

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES  
DES PAYS DE LOIRE

POURQUOI LES REVETEMENTS  
DE POINCARÉ PEUVENT AIDER UNE FOURMI  
GOURMANDE -  
MAIS MATHÉMATICIENNE

Juin 92  
Prix 12 F

Annick FLANCHEC



## LA FOURMI, LE VERRE ET LA CONFITURE

Problème : (voir fig. 1)

*Un verre cylindrique est posé sur une table. Sur la paroi intérieure du verre, il y a une goutte de confiture, notée C. Sur la paroi extérieure du verre se trouve une fourmi ; la position initiale de cette fourmi est notée F.*

*Décrire le plus court chemin que doit suivre la fourmi pour aller de F en C.*

Pour résoudre ce problème - connu - on réalise un développement du cylindre qu'est le verre et on introduit le point C' symétrique de C par rapport au bord supérieur du verre (voir fig. 2).

Dans le cas de la figure 2, le circuit le plus court est FJC et, dans l'espace, la trajectoire  $\Gamma$  de la fourmi est alors constituée de deux arcs d'hélices circulaires.

Dans une classe de Terminale C, un bon exercice consiste à introduire un repère de l'espace et à chercher, relativement à ce repère, une représentation paramétrique de la courbe  $\Gamma$ .

### MAIS SI LE VERRE ETAIT CONIQUE (fig. 3) ?

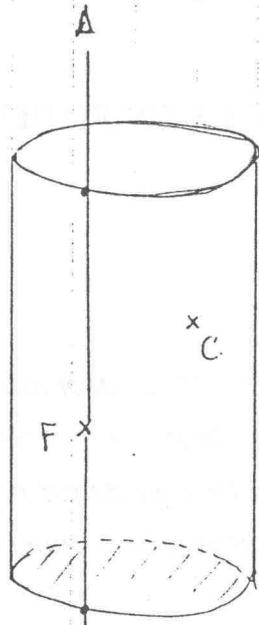
On peut toujours réaliser un développement de la partie conique du verre. (voir fig. 4).

On doit alors construire le point I tel que la droite (SI) soit la bissectrice intérieure de  $\widehat{FIC}$ .

Jusqu'à présent nous n'avons pas réglé ce problème.

Peut-être n'y a-t-il pas de construction possible du point I à l'aide de la règle et du compas (ce qui resterait à prouver) ?

Le problème reste ouvert...



- Fig 1 -

Plan de la table

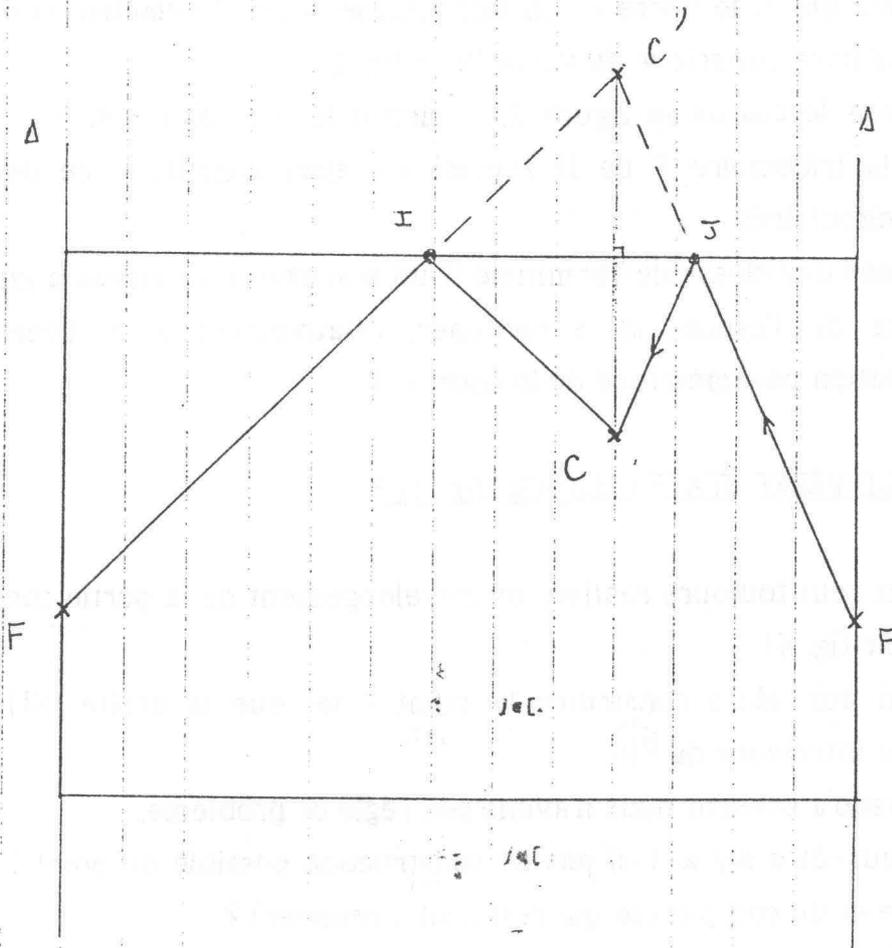


fig 2

## Pourquoi cette petite brochure ?

Un bref historique permettra de répondre à cette question.

En 1990, l'IREM publie une brochure que je ne saurais trop conseiller tant aux professeurs de lycée qu'aux collègues préparant le Capes interne et l'Agrégation interne "De la géométrie tous azimuts".

Le problème de "la fourmi et de la confiture" me séduit. Revenant au cylindre, j'essaie de traiter ce problème pour les étudiants de Deug  $A_2$  (dans le chapitre courbes paramétrées). Les problèmes topologiques surviennent alors.

Développer, faire un patron ne me semblent plus si évidents !

Lors d'une session de formation de formateurs IREM, une discussion sur le développement du cylindre puis sur le patron d'un escalier pour une classe de 5<sup>ème</sup> me confirme dans mes questions. Une correspondance entre les auteurs de la brochure et moi-même (plus des dessins sur une table de restaurant) me font penser qu'il serait intéressant d'étudier le cylindre et le cercle sous l'angle topologique pour des collègues du secondaire.

Quelle ne fut pas en effet ma joie que de mettre en relation la paresse d'une fourmi et les revêtements de Poincaré ! !

Il est temps d'exposer l'enjeu mathématique ! Peut-on traiter des courbes en général sur un cylindre grâce au développement sur un rectangle ? Ma prétention est de montrer que non. Il faut "dérouler" le cylindre sur un "tapis infini". Les collègues et plus particulièrement ceux qui préparent l'agrégation interne, en lisant cette brochure, auront-ils "mieux compris" le cercle et le cylindre, glané quelques idées pour des leçons style "action de groupes", compris l'origine du problème d'agrégation interne sur les rotations (Problème de Poincaré !!) ? C'est en tout cas le but de ce modeste travail ! Mes remerciements chaleureux à J. VENARD et B. MARQUIS



## Décrivons le problème mathématique que nous pose la fourmi et polémiquons en toute amitié

Soit  $\mathcal{S}$  la surface "cylindre du verre".

Pour pouvoir parler sans trop de sophistication de "plus court chemin" cad de longueur, je supposerai que tout chemin possible suivi par la fourmi est, par morceaux, différentiable.

Je considérerai donc  $\mathcal{C}$  l'ensemble de tels chemins sur  $\mathcal{S}$ , d'origine  $F$  ; d'extrémité  $C$  et touchant au moins une fois le bord supérieur.

Le problème est formellement le suivant : Trouver une (ou plusieurs) courbe  $C_0$  de  $\mathcal{C}$  telle  $l(C_0) \leq l(C)$  pour toute courbe  $C$  de  $\mathcal{C}$  ? (problème I)

Suivons la pensée des auteurs : opérons un développement (ou prenons des ciseaux) ; le cylindre se développe sur un rectangle ;  $F$  donne 2 points du bord du rectangle  $F_0$  et  $F_1$  (si l'on a coupé sur la génératrice de  $F$ ) ;  $C$  donne (si l'on suppose qu'il n'est pas sur la dite génératrice)  $C_0$ .

"L'opération développement conservant les distances", le problème deviendrait un problème plan.

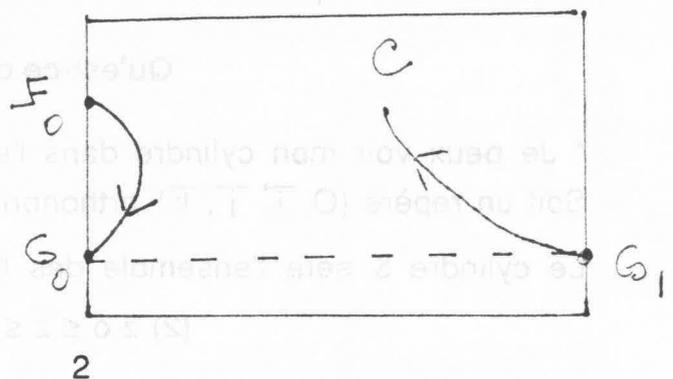
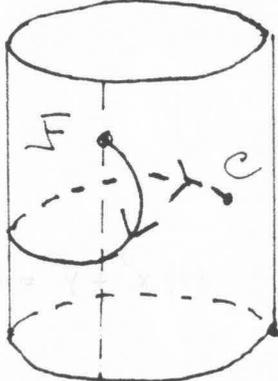
Soit  $\mathcal{C}'$  l'ensemble des courbes différentiables par morceaux d'origine  $F_0$  (ou  $F_1$  !), d'extrémité  $C_0$ , touchant le bord supérieur du rectangle.

Dire "cela devient un problème plan" reviendrait à dire que résoudre le problème I revient à résoudre le problème II.

Problème II : Trouver une courbe  $C_0$  de  $\mathcal{C}'$  telle que  $l(C_0) \leq l(C)$  pour toute courbe  $C$  de  $\mathcal{C}'$ . Ce "revient" pose plusieurs questions :

Question n° 1 : quand je "développe" une courbe de  $\mathcal{C}$ , ai-je une courbe de  $\mathcal{C}'$  ?

Eh, non ! le dessin suivant nous éclairera.



Ou... la courbe développée n'est pas forcément continue ?

Il ne s'agit plus de géométrie élémentaire mais en fait de topologie différentielle.

Continuité : Nous venons en fait de voir "qu'un développement ne respecte pas la continuité !"

Nous pourrions nous "en sortir" en convenant que j'ai dans  $\mathcal{C}'$  des courbes du type précédent. Mais ceci n'aurait de sens que si les courbes de  $\mathcal{C}$  coupent la génératrice de  $F$  en un nombre fini de points. Admettons !

Réfléchissons à ce qui vient de se passer.

J'ai parlé de courbes et de leurs longueurs !

Question n° 2 : la "développée" d'une courbe a-t-elle la même longueur ?

Oui, m'a-t-on répondu : "parce que le cylindre est une surface développée". Objection, Votre Honneur ! Une surface développable n'est que localement isométrique à une partie du plan !!

Nous reviendrons plus loin sur la nature spécifique du cylindre pour résoudre cette question.

Question n° 3 "revient à" veut dire de façon implicite qu'il y a une bijection entre les courbes de  $\mathcal{C}$  et celles de  $\mathcal{C}'$ .

Or ceci est faux. Si je n'accepte pas des lignes discontinues.

Alors, comment s'en sortir ?

Si je veux rester au niveau élémentaire, je restreins le problème. Intuitivement, une fourmi intelligente qui veut se fatiguer le moins possible décide de rester dans un demi-cylindre qui contient  $\mathcal{C}$  ! Il n'y a donc plus de problèmes de coupure et... mieux, il y a effectivement une bijection entre les courbes de  $\mathcal{C}$  et celles de  $\mathcal{C}'$ . De plus la bijection conserve les longueurs. Je peux donc raisonner dans le plan et le résultat est JUSTE !

Mais comment montrer le plus rigoureusement possible cette bijection ?

J'avoue ne pas résister à la tentation d'étudier plus à fond le cylindre, et ses courbes paramétrées.

### Qu'est-ce donc un cylindre

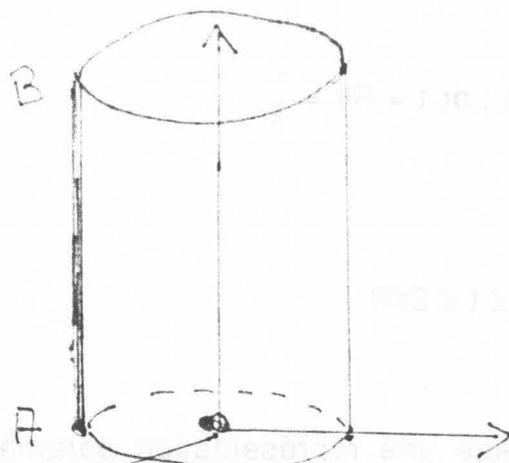
\* Je peux voir mon cylindre dans l'espace.

Soit un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  orthonormé.

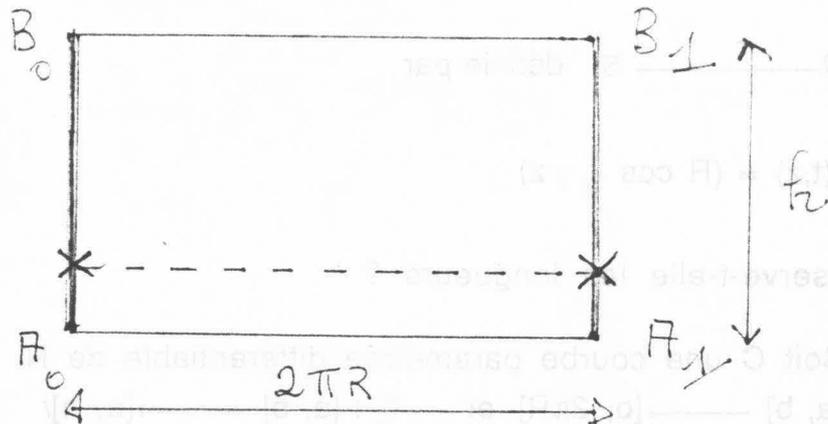
Le cylindre  $\mathcal{S}$  sera l'ensemble des  $(x, y, z)$  vérifiant

$$(1) x^2 + y^2 = R^2$$

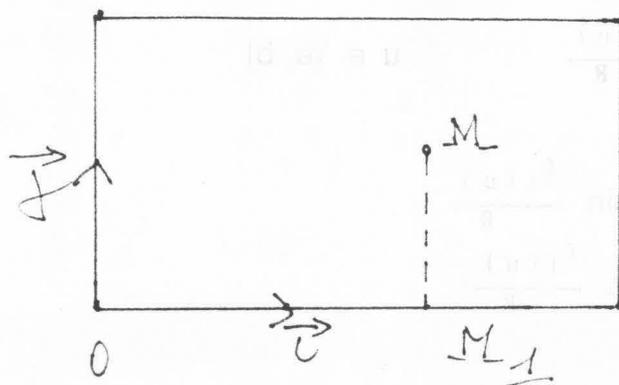
$$(2) z_0 \leq z \leq h$$



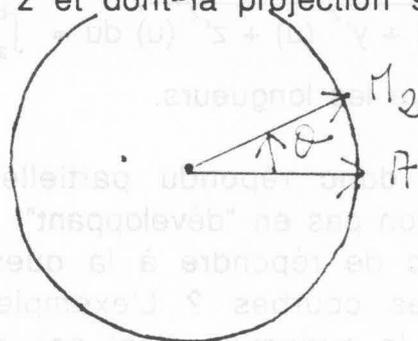
\* Je peux aussi dire que j'ai recollé un rectangle de base  $2\pi R$ , de hauteur  $h$ .



Dans un langage plus pompeux, j'identifie les points des 2 segments surlignés qui sont à la même côte et le cylindre est un espace-quotient !  
Supposons un repère installé sur les bords du rectangle



Un point  $M$  de coordonnées  $(t, z)$  devient après recollement le point du cylindre qui a pour côté  $z$  et dont-la projection sur le cercle de base est  $M_2$ .



La longueur  $AM_2$  est  $t$  ; or  $t = R\theta = \frac{t}{R}$  .

M a pour coordonnées

$$x = R \cos \frac{t}{R}$$

$$y = R \sin \frac{t}{R} \quad 0 \leq t \leq 2\pi R$$

$$z = z$$

Nous avons au passage une représentation paramétrique de  $\mathcal{S}$  et nous pouvons codifier le recollement. Si  $R$  est le rectangle, nous avons

$R \xrightarrow{r} \mathcal{S}$  définie par

$$r(t,z) = (R \cos \frac{t}{R}, z)$$

$r$  conserve-t-elle les longueurs ?

Soit  $C$  une courbe paramétrée différentiable de  $R$ , définie par  $f_1 : [a, b] \longrightarrow [0, 2\pi R]$  et  $f_2 : [a, b] \longrightarrow [0, h]$

$C'$  la "courbe recollée" est définie par :

$$x(u) = R \cos \frac{f_1(u)}{R}$$

$$y(u) = R \sin \frac{f_1(u)}{R} \quad u \in [a, b]$$

$$z(u) = f_2(u)$$

$$x'(u) = -f_1'(u) \sin \frac{f_1(u)}{R}$$

$$y'(u) = f_1'(u) \cos \frac{f_1(u)}{R}$$

$$z'(u) = f_2'(u)$$

$$x'^2(u) + y'^2(u) + z'^2(u) = f_1'^2(u) + f_2'^2(u)$$

$$l(C') = \int_a^b \sqrt{x'^2(u) + y'^2(u) + z'^2(u)} du = \int_a^b \sqrt{f_1'^2(u) + f_2'^2(u)} du \text{ ou } l(C') = l(C) \text{ ou } r \text{ conserve les longueurs.}$$

Nous avons donc répondu partiellement à la question n° 2, en "enveloppant" et non pas en "développant".

Tentons donc de répondre à la question n° 3 :  $r$  réalise-t-elle une bijection entre les courbes ? L'exemple de la question n° 1 montre intuitivement que la surjection n'est pas réalisée.

Mais nous commençons à mieux voir le problème : J'ai une courbe sur  $\mathcal{S}$  (cad 3 fonctions d'un paramètre  $u$ ,  $f_1, f_2, f_3$ ).  $f_1^2(u) + f_2^2(u) = R^2$  et  $f_3(u) \leq h$

Existe-t-il  $g_1, g_2$  telles que

$$f_1(u) = R \cos \frac{g_1(u)}{R} \quad (1)$$

$$f_2(u) = R \sin \frac{g_1(u)}{R} \quad (2)$$

$$f_3(u) = g_2(u) \quad (3)$$

Nous n'avons à étudier que (1) et (2).

Notre problème est donc un problème sur le cercle de base.

C'est un problème de détermination continue d'angle.

### Etudions donc le cercle (Notons le (C))

En recollant le cylindre, nous avons en fait recollé le segment  $[0, 2\pi R]$ .  
Nous avons  $r' : [0, 2\pi R] \longrightarrow (C)$

$$r'(t) = R \cos \frac{t}{R}, R \sin \frac{t}{R}.$$

Pourquoi se borner à  $[0, 2\pi R]$  ? Prolongeons  $r'$  sur tout  $\mathbb{R}$  et appelons son prolongement  $\exp$  (comme exponentielle complexe !).

$$\exp(t) : R \cos \frac{t}{R}, R \sin \frac{t}{R} ; t \in \mathbb{R}.$$

Nous allons avoir une vision "nouvelle" du cercle. Considérons  $\mathbb{R}$  installé sur un cylindre infini pour comprendre ce qui se passe. Nous enrulerons  $\mathbb{R}$  suivant une hélice circulaire et l'opération exponentielle est alors la projection.

Nous verrons plus loin les merveilles héritées de cette situation.

Mais revenons aux courbes paramétrées de (C).  
 $\exp$ , comme  $r$  et  $r'$  conserve les longueurs de façon évidente.

Soit  $D = \exp(B)$ . Soit  $D$  un point de  $\mathbb{R}$ . J'affirme que le résultat fantastique suivant est vrai

**$\exp$  établit une bijection entre les courbes paramétrées de  $\mathbb{R}$  d'origine  $B$  et celles de (C) d'origine  $D$ .**

La démonstration qui suit ne requiert que peu de connaissances. C'est un "quasi-démarquage" d'une démonstration de Lelong-Ferrand-Arnaudrès (tome 3).

\* Montrons que  $\exp$  établit une injection

Soit  $(C_1)$  définie par  $f_1 : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$

$(C_2)$  définie par  $f_2 : [a', b'] \longrightarrow \mathbf{R}$ .

Je peux supposer via un changement affine de variable que  $a = a'$  et  $b = b'$ .

Je suppose donc que  $\exp f_1 = \exp f_2$

ou pour tout  $u$  de  $[a, b]$ ,  $\cos \frac{f_1(u)}{R} = \cos \frac{f_2(u)}{R}$

$$\sin \frac{f_1(u)}{R} = \sin \frac{f_2(u)}{R}.$$

Il existe donc un  $n$  de  $\mathbf{Z}$  (qui dépend de  $u$ ) tel que

$$f_1(u) = f_2(u) + 2\pi R n(u)$$

La fonction  $n : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$  est continue car  $f_1$  et  $f_2$  le sont.

Or...  $n(u) \in \mathbf{Z}$  et  $\mathbf{Z}$  est discret dans  $\mathbf{R}$ .

Toute fonction continue de  $[a, b]$  dans  $\mathbf{Z}$  est constante !

$n(u) = n(a) \quad \forall u$

$$\text{or } n(a) = \frac{1}{2\pi R} [f_1(a) - f_2(a)]$$

$$f_1(a) = f_2(a) = B$$

ou  $n(u) = 0 \quad \forall u$  et  $f_1 = f_2$

$(C_1)$  est bien égale à  $(C_2)$ .

Montrons la surjection :  $g_1$  et  $g_2 : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$

vérifiant  $g_1^2(t) + g_2^2(t) = R^2$  telles que  $g_1(a), g_2(a) = D$ .

Nous avons à trouver  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$

vérifiant (1)  $f(a) = B$

$$(2) R \cos \frac{f(t)}{R} = g_1(t)$$

$$(3) R \sin \frac{f(t)}{R} = g_2(t)$$

Supposons que nous avons trouvé  $f$  vérifiant (2) et (3).

Comme  $\exp(B) = D$ ,  $B = f(a) + 2k\pi$  pour un certain  $k$ .

Posons alors  $h(t) = f(t) + 2k\pi$ ; alors  $h$  vérifie (1), (2) (3).

Résoudre (2) et (3) pour  $R$  quelconque revient à résoudre (2) et (3) pour  $R = 1$ . Posons  $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  par  $G(t) = g_1(t) + ig_2(t)$ . Nous avons à résoudre :

$$e^{if(t)} = G(t). \quad (4)$$

Nous dirons que  $G$  a un relèvement  $f$  sur  $[a, b]$ . Posons  $E = \{t \in [a, b] \text{ tels que } G \text{ a un relèvement sur } [a, t]\}$ . Nous avons finalement à démontrer que  $E = [a, b]$ . Remarquons que  $a \in E$ ;  $E$  a alors une borne supérieure  $c$  ( $c \leq b$ ).

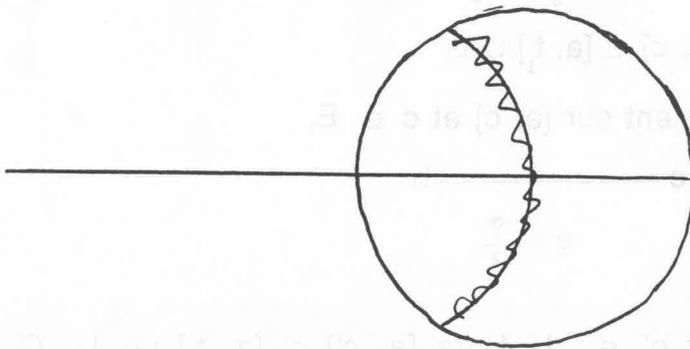
Remarquons que  $|G(t)| = 1 \quad \forall t$  et que  $G$  est uniformément continue. Il existe alors  $\alpha > 0$  tel que  $|t-t'| \leq \alpha$ , nous avons  $|G(t) - G(t')| \leq \frac{1}{2}$  et

$$\left| \frac{G(t)}{G(t')} - 1 \right| \leq \frac{1}{2}.$$

Soit  $J = [a, b] \cap [u, u+\alpha]$  pour un réel  $u$  donné.

Supposons  $J \neq \emptyset$ ; soit  $t_0 \in J$ .  $u \xrightarrow{t_0} t \xrightarrow{t} u+\alpha$

Comme  $|t-t_0| \leq \alpha$  si  $t \in J$ ,  $\left| \frac{G(t)}{G(t_0)} - 1 \right| \leq \frac{1}{2}$ .



$\frac{G(t)}{G(t_0)}$  se promenant sur l'arc de cercle hachuré, la détermination

principale du  $\text{Log} \frac{G(t)}{G(t_0)}$  existe ou il existe une fonction continue  $\theta : J \rightarrow \mathbb{R}$

telle que  $\text{Log} \frac{G(t)}{G(t_0)} = i\theta(t)$ .

Je prends au hasard  $u_0$  tel que  $e^{iu_0} = G(t_0)$

Posons  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  par  $f(t) = u_0 + \theta(t)$

$$e^{if(t)} = e^{iu_0} \times e^{i\theta(t)} = G(t_0) \times \frac{G(t)}{G(t_0)} = G(t)$$

f est donc un relèvement de G sur j.

Prenons l'intervalle J pour  $u = 0$  ; G a donc un relèvement sur un intervalle  $[a ; a + \beta]$  ( $\beta > 0$ ) et  $c > a$ .

Soit J' l'intervalle pour  $u = c - \frac{\alpha}{2}$ . Il existe  $t_1$  dans J tel que  $a < t_1 < c$ .

D'après la définition de la borne supérieure,  $t_1 \in E$  ou G a un relèvement  $f_1$  au-dessus de  $[a, t_1]$ . Mais nous avons vu que G a un relèvement  $f_2$  sur J'.

Observons que  $f_1(t_1) = f_2(t_1) + 2k\pi$ .

Posons  $f_3(t) = f_1(t) - 2k\pi$ .

Soient  $f_3$  et  $f_2$  les restrictions de  $f_3$  et  $f_1$  à  $J \cap [a, t_0]$   $\overline{f_3}(t_1) = f_1(t_1) - 2k\pi = \overline{f_2}(t_1)$ .

$\overline{f_3}$  et  $\overline{f_2}$  sont 2 relèvements de G qui ont même valeur en  $t_1$ . En répétant l'argument utilisé pour l'injection, l'on a  $\overline{f_3} = \overline{f_2}$ .

Je peux donc définir (via  $f_3$  et  $f_2$ ), un relèvement f de  $[a, t_1] \cup J$ .

Remarquons que  $[a, c] \subset [a, t_1] \cup J$ .

G a donc un relèvement sur  $[a, c]$  et  $c \in E$ .

Supposons  $c < b$



Il existe alors  $c' > c$  et  $c' \in J$ . Alors  $[a, c'] \subset [a, t_1] \cup J$ . G a donc un relèvement sur  $[a, c']$  et  $c' \in E$ ; c ne serait plus la borne supérieure. Nous avons donc  $c = b$  et G a un relèvement sur  $[a, b]$ .

Observons encore que si  $g_1, g_2$  sont dérivables, nous pouvons ajouter dans toute la démonstration "f dérivable" [ $\theta$  étant dérivable].

Remarquons que notre démonstration nous permet d'affirmer un résultat sur les courbes de classe  $c^2$  dans le plan : soit (c) une courbe de classe  $c^2$  paramétrée par son abscisse curviligne ;  $\vec{t}(s)$  le vecteur tangent (en 1 point non stationnaire) est de longueur 1.

D'après ce qui précède, il existe  $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbf{R}$  vérifiant  $\alpha(0) = \overline{T}, \overline{t}(s)$ . Cet angle (continu) intervient dans la notion de courbure.  $R$ , le rayon de courbure peut être défini par son inverse :  $\frac{1}{R} = \alpha'(s)$ . (L'on mémorise par  $R = \frac{ds}{d\alpha}$ ).

### Revenons à notre problème des courbes du cylindre

Le segment  $[0, 2\pi R]$  étant remplacé par  $\mathbf{R}$ , notre rectangle  $R$  sera remplacé par  $\mathbf{R} \times [0, h]$ .

Nous avons maintenant  $e$  (e comme enroulement) de  $\mathbf{R} \times [0, h]$  vers  $\mathcal{S}$  où  $e(t, z) = \exp(t), z$ . Il est maintenant quasi-évident de voir que  $e$  établit une bijection entre les courbes paramétrées de  $\mathbf{R} \times [0, h]$  d'origine  $A_0$  et celles de  $\mathcal{S}$  d'origine  $e(A_0)$ . De plus  $e$  conserve les longueurs.

Soit  $F_0$  un point de  $\mathbf{R} \times [0, h]$  (p. ex  $(0, h_0)$ ) un point tel que  $F = \exp F_0$ .

Examinons les points qui "s'enroulent" sur  $C$ .

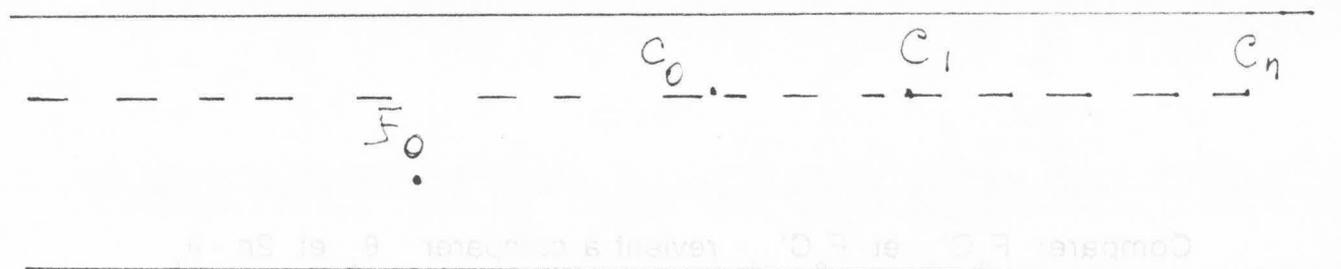
Choisissons  $\theta_1 (\theta_1 \in [0, 2\pi[)$  tel que  $C = (R \cos \theta_1, R \sin \theta_1, h_1)$ .

Tous les points qui s'enroulent sur  $C$  sont les points de  $\mathbf{R} \times [0, h]$ , de la forme  $R(\theta_1 + 2\pi n); h_1$  quand  $n$  parcourt  $\mathbf{Z}$ .

Posons  $C_n = R(\theta_1 + 2\pi n); h_1$ .

Une courbe de  $\mathbf{R} \times [0, h]$  dont l'enroulée a pour extrémité  $C$  est une courbe dont l'extrémité est un des points  $C_n$ .

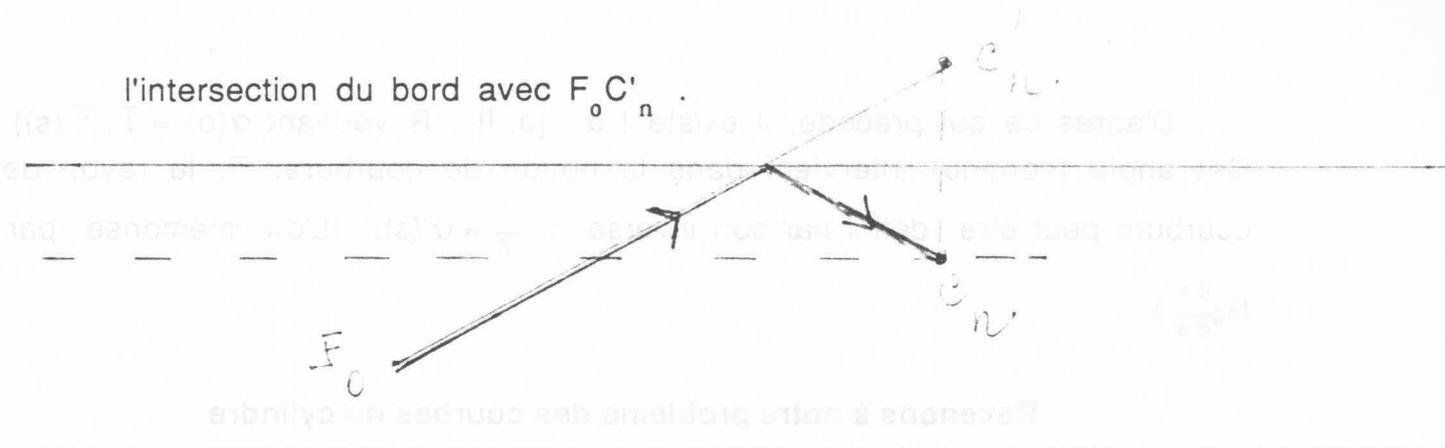
Je peux maintenant affirmer sans états d'âme que résoudre le problème de la fourmi consiste à optimiser les courbes de  $\mathbf{R} \times [0, h]$  d'origine  $F_0$ , d'extrémité  $C_n$  et touchant le bord supérieur du "tapis".



J'optimise tout d'abord pour les courbes d'extrémité  $C_n$ ,  $n$  étant fixé.

Soit  $C'_n$  le symétrique de  $C_n$  par rapport au bord supérieur et soit  $B_n$

l'intersection du bord avec  $F_0 C'_n$ .



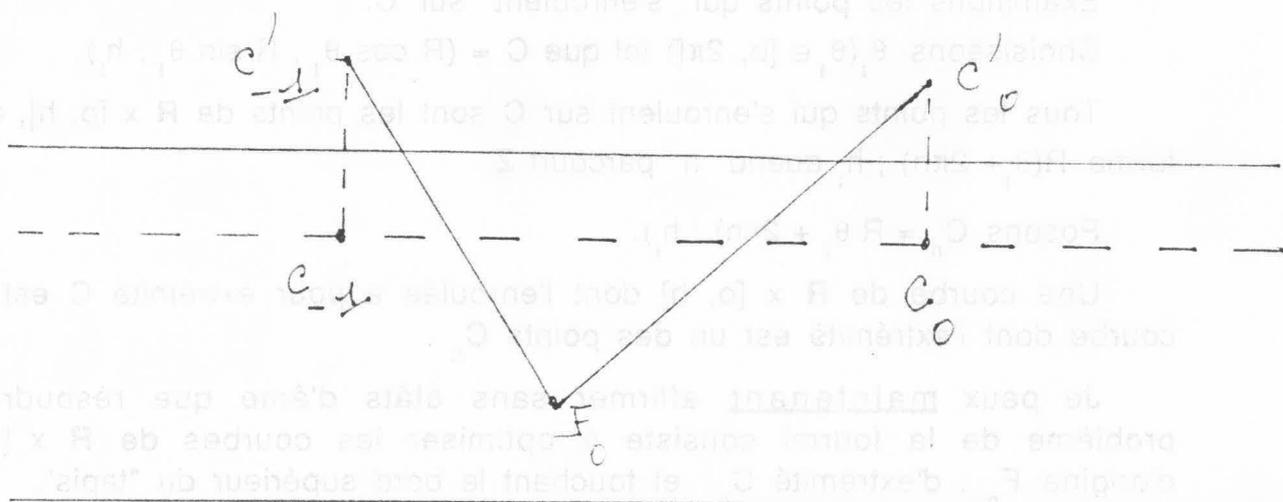
La courbe surlignée que je noterai  $(C_n)$  réalise l'optimisation.

Quelle est donc la plus courte de ces courbes quand  $n$  varie. Il est quasi évident que  $l(C_n) \geq l(C_0)$  quand  $n \geq 0$

$$l(C_n) \geq l(C_{-1}) \text{ quand } n \leq -1$$

Il nous faut donc comparer  $l(C_0)$  et  $l(C_{-1})$

$$\text{Or } l(C_0) = F_0 C'_0 \quad l(C_{-1}) = F_0 C'_{-1}$$



Comparer  $F_0 C'_0$  et  $F_0 C'_{-1}$  revient à comparer  $\theta_1$  et  $2\pi - \theta_1$

1er cas

$$\theta_1 < 2\pi - \theta_1$$

$$(\text{ou } \theta_1 < \pi)$$

La courbe optimale est  $(C_0)$

### 2ème cas

$$\theta_1 > 2\pi - \theta_1$$

$$(\text{ou } \theta_1 > \pi)$$

La courbe optimale est  $(C_{-1})$

### 3ème cas

$$\theta_1 = 2\pi - \theta_1$$

$$(\text{ou } \theta_1 = \pi)$$

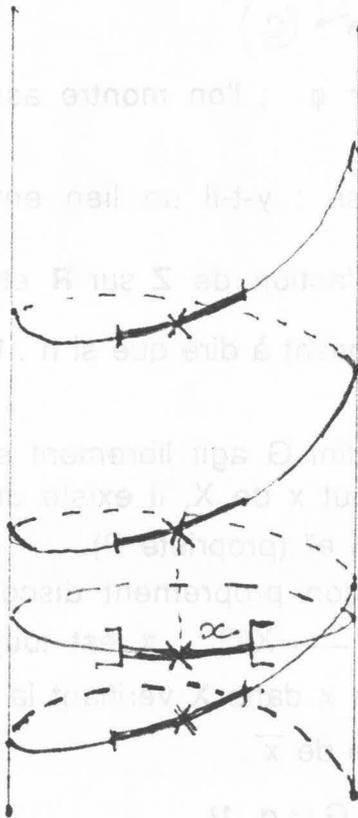
Les 2 courbes  $(C_0)$  et  $(C_{-1})$  sont optimales

Remarquons que cette discussion confirme l'intelligence de la fourmi qui ne voulait pas s'aventurer hors d'un 1/2 cylindre et confirme aussi... la justesse du résultat annoncé !

Remarquons aussi que en transformant un segment en un arc d'hélice circulaire, le trajet minimal de notre fourmi est la juxtaposition de 2 arcs d'hélice.

### **Quelques mots sur l'exponentielle et les revêtements**

Revenons au dessin



Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Je prends un petit "intervalle" sur le cercle entourant  $x$ .

Nommons le  $U$ . Regardons ce qui se passe au-dessus de  $U$  ;  $\exp^{-1}(x)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  et  $\exp^{-1}(U) =$  une somme disjointe de  $U_n$ . Les  $U_n$  sont tous homéomorphes entre eux et  $\exp : U_n \rightarrow U$  est un homéomorphisme.

Cette propriété en fait le prototype des "revêtements" inventés par H. Poincaré.

Le "résultat" fantastique sur les courbes paramétrées se généralise en fait pour les revêtements.

Je soupçonne H. Poincaré, non pas d'avoir aidé une fourmi, mais d'avoir raisonné en termes de courbes paramétrées pour inventer ses revêtements.

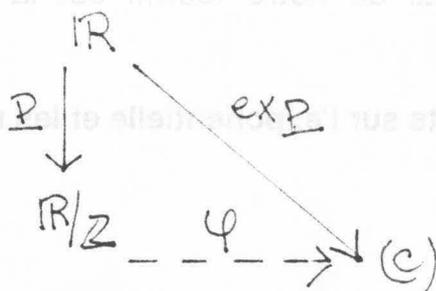
Revenons à l'exponentielle ;  $\exp(t + 2\pi Rn) = \exp(t)$ .

Ajouter  $2\pi Rn$  mérite donc une étude !

Je peux de façon abstraite considérer que j'ai une action de  $Z$  sur  $R$  par :  $n \cdot t = t + 2\pi Rn$ .

J'appelle  $R/Z$  l'espace quotient

J'ai



L'exponentielle se factorise par  $\varphi$  ; l'on montre assez facilement que  $\varphi$  est un homéomorphisme.

Dès lors, une question se pose : y-t-il un lien entre revêtements et action de groupes ?

Examinons plus attentivement l'action de  $Z$  sur  $R$  et revenons aux  $U_n$ .

$U_n = n \cdot U_0$ . La disjonction des  $U_n$  revient à dire que si  $n \cdot U_0 \cap U_0 \neq \emptyset$ , alors  $n = 0$  !!

Remarquons que si un groupe fini  $G$  agit librement sur  $X$  séparé, nous avons la propriété suivante : pour tout  $x$  de  $X$ , il existe un voisinage  $V$  de  $x$  vérifiant : "si  $g \cdot V \cap V \neq \emptyset$ , alors  $g = e$ " (propriété P).

Nous dirons que  $G$  agit de façon proprement discontinue sur  $X$  si la propriété (p) est vérifiée. Soit  $\pi : X \rightarrow X/G$  ;  $\pi$  est toujours ouverte. Soit  $\bar{x}$  dans  $X/G$  ; et soit  $V$  voisinage de  $x$  dans  $X$  vérifiant la propriété (P).

Posons  $U = \pi(V)$   $U$  est voisinage de  $\bar{x}$ .

Examinons  $\pi^{-1}(U)$  ;  $\pi^{-1}(U) = g \in G \cup g \cdot V$ .

La propriété P nous assure que les  $g \cdot V$  sont tous disjoints et que  $\pi : V \rightarrow U$  est un homéomorphisme.

$\pi$  a donc les qualités requises pour obtenir le nom de revêtement.

Prenons  $G = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  et  $X = S^n$  (la sphère unité de  $\mathbf{R}^{n+1}$ ) et l'action définie par  $1 \cdot x = x$ ,  $2 \cdot x = -x$ . Rappelons que  $\mathbf{RP}(n)$  (l'espace projectif réel de dimension  $n$ ) est  $\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}/\mathcal{R}$  où  $x \mathcal{R} x'$  ssi  $x = \lambda x'$ . Il est facile de voir  $\mathbf{RP}(n)$  est isomorphe à  $S^n/G$ .

Etudier les courbes paramétrées de  $\mathbf{RP}(n)$  reviendra donc à étudier celles de  $S^n$  !!

Prenons comme cas particulier  $n = 3$ .

Le célèbre problème des quaternions nous fournit une structure de groupe sur  $S^3$ , un morphisme de groupes  $\varphi$  de  $S^3$  vers  $\text{So}(3)$  qui a pour noyau  $N = \{e; -e\}$ .  $\varphi$  s'avère être continue et surjective.  $N$  est isomorphe à  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  et les actions de  $N$  (sur le groupe  $S^3$ ) et de  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  sur la sphère  $S^3$  sont "les mêmes".

Nous avons un magnifique résultat :

- $\text{So}(3)$  est homéomorphe à  $\mathbf{RP}(3)$
- $\varphi$  est un revêtement.

Ajoutons pour finir que  $\mathbf{R}$  et  $S^3$  sont baptisés de surcroît revêtements universels respectivement du cercle et de  $\text{So}(3)$ .

## Public

- Professeurs de collège et de lycée, en particulier ceux qui préparent l'agrégation interne.

- Etudiants à l'IUFM.

## Mots-clés

- Courbes paramétrées.
- Développement.
- Exponentielle complexe.
- Revêtement.

