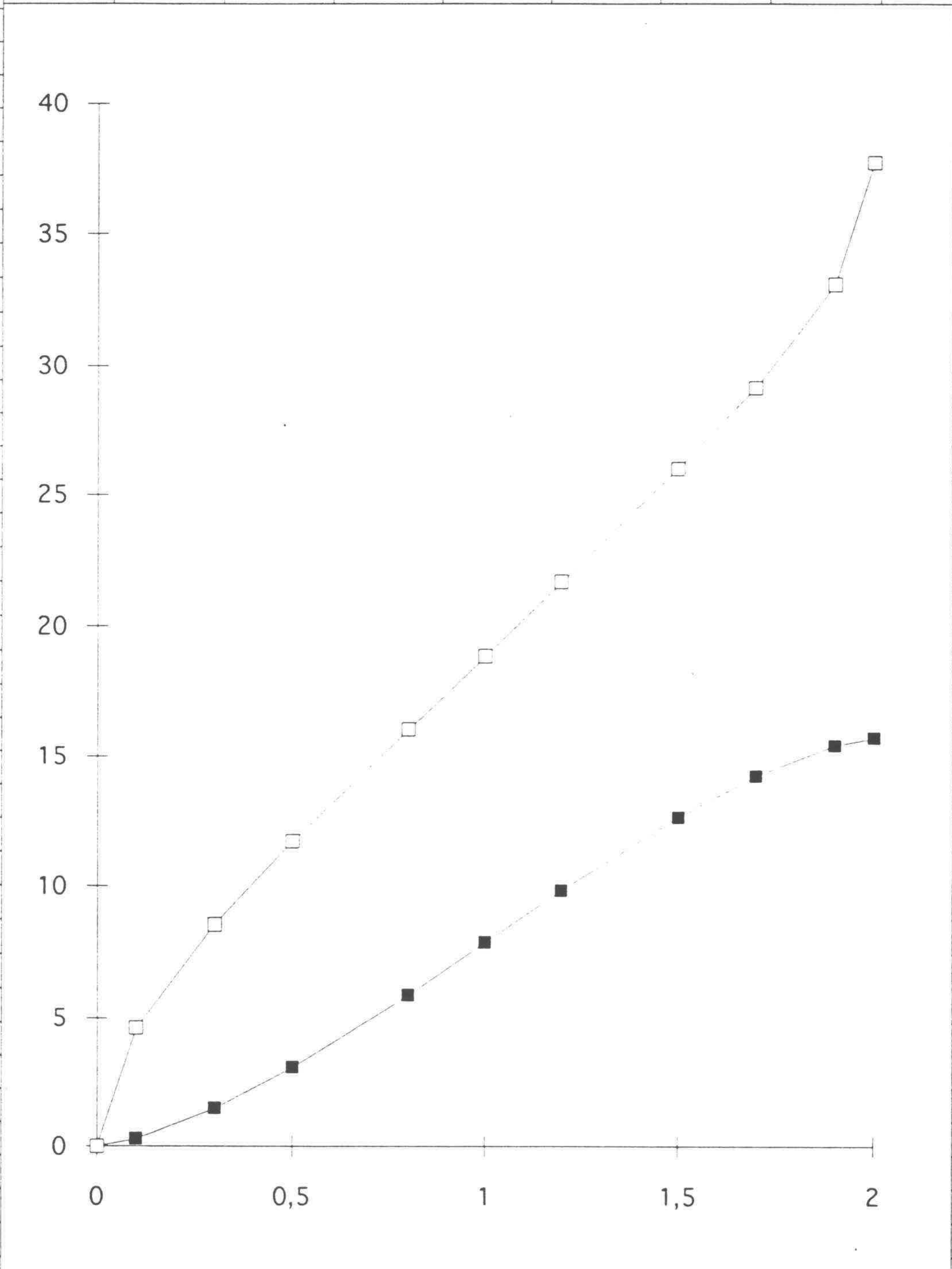
1. Pour mener cette étude, on considère dans un premier temps l'aire de la surface hachurée sur le schéma.
En prenant l'angle θ, exprimé en radians, comme paramètre, exprimer la hauteur x de liquide et l'aire S de la surface hachurée.
2. Du résultat précédent, déduire l'expression du volume de liquide en fonction de θ.
3. Dresser un tableau de valeurs des fonctions $x = f(\theta)$ et $V = g(\theta)$, pour les mêmes valeurs du paramètre θ.
Tracer la courbe représentant $V = f(x)$. Cette fonction est-elle linéaire ?
4. Établir l'expression de l'aire de la surface cylindrique mouillée par le liquide en fonction de θ et en déduire l'expression de la surface mouillée totale A.
5. Dresser un tableau de valeurs des fonction $x = f(\theta)$ et $A = g(\theta)$, pour les mêmes valeurs du paramètre θ. Tracer la courbe représentant $A = f(x)$. Cette fonction est-elle linéaire ?
6. Pour chaque valeurs de θ choisie, déterminer la valeur du rapport du volume de liquide à l'aire de la surface mouillée en fonction de la hauteur du liquide. Pour quelle valeur de x ce rapport vous semble-t-il maximal ?
7. Déterminer directement l'expression de V et de A en fonction de x, sans utiliser le paramètre θ.

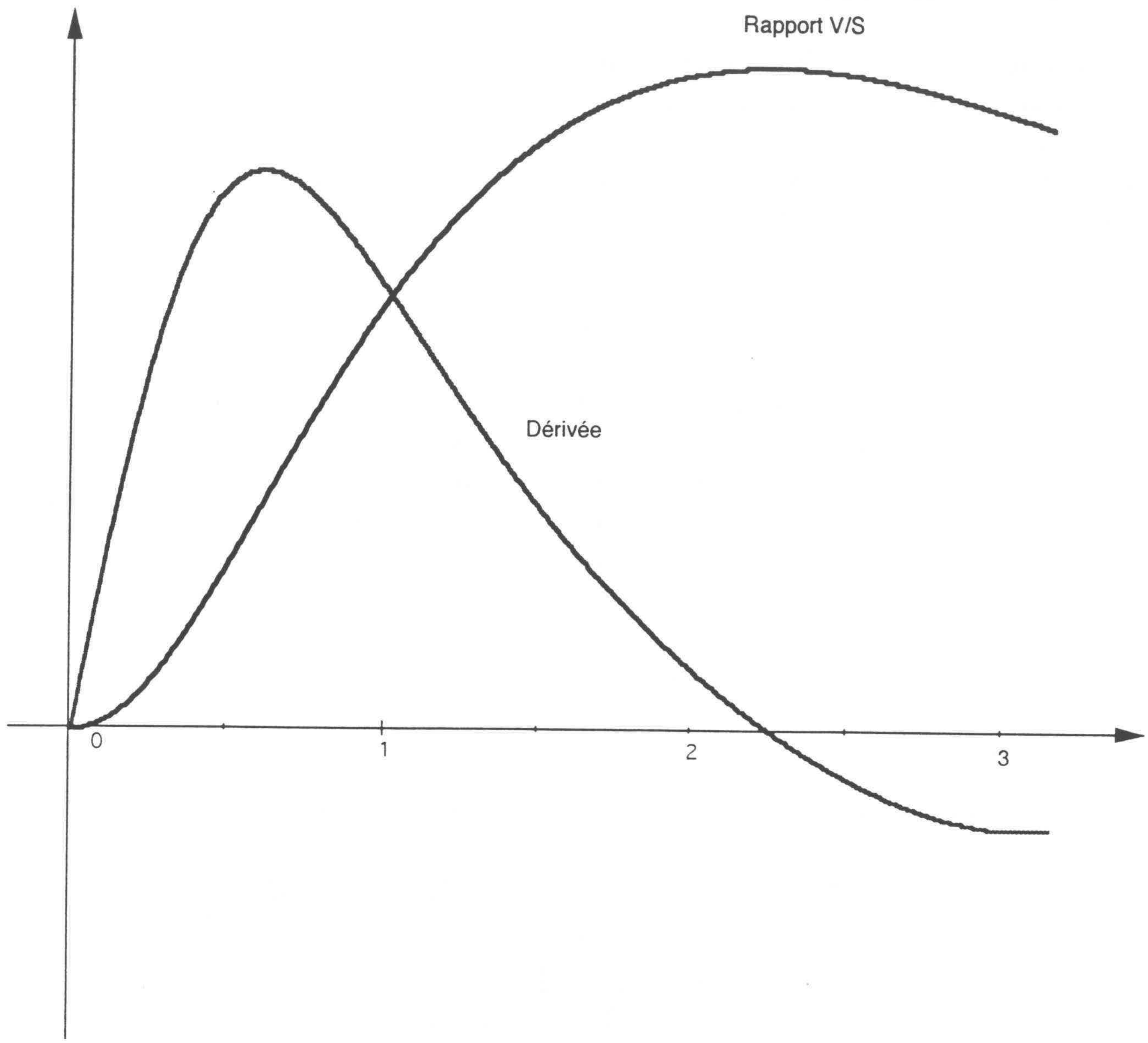
Commentaires :

Objectifs:	Introduction de la notion de fonction paramètrée
Pré-requis:	Relations trigonométriques dans le triangle rectangle. Valeur numérique d'une expression littérale. Fonction linéaire.
Activité des élèves:	Calcul d'aires et de volumes. Recherche d'équation trigonométriques. Calcul littéral. Recherche des valeurs d'une fonction.
Temps passé:	2 h.

Feuille calcul cuve

x<1	R= 1m	l= 5 m				x>1					
x	**0**	**0,1**	**0,3**	**0,5**	**0,8**	**1**	**1,2**	**1,5**	**1,7**	**1,9**	**2**
V	0	0,2936	1,4775	3,0709	5,8674	7,854	9,8406	12,637	14,23	15,414	15,708
V/x		2,9363	4,925	6,1418	7,3342	7,854	8,2005	8,4247	8,3709	8,1128	7,854
x	**0**	**0,1**	**0,3**	**0,5**	**0,8**	**1**	**1,2**	**1,5**	**1,7**	**1,9**	**2**
A	0	4,628	8,545	11,700	16,041	18,850	21,658	25,999	29,154	33,071	37,699
V/A		0,06	0,17	0,26	0,37	0,42	0,45	0,49	0,49	0,47	0,42




Rapport V/S
Dérivée
0
1
2
3

Activité proposée :

A- Dans le calcul de l'impôt sur le revenu, le montant des salaires nets perçus par un contribuable (augmenté de la part de la CSG non déductible), subit une déduction de 10 % puis un abattement de 20 % pour définir le salaire net imposable.
Calculer le salaire net imposable d'un salarié dont le salaire net perçu + CSG vaut 100 000 F. Calculer de deux façons différentes quelle proportion du salaire perçu représente le salaire imposable.

B- Dans le système fiscal Français, l'impôt à payer, que l'on notera I, n'est pas proportionnel au salaire imposable, noté R. Si c'était le cas, on aurait la relation : I = t.R, où t est le taux d'imposition. De quel type est la fonction, qui à I, fait correspondre R ?
1) Calculer le montant de l'impôt qui correspondrait à des revenus nets imposables, sans déduction supplémentaire, de 80 000 F et 160 000 F, avec un taux uniforme de 9 %.
En fait, l'impôt à payer est progressif, c'est à dire que le taux d'imposition est d'autant plus élevé que les salaires sont élevés. Pour cela, le salaire est décomposé en "tranches" dont les taux d'imposition, appelés *taux marginaux*, sont de plus en plus élevés.
Pour les revenus de l'année 93, les tranches étaient définies, pour une personne seule sans charge de famille, de la façon suivante :

Tranches du revenu net	Taux marginal
entre 0 et 21 900 F	0 %
entre 21 900 F et 47 900 F	12 %
entre 47 900 F et 84 300 F	25 %
entre 84 300 F et 136 500 F	35 %
entre 136 500 F et 222 100 F	45 %
entre 222 100 F et 273 900 F	50 %
au delà de 273 900 F	56,8 %

Le contribuable ne paie donc aucun impôt sur la partie de ses salaires inférieure à 21 900 F, 12 % sur la partie comprise entre 21 900 F et 47 900 F, 25 % sur la partie comprise entre 47 900 F et 84 300 F, etc...
2) Calculer dans ce cas le montant de l'impôt correspondant aux revenus nets imposables de 80 000 F et 160 000 F cités précédemment. Calculer dans ces deux cas le taux d'imposition global ou "taux moyen" qui représente le quotient $\frac{I}{R}$. Déterminer le rapport de l'impôt au salaire mensuel.
3) La fonction qui, aux revenus nets, fait correspondre le montant de l'impôt est une fonction affine par intervalles.
a) Donner l'expression de I sur l'intervalle [47 900 ; 84 300]
b) Tracer la courbe représentant les variations de I en fonction de R pour $0 < R < 300\,000$.
On prendra en abscisse 1 cm pour 20 000 F et 1 cm pour 10 000 F en ordonnée.

C- En réalité, afin d'encourager la natalité, le barème de l'impôt est appliqué, non pas au revenu net imposable, mais au quotient familial, qui est le quotient du revenu par le nombre de parts du foyer fiscal . Par exemple, un foyer fiscal constitué d'un couple ayant deux enfants à charge possède une part pour chaque parent et une demi part pour chaque enfant. Le tableau précédent devient celui ci-dessous, où N représente le nombre de parts :

Tranches du quotient familial $\frac{R}{N}$	Taux marginal
entre 0 et 21 900 F	0 %
entre 21 900 F et 47 900 F	12 %
entre 47 900 F et 84 300 F	25 %
entre 84 300 F et 136 500 F	35 %
entre 136 500 F et 222 100 F	45 %
entre 222 100 F et 273 900 F	50 %
au delà de 273 900 F	56,8 %

Le montant de l'impôt obtenu dans chaque tranche est alors multiplié par le nombre de parts.

1) Considérons une femme et un homme dont les salaires imposables nets sont respectivement 80 000 F et 250 000 F.

Calculer l'impôt total payé par ces deux personnes dans les trois cas suivants :

- ils effectuent une déclaration séparée ;
- ils forment un couple possédant deux parts (comparer au résultat précédent);
- ils constituent une famille avec deux enfants.

Calculer dans les deux derniers cas le taux d'imposition global.

2) Pour le calcul de l'impôt, l'administration donne les formules suivantes :

Valeur du quotient familial $\frac{R}{N}$	Montant de l'impôt
inférieur à 21 900 F	I = 0
21 900 F < $\frac{R}{N}$ < 47 900 F	I = 0,12 x R - 2 628 x N
47 900 F < $\frac{R}{N}$ < 84 300 F	I = 0,25 x R - 8 855 x N
84 300 F < $\frac{R}{N}$ < 136 500 F	I = 0,35 x R - 17 285 x N
136 500 F < $\frac{R}{N}$ < 222 100 F	I = 0,45 x R - 30 935 x N
222 100 F < $\frac{R}{N}$ < 273 900 F	I = 0,50 x R - 42 040 x N
supérieur à 273 900 F	I = 0,568 x R - 60 665,20 x N

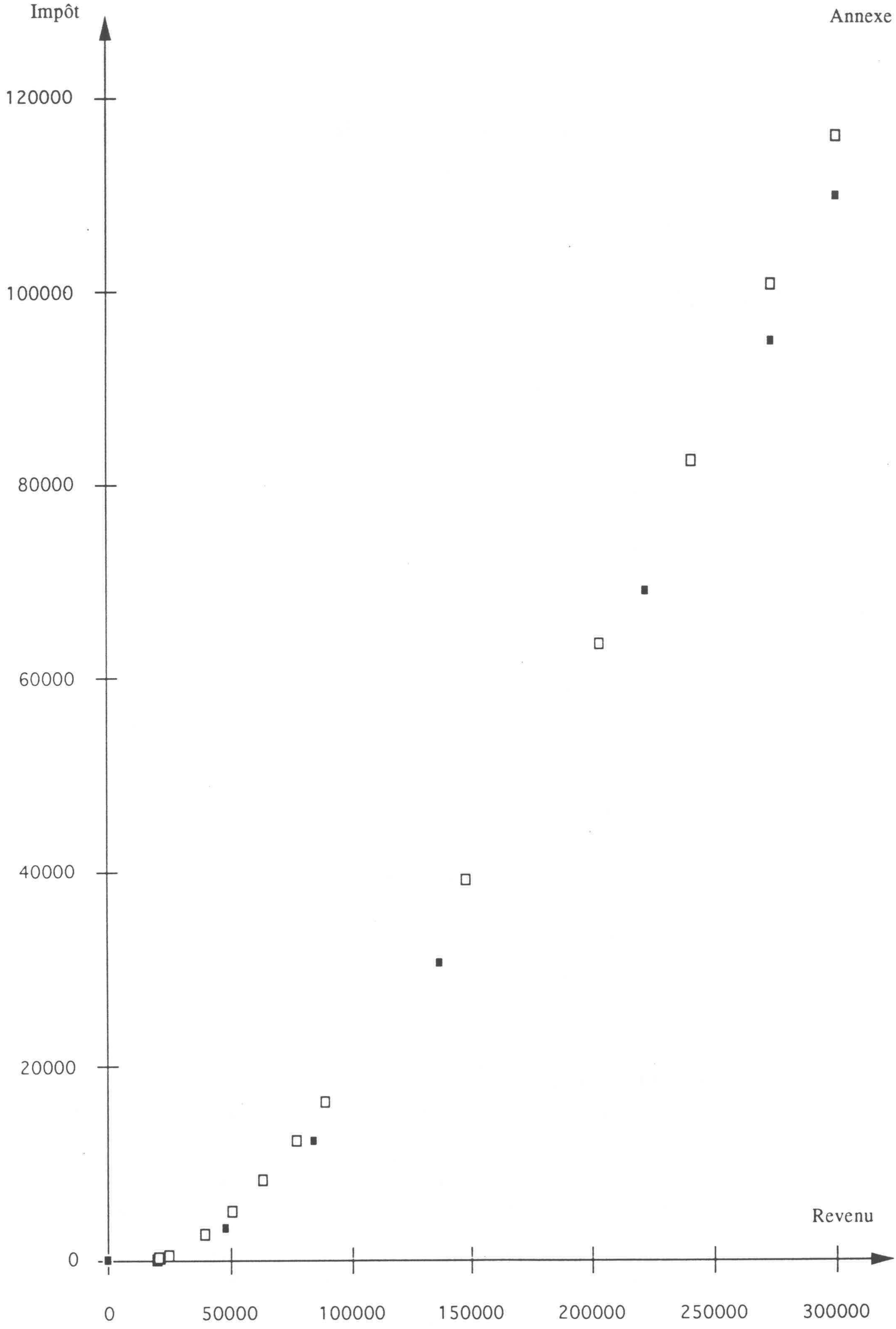
Calculer l'impôt dû par la famille de deux enfants en appliquant la relation convenable contenue dans le tableau ci-dessus. Comparer ce résultat à celui obtenu précédemment. Justifier.

D- Le barème de calcul de l'impôt sur les revenus de 1992 comportait 13 tranches. On a tracé en annexe un graphique représentatif de l'impôt en fonction des revenus pour un contribuable possédant une part et ne bénéficiant d'aucune déduction particulière (après réévaluation des seuils pour tenir compte de l'évolution du coût de la vie). Compléter les nuages de points fournis (noirs pour l'année 93 et blancs pour l'année 92) afin de représenter les fonctions affines par intervalles correspondantes. Comparer les deux situations et commenter.

Commentaires:

Objectifs	Étude d'une fonction affine par intervalles. Entraînement au calcul. Connaissance du principe du système fiscal
Prérequis:	Pourcentages. Fonction linéaire et affine.
Activité des élèves:	Activités graphiques et calcul littéral.
Temps passé:	3 heures.

Annexe


Impôt
120000
100000
80000
60000
40000
20000
0
Revenu
0
50000
100000
150000
200000
250000
300000

TI 60 STATISTIQUES TI 62 GALAXY

* Sélectionner le mode statistique :
il suffira de rentrer une donnée xi avec la touche **Σ +** (TI 60)

et mode stat à UNE variable touche **2ND 1VAR** (TI 62)

---> à l'affichage apparaît "stat"

* Pour *SORTIR* ET VIDER LES MEMOIRES STATISTIQUES

---> touche **2ND CSR**

* Pour RENTRER LES DONNEES:

caractère xi **2ND FRQ** effectif ni **Σ +**

exemple: xi est le centre de classe ni est l'effectif correspondant

5	**2ND FRQ**	25	Σ +
12.5	**2ND FRQ**	55	Σ +
17.5	**2ND FRQ**	99	Σ +

etc...
jusqu'à la dernière classe

remarque: l'effectif doit avoir seulement 2 chiffres

"truc" si vous devez rentrer 17.5 avec un effectif de 156
rentrer d'abord 17.5 **2ND FRQ** 99 **Σ +**
PUIS encore 17.5 **2ND FRQ** 57 **Σ +**
c'est comme si vous aviez rentré 17.5 en une seule fois 156 d'effectif

* LES RESULTATS MOYENNE $\bar{X}$ ET ECART-TYPE σn

moyenne **2ND MEAN** c'est X écart-type **2ND** σ_n

***STAT A 2 VARIABLES: ti62 2nd 2VAR**
rentrer x 1ere variable ex 7 avec la touche $\boxed{x \rightleftharpoons y}$ puis y 2e variable avec $\boxed{\Sigma +}$

* sortir le coeff de corrélation **2nd corr** la pente a : **2nd slope**
l'ordonnée à l'origine b : touche **2nd Intcp**
(donne l'équation de la droite de régression par méthode des moindres carrés)
y = a x + b

* prévision: rentrer x puis touche **2nd y'** donne l'estimation de y
ou rentrer y puis touche **2nd x'** donne l'estimation de x

SHARP EL 531

SE METTRE EN MODE STATISTIQUE: **2NDf** (ON) **stat** (en marron)

VIDER LA MEMOIRE STATISTIQUE:

afficher 0 et le rentrer ds la mémoire touche **x → M**

RENTRER LES DONNEES::

"multiplié par"

caractère xi : touche **X** son effectif ni : touche **data**

ex: 60 **X** 15 **DATA**

* sortir la moyenne touche $\bar{x}$

* sortir l'écart-type (sur n valeurs) touche **2NDf** σn

* pour corriger la dernière donnée rentrée: touche **2ndF** **CD**

CASIO FX 82.92.180 STATISTIQUES *touches stat en bleu*

Se mettre en mode statistique mode . à l'affichage, apparaît SD

Vider la mémoire: INV SAC (ou **KAC)**

RENTRER les données:

le caractère x_i **X** l'effectif n_i **x** (bleu) **ou DT ou DATA**

xi est le centre de la classe
X est la touche multiplié par
ni est l'effectif de la classe
x (en bleu) est écrit sous la touche = en bas à droite
dt ou data en bleu

exemple:

5	X	10286	DT
15	X	2583	DT
27,5	X	2576	DT

etc...

Vérifier que l'effectif total N vaut bien 26594
pour cela appuyer su r N **(INV 6)** ou **(K OUT) N** (marron)

LES RESULTATS MOYENNE ET ECART-TYPE

Trouver les touches $\bar{x}$ (en bleu) INV 7 et **sigma"n"** ou σn INV 8 ?

NE PAS OUBLIER L'UNITE POUR CHAQUE RESULTAT (ici des hectares)

Pour revenir en mode normal de calcul MODE +