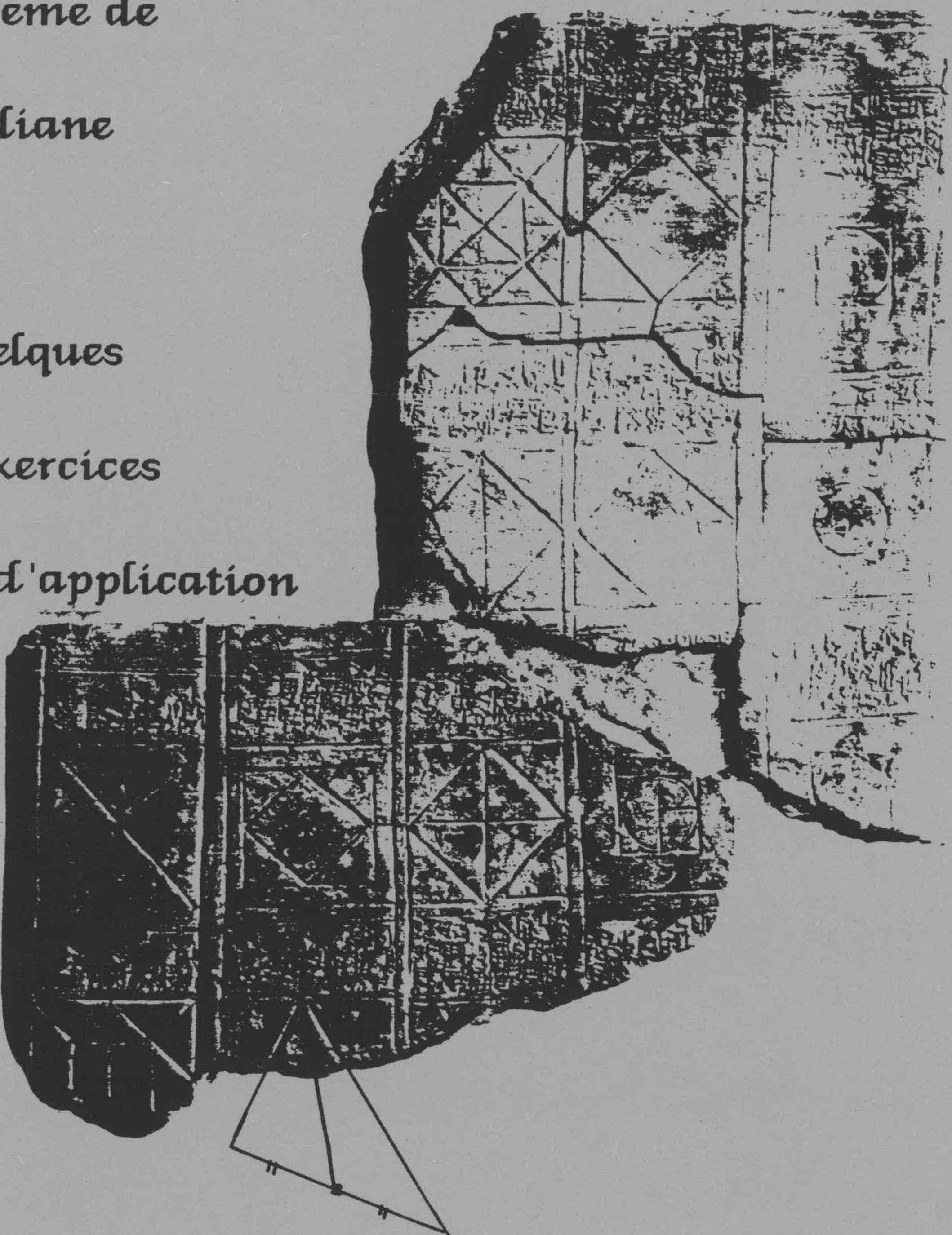
INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Des PAYS DE LOIRE

Le Théorème de la médiane et quelques exercices d'application



J.J.PRIMOT
L.JAYEZ
A.QUIDU

juin 1992

La réduction de $MA^2 + MB^2$ figure au programme de 1ère S.

Elle est en général abordée comme application du produit scalaire.

Cette réduction peut en fait être obtenue avec le seul théorème de Pythagore, et constitue ainsi un outil pouvant, dans certains cas, se substituer au produit scalaire.

La démonstration peut faire l'objet de travaux dirigés de seconde et permettre, en prolongement, l'étude de l'othogonalité d'une droite et d'un plan dans l'espace.

Les applications de ce théorème, dit "de la médiane", donnent, en outre, l'occasion de développer le calcul algébrique dans un cadre de géométrie.

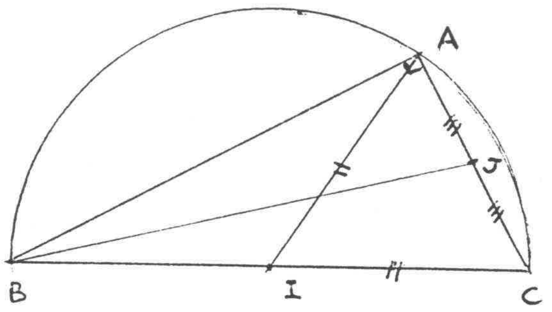
Les exercices proposés n'ont pas la prétention d'être originaux. Ils ont été choisis pour constituer une gamme variée d'applications de ce théorème, tout en mettant en œuvre différentes formes de raisonnement que nous avons cherché à faire ressortir au travers des solutions.

I) FORMULATION DU THEOREME DE LA MEDIANE

On se propose d'évaluer la longueur des médianes d'un triangle A B C en fonction des longueurs de ses côtés.

On sait répondre à la question dans quelques cas particuliers :

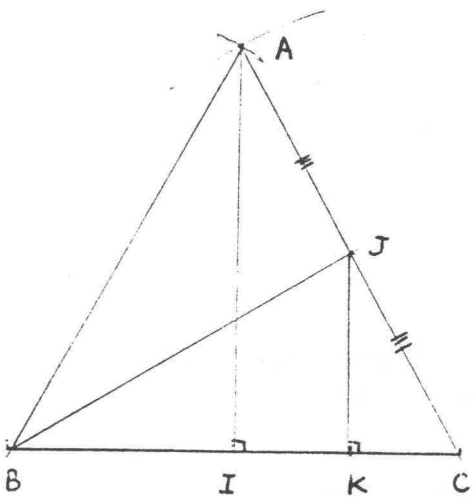
a) ABC est rectangle en A :



1) $AI = \frac{1}{2} BC$

2) $BJ^2 = AB^2 + \frac{1}{4} AC^2$

b) ABC est isocèle en A



1) $AI^2 = AC^2 - \frac{1}{4} BC^2$

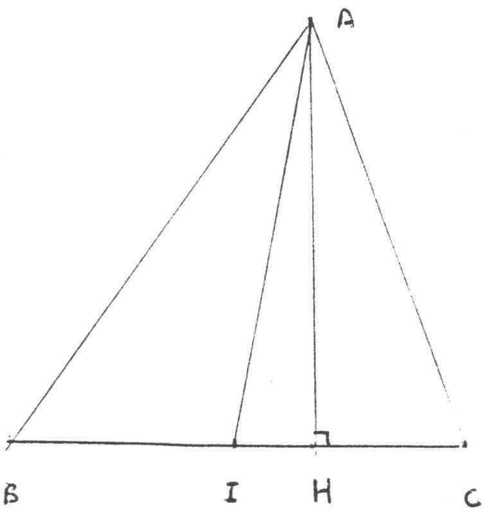
2) $BJ^2 = BK^2 + KJ^2$

$BJ^2 = (\frac{3}{4} BC)^2 + (\frac{1}{2} AI)^2$

$BJ^2 = \frac{9}{16} BC^2 + \frac{1}{4}\left(AC^2 - \frac{1}{4} BC^2\right)$

$BJ^2 = \frac{1}{2} BC^2 + \frac{1}{4} AC^2$

c) Qu'en est-il dans le cas général ?



Notons H le projeté orthogonal de A sur (BC).

$$AI^2 = AH^2 + IH^2$$

Afin de ne pas privilégier l'un des côtés, on écrit :

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 + IH^2$$

$$AH^2 = AC^2 - CH^2 + IH^2$$

Pour tenir compte de ces deux égalités, on les ajoute membre à membre :

$2AI^2 = AB^2 + AC^2 - [HB^2 + HC^2 - 2HI^2]$.

On remarque que le problème revient dès lors à évaluer le carré de la "médiane" HI dans le "triangle aplati" HBC.

cas : C est un point de [IH].

$HB = HI + IB$
$HC = HI - IC$
$HB^2 + HC^2 = (HI + IB)^2 + (HI - IC)^2$
$= 2HI^2 + \frac{1}{2}\ BC^2$

Cas : H est un point de [IC]

Dans ce cas seule est modifiée l'expression de HC : $HC = IC - HI$, son carré est inchangé.

La symétrie de centre I permet de déduire la même conclusion pour les deux autres cas : H est un point de [BI] ; B est un point de [HI].

L'expression de $2AI^2$ devient alors $2AI^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2$.

Par référence au théorème de Pythagore, cette égalité est souvent écrite sous la forme $\boxed{AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}\ BC^2.}$

Il est facile de vérifier que les résultats obtenus lorsque le triangle est isocèle ou rectangle sont bien des cas particuliers.

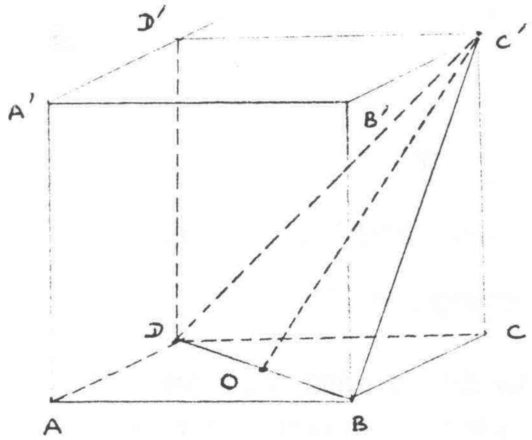
II) UNE APPLICATION DU THEOREME DE LA MEDIANE : DROITE ORTHOGONALE A UN PLAN

Activité n° 1 :

(A, B, C, D, A', B', C', D') est un cube. O est le milieu de [BD].

1°) Quelle est la nature du triangle (B, C', D) ?
L'arête a du cube étant fixée, représenter ce triangle en vraie grandeur.

2°) Calculer en fonction de a les distances OC' et OC.
Quelle est la nature du triangle (O, C, C') ?



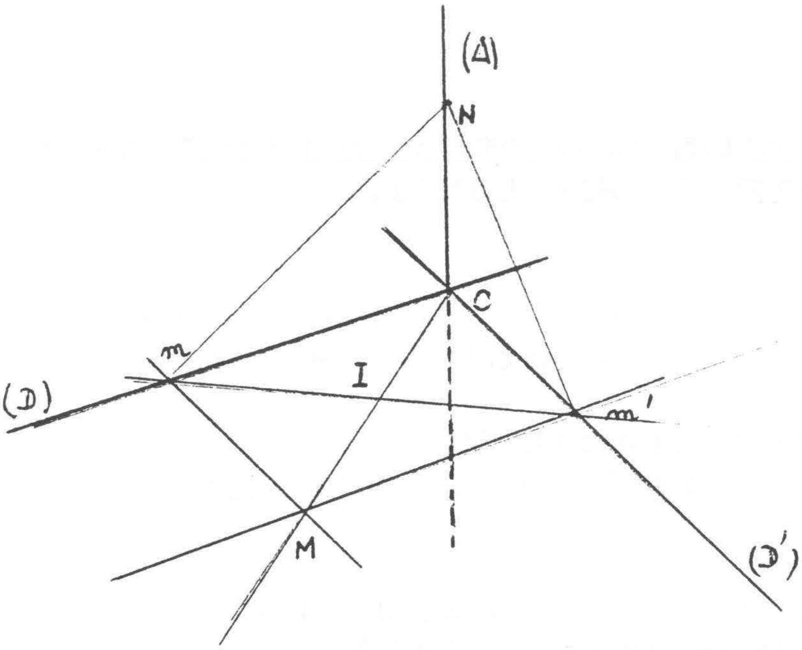
Conclusion : on a démontré, sachant que (CC') est orthogonale à (CD) et (CB), qu'elle est orthogonale à une troisième droite, (CA) du plan (ABCD), de direction différente de celles de (CD) et de (CB).

Activité n° 2 :

On considère deux droites (D) et (D') sécantes en un point O, et une droite (Δ) perpendiculaire en O à (D) et à (D').

Démontrer que la droite (Δ) est orthogonale à toute droite contenue dans le plan (P) déterminé par les droites (D) et (D').

Indications : Soit (D_1) une droite du plan (P) passant par O et M un point de (D_1) distinct de O. On note : m et m' les projetés respectifs de M sur (D) parallèlement à (D') et sur (D') parallèlement à (D).
I est le centre du parallèlogramme (o, m, M, m').
On choisit un point N distinct de O sur la droite (Δ) et on cherche alors à adapter la méthode précédente.



Solution : Il s'agit de démontrer que le triangle ION est rectangle en O.
Dans le triangle mOm' le théorème de la médiane pemet d'écrire :

$$2OI^2 = Om^2 + Om'^2 - \frac{1}{2}\ mm'^2$$

De même, dans le triangle mNm' :

$$2NI^2 = Nm^2 + Nm'^2 - \frac{1}{2}\ mm'^2$$

On en déduit que $2(NI^2 - OI^2) = Nm^2 - Om^2) + (Nm'^2 - Om'^2)$ c'est-à-dire que $NI^2 - OI^2 = ON^2$. Le triangle ION est bien rectangle en O.

Conclusion : Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes alors elle est orthogonale à toute droite contenue dans le plan déterminé par ces deux droites sécantes.

III) QUELQUES EXERCICES QUE L'ON PEUT RESOUDRE EN UTILISANT LE THEOREME DE LA MEDIANE.

Exercice n° 1 : Calculer la somme des carrés des médianes d'un triangle en fonction des longeurs des côtés de ce triangle.

Exercice n° 2 : Démontrer que le triangle ABC est isocèle en A si, et seulement si, les médianes issues de B et de C ont la même longueur.

Exercice n° 3 : A et B étant deux points fixés, déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

1) $MA^2 + MB^2 = 2AB^2$

2) $2AB^2 \leq MA^2 + MB^2 \leq 3AB^2$

Exercice n° 4 : A et B sont deux points donnés.

Déterminer les points M d'une droite donnée Δ pour lesquels $MA^2 + MB^2$ est minimum.

Exercice n° 5 : Les segments [AB] et [CD] ont la même longueur.

Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$

Exercice n° 6 : A, B, C, et D sont quatre points du plan.

Démontrer que : $AC^2 + BD^2 \leq AB^2 + BC^2 + DC^2 + AD^2$.
Quand y a-t-il égalité ?

Exercice n° 7 : ABCD est un trapèze rectangle en B et C tel que DC = AD.
I désigne le milieu du segment [BC], J celui du segment [AB].
Démontrer que les droites (AI) et (DJ) sont orthogonales.

Exercice n° 8 : (C) est un cercle de centre O. A est un point intérieur à ce cercle. Deux demi-droites perpendiculaires d'origine A pivotent autour du point A. L'une coupe le cercle (C) en M, l'autre coupe le cercle (C) en N. Déterminer l'ensemble décrit par le milieu du segment [MN].

Exercice n° 9 : ABCD est un tétraèdre dans lequel les arêtes opposées ont la même longueur.

1) Démontrer que les droites passant par les milieux des arêtes opposées sont orthogonales deux à deux.

2) Déterminer le centre de la sphère circonscrite et calculer son rayon en fonction de AB = c, BC = a, AC = b.

---

indications de solutions

exercice n° 1

On obtient le théorème "fondamental" :

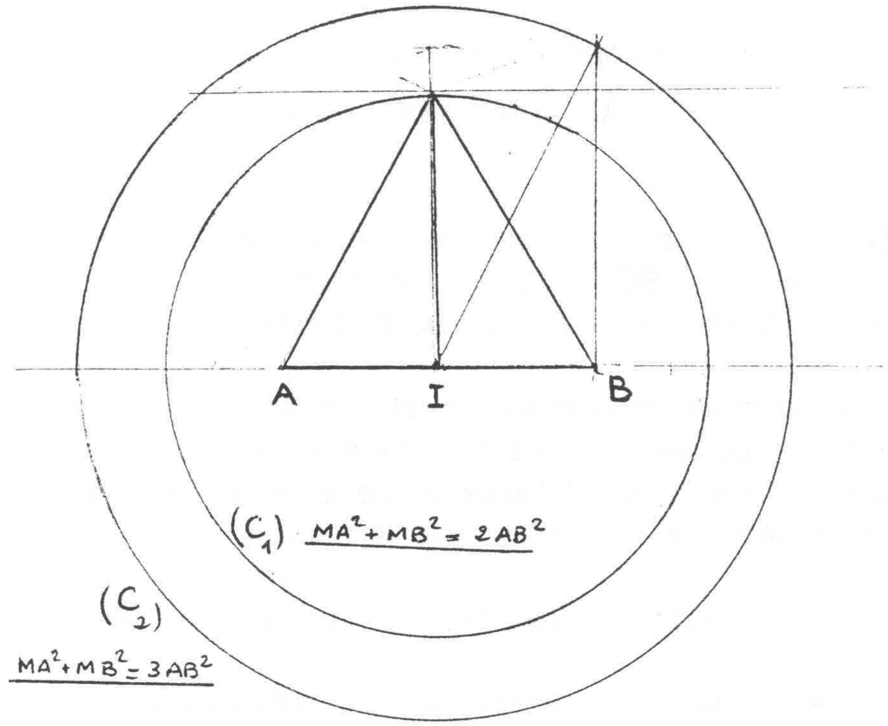
La somme des carrés des médianes d'un triangle est égale aux trois quarts de la somme des carrés des côtés.

exercice n° 2

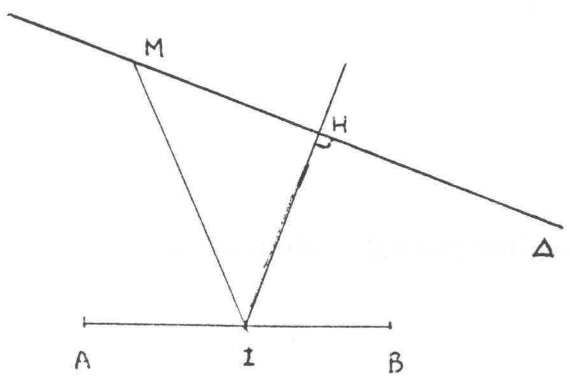
On désigne par B' le milieu de AC et par C' le milieu de AB le théorème de la médiane conduit de façon immédiate à :

$$\frac{3}{2}\,(BA^2 - CA^2) = 2\,(BB'^2 - CC'^2)$$

Exercice n° 3 : (l'un des intérêts de cet exercice réside dans les constructions géométriques à la règle et au compas).



Exercice n° 4 :



$$MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$$

Cette somme est minimum lorsque MI l'est, c'est-à-dire lorsque M est le projeté orthogonal de I sur Δ.

Exercice n° 5 :

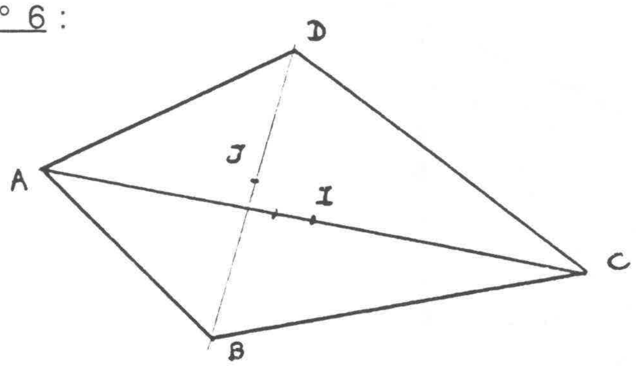
On note I le milieu du segment [AB] et J celui du segment [CD].

Si $I \neq J$ alors l'ensemble cherché est la médiatrice du segment [IJ].

Si $I = J$ alors ACBD est un rectangle.

L'égalité est vraie pour tout les points du plan.

Exercice n° 6 :



Solution : Notons I le milieu de [AC], J celui de [BD].
Le théorème de la médiane permet d'écrire :

$$AB^2 + BC^2 = 2\,BI^2 + \frac{1}{2}AC^2$$

$$CD^2 + DA^2 = 2DI^2 + \frac{1}{2}AC^2$$

en ajoutant membre à membre ces deux égalités on obtient :

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2\,BI^2 + \frac{1}{2}AC^2 + 2DI^2 + \frac{1}{2}AC^2$$

$$= 2\,BI^2 + 2DI^2 + AC^2 .$$

En appliquant de nouveau le théorème de la médiane dans le triangle BID on obtient :

$$BI^2 + DI^2 = 2IJ^2 + \frac{1}{2}BD^2 .$$

On en déduit que : $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 4IJ^2 + AC^2 + BD^2$ et que par conséquent $AC^2 + BD^2 \leq AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$.
L'égalité a lieu si, et seulement si, IJ = 0, c'est-à-dire si, et seulement si I = J.

Une version utilisant le produit scalaire

$$\overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})^2 = \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{DC}^2 + 2\,\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC}$$

$$\overrightarrow{BD}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD})^2 = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + 2\,\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD}$$

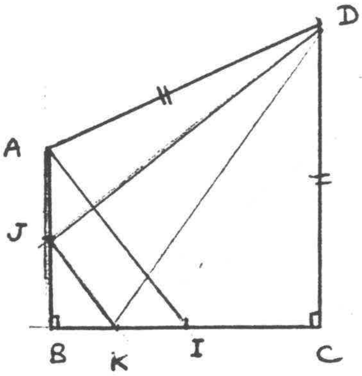
$$\overrightarrow{BD}^2 = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})^2 = \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + 2\,\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} .$$

En ajoutant membre à membre ces égalités on obtient :

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + DC^2 + AD^2 - (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD})^2 .$$

On retrouve ainsi que $AC^2 + BD^2 \leq AB^2 + BC^2 + DC^2 + AD^2$.
L'égalité a lieu si, et seulement si, le carré scalaire du vecteur $(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD})$ est nul, c'est-à-dire si, et seulement si, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

Exercice n° 7 :



Une solution possible :

"Remplaçons" la droite (AI) par la parallèle à (AI) passant par J. Cette droite coupe (BC) en K milieu de [BI]. Le problème revient alors à trouver que le triangle KJB est rectangle en J.

Le théorème de la médiane appliqué au triangle DAB permet d'écrire $DJ^2 = \frac{1}{2}\ AD^2 + \frac{1}{2} DB^2 - \frac{1}{4}\ AB^2$. De plus $JI^2 = \frac{1}{4}\ AI^2 = \frac{1}{4} AB^2 + \frac{1}{4} IB^2$.

On en déduit que $DJ^2 + JI^2 = \frac{1}{2}\ AD^2 + \frac{1}{2} DB^2 + \frac{1}{4} IB^2$.

$$= \frac{1}{2} DC^2 + \frac{1}{2} DB^2 + \frac{1}{4} IB^2$$

$$= \frac{1}{2} DC^2 + \frac{1}{2} (DC^2 + CB^2) + \frac{1}{4} IB^2$$

$$= DC^2 + \frac{1}{2} CB^2 + \frac{1}{16}\ CB^2$$

$$= DC^2 + \frac{9}{16}\ CB^2$$

$$= DC^2 + CK^2$$

$$= DK^2$$

Le triangle DJK est rectangle en J, les droites AI et DJ sont donc perpendiculaires.

Une deuxième solution :

L'idée consiste à prouver que la droite AI est une ligne de niveau de $M \longrightarrow MD^2 - MJ^2$. Pour cela il suffit de démontrer que $AD^2 - AJ^2 = ID^2 - IJ^2$.

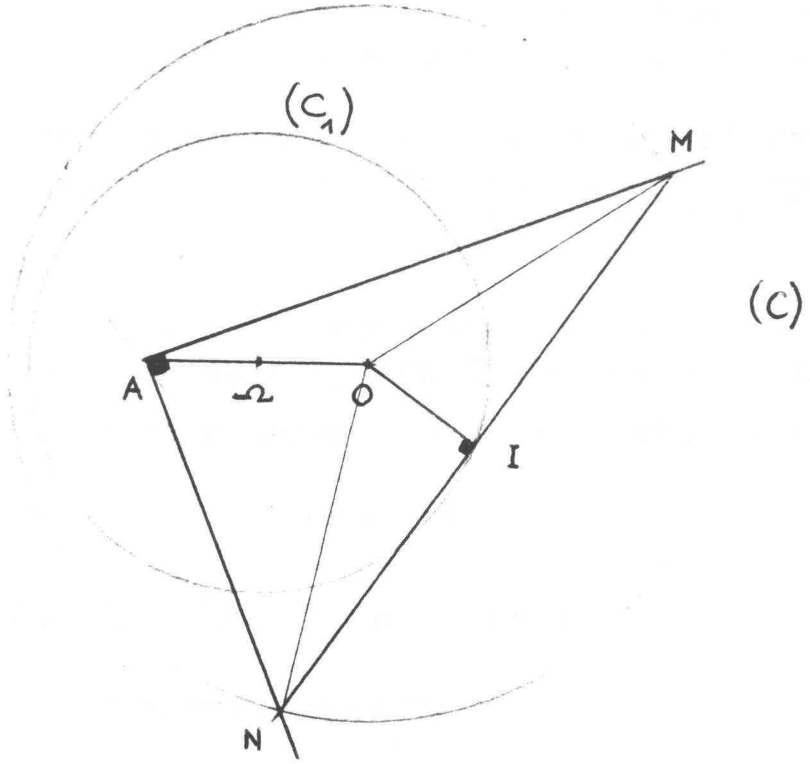
$ID^2 - IJ^2 = DC^2 + IC^2 - \frac{1}{4}\ AC^2$

$$= AD^2 + \frac{1}{4}\ (BC^2 - AC^2)$$

$$= AD^2 - \frac{1}{4}\ AB^2 =$$

$$= AD^2 - AJ^2.$$

Exercice n° 8



Un dessin point par point (que l'on peut réaliser avec un bon logiciel mais aussi, plus archaïquement mais dans de meilleurs délais, à l'aide d'une équerre en papier) conduit à conjecturer que l'ensemble (Γ) est un cercle dont le centre est le milieu Ω de [AO].

Comme les cercles centrés en Ω sont des lignes de niveau relatives à la fonction $f : T \longrightarrow TA^2 + TO^2$, ont peut chercher à faire apparaître IA^2 et IO^2 :

1) Analyse

Soit I un point de (Γ), qui est donc milieu de l'hypoténuse [MN] d'un triangle rectangle AMN tel que M et N soient sur (Γ).

on peut alors écrire : $OI^2 = OM^2 - IM^2$; comme IM = IA on en déduit que $IA^2 + IO^2 = OM^2 = R^2$

Le point I appartient donc à la ligne de niveau R^2 de la fonction $T \longrightarrow TA^2 + TO^2$, qui est le cercle $\mathcal{C}_1$ centré en Ω et de rayon $\sqrt{\frac{R^2}{2} - \frac{OA^2}{4}}$.

2) Synthèse

Soit P un point quelconque de $\mathcal{C}_1$. Peut-on trouver deux points R et S du cercle $\mathcal{C}$ tel que :

* P soit milieu de [RS]
* le triangle RAS soit rectangle en A ?

La démarche consiste à remarquer qu'une solution (R, S) définit la corde orthogonale à (OP), à condition que P soit strictement intérieur à $\mathcal{C}$ et distinct de O. Qu'en est-il ?

Par hypothèse, $PA^2 + PO^2 = R^2$ et donc : $OP \leq R$.
L'égalité supposerait que PA = O, donc que P soit en A ; on aurait alors :
$AA^2 + AO^2 = R^2$ et donc : $OA = R$; A serait donc sur $\mathcal{C}$.

D'où : $OP < R$

D'autre part, si P était en O, on aurait : $OA^2 + OO^2 = R^2$; A serait alors sur $\mathcal{C}$.

P est donc distinct de O.

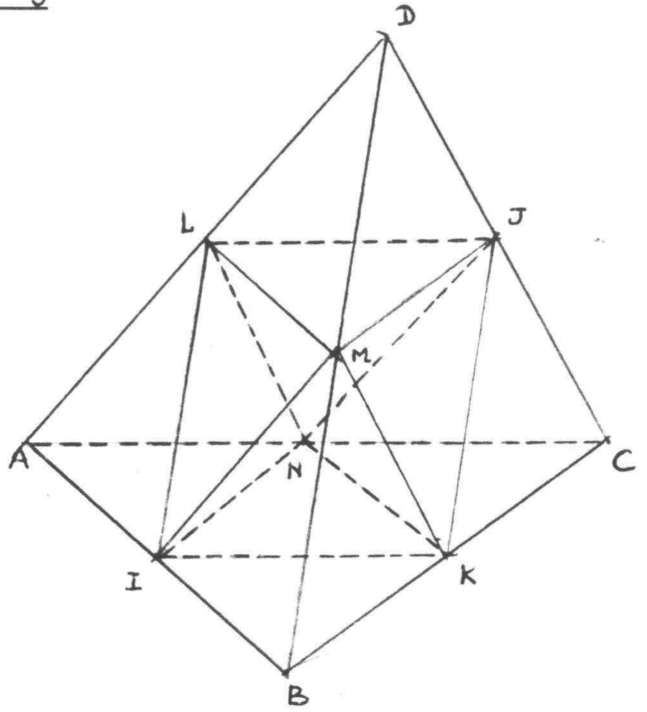
On peut dès lors définir la corde $[R_0 S_0]$ orthogonale à (OP).

P est le milieu de $[R_0 S_0]$; il reste à savoir si (R_0, A, S_0) est un triangle rectangle en A :

$PA^2 + PO^2 = R^2$, d'où : $PA^2 = R^2 - PO^2$
Or : $PO^2 = R^2 - R_0P^2$. D'où : $PA^2 = PR_0^2$, c'est-à-dire : $PA = PR_0$.

Il en résulte, puisque A ne peut être ni en R_0 , ni en S_0 , que (R_0, A, S_0) est un triangle rectangle en A.

Exercice n° 9



1) (IJ), (LK) et (MN) sont concourantes en G centre de gravité du tétraèdre.

ILJK est un parallélogramme : IL = $\frac{1}{2}$ BD = $\frac{1}{2}$ AC, LJ = $\frac{1}{2}$ AC donc IL = LJ

et ILJK est un losange.
De même IMJN et LMKN sont des losanges.
Les droites (LK), (IJ) et (MN) sont orthogonales deux à deux.

2) En appliquant le théorème de la médiane au triangle ABC et au triangle DBC on obtient :

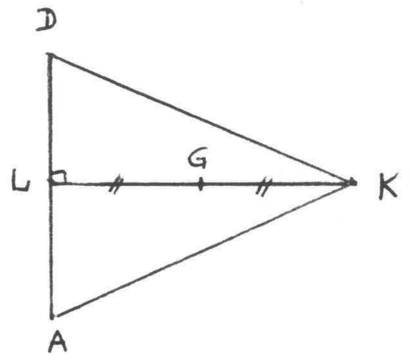
$AB^2 + AC^2 = 2AK^2 + \frac{1}{2} BC^2$ et $DB^2 + DC^2 + 2DK^2 + \frac{1}{2} BC^2$

Comme AB = DC et AC = DB on en déduit que AK = DK.

La droite LK est donc une droite du plan médiateur de [AD].
De la même façon on démontre que (LK) est une droite du plan médiateur de [BC].
Le centre de la sphère circonscrite est donc un point de (LK). C'est aussi un point de (IJ) et de (MN).

<u>Le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD est son centre de gravité</u>

<u>CALCUL DE SON RAYON</u>



$$AB^2 + AC^2 = 2AK^2 + \frac{1}{2}\ BC^2 \ ;\ c^2 + b^2 = 2AK^2 + \frac{1}{2}\ a^2$$

d'où $AK^2 = \dfrac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{4}$

$$LK^2 = AK^2 - AL^2 = \frac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{4} - \frac{a^2}{4}$$

$$LK^2 = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$$

$$AG^2 = AL^2 + LG^2$$

$$AG^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{1}{4}\ \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$$

$$AG^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}$$

Le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre est

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}}$$