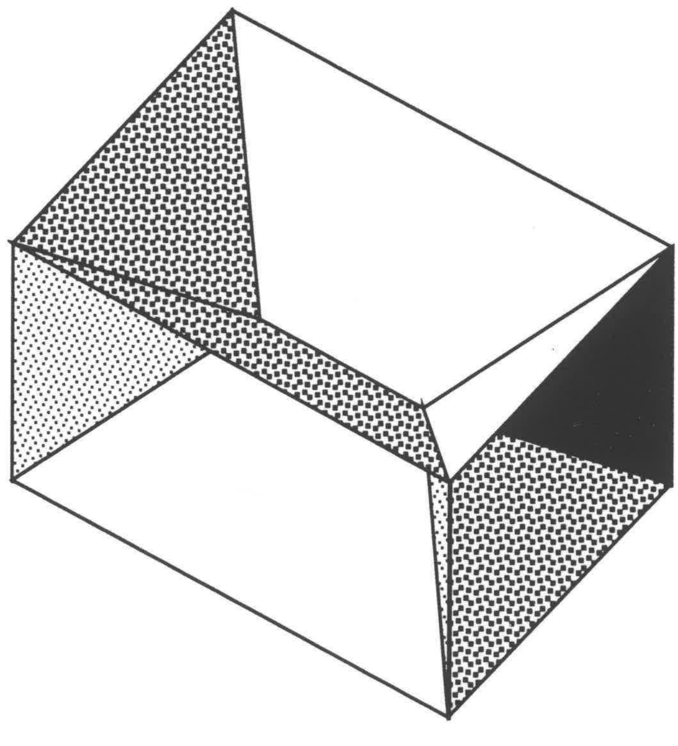
UNIVERSITE DE NANTES

I.R.E.M. des Pays de la loire
D.M.I.

Séminaire I.R.E.M. - A.P.M.E.P.

Scéance du 21 janvier 1993

Inégalités géométriques



B. Truffault

Sommaire

Séminaire I.R.E.M. - A.P.M.E.P.

Scéance du 21 janvier 1993

Inégalités géométriques

> ... et cependant avant que la nuit soit venue, j'ai vécu pour voir le dernier guerrier de l'antique race des Mohicans !
>
> James Fenimore Cooper

Après avoir lu - presque par hasard - un petit livre intitulé : "geométric inéqualities" ([1]), je n'ai pu que revenir sur ce que j'avais raconté ou écrit sur le sujet - essentiellement dans la cadre de la préparation au CAPES ou à l'agrégation. C'est ainsi que s'est décidé le principe d'un exposé au séminaire I.R.E.M. - A.P.M.E.P. renaissant. Ce petit fascicule en reprend la substance et la complète en proposant quelques résultats sous forme d'exercices. Au vu des notions mises en œuvre, on peut les qualifier d'élémentaires. Il n'empêche que certains sont loin d'être triviaux. C'est pourquoi les solutions sont ébauchées, de façon plus ou moins élaborée. Le parti-pris est purement géométrique, aussi je me suis dispensé de recourir à la dérivation.

N'ayant d'autre ambition que d'encourager mes semblables à explorer, exploiter et, le cas échéant, découvrir ce filon méconnu, je n'ai pas cherché à faire autorité. C'est pourquoi j'assume, par avance, le reproche d'avoir été superficiel, espérant, toutefois, ne pas être jugé insignifiant.

B. Truffault

Novembre 1992

---

1 Nicholas Kazarinoff, édition : New Mathematical Library (1961).

Inégalités géométriques

§ 1. Moyenne arithmétique et moyenne géométrique

*** Cas de deux nombres**

Commençons, modestement, en reprenant des faits bien connus. Considérons deux nombres positifs a et b, il découle de l'identité remarquable :

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2,$$

appliquée à $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ que :

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Autrement dit, la moyenne géométrique de deux nombres est toujours inférieure ou égale à leur moyenne arithmétique. En fait, on a obtenu beaucoup plus car il est clair qu'on est en présence d'une égalité si, et seulement si, a et b sont égaux.

Une application bien connue consite à prouver les deux affirmations qui suivent.

<u>Thérème</u> 1.

A. Parmi les rectangles de périmètre donné, c'est le carré qui a l'aire maximum.

B. Parmi les rectangles d'aire donnée, c'est le carré qui a le périmètre minimum.

<u>Démonstration</u> : considérons un rectangle de dimensions a et b, soit S son aire et P son périmètre. Il découle de la relation précédente que :

$$\sqrt{S} = \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} = \frac{P}{4}.$$

On a donc toujours $S \leq \frac{P^2}{16}$, l'égalité n'ayant lieu que si $a = b$, c'est-à-dire pour le carré. En conséquence :

- si P est donné, S est maximum si $a = b = \frac{P}{4}$,
- si S est donné, P est minimum si $a = b\sqrt{S}$. ◅

<u>Cas particulier</u> : nous verrons qu'il est utile de retenir que si a est un nombre positif, on a toujours :

$$a + \frac{1}{a} \geq 2$$

et que l'égalité équivaut à $a = 1$.

<u>Exercice</u> 1 : étant donnés un angle $x\hat{A}y$ et un point P de son intérieur, on considère les triangles ABC tels que que B appartienne à (Ox), C à (Oy) et BC passe par P. Déterminer le triangle ABC dont l'aire soit minimum.

*** Généralisation.**

Théorème 2 : si $a_1, \dots, a_n$ désignent n nombres positifs de somme na, on a toujours :

$$a_1 a_2 \dots a_n \leq a^n.$$

On est en présence d'une égalité, si et seulement si :

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n.$$

Démonstration : on procède par récurrence ([1]). Pour $n = 1$, il n'y a rien à démontrer. Soit $n > 1$, on suppose la proposition toujours vraie pour $n - 1$ nombres. Si :

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n,$$

l'égalité est évidente. Sinon, il existe parmi ces nombres un plus petit et un plus grand. On peut toujours supposer qu'il sont aux derniers rangs et poser :

$$a_{n-1} = a - h \text{ et } a_n = a + k \text{ où } h > 0 \text{ et } k \geq 0.$$

On les remplace respectivement par :

$$a'_{n-1} = a - h + k \text{ et } a'_n = a.$$

De sorte qu'on a :

$$a_1 + \dots + a_{n-2} + a'_{n-1} = (n-1)a.$$

L'hypothèse de récurrence se traduit :

$$a_1 \dots a_{n-2} a'_{n-1} \leq a^{n-1}.$$

On en déduit que :

$$a_1 \dots a'_{n-1} a'_n \leq a^n.$$

Or, on a :

$$a_{n-1} a_n = (a-h)(a+k) = a^2 + a(k-h) - hk \text{ et } a'_{n-1} a'_n = a(a-h+k) = a^2 + a(k-h)$$

d'où :

$$a_{n-1} a_n < a'_{n-1} a'_n$$

et ainsi :

$$a_1 \dots a_{n-1} a_n < a_1 \dots a'_{n-1} a'_n \leq a^n.$$

Ce qui achève la démonstration.

$\lhd$

On peut encore formuler ce résultat de la façon qui suit - rappelant qu'étant donnés n nombres positifs : $a_1, \dots, a_n$, on appelle leur *moyenne arithmétique* et, s'ils sont positifs, leur *moyenne géométrique* les nombres a et g tels que :

$$na = a_1 + \dots + a_n \text{ et } g^n = a_1 \dots a_n.$$

Théorème 3 : étant donnés des nombres positifs, leur moyenne géométrique est toujours inférieure à leur moyenne arithmétique. Il y a égalité si, et seulement si, les nombres donnés sont égaux entre eux.

Exercice 2 : parmi les parallélépipèdes rectangles dont l'aire latérale est donnée, déterminer les dimensions de celui dont le volume est maximum.

Exercice 3 : même question en considérant une boîte - obtenue en ne considérant que cinq des faces d'un parallélépipède.

Exercice 4 : déterminer les dimensions d'une boîte de conserve cylindrique de volume donné qui en optimisne la surface.

---

1 La convexité du logarithme est évidemment sous-jacente mais ce type d'argument est hors de propos dans ce contexte.

On peut aussi obtenir, par cette voie, des inégalités diverses.

Exercice 5 : a et b étant deux nombres positifs, montrer qu'on a :

$$\sqrt[n+1]{ab^n} \leq \frac{a+nb}{n+1}.$$

Exercice 6 : montrer que, pour tout entier n, non nul, on a :

$$n\,! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Exercice 7 : montrer que si a, b et c sont trois nombres positifs, on a :

$$9abc \leq (a+b+c)(bc+ca+ab).$$

Exercice 8 : montrer que si les a_i sont des nombres positifs, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) > n^2.$$

*** Moyenne harmonique**

On peut aussi appliquer ces idées en mettant en œuvre la moyenne harmonique. Rappelons en la définition.

Définition : on appelle *moyenne harmonique* de n nombres donnés $a_1, \dots, a_n$, le nombre h tel que :

$$\frac{n}{h} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}.$$

Autrement dit, la moyenne harmonique est l'inverse de la moyenne arithmétique des inverses.

Théorème 4 : étant donnés n nombres positifs de moyenne harmonique h et de moyenne géométrique g, on a toujours :

$$h \leq g.$$

Il y a égalité, si et seulement si, et seulement si, tous les nombres considérés sont égaux.

Démonstration : considérons n nombres positifs $a_1, \dots, a_n$ et notons $\hat{a}_i$ le produit de tous à l'exception de a_i. Le théorème 3 nous montre que :

$$(\hat{a}_1 \hat{a}_2 \dots \hat{a}_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \dots + \hat{a}_n}{n}.$$

L'égalité n'ayant lieu que si les $\hat{a}_i$ sont égaux entre eux, ce qui implique l'égalité des a_i. Or, on a :

$$\hat{a}_1 \hat{a}_2 \dots \hat{a}_n = (a_1 \dots a_n)^{n-1}.$$

Il s'ensuit que :

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = \frac{\hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \dots + \hat{a}_n}{a_1 \dots a_n} \geq n(a \dots a_n)^{\frac{n-1}{n} - 1} = n(a \dots a_n)^{-\frac{1}{n}}.$$

Ce qui donne :

$$\frac{n}{h} \geq \frac{n}{g}$$

On a donc bien $h \leq g$ et l'égalité a lieu si, et seulement si, tous les a_i sont égaux. $\lhd$

Corollaire : entre les moyennes arithmétique a, géométrique g et harmonique h de nombres donnés on a les inégalités :

$$h \leq g \leq a.$$

Exercice 9 : étant donné un triangle à tout un point M de son intérieur, on associe le triangle qui a pour sommets les pieds des céviennes de M - appelé triangle *pédal* de M. Déterminer le point dont le triangle pédal a une aire maximum (2).

§2 Problèmes d'isopérimétrie.

Au départ, un problème d'*isopérimétrie* est une question du type :

- déterminer dans une classe de figures de même périmètre, celle dont l'aire est maximum.

ou, ce qui est équivalent :

- déterminer parmi des figures de même aire, celle dont le périmètre est minimum.

On étend ces préoccupations à l'espace en remplaçant aire par volume et périmètre par surface latérale.

*** Les triangles.**

Théorème 5.

A. Parmi les triangles ayant un périmètre donné, c'est le triangle équilatéral qui a l'aire maximum.

B. Parmi les triangles ayant une aire donnée, c'est le triangle équilatéral qui a le périmètre minimum.

Démonstration : étant donné un triangle de côtés a, b et c, on sait exprimer son aire S au moyen de la formule de Héron :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

où p désigne le demi-périmètre. Or, on a :

$$[(p-a)(p-b)(p-c)]^{\frac{1}{3}} \leq \frac{p-a+p-b+p-c}{3} = \frac{p}{3}.$$

Comme tout le nombres en jeu sont positifs, ceci donne :

$$S \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}}.$$

L'égalité n'ayant lieu que si :

$$p-a = p-b = p-c,$$

c'est-à-dire si $a=b=c$. On conclut comme pour le rectangle. ⊲

---

2 Indication : soit ABC le triangle donné et M un point de son intérieur, PQR son triangle pédal. On note α, β, γ les coordonnées barycentriques de M relativement au repère (A,B,C). On rappelle que ces nombres sont proportionnels aux aires des triangles MBC, MCA et MAB. Utiliser l'associativité du barycentre pour exprimer les rapports $\frac{MQ}{MB}$ et $\frac{MR}{MC}$ en fonction de α, β, γ. En déduire l'aire de MQR …

*** Dualité.**

Ouvrons une parenthèse qui autorisera une économie de pensée non négligeable. On a pu noter que les théorèmes d'isopérimétrie vont par deux. Ils concernent des figures que nous appellerons, momentanément, les *"choses"* parmi lesquelles on distingue les *"machins"* - qu'on nous pardonne cette familiarité. Ces énoncés se présentent tous comme suit.

A. Parmi les choses de périmètre donné, c'est le machin qui a l'aire maximum.

B. Parmi les choses d'aire donnée, c'est le machin qui a le périmètre minimum.

Il semble évident que ces propositions sont équivalentes mais il n'est pas sans intérêt de justifier cette propriété dans les formes. Avant tout, il convient de noter que leur cohérence suppose qu'un "machin" soit bien défini par la donnée de son périmètre ou de son aire. Nous admettrons aussi que le périmètre et l'aire d'un "machin" varient dans le même sens. Tout ceci est vrai si un "machin" est défini à similitude près, comme comme c'est pratiquement toujours le cas.

Proposition 6 : les assertions A et B sont équivalentes.

Démonstration : on considère une "chose" de périmètre P et d'aire S, on lui associe deux "machins" :

- M_1 de périmètre P, on note son aire S_1,
- M_2 d'aire S, on note son périmètre P_2.

($A \Rightarrow B$) Si S est donné, il découle de A que $S \leq S_1$, il s'ensuit que $P_2 \leq P$ et B est vérifiée.

($B \Rightarrow A$) Si P est donné, il découle de B que $P_2 \leq P$, il s'ensuit que $S_1 \leq S$ et A est vérifiée. ◅

Notons enfin que tout ceci vaut, mutatis mutandi, pour l'espace.

Exercice 10 : parmi les triangles circonscrits à un cercle donné, quel est celui dont le périmètre est minimum ? Lequel a la plus petite aire ? ([3])

Exercice 11 : parmi les triangles inscrits dans un cercle donné, quel est celui dont l'aire est maximum ? lequel a le plus grand périmètre ? ([4])

*** Quadrilatères.**

On ne s'intéresse qu'à des quadrilatères propres car pour considérer l'aire d'une figure, on doit pouvoir définir son intérieur. La démonstration des propriétés analogues est en tout point semblable. Elle s'appuie sur une expression de l'aire d'un quadrilatère inscriptible inspirée de la formule de Héron.

Proposition 7.

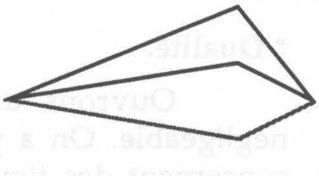
A. Parmi les quadrilatères ayant un périmètre donné, c'est le carré qui a l'aire maximum.

B. Parmi les quadrilatères ayant une aire donnée, c'est le carré qui a le périmètre minimum.

---

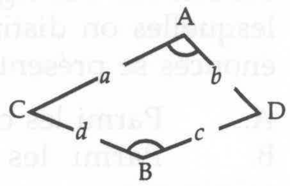
3 Indication : s'inspirer de la démonstration qui précède.

4 Indication : on évitera de s'égarer si l'on sait que les connaissances acquises au collège suffisent.



Démonstration : tout d'aborrd, il est clair, qu'un quadrilatère non convexe ne peut remplir aucune de ces conditions car en remplaçant deux côtés par leurs symétriques par rapport à la diagonale, située à l'extérieur, on peut augmenter l'aire sans changer le périmètre.

Considérons un quadrilatère convexe ACBD on convient de noter respectivement $a, b, c\ d$ les longueurs AC, AD, BD et BC ; soit S son aire et p son demi-périmètre. On a tout d'abord :



$$2S = ab \sin A + cd \sin B.$$

Il s'ensuit que :

$$4S^2 = a^2b^2 \sin^2 A + 2abcd \sin A \sin B + c^2d^2 \sin^2 B.$$

On applique la loi des cosinus, elle donne :

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos A = CD^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos B.$$

Ainsi, on a :

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab \cos A - 2cd \cos B,$$

puis :

$$(a^2 + b^2 - c^2 - d)^2 = 4a^2b^2 \cos^2 A - 8abcd \cos A \cos B + 4c^2d^2 \cos^2 B.$$

En ajoutant aux deux membres :

$$16S^2 = 4a^2b^2 \sin^2 A + 8abcd \sin A \sin B + 4c^2d^2 \sin^2 B,$$

il vient :

$$16S^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d)^2 =$$
$$4a^2b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + 4c^2d^2(\sin^2 B + \cos^2 B) - 8abcd(\cos A \cos B - \sin A \sin B)$$

puis :

$$16S^2 = 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d)^2 - 8abcd \cos(A + B).$$

Pour a, b, c et d données l'aire sera maximum si cos(A + B) est minimum, c'est-à-dire si A et B sont supplémentaires. Comme le quadrilatère considéré est convexe, il est alors inscriptible. Dans ces conditions, on a :

$$\begin{aligned}
16S^2 &= 4a^2b^2 + 4c^2d^2 + 8\,abcd - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 \\
&= 4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 \\
&= [2(ab + cd) + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)][2(ab + cd) - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)] \\
&= [(a + b)^2 - (c - d)^2][-(a - b)^2 + (c - d)^2] \\
&= (a + b + c - d)(a + b - c + d)(a - b + c + d)(-a + b + c + d) \\
&= 16(p - a)(p - b)(p - c)(p - d).
\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}.$$

Ce résultat étant acquis, la démonstration se conclut exactement comme celle qui vaut pour les triangles. ◅

Notons, en passant, qu'on a démontré l'assertion qui suit.

Théorème 8 : un quadrilatère dont les côtés sont donnés a une aire maximum s'il est inscriptible [5].

Exercice 12 : montrer que, parmi les prismes de volume donné, dont la base est un quadrilatère, c'est le cube qui a la plus petite surface latérale.

5 Parenthèse : étant donné un quadrilatère est il possible de le déformer afin de le rendre inscriptible ? (en conservant les longueurs de ses côtés - évidemment). Si oui, construire le résultat de cette opération à la règle et au compas.

Exercice 13 : montrer que, parmi les tétraèdres ayant un volume donné, c'est le tétraèdre régulier qui a la plus petite surface latérale (6).

*** Polygones.**

Il serait tentant de chercher à étendre les théorèmes d'isopérimétrie aux polygones de plus de quatre côtés, or, il semble que ce soit impossible par des voies purement géométriques et qu'il faille recourir au théorème d'isopérimétrie lui-même.

*** Le théorème d'isopérimétrie.**

Le résultat le plus important, dans ce domaine, est appelé le théorème d'isopérimétrie. En fait, il est double et s'énonce comme suit.

Théorème A : parmi les figures planes ayant un périmètre donné, le cercle a l'aire maximum.

Théorème B : parmi les figures planes ayant une aire donnée, le cercle a le périmètre minimum.

Il convient de préciser que les figures en question sont des domaines plans bordés par des courbes simples fermées. Si l'on note le périmètre P et l'aire S. Ces énoncés se réunissent en une seule formule, célèbre sous le nom d'*inégalité isopérimétrique* :

$$\boxed{p^2 \geq 4\pi S.}$$

Moins légendaire que la quadrature du cercle ou la duplication du cube, ce problème a mis plus de deux millénaires pour trouver une solution définitive. On retrouve, chez Euclide, des préoccupations de ce type relatives au rectangle. Archimède connaissait le résultat sans savoir le démontrer et l'on connaît, rapportés par Pappus, les éléments d'un traité intitulé "figures isopérimétriques" écrit par un certain Zenodros. Le même Pappus était persuadé d'avoir démontré que le cercle a une aire plus grande que tout polygone de même périmètre et son travail n'est pas loin d'être acceptable, au regard des critères actuels. A la fin du XVIIIe, le suisse Lhuilier reprend le fambeau, suivi par son compatriote Steiner (1796-1863) qui propose plusieurs démonstrations par des voies purement géométriques. Seulement, le feuilleton ne s'arrête pas là et c'est Weierstrass qui, après avoir mis en évidence une faille dans la preuve de Steiner, va régler la question de façon définitive. Pour ce faire, il lui faudra recourir à l'analyse.

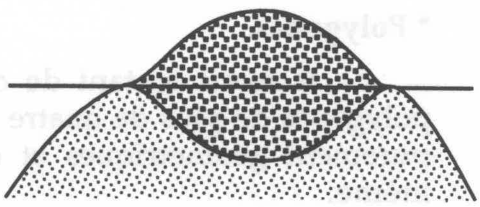
On trouvera deux démonstrations de ce résultat dans le livre de Berger (12-11). Dans sa théorie des fonctions, Valiron utilise les séries de Fourier ! (tome 1, p. 191) (7).

---

6 Indication : inscrire le tétraèdre dans un parallélépipède, comparer les volumes … déformer en conservant les volumes …

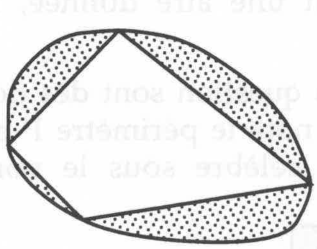
7 A priori, c'est étonnant mais n'est-il pas est naturel de recourir à des fonctions périodiques pour paramétrer un contour fermé ?

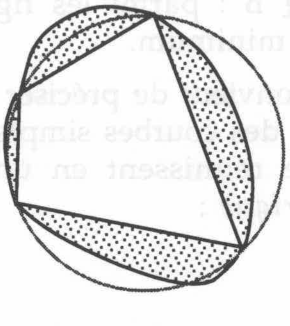
*** Une question de logique.**



La mésaventure de Steiner mérite d'être contée. Une des méthodes qu'il utilisait consistait à prouver qu'on peut se limiter à des contours convexes, en observant que le remplacement de parties concaves par leur symétrique par rapport à ce qu'on appelle des droites d'appui, augmente l'aire sans modifier le périmètre.

Considérons un contour convexe, si ce n'est pas un cercle, on peut trouver, sur celui-ci, quatre points A, B, C, D non coycliques. Du fait de la convexité, le quadrilatère ABCD est entièrement contenu à l'intérieur du contour. Il est donc possible de déformer ce quadrilère, afin de le rendre inscriptible, en déplaçant les quatre portions du contour initial. Ce faisant, on ne modifie pas le périmètre et le théorème 8 montre que l'aire est augmentée.





Seul le cercle résiste à une telle opération, on en conclut que c'est la solution du problème d'isopérimétrie !

En procédant ainsi, on commet l'erreur classique qui consiste à conclure au vu de la seule analyse : si la solution existe, elle est unique, on la connaît ... mais ...

existe-t-elle effectivement ?

C'est Weierstrass qui, en 1869, a mis en évidence cette faille et afin de convaincre les sceptiques, proposa l'argument suivant. Considérons un entier positif n, autre que 1. Nous savons que n^2 est plus grand que n, alors que $1^2=1$. Ceci prouve qu'aucun entier positif, autre que 1, n'est maximum. De là à conclure que 1 est le plus grand des entiers, il n'y a qu'un pas. Or, c'est précisément ce pas qui a été franchi.

Exercice 14. Problème de Didon.

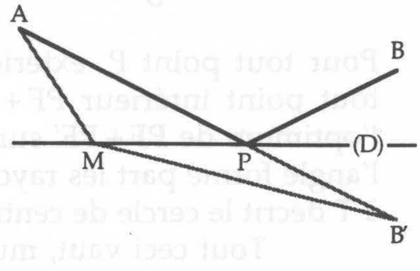
La Légende rapporte qu'une femme, nommée Didon, après bien des pérégrinations, accosta en Afrique, non loin de la Sicile. Le souverain du lieu ayant accepté de lui céder autant de terrain que pouvait en "entourer la peau d'un bœuf" et même de lui fournir la dite peau. Didon la découpe en fines lamelles qui, mises boût à boût forment une corde de belle longueur qu'elle utilise pour délimiter son bien. C'était la fondation de Carthage. Quelle était la forme du territoire ainsi délimité ? [8]

8 Indication : l'histoire se passe au bord de la mer et Didon était rouée.

§ 3. Le principe de réflexion

Commençons par une question connue. Etant donnés deux points A et B, situés du même côté d'une droite D, quel est le plus cours chemin qui va de A à B en passant par un point de D ?

Soit B′ le symétrique de B par rapport à D, considérons un point M de D.

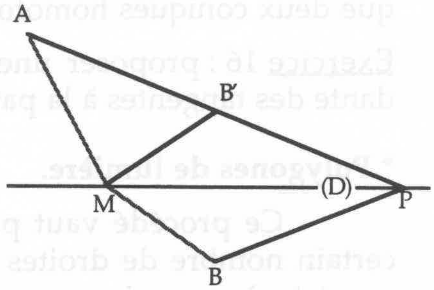


On a toujours :

$$AM + MB = AM + MB'.$$

La solution est nécessairement le point P, intersection de D avec la droite (AB′) et ce point convient effectivement.

Si les points A et B sont situés de part et d'autre de B, la question devient banale. On peut alors rechercher le point de D où l'une des différences :



$$MA - MB \quad \text{ou} \quad MB - MA$$

est maximum. On procède de la même façon.

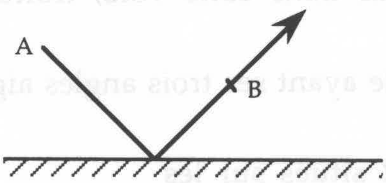
On a :

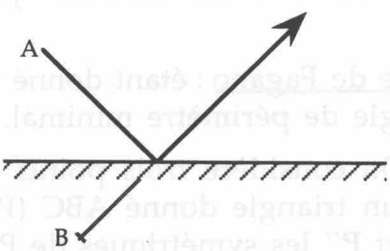
$$|MA - MB| = |MA - MB'| \leq AB'.$$

Le maximum possible est donc AB′. Si la droite (AB′) coupe D en un point P, il est atteint par le chemin APB. Dans le cas contraire, il est possible de monter que :

$$|MA - MB'| \text{ tend vers } AB',$$

quand M s'éloigne indéfiniment, il n'existe donc pas de solution.





Notons que, dans le premier cas, la droite D est bissectrice extérieure du triangle APB et dans le second, elle est bissectrice intérieure - s'il existe une solution.

La loi qui se dégage de ces résultats est attribuée à Héron. Elle correspond, en optique, au principe de Fermat - ou de Descartes. De ce point de vue, on a un unique problème : déterminer le parcours d'un rayon lumineux partant d'un point pour passer par un autre, après réflexion, en acceptant qu'un des points soit éventuellement virtuel.

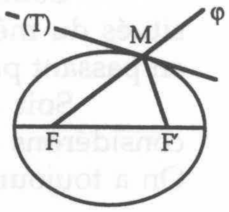
Ce principe s'applique, au premier degré, pour déterminer des polygones de lumière - voir un peu plus loin) - mais il est possible d'en tirer des conclusions plus inattendues.

<u>Exercice</u> 15 : parmi les triangles ayant une base donnée et un périmètre donné, c'est le triangle isocèle qui a l'aire maximum [9].

---

9 Indication : ce n'est peut-être pas par hasard que la question n'est pas venue plus tôt sur le tapis.

*** Tangentes aux coniques**



Etant donnée une ellipse de foyer F et F', de grand axe $2a$, considérons la tangente T en un point M. Nous savons que cette courbe est la ligne de niveau $2a$ de la fonction :

$$M \mapsto MF + MF'.$$

Pour tout point P, extérieur à l'ellipse, on a $PF + PF' > 2a$ et pour tout point intérieur $PF + PF' < 2a$. De sorte que le point M réalise l'optimum de $PF + PF'$ sur la droite D. Il s'ensuit que T est la bissectrice extérieure de l'angle formé part les rayons-vecteurs. et que le point φ, symétrique de F' par rapport à T décrit le cercle de centre F et de rayon $2a$.

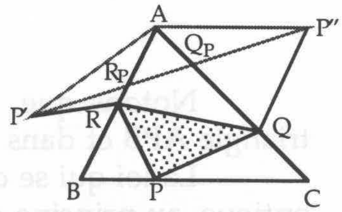
Tout ceci vaut, mutatis mutandi, pour l'hyperbole. On en déduit, sans peine, que deux coniques homofocales se coupent à angle droit.

Exercice 16 : proposer une démonstration de ce type pour la propriété correspondante des tangentes à la parabole.

*** Polygones de lumière.**

Ce procédé vaut pour des chemins plus complexes qui doivent toucher un certain nombre de droites dans un ordre donné. Il suffit de réitérer l'opération qui consiste à supprimer un "miroir" en remplaçant une partie du trajet par son symétrique par rapport à celui-ci. Si tout se passe bien, on se ramène ainsi à un problème de plus court trajet d'un point à un autre. On trouve des exemples dans tous les manuels de lycée. Cependant, on voit rarement se dessiner une esquisse de généralisation. Avant de faire quelques pas dans cette voie, traitons le cas du triangle.

Problème de Fagano : étant donné un triangle ayant ses trois angles aigus, y inscrire un triangle de périmètre minimal.



On considère trois points P, Q et R situés sur les côtés d'un triangle donné ABC (P sur le côté BC, ...). On note P' et P'' les symétriques de P par rapport aux droites (AB) et (AC). On a :

$$RP = RP' \text{ et } QP = QP'',$$

de sorte que :

$$PQ + QR + RP = P'Q + QR + RP''.$$

Comme le triangle a ses trois angles aigus, la droite (P'P'') coupe les côtés AB et AC en Q_P et R_P et l'on a :

$$\text{périmètre } PQR \geq P'P'' = \text{périmètre } PQ_PR_P.$$

Comme :

$$P'P'' = 2AP \, .\sin A,$$

cette longueur est minimum si P est le pied de la hauteur issue de A. Aucune hypothèse ne particularisant le sommet A, ce résultat vaut aussi pour Q et R. Ainsi, notant I, J et K les pieds des hauteurs, on a montré que :

$$\text{périmètre } PQR \geq \text{périmètre } IJK.$$

De plus, il est facile de voir que l'égalité n'a lieu que si PQR est le triangle orthique.

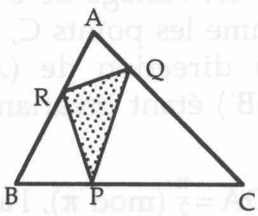
Question : si le triangle possède un angle obtus, cette démarche ne s'applique plus, même si l'on accepte que PQR soit inscrit dans un sens élargi - pourquoi ? Quelle est alors la solution du problème ?

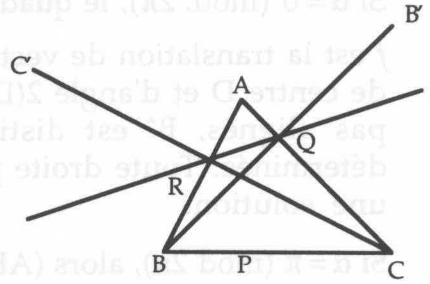
On peut lever la restriction sur les angles en reformulant le problème comme suit.

<u>Triangle de lumière</u> : étant donné un triangle, on admet que ses côtés sont sont des miroirs sans limite physique. Déterminer la trajectoire d'un rayon lumineux qui se réfléchit sur les trois côtés.

Soit ABC le triangle donné, considérons un triangle PQR inscrit dans ABC et notons s_a ,s_b ,s_c le réflexions sur (BC), (CA) et (AB). Si PQR est une solution, la droite (QR) est invariante par l'antidéplacement $g = s_b \circ s_a \circ s_c$, c'est donc l'axe de cette symétrie glissée. On le détermine en notant que si B′ et C′ sont les symétriques de B et C respectivement par rapport à (AC) et (AB), on a :

$$g(B) = B' \text{ et } g(C') = C.$$

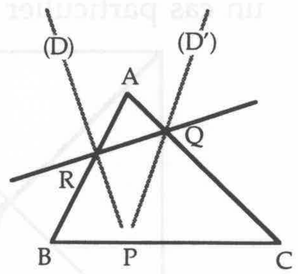




L'axe de g est donc la droite qui joint les milieux des segments BB′ et C′C. Il s'ensuit que Q et R sont les pieds des hauteurs issues de B et C.

Réciproquement, si Q et R sont ces deux points, notons D et D′ les droites symétriques de (QR) par rapport à (AB) et (AC). Il est clair que :

$$s_a(D) = s_a \circ s_c(QR) = s_b \circ s_b \circ s_a \circ s_c(QR) = s_b(QR) = D'.$$



Ainsi, D et D′ sont symétriques par rapport à (BC). Comme ces trois droites ne sont pas parallèles, elles concourent en un point P. Le triangle PQR est donc solution.

Comme aucune hypothèse ne particularise l'un des sommets, il est alors prouvé que le triangle orthique du triangle donné est l'unique solution du problème posé.

<u>Remarque</u> : en prime, on a montré que les côtés d'un triangle sont bissectrices de son triangle orthique. On est donc en présence d'un polygone de lumière. On pourrait montrer que, de façon générale, un problème de plus court trajet qui … , s'il existe, est une trajectoire de lumière.

Plus généralement, étant donné un polygone à n côtés $A_0A_1 \dots A_{n-1}$ (10), on note f l'isométrie obtenue par la composition des symétries d'axes $(A_{i-1}A_i)$ pour $i = 1, \dots, n$.

- Si n est impair, f est un antidéplacement, il laisse donc une seule droite globalement invariante. Le problème des polygones de lumière admet alors une solution unique.
- Si n est pair, $n = 2p$, f est un déplacement d'angle :

$$\alpha = 2\sum_{k=1}^{p}(A_{2k-2}A_{2k-1}, A_{2k-1}A_{2k}) \text{ (mod. } 2\pi)$$

---

10 On pose $A_n = A_0$.

- Si $\alpha \neq 0$ (mod. π) il n'existe pas de droite globalement invariante par f. Il n'existe donc pas de polygone de lumière.
- Si $\alpha = 0$ (mod. π), f est soit une translation, soit un demi-tour. Toute droite gobalement invariante par f définit alors un polygone de lumière.

Afin de fixer les idées, regardons de plus près ce qui se passe pour $n = 4$. On considère un quadrilatère ABCD, f est le composé des symétries d'axe (AB), (BC), (CD) et (DA). On a :

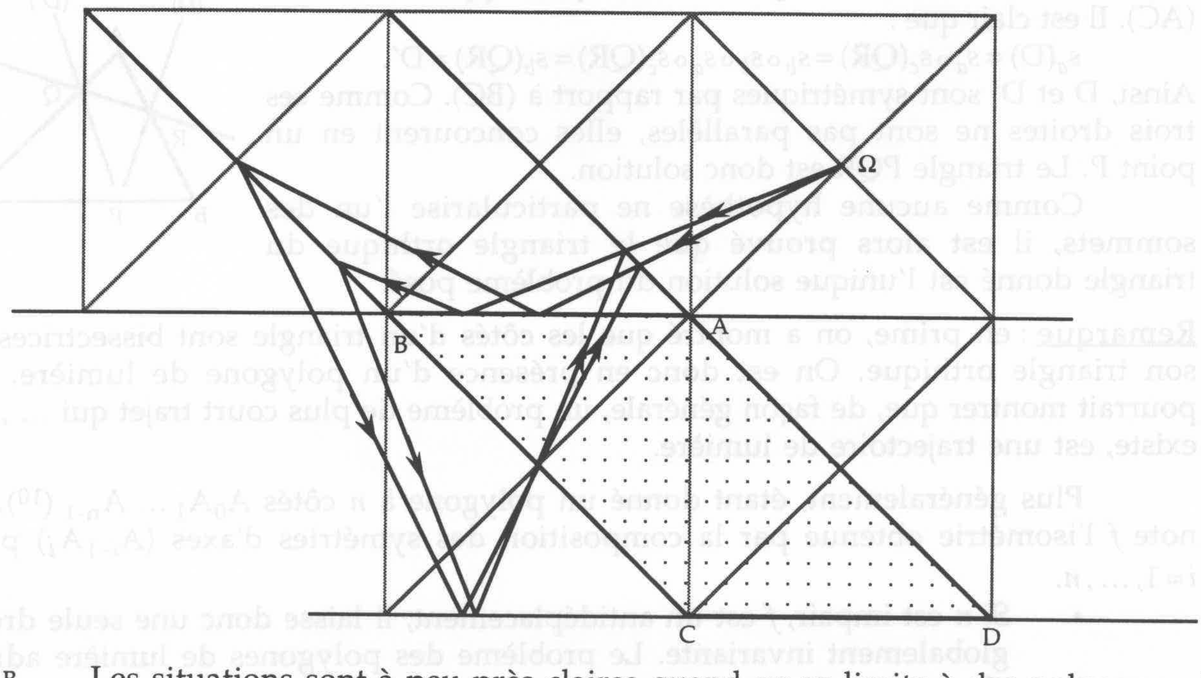
$$\alpha = 2[(AB, BC) + (CD, DA)] \text{ (mod. } 2\pi),$$

il n'existe de solution que dans les cas où $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$ (mod. 2π).

- Si $\alpha = 0$ (mod. 2π), le quadrilatère donné est inscriptible et l'application f est la translation de vecteur $\overrightarrow{BB'}$ où B′ est l'image de B par la rotation de centre D et d'angle 2(DC, DA). Comme les points C, D et A ne sont pas alignés, B′ est distinct de B, la direction de (A′D′) est bien déterminée. Toute droite parallèle à (BB′) étant invariante par f donne une solution.

- Si $\alpha = \pi$ (mod 2π), alors (AB, BC) + (CD,DA $= \frac{\pi}{2}$ (mod π), l'application f est un demi-tour et toute droite qui passe par le centre Ω de f donne une solution.

Afin de préciser concrètement la question, on peut illustrer ce propos dans un cas particulier comme celui du schéma ci-dessous.



N.B. Les situations sont à peu près claires quand on se limite à des polygones de lumière qui se referment après un ou deux tours, encore que leur réalité puisse poser des casse-tête. Il en va tout autrement si l'on étudie des trajectoires plus complexes auquel cas, on tombe sur des problèmes d'ergodicité qui sont encore ouverts - y compris pour le triangle - mais ceci est une toute autre histoire.

§ 4. Somme de distances.

Si le principe de symétrie est un outil efficace pour résoudre les problèmes de parcours de longueur minimum, il est rarement utile pour affronter les problèmes concernant la somme des distances d'un point à d'autres points donnés. Certes, on peut utiliser une rotation pour résoudre le problème de Fermat (ex. 17) mais, en règle générale, on est plutôt démuni face à ce type de question.

Exercice 17. Problème de Fermat.

Etant donné un triangle, déterminer le point du plan tel que la somme des distances aux trois sommets soit minimum ([11]).

Exercice 18 : étant donné un quadrilatère déterminer le point tel que la somme des distances à ses trois sommets soit minimum ([12]).

Exercice 19 : étant donné un triangle, déterminer le, où les points, intérieurs, tels que la sommme des distances aux trois côtés soit minimum, respectivement maximum.

Exercice 20 : étant donné un triangle, déterminer le, où les points, intérieurs, dont le triangle podaire a l'aire maximum ([13]).

Les résultats des deux exercices suivants peuvent, compte-tenu de leur nature, être considérés comme récents. Le premier est une conjecture formulée par Erdös en 1935 et résolue par Mordell en 1937. Les démonstrations "lisibles" datent des années 50-60, le second date de 1961.

Exercice 21. Théorème d'Erdös-Mordell

Etant donné un triangle ABC et un point M de son intérieur, on considère les projections orthogonales P, Q et R de M sur les côtés BC, CA et AB. Démontrer que :

$$MA + MB + MC \geq 2(MP + MQ + MR)$$

et déterminer dans quel cas il y a égalité ([14]).

Exercice 22 : les données étant celles de l'exercice 21, montrer que :

$$MA \,.\, MB \,.\, MC \geq (MP + MQ)(MQ + MR)(MQ + MR) \quad ([15]).$$

11 Indication : utiliser une rotation de 60° pour construire un chemin de longueur égale à la somme considérée et reliant un sommet à un point fixe. Si aucun des angles n'est supérieur à 120°, on peut conclure. Dans le cas contraire, que se passe-t-il ?

12 Indication : si le quadrilatère est convexe, c'est immédiat. Sinon, il semble qu'il faille "ramer".

13 Indication : remplacer les pieds des perpendiculaires par les symétriques du points par rapport aux côtés.

14 Indication : on note P_1 et P_2 les projections de Q et R sur (BC), on définit de même les points Q_1 et Q_2, R_1 et R_2 sur les deux autres côtés. On note que les triangles QPP_1 et CMQ sont semblables, on exprime PP_1 en fonction PQ, MC et MQ. On utilise ensuite le fait que $P_1P_2 \leq QR$ …

15 Indication : combiner l'inégalité obtenue en comparant l'aire du triangle à BC.(MA + MP), puis avec son analogue pour le point symétrique M par rapport à la bissectrice intérieure de l'angle en A …

*** Une remarque.**

On doit être conscient que, sous des formulations apparamment voisines, on est en présence de problèmes de natures très différentes. La distance AM, d'un point A, donné, à un point quelconque M n'a aucune propriété algébrique intéressante. Il en va tout autrement de AM^2 qui est une forme quadratique - c'est ce que traduit la formule de Leibniz. Ce fait s'illustre par le rôle joué en statistique par la variance alors que, a priori, on pourrait imaginer que c'est la moyenne des écarts absolus à la moyenne qui aurait vocation à traduire la dispersion d'une variable statistique. De même, en mécanique, le moment d'inertie s'impose de lui-même.

De son côté, la distance algébrique d'un point à une droite donnée est une forme affine - elle s'exprime par l'équation normale de la droite. Les lignes de niveau d'une somme de distances d'un point à des droites données sont donc formées de segments de droites qui forment vite un réseau inextricable. En dire plus sur ce point serait hors de propos.

Les trois exercices suivants entendent illustrer cette remarque.

<u>Exercice</u> 23 : quel est le point dont la somme des carrés des distances à *n* points donnés est minimum ?

<u>Exercice</u> 24 : parmi les droites ayant une direction donnée, quelle est celle dont la somme des distances à des points donnés est minimum ? [16]

<u>Exercice</u> 25. <u>Point de Lemoine</u>

Etant donné un triangle, quel est le point de son intérieur dont la somme des carrés des distances aux côtés est minimum. En donner une autre caractérisation - il en a de nombreuses [17].

---

16 Indication : étant donné un vecteur $\vec{u}$ et A un point A, la fonction $M \longmapsto (\overline{AM}.\vec{u})^2$ est aussi une forme quadratique.

17 Indication : utiliser des coordonnées barycentriques et appliquer l'identité de Lagrange.

§ 5. Le problème de Sylvester.

La relation d'ordre de $\mathcal{R}$ est omniprésente en géométrie et il est bon d'être conscient qu'elle intervient, y compris, quand on croit traiter de l'incidence "à l'état pur". C'est pourquoi il nous a semblé intéressant de terminer par un résultat, méconnu du fait de son peu d'utilité pratique. Il est pourtant essentiel.

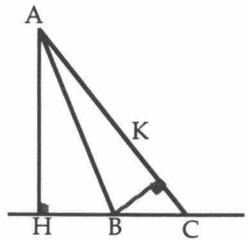
En 1893, Sylvester pose le problème suivant :

"Prouver qu'il n'est pas possible de disposer un nombre fini quelconque de points réels de façon qu'une droite joignant deux d'entre eux passe toujours par un troisième, à moins qu'ils ne soient sur une même droite".

Cette question agita les milieux mathémathiques de l'époque, mais en vain, et il faudra attendre 1948 pour disposer d'une preuve réellement satisfaisante. Elle est due à Kelly ([18]). Adoptons pour le résultat une formulation "positive" plus lisible.

Théorème : si n points ne sont pas alignés, il existe une droite contenant exactement deux d'entre eux.

Démonstration : soit P un ensemble de n points non alignés, considérons toutes les associations possibles de l'un d'entre eux avec une droite passant par deux autres et qui ne contienne pas le premier - il y en a, au plus, $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$. Il existe donc des points A, B et C de P tels que la distance entre A et la droite (CD) soit minimum.



Soit H le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur (BC), si cette droite contient trois points de P, deux au moins sont du même côté de H, on peut alors admettre que

$$0 \leq HB < HC.$$

Soit K le pied de la perpendiculaire abaissée de B sur (AC). Dans ces conditions, il est immédiat que $BK < AH$, ce qui contredit le choix de A et de (BC). Une telle droite ne peut donc contenir plus de deux points de P. ◅

Cette démonstration a le mérite de la simplicité. Cependant, il convient de souligner qu'elle n'est pas entièrement satisfaisante. En effet, elle fait intervenir la structure euclidienne du plan. Or, cette propriété appartient au tronc commun des géométries non euclidiennes qui acceptent les quatre premiers postulats d'Euclide sans le cinquième sur l'unicité des parallèles. On doit donc pouvoir la démontrer sans recours à la distance. Ceci est une toute autre histoire qu'on trouvera aussi dans Coxeter (p. 175, déjà cité). Enfin, puisque tel était le thème traité concluons sur une inégalité.

Etant donnés n points non alignés, le nombre des droites passant par exactement deux d'entre eux est au moins égal à $\frac{3n}{7}$!

Exerccice 26 : trouver un cas où ce minorant est atteint.

---

[18] On trouvera l'histoire et une bibliographie copieuse et dans Coxeter : introduction to géométry (ed. John Wiley) p. 65.

Exercices : ébauches de solutions

Afin de ne pas allonger démesurément la rédaction, nous avons pris quelques libertés avec les bons usages interdisant d'utiliser un symboble sans l'avoir explicitement défini. Il est donc convenu une bonne fois pour toutes qu'en l'absence d'autre précison :

M, N … sont des points courants ;
P, S et V sont le périmètre, la surface et le volume de l'objet considéré ;
ABC désigne le triangle donné, *a*, *b*, *c* sont ses côtés et *p* son demi-périmètre ;
etc. …

§1

Exercice 1 : on choisit un repère dont les axes prolongent les côtés de l'angle et tel que P ait pour coordonnées (1, 1). Une droite qui passe par ce point admet pour équation :

$$\alpha x + \beta y = \alpha + \beta.$$

Elle rencontre les axes aux points de coordonnées :

$$\mathrm{M} : (1 + \frac{\beta}{\alpha}, 0) \ \text{ et } \ \mathrm{N} : (0, 1 + \frac{\alpha}{\beta})$$

L'aire du triangle OMN est donc proportionnelle à :

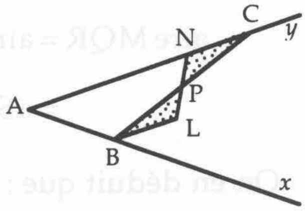
$$(1 + \frac{\beta}{\alpha})(1 + \frac{\alpha}{\beta}) = 2 + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}.$$

Or, on a :

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \leq 2$$

et l'égalité n'a lieu que si $\alpha = \beta$. Le miniumum est atteint si P est le milieu de MN.

On peut préférer démontrer ceci directement. On parachute la solution et on la justifie en s'inspirant de la figure ci-contre où (BL) est parallèle à (A*y*).



Exercice 2 : *a*, *b*, *c* étant les arêtes, on a :

$$\mathrm{V}^2 = (abc)^2 = ab \,.\, bc \,.\, ca \leq [\frac{ab + bc + ca}{3}]^3 = (\frac{\mathrm{S}}{6})^3.$$

…

Exercice 3 : si c'est une face *"ab"* qui manque, on a :

$$4\mathrm{V}^2 = 4(abc)^2 = ab \,.\, 2bc \,.\, 2ca \leq [\frac{ab + 2bc + 2ca}{3}]^3 = (\frac{\mathrm{S}}{3})^3.$$

V est maximum si $ab = 2bc = 2ca$. C'est-à-dire si $a = b = 2c$.

Mieux, on se ramène au problème précédent en doublant la boîte par symétrie.

<u>Exercice</u> 4 : *d* et *h* désignant respectivement le diamètre et la hauteur, on a :

$$V = \frac{\pi\, d^2 h}{4} \quad \text{et} \quad S = \frac{\pi d^2}{2} + \pi d h.$$

L'astuce consiste à écrire :

$$S = \frac{\pi d^2}{2} + \frac{4V}{d} = \frac{\pi d^2}{2} + \frac{2V}{d} + \frac{2V}{d}.$$

On a donc :

$$2\pi V^2 = = \frac{\pi d^2}{2} \cdot \frac{2V}{d} \cdot \frac{2V}{d} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{\pi d^2}{2} + \frac{2V}{d} + \frac{2V}{d}\right)^3 = \frac{S^3}{27}.$$

Ainsi, S est minimum si :

$$\frac{\pi d^2}{2} = \frac{2V}{d}, \quad V = \frac{\pi d^3}{4},$$

c'est-à-dire si :

$$h = d = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}.$$

<u>Exercice</u> 5 : on appplique toujours le même théorème à *b* et *n* nombre égaux à *a*.

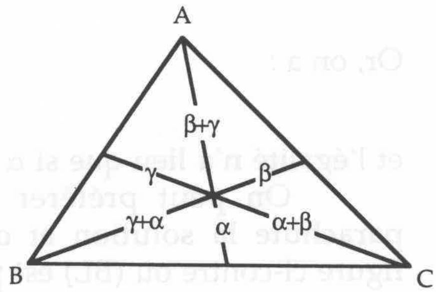
<u>Exercice</u> 6 : il y a une simplification par *n* et les *n* premiers entiers ne sont pas égaux.

<u>Exercice</u> 7 : on a :

$$3^3 abc \leq (a+b+c)^3 \quad \text{et} \quad 3^3 (abc)^2 \leq (bc + ca + ab)^3.$$

<u>Exercice</u> 8 : le développement de ce produit, contient n^2 termes. Parmi eux, on retrouve les n produits $a_i a_i^{-1}$ et les $n(n-1)$ restants sont inverses deux à deux. La moyenne géométrique du tout vaut donc 1.

<u>Exercice</u> 9 : il découle de l'associativité du barycentre que les segments découpés par M sur BQ et CR ont des longueurs proportionnelles aux nombres mentionnés sur le schéma ci-contre. Tenant compte de $\alpha + \beta + \gamma = 1$, on a donc :



$$\text{aire MQR} = \text{aire MBC} \cdot \frac{MQ}{MB} \cdot \frac{MR}{MC}$$
$$= \alpha S \cdot \frac{\beta}{\gamma+\alpha} \cdot \frac{\gamma}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha\beta\gamma}{(1-\beta)(1-\gamma)} S.$$

On en déduit que :

$$\text{aire PQR} = \frac{2\alpha\beta\gamma S}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)} = \frac{2\alpha\beta\gamma S}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha - \alpha\beta\gamma} = \frac{2S}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} - 1}.$$

On applique alors la théorème sur la moyenne harmonique. On obtient :

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \geq 3^2.$$

Ce qui permet de conclure que :

$$\text{aire PQR} \leq \frac{S}{4},$$

l'égalité ayant lieu si $\alpha = \beta = \gamma$, c'est-à-dire si M est le centre de gravité.

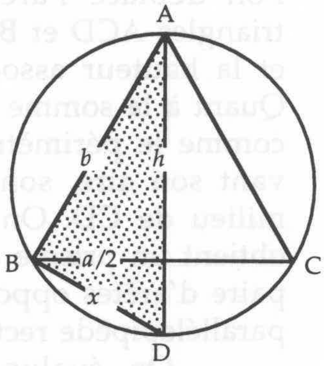
§2

<u>Exercice</u> 10 : considérons un tel triangle, on sait que $S = pr$, où r désigne le rayon du cercle. On considère deux triangles équilatéraux :

- T_1 dont le rayon du cercle inscrit est r, soit $2p_1$ son périmètre ;
- T_2 de périmètre $2p$, soit r_2 le rayon de son cercle inscrit et S_2 son aire.

Nous avons que $S_2 \geq S$ et donc $r_2 \geq r$. Il s'ensuit que $2p \geq 2p_1$.

<u>Exercice</u> 11 : il est facile d'établir que, si l'un des côtés est donné, c'est un des deux triangles isocèles inscrits dans le cercle, admettant ce côté pour base qui a la plus grande aire. Il en va de même pour le périmètre mais la démonstration est un peu laborieuse([1]). On peut donc ne s'intéresser qu'aux triangles isocèles en A, inscrits dans un cercle de rayon R.



Avec les notations données par le schéma, les relations métriques du triangle rectangle montrent que :

$$bx = \frac{2Ra}{2} \quad \text{et } b^2 = 2Rh = 4R^2 - x^2.$$

Optimisons l'aire. Son carré s'exprime :

$$S^2 = \frac{a^2h^2}{4} = \frac{b^2x^2}{4R^2} \cdot \frac{b^2}{4R^2}$$
$$= \frac{x^2(4R^2 - x^2)^3}{16R^4}.$$

On ajuste les facteurs de façon que leur moyenne arithmétique soit indépendante de x :

$$S^2 = \frac{27}{16R^4}\, x^2\, \frac{4R^2 - x^2}{3} \cdot \frac{4R^2 - x^2}{3} \cdot \frac{4R^2 - x^2}{3} \leq \frac{27}{16R^4} \cdot (R^2)^4 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} R^2\right)^2.$$

Il y a égalité si :

$$3x^2 = 4R^2 - x^2,$$

c'est-à-dire si $R = x$.

On procède de la même façon pour le périmètre, on a :

$$p = b + \frac{a}{2} = b\left(1 + \frac{x}{2R}\right) = \frac{1}{2R}(2R - x)\sqrt{4R^2 - x^2}.$$

On en déduit que :

$$p^2 = \frac{1}{4R^2}(2R + x)^3(2R - x).$$

On conclut toujours de la même façon ([2]).

---

1 La bissectrice intérieure de l'angle A recoupe le cercle en D tel que DB = DC = d. On vérifie que

$$c \sin\frac{A}{2} = d \sin C \quad \text{et} \quad b \sin\frac{A}{2} = d \sin B$$

Il s'ensuit que :

$$(b+c) \sin\frac{A}{2} = d(\sin B + \sin C) = d \cdot 2 \sin\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B - C}{2}.$$

Comme A est fixe, la somme $b + c$ est maximum si B = C.

2 Notons que la première propriété se déduit de la seconde, par un raisonnement analogue à celui de l'exercice précédent, en utilisant la relation

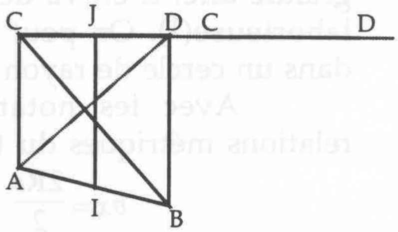
$$S = \frac{abc}{4R}.$$

En revanche, la démarche inverse ne donne rien.

Exercice 12 : le prisme droit de même base et de même hauteur que celui donné, a même volume et une aire latérale inférieure (ou égale). Un prisme ayant une base carrée de même aire que la précédente et toujours de même hauteur aura même volume et une aire inférieure. Enfin, l'aire d'un cube de même volume sera encore inférieure.

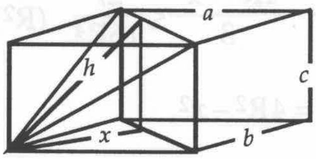
Exercice 13 : il est toujours possible d'inscrire un tétraèdre dans un parallélépipède de façon que les arêtes opposées du premier soient des diagonales des faces du second. Si V est le volume du tétraèdre, celui du parallélépipède est 3V. En effet, pour obtenir le premier, on enlève au second quatre fois un sixième de son volume.

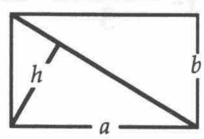
On note que si l'on fait glisser une arête du tétraèdre sur son support, une des bases du parallélépipède n'est pas modifiée et la hauteur correspondante ne change pas. Le volume est donc conservé.



Soit ABCD le tétraèdre, I et J les pieds de la perpendiculaire commune aux droites (AB) et (CD). Si l'on déplace l'arête CD sur son support, les deux triangles ACD et BCD conservent leur côté commun et et la hauteur associée. Leur aire est donc invariante. Quant à la somme des aires de ABC et ABD, elle varie comme le périmètre du triangle IDC. Celui-ci conservant son aire, son périmètre est mimimum s'il est isocèle. Auquel cas, J est le milieu de CD. On renouvelle l'opération en amenant le milieu de AB en I. On obtient un prisme droit. En réitérant cette opération, si nécessaire, pour une autre paire d'arêtes opposées, on obtient un tétraèdre, de même volume, inscrit dans un parallélépipède rectangle.

On évalue alors l'aire du tétraèdre en fonction des dimensions du parallélépipède.





Avec les données suggérées par le schéma, on a :

$$x\sqrt{a^2+b^2} = ab \quad \text{et} \quad h^2 = x^2 + c^2.$$

Ce qui nous conduit sans peine à l'expression :

$$S^2 = 4(a^2+b^2)h^2 = 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2).$$

La moyenne géométrique des trois termes de la somme obtenue étant constante, on en conclut que S est maximum si $a = b = c$.

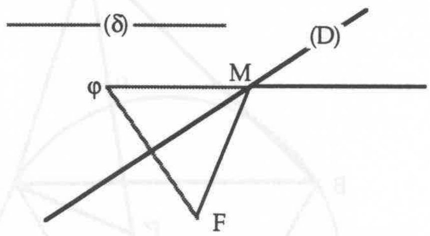
Exercice 14 : si l'on était pas au bord de la mer, le territoire maximum délimité serait un cercle de périmètre P, son aire serait $\frac{P^2}{4\pi}$. Si l'on choisit un contour partant d'un point de la côte à un autre, supposant le rivage rectiligne, on double le contour par symétrie. L'optimum est alors un cercle de périmètre 2P. La solution est donc un demi disque dont l'aire est $\frac{P^2}{2\pi}$ - le double de l'autre.

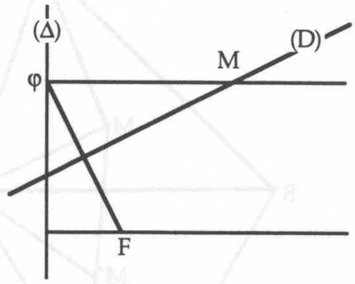
§3

Exercice 15 : le problème dual est un cas particulier du plus court chemin d'un point à un autre en passant par un point d'une droite [1].

Exercice 16 : on formule la question en termes de trajectoire de lumière. Etant donné un point F, une droite D ne passant pas par F et une direction δ, autre que celle de D. Déterminer une trajectoire de lumière, partant de F et après réflexion en M sur D ait pour direction δ.

La solution est brève. Soit φ le symétrique de F par rapport à D, considérons un point M de D, les droites (FM) et (Mφ) sont symétriques par rapport à D. Elles fournissent une solution si, et seulement si, (φM) est la droite de direction δ qui passe par φ. La solution existe toujours et elle est unique.





Etant donné une parabole de foyer F et de directrice (Δ), soit M l'un de ses points, on note φ sa projection sur Δ et D la médiatrice de Fφ. Comme MF = Mφ, M est sur D. Les deux droites (FM) et (φM) constituent donc la solution du problème précédent pour F, D et la direction normale à D. Comme cette solution est unique, M est le seul point de la parabole situé sur D. Cette droite n'étant pas parallèle à l'axe de la parabole, c'est la tangente en M [2].

1 Montrer ceci directement est laborieux.

2 Les coniques étant des courbes du second degré, une une telle courbe et une droite ont en commun zéro, un ou deux points. Si l'on excepte les droites parallèles à l'axe d'une parabole, une tangente à une conique peut se définir comme une droite qui en contient un unique point.

§4

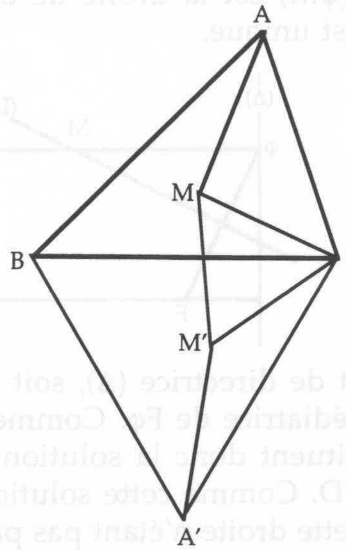
<u>Exercice</u> 17 : on peut toujours supposer que le triangle ABC est orienté dans le sens direct. Soit M un point de son intérieur, on note A′ et M′ les transformés de B et M par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On a :

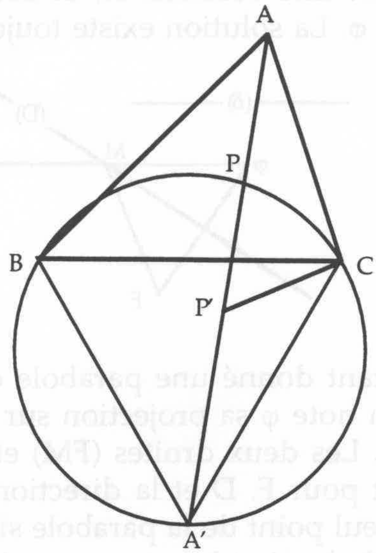
$$MB = M'A' \quad \text{et} \quad MC = MM',$$

de sorte que :

$$MA + MB + MC = AM + MM' + M'A'.$$

La somme des distances de M aux trois sommets est égale à la longueur du chemin AMM′A′.





Considérons des points P et P′ tels que A, P, P′ et A′ soient alignés dans cet ordre, on a :

$$C\hat{P}B = C\hat{P}'A' = \pi - C\hat{P}'P = \frac{2\pi}{3},$$

P est donc le second point d'intersection de la droite (AA′) avec cercle circonscrit au triangle équilatéral. Si aucun des angles du triangle n'est supérieur à 120°, P et P′ sont respectivement à l'intérieur de ABC et A′BC. Le point P réalise alors l'optimum attendu. [1]

Dans le cas contraire, si, par exemple, $\hat{C}$ est supérieur à 120°, les points M et M′ sont situés à l'extérieur de l'angle $A\hat{C}A'$. Le chemin AMM′A′ traverse alors l'angle opposé par le sommet et sa longueur est supérieure à la sommme [2] :

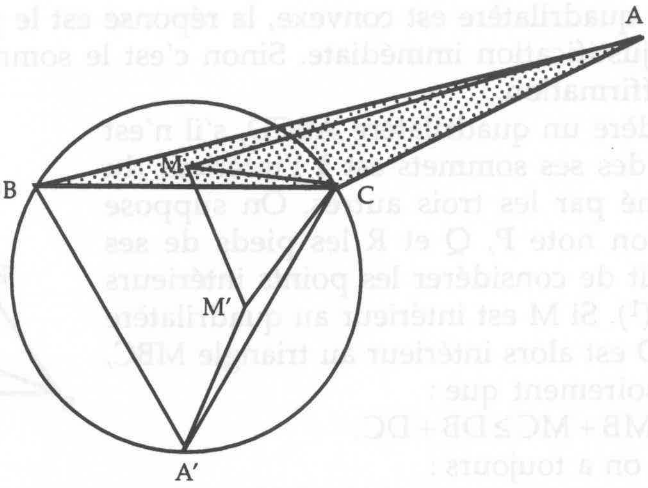
$$CA + CA' = CA + CB.$$

L'optimum est donc atteint en C. C'est la somme des deux côtés les plus petits.

---

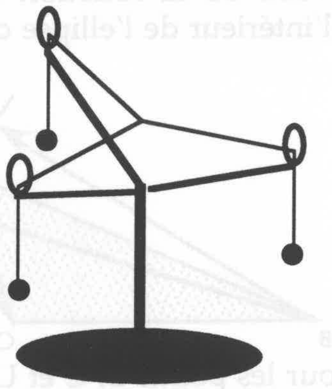
1 L'existence et l'unicité montrent que de ce point, on voit les trois côtés du triangle sous un angle de 120°. En outre, ce point est commun aux trois droites analogues à (AA′). C'est le *point de Fermat* du triangle - pour d'autres le *point de Toriccelli*.

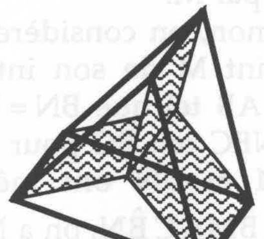
2 Ce point est détaillé pour l'exercice suivant.



Remarque : dans le premier cas, le résultat admet des interpétations physiques remarquables.

1) Si l'on considère trois forces, de même intensité, appliquées en un même point et dont les supports passent par les sommets d'un tel triangle. On a équilibre si ce forces s'appliquent de Fermat du triangle.

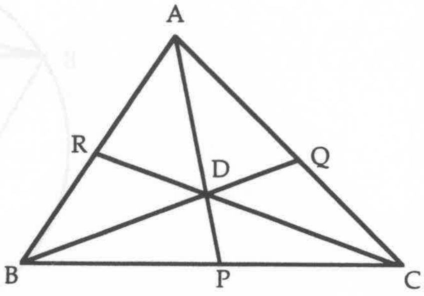




2) On retrouve ceci dans la forme des films de savon qu'on réalise au moyen d'un support constitué de tiges matérialisant les arêtes d'un prisme à base triangulaire. C'est normal puisque, correspondant à des tensions minimales, cette surface a une section minimale.

Exercice 18 : si le quadrilatère est convexe, la réponse est le point d'intersection des diagonales et la justification immédiate. Sinon c'est le sommet de l'angle rentrant. Justifions cette affirmation.

On considère un quadrilatère ABCD, s'il n'est pas convexe, un des ses sommets est à l'intérieur du triangle déterminé par les trois autres. On suppose que c'est D et l'on note P, Q et R les pieds de ses céviennes. Il suffit de considérer les points intérieurs au triangle ABC ([1]). Si M est intérieur au quadrilatère AQDR, le point D est alors intérieur au triangle MBC, admettant provisoirement que :



$$MB + MC \geq DB + DC.$$

On a terminé car on a toujours :

$$MA + MD \geq AD$$

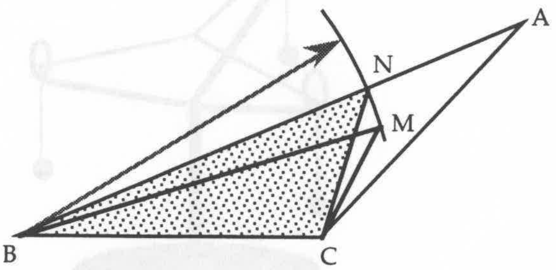
et ainsi :

$$MA + MB + MC + MD \geq DA + DB + DC.$$

Ceci vaut aussi pour les régions BPDR et CQDP, le résultat est donc acquis.

Reste à justifier l'inégalité admise. On peut la tenir pour évidente ou encore accepter de faire intervenir les lignes de niveau de la fonction $M \mapsto MB + MC$, auquel cas, il est clair que le point D est situé à l'intérieur de l'ellipse de foyers B et C qui passe par M.

Sinon, on considère un triangle ABC et un point M de son intérieur. Soit N le point de AB tel que $BN = BM$, les triangles MBC et NBC ont BC pour côté commun, les côtés BM et BN ont même longueur et comme $C\hat{B}M \leq C\hat{B}N$, on a $MC \leq NC$, puis :



$$MB + MC \geq NB + NC.$$

En outre, il découle de l'inégalité triangulaire pour les points B, C et U que :

$$NB + NC \leq NB + NA + AC = AB + AC.$$

On en déduit l'inégalité attendue ([2]).

Exercice 19 : notons P, Q, R les pieds de perpendiculaires abaissées de M sur les côtés du triangle et α, β, γ les coordonnées barycentriques de M relatives à (A, B, C). On sait que :

$$a.MP = 2\alpha S\ ,\ b.MQ = 2\beta S\ ,\ c.MR = 2\gamma S.$$

La fonction à optimiser est, à un facteur près :

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c}.$$

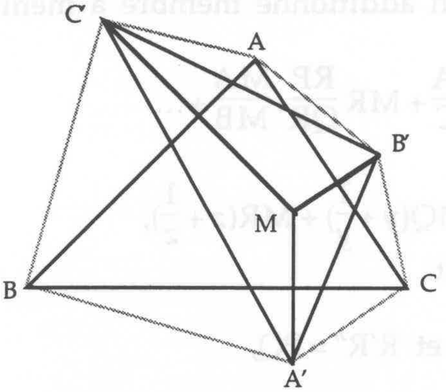
où $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Elle est constante si le triangle est équilatéral. Sinon ses lignes de niveau sont les parallèles à la droite qui contient les pieds des bissectrices extérieures du triangle. Elle atteint ses extrema en des sommets. Il est alors facile - mais guère passionnant - de passer en revue tous les cas possibles.

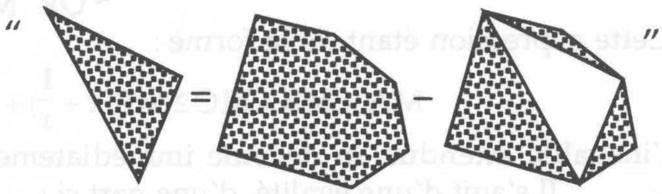
---

1 De façon générale, si des points sont situés dans un même demi-plan, limité par une droite D, il est facile de vérifier que tout point situé de l'autre côté de D, est plus éloigné de chacun d'eux que son symétrique par rapport à D. Le minimum de la somme des distances d'un point à des points donnés ne peut donc être atteint que sur l'enveloppe convexe de ceux-ci. Son existence découle du fait que cette fonction est continue sur ce compact.

2 Tout ceci n'est guère glorieux et illustre bien la pathologie des sommes de distances. S'il devait en être autrement, les coniques seraient des objets de la plus grande banalité … ce qui n'est pas.

<u>Exercice</u> 20 : il revient au même d'optimiser l'aire du triangle formé par les symétriques A', B' et C' du point M par rapport aux côtés du triangle.





On travaille sur des aires orientées ([1]), suivant le schéma proposé. L'aire de l'hexagone AB'CA'BC' est 2S, notons T celle du complément au triangle. Elle s'exprime :

$$2T = \overrightarrow{AC'} \wedge \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BA'} \wedge \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CB'} \wedge \overrightarrow{CA'} = MA^2 \sin 2A + MB^2 \sin 2B + MC^2 \sin 2C.$$

Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, on a :

$$2 \text{ aire } OBC = R^2 \sin 2A \;,\; 2 \text{ aire } OCA = R^2 \sin 2B \;,\; 2 \text{ aire } OAB = R^2 \sin 2C.$$

Il s'ensuit que O est le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients sin 2A, sin 2B, sin 2C et que :

$$2S = R^2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$$

La formule de Leiniz donne :

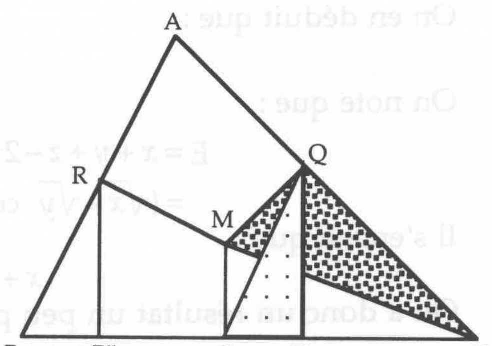
$$2T = MA^2 \sin 2A + MB^2 \sin 2B + MC^2 \sin 2C = 2S\left(1 + \frac{OM^2}{R^2}\right).$$

On peut alors conclure que :

$$\text{Aire } A'B'C' = 2S - T = S\left(1 - \frac{OM^2}{R^2}\right).$$

La réponse est donc le centre du cercle circonscrit au triangle considéré. Ajoutons qu'on a établi, en passant, que A', B', C' sont alignés si, et seulement si, M est sur le cercle circonscrit (droite de Steiner).

<u>Exercice</u> 21 : il est facile de montrer que les triangles P'PQ et QMC sont semblables et d'échanger les rôles de Q et R, pour montrer que :



$$PP' = MQ\frac{PQ}{MC} \text{ et } PP'' = MR\frac{PR}{MB}.$$

On a donc :

$$P'P'' = PP' + PP'' = MQ\frac{PQ}{MC} + MR\frac{PR}{MB}.$$

Comme $QR \geq P'P''$, on écrit que :

1 Cette démarche vaut pour tout point du plan et ce, quel que soit le cas de figure. En effet, elle repose sur l'addition des aires orientées qu'on justifie par la relation :

$$\text{Aire } ABC = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA}$$

Il n'y aura donc qu'un effort modeste à consentir pour rendre conventionnelle la rédaction, un peu "leste" proposée.

$$MA \geq MA\frac{P'P''}{QR}.$$

On en déduit deux inégalités analogues qu'on additionne membre à membre. Ce qui donne :

$$MA + MB + MC \geq MQ\frac{PQ}{QR}\cdot\frac{MA}{MC} + MR\frac{RP}{QR}\cdot\frac{MA}{MB} + \cdots$$

Cette expression étant de la forme :

$$MA + MB + MC \geq MP(x + \frac{1}{x}) + MQ(y + \frac{1}{y}) + MR(z + \frac{1}{z}),$$

l'inégalité attendue en découle immédiatement.

Il s'agit d'une égalité, d'une part si :

$$P'P'' = RQ \ , \ Q'Q'' = PQ \text{ et } R'R'' = PQ,$$

d'autre part si si $x = y = z = 1$, c'est-à-dire si :

MA, MB et MC sont proportionnels à MP, MQ et MR.

On a alors :

$$P'P'' = RQ \ , \ Q'Q'' = PQ \text{ et } R'R'' = PQ,$$

où Q' et Q", R' et R" désignent les points analogues à P' et P". La premier groupe de conditions entraîne que les triangles ABC et PQR ont leurs côtés parallèles deux à deux. Ils sont donc homothétiques. Le point M est alors leur centre de gravité commun. L'autre condition peut alors se traduire :

"les médianes sont proportionnelles aux côtés".

On vérifie que ceci exige que le triangle soit équilatéral (1).

Coxeter propose une seconde démonstration plus courte mais peut-être "moins naturelle" (2). Il est commode de poser :

$$x = MA\ ,\ y = MB\ ,\ z = MC \text{ et } p = MP\ ,\ q = MQ\ ,\ r = MR.$$

On considère les triangles MBC , MCA et MAC, on note encore :

$$2\alpha = B\hat{M}C\ ,\ 2\beta = C\hat{M}A\ ,\ 2\gamma = A\hat{M}B$$

et enfin p', q', r' les distances de M aux pieds bissectrices de ces angles. On partage l'aire du triangle OBC par la bissectrice, ce qui donne :

$$yz\sin 2\alpha = p'(y+z)\sin\alpha.$$

On a par ailleurs :

$$y + z \geq 2\sqrt{yz}.$$

On en déduit que :

$$\sqrt{yz}\cos\alpha \geq p'.$$

On note que :

$$\begin{aligned} E &= x + y + z - 2\sqrt{yz}\cos\alpha - 2\sqrt{zx}\cos\beta - 2\sqrt{xy}\cos\gamma \\ &= (\sqrt{x} - \sqrt{y}\ \cos\gamma - \sqrt{z}\cos\beta)^2 + (\sqrt{y}\sin\gamma - \sqrt{z}\sin\beta)^2 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$x + y + z - 2(p' + q' + r') \geq E \geq 0.$$

On a donc un résultat un peu plus fort que celui attendu :

$$x + y + z \geq 2(p' + q' + r') \geq 2(p + q + r).$$

L'égalité entraîne que $x = y = z$ et $\sqrt{y}\sin\gamma - \sqrt{z}\cos\beta = 0$, ainsi que les relations analogues. Il s'ensuit que $\alpha = \beta = \gamma$. Le triangle est alors équilatéral et M est son centre.

---

1 On peu utiliser la "formule de la médiane" mais il y a peut-être plus simple.
2 Due, elle aussi, à Mordell et datant de 1960.

Exercice 22 : gardons les notations $x = \mathrm{MA}$ et $p = \mathrm{MP}$ etc. Comme $x + p$ est plus grand que la hauteur issue de A, on a :

$$a(x+p) \geq 2\mathrm{S} = ap + bq + cr$$

et ainsi :

$$ax \geq bq + cr.$$

Pour le point symétrique de M par rappport à la bissectrice intérieure de l'angle en A, cette relation devient :

$$ax \geq br + cq.$$

On a donc :

$$2ax \geq bq + cr + br + cq = (b+c)(q+r).$$

Il s'ensuit que :

$$8abc.xyz \geq (b+c)(c+a)(a+b)(q+r)(r+p)(p+q).$$

On termine comme on en a maintenant l'habitude.

Exercice 23 : la réponse découle immédiatement de la formule de Leibniz.

Exercice 24 : étant donné un vecteur $\vec{u}$, la démarche qui conduit à la formule de Leibniz, appliquée à la fonction :

$$\mathrm{M} \mapsto \sum_i a_i(\overrightarrow{\mathrm{A}_i\mathrm{M}}.\vec{u})^2$$

produit la relation suivante :

$$\sum_i a_i(\overrightarrow{\mathrm{A}_i\mathrm{M}}.\vec{u})^2 = \sum_i a_i(\overrightarrow{\mathrm{GA}_i}.\vec{u})^2 + (\sum_i a_i)(\overrightarrow{\mathrm{GM}}.\vec{u})^2$$

On en déduit que les lignes de niveau sont les droites orthogonales à $\vec{u}$. Si $\vec{u}$ est un vecteur unitaire orthogonal à la direction donnée. cette fonction est celle décrite dans l'énoncé.

Exercice 25 : la relation de Lagrange s'exprime [1] :

$$(a^2+b^2+c^2)(p^2+q^2+r^2) = (ap+bq+cr) + (br-cq)^2 + (cp-ar)^2 + (ap-bq)^2.$$

Si a, b, c sont les côtés d'un triangle et p, q, r sont les distances d'un point M aux côtés, les deux nombres :

$$a^2+b^2+c^2 \quad \text{et} \quad ap+bq+cr = 2\mathrm{S}$$

sont fixes. Ainsi, $p^2+q^2+r^2$ est minimum si :

$$(br-cq)^2 + (cp-ar)^2 + (ap-bq)^2 = 0.$$

Autrement dit, si les distances p, q et r sont proportionnelles à a, b et c. Dans ces conditions, les aires des triangles OBC, OCA et OAB sont proportionnelles à a^2, b^2 et c^2. On en conclut que l'optimum attendu se réalise au barycentre des points A, B et C affectés des coefficients a^2, b^2 et c^2.

La solution s'appelle de *point de Lemoine*, ou encore *centre des symédianes* car c'est le point où concourent les droites symétriques des médianes par rapports aux bissectrices correspondantes. C'est aussi le point de concours des droites joignant respectivement A, B et C aux sommets du triangle formé par les tangentes en A, B et C au cercle circoncrit. Oublions ces deux propriétés pour n'en retenir qu'une troisième.

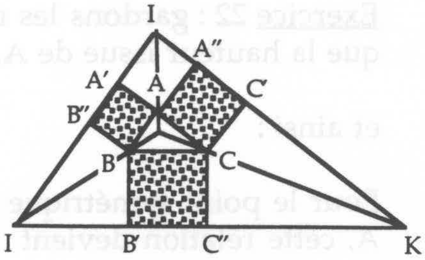
---

1 Elle traduit que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ pour l'angle des deux vecteurs de coordonnées (a,b,c) et (p,q,r).

Considérons les carrés :

CBB′C″, ACC′A″ et BABA′B″,

construits, extérieurement au triangle, sur ses côtés. Les droites (B′C″), (C′A″) et (A′B″) déterminent un triangle IJK, transformé de ABC par une homothétie dont le centre P est le point de concours des droites (AI), (BJ) et (CK) et le rapport s'exprime :



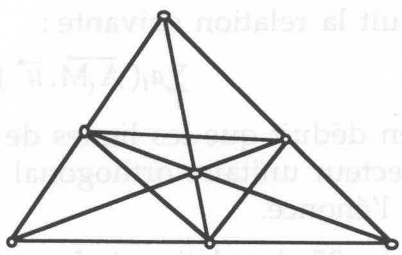
$$\frac{x+a}{x}=\frac{y+b}{y}=\frac{z+z}{z},$$

où x, y et z sont les distances de P aux côtés de ABC. Il s'ensuit que x, y et z sont proportionnels à a, b et c. En conséquence, P est le barycentre de A, B et C affectés des coefficients a^2, b^2 et c^2.

§5

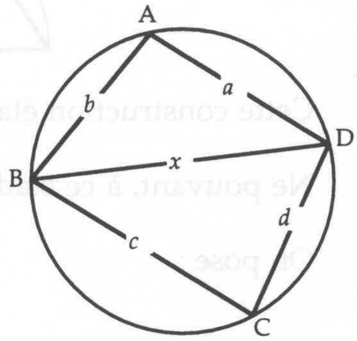
<u>Exercice</u> 26 :

$$\text{“}\,\frac{3\times 7}{7}=3\,\text{”}.$$



Appendice

A propos du quadrilatère inscriptible



La question posée en note, page 10, peut sembler anodine. Elle mérite, néanmoins, qu'on lui apporte une réponse. Considérons un quadrilatère ABCD - dans ce contexte, il ne peut être que convexe. Notons :

$$\mathrm{DA}=a\ ,\ \mathrm{AB}=b\ ,\ \mathrm{BC}=c\ ,\ \mathrm{CD}=d.$$

La loi des cosinus montre que :

$$a^2+b^2-2ab\cos \mathrm{A}=\mathrm{BD}^2=c^2+d^2-2cd\cos \mathrm{C}.$$

Si ABCD est inscriptible, les angles A et C sont supplémentaires, on a donc :

$$\cos \mathrm{C}=-\cos \mathrm{A}$$

et ainsi :

$$2(ab+cd)\cos \mathrm{A}=a^2+b^2-c^2-\mathrm{d}^2=(a+\mathrm{b})^2-(c-d)^2-2(ab+\mathrm{cd}).$$

Il s'ensuit que :

$$2(ab+cd)(\cos \mathrm{A}+1)=(a+\mathrm{b})^2-(c-d)^2,$$

puis :

$$4(ab+cd)\cos^2\frac{\mathrm{A}}{2}=(a+\mathrm{b})^2-(c-d)^2.$$

De l'inégalité triangulaire on déduit que :

$$a+b+d>c \quad \text{et} \quad a+b+c>d,$$

puis :

$$a+b>|c-d|.$$

Ainsi, il existe deux nombres positifs x et y tels que :

$$x^2=ab+cd \quad \text{et} \quad y^2=(a+b)^2-(c-d)^2$$

Il sont tels que :

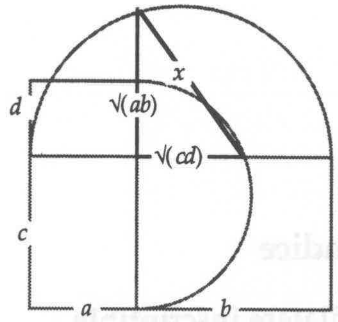
$$\cos\frac{\mathrm{A}}{2}=\frac{y}{2x}.$$

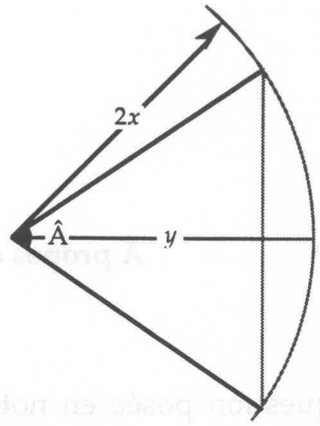
On suppose maintenant que a, b, c et d sont les côtés d'un quadrilatère donné. Les nombres x et y, exprimés ci-dessus existent et l'on sait construire des segment de longueurs x et y au moyen des relations métriques du triangle rectangle. Comme

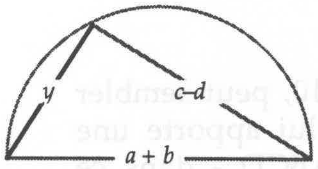
$$y^2-4x^2=(a+b)^2-(c-d)^2-4(ab+cd)=(a-b)^2-(c+d)^2<0.$$

pour une raison déjà invoquée. Il est possible de contruire un angle de sommet A tel que :

$$\cos\frac{\mathrm{A}}{2}=\frac{y}{2x}.$$







Cette construction étant effectuée, on met en place les points B et D tels que :

$$AB = b \ \text{ et } \ AD = a.$$

Ne pouvant, à ce stade, affirmer l'existence d'un point C tel que :

$$BC = c \ \text{ et } \ DC = d,$$

On pose :

$$\mathscr{C} = \frac{c^2 + d^2 - BD^2}{2cd}.$$

La vocation évidente de ce nombre étant, si tous se passe bien, de décrire $\cos C$. Par construction, on a :

$$BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos A.$$

On déduit que :

$$2cd\,\mathscr{C} = c^2 + d^2 - a^2 - b^2 + 2ab \cos A.$$

Or, on sait que :

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{y^2}{4x^2} = \frac{(a+b)^2 - (c-d)^2}{4(ab+cd)} \quad \text{et} \quad \cos A = 2\cos^2\frac{A}{2} - 1.$$

On en déduit l'égalité :

$$2(ab+cd)\cos A = a^2 + b^2 - c^2 - d^2.$$

Qu'on additionne membre à membre avec celle, précédemment obtenue :

$$2cd\,\mathscr{C} = c^2 + d^2 - a^2 - b^2 + 2ab \cos A.$$

Ce qui donne :

$$4cd(\cos A + \mathscr{C}) = 0.$$

Il s'ensuit que :

$$\mathscr{C} = -\cos A.$$

Ce qui permet de conclure simultanément qu'il existe un point C tel que :

$$BC = c\ ,\ DC = d \ \text{ et } \ B\widehat{C}D = \pi - A.$$

Il est donc toujours possible de construire, à la règle et au compas, un quadrilatère inscriptible dont les côtés sont ceux d'un quadrilatère donné.