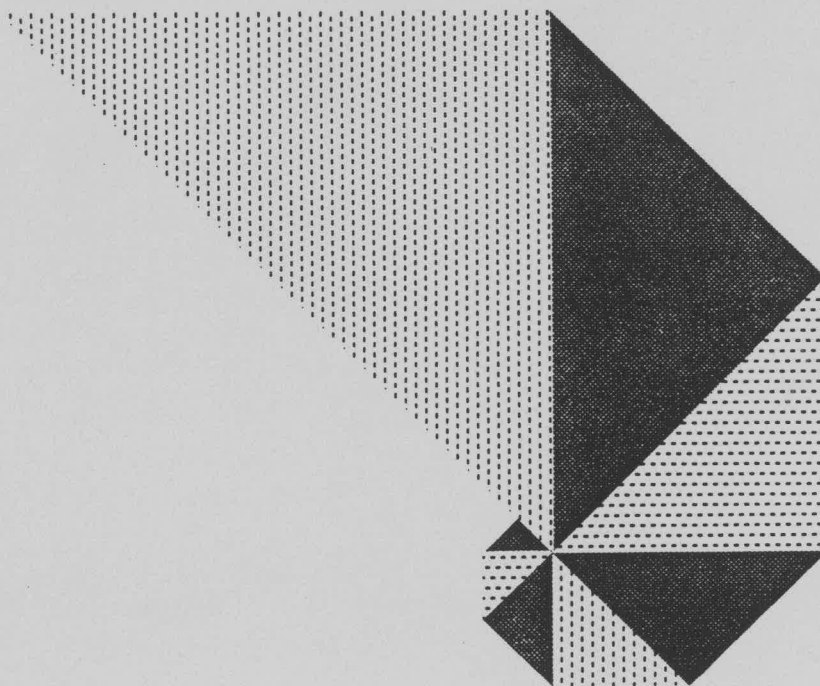


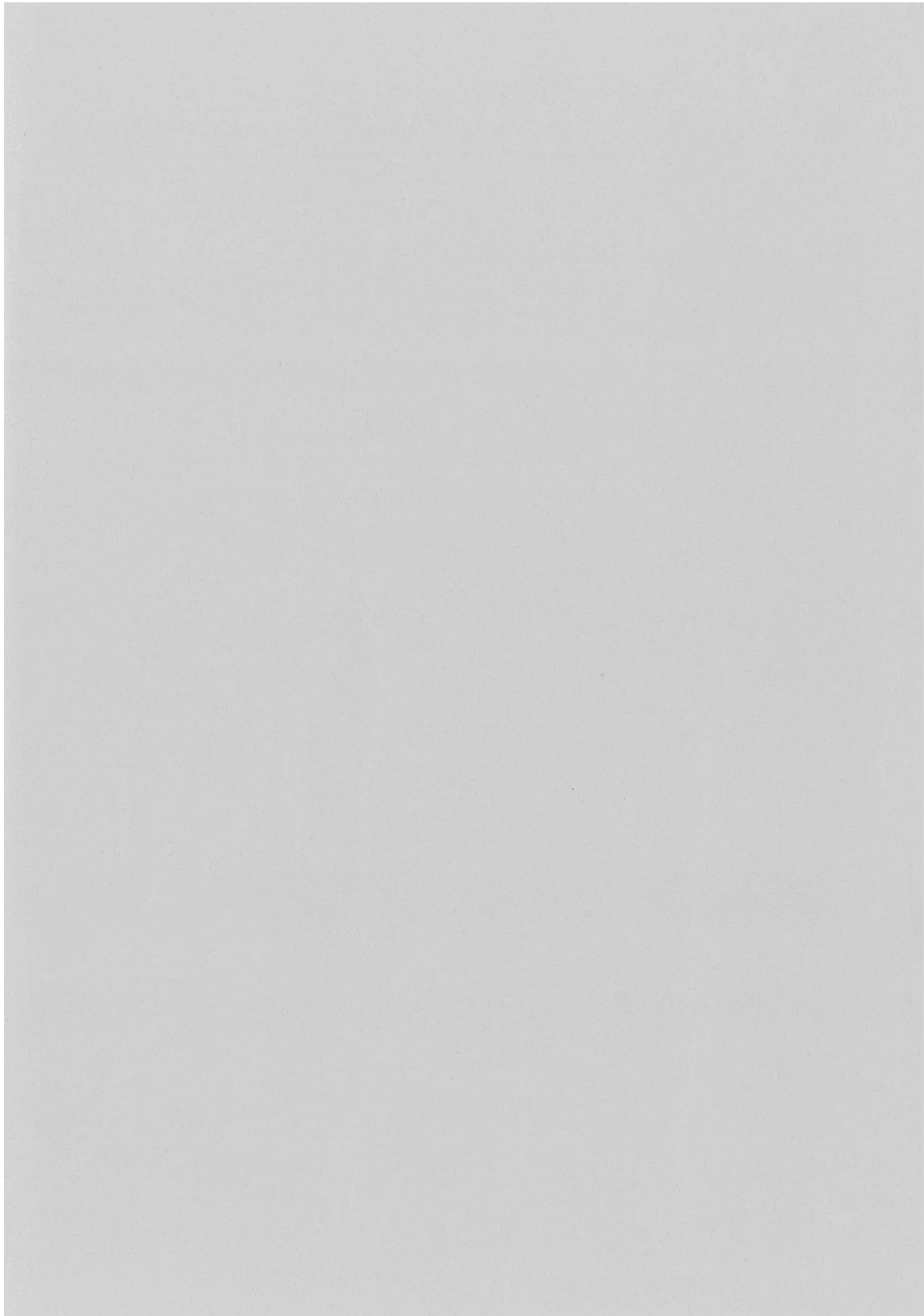
GEOMETRIE ELEMENTAIRE

Deuxième partie

TRANSFORMATIONS DU PLAN



B. Truffault & A. Vogel



Transformations du plan

Sommaire

Chapitre VI : les angles orientés

§23	Angle de deux demi-droites et angle de vecteurs	p. 6
§24	Angle de droites	p. 8
§25	Points cocycliques	p. 11

Chapitre VII : les isométries planes

§26	Définitions et exemples	p. 15
§27	Compléments sur la symétrie axiale	p. 16
§28	Propriétés des rotations	p. 19
§29	Propriétés des isométries	p. 23
§30	Classification des isométries	p. 25
§31	Action des isométries sur le plan	p. 27

Chapitre VIII : les similitudes planes

§32	Compléments sur l'homothétie	p. 29
§33	Les dilatations	p. 32
§34	Les similitudes	p. 34
§35	Propriété caractéristique du centre d'une similitude directe	p. 40

Chapitre IX : les transformations affines planes

§36	Définitions et propriétés caractéristiques	p. 43
§37	Action du groupe affine sur le plan	p. 49
§38	Similitudes	p. 54
§39	Applications graphiques	p. 57

Appendice : sur la conjugaison au sein du groupe affine

§a	La conjugaison	p. 63
§b	Multiplication des vecteurs par les scalaires	p. 64
§c	Action du groupe affine sur les vecteurs	p. 65
§d	Les groupes de frises	p. 66
§e	La restriction cristallographique	p. 70

Exercices :

Chapitre VI	p. 73
Chapitre VII	p. 75
Chapitre VIII	p. 79

Table des matières

Table des matières

Chapitre I : Les transformations du plan	1
1.1. Définitions et notations	1
1.2. Les translations	2
1.3. Les rotations	3
1.4. Les symétries	4
1.5. Les homothéties	5
1.6. Les similitudes	6
1.7. Les isométries	7
1.8. Les transformations affines	8
1.9. Les transformations projectives	9
1.10. Les transformations hyperboliques	10
1.11. Les transformations elliptiques	11
1.12. Les transformations paraboliques	12
1.13. Les transformations hyperboliques	13
1.14. Les transformations elliptiques	14
1.15. Les transformations paraboliques	15
1.16. Les transformations hyperboliques	16
1.17. Les transformations elliptiques	17
1.18. Les transformations paraboliques	18
1.19. Les transformations hyperboliques	19
1.20. Les transformations elliptiques	20
1.21. Les transformations paraboliques	21
1.22. Les transformations hyperboliques	22
1.23. Les transformations elliptiques	23
1.24. Les transformations paraboliques	24
1.25. Les transformations hyperboliques	25
1.26. Les transformations elliptiques	26
1.27. Les transformations paraboliques	27
1.28. Les transformations hyperboliques	28
1.29. Les transformations elliptiques	29
1.30. Les transformations paraboliques	30
1.31. Les transformations hyperboliques	31
1.32. Les transformations elliptiques	32
1.33. Les transformations paraboliques	33
1.34. Les transformations hyperboliques	34
1.35. Les transformations elliptiques	35
1.36. Les transformations paraboliques	36
1.37. Les transformations hyperboliques	37
1.38. Les transformations elliptiques	38
1.39. Les transformations paraboliques	39
1.40. Les transformations hyperboliques	40
1.41. Les transformations elliptiques	41
1.42. Les transformations paraboliques	42
1.43. Les transformations hyperboliques	43
1.44. Les transformations elliptiques	44
1.45. Les transformations paraboliques	45
1.46. Les transformations hyperboliques	46
1.47. Les transformations elliptiques	47
1.48. Les transformations paraboliques	48
1.49. Les transformations hyperboliques	49
1.50. Les transformations elliptiques	50
1.51. Les transformations paraboliques	51
1.52. Les transformations hyperboliques	52
1.53. Les transformations elliptiques	53
1.54. Les transformations paraboliques	54
1.55. Les transformations hyperboliques	55
1.56. Les transformations elliptiques	56
1.57. Les transformations paraboliques	57
1.58. Les transformations hyperboliques	58
1.59. Les transformations elliptiques	59
1.60. Les transformations paraboliques	60
1.61. Les transformations hyperboliques	61
1.62. Les transformations elliptiques	62
1.63. Les transformations paraboliques	63
1.64. Les transformations hyperboliques	64
1.65. Les transformations elliptiques	65
1.66. Les transformations paraboliques	66
1.67. Les transformations hyperboliques	67
1.68. Les transformations elliptiques	68
1.69. Les transformations paraboliques	69
1.70. Les transformations hyperboliques	70
1.71. Les transformations elliptiques	71
1.72. Les transformations paraboliques	72
1.73. Les transformations hyperboliques	73
1.74. Les transformations elliptiques	74
1.75. Les transformations paraboliques	75
1.76. Les transformations hyperboliques	76
1.77. Les transformations elliptiques	77
1.78. Les transformations paraboliques	78
1.79. Les transformations hyperboliques	79
1.80. Les transformations elliptiques	80
1.81. Les transformations paraboliques	81
1.82. Les transformations hyperboliques	82
1.83. Les transformations elliptiques	83
1.84. Les transformations paraboliques	84
1.85. Les transformations hyperboliques	85
1.86. Les transformations elliptiques	86
1.87. Les transformations paraboliques	87
1.88. Les transformations hyperboliques	88
1.89. Les transformations elliptiques	89
1.90. Les transformations paraboliques	90
1.91. Les transformations hyperboliques	91
1.92. Les transformations elliptiques	92
1.93. Les transformations paraboliques	93
1.94. Les transformations hyperboliques	94
1.95. Les transformations elliptiques	95
1.96. Les transformations paraboliques	96
1.97. Les transformations hyperboliques	97
1.98. Les transformations elliptiques	98
1.99. Les transformations paraboliques	99
1.100. Les transformations hyperboliques	100

Avant-propos

Dans ce second fascicule, on introduit la notion d'angles orientés : angles de vecteurs, angles de droites, avant de proposer l'étude et la classification des isométries puis des similitudes. Les considérations relatives aux bissectrices et aux points cocycliques (§24-25) n'interviennent pas directement dans l'étude des transformations, néanmoins il est naturel de traiter ces questions à la suite des angles de vecteurs et de droites. C'est ici qu'elles trouvent leur place logique. Ces différentes notions sont, pour l'essentiel, abordées dans les classes de seconde, première S et terminale C. On pourra donc se reporter aux manuels correspondants. On y trouvera, en outre, l'utilisation des nombres complexes pour décrire les similitudes planes directes. Ce dernier thème n'est certainement pas sans intérêt, mais il ne nous a pas paru indispensable de l'aborder ici. Les similitudes non directes, ne figurent pas au programme des classes des lycées, pas plus qu'elles n'apparaissent dans celui du C.A.P.E.S. de mathématiques. Nous les avons néanmoins traitées, car le peu qu'il y a à dire sur le sujet permet de disposer d'une classification complète des similitudes.

Le dernier chapitre ainsi que l'appendice qui le suivent doivent être regardé comme une reconnaissance sur un terrain qui ne relève pas strictement des programmes évoqués plus haut, mais sur lequel il est toujours possible de vous entraîner à l'occasion d'un problème, y compris le jour d'un concours. Il n'y a donc pas lieu d'en faire une étude de type de scolaire - c'est pourquoi il n'est pas proposé d'exercice portant spécifiquement sur cette partie. Néanmoins, nous nous sommes efforcés de justifier le bien fondé de cette démarche en montrant qu'un tel effort d'abstraction et de synthèse peut se révéler efficace en présentant quelques exemples qui nous semblent significatifs.

Sur ces points, comme pour l'ensemble de ce cours, nous nous sommes efforcés de rester fidèles à l'esprit des épreuves de géométrie posées au C.A.P.E.S. Celles-ci ne mettent en œuvre pratiquement que les outils dont dispose l'élève d'une classe de terminale scientifique, cependant on attend du candidat une culture mathématique et une certaine maturité qu'on ne saurait exiger d'un candidat bachelier.

Bibliographie

—

Les transformations du plan sont des applications qui envoient un point sur un point. Elles sont définies par une formule ou une construction géométrique. Les transformations du plan sont classées en deux catégories : les transformations linéaires et les transformations non linéaires. Les transformations linéaires sont celles qui envoient une droite sur une droite. Elles sont définies par une matrice et un vecteur. Les transformations non linéaires sont celles qui envoient une droite sur une courbe. Elles sont définies par une formule ou une construction géométrique. Les transformations du plan sont très importantes en géométrie et en physique. Elles permettent de décrire les symétries et les transformations des objets géométriques. Elles sont aussi utilisées pour modéliser les transformations des objets physiques.

Les transformations du plan sont des applications qui envoient un point sur un point. Elles sont définies par une formule ou une construction géométrique. Les transformations du plan sont classées en deux catégories : les transformations linéaires et les transformations non linéaires. Les transformations linéaires sont celles qui envoient une droite sur une droite. Elles sont définies par une matrice et un vecteur. Les transformations non linéaires sont celles qui envoient une droite sur une courbe. Elles sont définies par une formule ou une construction géométrique. Les transformations du plan sont très importantes en géométrie et en physique. Elles permettent de décrire les symétries et les transformations des objets géométriques. Elles sont aussi utilisées pour modéliser les transformations des objets physiques.

Les transformations du plan sont des applications qui envoient un point sur un point. Elles sont définies par une formule ou une construction géométrique. Les transformations du plan sont classées en deux catégories : les transformations linéaires et les transformations non linéaires. Les transformations linéaires sont celles qui envoient une droite sur une droite. Elles sont définies par une matrice et un vecteur. Les transformations non linéaires sont celles qui envoient une droite sur une courbe. Elles sont définies par une formule ou une construction géométrique. Les transformations du plan sont très importantes en géométrie et en physique. Elles permettent de décrire les symétries et les transformations des objets géométriques. Elles sont aussi utilisées pour modéliser les transformations des objets physiques.

Chapitre VII : les angles orientés.

Avertissement.

Il existe une unique méthode pour fonder, de façon formelle, le concept de mesure des angles. L'étude des séries entières met à notre disposition la fonction exponentielle complexe :

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\theta \longmapsto e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Cette fonction satisfait l'identité bien connue :

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'}$$

et elle admet pour image le cercle unité. Ceci permet de décrire assez simplement l'addition des angles orientés en relation avec la composition des applications orthogonales qui, elles mêmes, s'interprètent comme étant les rotations. Il n'empêche qu'il est indispensable de savoir manipuler la mesure des angles, même si l'on ignore tout des ingrédients évoqués plus haut. C'est pourquoi, **il convient de savoir aborder ce sujet d'un point de vue empirique.** Comme toute démarche de ce type laisse une part à l'arbitraire, elle est criticable par essence.

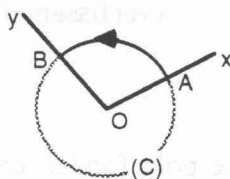
Pour notre part, nous avons **choisi** de définir la mesure des angles comme longueur des chemins qu'il est possible de parcourir sur un cercle de rayon 1. Les arguments qui plaident en faveur de cette option sont plus de nature heuristique que pédagogique. Pour justifier ce choix, disons simplement que construire une approche empirique, en suivant les idées essentielles qui ressortent de la démarche théoriquement fondée, nous a semblé le meilleur parti à prendre dans la mesure où il n'introduit pas de difficulté particulière.

Ces précautions verbales étant prises, entrons dans le vif du sujet.

§23 Angle de deux demi-droites, angle de vecteurs.

* Angle orienté de deux demi-droites de même origine.

Considérons deux demi-droites de même origine O : (Ox) et (Oy) . Désignons par C le cercle de centre O et de rayon 1. Ces deux demi-droites le coupent aux points A et B .



Si un point M parcourt C en partant de A pour arriver en B et décrit un chemin de longueur ℓ . Ce nombre, on l'affecte du signe plus si M parcourt le cercle dans le sens positif, c'est-à-dire l'inverse du sens de rotation des aiguilles d'une montre. On l'affecte du signe moins dans le cas contraire.

Cependant, il apparaît qu'un tel chemin n'est pas unique. En effet, le point M peut très bien avoir effectué plusieurs tours, dans un sens ou dans l'autre et parcouru en plus un chemin dont la longueur est un multiple entier du périmètre du cercle, à savoir 2π . De ce fait, la longueur en question est de la forme :

$$\ell = \ell + 2n\pi \text{ où } n \in \mathbb{Z}.$$

Définition : dans les conditions ci-dessus, on appelle mesure de l'angle orienté et l'on note (Ox, Oy) tout nombre qui diffère de ℓ d'un multiple entier de 2π . Ce qui s'écrit :

$$(Ox, Oy) = \ell \pmod{2\pi}$$

et se lit :

" (Ox, Oy) égale ℓ modulo 2π ".

(23-1) Proposition : si (Ox) et (Oy) sont deux demi-droites de même origine, alors on a :

$$1) (Ox, Oy) = 0 \pmod{2\pi} \text{ si, et seulement si, } (Ox) = (Oy).$$

2) $(Ox, Oy) = \pi \pmod{2\pi}$ si, et seulement si, (Ox) et (Oy) ont la même direction et des sens opposés.

Démonstration : ceci résulte du fait que 0 est la longueur de l'arc nul et que π est la longueur du demi-cercle de rayon 1.

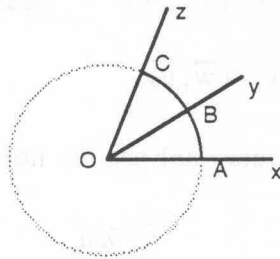
(23-2) Proposition : si (Ox) , (Oy) et (Oz) sont trois demi-droites de même origine, on a toujours :

$$(1) \quad (Ox, Oz) = (Ox, Oy) + (Oy, Oz) \quad (\text{relation de Chasles})$$

$$(2) \quad (Oy, Ox) = -(Ox, Oy)$$

$$(3) \quad (Oy, Oz) = (Ox, Oz) - (Ox, Oy).$$

Démonstration : on note A, B et C les points d'intersection du cercle de centre O et de rayon 1 avec les demi-droites (Ox), (Oy) et (Oz).



On convient de poser :

$$(Ox, Oy) = \alpha \pmod{2\pi},$$

$$(Oy, Oz) = \beta \pmod{2\pi}.$$

On peut alors parcourir le cercle de A vers B par un chemin de longueur α , puis de B vers C avec un chemin de longueur β . Leur juxtaposition forme un chemin de A vers C de longueur $\alpha + \beta$. On a donc :

$$(Ox, Oz) = \alpha + \beta \pmod{2\pi},$$

c'est-à-dire que :

$$(Ox, Oz) = (Ox, Oy) + (Oy, Oz).$$

De plus, si (Oz) coïncide avec (Ox), alors on a :

$$(Ox, Oy) = -(Oy, Ox).$$

La troisième relation se déduit immédiatement des deux autres.

* Angle de vecteurs.

Etant données deux vecteurs **non nuls** $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux points O et O' du plan, on considère deux angles de sommets O et O' : $x\hat{O}y$ et $x'\hat{O}'y'$, tels que la direction des côtés (Ox) et (Ox') soit définie par $\vec{u}$, celle des côtés (Oy) et (O'y') soient définie par $\vec{v}$. On note C et C' les cercles de rayon 1 centrés en O et O'. A et B les points où (Ox) et (Oy) coupent C, A' et B' les points où (Ox') et (O'y') coupent C'.

La translation de vecteur $\vec{OO'}$ transforme le cercle C en C' et les points A et B en A' et B'. Si l'on **admet** qu'une translation respecte la longueur d'un arc de cercle et le sens de parcours. L'image d'un chemin, décrit de A vers B sur le cercle C, est donc un chemin décrit de A' vers B' sur le cercle C'. Ces deux chemins ont même longueur et même sens. Il s'ensuit que :

$$(Ox, Oy) = (O'x', O'y').$$

Ainsi, la mesure de (Ox, Oy) dépend uniquement de la donnée des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, pas du point O choisi, ce qui assure la cohérence de la définition qui suit.

Définition : étant donnés deux vecteurs **non nuls** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on appelle mesure de l'angle orienté de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ et l'on note $(\vec{u}, \vec{v})$ l'angle de deux demi-droites qui ont même direction et même sens que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et dont l'origine commune est un point arbitraire.



Ainsi, l'angle de deux vecteurs non nuls est un nombre réel bien défini à addition près d'un multiple entier de 2π .

La proposition (23-2) se transpose de façon immédiate.

(23-3) **Proposition** : pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ on a :

$$(1') \quad (\vec{u}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) \quad (\text{relation de Chasles})$$

$$(2') \quad (\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v}),$$

$$(3') \quad (\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{w}, \vec{v}) - (\vec{w}, \vec{u}).$$

Remarque : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires non nuls, il existe un nombre réel λ , non nul et tel que :

$$\vec{v} = \lambda \vec{u}$$

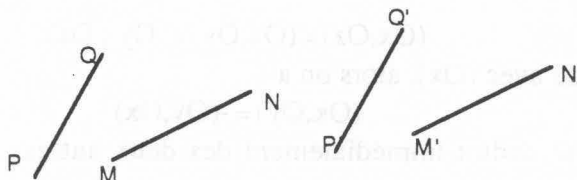
et dans ces conditions, on a :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \pmod{2\pi} \text{ si, et seulement si, } \lambda > 0,$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \pi \pmod{2\pi} \text{ si, et seulement si, } \lambda < 0.$$

(23-4) **Proposition** : toute translation conserve les angles orientés de vecteurs.

Démonstration : on considère quatre points quelconques M, N, P, Q et leurs images M', N', P', Q' par une translation donnée.



On a évidemment :

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN} \text{ et } \overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{PQ}$$

et comme un angle orienté ne dépend que des vecteurs concernés, on a :

$$(\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{P'Q'}) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ})$$

§24 Angle de deux droites.

(24-1) **Proposition** : étant données deux droites du plan D et D', si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont deux vecteurs non nuls de même direction que D et si $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ sont deux vecteurs non nuls de même direction que D', alors $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{u}', \vec{v}')$ ont même mesure à addition près d'un multiple entier de π .

Démonstration : on a toujours :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{u}') + (\vec{u}', \vec{v}') + (\vec{v}', \vec{v})$$

et à la fois :

$$(\vec{u}, \vec{u}') = 0 \pmod{2\pi} \text{ ou } (\vec{u}, \vec{u}') = \pi \pmod{2\pi},$$

$$(\vec{v}, \vec{v}') = 0 \pmod{2\pi} \text{ ou } (\vec{v}, \vec{v}') = \pi \pmod{2\pi}.$$

Il s'ensuit que :

$$(\vec{u}, \vec{u}') = (\vec{v}, \vec{v}') \pmod{2\pi} \text{ ou } (\vec{u}, \vec{u}') = (\vec{v}, \vec{v}') + \pi \pmod{2\pi}.$$

Les mesures de $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{u}', \vec{v}')$ sont donc égales, à un multiple entier de π près.

Cette propriété assure la cohérence de la définition qui suit.

Définition : dans les conditions ci-dessus, on appelle mesure de l'angle orienté de D et D' et l'on note (D, D') tout nombre égal à une mesure de l'angle orienté des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ à π près. Ce qui s'écrit :

$$(D, D') = (\vec{u}, \vec{v}) \pmod{\pi}$$

Il est clair que la mesure de l'angle orienté de deux droites est un nombre défini à addition près d'un multiple entier de π et que la proposition (23-3) sur les angles de vecteurs, s'applique aux angles de droites moyennant un simple changement de notations.

(24-2) Proposition : pour toutes droites D, D' et D'' du plan, on a :

- (1) $(D, D'') = (D, D') + (D', D'')$ (relation de Chasles)
- (2) $(D', D) = -(D, D')$
- (3) $(D, D') = (D'', D') - (D'', D)$.

Exemples : pour toutes droites D et D' du plan, on a :

- $(D, D') = 0 \pmod{\pi}$ si, et seulement si, D et D' sont parallèles.
- $(D, D') = \pi/2 \pmod{\pi}$ si, et seulement si, les droites D et D' sont perpendiculaires.

* Bissectrices.

(24-3) Proposition : étant données deux demi-droites (Ox) et (Oy) de même origine, il existe deux demi-droites (Oz) et (Oz') telles que :

$$2(Ox, Oz) = (Ox, Oy) \text{ et } 2(Ox, Oz') = (Ox, Oy).$$

Elles ont la même direction et sont de sens opposés.

Définition : ces deux demi-droites sont appelées les axes bissecteurs de l'angle $x\hat{O}y$. Leur réunion en forme la bissectrice.

Démonstration : soit (Oz) une demi-droite d'origine O, on note α une mesure de l'angle (Ox, Oy) et β une mesure de l'angle (Ox, Oz). La relation

$$2(Ox, Oz) = (Ox, Oy)$$

est vérifiée si, et seulement si, il existe un entier relatif n tel que :

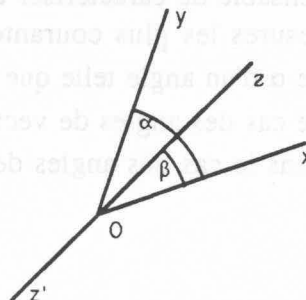
$$2\beta = \alpha + 2n\pi.$$

Cette condition équivaut à :

$$\beta = \alpha/2 \pmod{2\pi} \text{ ou } \beta = \alpha/2 + \pi \pmod{2\pi}.$$

Elle définit les deux demi-droites (Oz) et (Oz') telles que :

$$(Ox, Oz) = \alpha/2 \pmod{2\pi} \text{ et } (Ox, Oz') = \alpha/2 + \pi \pmod{2\pi}.$$



On a ainsi :

$$(Oz, Oz') = \pi \pmod{2\pi}.$$

Ces deux demi-droites ont donc la même direction et elles sont de sens opposés. •

(24-4) Proposition : pour toutes droites D et D' , concourantes en un point O du plan, il existe deux droites Δ et Δ' passant par O et telles que :

$$2(D, \Delta) = (D, D') \text{ et } 2(D, \Delta') = (D, D').$$

Ces deux droites sont perpendiculaires.

Définition : Δ et Δ' sont appelées les bissectrices des droites D et D' .

Démonstration : on considère une droite Δ qui passe par O . On note α une mesure de (D, D') et β une mesure de (D, Δ) . La relation.

$$2(D, \Delta) = (D, D')$$

est vérifiée si, et seulement si, il existe un entier relatif n tel que

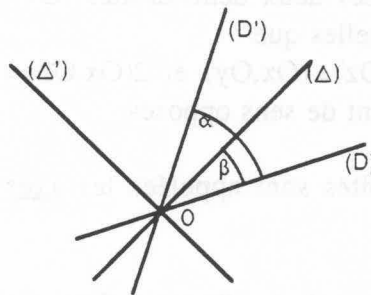
$$2\beta = \alpha + n\pi.$$

Cette relation équivaut à :

$$\beta = \alpha/2 + n\pi/2.$$

Elle définit donc deux droites Δ et Δ' telles que :

$$(D, \Delta) = \alpha/2 \pmod{\pi} \text{ et } (D, \Delta') = \alpha/2 + \pi/2 \pmod{\pi}.$$



On a en outre :

$$(\Delta, \Delta') = \pi/2 \pmod{\pi},$$

les deux droites obtenues sont donc perpendiculaires. •

! Comme la mesure d'un angle orienté est définie à un multiple entier de 2π ou π près, lorsqu'on doit diviser la mesure d'un angle par un nombre, il prudent d'expliciter ces $2k\pi$ ou $k\pi$ dans les formules. Cette précaution permet de calculer sur des réels ce qui est plus aisé que de manipuler des classes de nombres.

Convention : il est parfois indispensable de caractériser une valeur particulière d'un angle. Il est alors commode privilégier les mesures les plus courantes. Ainsi, on parlera de détermination principale pour désigner la mesure α d'un angle telle que :

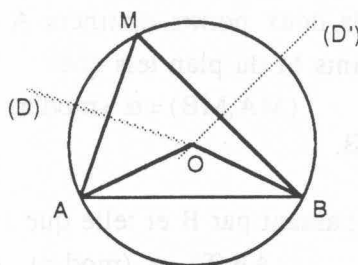
- $-\pi < \alpha \leq \pi$ dans le cas des angles de vecteurs,
- $-\pi/2 < \alpha \leq \pi/2$ dans le cas des angles de droites.

§25 Points cocycliques.

(25-1) Théorème : si A, B, M sont trois points d'un cercle de centre O, on a toujours :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \pmod{\pi}.$$

Démonstration : on note D et D' les bissectrices des angles $\widehat{MOA}$ et $\widehat{MOB}$.



D'après la proposition (24-3), on a

$$(\overrightarrow{OM}, D) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) \pmod{\pi} \text{ et } (\overrightarrow{OM}, D') = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB}) \pmod{\pi}.$$

On en déduit que :

$$(D, D') = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \pmod{\pi}.$$

La droite D est la médiatrice de MA, elle est donc perpendiculaire à (MA), de même D' est perpendiculaire à (MB). On a ainsi :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) &= (\overrightarrow{MA}, D) + (D, D') + (D', \overrightarrow{MB}) \pmod{\pi} \\ &= \pi/2 + (D, D') + \pi/2 \pmod{\pi}. \end{aligned}$$

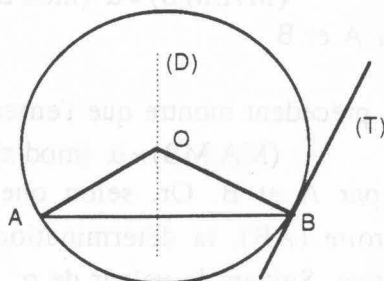
D'où il vient :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (D, D') = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \pmod{\pi}.$$

(25-2) Proposition : étant donnés deux points A et B d'un cercle de centre O, si T est la tangente en B au cercle, on a :

$$(\overrightarrow{AB}, T) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \pmod{\pi}.$$

Démonstration : on note D la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.



On a tout d'abord :

$$(D, \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \pmod{\pi}$$

et comme D est aussi la médiatrice de AB, on a aussi :

$$(\overrightarrow{AB}, D) = \pi/2 \pmod{\pi}.$$

De plus, T est perpendiculaire à (OB) :

$$(OB, T) = \pi/2 \pmod{\pi}.$$

Il s'ensuit que :

$$(AB, T) = (AB, D) + (D, OB) + (OB, T) = (D, OB) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \pmod{\pi}$$

$$(AB, T) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \pmod{\pi}. \quad \bullet$$

Remarque : la proposition ci-dessus peut être regardée comme un cas limite du théorème précédent. Il suffit, pour cela, de convenir que la tangente en B au cercle est la position limite de la sécante (MB), lorsque M vient se confondre avec B.

(25-3) Théorème : étant donnés deux points distincts A et B du plan et un nombre réel α , non nul modulo π , le lieu des points M du plan tels que

$$(MA, MB) = \alpha \pmod{\pi}$$

est un cercle qui passe par A et B.

Démonstration : soit T la droite passant par B et telle que :

$$(AB, T) = \alpha \pmod{\pi}.$$

Il existe un unique cercle C passant par A et B et tangent en B à T. La proposition qui précède montre que tout point de C appartient au lieu défini dans l'énoncé.

Réciproquement, soit M un point du plan tel que :

$$(MA, MB) = \alpha \pmod{\pi},$$

comme α est non nul modulo π , les trois points M, A, B ne sont pas alignés, ils déterminent donc un cercle C', soit O' son centre et T' sa tangente en B. On a toujours :

$$(AB, T') = \frac{1}{2}(\overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'B}) = (MA, MB) = \alpha \pmod{\pi}.$$

Ce qui fait que :

$$(AB, T') = (AB, T) \pmod{\pi}.$$

Ainsi, les droites T et T' coïncident, les cercles C et C' sont donc confondus.

Il est alors prouvé que le lieu cherché est C. •

Remarque : la démonstration du théorème fournit aussi les éléments pour la construction géométrique du centre du cercle en question.

(25-4) Corollaire : étant donnés deux points A et B distincts et un nombre réel α tel que $\alpha \neq 0 \pmod{\pi}$, le lieu des points M du plan tels que :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha \pmod{2\pi}$$

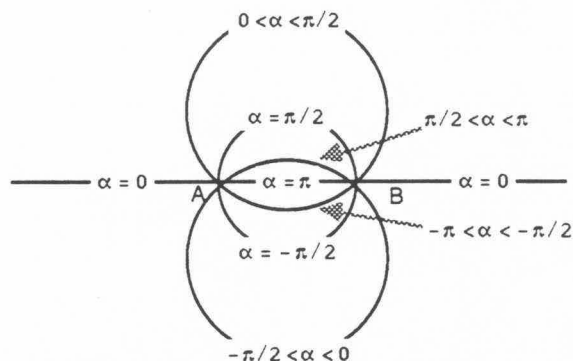
est un arc de cercle limité par A et B.

Démonstration : le théorème précédent montre que l'ensemble des points M tel que :

$$(MA, MB) = \alpha \pmod{\pi},$$

est un cercle C qui passe par A et B. Or, selon que M appartient à l'un ou l'autre des demi-plans limités par la droite (AB), la détermination principale de l'angle $(MA, MB) = \alpha \pmod{\pi}$ est positive ou négative. Suivant la valeur de α , le lieu cherché est donc l'un des deux arcs du cercle C limités par A et B. •

Ainsi, on a montré que les lignes de niveau de la fonction : $M \mapsto \alpha = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ sont les arcs de cercles d'extrémités A et B, auxquels il convient d'ajouter le segment AB et son complémentaire à la droite (AB). Leur disposition, lorsque α varie de $-\pi$ à π , est schématisée ci-après.



Remarque : étant donnés deux points distincts A et B, le lieu des points M tels que : $(MA, MB) = 0 \pmod{\pi}$ est la droite (AB).

(25-5) Corollaire : quatre points A, B, C, D distincts et non alignés sont cocycliques si et seulement si :

$$(CA, CB) = (DA, DB) \pmod{\pi}.$$

Démonstration : d'après le théorème (25-1), la condition est nécessaire. Elle est suffisante d'après le théorème (25-3). •

Remarque : les quatre points A, B, C, D sont alignés si et seulement si :

$$(CA, CB) = (DA, DB) = 0 \pmod{\pi}.$$



Remarque : Soit deux cercles se coupant en deux points A et B . Soit O le milieu du segment AB .
 LMA : $MA = MB$ (car O est le milieu de AB).

12-2) Exercice : Soient deux cercles C_1 et C_2 se coupant en deux points A et B . Soit O le milieu du segment AB .
 Montrer que O est le milieu de AB .

L'intersection de deux cercles est l'ensemble des points qui sont à la même distance de deux points fixes A et B .
 Démonstration : Soit M un point de l'intersection des deux cercles. Alors $MA = MB$.

Réponse : Soient deux points A , B , C , D et un point M . Soit O le milieu de AB .
 (Cercle C_1 de centre O et de rayon OA).

Chapitre VIII : les isométries planes

On se place dans un plan orienté arbitraire qu'on appellera "le plan".

§26 Définition et exemples.

Définition : on appelle isométrie plane toute application du plan dans lui-même qui conserve la distance, c'est-à-dire telle que, pour tous points M et N d'images respectives M' et N' , on ait $MN = M'N'$.

Dans toute la suite, on parlera le plus souvent d'isométrie sans préciser "plane".

(26-1) Proposition : la composition de deux isométries donne une isométrie.

Cette assertion découle immédiatement de la définition, de même que celles qui suivent.

* Exemples.

- 1) L'application identique du plan sur lui-même est évidemment une isométrie.
- 2) Toute translation est une isométrie.
- 3) Toute symétrie par rapport à un point est une isométrie.
- 4) Toute symétrie orthogonale par rapport à une droite est une isométrie.
- 5) Tout composé de ces transformations est une isométrie.

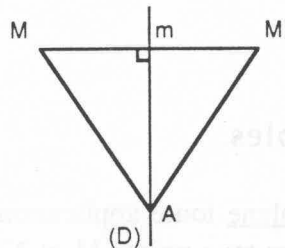
Ainsi, au départ, les isométries ne sont pas des objets totalement étrangers.

§27 Compléments sur la symétrie axiale.

Soit D une droite du plan, on convient de noter s_D la symétrie orthogonale par rapport à D . Le plus souvent, on omettra le mot "orthogonale". Dans ce contexte, ce sera sans inconvénient.

(27-1) Proposition : toute symétrie par rapport à une droite transforme tout angle en son opposé.

Démonstration : étant donné une droite D , si M est un point quelconque du plan, on convient de noter M' son symétrique par rapport à D et m le milieu de MM' .



Comme le triangle AMM' est isocèle en A , il vient :

$$(\overrightarrow{Am}, \overrightarrow{AM'}) = -(\overrightarrow{Am}, \overrightarrow{AM}).$$

On en déduit que, pour tous points P, Q, R du plan et leurs symétriques P', Q' et R' par rapport à D , on a :

$$(\overrightarrow{P'Q'}, \overrightarrow{P'R'}) = -(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}).$$

Il suffit pour cela d'introduire un vecteur $\vec{u}$ défini par deux points distincts de D . On a alors

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{P'Q'}, \overrightarrow{P'R'}) &= (\vec{u}, \overrightarrow{P'R'}) - (\vec{u}, \overrightarrow{P'Q'}) \\ &= -(\vec{u}, \overrightarrow{PR}) + (\vec{u}, \overrightarrow{PQ}) \\ &= -(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}). \end{aligned}$$

(27-2) Proposition : toute symétrie par rapport à une droite transforme toute droite en une droite.

Démonstration : on considère une symétrie s d'axe D , une droite quelconque Δ , deux points arbitraires A et B de Δ et leur images A' et B' par s . Soit M un point quelconque de Δ et M' son symétrique par rapport à Δ . Nous savons que :

$$(MA, MB) = 0 \pmod{\pi}$$

et comme la proposition précédente montre que :

$$(M'A', M'B') = -(MA, MB) = 0 \pmod{\pi},$$

le point M' est sur la droite $(A'B')$. On a donc : $s(\Delta) \subseteq (A'B')$. Cette propriété est aussi vérifiée par la droite $(A'B')$, on a donc aussi : $s(A'B') \subseteq (\Delta)$ et par suite :

$$(A'B') = s \circ s(A'B') \subseteq s(\Delta, B) = s(\Delta).$$

En rapprochant les deux inclusions :

$$s(\Delta) \subseteq (A'B') \text{ et } (A'B') \subseteq s(\Delta)$$

on obtient l'égalité

$$s(\Delta) = (A'B'),$$

Ce qui justifie l'assertion avancée.

(27-3) Proposition : toute symétrie par rapport à une droite conserve le barycentre.

Démonstration : étant donnée une symétrie quelconque d'axe D, on choisit arbitrairement deux points distincts O et I de D et un point J, distinct de O, situé sur la perpendiculaire en O à D. On considère n points $A_1, \dots, A_n$ et n réels de somme non nulle : $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, soit G leur barycentre. On note :

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

les coordonnées de $A_1, \dots, A_n$ dans le repère (O,I,J), le point G a donc pour coordonnées :

$$x = \frac{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \quad \text{et} \quad y = \frac{\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}.$$

Soit $A'_1, \dots, A'_n$ les symétriques de $A_1, \dots, A_n$ par rapport à D. Sur le repère (O,I,J), ces points ont pour coordonnées :

$$(x_1, -y_1), (x_2, -y_2), \dots, (x_n, -y_n).$$

Il s'ensuit que le barycentre des points $A'_1, \dots, A'_n$ affectés des coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ a pour coordonnées :

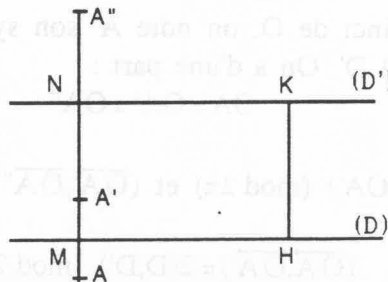
$$x' = x \quad \text{et} \quad y' = -y.$$

Ce point est donc le symétrique de G par rapport à D.

* Composition de deux symétries axiales.

1) Cas où les axes des symétries sont parallèles.

Etant données deux droites parallèles D et D', on considère un point quelconque A du plan, soit A' son symétrique par rapport à D et A'' le symétrique de A' par rapport à D'.



On note M le milieu de AA' et N le milieu de $A'A''$. On a :
 $\overline{AA'} = 2 \overline{MA'}$ et $\overline{AA''} = 2 \overline{A'N}$.

Il s'ensuit que :

$$\overline{AA''} = 2 \overline{MN}$$

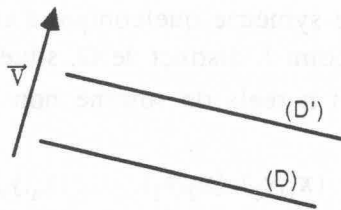
On peut choisir arbitrairement un point H de D et noter K sa projection orthogonale sur D', on aura toujours :

$$\overline{MN} = \overline{HK}.$$

L'application composée $s_{D'} \circ s_D$ est donc la translation de vecteur $2\overline{HK}$.

(27-4) Proposition : le composé de deux symétries par rapport à deux droites parallèles est une translation.

Réciproquement, on considère une translation de vecteur $\vec{v}$ et l'on choisit arbitrairement une droite D perpendiculaire à la direction de $\vec{v}$, soit D' son image par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{v}$.



On a montré que :

$$s_{D'} \circ s_D = t_{\vec{v}}.$$

On en déduit immédiatement la proposition qui suit.

(27-5) Proposition : toute translation est la composée de deux symétries d'axes parallèles.

N.B. On retiendra que la translation $t_{\vec{v}}$ se décompose d'une infinité de façon en un produit de deux symétries

- d'axes orthogonaux à $\vec{v}$,
- l'axe de la seconde étant le transformé de l'axe de la première par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{v}$.

Le fait que l'axe d'une des symétries en question puisse être choisi arbitrairement jouera un rôle essentiel dans la suite.

2) Cas où les axes des symétrie sont concourants.

Considérons les symétries par rapport à deux droites données D et D' , concourantes en un point O . Le point O est invariant par chacune des deux symétries, il est donc laissé fixe par leur composé.

Soit A un point distinct de O , on note A' son symétrique par rapport à D et A'' le symétrique de A' par rapport à D' . On a d'une part :

$$OA = OA' = OA''$$

et d'autre part :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = 2(D, OA') \pmod{2\pi} \text{ et } (\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OA''}) = 2(OA', D') \pmod{2\pi},$$

d'où il vient :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA''}) = 2(D, D') \pmod{2\pi}.$$

Ces deux constatations nous conduisent à poser la définition qui suit.

Définition : étant donné un point O du plan orienté et un nombre réel θ , on appelle rotation de centre O d'angle θ et l'on note $R(O, \theta)$, l'application du plan dans lui-même qui laisse le point O invariant et transforme tout point M , distinct de O , en le point M' tel que :

$$OM = OM' \text{ et } (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta \pmod{2\pi}.$$

On peut alors formuler simplement le résultat précédemment acquis.

(27-6) Proposition : le composé de deux symétries par rapport à des droites concourantes est une rotation.

§28 Propriétés des rotations.

Commençons par doter la proposition ci-dessus d'une réciproque.

(28-1) Proposition : toute rotation est le composé de deux symétries par rapport à des droites concourantes.

Démonstration : soit R une rotation de centre O d'angle θ , D une droite quelconque passant par O , D' la droite passant par O et telle que

$$(D, D') = \theta/2 \pmod{\pi}.$$

D'après l'étude précédente, on a :

$$s_{D'} \circ s_D = R(O, \theta).$$

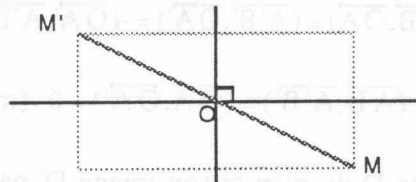
N.B. On retiendra que la rotation $R(O, \theta)$ se décompose d'une infinité de façons en un produit de deux symétries

- d'axes concourants en O
- l'axe de la seconde est le transformé de l'axe de la première par la rotation

$R(O, \frac{1}{2}\theta)$.

Comme pour les translations, le fait que l'axe d'une des symétries en question puisse être choisi arbitrairement est essentiel.

Exemple : soit O un point du plan, la rotation de centre O et d'angle π , c'est-à-dire la symétrie par rapport au point O (ou demi-tour de centre O), est le composé de deux symétries par rapport à deux droites perpendiculaires passant par O .



Notons qu'ici, la composition des deux symétries est une opération commutative. Il est facile de montrer que c'est le seul cas où cette propriété est vérifiée.

Les propositions qui suivent découlent directement des propriétés de la symétrie axiale.

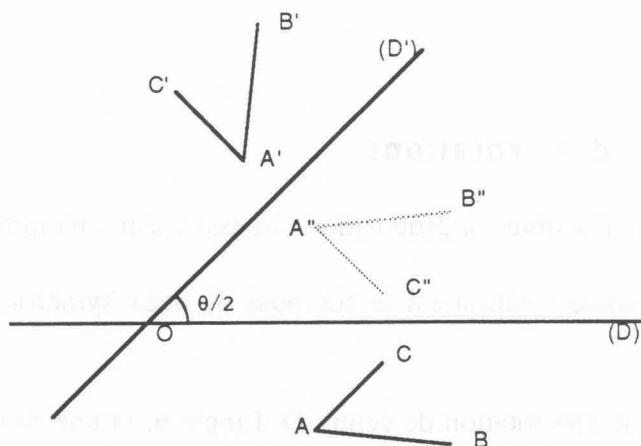
(28-2) Proposition : l'image de toute droite par une rotation est une droite.

(28-3) Proposition : la rotation conserve les angles.

Démonstration : étant donnée une rotation de centre O d'angle θ , on désigne respectivement par A, B, C et A', B', C' trois points du plan et leurs images par $R(O, \theta)$. On considère deux droites D et D' passant par O et telles que :

$$s_{D'} \circ s_D = R(O, \theta),$$

soit A'', B'', C'' les images de A, B et C par la symétrie d'axe D .



Dans ces conditions, d'après la proposition (27-1), on a :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -(\overrightarrow{A''B''}, \overrightarrow{A''C''}) \pmod{2\pi}$$

$$(\overrightarrow{A''B''}, \overrightarrow{A''C''}) = -(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) \pmod{2\pi}$$

et par suite

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) \pmod{2\pi}.$$

(28-4) Théorème : pour tous points A et B distincts et leurs images respectives A' et B' par une rotation d'angle θ , on a :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta \pmod{2\pi}.$$

Démonstration : si l'un des points A ou B est confondu avec O, le résultat est donné par la définition elle-même. Dans le cas contraire, on a :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OA'}) + (\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OA'}) + (\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{A'B'}) \pmod{2\pi}.$$

La proposition précédente montre que :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{OA'}) = -(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{A'B'}) \pmod{2\pi},$$

d'où

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OA'}) = \theta \pmod{2\pi}.$$

Remarque : pour toute droite D du plan et son image D' par la rotation $R(O, \theta)$, on a :

$$(D, D') = \theta \pmod{\pi}.$$

* Composition de rotations.

1) Composition de deux rotations de même centre.

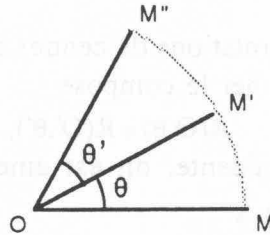
(28-5) Proposition : on considère deux rotations de même centre :

$R(O, \theta)$ et $R(O, \theta')$. On a toujours :

$$R(O, \theta') \circ R(O, \theta) = R(O, \theta + \theta').$$

Cette opération est commutative.

Démonstration : on considère deux rotations de même centre O d'angles θ et θ' . Le point O , est invariant par chacune d'elles. Il est donc laissé fixe par leur composé. Soit M un point du plan distinct de O . On note M' l'image de M par la rotation $R(O, \theta)$ et M'' l'image de M' par la rotation $R(O, \theta')$.



On a d'une part :

$$OM = OM' \text{ et } (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta \pmod{2\theta},$$

d'autre part :

$$OM' = OM'' \text{ et } (\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM''}) = \theta' \pmod{2\pi}.$$

Il s'ensuit immédiatement que :

$$OM = OM'' \text{ et } (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM''}) = \theta + \theta' \pmod{2\pi}.$$

Le point M'' est donc l'image de M par la rotation de centre O d'angle $\theta + \theta'$ et l'on a bien :

$$R(O, \theta') \circ R(O, \theta) = R(O, \theta + \theta')$$

On a aussi :

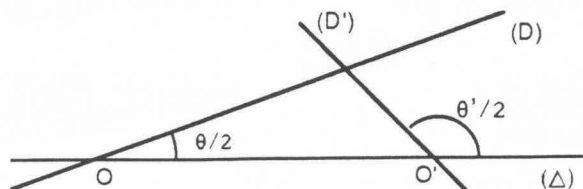
$$R(O, \theta) \circ R(O, \theta') = R(O, \theta + \theta') = R(O, \theta + \theta')$$

La composition de deux rotations de **même centre** est donc une opération commutative. •

2) Composition de deux rotations dont les centres sont distincts.

Etant données deux rotations $R(O, \theta)$ et $R(O', \theta')$ de centres distincts, on note Δ la droite (OO') . On considère les droites D et D' passant respectivement par O et O' et telles que :

$$(D, \Delta) = \theta/2 \pmod{\pi} \text{ et } (\Delta, D') = \theta'/2 \pmod{\pi}.$$



On a ainsi :

$$R(O, \theta) = s_{\Delta} \circ s_D \text{ et } R(O', \theta') = s_{D'} \circ s_{\Delta}.$$

Comme la composition des applications est associative, on a :

$$R(O', \theta') \circ R(O, \theta) = (s_{D'} \circ s_{\Delta}) \circ (s_D \circ s_{\Delta}) = s_{D'} \circ (s_{\Delta} \circ s_{\Delta}) \circ s_D.$$

Or, $s_D \circ s_D$ est l'application identique, on a donc :

$$R(O', \theta') \circ R(O, \theta) = s_{D'} \circ s_D.$$

On a montré à la section précédente que le composé de ces deux symétries est une translation ou une rotation. On a de plus :

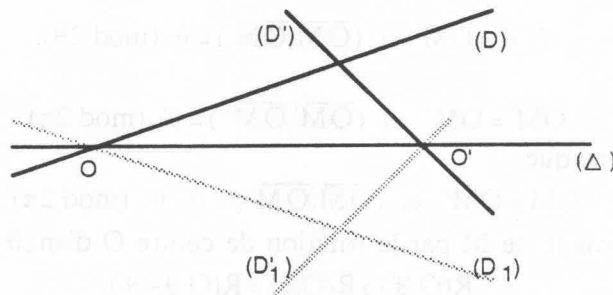
$$(D, D') = (D, \Delta) + (\Delta, D') = \frac{1}{2}(\theta + \theta') \pmod{\pi}.$$

Si $\theta + \theta' = 0 \pmod{2\pi}$, les droites D et D' sont parallèles et la composition des deux rotations donne une translation. Dans le cas contraire, on obtient une rotation d'angle $\theta + \theta'$.

Remarque : la composition de deux rotations de centres distincts n'est pas, en règle général, une opération commutative. Pour déterminer le composé :

$$R(O, \theta) \circ R(O', \theta'),$$

comme dans la démonstration précédente, on est amené à introduire les droites D_1 et D'_1 symétriques de D et D' par rapport à Δ .

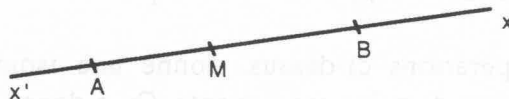


Le centre de cette rotation est alors le symétrique par rapport à Δ du précédent.

§29 Propriétés des isométries du plan.

(29-1) **Proposition** : toute isométrie qui laisse invariants deux points distincts, laisse fixes tous les points de la droite qui les joint.

Démonstration : soit f une isométrie du plan laissant fixes deux points distincts A et B .



Si M est un point du segment AB , on a :

$$AM + MB = AB$$

Par hypothèse, le transformé M' de M par f est tel que :

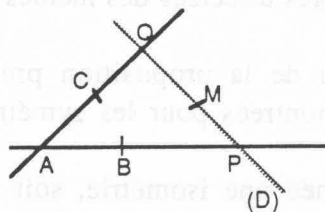
$$AM' = AM \text{ et } BM' = BM.$$

M' est donc un point du segment AB et il coïncide avec M . Des arguments analogues s'appliquent dans les cas où M est sur la droite (AB) , à l'extérieur du segment AB , auquel cas on a :

$$AM' - BM' = AB \text{ ou } BM' - AM' = AB.$$

(29-2) **Proposition** : toute isométrie qui laisse invariants trois points non alignés, est l'application identique.

Démonstration : on considère une isométrie f laissant fixes trois points non alignés A, B, C . Soit M un point quelconque du plan, il existe une droite D qui passe par M et coupe (AB) en P et (AC) en Q .



La proposition précédente montre que les points P et Q sont invariants ainsi que tous les points de D - en particulier M .

(29-3) **Proposition** : toute isométrie du plan est le composé d'au plus trois symétries par rapport à des droites.

Démonstration : on considère une isométrie $f, f \neq \text{Id}$. On est forcément dans un des cas suivants.

- Si f ne laisse aucun point invariant, on choisit un point arbitraire A , on note A' son image par f et s la symétrie par rapport à la médiatrice de AA' . L'application composée $s \circ f$ est une isométrie qui laisse A invariant. Elle admet donc au moins un point fixe.

• Si f admet un point invariant A , comme f n'est pas l'application identique, il existe un point B tel que $B' = f(B) \neq B$. On a $AB = AB'$, le point A est donc situé sur la médiatrice de BB' . Soit s la symétrie par rapport à cette droite, l'application composée $s \circ f$ est une isométrie. Il est clair qu'elle laisse A et B invariants, elle admet donc au moins deux points fixes.

• Si f admet deux points invariants distincts A et B , la proposition (29-1) montre que tous les points de la droite (AB) sont invariants par f . Comme f n'est pas l'application identique, il existe un point C tel que $C' = f(C) \neq C$. Comme f est une isométrie, on a $AC = AC'$ et $BC = BC'$, la droite (AB) est donc la médiatrice de CC' . Soit s la symétrie par rapport à cette droite, l'application composée $s \circ f$ est une isométrie. Il est clair qu'elle laisse invariants les trois points non alignés A , B et C , c'est donc l'application identique.

Chacune des opérations ci-dessus, donne une isométrie $s \circ f$ qui, si elle n'est pas l'application identique, relève d'un des cas suivants. On a donc soit :

$$s'' \circ s' \circ s \circ f = \text{Id}, \quad s' \circ s \circ f = \text{Id}, \quad s \circ f = \text{Id}$$

où s , s' et s'' désignent des symétries. Ainsi, on peut toujours écrire :

$$s'' \circ s' \circ s \circ f = \text{Id}$$

où s , s' et s'' désignent soit des symétries, soit l'application identique. Comme on a :

$$s \circ s' \circ s'' \circ s'' \circ s' \circ s = s \circ s' \circ (s'' \circ s'') \circ s' \circ s = s \circ (s' \circ s') \circ s = s \circ s = \text{Id}$$

il vient :

$$f = \text{Id} \circ f = (s \circ s' \circ s'' \circ s'' \circ s' \circ s) \circ f = (s \circ s' \circ s'') \circ (s'' \circ s' \circ s \circ f) = (s \circ s' \circ s'') \circ \text{Id}$$

Il s'ensuit que :

$$f = s \circ s' \circ s''.$$

L'isométrie f est donc bien le produit de trois symétries axiales, au plus. •

(29-4) Corollaire.

1) Toute isométrie est une application bijective et son application réciproque est une isométrie.

2) L'image de toute droite par une isométrie est une droite.

3) Toute isométrie conserve le barycentre, c'est-à-dire que l'image du barycentre de n points est le barycentre des images affectées des mêmes coefficients.

Démonstration : compte-tenu de la proposition précédente, ces assertions découlent des propriétés correspondantes démontrées pour les symétries (cf. 27-2 et 27-3). •

(29-5) Corollaire : étant donnée une isométrie, soit elle conserve la mesure de tout angle orienté, soit elle transforme tout angle orienté en un angle de mesure opposée.

Démonstration : on a vu qu'une symétrie transforme un angle orienté en un angle de mesure opposée. Suivant qu'une isométrie se décompose en un nombre pair ou impair de symétries, elle transforme tout angle orienté en un angle de même mesure ou de mesure opposée. •

§30 Classification des isométries.

La proposition précédente conduit à poser les définitions qui suivent.

Définition : on appelle déplacement (plan) ou isométrie directe toute isométrie qui conserve les angles.

On appelle antidéplacement (plan) ou isométrie indirecte, toute isométrie plane qui transforme les angles en leurs opposés.

(30-1) Théorème : tout déplacement plan est une rotation ou une translation suivant qu'il admet, ou non, un point fixe.

Démonstration : comme, par définition, un déplacement conserve les angles, c'est le produit d'un nombre pair de symétries. C'est donc un produit de deux symétries. Le théorème résulte alors des propositions (27-4) et (27-6). •

(30-2) Corollaire : tout déplacement qui admet deux points invariants distincts est l'application identique.

Démonstration : cette assertion découle directement du théorème précédent et du fait qu'une translation qui admet un point invariant est la translation de vecteur nul, de même qu'une rotation qui admet deux points invariants distincts a son angle nul (cf. 28-4). •

(30-3) Théorème.

1) Tout antidéplacement qui admet un point fixe est une symétrie par rapport à une droite.

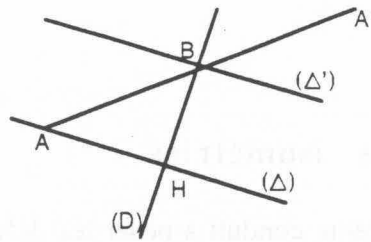
2) Tout antidéplacement sans point fixe est le résultat de la composition d'une symétrie par rapport à une droite et d'une translation de vecteur non nul, parallèle à l'axe de la symétrie - ceci dans un ordre indifférent.

Démonstration.

1) Etant donné un antidéplacement f du plan ayant un point fixe A , on considère un point arbitraire B distinct de A , soit B' son image par f . On note s la symétrie par rapport à la médiatrice de AA' si $A \neq A'$ ou la droite (OA) dans le cas contraire. Les points A et B sont invariants par $s \circ f$. Or, $s \circ f$ est un déplacement qui admet deux points fixes, c'est donc l'application identique et par suite $f = s$.

2) Etant donné un antidéplacement sans point fixe, on considère un point arbitraire A , soit A' son image par f , B le milieu de AA' et d la symétrie de centre B . L'isométrie $d \circ f$ est un antidéplacement qui laisse A invariant. Le point précédent montre que c'est une symétrie dont l'axe Δ passe par A . On considère alors les droites suivantes :

- Δ' la parallèle à Δ qui passe par B ,
- D la perpendiculaire à Δ et Δ' qui passe par B .



Comme les droites Δ' et D sont perpendiculaires et passent par B , on a :

$$d = s_{\Delta'} \circ s_D$$

et par suite :

$$s_{\Delta'} \circ s_D \circ f = d \circ f = s_{\Delta}$$

$$s_D \circ f = s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}$$

$$f = s_D \circ (s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}).$$

Les droites Δ et Δ' étant parallèles, $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}$ est la translation de vecteur $\vec{v} = 2\overrightarrow{HB}$, où H désigne la projection orthogonale de B sur Δ . On a donc :

$$f = s_D \circ t_{\vec{v}}.$$

Les droites Δ et Δ' étant perpendiculaires à D , on a :

$$s_D \circ s_{\Delta} = s_{\Delta} \circ s_D \text{ et } s_D \circ s_{\Delta'} = s_{\Delta'} \circ s_D.$$

Il s'ensuit que :

$$f = s_D \circ s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} = s_{\Delta'} \circ s_D \circ s_{\Delta} = s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} \circ s_D$$

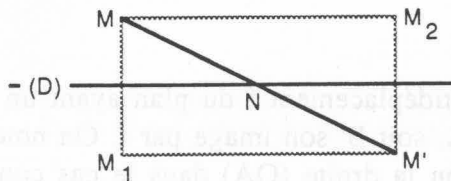
$$f = t_{\vec{v}} \circ s_D.$$

L'antidépacement f est donc bien le résultat de la composition d'une symétrie par rapport à une droite D et d'une translation de vecteur parallèle à D , cette opération étant commutative. •

(30-4) Un antidépacement sans point fixe laisse globalement invariante une unique droite. Celle-ci est l'ensemble des milieux des segments joignant chaque point du plan à son image. •

Démonstration : on garde les notations ci dessus. Comme $\vec{v}$ est parallèle à D , cette droite est globalement invariante par $t_{\vec{v}}$ et donc par f , puisque $f = s_D \circ t_{\vec{v}}$.

Soit M un point quelconque, M' son image par f ; on pose $M_1 = s_D(M)$ et $M_2 = t_{\vec{v}}(M)$.



On a à la fois :

$$M_2 = t_{\vec{v}}(M) \text{ et } t_{\vec{v}}(M_1) = M'.$$

Le quadrilatère MM_1M_2M' est donc un parallélogramme. De plus, comme il admet (D) pour axe de symétrie, c'est un rectangle. Le milieu de MM' en est le centre, il est donc situé sur (D) . Réciproquement, tout point de D est le centre d'un tel rectangle et, de ce fait, il est le milieu d'un segment MM' tel que $M' = f(M)$.

Cette caractérisation de D est indépendante du choix de la décomposition de f elle garantit son unicité. •

Définition : un antidépacement sans point fixe est appelé : symétrie-translation, ou encore symétrie glissée. L'unique droite globalement par une telle transformation est appelé son axe.

§31 Action des isométries sur le plan.

* Groupes de transformations.

Il découle immédiatement de la définition des isométries que :

- le composé de deux isométries est une isométrie,
- l'application identique est une isométrie,
- l'application réciproque d'une isométrie est une isométrie.

Ces trois propriétés se retrouvent pour les sous-ensembles suivants de l'ensemble des transformations du plan :

- l'ensemble des translations,
- l'ensemble des rotations de centre O donné,
- l'ensemble des déplacements.

On résume ces propriétés en disant que chacun de ces ensembles est un groupe de transformations du plan.

N.B. Les deux premières propriétés tombent en défaut quand on considère les antidéplacements qui, de ce fait, ne forment pas un groupe.

Nous pouvons préciser notablement l'action de ces transformations sur le plan en montrant qu'une isométrie est entièrement déterminée par la donnée de deux points, de leurs images et de sa nature - déplacement ou antidéplacement.

(31-1) Proposition : étant donnés deux points distincts A et B, pour tous points A' et B', tels que :

$$AB = A'B',$$

il existe un unique déplacement et un unique antidéplacement du plan qui transforment A en A' et B en B'.

Démonstration : considérons f et g des isométries telles que :

$$f(A) = g(A) = A' \text{ et } f(B) = g(B) = B'.$$

L'application $f^{-1} \circ g$ est une isométrie. Elle laisse invariants les deux points distincts A et B. C'est donc soit l'application identique, soit la symétrie d'axe (AB). On a donc :

$$f^{-1} \circ g = \text{Id} \text{ ou bien } f^{-1} \circ g = s_{(AB)}$$

et par suite :

$$g = f \circ f^{-1} \circ g = f \text{ ou bien } g = f \circ f^{-1} \circ g = f \circ s_{(AB)}.$$

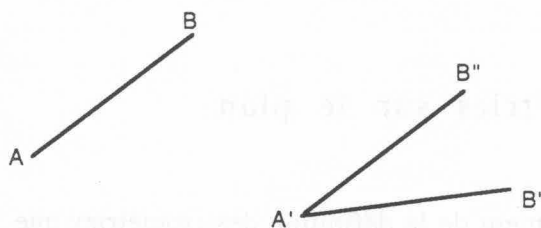
Il s'ensuit que :

$$g = f \text{ ou } g = f \circ s_{(AB)}.$$

Il existe donc au plus un déplacement et un antidéplacement qui transforment A en A' et B en B'.

Montrons que ces deux isométries existent effectivement. On considère la translation t de vecteur $\overrightarrow{AA'}$, elle transforme B en B'' et l'on a :

$$A'B'' = AB = A'B'.$$



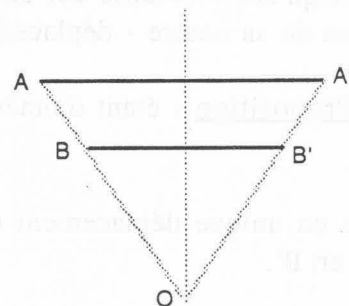
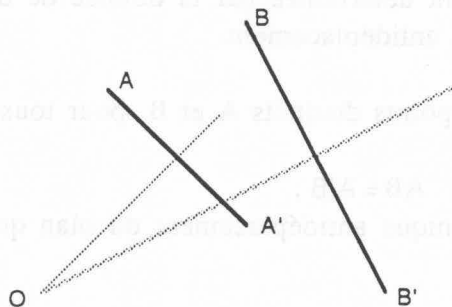
On peut alors considérer la rotation r de centre A' et d'angle $(\overrightarrow{A'B''}, \overrightarrow{A'B'})$. On note Δ la médiatrice de $B'B''$ si B' et B'' sont distincts ou la droite $(A'B')$ dans le cas contraire. Le déplacement $r \circ t$ ainsi que l'antidépacement $s_{\Delta} \circ t$ transforment tous les deux A en A' et B en B' .

La démonstration est alors complète.

*** Construction du centre d'une rotation définie par deux points et leurs images.**

Etant donnés quatre points A, B, A', B' tels que $AB = A'B' \neq 0$, on considère l'unique déplacement qui transforme A en A' et B en B' .

- Si $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$, alors f est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.
- Si $\overrightarrow{A'B'} \neq \overrightarrow{AB}$, alors f est une rotation d'angle $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{AB})$. Il est alors très facile d'en construire le centre. En effet,
 - si A est confondu avec A' , ce point est évidemment le centre de la rotation.
 - si A et A' ainsi que B et B' sont distincts alors le centre de f appartient aux médiatrices de AA' et BB' .



Cette condition suffit pour déterminer ce point dans le cas où ces deux droites sont distinctes. Si elles sont confondues, les droites (AA') et (BB') sont parallèles et les quatre points A, A', B, B' sont les sommets d'un trapèze isocèle. Comme par hypothèse, les droites (AB) et $(A'B')$ ne sont pas parallèles, elles se coupent en un point qui est clairement le centre de la rotation cherchée.

Remarque : une rotation étant aussi une similitude, les considérations de la section 36 livrent des caractérisations moins évidentes du centre d'une rotation donnée de cette façon.

Nous laissons à chacun le soin de déterminer l'axe de l'antidépacement (symétrie ou symétrie-translation) qui transforme A en A' et B en B' .

Chapitre IX : Les similitudes planes

§32 Compléments sur l'homothétie.

Etant donné un point O du plan et un nombre réel **non nul** λ , on se souvient que l'homothétie de centre O et de rapport λ est l'application du plan sur lui-même qui à tout point M , associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda \overrightarrow{OM}$$

on convient de la noter $H(O, \lambda)$.

On dira qu'une homothétie est positive ou négative suivant que son rapport est positif ou négatif.

On vérifie sans peine les propriétés élémentaires qui suivent.

(32-1) Proposition.

- 1) Le centre d'une homothétie de rapport $\lambda \neq 1$ est son seul point invariant.
- 2) Etant données deux homothéties de **même centre**, on a toujours :

$$H(O, \lambda) \circ H(O, \lambda') = H(O, \lambda\lambda') = H(O, \lambda') \circ H(O, \lambda)$$

et ce produit est commutatif.

- 2) Toute homothétie est une application bijective et l'on a :

$$H(O, \lambda)^{-1} = H(O, 1/\lambda).$$

Comme de plus, l'application identique peut être considérée comme une homothétie de centre O et de rapport 1, on en déduit la proposition qui suit.

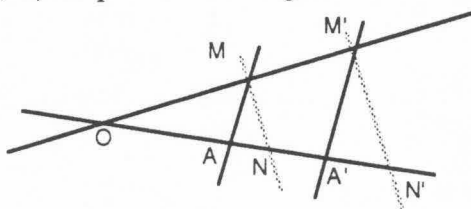
(32-2) Proposition : les homothéties de **même centre** forment un groupe commutatif.

On se souvient que si M et N sont deux points quelconques du plan et si M' , N' désignent leurs images par une homothétie de rapport λ , on a toujours :

$$\overrightarrow{M'N'} = \lambda \overrightarrow{MN}$$

et qu'une homothétie transforme toute droite en une droite parallèle. Cette propriété permet de construire aisément l'image d'un point quelconque par une homothétie donnée par :

- son centre O ,
- un couple (A, A') de points homologues.

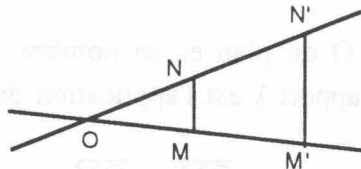


Nous laissons à chacun le soin de décrire et justifier les tracés à effectuer pour parvenir à cette fin.

(32-3) Proposition : pour tous couples de points distincts (M, M') et (N, N') tels que (MN) et $(M'N')$ soient parallèles et $MN \neq M'N'$, il existe une unique homothétie, qui transforme M en M' et N en N' .

Démonstration : comme $MN \neq M'N'$, les droites (MM') et (NN') ne sont pas parallèles, soit O leur point d'intersection. Si une telle homothétie existe, elle a pour centre O et pour rapport le nombre λ tel que :

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda \overrightarrow{OM}.$$



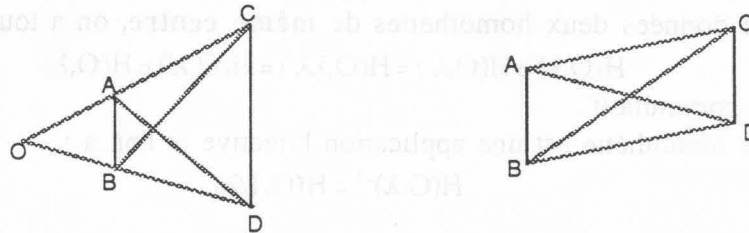
Elle est donc entièrement déterminée par ces deux conditions. De ce fait, elle est unique.

L'homothétie de centre O et de rapport λ transforme évidemment M en M' et comme le théorème de Thalès montre que :

$$\overrightarrow{ON'} = \lambda \overrightarrow{ON},$$

elle transforme aussi N en N' .

(32-4) Corollaire : étant donnés quatre points A, B, C et D , si les droites (AB) et (CD) sont parallèles et si $AB \neq CD$, il existe deux homothéties qui transforment la paire $\{A, B\}$ en $\{C, D\}$.



Remarque : dans le cas où $AB = CD$, l'une de ces homothéties est un demi-tour. L'autre est remplacée par une translation.

(32-5) Proposition : toute homothétie conserve les angles.

Démonstration : pour les homothéties positives, c'est une conséquence immédiate de la définition des angles de vecteurs. Comme toute homothétie négative se décompose en produit d'une homothétie positive et d'une symétrie par rapport au centre d'homothétie, l'assertion avancée est donc vraie dans tous les cas.

(32-6) Proposition : les homothéties conservent le barycentre.

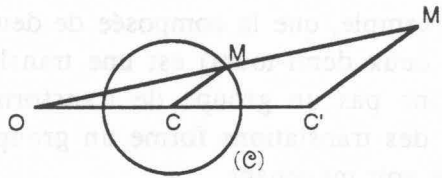
Démonstration : on considère une homothétie $H(O, \lambda)$, n points $A_1, \dots, A_n$ et leurs images respectives $A'_1, \dots, A'_n$ par $H(O, \lambda)$, $a_1, \dots, a_n$ n nombres de somme non nulle et l'on désigne par G le barycentre des points A_i , affectés des coefficients a_i . On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \lambda \overrightarrow{OG} \\ &= \lambda(a_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + a_n \overrightarrow{OA_n}) \\ &= a_1 \lambda \overrightarrow{OA_1} + \dots + a_n \lambda \overrightarrow{OA_n} \\ &= a_1 \overrightarrow{OA'_1} + \dots + a_n \overrightarrow{OA'_n}\end{aligned}$$

Ainsi, le point G' apparaît comme étant le barycentre des images affectées des mêmes coefficients.

(32-7) Proposition : toute homothétie transforme un cercle en un cercle et l'image de son centre est le centre de son image.

Démonstration : étant donné un cercle $\mathcal{C}$ de centre C et de rayon r , on considère l'homothétie $h = H(O, \lambda)$. Soit C' le transformé de C et $\mathcal{C}'$ le cercle de centre C' et de rayon $r' = |\lambda|r$.



Soit M un point de $\mathcal{C}$ et M' son image par h , on a :

$$C'M' = |\lambda|.CM = |\lambda|.r = r',$$

M appartient donc à $\mathcal{C}'$ et par suite :

$$h(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}'.$$

Réciproquement, ce qui précède nous permet aussi d'affirmer que :

$$h^{-1}(\mathcal{C}') \subseteq \mathcal{C}.$$

Il s'ensuit que :

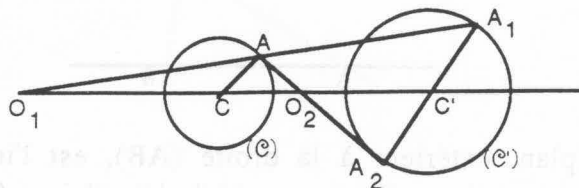
$$\mathcal{C}' = h \circ h^{-1}(\mathcal{C}') \subseteq h(\mathcal{C})$$

On en conclut que $h(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$.

(32-8) Proposition : étant donnés deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de rayons inégaux, il existe deux homothéties h telles que :

$$h(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'.$$

Démonstration : soit r et r' les rayons respectifs de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, C et C' leurs centres. On considère un point A de C , la droite parallèle à (CA) passant par C' coupe $\mathcal{C}'$ en A_1 et A_2 .



Si $\mathcal{C}'$ est l'image de $\mathcal{C}$ par une homothétie h on aura nécessairement :

$$h(\mathcal{C}) = \mathcal{C}' \text{ et } h(A) = A_1 \text{ ou } A_2.$$

Le corollaire (32-4) montre l'existence de deux homothéties h_1 et h_2 telles que :

$$h_1(\mathcal{C}) = \mathcal{C}' \text{ et } h_1(A) = A_1,$$

$$h_2(\mathcal{C}) = \mathcal{C}' \text{ et } h_2(A) = A_2.$$

La proposition précédente nous assure, alors qu'on a :

$$h_1(\mathcal{C}) = \mathcal{C}' = h_2(\mathcal{C}).$$

Remarque : chacun pourra démontrer sans peine que les images par homothétie d'un cercle et d'une tangente à celui-ci, sont des configurations de même nature et qu'il en va de même pour deux cercles tangents.

La première de ces remarques justifie une construction particulièrement commode des tangentes communes à deux cercles donnés. La retrouver ... et la justifier.

§33 Les dilatations.

Nous savons, par exemple, que la composée de deux homothéties de rapport -1 ayant des centres distincts (i.e. : deux demi-tours) est une translation et non une homothétie. Les homothéties ne forment donc pas un groupe de transformations du plan. En revanche, la réunion des homothéties et des translations forme un groupe qui se caractérise de façon fort simple comme nous allons le voir maintenant.

Définition : On appelle dilatation toute bijection du plan sur lui-même, qui transforme toute droite en une droite parallèle.

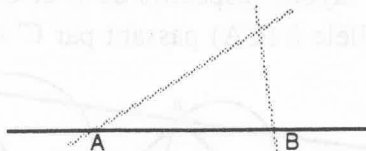
De cette définition on déduit immédiatement que :

- l'application identique du plan est une dilatation,
- la composée de deux dilatations est une dilatation,
- l'inverse d'une dilatation est une dilatation.

Ainsi les dilatations forment un groupe qui contient les homothéties et les translations.

(33-1) Proposition : toute dilatation qui laisse invariants deux points distincts est l'application identique.

Démonstration : soit f est une dilatation qui laisse invariants deux points distincts A et B , toute droite passant par A ou B sera donc invariante.



Ainsi, tout point du plan, extérieur à la droite (AB) , est l'intersection de deux droites invariantes, il est donc invariant. Cette propriété s'étend immédiatement aux points de la droite (AB) .

(33-2) Proposition : toute dilatation est une homothétie ou une translation.

Démonstration : soit f une dilatation. On considère deux points distincts A et B , on note A' , B' leurs images par f . Comme f est une dilatation, il existe λ tel que :

$$\overline{A'B'} = \lambda \overline{AB}.$$

• Si $\lambda \neq 1$ il existe une homothétie g qui transforme A en A' et B en B' .

• Si $\lambda = 1$ il existe une translation g qui transforme A en A' et B en B' .

Dans les deux cas, l'application composée :

$$g^{-1} \circ f$$

est une dilatation, elle laisse A et B invariants, on a donc :

$$g^{-1} \circ f = \text{Id}$$

et par suite f et g sont égales. La dilatation f est donc, selon le cas, une homothétie ou une translation.

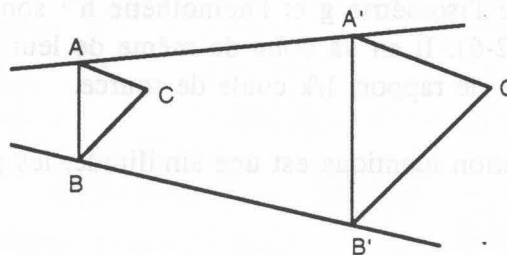
Remarque : ainsi, le groupe des dilatations apparaît comme la réunion du groupe des translations avec tous les groupes d'homothéties ayant même centre. Ceci justifie qu'on appelle aussi cet ensemble le groupe des homothéties-translations.

En revanche, parler des dilatations en termes d'homothéties-translations est peu satisfaisant. En effet, l'usage de cette expression semble suggérer l'existence de transformations hybrides et reflète plutôt mal la réalité, que nous venons de décrire.

* Une forme affine du théorème de Desargues.

(33-3) Théorème : si deux triangles ABC et $A'B'C'$ ont leurs côtés homologues parallèles, alors les droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles.

Démonstration : l'unique dilatation qui transforme A en A' et B en B' transforme les droites (AC) et (BC) en leurs parallèles respectives passant par A' et B' . Ces droites se coupent en C' , ce point est donc l'image de C .



Dans ces conditions, suivant que cette dilatation est une homothétie ou une translation, les droites (AA') , (BB') et (CC') seront concourantes ou parallèles.

Suggestion : énoncer et démontrer une réciproque du théorème précédent.

Signalons pour conclure, que le théorème de Desargues est, sous l'une ou l'autre de ses nombreuses variantes, l'un des ingrédients obligatoires de toute présentation axiomatique de la géométrie.

§34 Les similitudes.

Définition : on appelle similitude (plane) toute application du plan dans lui-même telle que, le rapport des distances de deux points quelconques et de leurs images soit constant.

En d'autres termes, f est une similitude, s'il existe un nombre positif k tel que, pour tous points M et N , leurs images respectives M' et N' par f vérifient :

$$M'N' = k.MN$$

Ce nombre est appelé le rapport de (la) similitude.

Il est clair que les isométries sont les similitudes de rapport 1 et qu'une homothétie de rapport λ est une similitude de rapport $|\lambda|$.

(34-1) **Proposition.**

- 1) Le composé de deux similitudes de rapports h et k est une similitude de rapport hk .
- 2) Toute similitude est une bijection et l'application réciproque d'une similitude de rapport k est une similitude de rapport $1/k$.
- 3) Toute similitude conserve le barycentre.

Démonstration : le point 1) est une conséquence immédiate de la définition. Pour justifier les points 2) et 3), on considère une similitude f de rapport k , on la compose avec une homothétie h de centre arbitraire et de rapport $1/k$, on obtient une similitude g de rapport 1, c'est-à-dire une isométrie. On a donc

$$g = h \circ f$$

et par suite

$$f = h^{-1} \circ g.$$

Nous savons que l'isométrie g et l'homothétie h^{-1} sont des bijections et conservent le barycentre (cf. 29-4 et 32-6). Il en va donc de même de leur application composée f . Le fait que f^{-1} soit une similitude de rapport $1/k$ coule de source. •

Comme l'application identique est une similitude, les points 1) et 2) se résument dans l'assertion qui suit.

(34-2) **Proposition** : les similitudes planes forment un groupe.

* Similitudes directes et indirectes.

Etant donnée une similitude f de rapport k , on considère une homothétie de rapport k et de centre arbitraire. L'application composée $g = h^{-1} \circ f$ est une similitude de rapport 1. C'est donc une isométrie. Ainsi, f apparaît comme étant l'application composée $h \circ g$, d'une isométrie et d'une homothétie.

Comme l'homothétie conserve les angles, la similitude $f = h \circ g$:

- conserve les angles si g est un déplacement,
- les change en leurs opposés si g est un antidéplacement.

Ceci justifie l'assertion ci-après et garantit la cohérence de la définition qui la suit.

(34-3) **Proposition** : une similitude conserve la mesure de tout angle orienté ou la change en son opposée.

Définition : on dira d'une similitude, qu'elle est directe ou indirecte suivant qu'elle conserve ou non l'orientation.

Considérons deux couples de points distincts (A,B) et (A',B') . On peut toujours par composition d'une homothétie et d'un déplacement (resp. un anti-déplacement) définir une similitude f directe (resp. indirecte) qui transforme A en A' et B en B' . Soit f et g deux telles similitudes. L'application :

$$g^{-1} \circ f$$

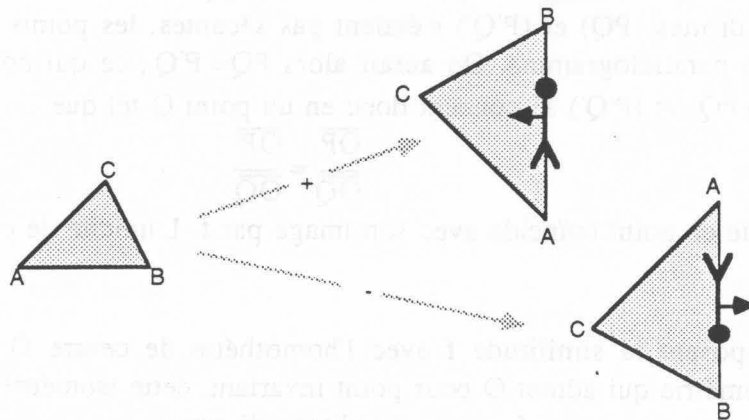
est une similitude, elle laisse invariants deux points distincts, elle a donc pour rapport 1. Il s'ensuit que $g^{-1} \circ f$ est l'application identique ou une symétrie.

Nous avons ainsi prouvé la proposition qui suit.

(34-4) **Proposition** : étant donnés deux couples de points distincts (A,B) et (A',B') , il existe une unique similitude directe (resp. indirecte) qui transforme A en A' et B en B' .

L'énoncé qui suit en est une conséquence immédiate.

(34-5) **Proposition** : étant donnés deux triangles semblables ABC et $A'B'C'$, il existe une unique similitude qui transforme respectivement A en A' , B en B' , et C en C' . Cette similitude est directe, ou indirecte, suivant que les triangles considérés ont, ou non, la même orientation.

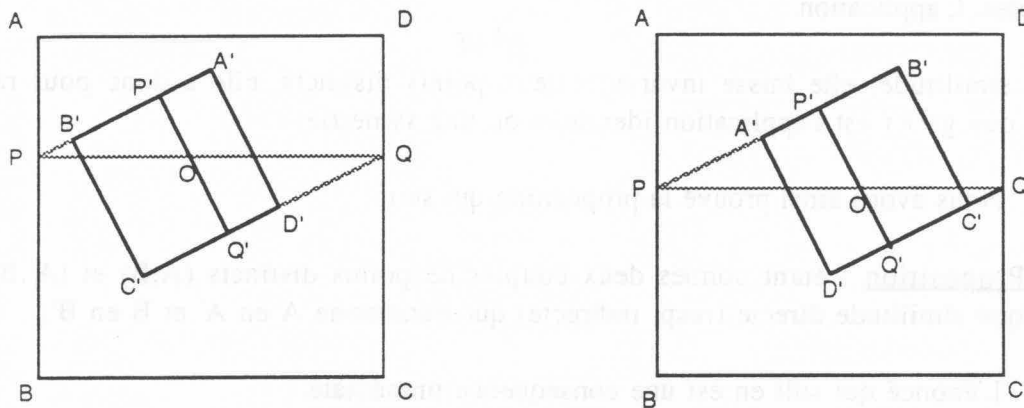


* Décomposition canonique d'une similitude de rapport $k \neq 1$.

(34-6) Proposition : toute similitude de rapport $k \neq 1$ admet un unique point invariant.

Définition : ce point invariant est appelé le centre de (la) similitude.

Démonstration : soit f une similitude de rapport $k \neq 1$, si f est une dilatation, alors f est une homothétie et la question est réglée. On suppose donc que f n'est pas une dilatation. Il existe alors une droite, qui n'est pas transformée par f en une droite parallèle. Soit A et B deux points de celle-ci, on considère un parallélogramme : $ABCD$ - par exemple un carré - et son image par f : $A'B'C'D'$.



Les côtés homologues se coupent :

- (AB) et $(A'B')$ en P
- (CD) et $(C'D')$ en Q

On désigne par P' et Q' les images respectives de P et Q par f . Les droites $(A'B')$ et $(C'D')$ étant parallèles, si les droites (PQ) et $(P'Q')$ n'étaient pas sécantes, les points P, Q, Q' et P' seraient les sommets d'un parallélogramme. On aurait alors $PQ = P'Q'$, ce qui contredirait l'hypothèse : $k \neq 1$. Les droites (PQ) et $(P'Q')$ se coupent donc en un point O tel que :

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OQ'}}.$$

Ce qui prouve que ce point coïncide avec son image par f . L'unicité de ce point est évidente du fait que $k \neq 1$.

En composant la similitude f avec l'homothétie de centre O et de rapport $1/k$, on obtiendra une isométrie qui admet O pour point invariant, cette isométrie sera donc :

- une rotation si f est une similitude directe,
- une symétrie si f est une similitude indirecte.

Le théorème qui suit s'en déduit immédiatement.

(34-7) Théorème.

1) Toute similitude directe est le composé d'une rotation et d'une homothétie de même centre.

2) Toute similitude indirecte est le composé d'une symétrie et d'une homothétie dont le centre est situé sur l'axe de la symétrie.

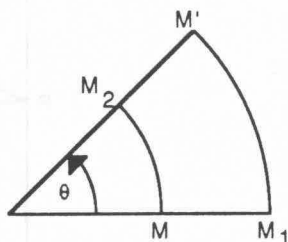
Dans les deux cas il s'agit d'un produit commutatif.

Ainsi une **similitude directe** f sera bien définie par la donnée

- d'un point O : son centre,
- d'un nombre positif k : son rapport,
- d'un nombre θ défini modulo 2π : son angle,

comme étant l'application composée :

$$f = R(O, \theta) \circ H(O, k) = H(O, k) \circ R(O, \theta)$$



En effet, pour tout point M , on :

si $M_1 = H(M)$ alors $M' = R(M_1)$ et si $M_2 = R(M)$ alors $M' = H(M_2)$.

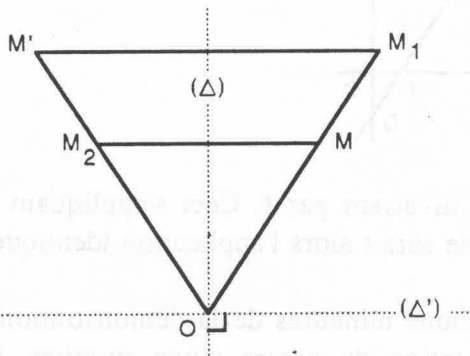
Il est commode de noter la similitude définie par ces données : $S(O, k, \theta)$ et de parler de "la similitude de centre O , de rapport k et d'angle θ ". Il est clair, en effet, que, présentée ainsi, il s'agit d'une similitude directe.

Une **similitude indirecte** f sera bien définie par la donnée :

- d'une droite Δ : son axe,
- d'un point O de Δ : son centre,
- d'un nombre positif k , son rapport,

comme étant l'application composée :

$$f = s_{\Delta} \circ H(O, k) = H(O, k) \circ s_{\Delta}.$$



En effet, pour tout point M , on a :

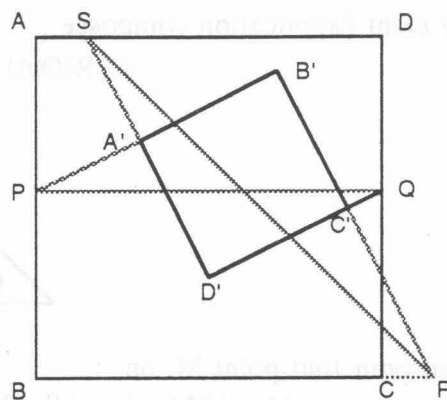
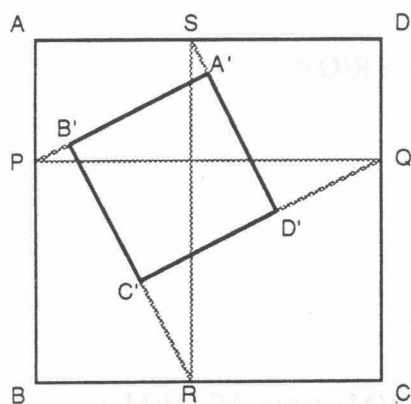
si $M_1 = H(M)$ alors $M' = S(M_1)$ et si $M_2 = S(M)$ alors $M' = H(M_2)$.

Si Δ' désigne la droite perpendiculaire en O à Δ , on a aussi :

$$f = S_{\Delta'} \circ H(O, -k) = H(O, -k) \circ S_{\Delta'}.$$

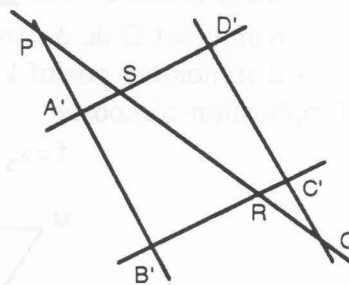
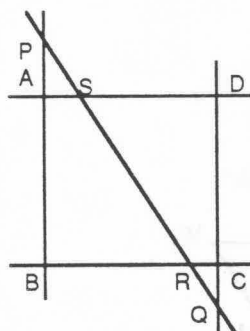
On parlera alors de "la similitude de centre O , de rapport k et d'axe Δ (ou Δ')". Il est clair, en effet, que, présentée ainsi, il s'agit d'une similitude indirecte.

Remarque : la démonstration de la proposition (34-6) fournit en prime un procédé de construction géométrique du centre de similitude : on définit les points R et S de façon analogue à P et Q. Le centre de la similitude est aussi bien sur la droite (RS) que sur la droite (PQ). Il est donc à l'intersection de celles-ci.



Il convient de s'assurer que ces droites sont effectivement sécantes. On sait déjà qu'elles contiennent le centre de la similitude, elles ont donc au moins un point commun. Pour montrer qu'elles ne sont pas confondues, on suppose qu'elles coïncident, nous aurions alors à la fois :

$$\frac{PA}{PB} = \frac{PS}{PR} \text{ et } \frac{PA'}{PB'} = \frac{PS}{PR}.$$

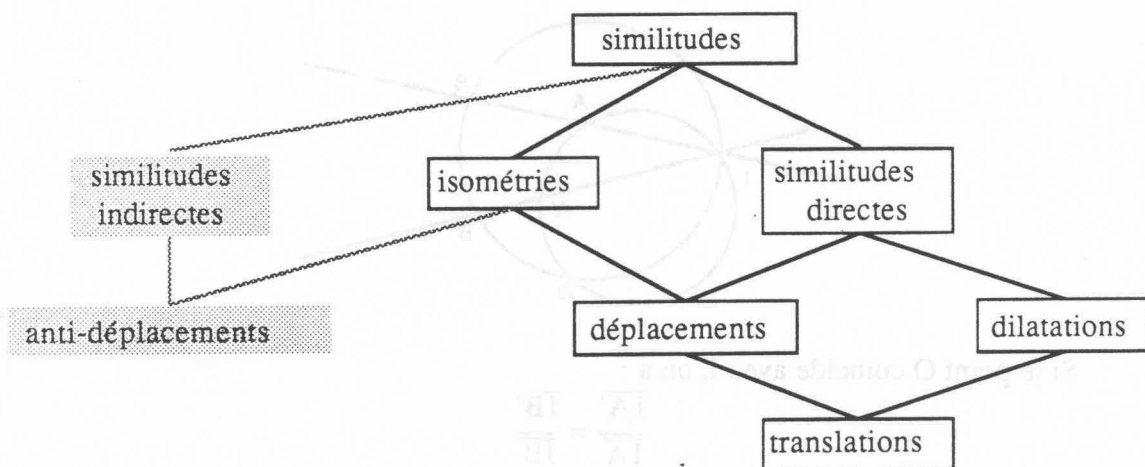
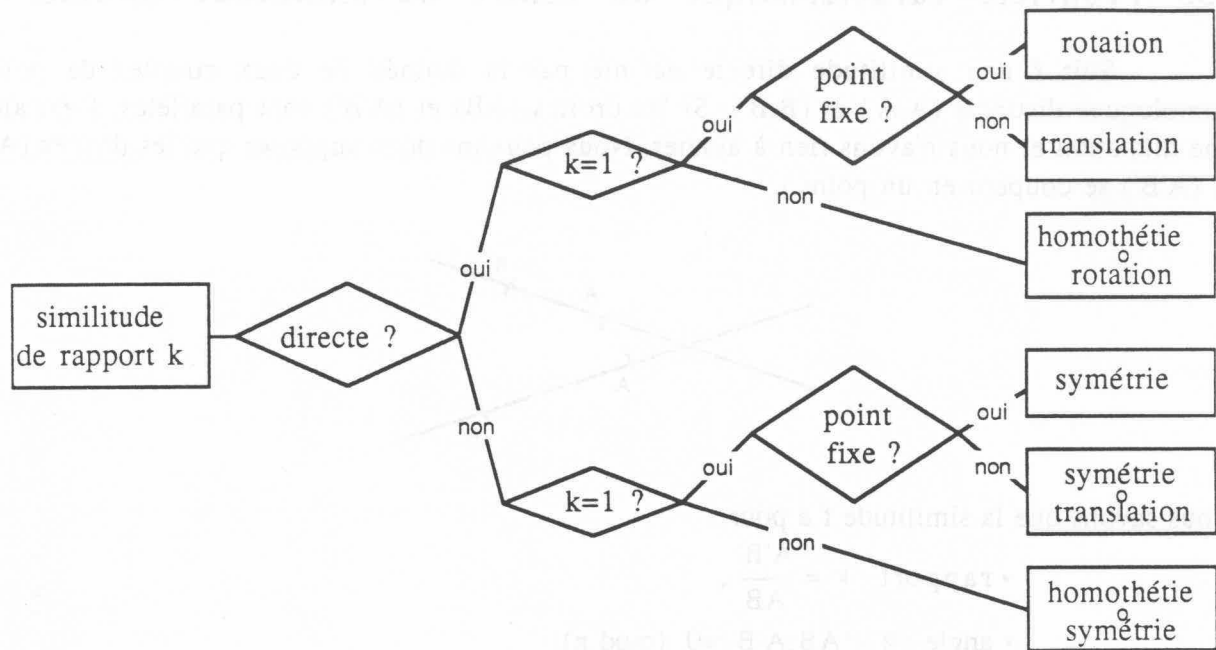


Le point P serait alors invariant par f. Ceci s'appliquant aussi bien aux points Q, R et S, la transformation considérée serait alors l'application identique.

Remarque : des adaptations mineures de la démonstration montrent que ce procédé s'applique aussi bien à la construction du centre d'une rotation. Le seul cas à exclure est celui du demi-tour, ce qui constitue une restriction bien modeste.

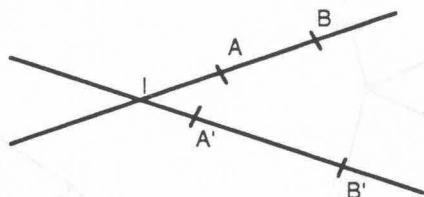
* Classification des similitudes planes.

Nous disposons maintenant d'une classification complète des similitudes. On peut la présenter sous la forme d'un organigramme qu'on trouvera à la page suivante. Il est suivi d'un schéma qui décrit la hiérarchie de tous les groupes de transformations du plan que nous avons rencontrés. Sont aussi mentionnés des ensembles de transformations indirectes, qui eux ne constituent pas des groupes.



§35 Propriété caractéristique du centre de similitude directe.

Soit f une similitude directe définie par la donnée de deux couples de points homologues distincts (A, A') et (B, B') . Si les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, f est alors une dilatation et nous n'avons rien à ajouter. Nous pouvons donc supposer que les droites (AB) et $(A'B')$ se coupent en un point I .



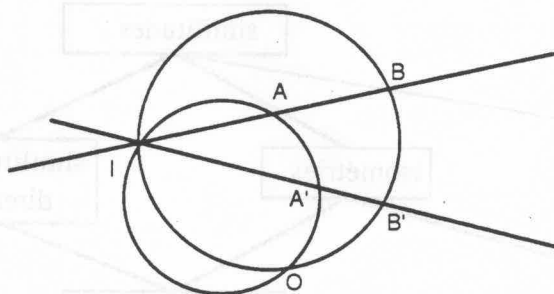
Nous savons que la similitude f a pour

- rapport : $k = \frac{A'B'}{AB}$,
- angle : $\theta = (AB, A'B') \neq 0 \pmod{\pi}$.

Nous savons aussi qu'elle admet un point invariant O , qui devra vérifier à la fois :

$$(OA, OA') = (OB, OB') = (IA, IA') = \theta \pmod{\pi}.$$

Le point O est donc commun aux cercles circonscrits aux triangles IAA' et IBB' .



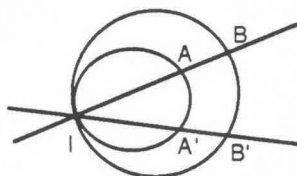
Si le point O coïncide avec I , on a :

$$\frac{\overline{IA'}}{\overline{IA}} = \frac{\overline{IB'}}{\overline{IB}}$$

et par suite :

$$\frac{\overline{IB}}{\overline{IA}} = \frac{\overline{IB'}}{\overline{IA'}}.$$

Les deux cercles se correspondent dans une homothétie de centre I , ils sont alors tangents en I .



Nous laissons à chacun le soin de passer en revue les cas particuliers où l'un des points considérés vient en I. Dans ces conditions, l'un ou l'autre des cercles sera tangent à l'une des droites (AB) ou (A'B'). On aura alors prouvé la proposition qui suit.

(35-1) Théorème : étant donnés deux couples de points (A,A') et (B,B'), tels que les droites (AB) et (A'B') soient sécantes en I. La similitude directe qui transforme A en A' et B en B', a pour centre le second point d'intersection des cercles (IAA') et (IBB').

Remarque : l'énoncé général s'applique aux cas particuliers, si l'on convient de considérer le point de contact d'un cercle avec une tangente comme un point double, ce qui se justifie parfaitement du point de vue algébrique.

Il nous reste à ajouter une dernière propriété. Elle est de première importance sur le plan pratique, car elle fournit la clef pour résoudre de nombreux problèmes.

(35-2) Proposition : étant donnés quatre points A, A', B et B' qui ne sont pas les sommets d'un parallélogramme, les deux similitudes directes, qui transforment :

- la première A en A' et B en B',
- la seconde A en B et A' en B',

ont le même centre.

Démonstration : la similitude directe qui transforme A en A' et B en B' n'est pas une translation. Elle admet donc un centre. Soit O ce point, il vérifie :

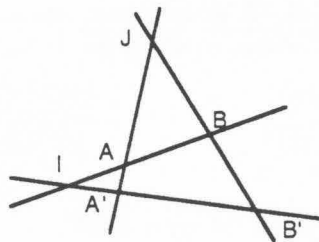
$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} \text{ et } (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}) \pmod{2\pi}.$$

Ces relations sont équivalentes à

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OB'}{OA'} \text{ et } (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}) \pmod{2\pi}.$$

Ce qui prouve que le point O est aussi le centre de la similitude directe qui transforme A en B et A' en B'.

Application : cette propriété donne une démonstration directe d'une propriété peu banale qui s'obtient aussi à partir de la droite de Simson. On considère un quadrilatère complet, à savoir : quatre droites deux à deux sécantes, dont les sommets sont notés suivant le schéma ci-dessous :



Le centre commun des deux similitudes directes qui transforment :

- l'une : A en A' et B en B' ,
- l'autre : A en B et B' en A',

est situé sur les cercles :

IAA', IBB', JAB et JA'B'.

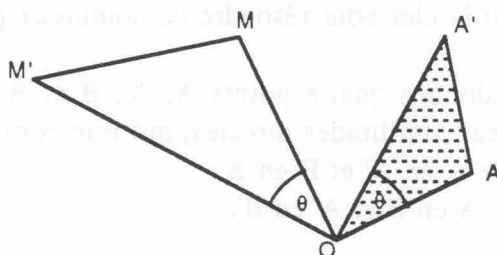
Ainsi, on a prouvé l'assertion qui suit.

Les six sommets d'un quadrilatère complet définissent quatre triangles dont les cercles circonscrits passent par un même point.

Nous concluons ce chapitre par une remarque qui explicite une conséquence aussi simple que méconnue (du moins à l'heure présente) de la proposition (35-2).

Il est clair que si O est un point fixe, et si le triangle OMM' reste directement semblable à lui-même ou, ce qui revient au même, s'il reste directement semblable à un triangle donné OAA' , l'application : $M \rightsquigarrow M'$ est alors la similitude

- de rapport $k = \frac{OA'}{OA}$,
- d'angle $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) \pmod{2\pi}$.



La réciproque se déduit immédiatement de la proposition (35-2). En effet, si l'on choisit un point arbitraire A , la similitude de centre O qui transforme A en M transforme aussi A' en M' . Ceci entraîne en, particulier, que les angles

$$(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MM'}) \text{ et } (\overrightarrow{M'O}, \overrightarrow{M'M})$$

sont indépendants de M car ils restent respectivement égaux à

$$(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AA'}) \text{ et } (\overrightarrow{A'O}, \overrightarrow{A'A}).$$

[On retrouve tout ceci très facilement en utilisant les nombres complexes, mais la simplicité apparente des démonstrations masque l'essentiel]



Chapitre IX : les transformations affines.

§36 Définition et propriétés caractéristiques.

Définition : étant donnés deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ et une application

$$f: \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}'$$

$$M \rightsquigarrow M'$$

on dit que f est une transformation affine, si c'est une bijection qui conserve l'alignement des points.

On entend par là :

$$[\forall M \in \mathcal{P} \quad \forall N \in \mathcal{P} \quad \forall P \in \mathcal{P}] [M, N \text{ et } P \text{ sont alignés} \Rightarrow M', N' \text{ et } P' \text{ sont alignés}].$$

Convention : dans toutes les situations où l'on ne considère qu'une seule application à la fois, il est commode et sans inconvénient de convenir que M' désigne systématiquement l'image du point M .

Exemples.

1) toutes les transformations du plan que nous avons rencontrées, sont des transformations affines.

2) Un moyen simple de définir une transformation affine de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{P}'$, est de choisir arbitrairement un repère (O, I, J) de $\mathcal{P}$ et un repère (O', I', J') de $\mathcal{P}'$. La relation suivante :

$$f: \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}'$$

$$M \rightsquigarrow M'$$

telle que les points M et M' aient les mêmes coordonnées dans leurs repères respectifs est, à l'évidence, une application bijective. De plus, c'est une transformation affine. En effet, dans un plan rapporté à un repère, toute droite est définie par une équation cartésienne de la forme

$$ax + by = c.$$

Il est donc clair que l'application f , transforme toute droite D de $\mathcal{P}$ en la droite D' de $\mathcal{P}'$ qui, dans le repère (O', I', J') , a la même équation que D dans le repère (O, I, J) .

(36-1) Proposition : la composition de deux transformations affines donne une transformation affine.

Cette assertion est une conséquence immédiate de la définition.

(36-2) Proposition : toute transformation affine respecte l'incidence, c'est-à-dire que :

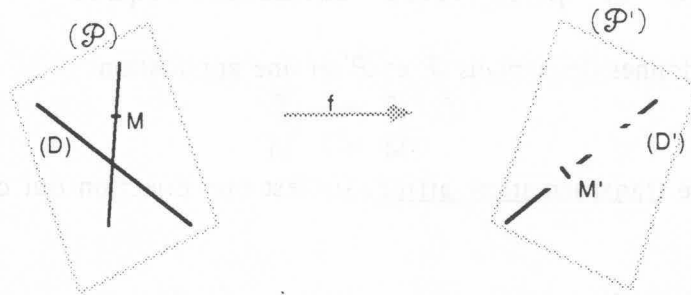
- 1) l'image de toute droite est une droite,
- 2) les images de deux droites parallèles sont des droites parallèles.

Démonstration : on considère une transformation affine f de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{P}'$.

1) Montrons tout d'abord que l'image de toute droite de $\mathcal{P}$ est une droite. On considère une droite quelconque D de $\mathcal{P}$. Comme f est injective, $f(D)$ ne peut se réduire à un point et comme f respecte l'alignement, il existe une droite D' de $\mathcal{P}'$ telle que :

$$f(D) \subseteq D'.$$

Si cette inclusion était stricte, comme f est surjective, il existerait un point M non situé sur D dont l'image par f serait un point M' de D' .



Dans ces conditions, toute droite passant par M aurait son image contenue dans D' . Ainsi tous les points de P , non situés sur la droite parallèle à D qui passe par M , auraient leur image sur D' . L'image du plan $\mathcal{P}$ serait alors contenue dans la réunion de deux droites au plus et f ne serait pas surjective. On a donc toujours

$$f(D) = D'.$$

2) Montrons maintenant que f respecte le parallélisme. Considérons deux droites parallèles quelconques D_1, D_2 et leurs images D'_1, D'_2 . Supposons que D'_1 et D'_2 se coupent en un point A' . Le point $A = f^{-1}(A')$ serait alors à la fois sur D_1 et D_2 et ces droites seraient sécantes. Les droites D'_1 et D'_2 sont donc parallèles.

L'assertion qui suit découle immédiatement du point 1) de la proposition précédente.

(36-3) Corollaire : l'application inverse d'une transformation affine est une transformation affine.

* Action sur les droites des transformations affines.

Démontrons, maintenant, une propriété qui, a priori, n'a aucun caractère géométrique, pourtant elle joue un rôle essentiel dans la suite.

(36-4) Lemme : si φ est une application de $\mathbb{R}$ dans lui-même telle que :

$$(1) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y),$$

$$(2) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y),$$

$$(3) \quad \varphi(1) = 1,$$

alors

$$f = \text{Id}_{\mathbb{R}}.$$

Démonstration : 1) de (1) on déduit immédiatement que :

$$\varphi(0) = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(-x) = -\varphi(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi(nx) = n\varphi(x),$$

et par suite

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \varphi(nx) = n\varphi(x).$$

2) On peut alors montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall r \in \mathbb{Q} \quad \varphi(rx) = r\varphi(x).$$

En effet, si $r = p/q$ où $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$q \cdot \varphi(p/q) = qp\varphi(1/q) = pq \cdot \varphi(1/q) = p \cdot \varphi(q \times 1/q) = p \cdot \varphi(1) = p.$$

Ce qui entraîne :

$$q \cdot \varphi(p/q) = p$$

et par suite

$$\varphi(r) = \varphi(p/q) = p/q = r.$$

3) Montrons que si $x > 0$ alors $\varphi(x) > 0$. Comme x est non nul, on a :

$$1 = \varphi(1) = \varphi(x \cdot 1/x) = \varphi(x) \cdot \varphi(1/x)$$

$\varphi(x)$ est donc non nul. Si x est positif, x admet une racine carrée et l'on a :

$$\varphi(x) = \varphi(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}) = \varphi(\sqrt{x}) \cdot \varphi(\sqrt{x}) = [\varphi(\sqrt{x})]^2 > 0.$$

4) Il apparaît alors que f est une fonction croissante. En effet, si $y > x$ alors $y - x > 0$ et l'on a :

$$\varphi(y) - \varphi(x) = \varphi(y - x) > 0.$$

5) Il reste à montrer que si x est un réel quelconque, alors $\varphi(x) = x$. On sait que pour tout réel x , il existe deux suites de nombres rationnels

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad \text{et} \quad b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

telles que :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2 \quad a_i < x < b_j \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0.$$

On a toujours :

$$a_i = \varphi(a_i) < \varphi(x) < \varphi(b_j) = b_j.$$

Les suites (a_n) et (b_n) sont donc convergentes, $\varphi(x)$ est leur limite commune. Ce qui entraîne que $\varphi(x) = x$. Ceci est vrai pour tout x réel. On a donc prouvé que :

$$\varphi = \text{Id}_{\mathbb{R}}.$$

(36-5) Lemme : soit f une transformation affine f de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{P}'$, on considère une droite quelconque D de $\mathcal{P}$, soit D' son image par f . On choisit un repère arbitraire (O, I) de D . Alors pour tout point M de D on a :

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \overrightarrow{OI} \Rightarrow \overrightarrow{O'M'} = x \cdot \overrightarrow{O'I'}.$$

Démonstration : la restriction de f à D et D' induit l'application suivante:

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \varphi(x) = x'$$

telle que :

$$\text{si } \overrightarrow{OM} = x \cdot \overrightarrow{OI} \text{ alors } \overrightarrow{O'M'} = x' \cdot \overrightarrow{O'I'}.$$

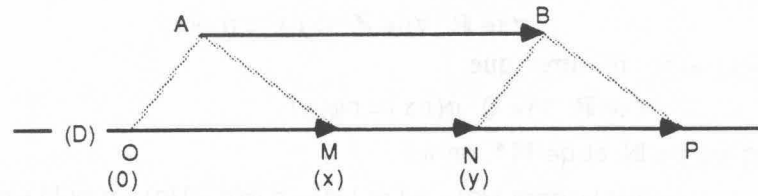
Nous allons vérifier que φ satisfait aux hypothèses du lemme précédent. La définition entraîne immédiatement que :

$$\varphi(1) = 1.$$

On considère deux nombres réels quelconques x et y , soit M, N les points tels que :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} \text{ et } \overrightarrow{ON} = y\overrightarrow{OI}$$

a) On montre que $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$. On choisit un point arbitraire A non situé sur D et l'on considère les points B et P tels que $NOAB$ et $MABP$ soient des parallélogrammes.



Alors, on a :

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MP} \\ \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = (x+y)\overrightarrow{OI}$$

La construction ci-dessus, effectuée dans le plan $\mathcal{P}'$ à partir des images des points O, M, N et A , conduit au point P' tel que :

$$\overrightarrow{O'P'} = \overrightarrow{O'M'} + \overrightarrow{O'N'} = \varphi(x)\overrightarrow{O'I'} + \varphi(y)\overrightarrow{O'I'} = [\varphi(x) + \varphi(y)]\overrightarrow{O'I'}$$

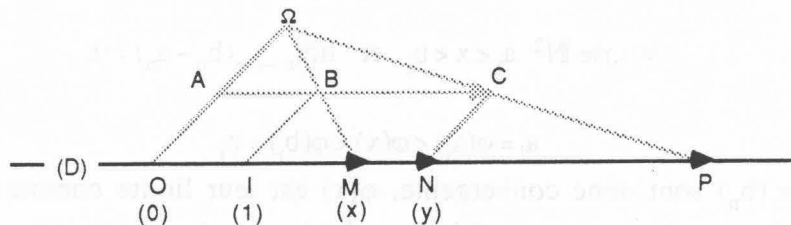
De plus, comme f respecte le parallélisme, P' est l'image de P par f . On a donc aussi :

$$\overrightarrow{O'P'} = \varphi(x+y)\overrightarrow{O'I'}$$

Ce qui entraîne bien que :

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

b) On montre que $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$. Comme la démonstration est sans objet si $x = 1$, on peut supposer que le point M est distinct de I . On choisit un point arbitraire A non situé sur D et l'on définit les points B et C tels que $IOAB$ et $NOAC$ soient des parallélogrammes.



Comme on a supposé que M est distinct de I , les droites (OA) et (MB) sont sécantes. Soit Ω leur point d'intersection, P le point d'intersection de (ΩC) avec D ; l'homothétie de centre Ω qui transforme A en O , transforme aussi B en M et C en P . Comme on a par définition :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI}$$

et par construction :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OI},$$

il vient :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} = x\overrightarrow{AB}.$$

L'homothétie considérée a donc pour rapport x et par suite

$$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{ON} = x(y\overrightarrow{OI}) = (xy)\overrightarrow{OI}.$$

La construction ci-dessus, effectuée dans le plan $\mathcal{P}'$ à partir des images de O, M, N et A , conduit au point P' tel que :

$$\overrightarrow{O'P'} = [\varphi(x) \cdot \varphi(y)]\overrightarrow{O'I'}.$$

De plus, comme f respecte l'incidence, P' est l'image de P par f . On a donc aussi :

$$\overrightarrow{O'P'} = \varphi(xy)\overrightarrow{O'I'}.$$

Il s'ensuit que :

$$\varphi(xy) = \varphi(x) \cdot \varphi(y).$$

Le lemme précédent nous assure alors que φ est l'application identique de $\mathbb{R}$. Ce qui achève la démonstration.

On en déduit immédiatement le théorème qui suit.

(36-6) **Théorème** : toute transformation affine conserve les rapports de distances entre points alignés.

Démonstration : soit f une transformation affine de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{P}'$, on considère trois points A, B et C d'une même droite D de $\mathcal{P}$, soit A', B' et C' leurs images par f . Si A et B coïncident, alors ces deux points sont confondus, de même que leurs images et la démonstration est sans objet. Dans le cas contraire, (A, B) est un repère de D et il existe un réel x tel que :

$$\overrightarrow{AC} = x \cdot \overrightarrow{AB}.$$

le lemme précédent montre que :

$$\overrightarrow{A'C'} = x \cdot \overrightarrow{A'B'}.$$

Remarque : ce théorème se traduit concrètement par l'existence, pour chaque droite D de $\mathcal{P}$, d'un nombre réel positif k_D tel que, pour tous points M et N de D , on ait :

$$M'N' = k_D \cdot MN.$$

* Action d'une transformation affine sur les vecteurs.

(36-7) **Proposition** : on considère deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. Pour toute transformation affine f de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{P}'$, la relation suivante :

$$\overrightarrow{MN} \leadsto \overrightarrow{M'N'}$$

définit une application bijective

$$\vec{f}: V \longrightarrow V'$$

de l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{P}$ sur l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{P}'$.

Cette application vérifie :

$$(1) \quad \forall \vec{u} \in V \quad \forall \vec{v} \in V \quad f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}),$$

$$(2) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{u} \in V \quad f(\lambda \cdot \vec{u}) = \lambda \cdot f(\vec{u}).$$

En d'autres termes, $\vec{f}$ est une application linéaire bijective, c'est-à-dire un isomorphisme de V sur V' .

Démonstration : commençons par montrer que la relation de l'énoncé définit bien une application. On considère quatre points M, N, P, Q de $\mathcal{P}$ tels que :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}.$$

Si les points M et N coïncident la propriété est évidente. Si les points considérés ne sont pas alignés, alors $MNQP$ est un parallélogramme au sens strict et la proposition (36-2) montre que $M'N'Q'P'$ est aussi un parallélogramme. On a donc bien :

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{P'Q'}.$$

Si ces points sont alignés, on se ramène au cas précédent en considérant deux points R et S non situés sur la droite (MN) et tels que :

$$\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{MN}.$$

On a alors :

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{R'S'} = \overrightarrow{P'Q'}.$$

Il est ainsi prouvé que $\overrightarrow{f}$ est bien une application.

Pour montrer qu'elle est bijective, il suffit de considérer l'application $\overrightarrow{g}$ associée à f^{-1} . On vérifie alors, de façon immédiate, que :

$$\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f} = \text{Id}_V \text{ et } \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g} = \text{Id}_{V'}.$$

Pour prouver la propriété (1), il suffit de considérer quatre points M, N, P, Q tels que :

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MQ},$$

c'est-à-dire tels que MNQP soit un parallélogramme. Si ces points ne sont pas alignés, la proposition (36-2) montre que M'N'Q'P' est un parallélogramme et l'on a bien :

$$\overrightarrow{M'N'} + \overrightarrow{M'P'} = \overrightarrow{M'Q'}.$$

Dans le cas contraire, on procède comme au point a) de la démonstration (36-5).

Quant à la propriété (2), c'est une conséquence immédiate de la définition de cette application et du lemme (36-5).

(36-8) Théorème : une bijection d'un plan sur un autre est une transformation affine si, et seulement si, elle conserve le barycentre.

Démonstration : on considère une bijection f d'un plan $\mathcal{P}$ sur un plan $\mathcal{P}'$. Si f conserve le barycentre, elle conserve tout barycentre de deux points et, de ce fait, respecte l'alignement de trois points quelconques. C'est donc une transformation affine.

Réciproquement, considérons le barycentre G de n points quelconques $A_1, \dots, A_n$ de $\mathcal{P}$ affectés des coefficients $a_1, \dots, a_n$. Soit O un point arbitraire de $\mathcal{P}$, on a par définition :

$$(a_1 + \dots + a_n) \overrightarrow{OG} = a_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + a_n \overrightarrow{OA_n}.$$

Si f est une transformation affine, le théorème précédent montre que les images des points considérés vérifient la relation :

$$(a_1 + \dots + a_n) \overrightarrow{O'G'} = a_1 \overrightarrow{O'A'_1} + \dots + a_n \overrightarrow{O'A'_n}.$$

qui montre que l'image de G par f est le barycentre des points $A'_1, \dots, A'_n$ affectés des coefficients $a_1, \dots, a_n$.

* Le théorème fondamental de la géométrie affine.

(36-9) Théorème : étant donnés

- deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$,
- trois points A, B et C de $\mathcal{P}$, non alignés,
- trois points A', B' et C' de $\mathcal{P}'$, non alignés,

il existe une unique transformation affine de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{P}'$ telle que A, B et C aient pour images respectives A', B' et C'.

Démonstration : les triplets (A,B,C) et (A',B',C') sont des repères de leurs plans respectifs. Tout point M de $\mathcal{P}$ (resp. M' de $\mathcal{P}'$) est alors bien défini par ses coordonnées (x,y) (resp. (x',y')). Si f est une transformation affine de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{P}'$, alors pour tout point M de $\mathcal{P}$, d'après le théorème (36-6), on a :

$$\overrightarrow{AM} = x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{A'M'} = x \cdot \overrightarrow{A'B'} + y \cdot \overrightarrow{A'C'}.$$

Ce qui détermine entièrement l'application f . Or, nous avons montré (cf. exemple 2) que l'application ainsi définie est effectivement une transformation affine.

L'assertion avancée est alors démontrée.

§37 Action du groupe affine sur le plan.

On désigne par $\mathcal{P}$ un plan arbitraire qu'on appellera la plupart du temps "le plan". Une application affine de $\mathcal{P}$ sur lui même sera appelée une transformation affine de $\mathcal{P}$ ou encore une "transformation affine du plan".

Comme il est évident que l'application identique de $\mathcal{P}$ est une transformation affine, il découle de (36-1) et de (36-3) que les transformations affines de $\mathcal{P}$ forment un groupe qu'on appelle le groupe affine de $\mathcal{P}$ et qu'on note $GA(\mathcal{P})$. On peut encore le désigner simplement par GA , lorsque la précision de $\mathcal{P}$ ne s'impose pas.

(37-1) Proposition : toute transformation affine du plan qui laisse invariants trois points non alignés, est l'application identique.

Démonstration : il s'agit d'une application immédiate du théorème fondamental (36-9). L'application identique est une transformation affine, elle transforme évidemment trois points, donnés non alignés en eux-mêmes. C'est donc l'unique transformation affine du plan qui vérifie cette condition. •

* Transformations affines laissant invariants deux points distincts.

(37-2) Proposition : toute transformation affine qui laisse invariants deux points distincts, laisse invariant tout point de la droite qui les joint.

Démonstration : cette assertion n'est qu'un cas particulier du lemme (36-5). •

Nous nous proposons d'en savoir plus sur les transformations de ce type. Pour ce faire, nous considérons une droite D et deux points A et A' non situés sur D . Nous avons montré qu'il existe une unique transformation affine f du plan qui laisse invariants les points de D et transforme A en A' . Si les points A et A' coïncident f est l'application identique, écartons ce cas. On peut donc considérer la droite (AA') , appelons la Δ . Il convient d'envisager deux cas suivant que les droites D et Δ sont, ou non, sécantes.

1) Si Δ coupe D , on désigne par a leur point d'intersection. Comme le point a est sur D , il est invariant par f , la droite Δ contient les deux points a et A , ainsi que leurs images a et A' . C'est donc une droite globalement invariante. Le lemme (36-5) décrit alors entièrement la restriction de f à D . Il montre que tout point M de cette droite est transformé en un point M' tel que :

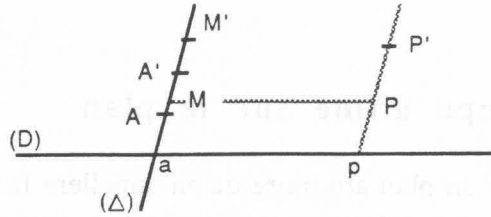
$$(\overrightarrow{aM'}) \cdot \overrightarrow{aA'} = (\overrightarrow{aM}) \cdot \overrightarrow{aA}.$$

Ainsi le rapport

$$\frac{\overrightarrow{aM'}}{\overrightarrow{aM}} = k$$

est indépendant de M .

Considérons, maintenant un point quelconque P du plan, soit p sa projection sur D parallèlement à Δ et soit M sa projection sur Δ parallèlement à D .



On a :

$$\overrightarrow{pP'} = \overrightarrow{aM}.$$

Le théorème (36-7) montre que :

$$\overrightarrow{pP'} = \overrightarrow{aM'}.$$

Or, nous venons de démontrer que :

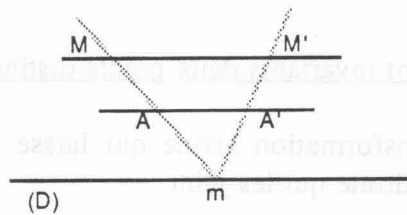
$$\overrightarrow{aM'} = k \cdot \overrightarrow{aM}.$$

Il s'ensuit que :

$$\overrightarrow{pP'} = k \cdot \overrightarrow{pP}.$$

En f, on reconnaît l'affinité d'axe D, de rapport k, parallèlement à Δ.

1) Si la droite Δ est parallèle à D, montrons que toute droite parallèle à D est globalement invariante par f. L'image de Δ est la droite parallèle à D qui passe par A', c'est donc Δ elle-même. Considérons un point M qui n'appartient ni à D, ni à Δ. La droite (AM) coupe donc D en un point m.



Ce point étant invariant, la droite (mA) est transformée en la droite (mA'). D'autre part, on doit avoir (cf. 36-6) :

$$\frac{\overrightarrow{mM'}}{\overrightarrow{mA'}} = \frac{\overrightarrow{mM}}{\overrightarrow{mA}}.$$

Ce qui prouve que (MM') est parallèle à (AA'). Or l'image de (MM') est la parallèle à D qui passe par M', cette droite est donc globalement invariante. En conséquence, toute droite parallèle à D est globalement invariante.

Remarque : ce fait, on peut aussi le mettre en évidence en utilisant les théorèmes déjà démontrés. En effet, pour tout vecteur $\overrightarrow{MN}$ de la direction de D, on a :

$$\overrightarrow{M'N'} = f(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{MN}$$

et par suite :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}.$$

Définition : étant donné une droite D, on appelle **transvection d'axe D** toute transformation affine qui laisse invariants tous des points de D et laisse globalement invariante toute droite parallèle à D.

On peut alors résumer les résultats acquis dans l'énoncé qui suit.

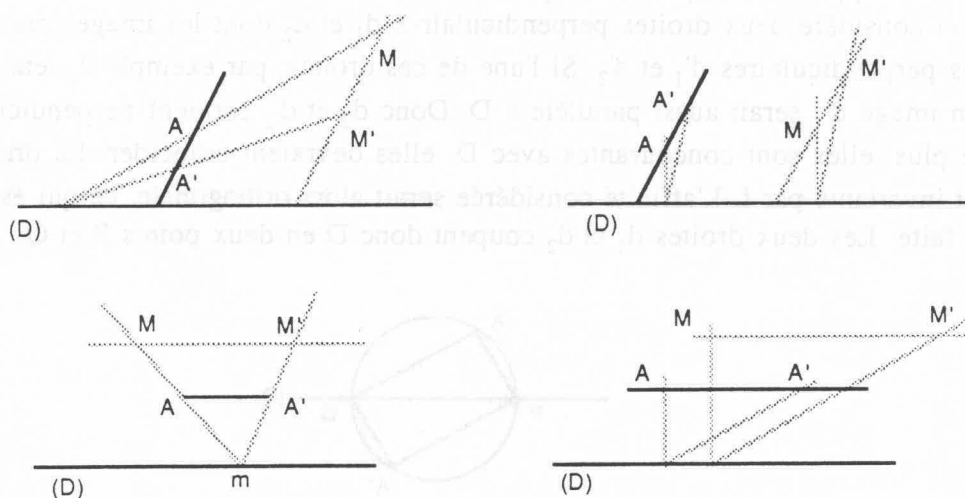
(37-3) **Théorème** : toute transformation affine du plan qui laisse invariants deux points distincts d'une droite donnée D , en laisse tous les points invariants. Elle admet de plus une direction de droites globalement invariantes.

Une telle transformation est une affinité ou une transvection d'axe D , suivant que les droites globalement invariantes sont ou non, sécantes à D .

Remarque : il n'est pas sans intérêt de reprendre les considérations qui précèdent en termes de construction géométrique de l'image d'un point quelconque par une transformation affine définie par la donnée :

- d'une droite D invariante point par point,
- de l'image A' d'un point arbitraire A non situé sur D .

Nous laissons, à chacun, le soin d'exposer le détail des opérations à effectuer pour parvenir à cette fin.



* Action sur les configurations.

(37-4) Toute transformation affine d'un plan se décompose, d'une infinité de façons, en produit d'une similitude et d'une affinité.

Démonstration : on considère une transformation affine f d'un plan $\mathcal{P}$, on choisit points arbitraires A et B distincts de $\mathcal{P}$, soit A' et B' leurs images par f . Soit s l'une des deux similitudes (directe ou indirecte) qui transforment A en A' et B en B' . L'application $g = f \circ s^{-1}$ est le composé de deux transformations affines, c'est donc une transformation affine. Elle laisse invariants les deux points distincts A' et B' , c'est donc une affinité ou une transvection de $\mathcal{P}'$.

On peut aussi composer s avec la symétrie orthogonale σ d'axe $(A'B')$. On a alors :

$$f = g \circ s = (g \circ \sigma) \circ (\sigma \circ s),$$

où g et $g \circ \sigma$ sont soit :

- deux affinités de même axe et de rapports opposés
- une transvection et une symétrie (oblique) de même axe.

N.B. On a défini les transformations affines par une condition apparemment très faible :
 "la conservation de l'alignement des points".

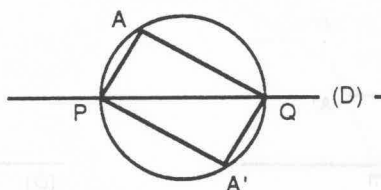
A priori, on aurait donc pu penser que leur action sur les configurations présente une certaine diversité. Or il n'en est rien.

Pour étayer cette affirmation, convenons qu'il n'est pas déraisonnable de considérer une configuration comme étant une classe d'équivalence de figures semblables. En effet, on parle couramment, par exemple : "du cercle", "du triangle équilatéral", ... et l'on peut admettre qu'il n'y a guère de différence entre "le triangle égyptien" qui, sur le cahier de l'élève, a pour côtés 3, 4 et 5 cm, tandis qu'au tableau "noir", ces mêmes côtés mesurent 30, 40 et 50 cm ... De ce point de vue, l'action d'une transformation affine sur une configuration se réduit à celle d'une affinité. Bien mieux, si l'on tient compte de ce qui suit, cette action est, en fait, celle d'une affinité orthogonale.

(37-5) Lemme : pour toute affinité il existe deux directions orthogonales dont les images sont aussi orthogonales.

Démonstration : considérons une affinité f d'axe D . Si f est une affinité orthogonale, la propriété est évidente. On suppose donc qu'on n'est pas dans ce cas.

Analyse : on considère deux droites perpendiculaires d_1 et d_2 dont les images par f sont aussi deux droites perpendiculaires d'_1 et d'_2 . Si l'une de ces droites, par exemple d_1 , était parallèle à D , alors son image d'_1 serait aussi parallèle à D . Donc d_2 et d'_2 seraient perpendiculaires à D . Comme, de plus, elles sont concourantes avec D , elles devraient coïncider. La droite d_2 serait globalement invariante par f . L'affinité considérée serait alors orthogonale, ce qui est contraire à l'hypothèse faite. Les deux droites d_1 et d_2 coupent donc D en deux points P et Q .

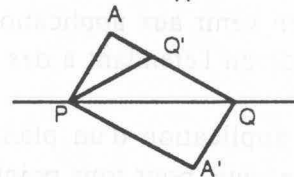
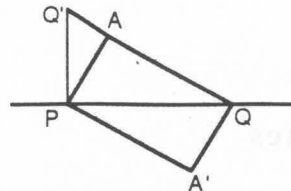
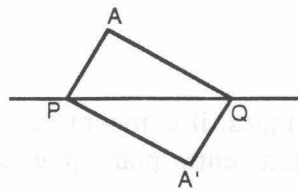


Soit A le point d'intersection de d_1 et d_2 . Son image A' par f est le point d'intersection de d'_1 et d'_2 . Comme on a supposé que les angles $\widehat{PAQ}$ et $\widehat{P'A'Q}$ sont droits, les points A et A' sont le même cercle de diamètre PQ . Le centre de celui-ci est à l'intersection de D et de la médiatrice de (AA') .

Synthèse : on considère un point arbitraire A non situé sur D et son image A' par f . Comme f n'est pas une affinité orthogonale, la droite (AA') n'est pas perpendiculaire à D . La médiatrice de AA' coupe donc D en un point O . Le cercle de centre O qui passe par A , passe aussi par A' et coupe D en deux points P et Q . Les droites (AP) et (AQ) sont évidemment perpendiculaires, de même que $(A'P)$ et $(A'Q)$. Comme, enfin, il est clair que f transforme (AP) en $(A'P)$ et (AQ) en $(A'Q)$, la démonstration est acquise. •

(37-6) Proposition : toute affinité du plan est le composé d'une similitude directe (resp. indirecte) et d'une affinité orthogonale.

Démonstration : soit f une affinité du plan, si f n'est pas une affinité orthogonale, on peut considérer les quatre points A, A', P, Q définis au cours de la démonstration précédente. Soit s la similitude directe (resp. indirecte) de centre P qui transforme A' en A , soit Q' l'image de Q par s .



Comme $(A'P)$ est perpendiculaire à $(A'Q)$, la similitude s transforme la droite $(A'Q)$ en la perpendiculaire à (PA) qui passe par A , c'est-à-dire (AQ) . Les points A , Q et Q' sont donc alignés. En conséquence, $g = s \circ f$ est une transformation affine qui laisse invariants les points A et P , transforme Q en Q' , c'est donc une affinité d'axe (AP) parallèlement à la droite (QQ') qui est perpendiculaire à (AP) . Comme on a évidemment $f = s^{-1} \circ g$, l'assertion avancée est alors prouvée. •

$$\frac{MN}{PQ} = \frac{M'N'}{P'Q'}$$

$$\frac{MN}{PQ} = \frac{M'N'}{P'Q'}$$

$$\frac{MN}{PQ} = \frac{M'N'}{P'Q'}$$

$$\frac{AB}{A'B'} = k$$

$$\frac{MN}{A'B'} = \frac{M'N'}{A'B'}$$

$$\frac{MN}{AB} = \frac{M'N'}{A'B'} = k$$

§38 Similitudes.

Avant d'en venir aux applications graphiques, il convient de généraliser quelque peu la notion de similitude en l'étendant à des applications entre plans pouvant être distincts.

Définition : une application d'un plan $\mathcal{P}$ dans un plan $\mathcal{P}'$ est une similitude, s'il existe un nombre positif k tel que, pour tous points M et N de $\mathcal{P}$ on ait :

$$M'N' = k.MN.$$

on appelle naturellement k le rapport de la similitude.

(37-1) Proposition : une application d'un plan $\mathcal{P}$ dans un plan $\mathcal{P}'$ est une similitude si, et seulement si, elle conserve tous les rapports de distances entre points.

Ceci s'écrit encore : pour tous points M, N, P, Q de $\mathcal{P}$ on a

$$\frac{MN}{PQ} = \frac{M'N'}{P'Q'}$$

(où P et Q sont implicitement supposés distincts et M', N', P', Q' sont les images de M, N, P, Q)

Démonstration : si f est une similitude, alors pour tous points M, N, P, Q on a :

$$M'N' = k.MN \text{ et } P'Q' = k.PQ.$$

Si M et N sont distincts de même que P et Q , on a :

$$\frac{M'N'}{MN} = k = \frac{P'Q'}{PQ}.$$

On a donc toujours :

$$\frac{M'N'}{P'Q'} = \frac{MN}{PQ},$$

avec une seule réserve : que P et Q soient distincts.

Réciproquement, si cette condition est vérifiée, il suffit de choisir arbitrairement deux points distincts A et B de $\mathcal{P}$ et de poser :

$$\frac{A'B'}{AB} = k.$$

Alors, pour tous points M et N de $\mathcal{P}$, on a :

$$\frac{M'N'}{A'B'} = \frac{MN}{AB}$$

et par suite :

$$\frac{M'N'}{MN} = \frac{A'B'}{AB} = k.$$

(39-2) Proposition : toute similitude conserve les angles géométriques.

Démonstration : on considère une similitude f de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{P}'$. Etant donné un triangle quelconque ABC de $\mathcal{P}$ et son image $A'B'C'$ par f , on note a, b, c les longueurs des côtés de ABC et a', b', c' les longueurs des côtés correspondant de $A'B'C'$. La loi des cosinus montre que :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{k^2(b^2 + c^2 - a^2)}{2k^2bc} = \frac{b'^2 + c'^2 - a'^2}{2b'c'} = \cos A'.$$

On a donc $\hat{A} = \hat{A}'$.

! Dans l'espace, il n'est pas plus possible de comparer les orientations de deux plans non parallèles que de comparer les orientations de deux droites non parallèles du plan. Il n'est donc pas question de chercher à en dire plus sur la conservation des angles par une similitude entre plans dans l'espace.

(39-3) Toute similitude est une transformation affine.

Démonstration : la proposition précédente s'applique, en particulier aux angles plats et nuls, la similitude conserve donc l'alignement des points.

Remarque : il n'est pas sans intérêt de se rendre compte que l'assertion qui précède est, en fait, la conséquence directe des principes premiers de la géométrie. C'est pourquoi, nous en proposons, aussi, la démonstration qui suit.

On considère une similitude f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}'$, soit k son rapport. Pour tous points A, B, C de $\mathcal{P}$ et leurs transformés A', B', C' par f , on a :

$$A'C' = k.AC, \quad A'B' = k.AB, \quad B'C' = k.BC,$$

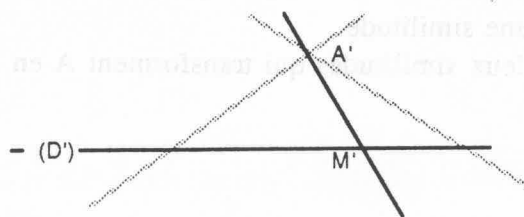
Puisque k est positif, on a l'équivalence suivante :

$$AC = AB + BC \text{ ou } AC = |AB - BC| \Leftrightarrow A'C' = A'B' + B'C' \text{ ou } A'C' = |A'B' - B'C'|.$$

Il s'ensuit que A, B et C sont trois points alignés de $\mathcal{P}$ si, et seulement si, A', B' et C' sont trois points alignés de $\mathcal{P}'$. Il apparaît alors que :

- 1) l'image par f de toute droite de $\mathcal{P}$ est une droite de $\mathcal{P}'$,
- 2) l'image par f de $\mathcal{P}$ ne se réduit pas à une droite.

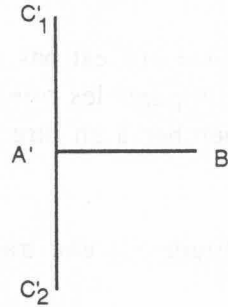
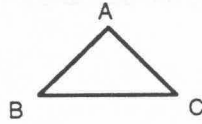
On peut donc considérer une droite D' contenue dans $f(\mathcal{P})$ et un point A' de $f(\mathcal{P})$ tel que A' ne soit pas sur D' .



Tout point M' de D' est l'image d'un point M de D , la droite $(A'M')$ est l'image de la droite (AM) de $\mathcal{P}$, elle est donc contenue dans $f(\mathcal{P})$. Or, $\mathcal{P}'$ est la réunion de toutes ces droites. Il s'ensuit que $f(\mathcal{P}) = \mathcal{P}'$ et comme il découle immédiatement de la définition que f est injective, il apparaît alors que f est bijective. Nous savons déjà qu'elle conserve l'alignement. C'est donc bien une transformation affine.

(39-3) Théorème : étant donnés deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, deux points distincts A et B de $\mathcal{P}$ et deux points distincts A' et B' de $\mathcal{P}'$; il existe deux similitudes de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{P}'$ qui transforment A en A' et B en B' .

Démonstration : on considère un point C de $\mathcal{P}$ tel que le triangle ABC soit, par exemple, rectangle et isocèle en A ; si f est une similitude de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{P}'$, elle transforme nécessairement ABC en un triangle $A'B'C'$ rectangle et isocèle en A' . Il existe deux points C'_1 et C'_2 , symétriques par rapport à $(A'B')$ qui remplissent cette condition.



D'après le théorème fondamental, il existe une unique transformation affine telle que A' , B' et C'_1 (resp. A' , B' et C'_2) soient les images de A , B , et C . Donc il existe au plus deux similitudes qui répondent à la question.

Si C' désigne indifféremment C'_1 ou C'_2 , montrons que l'application affine f qui transforme A , B et C en A' , B' et C' est une similitude. Soit M et N deux points quelconques de $\mathcal{P}$, le vecteur $\overrightarrow{MN}$ s'exprime :

$$\overrightarrow{MN} = x \cdot \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AC}.$$

On aura donc :

$$\overrightarrow{M'N'} = x \cdot \overrightarrow{A'B'} + y \cdot \overrightarrow{A'C'}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ étant orthogonaux ainsi que $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A'C'}$, on aura toujours :

$$\begin{aligned} M'N'^2 &= x^2 A'B'^2 + y^2 A'C'^2 \\ &= x^2 k^2 AB^2 + y^2 k^2 AC^2 \\ &= k^2 (x^2 AB^2 + y^2 AC^2) \\ &= k^2 MN^2 \end{aligned}$$

et par suite :

$$M'N' = k \cdot MN.$$

L'application f est bien une similitude.

Il existe donc deux similitudes qui transforment A en A' et B en B' . •

§39 Applications graphiques.

Il n'est, bien entendu, pas question de développer en détail les questions relatives à la représentation plane des objets de l'espace dans ce cadre. Néanmoins, il est intéressant d'évoquer ce type de préoccupations car c'est un champ d'application naturel des concepts que nous venons de développer.

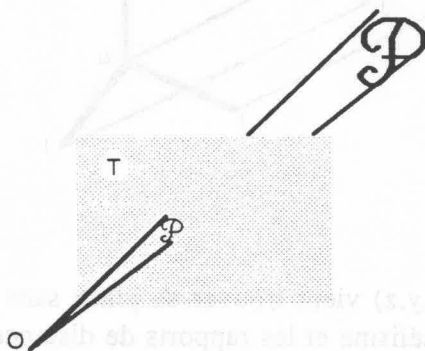
Pour représenter des objets à trois dimensions on est amené à utiliser de façon systématique leur image sur des plans. Les techniques de fabrication sont très variées et les supports sont les plus divers : papier, tableau "noir", film photographique, écran cathodique, etc ... il n'empêche que l'élaboration de ces vues relève d'un même principe, celui de la vision elle-même : la perspective.

* La perspective centrale (ou conique)

On considère

- un plan T qu'on appelle le tableau (*)
- un point O extérieur à T.

(*) A l'origine il s'agit du tableau du peintre, pas du "tableau noir".

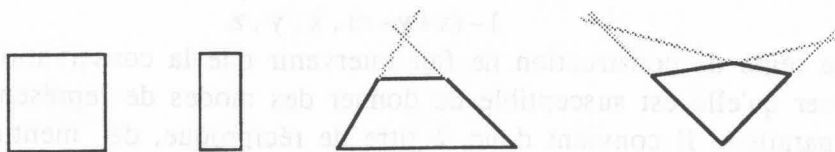


On définit la perspective de centre O, comme étant la correspondance

$$p : M \rightsquigarrow m$$

entre l'espace et le tableau telle que M et m sont alignés avec O. Le centre d'une perspective est aussi appelé son point de vue.

Une droite qui passe par le point de vue et n'est pas parallèle au tableau (ou fuyante), est représentée par un point, où viennent converger les images de toutes les droites qui lui sont parallèles. Ainsi, un carré pourra, suivant sa position par rapport au tableau, prendre l'un des aspects suivants :



Si l'on se place du point de vue géométrique - et non esthétique - on pourra trouver peu satisfaisantes les deux dernières vues et préférer un mode de représentation qui conserve au moins le parallélisme.

* La perspective parallèle (ou cylindrique).

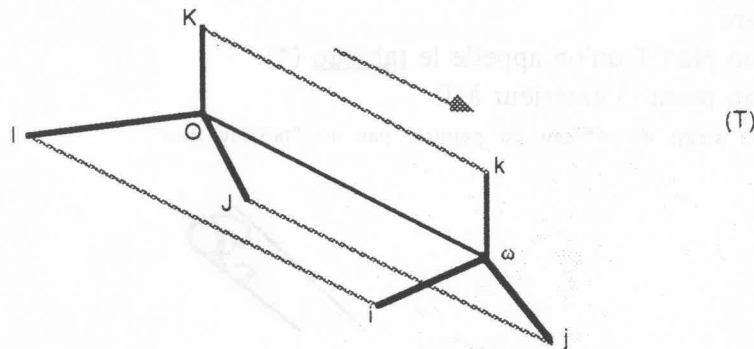
Une projection sur un plan parallèlement à une droite apparaît, dans ce contexte, comme une perspective dont le point de vue serait rejeté à l'infini. C'est pourquoi il est commode de parler :

- du tableau pour désigner le plan de projection,
- des fuyantes pour désigner les droites suivant lesquelles on projette.

La mise en place d'une perspective parallèle est une chose banale, au moins dans son principe :

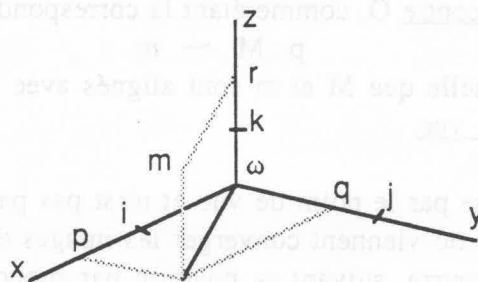
- l'espace est rapporté à un repère (O,I,J,K),
- la donnée du tableau et des fuyantes détermine son image (ω, i, j, k) sur le

tableau.



Tout point de coordonnées (x,y,z) vient trouver sa place sans problème sur le tableau. Comme la projection conserve le parallélisme et les rapports de distances entre points alignés, on a :

$$\overrightarrow{\omega m} = x \cdot \overrightarrow{\omega i} + y \cdot \overrightarrow{\omega j} + z \cdot \overrightarrow{\omega k}$$



Le point m est donc, en fait, le barycentre de ω, i, j, k affectés des coefficients :

$$1 - (x + y + z), x, y, z.$$

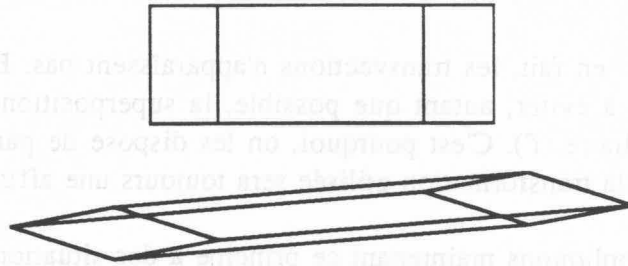
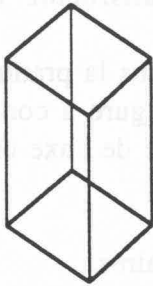
Comme cette règle de construction ne fait intervenir que la conservation du barycentre, on pourrait penser qu'elle est susceptible de donner des modes de représentation autres que la perspective parallèle. Il convient donc, à titre de réciproque, de mentionner l'existence du théorème qui suit.

Théorème de Pohlke : étant donné un tétraèdre OIJK et quatre points arbitraires ω, i, j, k non alignés d'un plan T, il existe

- un tétraèdre O'T'J'K' semblable à OIJK,
- une direction δ ,

tels que les points ω, i, j, k soient les images des sommets O', I', J', K' par la projection sur T parallèlement à δ .

Concrètement, ceci veut dire que, si l'on considère les schémas ci-dessous :



il est légitime d'affirmer qu'on est en présence d'images en perspective parallèle des arêtes d'un cube ! ce qui, convenons en, n'a rien d'une évidence.

* Le principe des figures semblables.

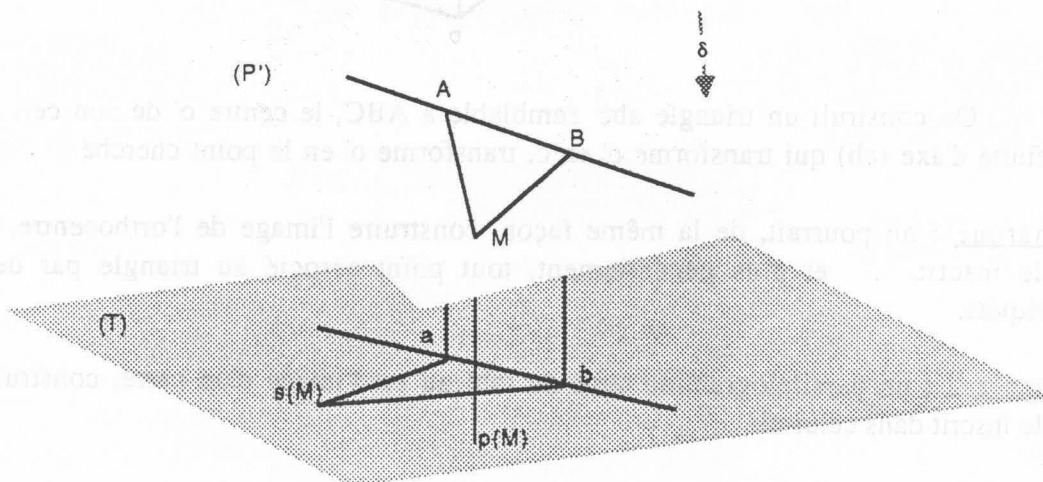
Lorsqu'on réalise l'épure d'un objet, on est très naturellement amené à considérer certaines de ses sections par des plans judicieusement choisis. Ceci nous conduit à envisager la projection parallèlement à une droite comme une application entre plans.

On considère

- l'application p , restriction à un plan P d'une projection sur le tableau T, parallèlement à une droite donnée δ ,

- deux points arbitraires A et B du tableau,
- une similitude s de P sur T, telle que :

$$s(A) = p(A) = a \text{ et } s(B) = p(B) = b.$$



Si le plan P n'est pas parallèle à δ , p est une transformation affine, l'application $p \circ s^{-1}$ est donc une transformation affine de T . Il est clair qu'elle laisse invariants les deux points a et b , c'est donc une affinité ou une transvection de T .

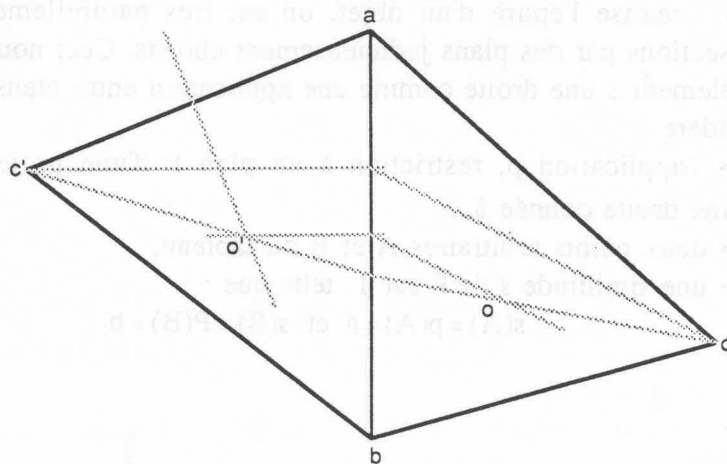
Il sera commode de retenir ce fait sous la forme suivante que nous appellerons : "principe des figures semblables".

Soit (F) une figure plane et (f) son image en perspective parallèle sur le tableau, si (f') est une figure du tableau semblable à (F) et dont deux points distincts coïncident avec leurs homologues dans (f), alors la droite qui joint ces points est l'axe d'une affinité ou d'une transvection qui transforme (f') en (f).

Remarque : en fait, les transvections n'apparaissent pas. En effet, dans la pratique on cherche, en général, à éviter, autant que possible, la superposition entre la figure à construire (f) et la figure auxiliaire (f'). C'est pourquoi, on les dispose de part et d'autre de l'axe choisi. Dans ces conditions, la transformation utilisée sera toujours une affinité.

Appliquons maintenant ce principe à des situations élémentaires.

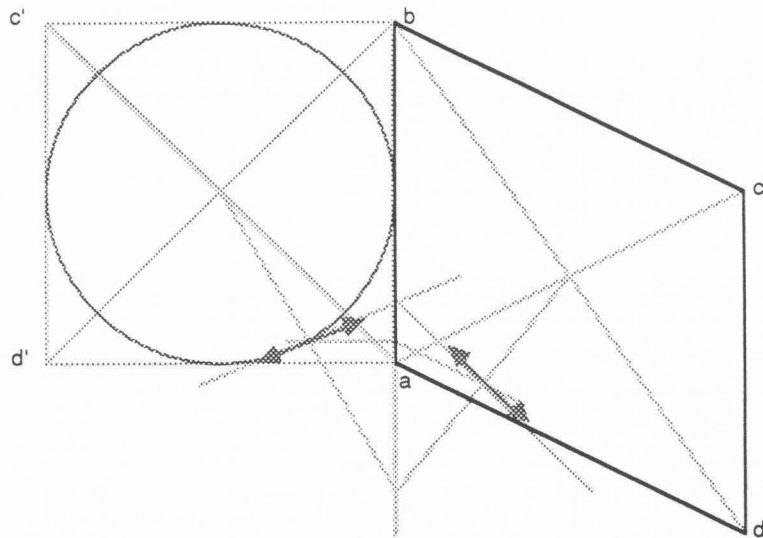
Exemple 1 : on a sur le tableau trois points a, b, c . On sait, par ailleurs, que le triangle abc est l'image d'un triangle ABC dont les côtés sont connus. Construire l'image du centre du cercle circonscrit à ABC .



On construit un triangle abc' semblable à ABC , le centre o' de son cercle circonscrit. L'affinité d'axe (ab) qui transforme c' en c , transforme o' en le point cherché.

Remarque : on pourrait, de la même façon, construire l'image de l'orthocentre, du centre du cercle inscrit, ... et plus généralement, tout point associé au triangle par des conditions métriques.

Exemple 2 : un parallélogramme abcd du tableau est l'image d'un carré, construire l'épure du cercle inscrit dans celui-ci.

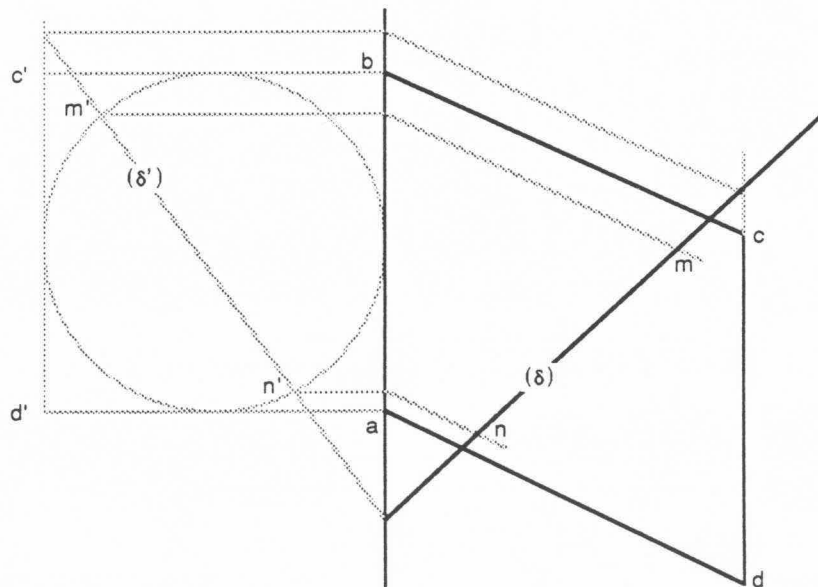


On construit le carré $abc'd'$. L'affinité d'axe (ab) qui transforme c en c' donne l'image du cercle considéré à partir du cercle inscrit dans le carré $abc'd'$.

N.B. Comme l'affinité respecte la propriété pour une droite d'être tangente à une courbe, on peut obtenir, en même temps que l'image d'un point du cercle, celle de la tangente associée.

Exemple 3 : un cercle étant défini comme dans l'exemple précédent, construire sur l'épure ses points d'intersection avec une droite donnée δ .

On utilise l'image inverse δ' de δ par l'affinité déjà considérée.



On pourra traiter par soi-même une variante qui consiste à construire les tangentes parallèles à une droite dont l'image sur le tableau est donné.

N.B. En fait, nous avons construit une ellipse donnée par deux diamètres conjugués, son intersection avec une droite, ses tangentes parallèles à une droite donnée, ... Ces constructions peuvent donc répondre à des préoccupations de natures très diverses.



Figure 1. Construction of a point D such that AD is parallel to BC and AB is perpendicular to CD.

Figure 2. Construction of a point D such that AD is parallel to BC and AB is perpendicular to CD.

Figure 3. Construction of a point D such that AD is parallel to BC and AB is perpendicular to CD.

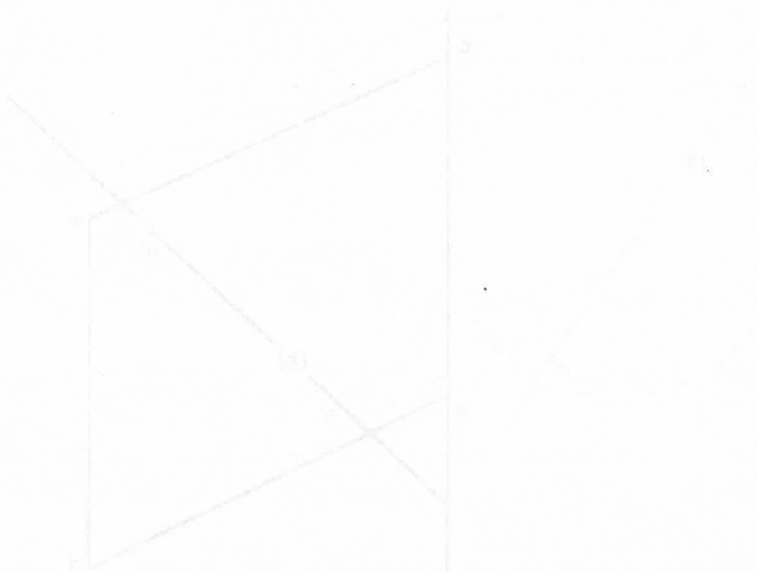


Figure 4. Construction of a point D such that AD is parallel to BC and AB is perpendicular to CD.

Figure 5. Construction of a point D such that AD is parallel to BC and AB is perpendicular to CD.

Appendice

Sur la conjugaison au sein du groupe affine.

Le parti que nous avons pris, de n'utiliser pratiquement que les outils dont dispose un élève de lycée, a ses limites et l'on ne pourra dominer réellement le sujet sans recourir explicitement à des concepts abstraits, notamment ceux qui relèvent de la théorie des groupes.

§a La conjugaison.

On considère un groupe G dont la loi de composition est notée multiplicativement.

Définition : soit g et h deux éléments de G , on appelle l'élément $g.h.g^{-1}$ le conjugué de h par g .

Si g est un élément donné, la conjugaison par g définit l'application :

$$\gamma_g : G \longrightarrow G$$

$$x \longmapsto g.x.g^{-1} = \gamma_g(x)$$

Pour tout x, y appartenant à G , on a évidemment :

$$g.x.y.g^{-1} = g.x.g^{-1}.g.y.g^{-1} = (g.x.g^{-1}).(g.y.g^{-1})$$

et par suite :

$$\gamma_g(x.y) = \gamma_g(x).\gamma_g(y).$$

En outre, on vérifie sans peine que cette application est bijective et que :

$$(\gamma_g)^{-1} = \gamma_{(g^{-1})}.$$

La conjugaison est donc un isomorphisme de G sur lui-même. On dit de façon plus concise que c'est un automorphisme de G .

N.B. Dans la suite, les groupes en question seront des groupes de transformations, leur loi de composition sera donc naturellement notée "o".

§b Multiplication des vecteurs par les scalaires.

On désigne le plan par E et l'ensemble de ses vecteurs par V . Les applications linéaires bijectives de V sur lui-même forment un groupe appelé le groupe linéaire de V et noté $GL(V)$. On rappelle que $GA(E)$ désigne le groupe affine de E .

Remarque : si nous nous plaçons dans le plan, c'est autant pour des raisons de clarté que de cohérence avec l'ensemble de notre propos. Cependant, on pourra se rendre compte que tout ce qui suit pourrait, sans modification d'aucune sorte, s'appliquer à un espace affine quelconque.

Dans notre introduction au calcul vectoriel, il apparaissait clairement (du moins nous l'espérons) que l'addition des vecteurs décrit l'action du groupe des translations sur la plan. Il était certainement moins clair que la multiplication des vecteurs par les scalaires traduit, quant à elle, une action des homothéties sur les translations à l'intérieur du groupe des dilatations. Commençons par préciser cette idée.

On considère :

- une translation t ,
- un nombre réel non nul λ ,
- une homothétie h_λ de rapport λ et de centre arbitraire.

La transformation t' conjuguée de t par h_λ :

$$t' = h_\lambda \circ t \circ h_\lambda^{-1}$$

est clairement une dilatation de rapport 1, c'est donc une translation. Déterminons en le vecteur. On désigne par $\vec{v}$ le vecteur de t et par O le centre de h_λ . Si P est le point tel que $\overrightarrow{OP} = \vec{v}$, alors $P' = h_\lambda(P)$ est le point tel que :

$$\overrightarrow{OP'} = \lambda \overrightarrow{OP} = \lambda \vec{v}.$$

Dans ces conditions, on a :

$$t'(O) = h_\lambda \circ t \circ h_\lambda^{-1}(O) = h_\lambda \circ t(O) = h_\lambda(P) = P',$$

$\overrightarrow{OP'}$ est donc le vecteur de t' . Ce qui se traduit par la relation :

$$t' = h_\lambda \circ t \circ h_\lambda^{-1} = t_\lambda \vec{v}.$$

Proposition 1 : pour tout vecteur $\vec{v}$, pour tout réel λ et pour toute homothétie h_λ de rapport λ , on a :

$$h_\lambda \circ t \circ h_\lambda^{-1} = t_\lambda \vec{v}.$$

Ainsi, la multiplication des vecteurs par les scalaires résulte de l'action de la conjugaison sur le groupe des translations au sein du groupe des dilatations.

§c Action du groupe affine sur les vecteurs.

On peut aussi écrire dans l'expression précédente (cf. 36-7) :

$$\lambda \vec{v} = \vec{h}_\lambda(\vec{v}).$$

Ce qui donne, si l'on oublie la donnée de λ :

$$h \circ t_{\vec{v}} \circ h^{-1} = t_{\vec{h}(\vec{v})}.$$

Nous allons généraliser ceci à toutes les transformations affines.

On convient de noter p l'application de la proposition (36-7). C'est-à-dire qu'on a :

$$p : \begin{array}{ccc} \text{GA}(E) & \longrightarrow & \text{GL}(E) \\ f & \longmapsto & \vec{f} \end{array}$$

où $\vec{f}$ est l'application qui transforme un vecteur quelconque $\vec{v} = \overrightarrow{MN}$ en le vecteur

$$\vec{f}(\vec{v}) = \overrightarrow{M'N'}$$

où, naturellement, M' et N' sont les images de M et N par f .

Proposition 2 : p est un homomorphisme surjectif qui admet pour noyau le groupe de translations.

Démonstration : le fait que l'opération de composition des applications soit stable relativement à p se déduit immédiatement de la définition.

Pour caractériser les éléments du noyau, on remarque que les propositions suivantes sont équivalentes :

- $\vec{f} = \text{Id}_V$,
- $\forall M \in E \ \forall N \in E \ \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$,
- $\forall M \in E \ \forall N \in E \ MNN'M'$ est un parallélogramme,
- f est une translation.

Il reste à montrer que p est surjective. Pour cela, on choisit un point arbitraire O de E et l'on considère une application quelconque φ de $\text{GL}(V)$. On peut lui associer l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & M' \text{ tel que : } \overrightarrow{OM'} = \varphi(\overrightarrow{OM}). \end{array}$$

On vérifie sans difficulté que f est une bijection de E sur lui-même qui conserve le barycentre. C'est donc une transformation affine de E et il découle directement de sa définition que :

$$p(f) = \vec{f} = \varphi.$$

L'application p est donc bien surjective.

Remarque : dans la dernière partie de la démonstration précédente, il n'y a guère plus qu'un changement de notations. En effet, le choix d'une origine O permet d'identifier tout point M au vecteur $\overrightarrow{OM}$. Toute transformation affine qui laisse l'origine invariante, s'identifie alors à l'application linéaire qui lui est associée.

La proposition qui suit montre que l'effet d'une application linéaire sur un vecteur s'interprète comme l'action de la conjugaison sur le groupe des translations au sein du groupe affine.

Proposition 3 : pour tout vecteur $\vec{v}$ et pour toute transformation affine f , on a

$$f \circ t_{\vec{v}} \circ f^{-1} = t_{f(\vec{v})}.$$

Démonstration : considérons une translation t de vecteur $\vec{v}$, une transformation affine f et l'application t' conjuguée de t par f . C'est-à-dire qu'on a :

$$t' = f \circ t \circ f^{-1}.$$

La proposition 1 montre que :

$$p(t') = p(f) \circ p(t) \circ p(f^{-1}) = p(f) \circ \text{Id}_V \circ (p(f))^{-1} = \text{Id}_V,$$

t' est donc une translation. On détermine son vecteur en cherchant l'image d'un point arbitraire. On considère, pour cela, deux points A et B tels que $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, on note A' et B' leurs images par f , on a :

$$t'(A') = f \circ t \circ f^{-1}(A') = f \circ t(A) = f(B) = B'$$

et par suite :

$$t' = t_{\overrightarrow{A'B'}} = t_{f(\vec{v})}.$$

C'est précisément la relation avancée. •

§d Groupes de frises

Etant donnée une configuration F du plan on considère l'ensemble G des isométries qui laissent F invariante. Il est clair que

- l'application identique appartient à G
- $\forall f \in G \quad \forall g \in G \quad g \circ f \in G,$
- $\forall f \in G \quad f^{-1} \in G.$

Cet ensemble est donc un groupe qu'on appellera le groupe de F .

Il est tout aussi clair que l'ensemble des translations laissant F invariant est un sous-groupe de G , on l'appellera le groupe des translations de F .

Définition : une configuration plane est une frise si l'ensemble des translations qui la laissent invariante est formée des itérés d'une translation non triviale.

En d'autres termes, l'ensemble des translations d'une frise est de la forme :

$$T = \{t^n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

où t désigne une translation autre que l'application identique.

Remarque : on dit d'un tel groupe qu'il est cyclique, engendré par t .

Si l'on cherche à classer les frises en fonction de la nature de leurs groupes d'isométries, on voit apparaître sept types qui se rattachent à l'une des frises schématisées ci-après.

L	L	L	L	L	L	1	
L	┐	L	┐	L	┐	1	g
┐	┐	┐	┐	┐	┐	1	m (g)
∨	∨	∨	∨	∨	∨	1	$m^\perp$
Z	Z	Z	Z	Z	Z	2	
∨	^	∨	^	∨	^	2	$m^\perp$ (g)
H	H	H	H	H	H	2	m ($m^\perp$ g)

Convention : les mentions portées en marge sont inspirées des notations utilisées en cristallographie

- 2 signifie la présence de demi-tours (qui sont des rotations d'ordre 2), la mention 1 signifie l'absence de rotation autre que l'identité.
- m (comme **m**iroir) signifie la présence d'une symétrie dont l'axe a même direction que les translations,
- $m^\perp$ signifie la présence d'une symétrie dont la direction est orthogonale à celle des translations.
- g (comme **g**lisement) signifie la présence de symétries-translations (ces informations figurent, à titre indicatif, entre parenthèses lorsqu'elles se déduisent des précédentes).

Il convient d'étayer cette constatation par une analyse systématique de la question. On considère un frise F, soit G son groupe, T son groupe de translations, t un générateur de T et $\vec{v}$ le vecteur de t.

Proposition 4 : si f est une isométrie de G alors f est nécessairement soit :

- un demi tour (2),
- une symétrie dont l'axe a même direction que $\vec{v}$ (m),
- une symétrie dont l'axe est orthogonal à $\vec{v}$ ($m^\perp$),
- une symétries translation dont l'axe a même direction que $\vec{v}$ (g).

Démonstration : soit f un élément de G, nous savons (cf. proposition 2) que la conjugaison de t par f donne la translation suivante :

$$f \circ t_{\vec{v}} \circ f^{-1} = t_{f(\vec{v})}.$$

qui appartient à T. Comme f est une isométrie le vecteur $f(\vec{v})$ est $\vec{v}$ ou son opposé.

Dans le premier cas, f est soit une translation, soit une symétrie (m) ou une symétrie-translation (g) dont l'axe a même direction que $\vec{v}$.

Dans le second, f est soit un demi-tour (2), soit une symétrie dont l'axe est orthogonal à $\vec{v}$.

Proposition 5 : si G contient un demi-tour d_0 , l'ensemble des demi-tours de G est de la forme suivante :

$$d_0 T = \{d_0 \circ t^n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Démonstration : on note D l'ensemble des demi-tours de G. Il est clair que :

• d'une part, tout élément de d_0T est un demi-tour qui appartient à G , on a donc $d_0T \subseteq D$

• d'autre part, si $d \in D$, alors l'application $d_0^{-1} \circ d$ est une translation qui appartient à T et par suite : $d = d_0 \circ (d_0^{-1}d) \in d_0T$, on a donc $D \subseteq d_0T$.

La conjonction de ces deux inclusions donne bien $D = d_0T$. •

Remarque : on notera que les centres de tels demi-tours se déduisent de l'un d'eux par les translations de vecteurs $n \cdot \frac{1}{2}\vec{v}$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

Proposition 6 : si G contient une symétrie dont l'axe a même direction que $\vec{v}(m)$, celle-ci est unique.

Démonstration : dans le cas contraire, le composé de deux telles symétries, serait une translation appartenant à T . Son vecteur serait non nul et orthogonal à $\vec{v}$, ce qui est exclu. Il existe donc au plus une telle symétrie dans G .

Proposition 7 : si G contient une symétrie s_0 dont l'axe est orthogonal à $\vec{v}$, l'ensemble des symétries de ce type est de la forme :

$$s_0T = \{s_0 \circ t^n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Démonstration : calquée sur celle de la proposition 6. •

Remarque : ici encore, on notera que les axes de telles symétries se déduisent de l'un d'eux par les translations de vecteurs $n \cdot \frac{1}{2}\vec{v}$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

Proposition 8 : si G contient une symétrie-translation g_0 dont l'axe est orthogonal à $\vec{v}(g)$, l'ensemble des symétrie-translations de G est de la forme suivante :

$$g_0T = \{g_0 \circ t^n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

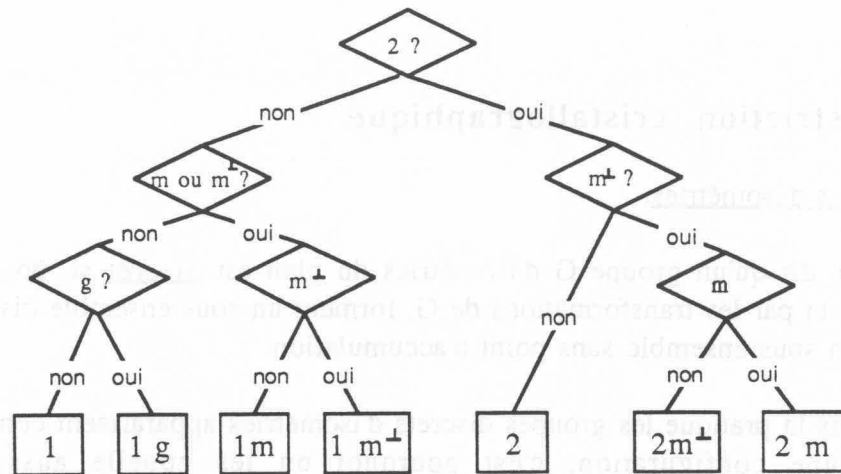
Démonstration : encore calquée sur celle de la proposition 6. •

Remarque : on notera que ces symétries-translations ont toutes le même axe et admettent pour vecteurs les $n\vec{v}$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

Proposition 9 : l'absence dans G de symétrie de l'un des deux types (m ou $m^\perp$) interdit la présence de demi-tours.

Démonstration : c'est immédiat car la présence de symétries dont les axes sont perpendiculaires entraîne celle de demi-tours. •

Pour conclure, il suffit de constater que, compte-tenu des propositions ci-dessus, il n'existe pas d'autre possibilité que celles décrites par l'organigramme ci-après.



On pourra préférer présenter cette démarche en utilisant les conventions inspirées de la programmation structurée. On obtient alors l'algorithme qui suit.

```

DEBUT  {G est un groupe de frise ; 1 : absence de demi-tour, 2 : présence de demi-tours ;
        m : présence d'une symétrie d'axe parallèle à la direction de la frise ;
        m⊥ : présence d'une symétrie d'axe orthogonal à la direction de la frise}

  SI 2
  ALORS
    SI m⊥
    ALORS
      SI m
      ALORS 2 m { ... H H H H H H H ... }
              {les centres des demi-tours sont sur les mioirs}
      SINON 2 m⊥ { ... Δ ∇ Δ ∇ Δ ∇ ... }
              {les centres des demi-tours ne sont pas sur les mioirs}
      FIN SI
    SINON 2 { ... Z Z Z Z Z Z Z ... }
    FIN SI
  SINON
    SI m OU m⊥
    ALORS
      SI m⊥
      ALORS 1 m⊥ { ... V V V V V V V ... }
      SINON 1 m { ... C C C C C C C ... }
      FIN SI
    SINON
      SI g
      ALORS 1 g { ... L Γ L Γ L Γ ... }
      SINON 1 { ... L L L L L L L ... }
      FIN SI
    FIN SI
  FIN SI
FIN
  
```

§e La restriction cristallographique.

* Goupes discrets d'isométries.

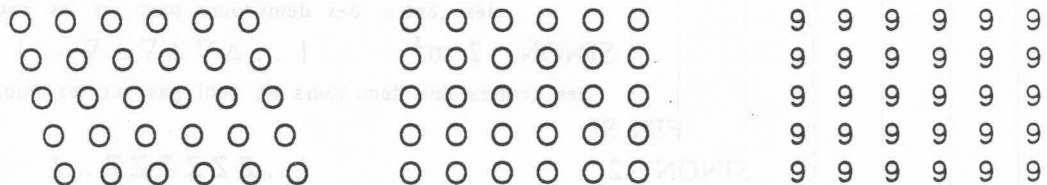
Définition : on dit qu'un groupe G d'isométries du plan est discret si, pour tout point, les images de celui-ci par les transformations de G , forment un sous-ensemble discret du plan. On entend par là un sous-ensemble sans point d'accumulation.

Remarque : dans la pratique les groupes discrets d'isométries apparaissent comme des groupes laissant fixe une configuration, c'est pourquoi on les appelle aussi les groupes cristallographiques.

[On attribue leur découverte au minéralogiste russe Fédorov, ceci à la fin du XIX^e siècle. En réalité, ils étaient connus depuis beaucoup plus longtemps. On sait, notamment, que les groupes des motifs géométriques qui décorent l'Alhambra de Grenade (XIII^e) épuisent toutes les possibilités existantes]

Si F est un ensemble fini de points - par exemple un polygone - G opère comme un groupe de permutations de cet ensemble, ce sera donc un groupe fini. Il ne pourra évidemment pas comporter de translation. De plus toutes les transformations de G ont un point fixe commun : le centre de gravité de l'ensemble. Laissons provisoirement ce cas de côté.

Si le groupe des isométries d'une configuration contient des translations, il est alors infini. Ces translations pourront avoir une même direction, on retrouve alors les groupes de frises. Elles pourront avoir des directions diverses comme le suggèrent les schémas ci dessous.



Dans ce cas on parlera de groupes de pavages.

L'étude correcte des groupes de pavages du plan - on en compte dix sept - demande un travail d'analyse assez long qui n'a pas sa place ici. Cependant, nous en avons retenu un point significatif : la restriction cristallographique.

Théorème 10 : les angles des rotations d'un groupe discret infini d'isométries du plan sont nécessairement des multiples entiers de :

$$\frac{2\pi}{n} \text{ où } n = 2, 3, 4 \text{ ou } 6.$$

La démonstration reposera essentiellement sur la propriété qui suit.

Lemme 11 : un groupe discret de rotations qui laissent un point invariant est nécessairement un groupe cyclique fini.

Démonstration : on considère un groupe discret G formé de rotations ayant pour centre un même point O . Soit U le cercle de centre O et rayon 1, P un point arbitraire de U et W l'ensemble de ses images par les éléments de G . Si G était infini, W le serait aussi. Dans ces conditions, comme U est un sous-ensemble fermé borné du plan, W admettrait un point d'accumulation. C'est exclu par hypothèse, le groupe G est donc fini.

Il est possible de mesurer les angles des rotations de G par leur détermination comprise entre 0 et 2π . Ainsi, on définit un sous-ensemble fini A de $[0, 2\pi[$ qui contient 0 . Si G n'est pas le groupe trivial, $A - \{0\}$ est non vide, il admet donc un plus petit élément qu'on note α . Soit β un autre élément de $A - \{0\}$. Il existe un entier naturel k tel que

$$k\alpha \leq \beta < (k+1)\alpha.$$

Les rotations de centre O , d'angles α et β étant des éléments de G , les rotations de centre O et d'angles $k\alpha$ et $\beta - k\alpha$ sont aussi dans G . Or, $\beta - k\alpha < \alpha$. La définition de α exige donc qu'on ait $\beta - k\alpha = 0$ et donc $\beta = k\alpha$. Les éléments de G sont donc les rotations de centre O et d'angles :

$$0, \alpha, 2\alpha, \dots, k\alpha, \dots$$

Comme cet ensemble est fini, il existe un entier n tel que :

$$(n-1)\alpha \neq 2\pi \text{ et } n\alpha = 2\pi.$$

Si l'on désigne par r la rotation de centre O et d'angle α , G apparaît comme étant l'ensemble

$$G = \{Id = r^0, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}.$$

Définition : n est appelé l'ordre ou la période de r .

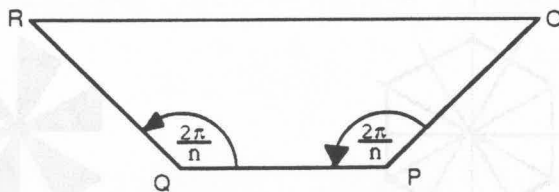
Preuve de la restriction cristallographique.

On considère un groupe d'isométries discret et infini G . Si G ne comporte que des translations, il n'y a rien à démontrer. Dans le cas contraire, G contient une rotation r de centre O et d'angle $2\pi/n$, où n est un entier au moins égal à 2.

Les translations de G forment un sous-groupe qui est lui même un groupe discret, on le note T . La conjugaison de r , par les éléments de G , produit une infinité de rotations d'angle $2\pi/n$. L'ensemble de leurs centres est :

$$\Omega = \{t(O) \mid t \in T\}.$$

Comme T est un groupe discret, Ω est un sous-ensemble discret du plan, il existe un élément P de Ω , distinct de O , dont la distance à O est minimale. On considère alors les deux points suivants :



- Q image de O par la rotation de centre P et d'angle $2\pi/n$,
- R image de P par la rotation de centre Q et d'angle $2\pi/n$.

Ces points appartiennent aussi à Ω et sont tels que :

$$OP = PQ = QR.$$

Le point R peut coïncider avec O , ce qui est effectivement le cas si $n = 6$. Dans le cas contraire, on doit avoir :

$$OR \geq PQ,$$

ce qui entraîne que $2\pi/n \geq \pi/2$ et par suite que $n \leq 4$.

Les seules valeurs de n possibles sont donc bien 2, 3, 4 et 6.

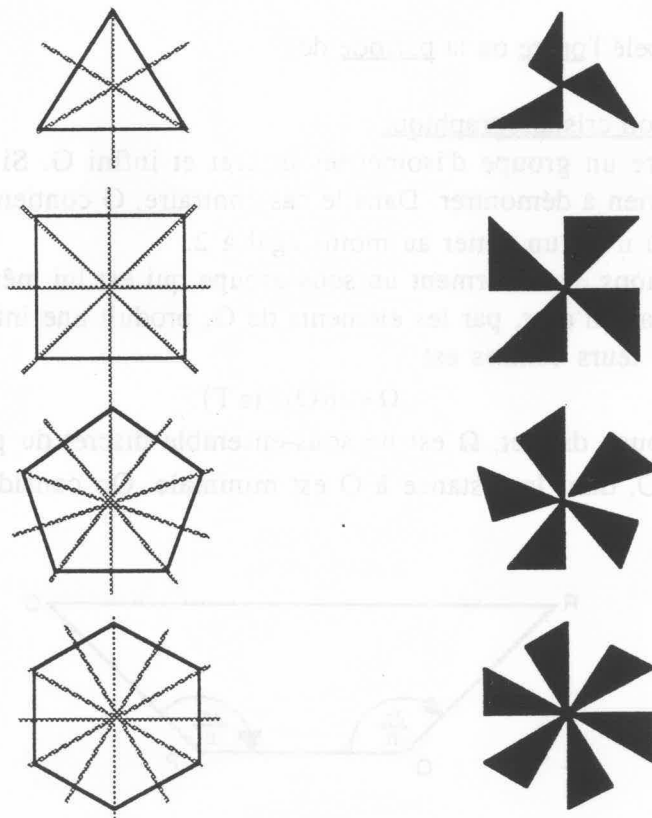
Remarque : on ne peut quitter le sujet sans signaler que le lemme 11 donne pratiquement la description de tous les groupes finis d'isométries. En effet, Si l'on considère un tel groupe G et un point arbitraire O , l'ensemble :

$$\{g(P) \mid g \in G\}$$

est invariant par G . Son centre de gravité est donc invariant par tout les élément de G . Si ce groupe ne contient que des rotations, nous avons montré qu'il est cyclique. Dans le cas contraire, les rotations forment un sous-groupe cyclique. Les éléments restants sont des symétries. On les obtient toutes, en composant les rotations avec l'une d'elles qui peut être choisie de façon arbitraire.

On retrouve de façon générale, pour $n \geq 2$ le groupe qui laisse invariant un polygone régulier à n côtés. Celui-ci se compose

- d'une part, des rotations de centre O et d'angles $2k\pi/n$ pour $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$
- d'autre part :
 - si n est impair des symétries par rapport aux médiatrices des côtés,
 - si n est pair des symétries par rapport aux médiatrices des côtés (on en compte alors $n/2$) et des symétries par rapport aux droites qui joignent deux sommets opposés.



...

La liste est complète si on lui ajoute le groupe du rectangle et son sous groupe formé de l'application identique et d'un demi-tour.



Exercices

Chapitre VI

Angles orientés - points cocycliques

I On considère un triangle équilatéral ABC orienté dans le sens direct et inscrit dans un cercle Γ . Soit M un point de l'arc AC du cercle Γ , autre que A et C (l'arc est celui qui ne contient pas B). Soit I le point du segment MB tel que $MI = MA$.

1) Quelle est la nature du triangle MIA ?

2) Préciser les images des points B et I par la rotation de centre A et d'angle $\pi/3$. En déduire que $MB = MA + MC$.

II Deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ se coupent en deux points A et B . Un point M décrit $\mathcal{C}$, les droites (MA) et (MB) recoupent $\mathcal{C}'$ en P et Q .

1) Montrer que l'angle (AP, AQ) est constant. En déduire que PQ a une longueur fixe et que le cercle circonscrit au triangle MPQ a un rayon constant.

2) Soit H la projection orthogonale de P sur (MQ) , montrer que (PA, PH) est constant. En déduire que la droite (PH) passe par un point fixe D situé sur $\mathcal{C}'$. Préciser la position de ce point.

Le quadrangle orthocentrique

III On considère un triangle ABC . Soit H son orthocentre et A' , B' , C' ses symétriques par rapport aux droites (BC) , (CA) et (AB) .

1) Montrer que les points A' , B' et C' sont sur le cercle circonscrit au triangle ABC .

2) On suppose que le triangle ABC a ses angles aigus. Quelles sont les bissectrices intérieures du triangle $A'B'C'$?

Transposer ce qui précède dans le cas où le triangle a un angle obtus.

IV On considère un quadrangle, c'est-à-dire quatre points tels que trois d'entre eux ne soient jamais alignés, pris trois à trois, ils définissent donc quatre triangles.

1) Montrer que si l'un des sommets est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres, alors cette propriété est vraie pour tous les quatre.

Dans ces conditions on dit que les points forment un quadrangle orthocentrique.

[On pourra rapprocher ce fait du résultat plus général obtenu dans l'exercice 16 - Chap I]

2) Montrer que les cercles circonscrits aux quatre triangles déterminés par les sommets d'un quadrangle orthocentrique ont le même rayon.

3) Réciproquement, on considère trois cercles de même rayon, sécants deux à deux et qui passent par un même point. Montrer que les quatre points d'intersection de ces cercles sont les symétriques de leurs centres par rapport à un point qu'on précisera.

Montrer, en outre, que ces points sont les sommets d'un quadrangle orthocentrique.

Droite de Simson et droite de Steiner

V (Droite de Simson) On considère un triangle ABC, soit Γ son cercle circonscrit. Etant donné un point M, on note P, Q et R ses projections orthogonales sur (BC), (CA) et (AB).

1) Montrer que les quatre points P, Q, C et M sont cocycliques, ainsi que les quatre points P, R, B et M. Montrer que

$$(PQ, PR) = (MB, MC) - (AB, AC),$$

en déduire que les points P, Q, R sont alignés si, et seulement si, M appartient à Γ . (La droite passant par ces points est alors appelée : droite de Simson du point M)

3) On considère quatre droites du plan deux à deux concourantes, elles déterminent quatre triangles. Montrer que leurs cercles circonscrits passent par un même point dont les projections sur les quatre droites données sont alignées.

2) Soit M et M' deux points de Γ , D et D' leurs droites de Simson. Montrer que :

$$(D, D') = -(AM, AM').$$

En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que les droites de Simson de deux points soient perpendiculaires.

VI (Droite de Steiner) [On rappelle que les symétriques de l'orthocentre d'un triangle par rapport aux côtés de celui-ci sont sur le cercle circonscrit]

On considère un triangle ABC, soit Γ son cercle circonscrit.

Etant donné un point quelconque M de son plan, on désigne par A_1 , B_1 et C_1 ses symétriques par rapport à (BC), (CA) et (AB).

1) Montrer que deux des points A_1 , B_1 ou C_1 sont alignés avec l'orthocentre si, et seulement si, le point M est sur Γ .

En déduire deux conditions nécessaires et suffisantes pour que les points A_1 , B_1 et C_1 soient alignés. (La droite passant par ces points est alors appelée : droite de Steiner du point M)

3) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les droites de Simson Σ et Σ' de deux points P et P' soient perpendiculaires.

4) On se place dans les conditions de la question 3). Déterminer le lieu du point d'intersection des droites Σ et Σ' .

Chapitre VII

Isométries

I Démontrer que le composé de trois symétries dont les axes sont concourants est une symétrie. Construire son axe.

Même question en remplaçant concourants par parallèles.

Construire un triangle ABC connaissant ses trois bissectrices.

II Etant donné un vecteur $\vec{v}$ et un point O, quel est le composé des trois transformations suivantes :

- la translation de vecteur $\vec{v}$,
- la rotation de centre O et d'angle α ,
- la translation de vecteur $-\vec{v}$.

III Démontrer que le composé de trois demi-tours est un demi-tour. Construire son centre.

IV Si d_1, d_2, d_3 sont trois demi-tours, montrer qu'on a :

$$d_1 \circ d_2 \circ d_3 = d_3 \circ d_2 \circ d_1.$$

V Etant donné trois points non alignés A, B et C, on considère les rotations :

- r_1 de centre A et d'angle $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$,
- r_2 de centre B et d'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$,
- r_3 de centre C et d'angle $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$.

Déterminer le produit $r_1 \circ r_2 \circ r_1$.

VI Caractériser le composé de deux symétries-translations dont les axes sont perpendiculaires.

VII Montrer que si s_1, s_2, s_3 sont trois symétries, alors :

$$(s_1 \circ s_2 \circ s_3)^2$$

est une translation.

VIII On considère un triangle ABC, on note

- s_a, s_b, s_c les symétries d'axes (BC), (CA), (AB)
- A', B', C' les pieds des hauteurs.

1) Montrer que $s_c \circ s_b \circ s_a$ est une symétrie translation, déterminer son axe ainsi que le vecteur de la translation de sa décomposition standard.

[On pourra chercher à utiliser le fait que le milieu d'un point et de son image par un antidéplacement est sur l'axe de celui-ci]

2) En déduire que le composé de trois symétries est une symétrie si, et seulement si, les axes sont concourants.

3) En déduire aussi que l'orthocentre d'un triangle est le centre d'un cercle tangent aux trois côtés du triangle formé par les pieds de ses hauteurs.

4) On imagine un billard triangulaire. La trajectoire d'une boule est une ligne brisée dont chaque sommet correspond à un rebond. On admet que les deux segments adjacents à chaque sommet sont portés par des droites symétriques par rapport à la bande sur laquelle a lieu le rebond.

Il existe de telles trajectoires qui se referment après un ou deux rebonds sur chacun des trois côtés, les décrire.

Existe-t-il d'autres possibilités de trajectoires fermées ?

IX On considère deux droites D et D' perpendiculaires en un point O, soit A un point équidistant de D et D'. Deux cercles passant par O et A recoupent respectivement D en P et Q et D' en P' et Q'. Montrer que $PQ = P'Q'$.

X Etant donnés deux points distincts A et A',

- 1) déterminer le lieu des centres O des rotations r qui transforment A en A',
- 2) construire le point O connaissant l'angle α de r,
- 3) déterminer l'ensemble des images d'un point donné M par les rotations considérées.

XI Soit M' l'image d'un point quelconque M par une rotation de centre O et d'angle α , déterminer le lieu du point M tel que l'une des conditions suivantes soit remplie :

- 1) (MM') a une direction fixe,
- 2) le segment MM' a une longueur donnée,
- 3) (MM') passe par un point donné.

XII On considère deux droites du plan non parallèles D et D' et un vecteur $\vec{v}$ donné.

- 1) Construire un point M de D et un point M' de D' tels que $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.
- 2) Même demande, on remplace les droites par des cercles.

XIII 1) Construire un cercle tangent à deux cercles concentriques donnés et passant par un point donné.

2) Construire un triangle équilatéral (resp. rectangle isocèle) ayant ses trois sommets sur trois droites parallèles données.

3) Construire un triangle équilatéral (resp. rectangle isocèle) ayant ses trois sommets sur les trois côtés d'un triangle donné.

XIV Construire un carré dont deux côtés soient deux cordes de deux cercles concentriques donnés.

XV Dans un plan on considère deux droites D et D' , A et A' sont deux points donnés respectivement sur D et D' .

- 1) Déterminer le lieu géométrique des centres des rotations qui transforment D en D' .
- 2) Construire les centres de celles de ces rotations qui transforment A en A' .
- 3) Il y a en général deux solutions ω et ω' , montrer que dans ce cas le rapport $A\omega/A\omega'$ ainsi que l'angle $(A\omega, A\omega')$ sont indépendants de A et A' .

XVI 1) (Théorème des trois miroirs) On considère deux déplacements d_1 et d_2 . Montrer qu'il est en général possible de trouver trois symétries s_1 , s_2 et s_3 telles que :

$$d_1 = s_3 \circ s_1 \quad \text{et} \quad d_2 = s_2 \circ s_3.$$

[on pourra examiner successivement les cas où parmi les déplacements donnés on compte zéro, une ou deux translations.]

Que peut-on dire du déplacement $d_3 = s_2 \circ s_1$ lorsque le problème posé admet une solution ?

2) Etant donné trois figures directement égales F_1 , F_2 et F_3 d'un même plan, démontrer qu'il existe en général trois symétries s_1 , s_2 et s_3 telles que :

$$s_1(F_1) = s_2(F_2) = s_3(F_3).$$

XVII Etant donné un triangle ABC orienté dans le sens direct, on construit sur ses côtés et à l'extérieur de celui-ci les trois carrés :

$$ABDE, \quad BCIJ, \quad ACFG.$$

1) On pose $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AG}$. Montrer qu'il existe une isométrie qui transforme le triangle ABC en le triangle $GA'A$. En déduire que les droites (AA') et (BC) sont perpendiculaires.

2) Montrer que les droites (BF) et $(A'C)$ sont perpendiculaires ainsi que les droites (CD) et (BA') . En déduire que les droites (AA') , (BF) et (CD) sont concourantes.

XVIII Tous les triangles considérés sont orientés dans le sens direct.

Etant donné un triangle ABC qui a ses trois angles aigus, on considère les points A' , B' et C' sont tels que les triangles $BA'C$, $CB'A$ et $AC'B$ soient équilatéraux.

1) Montrer que les cercles circonscrits aux triangles $BA'C$, $CB'A$ et $AC'B$ passent par un même point F .

2) Montrer que $AA' = BB'$ et $(AA', BB') = -\pi/3 \pmod{\pi}$.

[On pourra, par exemple, utiliser la rotation de centre C et d'angle $\pi/3$]

3) En déduire que les droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes.

On suppose désormais que le point F est situé à l'intérieur du triangle donné ce qui, on l'admettra, à lieu si les angles du triangle ABC sont inférieurs à 120° .

4) Montrer que :

$$FA + FB + FC = AA' = BB' = CC'$$

[On pourra faire intervenir le chemin $AFF'A'$, où F' désigne le transformé de F par la rotation utilisée plus haut]

5) Montrer que si M est un point intérieur au triangle, la fonction :

$$M \rightsquigarrow MA + MB + MC$$

atteint son minimum en F. [On applique le raisonnement précédent en remplaçant F par M]

XIX Déterminer toutes les isométries qui laissent invariant un triangle équilatéral. Etudier la composition de ces transformations.

XX Etant données deux triangles équilatéraux ABC et MNP, orientés dans le sens direct, on désigne par f_1 , f_2 et f_3 les déplacements qui transforment respectivement ABC en MNP, NPM et PMN.

1) Montrer que, si f_1 , f_2 et f_3 sont des rotations, leurs centres sont alignés.

2) Que peut-on dire de f_2 et f_3 quand f_1 est une translation ?

XXI On considère n points du plan.

1) Montrer que si n est impair, il existe un unique polygone à n côtés dont les n points donnés sont les milieux des côtés.

2) A quelle condition existe-t-il un tel polygone dans le cas où n est pair ?

[On cherchera à généraliser ce qu'on connaît pour $n = 4$]

XXII 1) Soit f une isométrie. On considère une droite D, M un point quelconque de celle-ci et M' l'image de M par f. Déterminer le lieu des milieux de MM'.

2) Montrer que si A, B et C sont trois points alignés de même que A', B' et C' et si

$$AB = A'B', \quad BC = B'C', \quad CA = C'A'$$

alors les milieux de AA', BB' et CC' sont alignés.

Chapitre VIII

Similitudes

Les similitudes indirectes étant d'un usage peu courant, il est en général sans inconvénient de dire similitude pour similitude directe. Cette omission est tout à fait justifiée lorsqu'il est question de la similitude de centre O , d'angle α et de rapport k .

I On considère un triangle ABC , soit P , Q et R les symétriques d'un point M quelconque par rapport aux milieux des côtés. Montrer que les segments AP , AQ et AR ont même milieu et préciser la position de ce point par rapport à M et au centre de gravité du triangle.

II Soit h_1 et h_2 homothéties de centres O_1 et O_2 , de rapport k_1 et k_2 . On note $f = h_1 \circ h_2$.

a) A quelle condition f est-elle une translation ? Dans ce cas, déterminer et construire son vecteur.

b) A quelle condition f est-elle une homothétie ? Dans ce cas, déterminer et construire son centre.

III Un triangle ABC a ses deux sommets A et B fixes, le troisième parcourt un cercle de centre A . Déterminer le lieu des pieds des bissectrices de l'angle en A .

IV Un triangle ABC a ses deux sommets B et C fixes, les médianes issues de ceux-ci sont perpendiculaires.

1) Quel est le lieu de A .

2) Montrer que $AB^2 + AC^2 = 5 BC^2$.

3) construire A connaissant la valeur de l'angle $\hat{A}$.

V Etant donnés deux points distincts A et O , et un nombre α non nul modulo π , on considère les triangles ABC dont O est le centre du cercle circonscrit et tels que $(AB, AC) = \alpha \pmod{\pi}$.

1) Déterminer les lieux de son centre de gravité G et de son orthocentre H .

2) Déterminer les lieux du point D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, et de l'orthocentre H_1 du triangle BCD .

3) Déterminer les lieux du centre de gravité G_1 et du centre O_1 du cercle circonscrit au triangle BCD .

VI Incrire dans un cercle donné un triangle directement semblable à un triangle donné,

1) sans conditions restrictives,

2) on impose la donnée d'un sommet sur le cercle,

3) on impose la direction d'un côté.

VII On considère trois segments AA' , BB' et CC' de longueurs différentes et portés par des droites parallèles distinctes. On note :

- α le point d'intersection des droites (BC) et $(B'C')$,
- β le point d'intersection des droites (CA) et $(C'A')$,
- γ le point d'intersection des droites (AB) et $(A'B')$,
- α' le point d'intersection des droites (BC') et $(B'C)$,
- β' le point d'intersection des droites (CA') et $(C'A)$,
- γ' le point d'intersection des droites (AB') et $(A'B)$.

Démontrer que les points suivants sont respectivement alignés :

$$\bullet \alpha, \beta, \gamma \quad \bullet \alpha, \beta', \gamma' \quad \bullet \alpha', \beta, \gamma' \quad \bullet \alpha', \beta', \gamma.$$

Que devient cette propriété quand on supprime la condition sur les longueurs de segments donnés ?

VIII On considère un rectangle $ABA'B'$, une droite D et un point O non situé sur D .

1) Déterminer le lieu des points Q , P' et Q' tels que $PQP'Q'$ soit un rectangle de centre O , directement semblable à $ABA'B'$ et dont le sommet P décrit D .

2) En déduire qu'il est en général impossible d'inscrire dans un rectangle donné un rectangle qui lui soit semblable. Préciser dans quel cas il y a exception.

IX Etant donnés deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, déterminer le lieux des centres des similitudes directes (respectivement indirectes) qui transforment $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$.

Construire le centre d'une telle similitude dont l'angle est donné.

X Etant donnés trois points A_0 , A_1 et A_2 , montrer qu'il existe une unique similitude directe f telle que :

$$A_1 = f(A_0) \text{ et } A_2 = f(A_1).$$

La caractériser et construire son centre s'il existe.

XI Etant donné un triangle ABC , rectangle en A , on désigne par H le pied de la hauteur issue de A .

1) On considère la similitude directe qui transforme les points A et B respectivement en C et A . Quel est son centre son rapport et son angle ?

Construire les itérés par f du point A .

2) Soit B' le symétrique de B par rapport à H . Construire le centre de la similitude directe qui transforme C et B en B' et A .

XII Etant donnés deux points distincts A et B , deux droites Δ et Δ' , on note respectivement $A'B'$ et $A''B''$ les symétriques du segment AB par rapport à Δ et Δ' .

Quel est le centre de la similitude qui transforme A' en B' et A'' en B'' ?

XIII Construire un triangle semblable à un triangle donné et dont les sommets soient situés sur trois droites parallèles données.

XIV Soit M un point quelconque et M' son image par une similitude donnée de centre O . Déterminer le lieu du point M quand on impose l'une des conditions suivantes :

- (MM') a une direction donnée,
- MM' a une longueur donnée,
- le cercle (OMM') a un rayon donné,
- (MM') passe par un point donné,
- le cercle (OMM') passe un point donné autre que O .

XV Soit s une similitude directe ou indirecte, caractériser la transformation :

$$s \circ f \circ s^{-1},$$

si f est successivement :

- la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$,
- la rotation $R(O, \alpha)$,
- l'homothétie $H(O, k)$,
- la similitude $S(O, k, \alpha)$,
- une symétrie d'axe Δ ,
- une symétrie-translation d'axe Δ et vecteur $\overrightarrow{AB}$.

XVI Soit r la rotation $R(O, \alpha)$, soit h l'homothétie $H(\omega, k)$, caractériser les transformations :

$$r \circ h \circ r^{-1} \circ h^{-1} \text{ et } h \circ r \circ h^{-1} \circ r^{-1}.$$

A quelle condition une rotation et une homothétie sont-elles permutables ?

XVII Etant données la rotation $r = R(o, \alpha)$ et l'homothétie $h = H(\omega, k)$, construire les centres O et O' des deux similitudes suivantes :

$$f = h \circ r \text{ et } f = r \circ h.$$

[On pourra chercher à construire une figure directement semblable à celle formée par les points Σ , O et Ω et suivant le cas le point $r(\Omega)$ ou $h(\Omega)$]

XVIII Etant données la similitude $S(O, k, \alpha)$, montrer qu'on peut la décomposer d'une infinité de façons en un produit $s = r \circ h$ où, $r = R(o, \alpha)$, $h = H(\omega, k)$ et l'un des points o ou ω peut être arbitrairement choisi.

Montrer que les points o sont les transformés des points ω par une similitude dont on précisera le centre, le rapport et l'angle.

XIX On considère deux droites D et D' qui se coupent en un point I . Une similitude directe f transforme D en D' . On note M' l'image par f du point courant M de D .

1) Montrer que les cercles (IMM') se recoupent en un point indépendant de M
 2) Déterminer le lieu des points M'' tels que le triangle $MM'M''$ reste semblable à un triangle donné.

3) Soit a et b deux réels donnés de somme non nulle, déterminer le lieu des points M'' tels que :

$$a\overrightarrow{MM''} + b\overrightarrow{M''M'} = \overrightarrow{0}.$$

4) Soit k le rapport de la similitude donnée, montrer que pour $a/b = \pm k$, on obtient deux droites perpendiculaires

XX Etant donnés deux segments AB et $A'B'$, de longueurs différentes, on considère les points A_1, A_2, B_1 et B_2 tels que :

$$\frac{\overline{A_1A}}{\overline{A_1A'}} = -\frac{\overline{A_2A}}{\overline{A_2A'}} = \frac{AB}{A'B'} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{B_1B}}{\overline{B_1B'}} = -\frac{\overline{B_2B}}{\overline{B_2B'}} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Montrer que les droites (A_1B_1) et (A_2B_2) sont perpendiculaires. On suppose que A_1 est distinct de B_1 et A_2 de B_2 .

XXI On considère un triangle ABC , on note A', B' et C' les milieux de ses côtés. Soit θ un nombre donné, les trois droites obtenues par rotation de (BC) , (CA) et (AB) d'un même angle θ , respectivement autour de A', B' et C' , déterminent un triangle PQR .

- 1) Déterminer le lieu des points P, Q et R .
- 2) Montrer que les centres des cercles circonscrits des triangles ABC et PQR coïncident.
- 3) Montrer que PQR est le transformé de ABC par une similitude directe dont on déterminera le centre, le rapport et l'angle.

XXII Etant donné un triangle ABC et trois points I, J, K ; on considère les triangles PQR directement semblables à ABC et tels que (QR) , (RP) et (PQ) passent respectivement par les points I, J , et K .

- 1) Montrer que les lieux géométriques des points P, Q et R sont trois cercles ayant un point commun O qui est le centre de similitude pour deux triangles de la famille.
- 2) Déterminer le plus grand des triangles PQR .
- 3) Examiner le cas particulier où, les points I, J, K n'étant pas alignés, le triangle ABC est : IJK, JKI ou KIJ . Construire le point O dans chacun des trois cas.

XXIII Etant donné un triangle abc et trois points A, B et C , on considère les triangles PQR directement semblables à abc et dont les sommets P, Q et R appartiennent respectivement aux droites (BC) , (CA) et (AB) .

- 1) Montrer qu'il existe toujours de tels triangles.
- 2) Démontrer que les cercles circonscrits aux triangles AQR, BRP et CPQ ont un point commun O qui est le centre de similitude de deux triangles de la famille.
- 3) Construire le point O dans les deux cas suivants :
 - abc est le triangle ABC lui-même
 - abc est un triangle équilatéral.



