

I.R.E.M.

A.P.M.E.P.

UNIVERSITE DE NANTES
FACULTE DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES
Département de Mathématiques et d'Informatique

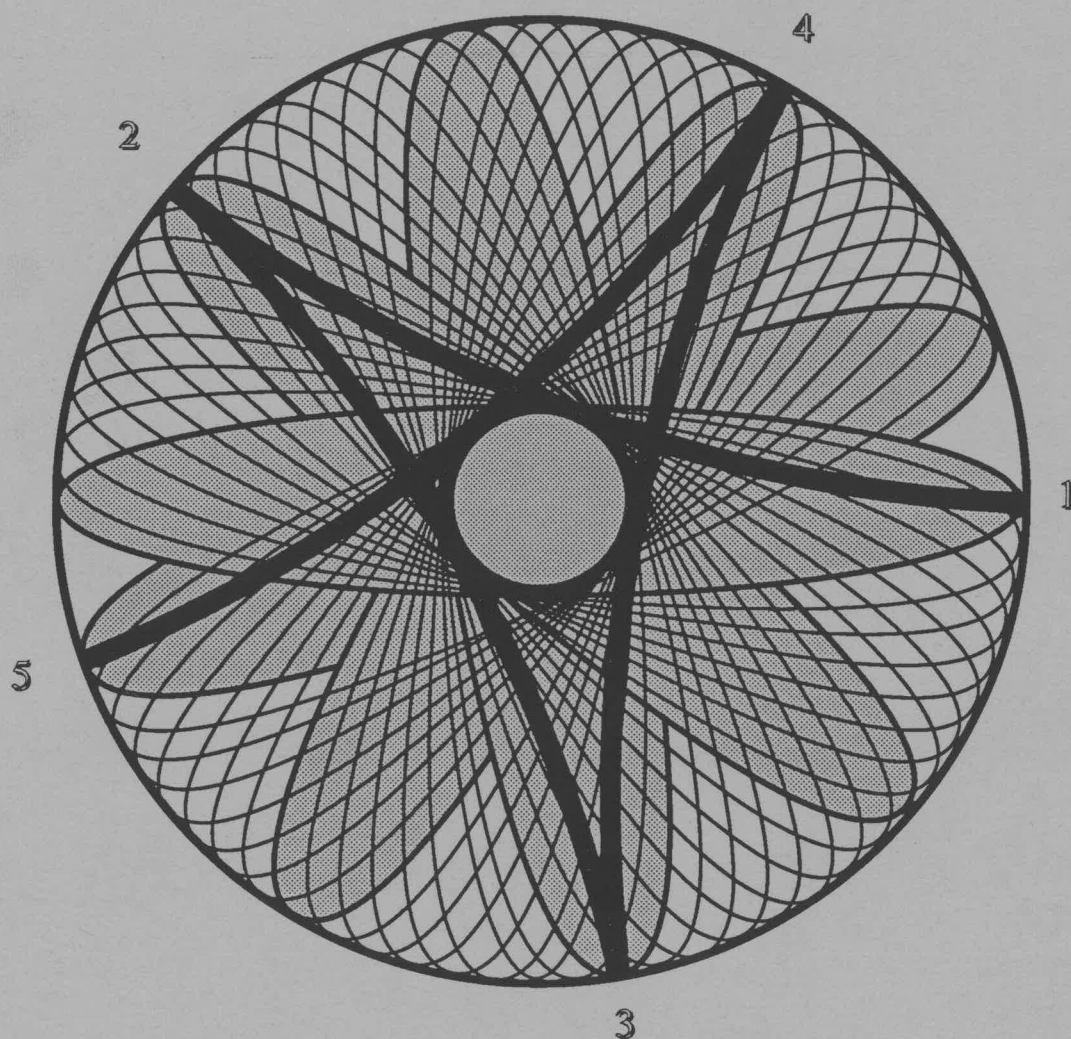
* * *

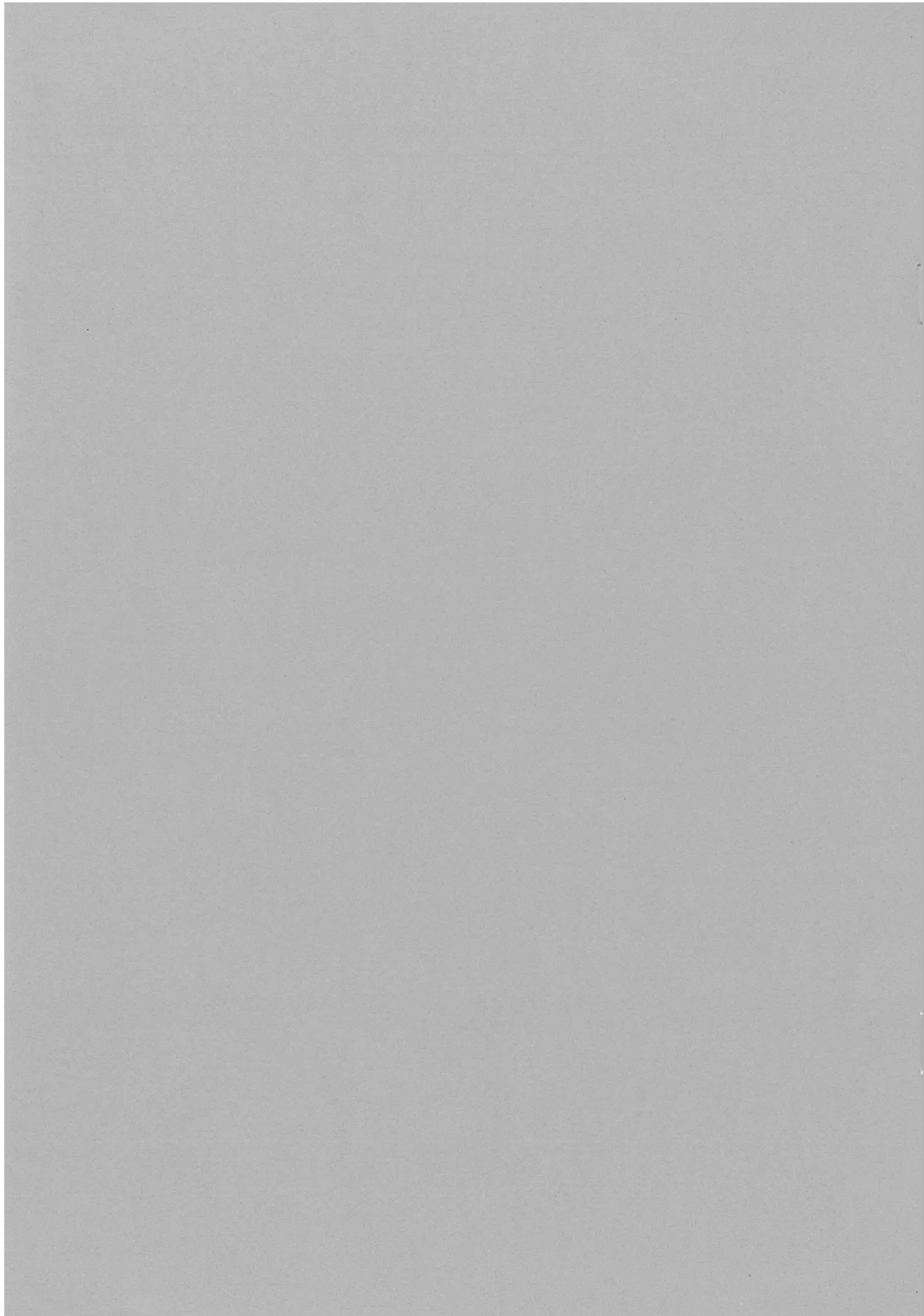
Séminaire de Mathématique. Conférence du 7 avril 1993

*

Jacques GAPAILLARD

LES MULTIPLES ASPECTS DU PENDULE DE FOUCAULT





I.R.E.M.

A.P.M.E.P.

UNIVERSITE DE NANTES
FACULTE DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES
Département de Mathématiques et d'Informatique

* * *

Séminaire de Mathématique. Conférence du 7 avril 1993

*

LES MULTIPLES ASPECTS DU PENDULE DE FOUCAULT

par

Jacques GAPAILLARD

Professeur au Département de Mathématiques et d'Informatique
Centre d'Histoire des Sciences et des Techniques

* * *

Couverture : évocation de l'hypocycloïde d'oscillation accompagnant l'effet Foucault.

Le pendule de Foucault possède le rare privilège d'allier la plus grande simplicité à un intérêt théorique majeur. Ne serait-ce que par ce trait remarquable, mais aussi parce que cette expérience a perturbé le monde scientifique au milieu du XIX^e siècle, il est certain que sa célébrité n'est pas usurpée, comme le confirmeront les quelques pages qui suivent.

1. Le pendule insolite

Si l'on vous demande de porter un jugement sur les deux affirmations suivantes : «tout le monde a vu osciller un pendule» et «tout le monde a vu osciller un pendule de Foucault», vous répondrez probablement que la première est vraie mais que la seconde est fausse. Il n'existe pourtant pas de différence fondamentale entre un pendule ordinaire et un pendule de Foucault. Celui-ci ne se distingue de celui-là que par le soin qu'on a apporté à le suspendre à un support stable, puis à le mettre en mouvement de manière qu'il accomplisse des oscillations apparemment planes, aussi par la longueur inhabituelle de son fil de suspension, et enfin par le minimum de patience et d'attention qu'il requiert de la part de l'observateur. Il est vrai que les pendules remplissant ces conditions, et qu'on a donc étiquetés «pendule de Foucault», se rencontrent assez rarement. Pour des raisons à la fois historiques et littéraires, le plus célèbre est certainement celui qui fonctionne à Paris au Musée national des Techniques.

Voilà un brave pendule, long de 18 mètres, qui oscille tranquillement dans l'église de l'ancien prieuré de Saint-Martin des Champs, décrivant - nous dit Umberto Eco - «ses amples oscillations avec une isochrone majesté»¹, chacune d'entre elles - aller et retour - s'accomplissant en environ 8 secondes et demie. En somme, une expérience de physique parmi les plus simples et les plus banales, sans aucun rapport avec les prodiges de la technique actuelle. Que l'on repère pourtant la direction des oscillations et, après une promenade d'une demie heure dans le musée, que l'on revienne examiner le pendule. Il apparaîtra alors que le plan des oscillations a très sensiblement pivoté - de près de 6 degrés - autour de la verticale du point de suspension, dans le sens des aiguilles d'une montre. Et ceci en dehors de toute perturbation ou de tout défaut de montage. C'est un véritable défi au sens commun, car le comportement de ce pendule contredit manifestement les lois élémentaires de la mécanique, telles que nous les enseigne l'expérience quotidienne. Aussi ce phénomène étrange ne manque-t-il pas d'impressionner même le spectateur averti.

¹ Umberto Eco, *le Pendule de Foucault*, Paris, Grasset, 1990.

2. Le pendule du génie

Comparé aux savants « officiels » qui composent l'Académie des Sciences, Léon Foucault fait figure d'amateur, voire de bricoleur, mais quel bricoleur !

Il naît à Paris en 1819. Son père, un petit éditeur, meurt dix ans plus tard. Sa mère le place au collège Stanislas, mais il est de santé fragile et on le confie bientôt à des précepteurs. Il obtient péniblement son baccalauréat et entame des études de médecine que sa sensibilité le contraint d'abandonner. Dès lors, sa formation devient plutôt celle d'un autodidacte.

Les activités de Foucault sont d'abord centrées autour de diverses questions d'optique. Il commence par se passionner pour le tout nouveau daguerréotype né en 1839 et ancêtre de la photographie. Grâce surtout à l'invention d'un régulateur d'arc voltaïque permettant un éclairage puissant et stable, Foucault fait accomplir de substantiels progrès à l'application du daguerréotype dans le domaine de la microscopie biologique. Il réalise aussi le premier daguerréotype du Soleil en 1845. Il se tourne ensuite vers la mesure de la vitesse de la lumière en laboratoire. Concurrément avec la *méthode de la roue dentée* imaginée par Fizeau, Foucault met au point la *méthode du miroir tournant*. Plus que la possibilité d'obtenir des estimations de la vitesse de la lumière dans le vide, c'est la possibilité d'obtenir des mesures de cette vitesse dans divers milieux qui retient l'attention de Foucault. Il établit ainsi que la lumière se propage moins vite dans l'eau que dans l'air, conformément à ce que prévoyait la théorie ondulatoire de Fresnel, alors que la théorie corpusculaire de Newton prédisait le contraire. Signalons enfin que Foucault est l'auteur de diverses inventions dans le domaine de l'instrumentation astronomique, et rappelons qu'il a découvert les courants électriques, dits *courants de Foucault*, apparaissant au sein d'une masse métallique en mouvement dans un champ électrique.

Cependant, nous sommes ici essentiellement intéressés par les innovations de Foucault en mécanique. En 1852, il inventait le gyroscope dont il révélait les remarquables propriétés et qui, sous la forme du compas gyroscopique, allait bientôt trouver son application à la navigation. Mais l'année précédente, Foucault avait déjà étonné le monde avec l'expérience du pendule aux résultats tout à fait inattendus.

Comment l'idée de cette expérience lui était-elle venue ? C'est ce que Foucault n'a jamais bien expliqué. Il s'est contenté de mettre le comportement de son pendule en relation avec un phénomène qui l'avait impressionné, celui de la tige vibrante. Imaginons une tige d'acier fixée à l'une de ses extrémités dans le mandrin d'un tour à l'arrêt. Écartée de sa position d'équilibre puis brusquement relâchée sans impulsion transversale, elle entre en vibration dans un plan que la persistance rétinienne des impressions lumineuses nous fait clairement percevoir. Maintenant qu'arrive-t-il si le tour est mis en lente rotation ? Chacun s'attend évidemment à voir le plan de vibration accompagner cette rotation. Erreur ! Le plan de vibration reste indifférent à la rotation du tour, il conserve la

même orientation ! Voilà, assurément, un phénomène étrange dont on perçoit bien une certaine analogie avec le cas du pendule, mais la distance reste quand même grande entre les deux expériences et il fallait tout le génie de Foucault pour concevoir l'une à partir de l'autre.

3. Le pendule de la gloire

L'expérience du pendule a valu à son auteur une soudaine notoriété et même une popularité qu'il n'avait certainement pas imaginées au départ. Tout est allé très vite au cours de l'année 1851.

D'abord, voilà Foucault, le mercredi 8 janvier, à 2 heures du matin, dans la cave de son domicile parisien de la rue d'Assas, observant les oscillations d'un pendule de 2 mètres constitué d'une boule de laiton de 5 kilogrammes suspendue à la voûte par un fil d'acier, et installé là depuis le mois précédent. Et Foucault note sur son carnet :

Le pendule a tourné dans le sens du mouvement de la sphère céleste,

c'est-à-dire dans le sens des aiguilles d'une montre, ou sens rétrograde, autour de la verticale orientée vers le zénith.

Ce même mois de janvier, Foucault obtient de reproduire son expérience dans la grande salle méridienne de l'Observatoire. Il y installe le même pendule dont la longueur est maintenant portée à 11 mètres. Avec cette dimension accrue, Foucault constate que

(...) l'oscillation est devenue à la fois plus lente et plus étendue, en sorte qu'entre deux retours consécutifs du pendule au point de repère, on constate manifestement une déviation sensible vers la gauche.

Le 3 février, une communication de Foucault sur son pendule est lue par Arago devant l'Académie des Sciences.²

Puis, dès le mois de mars, ce sera la grandiose expérience réalisée au Panthéon à la demande du prince Louis Napoléon Bonaparte, Président de la République, avec un fil d'acier de 1,4 millimètres de diamètre et de 67 mètres de long, lesté par une boule de 28 kilogrammes. Plus encore qu'à l'Observatoire, le plan des oscillations tourne ici à vue d'œil, d'autant qu'on a rendu ce mouvement encore plus sensible en disposant deux petits talus de sable humide qu'une pointe située à la base de la boule vient écrêter à chaque oscillation, environ à 3mm de sa position précédente.

Foucault acquiert aussitôt une célébrité qui dépasse bientôt nos frontières. Des pendules oscillent à Reims, à Rennes, mais aussi à New York, Rome, Dublin, Genève, Oxford, Londres, Rio de Janeiro, etc. : au moins une douzaine

² Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, XXXII, 5, p. 135-138.

de réalisations de la surprenante expérience pour la seule année 1851. Foucault lui-même la reprend à l'occasion de l'Exposition universelle de 1855 avec un pendule aux oscillations entretenues par un dispositif électromagnétique. C'est ce pendule, ou du moins sa «boule», qui oscille actuellement au Musée national des Techniques.

L'expérience du pendule doit son succès à son caractère insolite et spectaculaire, mais aussi à ce qu'elle est censée mettre en évidence - et, par conséquent, prouver - la rotation diurne de la Terre. Ce n'était pas la première expérience de cette nature. Newton avait prévu, dès 1679, que la chute libre ne s'opérerait pas exactement selon la verticale sur la Terre en rotation, mais serait légèrement déviée vers l'est. Des expérimentations menées en Allemagne par Benzenberg en 1824 et Reich en 1831, avaient effectivement confirmé la prédiction de Newton. Mais quoi de moins exaltant que ces expériences où la chute libre a toute l'apparence d'être verticale et où l'expérimentateur détecte péniblement une déviation orientale qui, sous nos latitudes, ne dépasse guère 1 centimètre pour une chute de 100 mètres. A l'opposé, avec le pendule de Foucault on assiste pour la première fois, non pas à l'une de ces spectaculaires applications de la science auxquelles les prouesses de la technique moderne nous ont habitués, mais à une expérience de laboratoire portant sur un point délicat de physique théorique, et néanmoins susceptible d'être présentée au public. Ce dernier était en effet chaleureusement convié, par voie de presse, à se rendre au Panthéon, comme le montre cet extrait d'un article paru dans *Le National* du 26 mars :

Avez-vous vu tourner la Terre ? Voulez-vous la voir tourner ? Allez jeudi, et jusqu'à nouvel ordre tous les jeudis suivants, de 10 heures à midi au Panthéon. La magnifique expérience imaginée par M. Foucault, se fait là, en présence du public dans les plus belles conditions du monde, et le Pendule, suspendu par la main experte de M. Froment, à la coupole de Soufflot, manifeste à tous les yeux le mouvement rotatoire de notre planète.

A l'occasion de sa reproduction au Panthéon en 1902, l'astronome et vulgarisateur Camille Flammarion rendra un vibrant hommage à cette superbe expérience :

La plus magnifique leçon d'Astronomie populaire qui ait jamais été donnée au grand public est assurément l'expérience mémorable faite ici même il y a un demi-siècle par Léon Foucault. C'était la démonstration pratique, évidente, majestueuse, du mouvement de rotation de notre globe et l'affirmation grammaticale du titre de planète, ou «astre mobile», pour le monde que nous habitons.

4. Le pendule de la honte

Si le pendule de Foucault suscita la curiosité d'un nombreux public, les savants n'en furent pas moins étonnés et la communication de Foucault à l'Académie des Sciences fit l'effet d'une bombe dans le monde scientifique parisien.

Pour en juger, il faut savoir que la mécanique théorique avait accompli des progrès considérables depuis Newton. Sous l'impulsion de d'Alembert et de Clairaut, puis de Lagrange et de Laplace, et malgré Euler et Gauss et les travaux plus récents de Hamilton et Jacobi, la mécanique était devenue une discipline essentiellement française où s'étaient aussi illustrés Poisson et Cauchy, et où se distinguaient encore Poincaré, Liouville, Binet et Poncelet. Le *Traité de Mécanique céleste* que Laplace publia en 5 volumes, de 1799 à 1825, témoigne du haut degré de sophistication atteint par cette science que Le Verrier venait encore de porter à des sommets, puisque c'était grâce à ses calculs que la planète Neptune avait été découverte en 1846. Enfin, la mécanique faisait alors partie intégrante des mathématiques, et tout mathématicien avait nécessairement des compétences dans ce domaine.

Voilà donc le contexte savant et glorieux dans lequel un expérimentateur, sans formation scientifique sérieuse et ignorant les mathématiques supérieures, venait exhiber sous le nez des distingués théoriciens un phénomène physique de première importance, touchant le comportement d'un appareil des plus simples et des plus classiques parmi ceux dont l'étude relève de la mécanique théorique, et qu'aucun d'entre eux n'avait prévu ! Nul doute que la rotation du plan d'oscillation du pendule était inscrite dans les équations de la mécanique, mais personne ne l'y avait décelée. Bien mieux, dans un article publié en 1838 dans le *Journal de l'Ecole polytechnique*, Poisson³ avait même déclaré la chose impossible sans que personne y trouvât à redire ! Il avait compris que la rotation de la Terre devait engendrer une force perpendiculaire au plan d'oscillation du pendule, mais il ajoutait :

En calculant cette dernière force, on trouve qu'elle est trop petite pour écarter sensiblement le pendule de son plan, et avoir aucune influence appréciable sur son mouvement.

Le phénomène découvert par Foucault avait pourtant déjà été reconnu deux siècles plus tôt par Vincenzo Viviani, élève de Galilée, qui avait noté vers 1660-1661 :

Nous observons que tous les pendules à un seul fil dévient du plan vertical initial et toujours dans le même sens,

³ D. Poisson, *Mémoire sur le Mouvement des projectiles dans l'air, en ayant égard à la rotation de la Terre*, Journal de l'Ecole polytechnique, 26^e cahier, XIV (1838), p. 1-68.

en précisant par un dessin qu'il s'agissait du sens rétrograde. Mais Viviani n'avait suggéré aucune interprétation et son observation était bientôt tombée dans l'oubli.

On imagine que l'opinion de Poisson sur le pendule devait curieusement résonner dans certaines mémoires en ce début de l'année 1851. De façon inattendue, et bien involontairement de la part de Foucault, les théoriciens de la mécanique se voyaient infliger un cuisant camouflet, eux que les brillantes performances de leur science semblaient pourtant placer à l'abri d'un tel revers. En un mot c'était la honte, sans compter que Foucault allait récidiver l'année suivante avec le gyroscope dont personne n'avait prévu les remarquables propriétés.

S'ils voulaient sauver ce qui pouvait encore l'être, les mathématiciens ne pouvaient rien faire d'autre que se précipiter sur leurs équations pour en extraire *a posteriori* la justification du phénomène qu'ils avaient été incapables d'y trouver plus tôt.

Dès la semaine qui suivit la communication de Foucault, le défi fut relevé par l'académicien et professeur d'astronomie au Collège de France, Jacques Binet⁴, qui rendit hommage à l'auteur de la «*belle expérience*» et qui ne cacha pas sa surprise d'avoir constaté que Foucault connaissait avant lui la vitesse de pivotement du plan des oscillations :

Toutefois, je dois dire qu'au moment où j'énonçai à M. Foucault l'expression de la vitesse [de rotation du plan des oscillations], il me montra une formule qui exprimait la même loi ; ainsi il a su découvrir non seulement le phénomène de déviation du plan, mais aussi la mesure de sa vitesse angulaire autour de la verticale.

Cette loi qu'il avait déjà énoncée dans sa communication du 3 février, Foucault l'avait sans doute devinée dans un premier temps avant de disposer de sa propre théorie sur laquelle nous reviendrons. Par ailleurs Binet, qui reconnaissait si volontiers les mérites de Foucault, semblait rejeter sur ses devanciers la responsabilité de la situation inconfortable où se trouvaient les théoriciens, en précisant que sa note n'avait d'autre objet

(...) que de montrer comment l'expérience importante de M. Foucault aurait pu être indiquée par les équations de la dynamique interprétées sans inadvertance, parce qu'elles ne sont autre chose que l'expression exacte des lois du mouvement de la matière.

Nous dirons plus loin quelques mots de la théorie de Binet d'où résultait que, dans l'hémisphère nord, le plan d'oscillation du pendule devait effectivement pivoter autour de la verticale dans le sens rétrograde, à une vitesse angulaire égale à $\omega \sin \phi$, produit de la vitesse angulaire de la rotation terrestre par le sinus de la latitude du lieu (loi de Foucault). Aux pôles ce

⁴ Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, XXXII, 6, p. 157-159, et XXXII, 7, p. 197-205.

pivotement s'effectuerait donc à raison d'un tour en 24 heures sidérales, c'est-à-dire en 23h56m4s de temps universel, tandis qu'au Panthéon de latitude $48^{\circ}50'49''$, ce tour prendrait environ 31h47m15s, à supposer, bien entendu, que les oscillations soient entretenues. Mais à l'équateur il n'y aurait plus d'«effet Foucault».

5. Le pendule de la zizanie

Les théoriciens commençaient tout juste à répondre à la «provocation» de Foucault et à recouvrer ainsi une partie de leur dignité, que déjà une polémique éclatait qui allait profondément diviser leur communauté.

A la suite de l'exposé de Binet devant l'Académie des Sciences lors de la séance du 10 février, le mathématicien Joseph Liouville était intervenu pour faire part à ses collègues d'une justification particulièrement simple de la loi de Foucault⁵. Selon le compte rendu de la séance, Liouville

(...) expose de vive voix, avec détail, une méthode synthétique qui lui paraît rigoureuse aussi. Cette méthode est fondée sur l'examen successif de ce qui arriverait : 1° à un pendule oscillant au pôle ; 2° à un pendule oscillant à l'équateur, soit dans le plan même de l'équateur, soit dans le plan du méridien, soit enfin dans un plan vertical quelconque. On passe de là au cas général d'un pendule oscillant à telle latitude qu'on voudra, par la considération dont parle M. Binet ; c'est-à-dire en décomposant la rotation de la terre autour de son axe en deux rotations autour de deux axes rectangulaires, dont l'un est la verticale du lieu de l'observateur ;

L'idée est bien simple ; elle a dû se présenter à tout le monde, après la communication de M. Foucault, qui rendait tout facile ; mais les développements que j'ai ajoutés constituent, je crois, une démonstration mathématique qui se suffit à elle-même, et qui donne tout ce que peut donner le calcul.

Une idée tellement simple qu'elle ridiculisait les efforts déployés par Binet pour trouver une solution analytique au problème. Aussi Binet avait-il lui-même évoqué cette décomposition de la rotation terrestre pour prendre ses distances vis-à-vis de ceux qui prétendraient en déduire une théorie du pendule :

A cette considération, l'on pourrait rattacher quelques inductions et considérations synthétiques pour établir le résultat de M. Foucault ; néanmoins il m'a paru qu'une preuve complète et plus satisfaisante résulte des équations du mouvement relatif.

Et, visiblement agacé par l'intervention de Liouville, Binet avait tenu à réaffirmer sa position :

⁵ Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, XXXII, 6, p. 159-160.

Sans contester les principes mécaniques énoncés par M. Liouville, M. Binet croit pouvoir s'en référer à sa Note : il espère que les géomètres admettrons que, dans l'état de cette question au moment de la première communication de M. Foucault, il était convenable de montrer que les équations du mouvement relatif se concilient avec la belle expérience, et comment elles auraient pu l'indiquer.

Le désaccord entre les deux académiciens était évident, et le climat déjà tendu allait se détériorer nettement la semaine suivante avec une intervention fracassante du mécanicien Louis Poinso⁶ :

Je remarque d'abord que le phénomène dont il s'agit dans cette expérience ne dépend au fond, ni de la gravité, ni d'aucune autre force. Le mouvement qu'on observe dans le plan d'oscillation d'un pendule simple, et par lequel ce plan paraît tourner autour de la verticale dans le même sens que les étoiles, et qui ferait ainsi un tour entier en vingt-quatre heures si l'on était au pôle, et ne fait de ce tour qu'une fraction marquée par le sinus de la latitude du lieu où l'on fait l'expérience; ce mouvement, dis-je, est un phénomène purement géométrique, et dont l'explication doit être donnée par la simple géométrie, comme l'a fait M. Foucault, et non point par des principes de dynamique qui n'y entrent pour rien.

Ainsi s'opère, au sein des mathématiciens parisiens, un clivage entre, d'une part, les «analystes» pour qui la théorie du pendule de Foucault relève uniquement des équations de la dynamique, donc de l'analyse mathématique, et, d'autre part, les «synthétistes» qui voient dans le comportement du pendule un simple effet géométrique ou cinématique dont l'explication ne doit rien aux lois de la mécanique.

On comprend le dépit des premiers. Profondément vexés d'avoir été pris au dépourvu par un fait d'expérience qu'ils avaient été incapables de prévoir, au moins entendaient-ils prendre ensuite la situation en main en montrant comment leurs équations, habilement exploitées, recelaient l'explication totale et définitive du phénomène. Absents avant l'expérience, ils comptaient bien occuper le terrain après, car la théorie du pendule était évidemment leur affaire. Et voilà qu'on prétendait les frustrer de cette revanche !

Le débat était d'autant plus âpre que chaque camp détenait une part de vérité.

D'un côté, il est certain que la mécanique théorique a le devoir d'expliquer l'effet Foucault, et aussi, qu'au-delà de ce spectaculaire phénomène, le comportement fin du pendule ne peut être étudié et expliqué que par la résolution attentive des équations de la dynamique qui régissent son mouvement.

Mais d'un autre côté, les «synthétistes» n'avaient-ils pas raison de contester que la dynamique entrât pour quelque chose dans l'explication de l'effet Foucault ? Car il était impossible d'attribuer au hasard le fait que leurs raisonnements conduisaient tout droit à la loi de Foucault $\omega \sin \phi$. De plus, ne

⁶ Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, XXXII, 7, p. 206-207.

pouvait-on voir dans l'indépendance de cette vitesse de rotation vis-à-vis de l'accélération de la pesanteur, l'indication d'un phénomène purement cinématique ? Nous reviendrons sur ce problème.

Enfin, le débat ne se situait pas uniquement sur le terrain scientifique ; il avait aussi une dimension morale. Car les «synthétistes» soupçonnaient les «analystes» de vouloir confisquer l'étude du pendule à leur seul avantage en la hissant dans les hautes sphères de l'abstraction mathématique tout en niant la validité d'explications beaucoup plus simples, parmi lesquelles celle avancée par Foucault lui-même et dont nous reparlerons. Les «synthétistes» se posaient donc en défenseurs de l'humble expérimentateur Foucault, face aux tendances dominatrices et au discours volontairement hermétique des théoriciens. Cette position fut en tout cas clairement affichée par Poincaré dont la déclaration suivante dut jeter un froid parmi ses chers collègues :

Sitôt qu'un auteur ingénieux a su parvenir à quelque vérité nouvelle, n'est-il pas à craindre que le calculateur le plus stérile ne s'empresse d'aller vite la rechercher dans ses formules, comme pour la découvrir une seconde fois, et à sa manière, qu'il dit être la bonne et la véritable ; de telle sorte qu'on ne s'en croie plus redevable qu'à son analyse, et que l'auteur lui-même, quelquefois peu exercé, ou même étranger à ce langage et à ces symboles, sous lesquels on lui dérobe ses idées, ose à peine réclamer ce qui lui appartient, et se retire presque confus, comme s'il avait mal inventé ce qu'il a si bien découvert ?

6. Le pendule prévisible

C'est un cas particulièrement intéressant, et peut-être unique dans l'histoire des sciences, que celui du pendule de Foucault qui surgit inopinément dans une théorie en pleine gloire, prenant en défaut, non la théorie elle-même - malgré l'impair de Poisson -, mais les spécialistes qui n'ont pas su prévoir un fait physique aussi important. Sans doute aurait-il fallu avoir une certaine intuition du phénomène pour en rechercher la confirmation dans une étude théorique minutieuse. Mais, justement, était-il si difficile de deviner que le pendule n'oscillerait pas dans un plan fixe ? Pas du tout ! Au contraire, sans avoir à faire aucun calcul, il existait au moins deux moyens de soupçonner, voire même d'acquiescer la certitude que le pendule se comporterait bien ainsi.

D'abord, il était connu, au moins depuis Newton, que le déroulement de certaines expériences de mécanique à la surface de la Terre est affecté par sa rotation. Outre des forces centrifuges, cette rotation développe en effet des forces dites de Coriolis, d'après l'auteur d'une étude sur les mouvements relatifs parue en 1835,⁷ qui sont responsables des perturbations subies par ces expériences par rapport à ce qu'elles seraient si la Terre ne tournait pas.

⁷ G. Coriolis, *Mémoire sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps*, Journal de l'Ecole polytechnique, 24^e cahier, XV (1835), p. 142-154.

Il en va ainsi pour la chute libre dont Newton avait prévu qu'elle s'écarte de la verticale vers l'est. C'est aussi le cas des tirs de projectiles qui sont déviés vers la droite ou vers la gauche, selon que l'expérience se déroule au nord ou au sud de l'équateur, un phénomène déjà entrevu par Galilée. Mais si un projectile est dévié vers la droite, il n'est pas interdit de penser que le lest du pendule pourrait, lui aussi, subir une telle déviation à chacun de ses balancements, de sorte que, par une accumulation de petits écarts tous de même sens, on assisterait au lent pivotement rétrograde du plan des oscillations autour de la verticale. Cette justification qualitative de l'effet Foucault a effectivement été proposée, mais d'abord par Foucault lui-même, dès sa communication du 3 février 1851 :

Il m'a semblé que la masse du pendule peut être assimilée à un projectile qui dévie vers la droite quand il s'éloigne de l'observateur, et qui nécessairement dévie en sens inverse, en retournant vers son point de départ ; ce qui conduit au déplacement progressif du plan moyen d'oscillation et en indique le sens.

Toutefois cette explication n'a pas manqué d'être contestée et Foucault a eu raison de la présenter avec une certaine prudence. La ressemblance entre le projectile du tir et le lest du pendule est en effet assez grossière, celui-ci étant soumis à une liaison qu'on ne peut ignorer. Il n'empêche qu'une analogie certaine existe entre les deux cas et il est très surprenant que personne n'y ait songé plus tôt.

Mais il y avait un autre moyen d'être averti du comportement du pendule.

D'une part, quand nous affirmons que la Terre tourne, nous voulons dire qu'elle est animée d'une rotation axiale par rapport à un référentiel défini par son centre et à des directions d'étoiles. Or, les mécaniciens ont reconnu qu'un tel référentiel est «inertiel» ou «galiléen» - nous reviendrons plus loin sur cette notion - en ce sens que les lois de la mécanique s'y expriment de la façon simple dont Newton les avait initialement formulées dans son «espace absolu». Du moins en est-il ainsi en première approximation, avec cette conséquence qu'un pendule lié à un tel référentiel et soumis à la seule attraction d'une masse ponctuelle qui y serait fixe, oscillerait dans un plan invariablement lié à ce référentiel.

D'autre part, Newton a démontré que l'attraction gravitationnelle exercée par la Terre sur une masse ponctuelle extérieure, est la même que si toute la masse de la Terre était concentrée en son centre.

Il suffit maintenant de combiner les deux résultats ci-dessus pour découvrir aussitôt qu'un pendule fonctionnant *au pôle nord* serait totalement indifférent à la rotation de notre planète et oscillerait dans un plan fixe par rapport aux étoiles, puisque son point de suspension, aussi bien que le centre de la Terre, seraient au repos dans un référentiel du type envisagé ci-dessus.⁸ Comme la Terre tourne dans le sens direct autour de son axe orienté

⁸ Les effets de la rotation de la Terre sont toujours étudiés en faisant abstraction de ses autres mouvements. En particulier, les phénomènes de précession et de nutation sont

vers le nord, l'observateur au sol verrait le plan d'oscillation pivoter dans le sens rétrograde, un tour complet étant accompli en 24 heures. Maintenant, un argument naturel de continuité des phénomènes physiques macroscopiques permet de soupçonner que, si le plan d'oscillation tourne au pôle, il tournera encore, et dans le même sens, à la latitude de 89° , et de même à celle de 85° , et vraisemblablement aussi à des latitudes plus basses. Ce raisonnement peut même conduire plus loin si l'on s'avise que la rotation du ciel est rétrograde, autour de la verticale ascendante, pour l'observateur *au pôle sud* qui verra donc le plan d'oscillation du pendule tourner dans le sens direct. Alors, en ajoutant à l'argument de continuité ci-dessus une évidente raison de symétrie, il y a toute vraisemblance qu'une succession d'expériences effectuées du nord au sud le long d'un méridien, révélerait que la rotation, d'abord rétrograde, du plan d'oscillation, ralentirait avec l'abaissement de la latitude jusqu'à s'annuler à l'équateur, pour ensuite s'inverser quand on serait passé au sud de cette ligne et devenir plus rapide à mesure qu'on s'approcherait du pôle sud où elle atteindrait à nouveau le rythme de la rotation terrestre.

On peut à juste titre s'étonner que le milieu du XIX^e siècle ait été atteint sans que ce raisonnement si simple ait jamais été tenu par les théoriciens de la mécanique. Il faut croire que l'efficacité toujours plus grande de cette science, mais aussi les exigences de l'analyse mathématique mise à son service, captivaient principalement leur attention et les éloignait parfois d'une vision globale des phénomènes. C'est ainsi que les savants se sont fait stupidement piéger. Ils se sont laissé «provoquer» par l'expérience de Foucault alors que ce sont eux qui auraient dû la provoquer. Tant pis pour eux, et tant mieux pour Foucault !

7. Le pendule géométrique

Nous avons déjà évoqué l'explication «synthétique» avancée par Liouville. Elle est basée sur la décomposition vectorielle $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_V + \vec{\Omega}_H$ de la rotation de la Terre $\vec{\Omega}$ de vitesse angulaire ω (figure 1). Chacun de ces vecteurs représente une rotation de sens direct autour du support orienté de (et par) ce vecteur, et de vitesse angulaire proportionnelle à sa longueur. Cette décomposition signifie qu'à chaque instant la rotation de la Terre est cinématiquement équivalente à la superposition de deux rotations dont les axes tournent eux-mêmes avec la Terre, à savoir, respectivement, une rotation de vitesse angulaire $\omega \sin \phi$ autour de la verticale du point M où se tient l'observateur, et

négligés et l'axe de la Terre est supposé conserver une direction invariable par rapport aux étoiles. Il est donc fixe dans le référentiel considéré.

une rotation vitesse angulaire $\omega \cos \varphi$ autour de la perpendiculaire à cette verticale dans le plan méridien de M et passant par le centre de la Terre.

Or, si l'on admet, par analogie avec l'incidence de la rotation terrestre sur le pendule à l'équateur et aux pôles, qu'une rotation quelconque de la Terre - autour d'un axe passant par son centre - aurait un effet Foucault nul en un point qui lui serait «équatorial», et opposé (ou égal) à elle-même en son «pôle» nord (ou sud), il devient évident que seule la rotation $\vec{\Omega}_V$ est opérante en M et qu'elle provoque une rotation apparente du plan d'oscillation, rétrograde au nord de l'équateur et directe au sud, et de vitesse angulaire égale à $\omega \sin \varphi$.

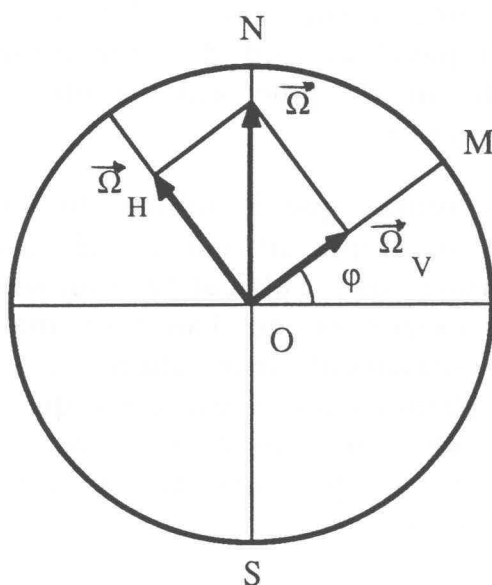


Figure 1

Cette explication lumineuse de l'effet Foucault comporte pourtant deux points faibles. D'abord parce qu'elle présuppose implicitement que les effets des rotations $\vec{\Omega}_V$ et $\vec{\Omega}_H$ sont additifs, ce qui n'a rien d'évident. Ensuite parce que, s'il est facile de justifier l'effet Foucault aux pôles, il reste à prouver son inexistence à l'équateur.

Elle contient cependant l'idée que, comme nous l'avons vu au pôle, le pendule se règle sur les étoiles, de sorte que la rotation apparente de son plan d'oscillation n'est que le reflet de la rotation «réelle» du sol en sens inverse autour de la verticale. De cette dernière, qui n'est autre que la rotation $\vec{\Omega}_V$ ci-dessus, on peut se faire une représentation concrète de la manière suivante.

Supposons qu'à un instant donné, un observateur situé en M dans l'hémisphère nord, vise une étoile se trouvant exactement au nord dans le plan horizontal, c'est-à-dire dans la direction MA , A étant sur l'axe de la Terre (figure 2). Après un court laps de temps, l'observateur étant parvenu en M' , la direction de l'étoile ne coïncide plus avec celle du nord mais s'en est écartée d'un petit angle θ que l'on retrouve en MAM' et qui représente l'angle dont le sol a tourné dans le sens rétrograde, autour de l'observateur et par rapport aux étoiles, pendant le court intervalle de temps considéré.

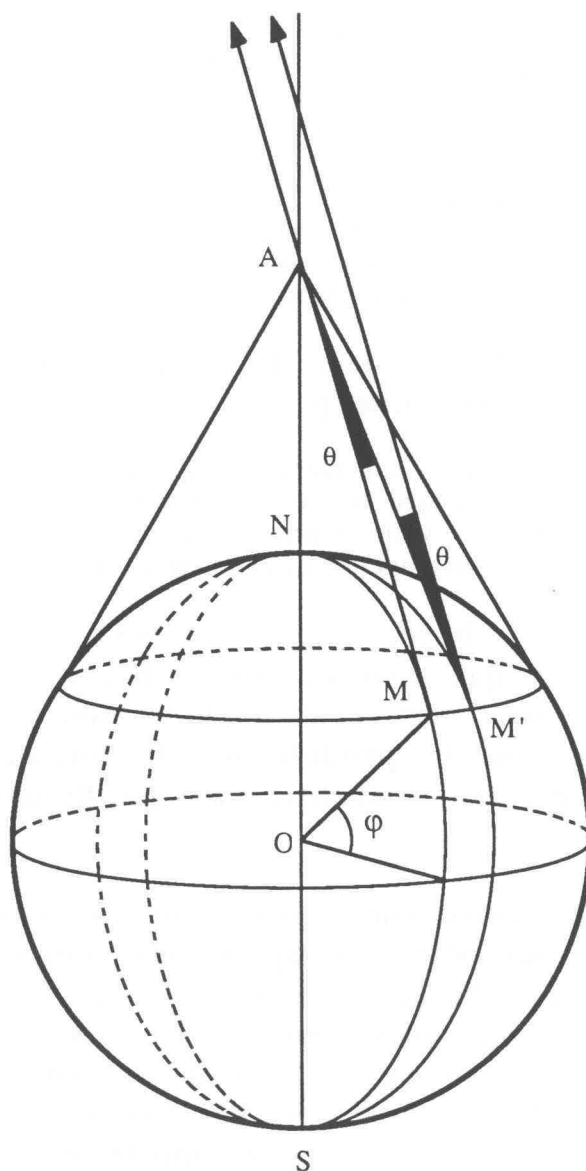


Figure 2

Au bout de 24 heures, la rotation totale du sol autour de l'observateur sera donc obtenue par l'accumulation des petits angles tels que MAM' , c'est-à-dire par l'angle en A du secteur circulaire obtenu en développant le cône de sommet A dont les génératrices s'appuient sur le parallèle de M. Le rayon de ce parallèle étant $R_T \cos \varphi$ (où R_T est le rayon de la Terre) et sa longueur $2\pi R_T \cos \varphi$, tandis que celle de la génératrice du cône ci-dessus est $R_T \cos \varphi (\sin \varphi)^{-1}$, la Terre a donc tourné, autour de l'observateur, d'un angle égal au quotient de ces deux longueurs, soit $2\pi \sin \varphi$, de sorte que la vitesse angulaire de cette rotation locale est $\omega \sin \varphi$, si ω est celle de la rotation de la Terre.

Pour expliquer le comportement de son pendule, Foucault avait eu une autre idée. Tout en étant conscient du caractère intuitif de sa démonstration, il était quand même convaincu que d'autres sauraient lui trouver une justification rigoureuse puisqu'elle le conduisait à la loi en $\omega \sin \varphi$. Voici comment il la présentait à un correspondant⁹ :

Je commence par poser effrontément un postulatum tel que celui-ci : quand la verticale, toujours comprise dans le plan d'oscillation, change de direction dans l'espace, les positions successives du plan d'oscillation sont déterminées par la condition de faire entre elles des angles minima. Autrement dit en langue vulgaire: lorsque la verticale sort du plan d'impulsion primitive, le plan d'oscillation la suit en restant aussi parallèle que possible.

Mais Foucault avait vite constaté que son explication ne faisait pas l'unanimité, aussi l'avait-il introduite par le préambule suivant :

Vous me demandez par quelles considérations je suis arrivé à découvrir la loi du sinus de la latitude ; c'est presque une confidence à vous faire, Monsieur, je ne sais si elle ne me nuira pas dans votre esprit. Si je ne l'ai pas encore publiée, j'en ai déjà un peu parlé et je me suis aperçu qu'elle n'allait pas à tout le monde.

Il ne l'avait donc pas publiée, mais il l'exposait volontiers en privé en s'aidant d'une petite boule qu'il extrayait de sa poche et sur laquelle il avait tracé des lignes. En réalité, il ne savait exploiter son postulat «effronté» que dans le cas particulier où le pendule oscille initialement dans le plan méridien du lieu, et c'est le «synthétiste» Joseph Bertrand qui traita le cas général en 1882.¹⁰

L'idée de Foucault est évidemment fondée sur la constatation que le plan des oscillations est fixe aux pôles par rapport aux étoiles, et qu'il le serait de même en tout autre lieu si la Terre ne tournait pas. Car, bien sûr, même si l'on fait abstraction de tout mouvement de la Terre autre que sa rotation axiale, et contrairement à ce qu'on lit trop souvent, en général le plan d'oscillation du pendule de Foucault n'est pas fixe par rapport aux étoiles. Il ne l'est qu'aux pôles comme il vient d'être rappelé, ou encore à l'équateur si

⁹ L. Foucault, *Recueil des Travaux scientifiques*, Paris, 1878.

¹⁰ Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, XCIV, p. 371-372.

le pendule oscille dans le plan équatorial. Dans tous les autres cas sa position variera par rapport aux étoiles puisqu'il lui faut bien «suivre» la verticale qu'il est apparemment astreint à contenir. Cependant, le cas de l'expérience aux pôles montre bien que ce plan d'oscillation possède une vocation certaine à rester fixe par rapport aux étoiles. Aussi peut-on prévoir qu'en un point quelconque du globe, il ne changera de position qu'à contre-cœur en quelque sorte, et uniquement dans la mesure où il y sera contraint par la rotation de la verticale autour de l'axe de la Terre.

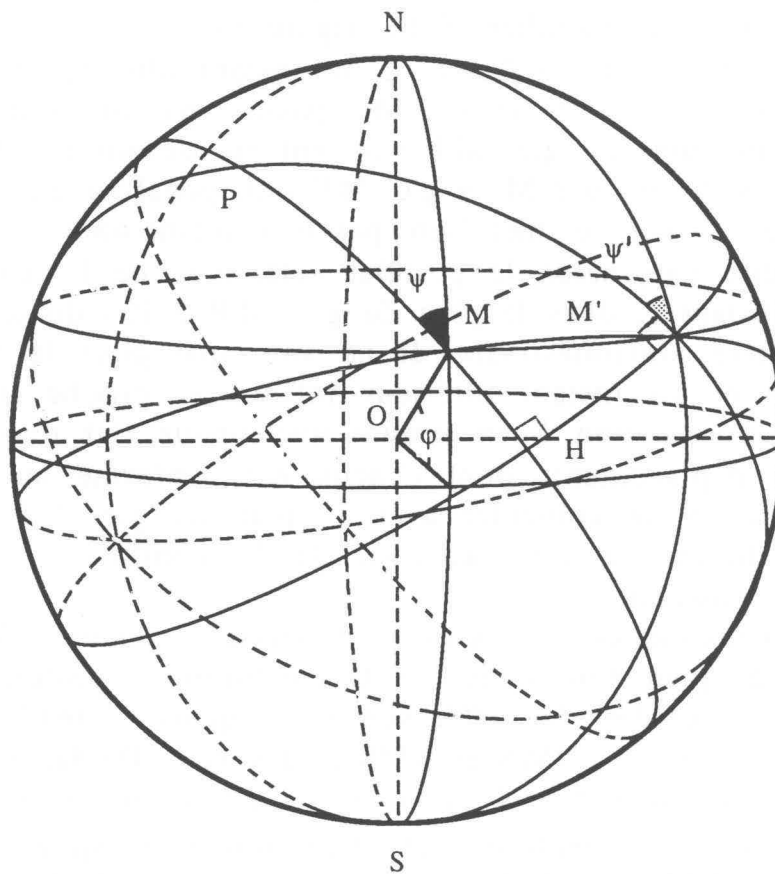


Figure 3

De cette considération résulte aussitôt le postulat «effronté» de Foucault. Si donc, comme nous l'avons annoncé, ce postulat conduit bien à la loi de Foucault en $\omega \sin \phi$, le rôle de la dynamique se trouve évidemment réduit dans cette affaire à la détermination d'un plan vertical «aussi invariable que possible» par rapport aux étoiles, en l'occurrence le plan d'oscillation d'un pendule. Car tout plan contenant la verticale et possédant, pour une raison quelconque, la qualité d'invariabilité ci-dessus, vérifierait le postulat

«effronté» et pivoterait nécessairement autour de la verticale selon la loi de Foucault. En ce sens, Poincaré n'avait donc pas tort de soutenir que la dynamique n'entraîne pour rien dans l'effet Foucault.

Pour obtenir la loi de Foucault à partir du postulat «effronté», on peut substituer à la démonstration un peu succincte de Bertrand, et qui comporte des approximations, le traitement rigoureux suivant, mais dont il serait fastidieux de donner ici le détail.

Supposons qu'à un instant t le pendule se trouve en M , à la latitude φ , et oscille dans le plan vertical contenant le grand cercle (en abrégé g.c.) MP incliné de l'angle ψ sur le méridien NMS (figure 3).

Du fait de la rotation de la Terre, à un instant ultérieur t' le pendule se trouve en M' . Considérons alors le g.c. $M'P$ passant par M' et dont l'angle avec le g.c. MP est minimum. Ce g.c. $M'P$ s'obtient en menant par M' le g.c. $M'H$ orthogonal au g.c. MP , puis par M' le g.c. $M'P$ orthogonal au g.c. $M'H$, et qui est incliné de l'angle ψ' sur le méridien parvenu maintenant dans la position $NM'S$. Est-ce à dire que, selon le postulat «effronté» de Foucault, le pendule doit osciller, à l'instant t' , dans le plan du g.c. $M'P$? Pas du tout. Ce postulat possède un caractère «infinitésimal». Il ne vaut que pour la transition entre un instant donné et un instant ultérieur infiniment proche du premier. La position du plan d'oscillation à un instant quelconque $t' > t$ résulte donc d'une infinité de petits déplacements dont chacun est conforme au postulat, mais elle n'a aucune raison de coïncider avec le plan du g.c. $M'P$ déterminé par une application directe, à l'instant $t' > t$, de la condition d'angle minimal contenue dans le postulat.

Cependant, la construction ci-dessus peut servir à calculer de quelle façon varie la position du plan d'oscillation si la condition du postulat est observée. Il suffit pour cela d'étudier la différence $\psi' - \psi$ quand t' tend vers t , c'est-à-dire quand l'angle α des g.c. $NM'S$ et NMS tend vers 0. De façon précise, il faut calculer un développement limité de $\psi' - \psi$ quand α tend vers 0, ce qui peut s'obtenir par des considérations de trigonométrie sphérique dans les triangles sphériques NMM' et $M'MH$ limités par les g.c. NMS , $NM'S$, MM' et

$M'H$. Le résultat $\psi' - \psi = -\alpha \sin \varphi + o(\alpha)$, démontre que $\frac{d\psi}{d\alpha} = -\sin \varphi$, valeur

indépendante de l'angle ψ . Il suit $\frac{d\psi}{dt} = -\omega \sin \varphi$, où ω est la vitesse angulaire de la rotation de la Terre, tandis que le signe «-» indique une rotation rétrograde du plan d'oscillation dans l'hémisphère nord où le raisonnement a été tenu.

8. Le pendule analytique

Comme nous l'avons dit, c'est Binet qui, dès le 10 février 1851, a proposé une solution analytique au problème posé par le pendule de Foucault. Outre la promptitude de sa réaction, il faut reconnaître à Binet le mérite d'avoir correctement établi les équations du mouvement du pendule sur la Terre en rotation, même si, comme il le signale lui-même, ces équations étaient déjà implicitement contenues dans les travaux de Laplace et de Poisson.

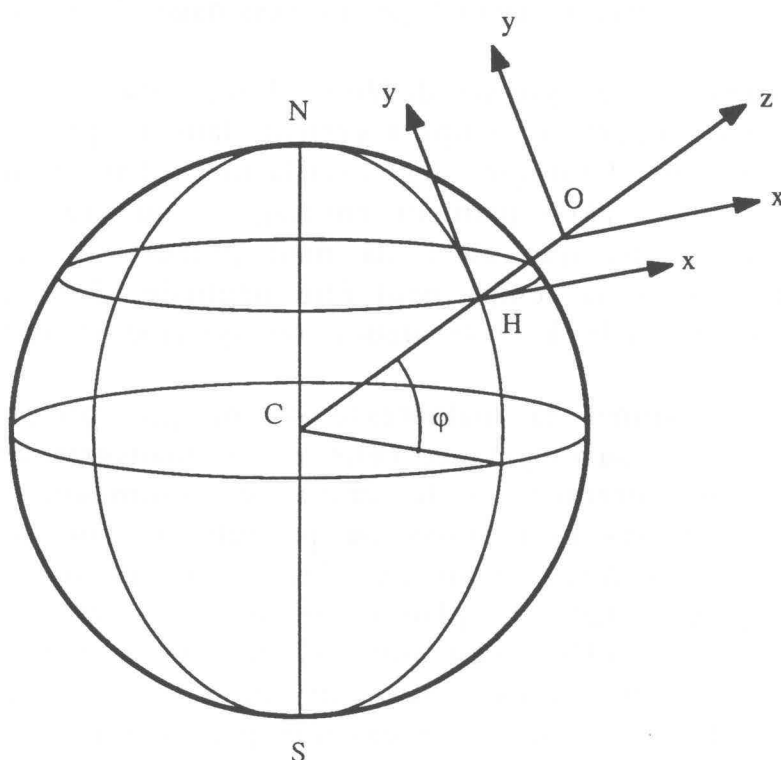


Figure 4

Ce sont ces mêmes équations que l'on trouve aujourd'hui dans les traités de mécanique au sujet du pendule de Foucault, à savoir, à l'orientation des axes près :

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -N \frac{x}{\ell} + 2\omega (\sin\varphi \cdot \frac{dy}{dt} - \cos\varphi \cdot \frac{dz}{dt}), \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -N \frac{y}{\ell} - 2\omega \sin\varphi \cdot \frac{dx}{dt}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -g + N \frac{z}{\ell} - 2\omega \cos\varphi \cdot \frac{dx}{dt}, \end{aligned}$$

équations auxquelles il faut ajouter la condition de liaison $x^2 + y^2 + z^2 = \ell^2$, et où les coordonnées x , y , z du lest - supposé ponctuel - du pendule sont considérées par rapport à des axes $Oxyz$ d'origine le point de suspension O du pendule, les axes horizontaux Ox et Oy étant dirigés respectivement vers l'est et vers le nord, et l'axe Oz selon la verticale ascendante (figure 4).

Par ailleurs, N est le quotient de la tension du fil de longueur ℓ par la masse du lest (supposé ponctuel), ω est la vitesse angulaire de la rotation terrestre, et g est l'accélération de la pesanteur supposée constante, parallèle à Oz et intégrant l'accélération centrifuge au voisinage du point O de latitude φ .

Malgré les apparences, ce système différentiel n'est pas linéaire car x , y , z , et leurs dérivées par rapport au temps t entrent dans l'expression de N . C'est seulement dans le cas théorique des oscillations d'amplitude «infiniment petite» - qui est le cas classiquement envisagé - que la résolution de ce système devient facile, puisque alors on peut prendre $N = g$, tandis que la dérivée de z par rapport au temps peut être négligée. Sous cette hypothèse simplificatrice, Binet procède à la résolution du système et retrouve la loi de Foucault en $\omega \sin \varphi$.

Seulement, Binet commet la maladresse de ne pas prêter attention aux conditions initiales du mouvement, et cette grave inadvertance l'empêche de s'apercevoir que, contrairement à la croyance commune, et à celle de Foucault en particulier, les oscillations du pendule de Foucault ne sont pas précisément planes. Sans doute, *pour un observateur au sol*, ces oscillations ne sauraient être planes dans un plan contenant la verticale, condition qui s'oppose clairement à l'effet Foucault. Cette circonstance est pourtant envisageable *pour un observateur tournant* autour de la verticale au rythme de l'effet Foucault. Mais ce n'est pas le cas non plus, comme s'en est aperçu le Père Michel-Marie Jullien¹¹ en 1853. Pour éclaircir ce point il est nécessaire de préciser les conditions expérimentales.

La réalisation pratique de l'expérience du pendule de Foucault est beaucoup plus délicate qu'elle ne paraît. Il convient de veiller particulièrement à la stabilité du support, au mode de fixation du fil et enfin à la mise en marche du pendule. Une ovalisation des oscillations aurait vite tendance à s'accroître et à contrarier l'effet qu'il s'agit de mettre en évidence. Aussi Foucault prenait-il le plus grand soin à lancer son pendule sans lui communiquer aucune impulsion transversale.

Pour cela, Foucault écartait le pendule de la verticale et le maintenait dans cette position en l'attachant au mur à l'aide d'un fil qu'il brûlait lorsque le tout était bien au repos. De cette manière, le pendule se met en mouvement sans vitesse initiale *par rapport au sol* ; si bien que le lest, considéré en projection P sur le plan horizontal passant par le pied H de la verticale de O , possède une vitesse nulle par rapport aux axes Hx et Hy parallèles aux axes

¹¹ M. Jullien, *Problèmes de Mécanique rationnelle*, Paris, 1853.

Ox et Oy définis plus haut. Mais *par rapport à des axes «inertiels»* HX et HY qui, dans le plan horizontal, tournent relativement aux axes Hx et Hy selon l'effet Foucault, c'est-à-dire à la vitesse angulaire rétrograde (dans l'hémisphère nord) $\omega \sin \varphi$, le pendule n'exécutera pas des oscillations planes puisque la rotation du sol autour de la verticale de O lui aura conféré une vitesse initiale transversale et de sens direct, d'intensité $a\omega \sin \varphi$, si a est l'amplitude maximum des oscillations (figure 5).

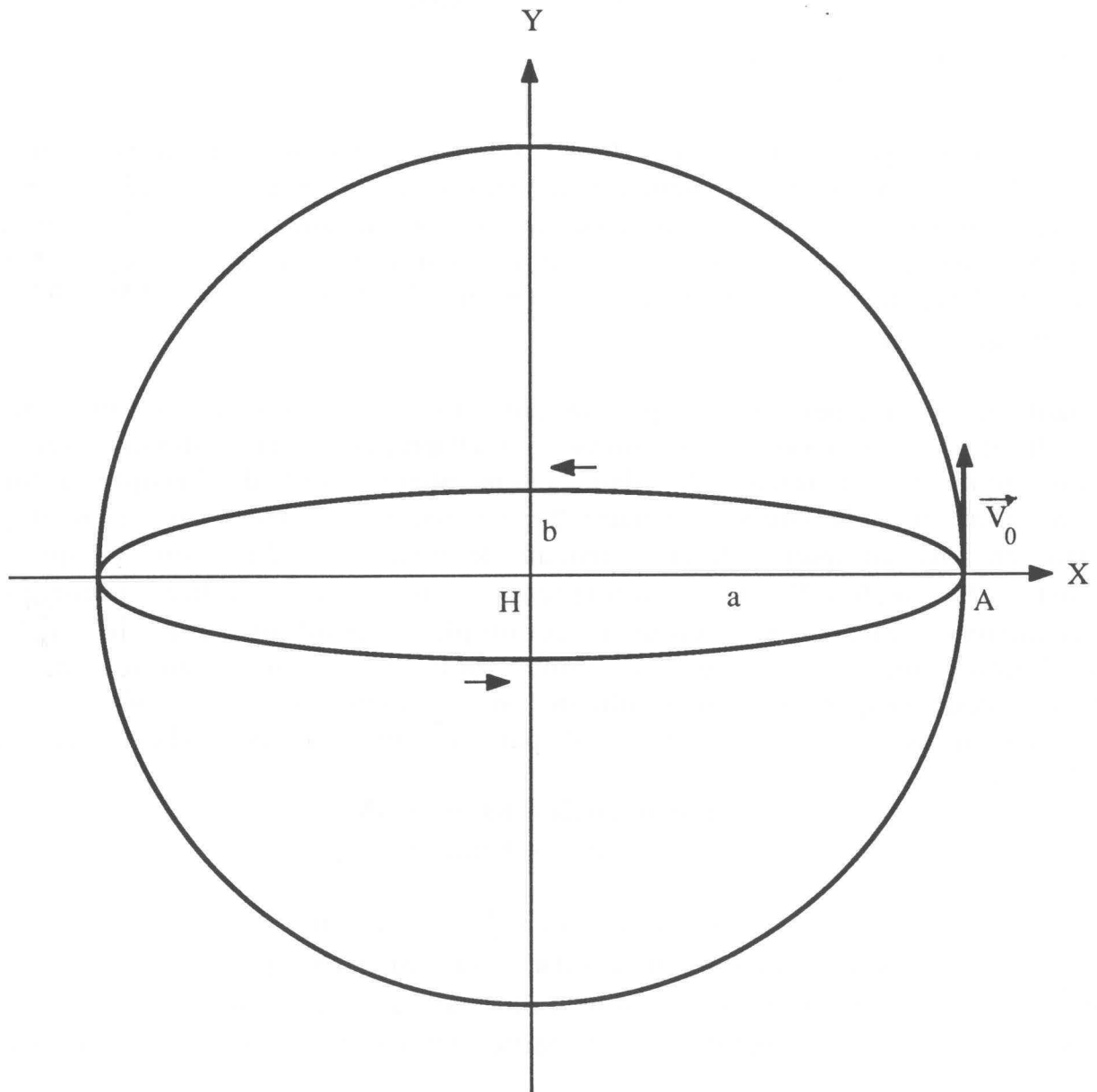


Figure 5

Alors, sous l'hypothèse d'une amplitude maximum «infiniment petite» - mais qui donne des résultats acceptables si elle est relativement faible -, par rapport aux axes HXY, le mouvement de la projection P du lest a pour équations

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} X, \quad \frac{d^2Y}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} Y,$$

avec, pour les conditions initiales $X = a$, $Y = 0$, $\frac{dX}{dt} = 0$, $\frac{dY}{dt} = a\omega \sin\varphi = a\beta$, l'unique solution

$$X = a \cos \alpha t, \quad Y = b \sin \alpha t,$$

où l'on a posé $\alpha = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ et $b = \frac{\beta}{\alpha} a$.

On reconnaît que la trajectoire de P est une ellipse de demi-axes a et b , décrite dans le sens direct pendant le temps $T_0 = 2\pi/\alpha$. Toutefois cette «ellipse d'oscillation», dont l'«épaisseur» a été fortement exagérée sur la figure 5 ainsi que sur les suivantes, est en réalité très aplatie puisque, dans le cas de l'expérience du Panthéon où $a = 3\text{m}$, $\ell = 67\text{m}$ et $\varphi = 48^\circ 50' 49''$, b n'atteint qu'environ $0,43\text{mm}$.¹²

Quant au mouvement de P par rapport au sol, il résulte, selon l'effet Foucault, de la combinaison du mouvement elliptique direct ci-dessus avec la rotation uniforme et rétrograde (dans l'hémisphère nord) de l'ellipse autour de son centre H, à la vitesse angulaire $\beta = \omega \sin\varphi$, relativement aux axes Hxy. Comme un tour complet s'effectue pendant le temps $T_1 = 2\pi/\beta$, on voit que le rapport $a/b = \alpha/\beta = T_1/T_0$ s'interprète comme le nombre théorique d'oscillations (allers et retours) accomplies pendant que le «plan d'oscillation» du pendule exécute une rotation complète autour de la verticale. Pour l'expérience du Panthéon, on a sensiblement $a/b = 6969$.

Les équations du mouvement de P par rapport aux axes Hxy sont par conséquent :

$$\begin{aligned} x &= a \cos \alpha t \cos \beta t + b \sin \alpha t \sin \beta t, \\ y &= -a \cos \alpha t \sin \beta t + b \sin \alpha t \cos \beta t, \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(a+b) \cos(\alpha - \beta)t + \frac{1}{2}(a-b) \cos(\alpha + \beta)t, \\ y &= \frac{1}{2}(a+b) \sin(\alpha + \beta)t - \frac{1}{2}(a-b) \sin(\alpha - \beta)t. \end{aligned}$$

Mais les quantités a , b , α , β , sont liées par la relation $\alpha b = \beta a$, et cette circonstance rend la trajectoire de P particulièrement remarquable. En effet, si l'on pose $r = \frac{1}{2}(a-b)$ et $\theta = \frac{\alpha}{a}(a-b)t$, les équations ci-dessus s'écrivent aussi :

¹² Pour produire une ellipse d'oscillation semblable à celle de la figure 5, la Terre aurait dû tourner (théoriquement !) à la vitesse catastrophique d'un tour par minute !

$$x = (a - r) \cos\theta + r \cos\left(1 - \frac{a}{r}\right)\theta,$$

$$y = (a - r) \sin\theta + r \sin\left(1 - \frac{a}{r}\right)\theta.$$

Or, si l'on se reporte à la figure 6, ces équations traduisent l'égalité vectorielle $\overrightarrow{HP} = \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CP}$, où le point P du cercle de centre C et de rayon r est tel que les arcs PM et AM soient de même longueur. On reconnaît alors que la trajectoire de P, par rapport aux axes Hxy, est une courbe hypocycloïdale, engendrée par le roulement sans glissement, et en progressant dans le sens direct, d'un cercle de rayon $r = (a-b)/2$, sur et à l'intérieur du cercle de centre H et de rayon a.

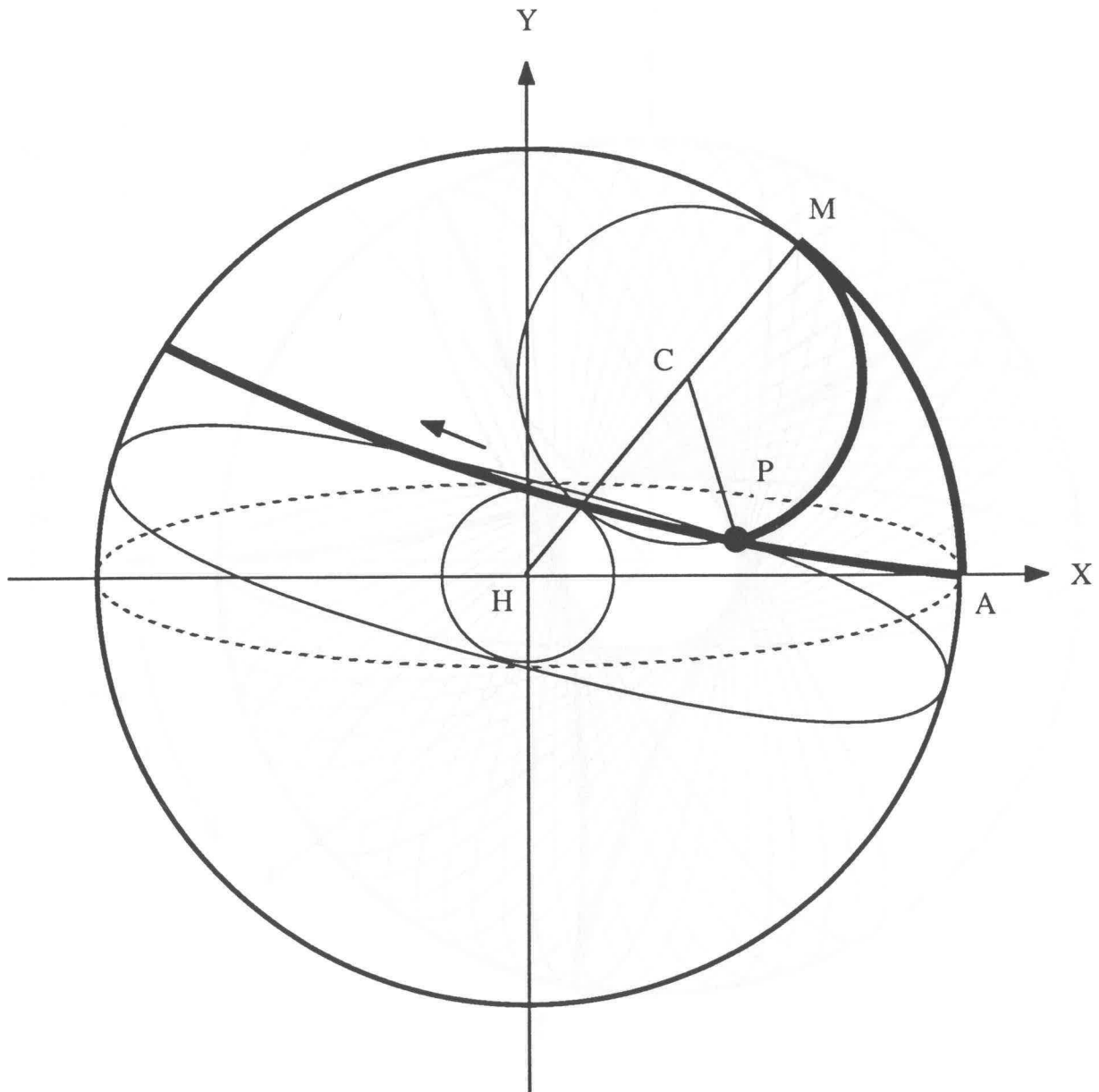


Figure 6

La trajectoire de P est donc du type de celle représentée à la figure 7, et on a compris que la formule classique selon laquelle «le plan d'oscillation du pendule de Foucault pivote autour de la verticale du point de suspension», est aussi commode qu'inexacte en toute rigueur. Mais comme le rayon r est en réalité très proche de $a/2$, les arcs de l'«hypocycloïde d'oscillation» sont pratiquement rectilignes et diffèrent peu d'un diamètre du cercle de rayon a (cf. les Annexes 1 et 2). Au Panthéon, et toujours en réduisant l'expérience au cas théorique des oscillations infiniment petites, le rayon de courbure d'un tel arc, pourtant nul à ses extrémités, dépassait le kilomètre sur une grande partie de sa longueur et, en son milieu, il atteignait presque 21 kilomètres !

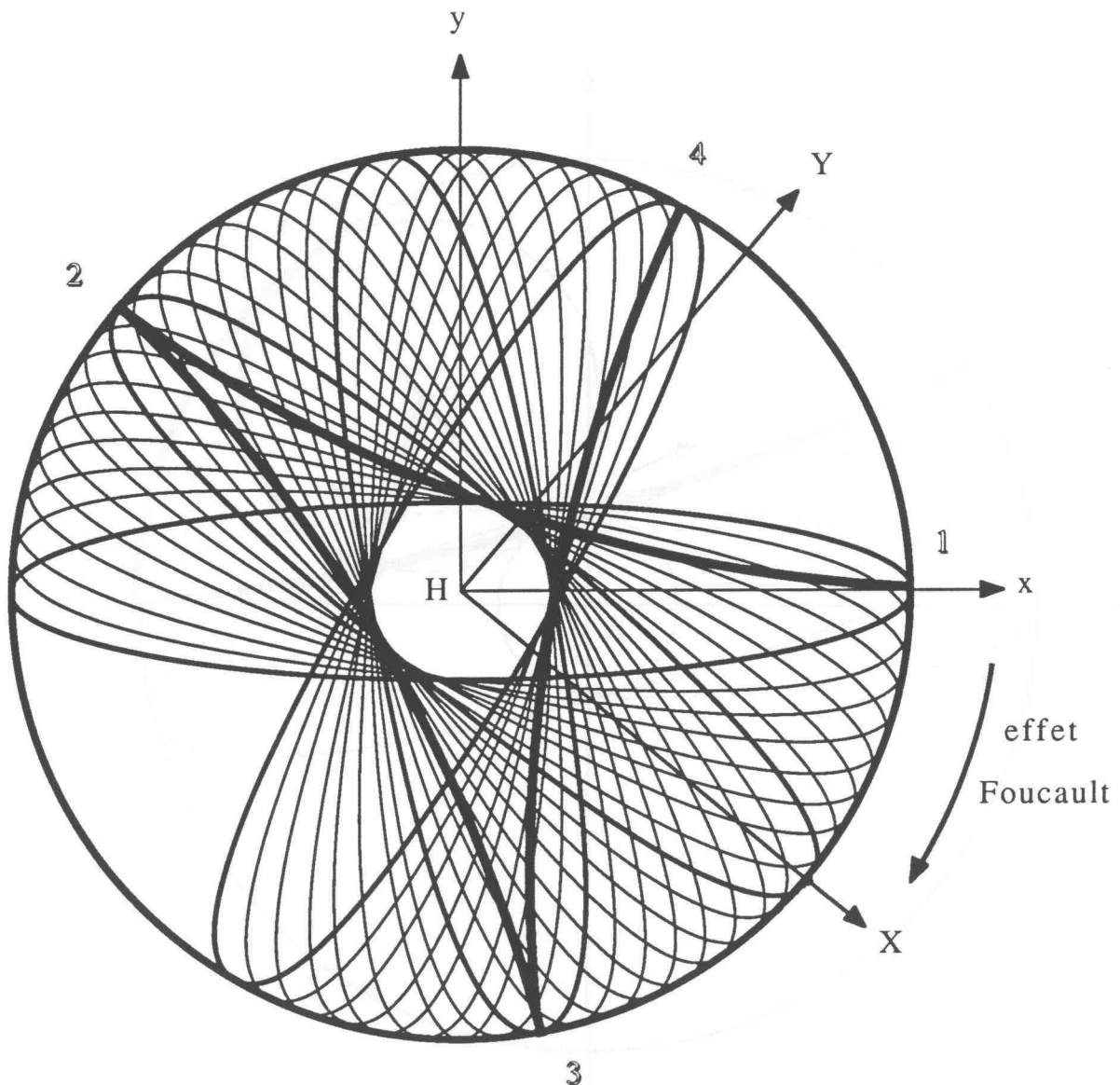


Figure 7

9. Le pendule copernicien ?

L'expérience du pendule de Foucault est indissociablement liée dans les esprits à la démonstration du mouvement diurne de notre planète. D'ailleurs c'est ainsi que Foucault lui-même a présenté sa géniale découverte au monde scientifique étonné puisque sa communication du 3 février 1851 s'intitule : *Démonstration physique du mouvement de rotation de la terre au moyen du pendule*. Si l'on excepte les expériences de chute libre réalisées quelques décennies plus tôt et dont seuls les spécialistes pouvaient apprécier la vertu démonstrative, il est vrai que la spectaculaire expérience de Foucault semble bien constituer la première preuve irréfutable de la rotation axiale de la Terre, rotation déjà affirmée par Héraclide au IV^e siècle avant notre ère et à nouveau soutenue par Copernic au XVI^e siècle. Cependant, cette confirmation tardive de la thèse copernicienne - comme cette thèse elle-même - se heurte à une difficulté majeure qui est escamotée dans le discours traditionnel.

Surtout à partir du XVII^e siècle avec Descartes, mais déjà au XIV^e siècle avec Oresme, les philosophes ont insisté sur le caractère essentiellement relatif du mouvement, le mouvement (ou l'immobilité) d'un corps n'étant pas concevable en soi, mais seulement par référence à un autre corps. Voilà une doctrine tout aussi dérangementante qu'irréfutable quand on y réfléchit. L'ennui est que les théories cosmologiques, tant l'aristotélicienne que la copernicienne, sont d'abord fondées sur la croyance au mouvement absolu, notion parfaitement dénuée de sens pour les philosophes ou savants «relativistes» comme Berkeley, Mach et Poincaré. Il fallait bien, en effet, que Copernic et Galilée, ainsi que leurs adversaires, soient convaincus de l'existence de mouvements absolus, puisque tel était nécessairement le mouvement que les uns attribuaient à la Terre et que les autres lui refusaient ; autrement, pourquoi se seraient-ils battus ? Depuis, Newton avait contribué à donner tout son sens à ce débat en explicitant la notion d'«espace absolu» qui rencontra l'approbation quasi générale. En fait, à l'époque de Foucault et encore au début de ce siècle, et malgré les mises en gardes des philosophes, tout le monde, ou presque, croyait au mouvement absolu. Quoi de plus naturel, en effet, et de plus confortable pour l'esprit, que cette notion qui permet d'apposer sur chaque corps l'étiquette «en mouvement» ou «au repos» ? Mais c'est une chose de dire «la Terre tourne par rapport aux étoiles» (mouvement relatif), et c'en est une autre de dire «la Terre tourne et le ciel est fixe» (mouvement absolu). En réalité, cette dernière phrase n'a aucun sens si on ne précise pas par rapport à quoi le ciel est fixe.

C'est dans ce contexte troublant que l'exploitation habituelle de l'expérience de Foucault apparaît étrangement suspecte. Imaginons, en effet, un homme qui se trouve en hiver au pôle nord sous un ciel dégagé. Il voit les étoiles tourner autour de lui, indice évident de l'existence d'une rotation relative de la Terre et du ciel. Mais ce mouvement est-il dû à une «réelle» rotation du ciel alors que la Terre serait fixe, comme il semble d'abord que ce

soit le cas, ou bien, en dépit des apparences, ne serait-ce pas plutôt la Terre qui tournerait sous un ciel immobile ? A supposer qu'elle ait un sens, voilà une question cruciale que se pose notre homme et à laquelle il est bien incapable d'apporter la moindre réponse par la seule observation du ciel. Il en est là de ses réflexions quand l'idée lui vient d'extraire de sa poche un fil auquel il suspend une boule pesante et dont il fixe l'autre extrémité à un support de manière que la boule puisse se balancer librement. Il relâche délicatement la boule après l'avoir écartée de la verticale du point d'attache, si bien que son pendule - comme il appelle cet instrument - entame une série d'oscillations apparemment planes, et il ne tarde pas à constater que le plan des oscillations suit exactement la rotation du ciel par rapport auquel il est donc fixe. Alors notre homme jubile, sa perplexité se mue subitement en certitude : il vient d'apprendre que c'est la Terre qui tourne ! Nous nous réjouissons pour lui, mais son soudain changement d'attitude nous déconcerte. Tout à l'heure encore il ne savait pas si l'immensité du ciel était fixe, et voilà qu'il en est maintenant persuadé parce qu'il a réussi à ancrer la voûte céleste à son dérisoire appareil. Cet homme est-il raisonnable ? On peut craindre que non !

Mais d'où lui vient cette conviction que la Terre tourne «vraiment» parce qu'elle tourne par rapport au pendule ? Pour le comprendre il faut d'abord remonter à l'édification de la mécanique par Newton qui en énonce les lois *a priori* valables dans l'espace absolu. C'est principalement le cas de la loi $\vec{F} = m\vec{\Gamma}$, dite *loi fondamentale de la dynamique*, exprimée ici sous la forme simple qu'elle prend dans le cas théorique du point matériel de masse m soumis à une force $\vec{F}$ et qui, de ce fait, acquiert une accélération $\vec{\Gamma}$. Cette loi est donc valable par rapport à l'espace absolu, autrement dit lorsque l'espace est rapporté à des axes absolument fixes comme le seraient, selon Newton, des axes définis par le centre d'inertie du système solaire et des directions d'étoiles lointaines.

Dans la seconde moitié du XIX^e siècle, les problèmes posés par l'étude théorique des phénomènes tels que l'effet Foucault du pendule, ont provoqué une prise de conscience progressive du fait capital suivant : les lois de la mécanique, sous la forme simple que Newton leur a données, ne sont pas seulement valables dans l'espace absolu, mais encore relativement à une infinité de référentiels qui sont tous mutuellement en translation rectiligne uniforme. Ces référentiels privilégiés, que l'on qualifie de *galiléens* ou d'*inertiels*, se substituent donc à l'espace absolu que l'on peut dès lors oublier, d'autant qu'aucune confirmation du bien-fondé de ce concept n'a pu être trouvée. Cependant, la mécanique restitue curieusement une certaine notion de mouvement absolu.

On démontre en effet qu'un référentiel qui aurait un mouvement de translation uniforme par rapport à un référentiel galiléen, serait lui-même galiléen. Il en résulte que tout référentiel non-galiléen est nécessairement en

mouvement accéléré - c'est-à-dire non rectiligne uniforme - par rapport à tout référentiel galiléen, et semble donc posséder une propriété de mouvement intrinsèque. Pour cette raison, ce mouvement des référentiels non-galiléens a été qualifié d'*absolu*, mais on a vite oublié que cette notion était d'abord conventionnelle, liée à la théorie de la mécanique, et qu'elle devait être distinguée de celle de mouvement absolu au sens d'un mouvement par rapport à un hypothétique espace absolu. Car, pour cette même mécanique qui prétendrait ainsi prendre en compte la notion de mouvement absolu, le repos absolu continuerait à n'avoir aucun sens, ce qui serait une situation pour le moins étrange.

Cela dit, il est, en principe, facile à la mécanique de détecter la nature non-galiléenne d'un référentiel. Car si l'étude d'un phénomène mécanique, effectuée par rapport à un certain référentiel et selon les lois simples énoncées par Newton, conduit à des prévisions non conformes aux observations, c'est que le référentiel en cause n'est pas galiléen. Et c'est exactement ce qui arrive avec le pendule. Si un référentiel lié au sol était galiléen, les lois de la mécanique assurent, en effet, que le pendule devrait osciller dans un plan invariable par rapport à ce référentiel. Mais c'est justement ce que le pendule de Foucault ne fait pas, prouvant par là qu'un référentiel lié au sol n'est pas galiléen.

Plus précisément, la mécanique explique parfaitement le comportement du pendule en supposant que la Terre possède une rotation axiale par rapport à un référentiel défini par son centre et des directions d'étoiles et considéré comme galiléen, donc en supposant que la Terre tourne par rapport aux étoiles. Mais cela les hommes le savaient depuis longtemps, et l'interprétation que la mécanique donne de l'expérience de Foucault ne prouve pas que la Terre soit animée d'une rotation absolue. Elle nous apprend seulement que notre globe est en rotation par rapport à n'importe quel référentiel galiléen, une rotation que l'on pourrait qualifier de *dynamique*, mais qu'on ne doit pas confondre avec une rotation absolue d'ailleurs dépourvue de sens.

Ce n'est donc pas le pendule de Foucault qui peut prouver la rotation de la Terre au sens «absolu» que l'on prête habituellement à ce mouvement. Mais Copernic et Galilée n'avaient pas tort pour autant. En se basant implicitement sur l'idée erronée du mouvement absolu, ils possédaient certainement une conception inadéquate de la rotation terrestre, et pourtant leur intuition ne les trompait pas quand elle leur faisait croire à la «réalité» de cette rotation et, plus généralement, de la description héliocentrique du système planétaire. Et malgré ce que nous avons dit plus haut, la mécanique apporte une confirmation éclatante du bien-fondé de leur conviction.

A la conception idéaliste d'une science dont l'objet serait, par des approximations successives, de nous révéler une «réalité» de la nature, sous-jacente aux phénomènes mais dont personne ne sait ce qu'elle est, il faut préférer cette représentation plus concrète où la science viserait simplement à établir un maximum de corrélations à l'intérieur d'un groupe de

phénomènes aux liens non nécessairement apparents. En retour, ces corrélations ne pourraient être regardées comme fortuites mais, au contraire, comme signifiantes et exprimant une certaine «réalité» de la nature. Ainsi, s'agissant d'un même ensemble de phénomènes, une théorie serait considérée comme d'autant plus «vraie» qu'elle dégagerait davantage de telles corrélations.

De ce point de vue, la théorie copernicienne du monde est indiscutablement plus vraie que celle de Ptolémée. Là où cette dernière se borne à reconstituer artificiellement les mouvements planétaires entre lesquels n'apparaissent à peu près aucun lien, Copernic donne une explication lumineuse des stations et rétrogradations des planètes, des élongations limitées de Mercure et Vénus par rapport au Soleil quand les autres planètes peuvent s'en écarter arbitrairement, etc. Cette incontestable supériorité de la description héliocentrique est encore confortée par les lois de Kepler qui démontrent que la «réalité» du monde ne réside pas dans un rapport Terre-planètes, mais bien dans une relation Soleil-planète. Enfin, cette relation s'est encore trouvée considérablement renforcée par l'extraordinaire performance de la mécanique newtonienne. Celle-ci, à partir de seulement quelques principes simples auxquels elle adjoint la loi de la gravitation universelle, donne une explication de tous les mouvements de l'univers, depuis ceux qu'on observe à la surface de la Terre jusqu'à ceux des astres. La circulation des planètes autour du Soleil et, plus particulièrement, les mouvements de la Terre, s'inscrivent dans cette explication globale du monde dont il est impensable qu'elle ne corresponde pas à quelque «réalité» de la nature.

Voilà comment la rotation de la Terre, bien mal établie par une expérience particulière comme celle du pendule de Foucault¹³, est en revanche incontestablement prouvée par la mécanique considérée dans l'ensemble cohérent de ses performances explicatives. Il est bien vrai que la Terre tourne, et ceci bien que l'espace et les mouvements absolus n'existent pas.

10. Le pendule humoristique

Nous voudrions terminer par des considérations moins sérieuses que les précédentes et qui pourraient constituer les premiers éléments pour la rédaction d'un bêtisier du pendule.

Le retentissement du pendule de Foucault a été considérable, tant auprès du public que la presse a incité à se déplacer en grand nombre pour assister aux multiples réalisations de l'expérience, que dans les milieux scientifiques

¹³ Pas davantage les phénomènes d'aberration et de parallaxe annuelles des étoiles ne prouvent un mouvement orbital absolu - au sens habituel de ce mot - de la Terre autour du Soleil.

où il a suscité de nombreuses publications. Ces dernières sont d'ailleurs d'intérêts très divers, allant des études les plus savantes aux propositions les plus fantaisistes, comme cette idée présentée à l'Académie des Sciences dès 1851, et à nouveau en 1888, et visant à démontrer la rotation de la Terre au moyen d'un pendule ... non oscillant !

Le pendule a donc fait couler beaucoup d'encre et tout le monde en a parlé, même ceux qui n'en avaient jamais vu. A la fin du XIX^e siècle, le célèbre chimiste Marcelin Berthelot dirigeait l'édition de la *Grande Encyclopédie* en 31 volume, qui parut de 1885 à 1892. Malheureusement, et en dépit d'une haute tenue générale, la rédaction des articles n'a pas toujours été confiée aux personnalités les plus compétentes ou les mieux informées. C'est ainsi que ce monumental ouvrage, louable entreprise de diffusion des connaissances, s'est doté d'un article «Foucault» qui, à maints égards, est un morceau d'anthologie :

Foucault montra, à l'aide d'expériences faites d'abord dans une cave, que la terre tournait ; il fallait pour cela trouver une mire fixe remplaçant les étoiles dont le mouvement apparent est une démonstration de la rotation de la terre ; cette mire, Foucault l'obtint par l'oscillation d'un pendule reposant sur un plan à l'aide d'une pointe. La théorie établie par Foucault montre qu'un pareil instrument oscille dans un plan d'une direction invariable, malgré le mouvement de la terre qui l'emporte ; l'expérience montra que l'angle de cette direction invariable avec un plan invariablement lié à la terre était variable ; on en concluait que ce dernier n'avait pas une position fixe dans l'espace et que, par suite, la terre n'était pas immobile.

On peut douter que l'auteur de cet article fût beaucoup mieux renseigné sur le pendule de Foucault que cet amateur de nouveautés techniques qui adressait au génial inventeur la requête suivante :

Monsieur, je serais désireux d'avoir une de vos pendules marchant par le mouvement de la terre. Où pourrais-je me la procurer ? Je vous serais très reconnaissant de vouloir bien me l'indiquer.

Mais le pendule de Foucault n'a pas fini de nous amuser. A propos de cette expérience, une récente publication¹⁴ nous apprend comment, en réalité, Foucault s'est surpris lui-même en jouant avec un caillou et une ficelle !

Il s'agit d'un recueil de réflexions sur un thème fréquemment abordé de nos jours, celui des rapports entre la science et la religion, et où, pour les besoins d'une présentation sous la forme de dialogues, le philosophe et principal auteur de l'ouvrage s'est assuré le concours de deux scientifiques annoncés comme physiciens et astrophysiciens. Or nous lisons sous la plume de l'un d'eux :

A l'appui de ce que vous énoncez il suffit de rappeler ici une expérience insolite conduite par le physicien français Léon Foucault en 1851. Souvenez-vous : à cette époque, on n'avait pas encore la preuve expérimentale que la Terre tournait sur elle-même. Pour faire sa démonstration, Foucault suspend donc une pierre très

¹⁴ J. Guitton, G. et I. Bogdanov, *Dieu et la science*, Paris, Grasset, 1991, p. 161-162.

lourde à une longue corde dont l'extrémité est fixée sous les voûtes du Panthéon. Notre expérimentateur dispose ainsi d'un pendule de très grande taille qui sera lancé par un beau matin de printemps. Or, c'est là que commence l'énigme. A son grand étonnement, Foucault constate en effet que le plan d'oscillation de son pendule - c'est-à-dire la direction de ses aller-retour - n'est pas fixe. Alors qu'il avait commencé par osciller dans la direction est-ouest, le pendule se déplace quelques heures plus tard dans la direction nord-sud. Pour quelle raison ? La réponse de Foucault était simple : ce changement de direction n'était qu'une illusion. C'était en fait la Terre qui tournait, alors que le plan d'oscillation du pendule, lui, était rigoureusement fixe.

Voilà qui est nouveau par rapport à ce qu'on a l'habitude de lire sur l'expérience de Foucault, et qui pose aux historiens des sciences des questions capitales auxquelles, à notre connaissance, ils n'ont encore apporté aucune réponse. Principalement celle-ci : de quelle façon Foucault prétendait-il utiliser son pendule préhistorique à la démonstration du mouvement de la Terre ? Ou bien l'histoire nous aurait-elle caché que Foucault n'était qu'un simple ouvrier du bâtiment à qui serait venue l'idée bizarre d'éprouver la solidité de la coupole du Panthéon ? Toutefois, et quels que puissent être nos sentiments et interrogations devant ces révélations inattendues, résistons à la tentation d'un usage moins pacifique du matériel bien imprudemment fourni par leur auteur !



ANNEXE 1

HYPOCYCLOIDE

engendrée par le roulement sans glissement du cercle de rayon

$r = \frac{a - b}{2}$ à l'intérieur du cercle de rayon $a > b > 0$

Représentation paramétrique :

$$x = (a - r) \cos \theta + r \cos \left[\left(1 - \frac{a}{r} \right) \theta \right],$$

$$y = (a - r) \sin \theta + r \sin \left[\left(1 - \frac{a}{r} \right) \theta \right].$$

Rayon de courbure :

$$R = 4r \frac{a - r}{a - 2r} \sin \frac{a\theta}{2r} = \frac{a^2 - b^2}{b} \sin \frac{a\theta}{a - b}$$

Rayon de courbure maximum, au milieu d'un arc :

$$R_M = 4r \frac{a - r}{a - 2r} = \frac{a^2 - b^2}{b}$$

Longueur d'un arc :

$$L_a = 8r \frac{a - r}{a} = 2 \frac{a^2 - b^2}{a}$$

Longueur de la corde :

$$L_c = 2a \sin \left(\pi \frac{r}{a} \right) = 2a \cos \left(\pi \frac{b}{2a} \right) = 2a - \frac{\pi^2 b^2}{4a} + o(b^3)$$

Flèche d'un arc :

$$F = a \cos \left(\pi \frac{r}{a} \right) - (a - 2r) = a \sin \left(\frac{\pi b}{2a} \right) - b = \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) b + o(b^2)$$

ANNEXE 2

LE PENDULE DE FOUCAULT AU PANTHEON
selon le cas idéal du pendule simple aux oscillations d'amplitude
infiniment petite

Rotation sidérale de la Terre

Période..... $T_s \approx 86164 \text{ s} = 23 \text{ h } 56 \text{ m } 04 \text{ s}$

Vitesse angulaire..... $\omega \approx 7,2921 \cdot 10^{-5} \text{ rd.s}^{-1}$

Latitude du Panthéon..... $\varphi \approx 48^\circ 50' 49''$

Accélération de la pesanteur.... $g \approx 9,810 \text{ m.s}^{-2}$

Longueur du pendule..... $\ell = 67 \text{ m}$

Masse de la boule..... 28 kg

Période des oscillations..... $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \approx 16,42 \text{ s}$

Rotation du «plan d'oscillation»

Vitesse angulaire..... $\omega \sin \varphi = 5,4906 \cdot 10^{-5} \text{ rd.s}^{-1}$

Période..... $T_1 = \frac{2\pi}{\omega \sin \varphi} \approx 114435 \text{ s} = 31 \text{ h } 47 \text{ m } 15 \text{ s}$

Nombre d'oscillations..... $N = \frac{a}{b} = \frac{T_1}{T_0} \approx 6969$

Ellipse d'oscillation

Demi-grand axe..... $a = 3 \text{ m}$

Demi-petit axe..... $b = a \omega \sin \varphi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \approx 4,305 \cdot 10^{-4} \text{ m}$

Hypocycloïde d'oscillation

Rayon de courbure au milieu d'un arc $R_M \approx 20907 \text{ m}$

Longueur d'un arc..... $L_a \approx 6 \text{ m} - 1,235 \cdot 10^{-7} \text{ m}$

Longueur de la corde..... $L_c \approx 6 \text{ m} - 1,524 \cdot 10^{-7} \text{ m}$

Longueur de la flèche..... $F \approx 2,457 \cdot 10^{-4} \text{ m}$

BIBLIOGRAPHIE

- ACLOQUE, P., *Oscillations et stabilité selon Foucault*, Paris, Editions du C.N.R.S., 1981.
- ACLOQUE, P., *Histoire des expériences pour la mise en évidence du mouvement de la Terre*, Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences, n° 4, 1982.
- DELIGEORGES, S., *Foucault et ses Pendules*, Paris, Editions Carré, 1990.
- GAPAILLARD, J., *Le mouvement de la Terre. La détection de sa rotation par la chute des corps*, Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences, n° 25, 1988.
- GAPAILLARD, J., *Et pourtant, elle tourne ! (Mais est-ce si sûr ?)*, publication I.R.E.M.-A.P.M.E.P., Nantes, 1988.
- GAPAILLARD, J., *Et pourtant, elle tourne ! Le mouvement de la Terre*, à paraître aux Editions du Seuil, collection «Science ouverte», mai 1993.
- PARAIS, P., *Le pendule de Foucault dans le cadre des Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris entre 1851 et 1900*, mémoire de D.E.A., Centre d'Histoire des Sciences, Université de Nantes, 1992.



TABLE DES MATIERES

1. Le pendule insolite.....	p. 1
2. Le pendule du génie.....	p. 2
3. Le pendule de la gloire.....	p. 3
4. Le pendule de la honte.....	p. 5
5. Le pendule de la zizanie.....	p. 7
6. Le pendule prévisible.....	p. 9
7. Le pendule géométrique.....	p. 11
8. Le pendule analytique.....	p. 17
9. Le pendule copernicien ?.....	p. 23
10. Le pendule humoristique.....	p. 26
Annexe 1.....	p. 29
Annexe 2.....	p. 30
Bibliographie.....	p. 31



